

IDENTIFICAÇÃO DO MODELO DINÂMICO E CONTROLO DA MOTORIZAÇÃO DE UM ROBOT MÓVEL

André Gustavo Scolari Conceição ^{*,1}
Paulo José Cerqueira Gomes da Costa ^{*}
Antonio Paulo Gomes Mendes Moreira ^{*}

** Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto,
Portugal*

Resumo: A sintetização de equações dinâmicas de um robot móvel podem ser difíceis e provavelmente ineficazes, quando não se possui uma quantificação exacta de características físicas do robot. Além disso, a arquitectura mecânica do robot pode provocar não linearidades no modelo do mesmo, provenientes de perturbações como folgas e atritos, dificultando ainda mais a tarefa de equacionar um modelo para um robot móvel. Este trabalho abordará a identificação de um modelo para o processo (motor + redução + encoder) de um robot móvel. Serão usadas técnicas baseadas em estimadores Mínimos Quadrados e sua variante Variável Instrumental para estimar a respectiva função de transferência.

Keywords: Robot móvel, modelo dinâmico, controlo digital.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho será abordada a identificação do modelo discreto do processo representado na figura 2, que tem a função de relacionar a tensão aplicada aos motores, com as velocidades e acelerações do mesmo. Trata-se de um robot omnidireccional, na figura 1 pode-se verificar a disposição dos quatro motores.

O sistema dinâmico discreto da figura 2 vai ser modelizado como um sistema com uma entrada e uma saída, e que não sofre influência significativa de perturbações. Sendo assim, para representar a dinâmica do sistema vai ser considerado um modelo linear discreto, e para a determinação dos coeficientes deste modelo serão utilizadas técnicas de estimação, como mínimos quadrados e sua

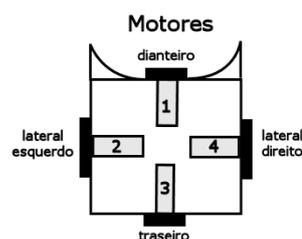


Figura 1. Robot Móvel - motores.

variante Variável Instrumental. A identificação de um modelo para este processo possibilitará projectar e simular controladores de uma forma mais eficiente para tarefas de navegação do robot, como por exemplo o PID discreto implementado no microcontrolador do robot. A partir deste trabalho também será possível partir para um modelo dinâmico completo do robot móvel.

O robot possui uma estrutura de controlo e comunicação com seus periféricos conforme o esquema da figura 3.

¹ Com o apoio do Programa Alban, Programa de bolsas de alto nível da União Europeia para América Latina, bolsa nº E04D028256BR.

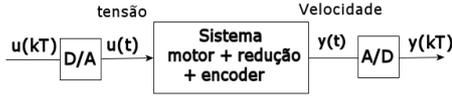


Figura 2. Sistema dinâmico discreto.

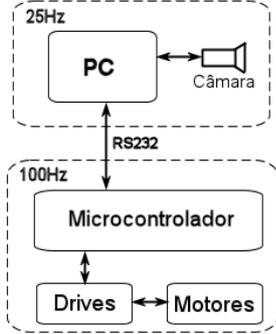


Figura 3. Arquitetura de controlo e comunicação.

O PC controla todas as acções do robot. A comunicação com o microcontrolador é feita através da porta série (RS232), que gera os sinais de controlo dos motores. Os motores são controlados por sinais de PWM (Pulse Width Modulator) que a partir de um Drive de potência gera as tensões na gama de 0 a 24 volts para o funcionamento dos mesmos. O software de controlo no PC, trabalha em uma cadência baseada na frequência da câmara, 25 Hz, resultando em uma taxa de processamento das tarefas do robot de 40ms. Entretanto, no firmware do microcontrolador está implementado um PID discreto que controla a velocidade dos motores, com uma frequência de amostragem de 100Hz, resultando num controle mais eficaz.

