Modelagem do problema de programação de bebidas baseado em um modelo do tipo ATSP

Deisemara Ferreira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro, UFTM;
Departamento de Engenharias
Rua Frei Paulino, 30, 38025-180, Uberaba, MG
deisemara@icte.uftm.edu.br

Alistair R. Clark
University of the West of England, Bristol Institute of Technology,
Frenchay Campus, Coldharbour Lane, Bristol, BS16 1QY, England;
alistair.Clark@uwe.ac.uk

Bernardo Almada-Lobo
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto,
Rua Dr. Roberto Frias s/n, Porto 4200-465, Portugal,
almada.lobo@fe.up.pt

Reinaldo Morabito
Universidade Federal de São Carlos, UFSCar;
Departamento de Engenharia de Produção
Rod. Washington Luís - Km 235; 13565-905, São Carlos, SP
morabito@power.ufscar.br

Resumo
Apresentamos neste trabalho uma estratégia baseada em um modelo do caixeiro viajante assimétrico, modelo ATSP (*Asymmetric travelling salesman problem*) para a programação da produção de bebidas. A estratégia é comparada a uma modelagem onde o sequenciamento é feito pela divisão do período em períodos menores, Ferreira *et al.* (2009a). Os experimentos computacionais realizados com instâncias baseadas em dados reais indicam que o modelo proposto é competitivo.

Palavras-chave: Modelos integrados de dimensionamento e sequenciamento da produção. Problema do caixeiro viajante assimétrico. Programação inteira mista.

Abstract
In this work we present a strategy based on the asymmetric travelling salesman problem, ATSP model, to define de soft drink programming. The strategy is compared with a model in which the sequencing is defined dividing the period in micro-periods Ferreira *et al.* (2009a). The computational tests with instances based on real data show that the proposed model is competitive.

Keywords: Integrated lot sizing and scheduling problems, Asymmetric Travelling Salesman problem, Mixed integer programming.

1. Introdução

A programação da produção é uma tarefa importante na rotina de uma fábrica e que pode influenciar o bom andamento do processo produtivo. Em muitos processos produtivos é necessário definir na programação da produção o dimensionamento e o sequenciamento dos lotes, considerar vários fatores como, por exemplo, demanda dos produtos, capacidades de produção, preparo das máquinas, entre outros. Em vários processos produtivos, como na produção bebidas, além destes fatores há a necessidade de programar e sincronizar mais de um estágio da produção, o que torna esta tarefa ainda mais complexa. Além disto, é desejável que o sequenciamento e o dimensionamento dos estágios sejam definidos simultaneamente, uma vez que estas decisões são dependentes uma da outra e ambas podem consumir altos índices de capacidade de produção.

Na literatura sobre modelos integrados de dimensionamento e sequenciamento d produção há trabalhos aplicados à programação da produção de algumas indústrias brasileiras. Alguns exemplos são Araújo *et al.* (2008), Toso *et al.* (2009) e Luche *et al.* (2008) aplicados nos setores de fundição, nutrição animal e grãos eletrofundidos, respectivamente.

Referente ao setor de bebidas, até onde se tomou conhecimento nesta revisão bibliográfica, há os trabalhos de Rangel e Ferreira (2003) e Clark (2003) que apresentam modelos de otimização inteira mista para tratar do dimensionamento de lotes no setor de bebidas. Em Ferreira *et al.* (2008, 2010) foi estudado um problema de dimensionamento e sequenciamento da produção de refrigerantes em uma fábrica de pequeno porte por meio de um modelo de otimização baseado no modelo GLSP (Fleischmann e Meyr, 1997). O modelo considera apenas um estágio de produção, envase da bebida, tratado como gargalo da produção, com uma única linha de envase. Heurísticas do tipo *relax and fix* foram propostas para resolver o modelo. Um caso mais geral do problema considerando dois estágios de produção (preparo do xarope e envase da bebida) foi estudado em Toledo *et al.* (2007, 2008). Foi proposto um modelo de otimização inteira mista que considera a sincronia entre os estágios, que é um aspecto importante em fábricas de médio e grande porte, com várias linhas de envase paralelas. Devido à complexidade e dimensão do modelo, foram propostas abordagens de solução por meio de algoritmos genéticos e meméticos (Toledo *et al.*, 2008).

