

MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA  
Lisboa, 31 de Maio – 2 de Junho, 2004  
© APMTAC, Portugal 2004

## CONTROLO ACTIVO DE VIBRAÇÕES DE VIGAS COM SENSORES E ACTUADORES PIEZOELÉCTRICOS: MODELAÇÃO E EXPERIMENTAÇÃO

C. M. A. Vasques e J. Dias Rodrigues

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial  
Rua Dr. Roberto Frias s/n, 4200-465 Porto, Portugal  
e-mail: {cvasques, jdr}@fe.up.pt

**Palavras-chave:** viga adaptativa, actuadores e sensores piezoelétricos, elemento finito layerwise, acoplamento electromecânico, controlo activo de vibrações.

**Resumo.** Neste trabalho apresentam-se e caracterizam-se as principais fases envolvidas na concepção de um sistema de controlo activo de vibrações de estruturas adaptativas: modelação numérica (modelo estrutural, modelo de controlo e simulação) e experimentação (montagem dos sensores e actuadores, implementação do controlador e análise dos resultados experimentais). Para isso, um caso de estudo específico de uma viga adaptativa é apresentado, demonstrando a necessidade e a capacidade do modelo na antevista de potenciais instabilidades do sistema de controlo. O modelo espacial é caracterizado, apresentando-se o modelo de elementos finitos de viga adaptativa de três camadas, assente numa formulação layerwise parcial dos deslocamentos e numa teoria com acoplamento electromecânico total. No modelo de controlo, o sistema dinâmico é representado na base modal do espaço de estados. No caso de estudo apresentado, um sistema de controlo por feedback, com base nas medições da velocidade efectuadas por um transdutor laser, é avaliado por via numérica e experimental na capacidade de amortecer as vibrações numa viga adaptativa em regime forçado harmónico. Da análise dos resultados numéricos e experimentais demonstra-se, por um lado, a robustez e representatividade do modelo de elementos finitos e, por outro, a aplicabilidade e funcionalidade do sistema de controlo activo de vibrações apresentado.

## 1. INTRODUÇÃO

A utilização de actuadores ou sensores piezoelétricos no controlo activo de vibrações tem sido extensivamente divulgada nos últimos anos [1, 2]. Para o projecto de sistemas de controlo activo torna-se necessária a utilização de um modelo matemático do sistema, seja ele analítico ou numérico. Dependente das condições de serviço do componente estrutural e dos objectivos do controlo, o projecto do controlador pode ser facilitado recorrendo à simulação como ponto de partida para a concepção do sistema. Torna-se, assim, possível, por um lado, a antevisão e correcção de potenciais instabilidades do sistema e, por outro lado, a utilização desse modelo matemático em algoritmos de controlo que dele necessitem.

Desde os anos 70, diferentes modelos analíticos e numéricos para a análise de estruturas com sensores e actuadores piezoelétricos têm surgido na literatura. Os modelos de elementos finitos apresentam as já conhecidas vantagens do método e, além da formulação mecânica convencional, devem incorporar, de forma conveniente, os acoplamentos electromecânicos típicos dos materiais piezoelétricos [3, 4].

Neste trabalho, pretende-se caracterizar as diferentes fases envolvidas na concepção de um sistema de controlo activo de vibrações de estruturas adaptativas. Começa-se por abordar a modelação numérica, caracterizando o modelo estrutural e o modelo de controlo. Para isso, é apresentada a formulação de um modelo de elementos finitos de viga adaptativa. De seguida, o sistema dinâmico é definido na base modal do espaço das variáveis de estado. Por fim, é apresentado um caso de estudo de uma viga adaptativa, demonstrando a necessidade e a capacidade do modelo na antevisão de potenciais instabilidades do sistema de controlo. Um sistema de controlo por *feedback*, com base nas medições da velocidade efectuadas por um transdutor *laser*, é avaliado por via numérica e experimental na capacidade de amortecer as vibrações em regime forçado harmónico. A implementação do elemento finito e a simulação é efectuada em ambiente MATLAB<sup>®</sup>.

## 2. MODELAÇÃO ESTRUTURAL ELECTROMECHANICA

Para a modelização de estruturas adaptativas, diferentes hipóteses, em particular as relativas ao campo eléctrico dos materiais piezoelétricos, são encontradas na literatura. Essas hipóteses condicionam a precisão do modelo e, por isso, modelos eléctricos mais refinados têm surgido na literatura. Nos primeiros modelos publicados, eram utilizadas *teorias desacopladas* em que os efeitos do carregamento eléctrico eram considerados no modelo através de deformações equivalentes [5]. Teorias em que apenas o efeito piezoelétrico de conversão é considerado na formulação foram denominadas por Tiersten [6] como teorias com *pequeno acoplamento piezoelétrico*. Esses modelos consideravam a teoria de mais baixa ordem para a aproximação do campo eléctrico, não levando em consideração a influência das deformações mecânicas induzidas, limitando o estudo a situações em que os elementos piezoelétricos montados na estrutura funcionavam apenas como actuadores [7]. Numa fase mais recente, e de forma a obter resultados mais precisos, o efeito piezoelétrico directo é incluído nos modelos eléctricos conduzindo a teorias com *acoplamento electromecânico*. Assim, os efeitos dos campos eléctricos induzidos, e a correspondente alteração da rigidez

estrutural, são considerados e a modelização permite que os elementos piezoelétricos tenham a dupla capacidade de actuar sobre a estrutura (actuadores) ou de medir as suas deformações (sensores). Quando a teoria de mais baixa ordem é utilizada para a definição do campo eléctrico, os modelos resultantes caracterizam o denominado *acoplamento electromecânico parcial*. No entanto, foi demonstrado por via analítica e numérica [8, 9] que a verdadeira natureza dos campos eléctricos induzidos apresenta uma distribuição linear. Assim, teorias que consideram distribuições quadráticas do potencial (lineares do campo eléctrico), denominadas por teorias com *acoplamento electromecânico total*, começam a aparecer na literatura e constituem as melhores aproximações para o campo eléctrico.

## 2.1. Modelo mecânico

Considere-se a viga adaptativa ilustrada na figura 1. A viga é constituída por um núcleo metálico e duas camadas exteriores piezoelétricas.