2. MODELO DETERMINÍSTICO E MÍNIMOS QUADRADOS

Em geral, sistemas dinâmicos lineares discretos invariantes no tempo podem ser representados por uma equação linear às diferenças de ordem n , relacionando a saída do sistema com as entradas e saídas dos instantes anteriores. Descrevendo o sistema por um modelo entrada-saída (Moreira *et al.*, 2002) (Carvalho, 1993) (Vaccaro, 1995) tem-se

$$y(k) = - \sum_{i=1}^{na} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{nb} b_i u(k-i), \quad (1)$$

sendo $y(k)$ a sequência de saída, $u(k)$ a sequência de entrada e k a variável de tempo do sistema.

Aplicando a transformada Z à equação às diferenças (1) obtém-se

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})}{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n})}, \quad (2)$$

multiplicando ambos os lados por z^n e reorganizando a equação, obtém-se a função de transferência de sistemas discretos no tempo representada por

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (3)$$

sendo o numerador e o denominador definidos respectivamente como

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n, \quad (4)$$

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n. \quad (5)$$

Em sistemas controlados digitalmente, os modelos descritos pela equação (1) são geralmente utilizados para descrever o comportamento dinâmico do processo a controlar entre a entrada do conversor D/A e a saída do conversor A/D, mostrado na figura 2.

Para a estimação de sistemas dinâmicos vamos considerar o modelo estocástico da equação (6), conforme (Goodwin and Payne, 1997) (Moreira *et al.*, 2002)

$$y(k) = H_1(z)u(k) + H_2(z)\xi(k), \quad (6)$$

onde $y(k)$ e $u(k)$ são as sequências de saída e entrada respectivamente, e $\xi(k)$ é a sequência de ruído branco gaussiano com variância σ^2 e média nula. Considerando a situação onde $H_1(z)$ e $H_2(z)$ são parametrizados como $\frac{B(z)}{A(z)}$ e $\frac{1}{A(z)}$ respectivamente, conforme as equações (4) e (5), o modelo da equação (6) pode ser expresso como

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \xi(k) \quad (7)$$

em que q^{-1} é o operador de atraso $q^{-1}y(k) = y(k-1)$, então

$$\begin{aligned} y(k) &= -a_1 y(k-1) \dots - a_n y(k-n) + \dots \\ &\quad b_0 u(k) \dots + b_n u(k-nb) + \xi(k) \\ &= x(k)^T \theta + \xi(k) \end{aligned} \quad (8)$$

onde

$$\theta^T = (a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x(k)^T &= (-y(k-1), \dots, -y(k-n)) \dots \\ &\quad u(k), \dots, u(k-nb). \end{aligned} \quad (10)$$

A equação 8 pode ser escrita na forma vectorial para N amostras, como

$$Y = X\theta + \Xi \quad (11)$$

onde

$$Y^T = [y(1), \dots, y(N)], \quad (12)$$

$$X^T = [x(1), \dots, x(N)], \quad (13)$$

$$\Xi^T = [\xi(1), \dots, \xi(N)]. \quad (14)$$

A equação (11) sugere a aplicação do estimador mínimos quadrados (Goodwin and Payne, 1997), sendo o estimador resultante para θ ,

$$\hat{\theta} = [X^T X]^{-1} X^T Y. \quad (15)$$

3. APLICANDO MÍNIMOS QUADRADOS

Numa primeira etapa aplicou-se o sinal de excitação da figura 4 no processo, obtendo-se a curva de velocidade do motor 1 (frente) em metros por segundo, conforme a figura 5.

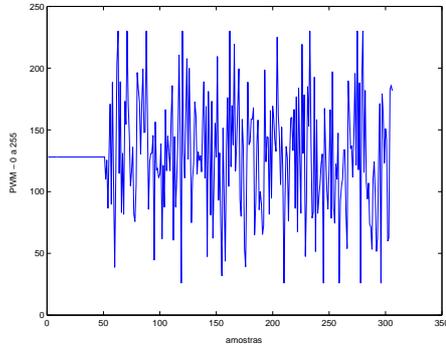


Figura 4. Ruído Branco Gaussiano.

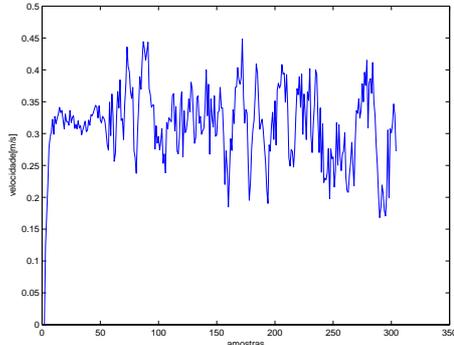


Figura 5. Curva de velocidade do motor 1.