Em Ferreira *et al.* (2009a) é proposto um modelo de otimização inteira mista, Modelo Dois Estágios Multi-Máquinas (P2EMM), que considera várias linhas de envase em paralelo, sincronia entre os dois estágios de produção (preparo do xarope e envase da bebida) e tempos e custos de troca dependentes da sequência em ambos os estágios. Este modelo admite hipóteses simplificadoras em relação ao modelo proposto em Toledo *et. al.* (2007), como a dedicação de linha a tanque. Para resolvê-lo, é então estudada uma abordagem de solução baseada em uma estratégia de relaxação (ER) do modelo, combinada com heurísticas *relax and fix*. Uma comparação destas abordagens pode ser encontrada em Ferreira *et al.* (2008). Ferreira et al. (2009b) propõem uma reformulação do modelo P2EMM onde o problema dois estágios foi remodelado em um modelo um estágio, modelo R1. Em todos estes trabalhos as modelagens matemáticas utilizam a estrutura de dimensionamento e sequenciamento de lotes, baseada na divisão do período em períodos menores.

Uma forma diferente de sequenciamento aplicada a um problema que possui características em comum com a produção de bebidas com tempos de troca dependentes é o trabalho de Toso *et al.* (2009). Nele uma estratégia para a programação da produção de ração animal é feita baseada na solução de um modelo do caixeiro viajante assimétrico, modelo ATSP (*Assimetric Travelling Salesman Problem*). Esta modelagem que também integra dimensionamento e sequenciamento de lotes foi comparada a um modelo do tipo GLSP e forneceu bons resultados.

No presente trabalho propomos uma formulação baseada na resolução de um modelo do tipo ATSP (*Asymmetric travelling salesman problem*). As soluções fornecidas por este modelo são comparadas a soluções fornecidas pelo modelo proposto por Ferreira *et al.* (2009b), modelo R1.

Na próxima seção deste artigo é descrito resumidamente o processo de produção de refrigerantes. O modelo R1 é apresentado na Seção 3. Na Seção 4 é detalhada a estratégia baseada no modelo ATSP para a programação de bebidas. Os experimentos computacionais realizados com instâncias baseadas em dados reais são analisados na Seção 5. E finalmente, na Seção 6 apresentamos as considerações finais e propostas de trabalhos futuros.

2. Processo de Produção de Refrigerantes

Conforme mencionado, a produção de bebidas possui dois estágios principais que são o preparo do xarope (sabor) e o envase da bebida pronta. O xarope é preparado em tanques especiais que possuem hélices para agitar o líquido. Uma quantidade mínima de xarope, suficiente para cobrir as hélices, deve ser preparada para garantir a homogeneidade do mesmo. Há necessidade de preparar o tanque (limpeza) antes de seu uso. Este preparo é dependente da sequência e ocorre mesmo entre trocas de xaropes de mesmo sabor. O tempo de troca no tanque é então o tempo de limpeza do tanque somado ao tempo de preparar o xarope (mistura dos ingredientes).

Após o preparo, o xarope é enviado para as linhas de envase se estas estiverem prontas. Independente do número de tanques, cada linha de envase recebe xarope de apenas um tanque por vez, porém um tanque pode enviar xarope para mais de uma linha simultaneamente se elas estiverem envasando o mesmo sabor de bebida. O tempo de troca na linha é considerado o tempo de limpeza da linha, se o novo item a ser produzido for de sabor diferente, e/ou ajuste mecânico se o novo item a ser produzido utilizar um vasilhame de tamanho diferente.

Além dos tempos e custos de trocas dependentes da sequência, é necessário considerar a sincronia entre os estágios de preparo de xarope e envase da bebida. Na prática, se o tanque não estiver com o xarope pronto para ser enviado para a linha de envase, esta deve aguardar até que o xarope esteja pronto. Do mesmo modo, o tanque só pode iniciar o envio de xarope para a linha de envase se ela estiver preparada. Assim, podem ocorrer esperas da linha de envase pelo tanque e do tanque pela linha de envase. Uma programação da produção não sincronizada, ou seja, sem a consideração das diferenças entre os tempos de troca dos dois estágios, pode levar a uma programação inviável na prática, uma vez que os tempos de espera podem consumir parte da capacidade de produção (Ferreira *et al.*, 2009a).

3. Modelo R1

No modelo R1 proposto por Ferreira et al. (2009b) o problema de programação de lotes de bebidas dois estágios com sincronia é representado em um único estágio. Para entendê-lo considere os parâmetros número total de refrigerantes (itens); xaropes; linhas de envase (máquinas) e tanques; períodos; sub-períodos (i.e. número total de preparos em cada macro-período) são designados respectivamente pelas letras maiúsculas *J, L, M, T* e *N.*

Sejam os índices definidos como $i, j \in (1,\ldots,J)$ itens; $t \in (1,\ldots,T)$ períodos; $s \in (1,\ldots,N)$ sub-períodos; $k, l \in (1,\ldots,L)$ sabor dos xaropes; $m \in (1,\ldots,M)$ máquinas e tanques; e suponha que os seguintes conjuntos são conhecidos: S_t conjunto dos sub-períodos do período *t*; λ_j conjunto de todas as máquinas que podem produzir o item *j*; α_m conjunto de todos os refrigerantes que podem ser produzidos na máquina *m*; β_m conjunto de todos os xaropes que podem ser preparados no tanque *m*; γ_{ml} conjunto de todos os refrigerantes que podem ser produzidos na máquina *m* e utilizam o xarope *l*.