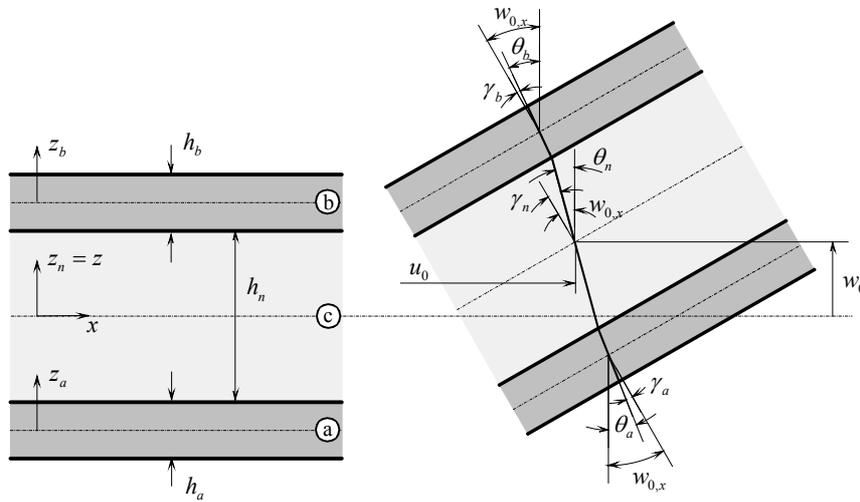


Figura 1. Viga com formulação *layerwise*: deslocamentos axiais, transversais e rotações

Para a definição do campo de deslocamentos generalizado é utilizada a teoria *layerwise* parcial na aproximação das componentes axial  $u_k$  e transversal  $w_k$  dos deslocamentos das três camadas, na forma

$$u_k(x, t) = u_0(x, t) \pm \frac{h_n}{2} \theta_n(x, t) + (z_k \pm \frac{h_k}{2}) \theta_k(x, t), \quad w_k(x, t) = w_0(x, t), \quad (1)$$

em que  $k = a(-, -), n(+, -), b(+, -)$  designa a camada,  $h_k$  é a espessura da camada,  $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta_k$  e  $\gamma_k$  são, respectivamente, o deslocamento axial e transversal do plano médio da viga, a rotação e o ângulo de corte de cada uma das camadas. A continuidade do campo de deslocamentos nas interfaces das camadas é garantida, conduzindo assim a termos de acoplamento nos deslocamentos axiais  $u_k$  das camadas. O deslocamento transversal  $w_k = w_0$  é considerado constante ao longo da espessura da viga.

De acordo com o campo de deslocamentos generalizado (1), as deformações mecânicas axiais  $S_{xx}^k$  e as deformações de corte  $S_{xz}^k$ , para cada camada  $k$ , definem-se por

$$S_{xx}^k = u_{k,x} = S_m^k + \bar{z}_k S_{mf}^k + z_k^* S_f^k, S_{xz}^k = w_{0,x} - u_{k,z} = S_c^k, \quad (2)$$

com  $S_m^k = u_{0,x}$ ,  $S_{mf}^k = \theta_{n,x}$ ,  $S_f^k = \theta_{k,x}$  e  $S_c^k = w_{0,x} - \theta_k$ . Os índices  $m$ ,  $mf$ ,  $f$  e  $c$  referem-se, respectivamente, às deformações de membrana, acoplamento membrana/flexão, flexão e corte. Os termos geométricos relativos ao eixo transversal  $z_k$  de cada camada, representativos do acoplamento membrana/flexão,  $\bar{z}_k$ , e da flexão,  $z_k^*$ , definem-se por

$$\bar{z}_a = -\frac{h_n}{2}, \bar{z}_n = 0, \bar{z}_b = +\frac{h_n}{2}, z_a^* = z_a - \frac{h_a}{2}, z_n^* = z_n, z_b^* = z_b + \frac{h_b}{2}. \quad (3)$$

As hipóteses cinemáticas consideradas conduzem a deformações transversais nulas para as três camadas. Rescrevendo as componentes das deformações mecânicas das camadas piezoelétricas exteriores  $p = a, b$  e do núcleo metálico  $n$  em função das deformações de membrana, acoplamento membrana/flexão, flexão e corte na forma vectorial, obtém-se

$$\{S^p\} = \begin{Bmatrix} S_{xx}^p \\ S_{xz}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_m^p + \bar{z}_p S_{mf}^p + z_p^* S_f^p \\ S_c^p \end{Bmatrix}, \{S^n\} = \begin{Bmatrix} S_{xx}^n \\ S_{xz}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_m^n + z_n^* S_f^n \\ S_c^n \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

## 2.2. Leis de Comportamento dos Materiais

Os materiais piezoelétricos das camadas exteriores  $p$  são considerados ortotrópicos, em que as direcções de ortotropia coincidem com os eixos da viga. Esses materiais são polarizados na direcção do eixo dos  $zz$  e a sua lei de comportamento é aquela dos materiais piezoelétricos *standard*, com as propriedades de simetria de um cristal ortorrômbico da classe  $mm2$  [3]. As equações constitutivas piezoelétricas lineares [10] exprimem-se por

$$\{T\} = [c^E] \{S\} - [e]^T \{E\}, \{D\} = [e] \{S\} + [\varepsilon^S] \{E\}, \quad (5)$$

em que  $\{T\}$  é o vector das tensões,  $\{S\}$  o vector das deformações,  $[c^E]$  a matriz de elasticidade a campo eléctrico constante,  $[e]^T$  a matriz transposta das constantes piezoelétricas,  $\{E\}$  o vector campo eléctrico,  $\{D\}$  o vector deslocamento eléctrico e  $[\varepsilon^S]$  a matriz das constantes dieléctricas a deformação constante.

Perante as hipóteses cinemáticas anteriores, o campo de deslocamentos considerado é independente de  $yy$  e nulo segundo essa direcção ( $S_{yy}^p = 0$  e  $S_{xy}^p = S_{yz}^p = 0$ ). Além disso, admitindo-se que  $T_{zz}^p \approx 0$  (estado plano de tensão), as leis de comportamento para as camadas piezoelétricas tomam a seguinte forma reduzida,

$$\begin{Bmatrix} T_{xx}^p \\ T_{xz}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{*p} & 0 \\ 0 & c_{55}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx}^p \\ S_{xz}^p \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31}^{*p} \\ e_{15}^p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x^p \\ E_z^p \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} D_x^p \\ D_z^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e_{15}^p \\ e_{31}^{*p} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{xx}^p \\ S_{xz}^p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^p & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33}^{*p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x^p \\ E_z^p \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

$$\text{com } c_{11}^{*p} = c_{11}^p - \frac{c_{13}^{p2}}{c_{33}^p}, e_{31}^{*p} = e_{31}^p - e_{33}^p \frac{c_{13}^p}{c_{33}^p}, \varepsilon_{33}^{*p} = \varepsilon_{33}^p + \frac{e_{33}^{p2}}{c_{33}^p},$$

em que a modificação das constantes  $c_{11}^p$ ,  $e_{31}^p$  e  $\varepsilon_{33}^p$  deve-se à hipótese de estado plano de tensão (EPT). A expressão (6) pode também ser utilizada na caracterização do material elástico do núcleo  $n$ , desde que os termos relativos às variáveis eléctricas sejam eliminados.