Verifica-se na figura 5 o momento em que o ruído do sinal de excitação começa a actuar na velocidade do motor, a partir da amostra 50. Notam-se também perturbações e algum ruído de medida na etapa anterior à amostra 50, tal deve-se ao facto do sistema estar em malha aberta e qualquer irregularidade do piso ou rodas influenciam a velocidade.

Antes de aplicar os mínimos quadrados é necessário retirar o valor médio da entrada e da saída de modo a que uma entrada nula origine uma saída nula também.

De posse de todas as informações necessárias para efectuar a estimação dos mínimos quadrados, partiu-se para uma segunda etapa, com o objectivo estimar os coeficientes de funções de transferência que representem as características do processo. Foi realizada a estimação para 8 tipos de funções de transferência (FT), de grau 1 até 6. Na tabela 3 apresenta-se o resultado da estimação para as diferentes funções de transferência, assim como o erro da estimação e os valores dos ganhos, pólos e zeros.

Na figura 6 apresenta-se o sinal medido da velocidade do motor 1 do robot e a velocidade estimada com a função de transferência do tipo *FTb*, conforme a tabela 3. O erro apresentado na tabela 3 é calculado pelo MSE (Mean Square Error), definido como

$$MSE() = \frac{\sum_1^N [(\hat{\Phi} - \Phi)^2]}{N}, \quad (16)$$

que calcula a média do quadrado da diferença entre o conjunto de velocidades estimadas ($\hat{\Phi}$)

$$\hat{\Phi} = [\hat{y}(1), \dots, \hat{y}(N)]^T,$$

e o conjunto de velocidades medidas (Φ) dos motores,

$$\Phi = [\bar{y}(1), \dots, \bar{y}(N)]^T.$$

sendo N o numero de amostras.

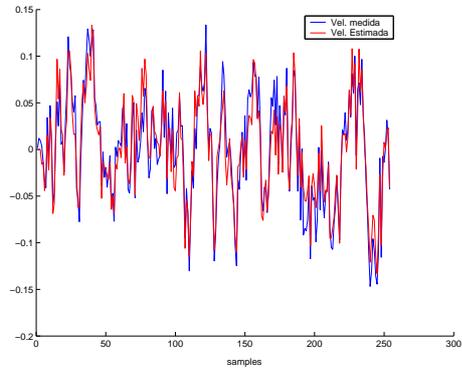


Figura 6. Velocidade medida e estimada com *FTb* - motor 1.

3.1 Validação da Estimativa

Para a validação e escolha do modelo deve-se aplicar um sinal de excitação diferente no processo e na função de transferência estimada com o primeiro conjunto de dados, e calcular o MSE do erro entre as duas curvas de velocidade resultantes. Sendo assim, na tabela 1 e na figura 7 apresentam-se os erros de validação para as diferentes funções de transferência, utilizando um outro sinal de excitação. Na figura 8 apresenta-se

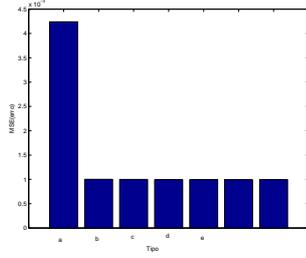


Figura 7. Resultados da validação para as diferentes FTs.

Tipo FT	Grau	MSE(erro)
<i>FTa</i>	1	0.0042402
<i>FTb</i>	2	0.0010013
<i>FTc</i>	2	0.00099887
<i>FTd</i>	3	0.00099609
<i>FTe</i>	4	0.00099436
<i>FTf</i>	5	0.00099183
<i>FTg</i>	6	0.00099442

Tabela 1. Resultados da validação para as diferentes FTs.

as curvas de velocidade medida e simulada para a função de transferência do tipo *FTb*.