Considere inicialmente os parâmetros em termos dos dois estágios da produção. Os dados e variáveis com o sobrescrito *I* se referem ao estágio de xaroparia do processo de produção e os com o sobrescrito *II* se referem ao estágio de envase:

Dados

d_{jt} = demanda do item *j* no período *t*;

h_j = custo de estocar o item *j*;

g_j = custo de atrasar a entrega do item *j;*

c_{ij} = custo de fazer a troca do item *i* para *j;*

b_{ij}^{II} = quantidade consumida de tempo para fazer a troca de produção do item *i* para *j*;

b_{kl}^{I} = quantidade consumida de tempo para fazer a troca do xarope *k* para o xarope *l*;

a_{mj} = quantidade consumida de tempo para produção de uma unidade do item *j* na máquina *m*;

K_{mt} = capacidade de tempo disponível na máquina *m* para envase no período *t*;

q_{ls}^{I} = quantidade mínima do xarope *l* a ser preparada nos tanques no sub-período *s*.

Para tratar o problema dois estágios por meio de um modelo mono estágio, analisamos o que ocorre na solução ótima do problema quando ele é tratado pelo modelo P2SMM proposto por Ferreira *et al.* (2009a). Nas soluções ótimas do modelo P2EMM, e também do modelo GLSP, as máquinas (linhas de envase do segundo estágio) se mantém preparadas em sub-períodos ociosos, com o último item produzido. Tendo em vista que os tempos e custos de troca de um item para ele mesmo são nulos nas linhas, este estado de preparo não gera tempos de troca ou custos adicionais para máquinas. No caso do primeiro estágio da produção de bebidas, não é possível fazer o mesmo para os tanques, pois os tempos de troca de um xarope para ele mesmo são sempre positivos. Assim, é necessário ou não mantê-los preparados, como é feito no modelo P2EMM, ou anular os tempos e custos de troca que seriam considerados nos sub-períodos ociosos. Esta é a razão pela qual não é possível sincronizar os dois estágios tomando apenas o máximo entre os tempos de troca de itens nas linhas e tanques. Na reformulação proposta neste trabalho, os tempos e custos são anulados nos sub-períodos ociosos com o auxílio de um novo conjunto de variáveis, o que permite tomar o máximo entre o tempo de troca de bebida na linha e o do xarope utilizado para produzir esta bebida no tanque. Com isto, é possível formular o modelo com apenas um estágio, o que em geral reduz o número total de variáveis e restrições. O modelo reformulado denominado R1 é descrito a seguir.

Variáveis:

I_{jt}^{+} = estoque do item *j* no período *t*;

I_{jt}^{-} = quantidade em atraso do item *j* no período *t*;

x_{mjs} = produção da máquina *m* do item *j* no sub-período *s*;

y_{mjs} = 1 se a linha *m* está preparada para produção do item *j* no sub-período s; 0 caso contrário.

z_{mijs} = 1 se há troca na máquina *m* do item *i* para o item *j* no sub-período s; 0 caso contrário.

v_{mjs} =1 se a máquina está configurada para o item *j* em sub-períodos ocioso; 0 caso contrário.

Esta última variável é utilizada para anular as variáveis de *set up* e troca em períodos onde não há produção, ou seja, em períodos onde os tempos de *set up* e troca não devem ser contabilizados. Os parâmetros de lotes máximos e mínimos dos xaropes são transformados em termos de bebida pronta. Desta forma, UB_{mj} é o lote máximo de refrigerante *j* que se pode envasar com um tanque cheio do xarope, q_{mj} é o mínimo de bebida que se envasa com o lote mínimo de xarope que deve ser preparado. O parâmetro $\bar{b}_{ij}$ é o máximo entre o tempo de troca da linha e o tempo necessário para o preparo do xarope a ser envasado, $\max\left\{b_{ij}^{II}, b_{kl}^{I} : i, j \in \alpha_m, k \in \phi(i) \text{ e } l \in \phi(j)\right\}$, onde $\phi(i)$ é o conjunto do xarope utilizado para preparar a bebida i. Este pré-processamento dos dados de tempos de troca garante a sincronia entre os estágios, pois sempre o maior tempo é considerado evitando que a linha (ou o tanque) comece a envasar (ou enviar xarope) antes que o outro estágio esteja pronto. O modelo R1 é dado a seguir:

Modelo R1

(1) $$Min\ Z=\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}(h_j I_{jt}^{+} + g_j I_{jt}^{-}) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{s\in S_t}\Big(\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m, i\neq j} c_{ij} z_{mijs} + \sum_{j\in\alpha_m} c_{jj}(z_{mjjs} - v_{mjs})\Big)$$

Sujeito a:

(2) $$I_{j(t-1)}^{+} + I_{jt}^{-} + \sum_{m\in\lambda_j}\sum_{s\in S_t} x_{mjs}^{II} = I_{jt}^{+} + I_{j(t-1)}^{-} + d_{jt}, \qquad j=1,\dots,J,\ t=1,\dots,T;$$

(3) $$x_{mjs} \le UB_{mj}(y_{mjs} - v_{mjs}), \qquad m=1,\dots,M,\ j\in\alpha_m\ s=1,\dots,N;$$

(4) $$x_{mjs} \ge q_{mj}(y_{mjs} - v_{mjs}), \qquad m=1,\dots,M,\ j\in\alpha_m\ s=1,\dots,N;$$

(5) $$\sum_{j\in\alpha_m}\sum_{s\in S_t} a_{mj} x_{mjs} + \sum_{s\in S_t}\Big(\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{\substack{j\in\alpha_m\\ j\neq i}} \bar{b}_{ij} z_{mijs} + \sum_{j\in\alpha_m} \bar{b}_{jj}(z_{mjjs} - v_{mjs})\Big) \le K_{mt}, \qquad m=1,\dots,M,\ t=1,\dots,T;$$

(6) $$\sum_{j\in\alpha_m} y_{mjs}^{II} = 1, \qquad m=1,\dots,M,\ s=1,\dots,N;$$

(7) $$v_{mjs} \le v_{mj(s+1)} \qquad m=1,\dots,M,\ j\in\alpha_m, t=1,\dots,T,\ s\in S_t/\{L_t\};$$

(8) $$z_{mjjs} \ge v_{mjs}, \qquad m=1,\dots,M,\ j\in\alpha_m\ s=1,\dots,N;$$

(9) $$z_{mijs} \ge y_{mi(s-1)} + y_{mjs} - 1, \qquad m=1,\dots,M, i, j\in\alpha_m,\ s=1,\dots,N;$$

(10) $$\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m} z_{mijs} \le 1, \qquad m=1,\dots,M,\ s=1,\dots,N;$$

(11) $$I_{jt}^{+},\ I_{jt}^{-} \ge 0;\ x_{mjs},\ z_{mijs} \ge 0;\ v_{mjs}, y_{mjs} = 0/1,\ m=1,\dots,M,\ i \text{ e } j\in\alpha_m\ t=1,\dots,T,\ s\in S_t.$$

A função objetivo (1) minimiza os custos de estoque, atraso e troca. A restrição (2) é a restrição de balanceamento de estoque. As restrições (3) e (4) definem os lotes mínimos e máximos de produção da linha. Se não há produção no sub-período o lote é nulo, porém pela restrição (6) para algum item j a variável de *set up* y_{mjs} é 1, o que implica que a variável v_{mjt} deve assumir valor 1 para que o termo $(y_{mjs} - v_{mjs})$ seja nulo. O mesmo ocorrerá com o termo $(z_{mjjs} - v_{mjs})$ que será nulo evitando a contabilização do tempo de troca na restrição de capacidade (5) e fazendo com que o custo de troca na função objetivo neste sub-período ocioso também seja nulo. A restrição (7) faz com que os sub-períodos ociosos ocorram no fim do período e que a linha sempre esteja preparada para um mesmo item. Esta restrição combinada com a restrição (8) garante que a linha é mantida preparada com o último item produzido. Note que nos sub-períodos ociosos a variável de *setup* y_{mjs} assume valor 1 exatamente para o item j relacionado a variável de troca z_{mjjs}, pois é permitida apenas uma troca por sub-período (restrição (10)), então o único item *j* que satisfará as restrições (7) e (10) é o item *j* da troca z_{mjjs} .As restrições (9) são restrições que controlam as trocas entre sub-períodos e as restrições (11) são o domínio das variáveis.

4. Sequenciamento utilizando uma estratégia de modelos ATSP

A abordagem da Seção anterior, embora retrate o problema e forneça soluções competitivas quando comparadas a soluções do modelo P2SMM, ainda possui um número de variáveis e restrições que pode crescer muito dependendo do número de sub-períodos utilizados nos modelos.

Como citado anteriormente, em Toso et al (2009) é proposta uma estratégia para a programação de ração animal, baseado na solução de um modelo ATSP (*Assimetric Travelling Salesman Problem*). Esta modelagem que também integra dimensionamento e sequenciamento de lotes foi comparada a um modelo do tipo do modelo R1 (sequenciamento por divisão de períodos) e forneceu bons resultados.