### 2.3. Modelo Eléctrico

Adoptando uma teoria com acoplamento electromecânico total, é utilizada uma aproximação linear do campo eléctrico na direcção transversal. Assim, é considerado o efeito piezoeléctrico directo e adoptada uma aproximação fisicamente adequada para o campo eléctrico na direcção axial.

O vector deslocamento eléctrico da expressão (6) pode ser escrito na forma

$$\begin{Bmatrix} D_x^p \\ D_z^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^p & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33}^{*p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x^p - \bar{E}_x^p \\ E_z^p - \bar{E}_z^p \end{Bmatrix}, \quad \text{com} \quad \bar{E}_x^p = -\frac{e_{15}^p}{\varepsilon_{11}^p} S_{xz}^p, \quad \bar{E}_z^p = -\frac{e_{31}^{*p}}{\varepsilon_{33}^{*p}} S_{xx}^p, \quad (7)$$

em que  $\bar{E}_x^p$  e  $\bar{E}_z^p$  são os campos eléctricos axial e transversal induzidos. Frequentemente, as componentes longitudinais do campo eléctrico  $E_x^p$  e do deslocamento eléctrico  $D_x^p$  costumam ser desprezadas. No entanto, a sua influência pode ser facilmente incorporada no modelo mecânico da viga através de parâmetros de rigidez efectiva. Segundo Krommer e Irschik [11], para a condição de fronteira eléctrica de diferença de potencial eléctrico prescrita, as expressões do campo eléctrico transversal e axial escrevem-se na forma

$$E_z^p = -\frac{\phi_p}{h_p} + \bar{E}_z^p - \frac{1}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p, \quad E_x^p = \bar{E}_x^p, \quad (8)$$

em que  $\phi_p$  é a diferença de potencial eléctrico e  $z_p^{\text{inf}}$  e  $z_p^{\text{sup}}$  são o limite inferior e superior da coordenada  $z_p$  de cada camada. Se a diferença de potencial eléctrico for prescrita, pode ser comprovado por (8) que, em contraste com o caso de pequeno acoplamento piezoeléctrico [6], um potencial eléctrico quadrático é induzido na direcção da espessura das camadas piezoeléctricas. Esse é o reflexo da influência do efeito piezoeléctrico directo e representa a mencionada extensão para a teoria electromecânica com acoplamento total. Desprezar a influência dos campos eléctricos induzidos implica que não haja nenhuma diferença no campo eléctrico devido ao tipo de condição de fronteira imposta. Assim, no caso de condições de fronteira eléctricas triviais, como eléctrodos em circuito aberto, em que a carga eléctrica total nos eléctrodos é nula ( $Q_p = 0$ ), ou eléctrodos em circuito fechado ( $\phi_p = 0$ ), a resposta mecânica da viga seria exactamente igual nas duas situações. Porém, modelos de elementos finitos com acoplamento electromecânico [12] demonstram que diferentes condições de fronteira eléctricas resultam em diferentes respostas mecânicas. No presente modelo, esses resultados poderão facilmente ser obtidos recorrendo às expressões (8) para a definição do campo eléctrico.

Através da relação  $E_z^p = -\varphi_{p,z}$  e de (8), o potencial eléctrico  $\varphi_p$  é dado por

$$\varphi_p = +\frac{\phi_p}{h_p} (z_p - z_p^{\text{inf}}) - \int_{z_p^{\text{inf}}}^z \bar{E}_z^p dz_p + \frac{(z_p - z_p^{\text{inf}})}{h_p} \int_{z_p^{\text{inf}}}^{z_p^{\text{sup}}} \bar{E}_z^p dz_p. \quad (9)$$

Na equação (9) pode observar-se que o potencial eléctrico se anula na superfície inferior da camada ( $z_p = z_p^{\text{inf}}$ ), toma um valor constante na superfície superior ( $z_p = z_p^{\text{sup}}$ ), e que a condição de área equipotencial dos eléctrodos é verificada.

### 3. FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Para estabelecer as equações electromecânicas do movimento e condições de fronteira (formulação forte) da viga adaptativa de três camadas, é utilizado o princípio de Hamilton. Adaptando a Lagrangiana e o trabalho das forças exteriores [6] para as contribuições mecânicas e eléctricas das camadas, o princípio de Hamilton escreve-se

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_k (T^k - H^k + W^k) dt = 0, \quad (10)$$

em que  $t_0$  e  $t_1$  definem o intervalo de tempo,  $T^k$  é a energia cinética,  $H^k$  é a entalpia eléctrica e  $W^k$  representa o trabalho realizado pelas forças mecânicas e eléctricas exteriores, de cada camada.

O trabalho virtual  $\delta H^k$  realizado pelas forças electromecânicas internas é apresentado em termos das contribuições mecânica  $\delta H_{uu}^k$ , para todas as camadas de volume  $V_k$ , piezoeléctricas  $\delta H_{u\phi}^p$  e  $\delta H_{\phi u}^p$ , e dieléctrica  $\delta H_{\phi\phi}^p$ , para as camadas piezoeléctricas exteriores de volume  $V_p$ ,

$$\delta H^n = \delta H_{uu}^n, \quad \delta H^p = \delta H_{uu}^p - \delta H_{u\phi}^p - \delta H_{\phi u}^p - \delta H_{\phi\phi}^p, \quad (11)$$

em que

$$\begin{aligned} \delta H_{uu}^k &= \int_{V_k} (\delta S_{xx}^k c_{11}^{*k} S_{xx}^k + \delta S_{xz}^k c_{55}^k S_{xz}^k) dV_k, & \delta H_{u\phi}^p &= \int_{V_p} (\delta S_{xx}^p e_{31}^{*p} E_z^p + \delta S_{xz}^p e_{15}^p E_x^p) dV_p, \\ \delta H_{\phi u}^p &= \int_{V_p} (\delta E_z^p e_{31}^{*p} S_{xx}^p + \delta E_x^p e_{15}^p S_{xz}^p) dV_p, & \delta H_{\phi\phi}^p &= \int_{V_p} (\delta E_x^p \epsilon_{11}^{*p} E_x^p + \delta E_z^p \epsilon_{33}^{*p} E_z^p) dV_p. \end{aligned} \quad (12)$$

O trabalho virtual das forças de inércia  $\delta T^k$ , levando em consideração as inércias de translação e de rotação, é dado para cada camada por

$$\delta T^k = - \int_{V_k} \rho_k (\delta u_k \ddot{u}_k + \delta w_k \ddot{w}_k) dV_k, \quad (13)$$

em que  $\rho_k$  é a massa volúmica de cada camada e  $\ddot{u}_k$  e  $\ddot{w}_k$  as acelerações generalizadas.