A partir dos erros apresentados na validação, verifica-se que a função de transferência do tipo *FTb*, de grau 2, pode representar uma boa aproximação do processo. Esse resultado tem coerência, sendo que o sistema apresentado na figura 2 possui um atraso devido ao "loop" de comunicação, representado pelo pólo na origem. O processo com um motor DC pode ser aproximado por um sistema de primeira ordem, pois pode-se desprezar a indutância do motor devido a constante eléctrica ser muito pequena comparada com a constante mecânica do mesmo (Carvalho, 1993). A FT mais indicada seria a do tipo *FTg*, pois apresentou o menor erro, e a partir da *FTb* o erro começou a aumentar. Mas levando-se em conta que a *FTb* é um sistema mais simples, facilitando o cálculo de controladores em geral, e que a diferença do erro entre a *FTg* e a *FTb* é muito pequena, optou-se pela *FTb*.

A *FTa* não apresentou um resultado satisfatório. A *FTd* foi testada para verificar como se comportaria a estimação com dois atrasos (2 pólos na origem), mas na estimação verificou-se um erro maior que a FT com um atraso.

4. VARIÁVEL INSTRUMENTAL

Um estimador mínimos quadrados pode não ser consistente caso o ruído da equação (8) não seja branco, também pode ser difícil testar a sua consistência para um funcionamento generalizado. Outros estimadores considerados consistentes (Goodwin and Payne, 1997) (Moreira *et al.*, 2002) podem ser implementados para

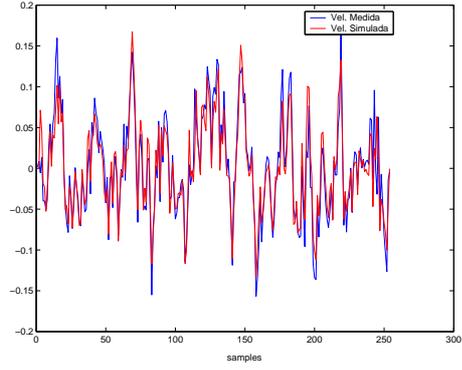


Figura 8. Velocidade medida e estimada com *FTb* (Validação).

demonstrar mais propriedades do sistema e também ter um parâmetro para comparação com o estimador mínimos quadrados. Nesta secção vão ser apresentados os resultados do estimador com variável instrumental, que comparando-se com os mínimos quadrados substitui-se $\hat{\theta}$ por $\bar{\theta}$, sendo

$$\bar{\theta} = [Z^T X]^{-1} Z^T Y$$

onde a matriz Z pode ser construída usando um modelo auxiliar

$$Z(k)^T = [-\hat{y}(k-1), -\hat{y}(k-2), \dots] \quad (17)$$

$$[-\hat{y}(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-n)] \quad (18)$$

onde

$$\hat{A}(z)\hat{y}(k) = \hat{B}(z)u(k)$$

e $\hat{A}(z)$, $\hat{B}(z)$ são polinómios cujos parâmetros podem ser obtidos através de mínimos quadrados numa primeira iteração. Nas iterações seguintes utiliza-se o resultado da estimativa anterior para recalcular $Z(k)$ e assim sucessivamente. Este algoritmo tem a característica de convergir com poucas iterações.

Na tabela 2 são apresentados resultados do estimador variável instrumental (VI) e a comparação com mínimos quadrados (MQ) para a função de transferência do tipo *FTb*. Com 3 iterações já houve uma convergência, estabilizando os valores do pólo e do ganho.

FTs	MQ	VI 3ª Iteração
<i>b1</i>	0.00081626	0.00081538
$z(z+a1)$	$z(z-0.6827)$	$z(z-0.7051)$
<i>MSE(erro)</i>	0.0010013	0.00098799

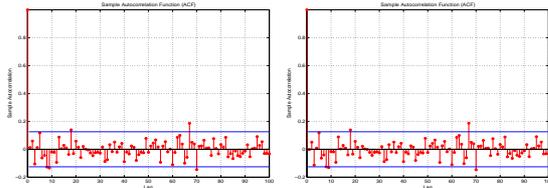
Tabela 2. Valores Estimados.