No caso da produção de bebidas várias modificações são necessárias para se modelar o problema via modelo ATSP. Os detalhes desta proposta estão a seguir.

4.1 Modelo ATSP para a programação da produção de bebidas – modelo ATSP-DSPB

Considere o seguinte conjunto de variáveis, além das variáveis de estoque e atraso como no modelo anterior:

x'_{mjt} = produção da máquina *m* do item *j* no período *t*;

η_{mjt} = 1 se a máquina *m* está configurada para o item j no início do período t; 0 caso contrário.

ξ_{mjt} = número de vezes que a linha *m* está configurada para produção do item *j* no período *t*.

z'_{mijt} = 1 se há troca na máquina *m* do item *i* para o item *j* no período *t*; 0 caso contrário.

z'_{mjjt} = 0 para $j \in \alpha_m$.

Note que outra forma de interpretar as variáveis η_{mjt} é que elas definem a última configuração da máquina *m* no período *t-1*. Portanto, este conjunto de variáveis não implica que a máquina *m* está produzindo o item *j* no período *t*, elas apenas mantém a informação sobre a configuração no início do período *t*, que equivale à última configuração do período *t-1*.

Através das variáveis η_{mjt} e ξ_{mjs} é possível definir o número de *set ups*. As variáveis ξ_{mjs} são a configuração da máquina *m* para produção do item *j* no período *t*, então quando a primeira configuração η_{mjt} é subtraída o resultado (ξ_{mjs}-η_{mjt}) é o número total de trocas do item *j* na máquina *m* no período *t*.

A soma $\sum_{i \in \alpha_m, i \neq j} z'_{mijt}$ representa o número total de trocas do item *i* para *j*, onde *i* é diferente de *j*, então o termo $(\xi_{mjt} - \eta_{mjt} - \sum_{i \in \alpha_m, i \neq j} z'_{mijt})$ é o número total de trocas do item *j* para *j*.

O modelo completo ATSP-DSPB é dado a seguir:

Modelo ATSP-DSPB

$$(12)\quad Min\ Z=\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}(h_j I_{jt}^{+}+g_j I_{jt}^{-})+\sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j\in\alpha_m}c_{ij}(\xi_{mjt}-\eta_{mjt}-\sum_{i\in\alpha_m,i\neq j}z'_{mijt})+\sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m,i\neq j}c_{ij}z'_{mijt}$$

$$(13)\quad I_{j(t-1)}^{+}+I_{jt}^{-}+\sum_{m=1}^{M}\sum_{s\in S_t}x_{mjt}^{II}=I_{jt}^{+}+I_{j(t-1)}^{-}+d_{jt}\,,\qquad j=1,\ldots,J,\ t=1,\ldots,T;$$

$$(14)\quad \sum_{j\in\alpha_m}a_{mj}x'_{mjt}+\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m}b_{ij}z_{mijt}+\sum_{j\in\alpha_m}\bar{b}_{jj}(\xi_{mjt}-\eta_{mjt}-\sum_{i\in\alpha_m,i\neq j}z'_{mijt})\le K_{mt}\,,\qquad m=1,\ldots,M,\ t=1,\ldots,T;$$

$$(15)\quad \sum_{j\in\alpha_m}\eta_{mjt}=1\,,\qquad m=1,\ldots,M,\ t=1,\ldots,T;$$

$$(16)\quad \eta_{mjt}+\sum_{i}z'_{mijt}=\sum_{k}z'_{mjkt}+\eta_{mj(t+1)}\,,\qquad m=1,\ldots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\ldots,T;$$

$$(17)\quad \xi_{mjt}\le|S_t|(\sum_{i\in\alpha_m}z'_{mijt}+\eta_{mjt})\,,\qquad m=1,\ldots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\ldots,T;$$

$$(18)\quad x'_{mjt}\le UB_{mj}(\xi_{mjt}-\eta_{mjt})\,,\qquad m=1,\ldots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\ldots,T;$$

$$(19)\quad x'_{mjt}\ge q_{mj}(\xi_{mjt}-\eta_{mjt})\,,\qquad m=1,\ldots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\ldots,T;$$

$$(20)\quad \sum_{i\in\alpha_m}z'_{mijt}\le\xi_{mjt}\,,\qquad m=1,\ldots,M,\ j\in\alpha_m\ t=1,\ldots,T;$$

$$(21)\quad \sum_{j\in\alpha_m}\xi_{mjt}\le|S_t|\,,\qquad m=1,\ldots,M,\ t=1,\ldots,T;$$

$$(22)\quad I_{jt}^{+},\ I_{jt}^{-},\ x'_{mjt}\ge0\,,\ \eta_{mjt},\ z'_{mijt}=\{0,1\}\,,\xi_{mjt}\ge0\ \text{e inteiro},\ m=1,\ldots,M,\ i\ \text{e}\ j\in\alpha_m\ t=1,\ldots,T\,.$$