O trabalho virtual das forças exteriores  $\delta W^k$  é composto pelo trabalho virtual realizado pelas forças mecânicas exteriores  $\delta W_u^k$ , para as três camadas, e pela densidade de carga eléctrica superficial  $\delta W_\phi^p$ , para as camadas piezoeléctricas, na forma genérica

$$\delta W^k = \delta W_u^k - \delta W_\phi^k. \quad (14)$$

Assim, para a definição do termo mecânico, dois tipos de força são considerados, nomeadamente as forças volúmicas axiais  $F_x^k$  e transversais  $F_z^k$ ,

$$\delta W_u^k = \int_{V_k} (F_x^k \delta u_k + F_z^k \delta w_k) dV_k. \quad (15)$$

Substituindo o campo de deslocamentos em (1) e integrando obtém-se

$$\begin{aligned}\delta W_u^p &= \int_L [X_p(\delta u_0 \pm \frac{h_n}{2} \delta \theta_n \pm \frac{h_p}{2} \delta \theta_p) + M_p \delta \theta_p + Z_p \delta w_0] dL, \\ \delta W_u^n &= \int_L (X_n \delta u_0 + M_n \delta \theta_n + Z_n \delta w_0) dL, \\ \text{com } (X_k, M_k, Z_k) &= \int_{A_k} (F_x^k, F_x^k z_k, F_z^k) dA_k,\end{aligned}\quad (16)$$

em que  $X_k$ ,  $Z_k$  e  $M_k$  são, respectivamente, as forças axiais, transversais e os momentos.

O trabalho virtual realizado pela densidade de carga eléctrica  $\tau_p$  em cada camada piezoeléctrica é dado por

$$\delta W_\phi^p = \int_{A_p^e} \tau_p \delta \phi_p dA_p^e = \int_L b \tau_p \delta \phi_p dL, \quad (17)$$

em que  $A_p^e$  é a área superficial dos eléctrodos e  $b$  a largura da viga. Note-se que da definição do potencial eléctrico em (9), e considerando apenas o termo relativo ao potencial aplicado, tem-se que  $\phi_p(z_p = z_p^{\text{inf}}) = 0$  e  $\phi_p(z_p = z_p^{\text{sup}}) = \phi_p$ .

As equações do movimento são obtidas pela substituição das expressões (11), (13) e (14) no princípio de Hamilton em (10). Efectuando a integração por partes e agrupando os termos relativos às variações  $\delta u_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \theta_a$ ,  $\delta \theta_n$  e  $\delta \theta_b$ , independentes e arbitrárias no intervalo  $[0, L]$ , as equações não têm outra solução senão a trivial, e as equações diferenciais do movimento são dadas por

$$\begin{aligned}\delta u_0 : & Y_{11} u_{0,xx} + Y_{13} \theta_{a,xx} + Y_{14} \theta_{n,xx} + Y_{15} \theta_{b,xx} + P_{11} \phi_{a,x} + P_{12} \phi_{b,x} + F_1 \\ &= J_{11} \ddot{u}_0 + J_{13} \ddot{\theta}_a + J_{14} \ddot{\theta}_n + J_{15} \ddot{\theta}_b, \\ \delta w_0 : & G_{22} w_{0,xx} + G_{23} \theta_{a,x} + G_{24} \theta_{n,x} + G_{25} \theta_{b,x} + F_2 = J_{22} \ddot{w}_0, \\ \delta \theta_a : & Y_{13} u_{0,xx} + Y_{33} \theta_{a,xx} + Y_{34} \theta_{n,xx} - G_{23} w_{0,x} - G_{33} \theta_a + P_{31} \phi_{a,x} + F_3 = J_{13} \ddot{u}_0 + J_{33} \ddot{\theta}_a + J_{34} \ddot{\theta}_n, \\ \delta \theta_c : & Y_{14} u_{0,xx} + Y_{34} \theta_{a,xx} + Y_{44} \theta_{n,xx} + Y_{45} \theta_{b,xx} - G_{24} w_{0,x} - G_{44} \theta_n + P_{41} \phi_{a,x} + P_{42} \phi_{b,x} + F_4 \\ &= J_{14} \ddot{u}_0 + J_{34} \ddot{\theta}_a + J_{44} \ddot{\theta}_n + J_{45} \ddot{\theta}_b, \\ \delta \theta_b : & Y_{15} u_{0,xx} + Y_{45} \theta_{n,xx} + Y_{55} \theta_{b,xx} - G_{25} w_{0,x} - G_{55} \theta_b + P_{52} \phi_{b,x} + F_5 = J_{15} \ddot{u}_0 + J_{45} \ddot{\theta}_n + J_{55} \ddot{\theta}_b.\end{aligned}\quad (18)$$

Da mesma forma, as equações de equilíbrio electrostático são obtidas agrupando os termos relativos às variações  $\delta \phi_a$  e  $\delta \phi_b$ , obtendo-se

$$\begin{aligned}\delta \phi_a : & P_{11} u_{0,x} + P_{31} \theta_{a,x} + P_{41} \theta_{n,x} - C_{11} \phi_a = -\tau_1, \\ \delta \phi_b : & P_{12} u_{0,x} + P_{42} \theta_{n,x} + P_{52} \theta_{b,x} - C_{22} \phi_b = -\tau_2.\end{aligned}\quad (19)$$