Através da auto correlação do erro calculado conforme (19) e (20), verifica-se a brancura dos resíduos. Na figura 9 apresentam-se a auto correlação para a estimativa com os Mínimos Quadrados e a estimativa com Variáveis Instrumentais, para 100 amostras.

$$\hat{y}(k) = -\hat{a}_1\bar{y}(k-1) + \hat{b}_1u(k-2), \quad (19)$$

$$Erro_r(k) = \hat{y}(k) - \bar{y}(k). \quad (20)$$

Sendo $\hat{y}(k)$ a saída estimada, $\bar{y}(k)$ a saída medida e $u(k)$ o sinal de entrada. A média do erro $Erro_r(k)$ da equação (20) para Mínimos quadrados foi $5.2879e-4$ e para variáveis instrumentais $5.2554e-4$, verifica-se que houve uma pequena melhora. Verifica-se também que a auto correlação do erro $Erro_r$ para os mínimos quadrados já é muito típico de ruído branco, por este motivo não houve uma melhora muito significativa com Variáveis Instrumentais.



(a) Mínimos Quadrados (b) Variável Instrumental

Figura 9. Auto correlação do erro.

5. RESULTADOS COM OS MOTORES RESTANTES

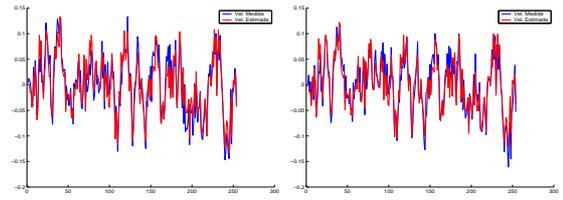
Nas secções anteriores foi detalhado o procedimento para estimar o sistema do motor 1, agora serão apresentados resultados referentes aos outros 3 motores do robot. Na tabela 4 estão os resultados estimados para os 4 motores do robot, utilizando o estimador Mínimos Quadrados e o estimador Variável Instrumental.

As rodas laterais(motores 2 e 4) possuem diâmetros maiores que das rodas dianteira(motor 1) e traseira(motor 3), conforme a tabela 4 os ganhos dos motores 2 e 4 evidenciam esta diferença. Também deve-se levar em conta que existe uma distribuição irregular do peso na base do robot. Essas características faz com que as funções de transferências tenham diferenças entre si. No motor 4 verifica-se um pólo mais lento, isso deve-se ao maior peso sobre esta roda, devido à posição das baterias na base do robot.

Nas figuras 10 e 11 apresentam-se gráficos com sinais reais das velocidades dos motores e as velocidades estimadas com as funções de transferência do tipo FTb .

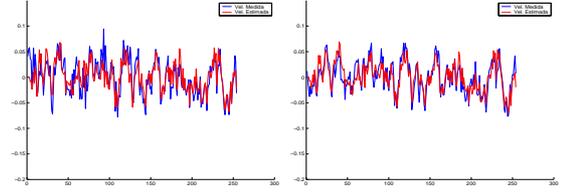
6. SINTONIA DE UM CONTROLADOR PID PARA O ROBOT

A partir da definição de um modelo para o processo, partiu-se para a sintonia inicial do



(a) Motor 1 - roda dianteira (b) Motor 3 - roda traseira

Figura 10. Motores 1 e 3 do Robot.



(a) Motor 2 - roda lateral esquerda (b) Motor 4 - roda lateral direita

Figura 11. Motores 2 e 4 do Robot.

controlador PID implementado no microcontrolador do robot. Um controlador do tipo proporcional, integral e derivativo, geralmente denominado PID, pode ser descrito conforme(Aström and Hägglund, 1995),

$$u(t) = K_c \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (21)$$

Considerando um sistema em malha fechada conforme a figura 12. A variável $u(t)$ representa o sinal de controlo e a variável $e(t)$ representa o sinal de erro($e(t) = y_{ref}(t) - y(t)$). O sinal de controlo é calculado pela soma de três termos: o termo P(no qual é proporcional ao erro), o termo I (no qual é proporcional ao integral do erro) e o termo D(no qual é proporcional à derivada do erro). Os parâmetros de controlo são o ganho proporcional K_c , o tempo integral T_i e o tempo derivativo T_d . Para a sintonia do controlador PID foi utilizado o procedimento de posicionar os pólos em malha fechada do sistema baseado no protótipo de Bessel(Vaccaro, 1995).