A função objetivo (12) minimiza o estoque total, o atraso e os custos de troca. O termo $\sum_{m=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m,i\neq j}c_{ij}z'_{mijt}$ considera os custos de troca, c_{ij} entre diferentes itens. O termo $(\xi_{mjt}-\eta_{mjt}-\sum_{i\in\alpha_m,i\neq j}z'_{mijt})$ representa o número de trocas do item *j* para *j* como explicado anteriormente. As restrições (13) são de balanceamento de estoque. As restrições (14) são restrições de capacidade. Os tempos de troca são considerados da mesma forma que os custos.

As máquinas estão configuradas pelo menos para um item em cada período, o que é garantido pelas restrições (15). As restrições (16) garantem que na máquina *m* no período *t* o item *j* é o primeiro item configurado para ela, e também caso haja uma troca do item *i* para *j* então necessariamente haverá uma troca do item *j* para outro item *k* a menos que ele seja o último item preparado do período (e será o primeiro item configurado para produção no período (*t+1*).

As restrições (17) são restrições de *set up*, pois se a máquina m não está configurada para produzir o item j no início do período t e não há troca de um item i para j então o número de configurações, variáveis ξ_{mjt}, deve ser 0. Os lotes máximos e mínimos são definidos respectivamente pelas restrições (18) e restrições (19). Além disto, como explicado anteriormente, o termo (ξ_{mjs}-η_{mjt}) é o número total de trocas do item *j* na máquina *m* no período *t*, pelas restrições (19) eles definem também o número de lotes produzidos no período, a restrições (18) garantem que se não houver preparo das máquinas não haverá produção. As restrições (20) irão garantir que se há troca há o preparo da máquina e conseqüentemente (restrição (19)) a produção do item.

Na aplicação estudada, produção de bebidas, há uma limitação no número de lotes de produção de xarope, o que equivale a uma limitação no número de lotes de itens produzidos no período, por esta razão as restrições (21) foram inseridas no modelo. Note que o número máximo de lotes é o número máximo de sub-períodos do modelo R1. As restrições (22) são a definição do domínio das variáveis.

4.2 Eliminação de *subtour*s para o modelo ATSP-DSPB

As soluções fornecidas pelo modelo ATSP- DSPB permitem a geração de *subtour*s. Para eliminá-los foram utilizadas as seguintes inequações testadas em modelos capacitados do tipo ATSP proposto por Menezes et al. (2009). Cada item representa um nó do caminho que se pretende formar. Seja C o conjunto de nós do *subtour*. As restrições de eliminação de *subtour* são:

(23) $$\sum_{j\in\alpha_m} z_{mijt} \le 1 \quad m=1,\dots,M \quad i\in\alpha_m \quad t=1,\dots,T$$

(24) $$\sum_{i\in\alpha_m} z_{mijt} \le 1 \quad m=1,\dots,M \quad j\in\alpha_m \quad t=1,\dots,T$$

(25) $$\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m/C} z_{mijt} + \sum_{j\in C}\eta_{mjt} \ge \sum_{i\in\alpha_m} z_{mikt} \quad m=1,\dots,M,\ k\in C, C\subseteq\alpha_m \ t=1,\dots,T\ .$$

As restrições (23) e (24) garantem que haverá apenas uma troca de um item *i* para outro *j*. Enquanto as restrições (25) eliminam os *subtour*s desconexos. Para todo *subtour* desconexo $\sum_{i\in\alpha_m}\sum_{j\in\alpha_m/C} z_{mijt} = 0$ e $\sum_{j\in C}\eta_{mjt} = 0$ então $0 \ge \sum_{i\in\alpha_m} z_{mikt}$, porém temos que $z_{mikt} = 1$ para $i\in C$ e $k\in C$. Portanto a solução com o *subtour* desconexo não satisfaz a inequação (25).

O processo de eliminação de *subtour* é iterativo, a cada solução ótima do modelo o conjunto C é identificado a inequação é gerada, inserida no modelo que é resolvido novamente até a otimalidade. O processo se repete até que uma solução ótima sem *subtour* seja encontrada.

Das seções 4.1 e 4.2 temos que o modelo utilizado é composto pelas restrições (13) a (25) e a função objetivo (12).