As condições de fronteira electromecânicas para  $x=0, L$  são deduzidas em termos das forças mecânicas e diferenças de potencial eléctrico aplicadas, definidas por

$$\begin{aligned}
 (Y_{11}u_{0,x} + Y_{13}\theta_{a,x} + Y_{14}\theta_{n,x} + Y_{15}\theta_{b,x} + P_{11}\phi_a + P_{12}\phi_b)\delta u_0 &= 0, \\
 (G_{22}w_{0,x} + G_{23}\theta_a + G_{24}\theta_n + G_{25}\theta_b)\delta w_0 &= 0, \\
 (Y_{13}u_{0,x} + Y_{33}\theta_{a,x} + Y_{34}\theta_{n,x} + P_{31}\phi_a)\delta\theta_a &= 0, \\
 (Y_{14}u_{0,x} + Y_{34}\theta_{a,x} + Y_{44}\theta_{n,x} + Y_{45}\theta_{b,x} + P_{41}\phi_a + P_{42}\phi_b)\delta\theta_c &= 0, \\
 (Y_{15}u_{0,x} + Y_{45}\theta_{n,x} + Y_{55}\theta_{b,x} + P_{52}\phi_b)\delta\theta_b &= 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Os termos de inércia  $J_{ij}$ , rigidez extensional  $Y_{ij}$  e de corte  $G_{ij}$ , rigidez piezoelétrica equivalente  $P_{il}$  e capacitância  $C_{ll}$ , das equações (18)-(20), são definidos por

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \sum_k \rho_k A_k, \quad J_{13} = \rho_a \bar{I}_a, \quad J_{14} = \sum_p \rho_p \bar{z}_p A_p, \quad J_{15} = \rho_b \bar{I}_b, \quad J_{22} = J_{11}, \quad J_{33} = \rho_a I_a, \\
 J_{34} &= \rho_a \bar{z}_a \bar{I}_a, \quad J_{44} = \sum_p \rho_p \bar{z}_p^2 A_p + \rho_n I_n, \quad J_{45} = \rho_b \bar{z}_b \bar{I}_b, \quad J_{55} = \rho_b I_b, \\
 Y_{11} &= \sum_k c_{11}^{*k} A_k, \quad Y_{13} = c_{11}^{*a} \bar{I}_a, \quad Y_{14} = \sum_p c_{11}^{*p} \bar{z}_p A_p, \quad Y_{15} = c_{11}^{*b} \bar{I}_b, \quad Y_{33} = \bar{c}_{11}^{a(\phi)} I_a, \\
 Y_{34} &= c_{11}^{*a} \bar{z}_a \bar{I}_a, \quad Y_{44} = \sum_p c_{11}^{*p} \bar{z}_p^2 A_p + c_{11}^{*n} I_n, \quad Y_{45} = c_{11}^{*b} \bar{z}_b \bar{I}_b, \quad Y_{55} = \bar{c}_{11}^{b(\phi)} I_b, \\
 G_{22} &= \sum_p \bar{c}_{55}^{p(\phi)} A_p + c_{55}^n A_n, \quad G_{23} = -\bar{c}_{55}^{a(\phi)} A_a, \quad G_{24} = -c_{55}^n A_n, \quad G_{25} = -\bar{c}_{55}^{b(\phi)} A_b, \\
 G_{33} &= -G_{23}, \quad G_{44} = -G_{24}, \quad G_{55} = -G_{25}, \\
 P_{11} &= \frac{e_{31}^{*a}}{h_a} A_a, \quad P_{12} = \frac{e_{31}^{*b}}{h_b} A_b, \quad P_{31} = \frac{e_{31}^{*a}}{h_a} \bar{I}_a, \quad P_{41} = \frac{e_{31}^{*a}}{h_a} \bar{z}_a A_a, \quad P_{42} = \frac{e_{31}^{*b}}{h_b} \bar{z}_b A_b, \quad P_{52} = \frac{e_{31}^{*b}}{h_b} \bar{I}_b, \\
 C_{11} &= \frac{\mathcal{E}_{33}^{*a}}{h_a^2} A_a, \quad C_{22} = \frac{\mathcal{E}_{33}^{*b}}{h_b^2} A_b, \\
 \text{com } A_k &= bh_k, \quad \bar{I}_p = \pm \frac{bh_p^2}{2}, \quad I_k = \frac{bh_k^3}{12},
 \end{aligned} \tag{21}$$

em que  $A_k$ ,  $\bar{I}_p$  e  $I_k$  são, respectivamente, os momentos de ordem zero, primeira e segunda ordem. As forças mecânicas  $F_i$  e densidades de carga eléctrica  $\tau_l$  são definidas por

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \sum_k X_k, \quad F_2 = \sum_k Z_k, \quad F_3 = M_a - \frac{h_a}{2} X_a, \quad F_4 = M_n + \frac{h_n}{2} (X_b - X_a), \quad F_5 = M_b + \frac{h_b}{2} X_b, \\
 \tau_1 &= b\tau_a, \quad \tau_2 = b\tau_b.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Os parâmetros de rigidez efectiva  $\bar{c}_{11}^{p(\phi)}$  e  $\bar{c}_{55}^{p(\phi)}$  em (21), representativos do aumento de rigidez devido aos campos eléctricos induzidos nas direcções axial e transversal [13], são definidos por

$$\bar{c}_{11}^{p(\phi)} = 4c_{11}^{*p} + \frac{e_{31}^{*p 2}}{\mathcal{E}_{33}^{*p}}, \quad \bar{c}_{55}^{p(\phi)} = c_{55}^p + \frac{e_{15}^{p 2}}{\mathcal{E}_{11}^p}. \tag{23}$$

As equações (18)-(22) representam o modelo electromecânico analítico da viga adaptativa

de três camadas. O efeito piezoelétrico directo, para a condição de potencial eléctrico prescrito, é levado em consideração através de parâmetros efectivos de rigidez e os potenciais eléctricos não especificados, juntamente com os deslocamentos mecânicos, constituem as variáveis independentes a determinar.

#### 4. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO ADAPTATIVO

##### 4.1. Matrizes e vectores do elemento

Na formulação do elemento finito de viga é utilizada a formulação fraca das equações (18) e (19), as quais governam o movimento e o equilíbrio electrostático da viga adaptativa de três camadas. Os cinco deslocamentos mecânicos generalizados e as duas diferenças de potencial eléctrico são agrupados nos vectores de deslocamentos e diferenças de potencial generalizados,

$$\{u(x, t)\} = \{u_0(x, t), w_0(x, t), \theta_a(x, t), \theta_n(x, t), \theta_b(x, t)\}^T, \{\phi(x, t)\} = \{\phi_a(x, t), \phi_b(x, t)\}^T. \quad (24)$$

A formulação fraca das equações (18) e (19) tem a forma

$$\begin{aligned} \int_L \{\delta u\}^T [J] \{\ddot{u}\} dL + \int_L \{\delta u\}^T ([L_{xx}]^T [Y] [L_{xx}] + [L_{xz}]^T [G] [L_{xz}]) \{u\} dL \\ + \int_L \{\delta u\}^T [L_{xx}]^T [P] \{\phi\} dL = \int_L \{\delta u\}^T \{F\} dL, \\ \int_L \{\delta \phi\}^T [P]^T [L_{xx}] \{u\} dL - \int_L \{\delta \phi\}^T [C] \{\phi\} dL = - \int_L \{\delta \phi\}^T \{\tau\} dL. \end{aligned} \quad (25)$$