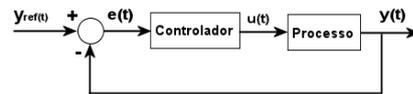


Figura 12. Sistema contínuo em malha fechada.

O função de transferência escolhida para o processo foi obtida através do estimador Variável Instrumental conforme a secção 4,

$$G(z) = \frac{0.00081538}{(z - 0.7051)} = \frac{b_1}{z - a_1} \quad (22)$$

desprezou-se o pólo na origem da função de transferência, pois o mesmo deve-se ao atraso existente

na comunicação entre o microcontrolador e o PC do robot.

Pode-se calcular o equivalente contínuo do processo da equação (22),

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1},$$

usando a seguinte relação(Vaccaro, 1995)

$$K = \frac{b1}{1 + a1}$$

$$\tau = \frac{1}{|ps|}$$

$$pz = e^{Tps}.$$

Sendo ps o pólo no plano S , e pz o pólo no plano Z . Na equação (23) apresenta-se a função contínua resultante, e na figura 13 uma resposta ao degrau dos dois processos, discreto e contínuo.

$$G(s) = \frac{0.002765}{0.1145s + 1} \quad (23)$$

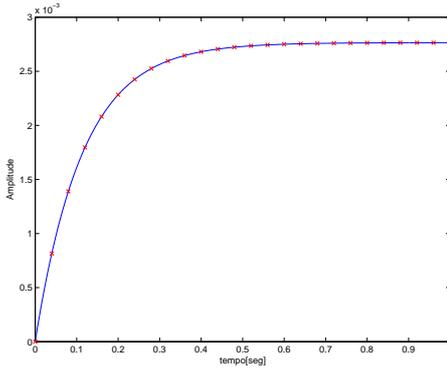


Figura 13. Resposta ao degrau do sistema discreto e contínuo.

A função de transferência do controlador, conforme a equação (24) representa a equação de um controlador PI. Escolheu-se um controlador PI, eliminando-se a parcela derivativa com $Td = 0$, devido às características do processo(primeira ordem). A acção integral Ti faz com que o sistema siga uma entrada de valor constante com erro nulo em regime permanente. A acção proporcional Kc tem um impacto imediato na rapidez de resposta do sistema.

$$Gc(s) = \frac{Kc(Tis + 1)}{Tis} \quad (24)$$

A partir da função de transferência do sistema em malha fechada, que resultou num sistema de segunda ordem e após alguns testes com o robot, posicionou-se os pólos do controlador PI de forma a obter um tempo de estabelecimento em torno de $0.6seg$ para uma resposta ao degrau, que representa uma boa resposta levando-se em

conta as características do robot. O sistema em malha aberta G_{MA} está descrito na equação(25),

$$G_{MA}(s) = Gc(s).G(s) = \frac{Kc(Tis + 1)}{Tis} \cdot \frac{K}{\tau s + 1} \quad (25)$$

Calculando o sistema em malha fechada com realimentação unitária de $G_{MA}(s)$ obtem-se,

$$G_{MF}(s) = \frac{\frac{KKc}{Ti\tau} + \frac{KKcs}{\tau}}{s^2 + \frac{(1+KKc)s}{\tau} + \frac{KKc}{Ti\tau}} \quad (26)$$

Considerando a tabela dos polinómios de Bessel (Vaccaro, 1995), para um sistema de segunda ordem com tempo de estabelecimento de $1seg$ os pólos são $p_{1s} = -4.0530 \pm j2.3400$. Para o tempo de estabelecimento desejado ($0.6seg$), basta dividir p_{1s} por 0.6, resultando em pólos $p_{0.6s} = -6.7550 \pm j3.9000$. Para obter os valores de Kc e Ti , basta igualar o polinómio do denominador da $G_{MF}(s)$ com o polinómio da equação (27),