5. Experimentos Computacionais

Para comparar o desempenho do modelo R1 com o modelo ATSP-DSPB foram utilizados 56 exemplares baseados em dados reais de uma empresa de bebidas, envolvendo, porém um número menor de itens e linhas de envase (exemplares relativamente pequenos). A motivação para esta simplificação é comparar as soluções ótimas dos modelos. Resulta-se que em exemplares realistas é difícil encontrar soluções ótimas com estes modelos em tempos aceitáveis. Os exemplares E1 a E28 possuem 1 linha de envase, para 4 bebidas, com 2 xaropes diferentes. A programação é para 3 períodos. Os exemplares E29 a E56 são os mesmos exemplares porem considerando 2 linhas de envase. No caso do modelo R1 é necessário definir o número de sub-períodos, este número também é utilizado no modelo ATSP-DSPB como limitante superior nas restrições (17) e (21). Cada período possui 6 sub-períodos. Os exemplares E8-E14 são baseados nas sete primeiras instâncias, mas a capacidade das linhas foi reduzida. Os exemplares E15 a E21 são baseados nos exemplares E8 a E14, mas nestes exemplares foram considerados custos de troca de xarope, $c_{kl}^{I} > 0$, que nos outros exemplares estavam embutidos nos custos de troca dos itens. Os últimos sete exemplares (22 a 28) são baseados nos exemplares E1 a E7, mas com custos de preparo de xarope como nos exemplares 15 a 21. Como citado acima os exemplares E29 a E56 possuem as mesmas características dos exemplares E1 a E28, mas com duas linhas de envase.

O número de variáveis e restrições de cada modelo é dado na Tabela 1. Os modelos foram implementados na linguagem de modelagem AMPL 10.0 (Fourer *et al.*, 1993) e resolvidos pelo sistema de otimização CPLEX versão 9.0 (ILOG, 2006).

Tabela 1. Número total de variáveis e restrições dos modelos propostos.

Modelo	Inst.	Variáveis	Var. Binárias	Restrições
R1	E1 - E28	1032	288	770
	E29 -E56	528	144	391
ATSP- DSPB	E1 - E28	192	120	90*
	E29-E56	108	72	81*

* As inequações de eliminação de *subtour*s não estão consideradas neste total.

Pela Tabela 1 é possível observar que o número total de variáveis e restrições do modelo ATSP-DSPB é menor que do modelo R1. Foram obtidas as soluções ótimas para todos os exemplares. A Tabela 2 apresenta o tempo para obtenção das soluções, os valores em negrito são os menores tempos obtidos de cada exemplar. Na primeira coluna da Tabela 2 estão apresentados os valores do custo total das soluções ótimas obtidas para cada exemplar.

Tabela 2. Tempos de solução de cada instâncias nos modelos R1 e ATSP-DSPB.

Ex.	Sol. ótima	R1	ATSP DSPB
E1	*291,1*	9	**1**
E2	*297,7*	13	**1**
E3	*308,6*	10	**1**
E4	*311,5*	10	**0**
E5	*294,3*	7	**1**
E6	*304,2*	7	**1**
E7	*248,6*	4	**0**
E8	*1640,2*	19	**1**
E9	*496,3*	13	**0**
E10	*1370,5*	8	**1**
E11	*1013,6*	8	**1**
E12	*2216,3*	11	**0**
E13	*1749,6*	7	**1**
E14	*1241,9*	6	**0**
E15	*5231,0*	2	**0**
E16	*1423, 7*	2	**1**
E17	*3671,1*	9	**2**
E18	*3050,6*	3	**1**
E19	*5171,6*	3	**1**
E20	*4250,1*	3	**1**
E21	*3713,4*	2	**1**
E22	*296,0*	10	**1**
E23	*302,7*	11	**1**
E24	*313,6*	9	**0**
E25	*316,5*	10	**1**
E26	*299,3*	9	**1**
E27	*309,2*	12	**1**
E28	*253,6*	2	**0**

Ex.	Sol. ótima	R1	ATSP DSPB
E29	*257,7*	**207,2**	290,0
E30	*264,3*	**199,9**	1201,0
E31	*275,3*	**117,3**	208,0
E32	*278,2*	**150,3**	1392,0
E33	*260,9*	126,1	**73,0**
E34	*271,0*	**109,4**	137
E35	*215,3*	**60,7**	128
E36	*257,7*	430,3	**57**
E37	*264,3*	137,5	**71**
E38	*345,4*	157,2	**49**
E39	*336,0*	423,4	**106**
E40	*272,5*	250,9	**12**
E41	*354, 7*	82,7	**28**
E42	*215,3*	67,9	**32**
E43	*1.028,1*	61,0	**6**
E44	*347,7*	88,0	**13**
E45	*720,4*	88,0	**14**
E46	*770,9*	151,0	**7**
E47	*658,2*	49,0	**7**
E48	*719,7*	60,0	**10**
E49	*910,6*	53,0	**14**
E50	*267,7*	439,0	**22**
E51	*274,3*	428,0	**97**
E52	*285,3*	260,0	**12**
E53	*288,2*	518,0	**21**
E54	*270,9*	153,0	**17**
E55	*280,9*	83,0	**36**
E56	*225,3*	89,0	**8**