Os termos não nulos das matrizes de massa  $[J]$ , de rigidez extensional  $[Y]$  e de corte  $[G]$ , de dimensão  $(5 \times 5)$ , de rigidez piezoelétrica equivalente  $[P]$  e capacitância  $[C]$ , de dimensão  $(5 \times 2)$  e  $(2 \times 2)$ , respectivamente, são definidos em (21). Os termos dos vectores de forças mecânicas aplicadas  $\{F\}$  e densidade de carga eléctrica  $\{\tau\}$ , de dimensões  $(5 \times 1)$  e  $(2 \times 1)$ , respectivamente, são apresentados em (22). Os operadores diferenciais  $[L_{xx}]$  e  $[L_{xz}]$  em (25), usados na definição das deformações generalizadas, são definidos por

$$[L_{xx}] = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, [L_{xz}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Para obter uma solução aproximada das equações (25), o comprimento total da viga  $L$  é discretizado em  $r$  elementos finitos de comprimento  $L_e$ . Para a definição das aproximações locais dos graus de liberdade mecânicos e eléctricos generalizados, é isolado da malha de elementos finitos um elemento genérico (figura 2). O elemento finito de viga de dois nós possui cinco graus de liberdade mecânicos por nó e dois graus de liberdade eléctricos por

elemento, com os vectores nodais de graus de liberdade mecânicos  $\{\bar{u}^e\}$  e eléctricos  $\{\bar{\phi}^e\}$  dados por

$$\{\bar{u}^e\} = \{\bar{u}_0^1, \bar{w}_0^1, \bar{\theta}_a^1, \bar{\theta}_n^1, \bar{\theta}_b^1, \bar{u}_0^2, \bar{w}_0^2, \bar{\theta}_a^2, \bar{\theta}_n^2, \bar{\theta}_b^2\}^T, \quad \{\bar{\phi}^e\} = \{\bar{\phi}_a, \bar{\phi}_b\}^T. \quad (27)$$

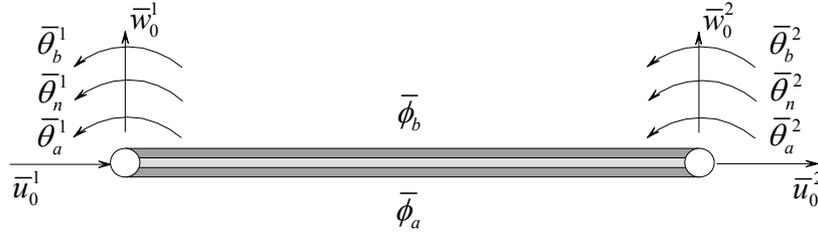


Figura 2. Elemento finito de viga adaptativa de três camadas

Dos operadores diferenciais em (26), constata-se que as equações em (25) contêm, no máximo, derivadas de primeira ordem dos deslocamentos generalizados e de ordem zero dos potenciais eléctricos. Assim, os deslocamentos em cada subdomínio elementar devem, no mínimo, ser aproximados por funções de interpolação lineares de Lagrange de continuidade  $C^0$ . Relativamente às diferenças de potencial eléctrico, são utilizadas funções de aproximação unitárias, tomando as diferenças de potencial um valor constante em cada subdomínio elementar, não sendo, pois, considerada a sua continuidade entre elementos adjacentes. As funções de interpolação são agrupadas nas matrizes de interpolação mecânica  $[N_u]$  e eléctrica  $[N_\phi]$ , e os deslocamentos generalizados  $\{u^e\}$  e diferenças de potencial  $\{\phi^e\}$  no subdomínio elementar são aproximados por

$$\{u^e(x, t)\} = [N_u] \{\bar{u}^e\}, \quad \{\phi^e(x, t)\} = [N_\phi] \{\bar{\phi}^e\}. \quad (28)$$

Considerando a equação (25) estabelecida ao nível do elemento finito, em que  $L = L_e$ , obtêm-se as matrizes e vectores do elemento definidas por

$$\begin{aligned} [M_{uu}^e] &= \int_{L_e} [N_u]^T [J] [N_u] dL_e, \quad [K_{uu}^{e(\phi)}] = \int_{L_e} [B_{xx}]^T [Y] [B_{xx}] dL_e + k_s \int_{L_e} [B_{xz}]^T [G] [B_{xz}] dL_e, \\ [K_{u\phi}^e] &= [K_{\phi u}^e]^T = \int_{L_e} [B_{xx}]^T [P] dL_e, \quad [K_{\phi\phi}^e] = \int_{L_e} [N_\phi]^T [C] [N_\phi] dL_e, \\ \{F^e\} &= \int_{L_e} [N_u]^T \{F\} dL_e, \quad \{Q^e\} = \int_{L_e} [N_\phi]^T \{\tau\} dL_e, \end{aligned} \quad (29)$$

em que  $[M_{uu}^e]$  e  $[K_{uu}^{e(\phi)}]$  são as matrizes de massa e de rigidez mecânica,  $[K_{u\phi}^e] = [K_{\phi u}^e]^T$  são as matrizes de rigidez electromecânica,  $[K_{\phi\phi}^e]$  é a matriz de rigidez eléctrica,  $\{F^e\}$  é o vector de forças mecânicas nodais e  $\{Q^e\}$  é o vector de cargas eléctricas aplicadas. Note-se que o índice  $(\phi)$  é utilizado na notação da matriz de rigidez mecânica de forma a evidenciar que o aumento de rigidez devido aos campos eléctricos induzidos é considerado através da alteração das constantes de rigidez em (23). As matrizes de deformação extensional  $[B_{xx}]$  e de corte  $[B_{xz}]$  são dadas por

$$[B_{xx}] = [L_{xx}][N_u], [B_{xz}] = [L_{xz}][N_u]. \quad (30)$$

Para evitar o aumento de rigidez do elemento para espessuras reduzidas (*shear-locking*), no cálculo da matriz de rigidez mecânica utiliza-se a integração selectiva.