$$(s - p1)(s - p2) = s^2 - (p1 + p2)s + p1p2 \quad (27)$$

então, para obter Kc ,

$$-(p1 + p2) = \frac{(1 + K * Kc)}{\tau}$$

$$Kc = \frac{-\tau * (p1 + p2) - 1}{K} \quad (28)$$

e para obter Ti ,

$$p1p2 = \frac{KKc}{Ti\tau}$$

$$Ti = \frac{KKc}{\tau p1p2} \quad (29)$$

A FT resultante é apresentada na equação(30)

$$G_{MF}(s) = \frac{4.775s + 0.3747}{s^2 + 13.51s + 60.84} \quad (30)$$

Na equação (31) apresenta-se a função do controlador PI e na equação (32) o equivalente discreto invariante na resposta ao degrau(ZOH-zero-order hold)(Franklin *et al.*, 1997), para uma taxa de amostragem de $10ms$.

$$Gc(s) = \frac{197.68(0.07848s + 1)}{0.07848s} \quad (31)$$

$$Gc(z) = \frac{197.68(z - 0.8726)}{(z - 1)} \quad (32)$$

Testou-se os parâmetros no controlador PI no robot, obtendo-se a resposta da figura 14, verifica-se que com $0.6seg$ atingiu-se a referência, com uma resposta transitória satisfatória. Para melhorar esta resposta, introduziu-se no sistema em malha fechada um ganho *Feedforward* (f), da entrada de referência até a entrada do processo, conforme a

figura 16. Este ganho não afecta a estabilidade do sistema, pois não altera os pólos em malha fechada. Entretanto, o ganho *Feedforward* melhora a resposta transitória do sistema (Vaccaro, 1995). Na figura 15 verifica-se a melhora na resposta transitória com $f = 200$, este valor foi baseado em simulações. A entrada de referência foi um degrau de amplitude $0.6(m/s)$. Diferenças entre a simulação e as velocidades medidas são aceitáveis neste caso, tendo em conta a simplicidade do modelo escolhido (primeira ordem) e as aproximações cometidas.

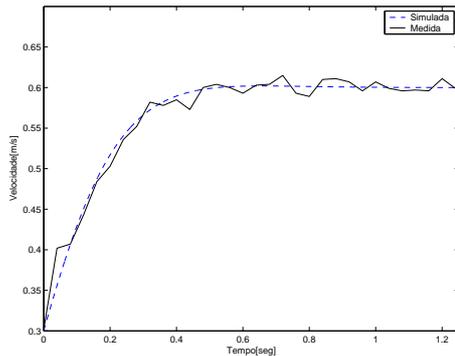


Figura 14. Sistema em malha fechada sem *Feedforward*.

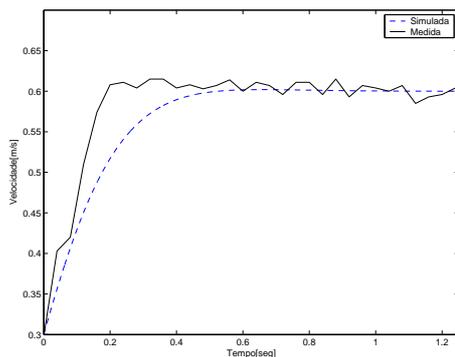


Figura 15. Sistema em malha fechada com *Feedforward*.

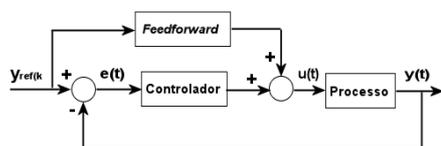


Figura 16. Sistema contínuo em malha fechada com *Feedforward*.

inicial foi possível realizar uma sintonia inicial no controlador PID do robot. Com os controladores PID sintonizados para os quatro motores do robot pode-se partir para uma segunda etapa, que abordará a modelização da dinâmica do robot considerando o mesmo como um sistema multi-variável englobando os processos modelizados anteriormente.