6. Conclusões e perspectivas futuras

Neste trabalho foi apresentada uma formulação, modelo ATSP-DSPB, para o problema de programação de bebidas dois estágios com sincronia baseada em um modelo do tipo ATSP. Esta modelagem foi comparada com uma modelagem da literatura, modelo R1, onde o sequenciamento é feito pela divisão do período em sub-períodos. O número total de variáveis e restrições do modelo ATSP-DSPB nos exemplos testados é reduzido. O tempo para obtenção da solução ótima do modelo ATSP-DSPB é menor do que os tempos necessários para solução do modelo R1 em 50 das 56 instâncias.

Dado o bom desempenho do modelo ATSP-DSPB pretende-se como perspectiva futura testar instâncias de diferentes dimensões, incluindo exemplares realistas de empresas, para os quais é difícil obter soluções ótimas em tempos aceitáveis. Além, de serem pesquisadas outras inequações de eliminação de *subtour*.

Agradecimentos: Os autores agradecem à FAPESP (processo 2008/05372-5) pelo apoio financeiro.

Bibliografia

Almada-Lobo, B., Klabjan, D., Carravilla, M.A., Oliveira, J.F. Multiple machine continuous setup lotsizing with sequence-dependent setups, Computational Optimization and Applications, DOI: 10.1007/s10589-009-9235-8, 2009.

Almada-Lobo, B., Oliveira, J.F., Carravilla, M.A. Production planning and scheduling in the glass container industry: A VNS approach, International Journal of Production Economics, 114, 1, 363-375, 2008.

Araújo, S. A., Arenales, M. N. e Clark, A. R. (2008) Lot-Sizing and Furnace Scheduling in Small Foundries, Computers and Operations Research, 35, 916 - 932.

Clark, A. R. (2003), Hybrid heuristics for planning lot setups and sizes, Computers & Industrial Engineering, 45, 545-562.

Ferreira, D., França, P. M., Kimms, A., Morabito, R., Rangel, S. e Toledo, C. F. M., (2008a) Heuristics and metaheuristics for lot sizing and scheduling in the soft drinks industry: a comparison study, Studies in Computational Intelligence, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 128, 169-210.

Ferreira, D., Morabito, R. e Rangel, S. (2008b), Um modelo de otimização inteira mista e heurísticas relax and fix para a programação da produção de fábricas de refrigerantes de pequeno porte, Produção, 18, 1, 76-88.

Ferreira, D., Morabito, R. e Rangel, S. (2009a), Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem, European Journal of Operational Research, 196 (2), 697-706.

Ferreira, D., Clark A. R., Almada-Lobo, B., Morabito R., (2009b) , Uma reformulação mono estágio de um modelo de programação da produção de bebidas dois estágios com sincronia, *In XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Porto Seguro, Bahia. (Sessão Dirigida).

Fleischmann, B. e **Meyr. H.** (1997) The general lotsizing and scheduling problem, *OR Spektrum*, 19, 11-21.

Fourer, R., Gay, M. D., e Kernighan, B. W., (1993) *AMPL - A Modeling Language for Mathematical Programming*, The Scientific Press, Danvers, Massachusetts.

ILOG (2006) Using the CPLEX Callable Library, Copyright, ILOG.

Luche, J. R., Morabito, R., e Pureza, V., (2008) "Combining process selection and lot sizing models for production scheduling of electrofused grains", aceito para publicação no Asia-Pacific Journal of Operational Research.

Menezes A. A., Clark A. R., Almada-Lobo B., *Capacitated Lotsizing and Scheduling with Sequence-dependent, Period Overlapping and Non Triangular Setups*, 23rd European

Conference on Operational Research, Bonn, July 5 - 8, 2009; versão extendida submetida para publicação.

Rangel, S. e Ferreira, D. (2003), Um Modelo de Dimensionamento de Lotes para uma fábrica de refrigerantes, TEMA – Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 4, 2, 237-246.

Toledo, C. F. M., França, P. M., Morabito, R. e Kimms, A. (2007), Um Modelo de Otimização para o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Programação da Produção em Fábrica de Refrigerantes, Pesquisa Operacional, 27, 155-186.

Toledo, C. F. M., França, P. M., Morabito e R., Kimms, A. (2008), Multi-population genetic algorithm to solve the synchronized and integrated two-level lot sizing and scheduling problem. International Journal of Production Research, 1-23. doi: 10.1080/00207540701675833

Toso, E.V, Morabito, R., e Clark, A. R. (2009) Lot sizing and sequencing optimization at an animal-feed plant, Computers & Industrial Engineering, doi:10.1016/j.cie.2009.02.011.