## 4.2. Modelo espacial

O modelo espacial da discretização por elementos finitos, constituído pelas equações do movimento e de equilíbrio electrostático, após a *assemblagem* das matrizes e vectores dos elementos em (29), tem a forma

$$[M_{uu}]\{\ddot{\bar{u}}\} + [K_{uu}^{(\phi)}]\{\bar{u}\} + [K_{u\phi}]\{\bar{\phi}\} = \{F\}, [K_{\phi u}]\{\bar{u}\} + [K_{\phi\phi}]\{\bar{\phi}\} = \{Q\}, \quad (31)$$

Para a condição de camadas com eléctrodos, duas configurações dos eléctrodos são possíveis, nomeadamente eléctrodos em circuito aberto ou circuito fechado. No caso dos eléctrodos estarem em circuito aberto ( $\{Q\} = \{0\}$ ), o aumento de rigidez, devido à distribuição quadrática do potencial eléctrico no interior da camada, é considerado através da modificação das constantes de rigidez de flexão e de corte em (23). Além disso, as diferenças de potencial dos eléctrodos não especificadas, que correspondem aos graus de liberdade eléctricos do elemento finito, podem ser estaticamente condensadas nas matrizes globais. Dessa forma, para a definição das diferenças de potencial  $\{\bar{\phi}\}$  não especificadas, duas alternativas são consideradas. A primeira delas conduz aos mesmos resultados que a condição de camadas sem eléctrodos [13], situação essa que corresponde à modelização mais habitualmente apresentada na literatura, em que

$$[M_{uu}]\{\ddot{\bar{u}}\} + [K_{uu}^*]\{\bar{u}\} = \{F\} \text{ com } [K_{uu}^*] = [K_{uu}^{(\phi)}] - [K_{u\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}]. \quad (32)$$

No entanto, a condição de área equipotencial não é respeitada. Para a verificação desta condição, é proposta uma condensação estática modificada das diferenças de potencial eléctrico não especificadas, a qual toma a forma

$$[M_{uu}]\{\ddot{\bar{u}}\} + [K_{uu}^{**}]\{\bar{u}\} = \{F\} \text{ com } [K_{uu}^{**}] = [K_{uu}^{(\phi)}] - [K_{u\phi}][\text{Avg}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}]. \quad (33)$$

De forma a respeitar a condição de área equipotencial dos eléctrodos foi utilizada uma *matriz de média* [Avg] [13]. Através dessa matriz, na determinação das diferenças de potencial eléctrico não especificadas, é considerada uma contribuição média de todos os elementos finitos adjacentes a uma separação finita (eléctrica) dos eléctrodos superficiais. Assim, essas duas alternativas conduzem a duas respostas mecânicas e eléctricas distintas para a condição de eléctrodos em circuito aberto, e a condição de camadas sem eléctrodos é distinguida da formulação convencional em (32).

No caso de os eléctrodos estarem em circuito fechado, os potenciais eléctricos não nulos no interior da camada (potencial eléctrico quadrático induzido) são considerados da mesma forma que na situação anterior, através de  $[K_{uu}^{(\phi)}]$ , mas uma vez que a diferença de potencial é nula ( $\{\bar{\phi}\} = \{0\}$ ), a condensação estática não é realizada e a expressão (32) é modificada para

$$[M_{uu}]\{\ddot{\bar{u}}\} + [K_{uu}^{(\phi)}]\{\bar{u}\} = \{F\}. \quad (34)$$

### 4.3. Modelo modal

O modelo espacial obtido pelo método dos elementos finitos possui, geralmente, um elevado número de graus de liberdade e as matrizes de massa e rigidez apresentam uma estrutura em forma de banda que representa o acoplamento entre os vários graus de liberdade. Quando se projecta um controlador, pode optar-se por um modelo completo do sistema e, consequentemente, por um esforço computacional elevado, ou por um modelo reduzido do sistema, o qual exige um esforço computacional menor. Com efeito, quando excitada, a viga adaptativa apresenta modos preferenciais de vibração, cuja amplitude depende do conteúdo espectral da excitação. Assim, existe uma grande vantagem na transformação das equações do sistema na base generalizada para a base modal. Dessa forma, em alternativa à utilização do modelo espacial para a caracterização do sistema, pode ser utilizado o modelo modal reduzido, o qual é mais conveniente do ponto de vista computacional e mais interessante na análise da contribuição individual dos modos naturais de vibração para a resposta global do sistema e, ainda, na inclusão do mecanismo de amortecimento. Neste estudo, adoptou-se um mecanismo de amortecimento viscoso introduzido sob a forma de razões de amortecimento modal.

Considerando que apenas os primeiros modos terão uma contribuição significativa na resposta global do sistema, devido ao facto de serem os de menor energia e, consequentemente, os mais facilmente excitáveis, a resposta do sistema é regulada apenas pelos primeiros  $r$  modos. Assim, a base modal necessária é de dimensão  $r$  e o vector dos deslocamentos  $\{\bar{u}\}$  pode ser aproximado pela sobreposição modal dos primeiros  $r$  modos,

$$\{\bar{u}\} = \sum_{i=1}^r \{\Psi\}_i \eta_i = [\Psi]\{\eta\}, \quad (35)$$

em que  $[\Psi] = [\{\Psi\}_1, \dots, \{\Psi\}_r]$  é a matriz modal e  $\{\eta\} = \{\eta_1, \dots, \eta_r\}^T$  o vector de coordenadas modais truncadas aos primeiros  $r$  modos. Dessa forma, a dimensão do sistema na base modal ou natural é dada pelo número de modos escolhidos para a sua modelização.

Com base na sobreposição modal truncada (35), as equações (31) do modelo espacial, com a inclusão da matriz de amortecimento modal, dão origem ao modelo modal reduzido de dimensão  $r$  na forma

$$\{\ddot{\eta}\} + [\Lambda]\{\dot{\eta}\} + [\Omega]\{\eta\} + [\Psi]^T [K_{u\phi}] \{\bar{\phi}\} = [\Psi]^T \{F\}, \quad [K_{\phi u}] [\Psi]\{\eta\} + [K_{\phi\phi}] \{\bar{\phi}\} = \{Q\}, \quad (36)$$

onde  $[\Lambda]$  e  $[\Omega]$  são matrizes diagonais cujos termos valem, respectivamente,  $2\xi_i \omega_i$  e  $\omega_i^2$ ,  $i=1, \dots, r$ , sendo  $\omega_i$  e  $\xi_i$  a frequência natural e a razão de amortecimento, e  $[\mathbf{I}]$  corresponde à matriz identidade.