REFERÊNCIAS

- Aström, Karl J. and Tore Hägglund (1995). *PID controllers : Theory, design, and tuning*. International Society for Measurement and Con.
- Carvalho, J.L. Martins De (1993). *Dynamical Systems and Automatic Control*. Prentice Hall.
- Franklin, Gene F., J.David Powell and Michael Workman (1997). *Digital control of dynamic systems*. Addison Weley Longman, Inc.
- Goodwin, G. C. and R. L. Payne (1997). *Dinamic System Identification*. Academic Press.
- Moreira, A. P. G. M., P. J. G. Costa and P. J. Lopes dos Santos (2002). *Introdução à Identificação de Modelos Discretos para Sistemas Dinâmicos*. Sebenta FEUP. [www.fe.up.pt/ amoreira](http://www.fe.up.pt/~amoreira).
- Vaccaro, R. J. (1995). *Digital Control - A State-Space Approach*. McGraw-Hill.

7. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho o objectivo principal foi a modelização do processo motor + redução + encoder, conforme a figura 2, de um robot móvel. Usouse técnicas baseadas em estimadores Mínimos Quadrados e sua variante Variável Instrumental para estimar o sistema. Com esta modelização

FTs	<i>FTa</i>	<i>FTb</i>	<i>FTc</i>	<i>FTd</i>
grau	1	2	2	3
	$b1$ $z + a1$	$b2$ $z(z + a1)$	$b1z + b2$ $z(z + a1)$	$b2z + b3$ $z^2(z + a1)$
ganho,zero, polo	$-5.73e - 6$ $(z - 0.7033)$	$8.16e - 4$ $z(z - 0.6827)$	$7.58e - 6(z + 107.7)$ $z(z - 0.6823)$	$8.12e - 4(z - 0.1077)$ $z^2(z - 0.7295)$
MSE(erro)	0.0034488	0.00036275	0.00036142	0.00036471

FTs	<i>FTe</i>	<i>FTf</i>
grau	3	4
	$b1z^2 + b2z + b3$ $z(z^2 + a1z + a2)$	$b1z^3 + b2z^2 + b3z + b4$ $z(z^3 + a1z^2 + a2z + a3)$
ganho,zero, polo	$6.25e - 6(z + 129.6)(z + 0.2702)$ $z(z - 0.7541)(z + 0.4024)$	$5.28e - 6(z + 153.5)(z^2 + 0.206z + 0.053)$ $z(z - 0.6946)(z + 0.457)(z - 0.183)$
MSE(erro)	0.00035635	0.00032468

FTs	<i>FTg</i>
grau	5
	$b1z^4 + b2z^3 + b3z^2 + b4z + b5$ $z(z^4 + a1z^3 + a2z^2 + a3z + a4)$
ganho,zero, polo	$5.6e - 6(z + 143.8)(z - 0.1982)(z^2 + 0.4159z + 0.1107)$ $z(z - 0.6526)(z - 0.4272)(z^2 + 0.6709z + 0.1383)$
MSE(erro)	0.00031945

FTs	<i>FTh</i>
grau	6
	$b1z^5 + b2z^4 + b3z^3 + b4z^2 + b5z + b6$ $z(z^5 + a1z^4 + a2z^3 + a3z^2 + a4z + a5)$
ganho,zero, polo	$9.50e - 6(z + 84.98)(z^2 - 0.6704z + 0.2717)(z^2 + 0.8872z + 0.3613)$ $z(z - 0.6577)(z^2 - 0.728z + 0.2254)(z^2 + 0.9745z + 0.3502)$
MSE(erro)	0.00031737

Tabela 3. Resultados da estimação para diferentes FTs com Mínimos Quadrados.

Minimos Quadrados	Motor 1 Dianteira	Motor 2 Lateral esquerda	Motor 3 Traseira	Motor 4 Lateral direita
$b1$ $z(z + a1)$	0.0008163 $z(z-0.6827)$	0.00044521 $z(z-0.6425)$	0.00075587 $z(z-0.677)$	0.00037482 $z(z-0.7448)$

Variável Instrumental	Motor 1 Dianteira	Motor 2 Lateral esquerda	Motor 3 Traseira	Motor 4 Lateral direita
$b1$ $z(z + a1)$	0.00081538 $z(z-0.7051)$	0.00044513 $z(z-0.6734)$	0.00075507 $z(z-0.6953)$	0.0003748 $z(z-0.7565)$

Tabela 4. Valores Estimados com Mínimos Quadrados e Variável Instrumental para todos os Motores do Robot.