## 5. CONTROLO ACTIVO DE VIBRAÇÕES

Os algoritmos de controlo constituem um aspecto integrante e fundamental no controlo activo de vibrações. Um dos objectivos do controlo activo de vibração pode ser a redução dos picos de ressonância da função de resposta em frequência – *active damping* [2], o qual pode ser conseguido sem um modelo da estrutura, desde que o par sensor e actuador estejam

convenientemente colocados na estrutura e possuam uma dinâmica perfeita. No entanto, este aspecto corresponde à situação ideal e, normalmente, os actuadores e sensores não possuem uma dinâmica perfeita e todo o sistema de amortecimento activo possui uma largura de banda finita. Com esse propósito, podem ser utilizadas técnicas clássicas de controlo baseadas no *feedback* da posição, velocidade ou aceleração. Um outro objectivo do controlo pode ser reduzir os efeitos de perturbações externas numa determinada banda de frequência, com a finalidade de manter uma determinada variável de controlo (a posição dum determinado ponto da estrutura) dentro duma gama de valores desejável – *model based feedback* [2]. O problema do projecto consiste então em encontrar o compensador apropriado que garanta a estabilidade do sistema em malha fechada. Nesta perspectiva, recorre-se às consideradas estratégias globais, as quais permitem atenuar todas as perturbações dentro da banda de frequência considerada. Em contrapartida, requerem um modelo matemático do sistema estrutural (modelo de elementos finitos) e têm uma largura de banda limitada pela resolução do modelo. Além disso, existe sempre a possibilidade que os modos residuais, fora da banda de frequência considerada, possam ser desestabilizados e que as perturbações fora da banda em análise possam ser amplificadas (*spillover*).

### 5.1. Representação no espaço de estados

O método das variáveis de estado é a base das teorias de controlo moderno [14]. A principal vantagem desta representação está relacionada com a maior facilidade de representação de sistemas com um elevado número de *inputs* e *outputs* e, ainda, com a possibilidade de representação de sistemas transientes não lineares.

As variáveis de estado do modelo modal reduzido definem-se por

$$\{x_1\} = \{\eta\}, \quad \{x_2\} = \{\dot{\eta}\}. \quad (37)$$

Um sistema em malha aberta é representado por um conjunto de duas equações diferenciais matriciais de primeira ordem em termos das variáveis de estado  $\{x_1\}$  e  $\{x_2\}$  e toma a forma

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B_u]\{r_u\} + [B_\phi]\{r_\phi\}, \quad \{y\} = [C]\{x\}, \quad (38)$$

em que  $\{x\}$  é o vector de estados,  $[A]$  é a matriz de sistema,  $[B_u]$  é a matriz de entradas mecânicas,  $[B_\phi]$  é a matriz de entradas (controlo) eléctricas,  $\{r_u\}$  é o vector de entradas mecânicas,  $\{r_\phi\}$  é o vector de entradas (controlo) eléctricas,  $\{y\}$  é o vector de saídas e  $[C]$  é a matriz de saídas, definidos por

$$\begin{aligned} \{x\} &= \begin{Bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \end{Bmatrix}, \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\phi}\}_s \\ \{\dot{\bar{\phi}}\}_s \end{Bmatrix}, \quad \{r_u\} = \{F\}, \quad \{r_\phi\} = \{\bar{\phi}\}_a, \quad [A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\Omega] & -[\Lambda] \end{bmatrix}, \\ [B_u] &= \begin{bmatrix} [0] \\ [\Psi]^T \end{bmatrix}, \quad [B_\phi] = \begin{bmatrix} [0] \\ [\Psi]^T [K_{u\phi}]_a \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} -[K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s [\Psi] & [0] \\ [0] & -[K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s [\Psi] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

Os índices “a” e “s” representam os graus de liberdade eléctricos (diferenças de potencial

eléctrico) associados com os actuadores e sensores, respectivamente.

## 5.2. Feedback da velocidade

O sistema em malha aberta contempla dois tipos de carregamento exterior distintos: carregamento mecânico  $\{F\}$  (forças nodais) e carregamento eléctrico  $\{\bar{\phi}\}_a$  (tensão eléctrica). Em malha fechada, e considerando o presente sistema de controlo, o carregamento eléctrico deixa de ser independente do sistema e passa a relacionar-se com a velocidade medida num determinado ponto da viga (sinal de *feedback*). Para o sistema em malha fechada, a tensão de controlo é definida de acordo com o tipo de *feedback* utilizado e, no presente estudo, o sinal de *feedback* é proporcional à velocidade transversal medida num determinado ponto da viga,

$$\{\bar{\phi}\}_a = -[K_g]\{x\}, \text{ com } [K_g] = -[[0] \ G\{[Loc][\Psi]\}], \quad (40)$$

em que  $[K_g]$  representa a matriz de ganho do *feedback*,  $G$  é o valor do ganho e  $[Loc]$  representa uma matriz booleana de identificação do grau de liberdade correspondente à velocidade medida. Assim, para o sistema em malha fechada, o vector de entradas apenas contempla a excitação mecânica  $\{r_u\}$ . Além disso, e uma vez que o vector de controlo  $\{r_\phi\}$  é definido apenas em função dos estados, a representação do sistema em malha fechada toma a forma

$$\{\dot{x}\} = ([A] - [B_\phi][K_g])\{x\} + [B_u]\{r_u\}. \quad (41)$$

Assim, a matriz de ganho  $[K_g]$  controla o sistema através da modificação da matriz de sistema. Assim, através da definição adequada da matriz de ganho, a lei de controlo permite estabilizar os modos de vibração do sistema aumentando o amortecimento modal (os modos iniciais de  $[A]$  transformam-se nos modos mais amortecidos de  $[A] - [B_\phi][K_g]$ ).

## 6. CASO DE ESTUDO

No sentido de validar por via experimental o modelo de elementos finitos de viga adaptativa e o algoritmo de controlo por *feedback* da velocidade, avaliaram-se as funções de resposta em frequência em malha aberta e malha fechada.

Nos ensaios experimentais foi utilizada uma viga de alumínio em consola com 400 mm de comprimento, 15 mm de largura e 2 mm de espessura, e duas cerâmicas piezoeléctricas PLT30/15/1-PX5-N (Philips Components) com 30 mm de comprimento, 15 mm de largura e 1 mm de espessura, as quais são fixadas em ambas as faces da viga a uma distância de 5 mm do encastramento. As propriedades do material da viga (alumínio) e das cerâmicas piezoeléctricas (PXE 5) são definidas nas tabelas 1 e 3, respectivamente. As razões de amortecimento modal utilizadas no modelo numérico foram identificadas por via experimental a partir de uma função de resposta em frequência em malha aberta (tabela 2).

Tabela 1. Propriedades materiais da viga

Alumínio	
$E$ [N m <sup>-2</sup> ]	70.00x10 <sup>9</sup>
$G$ [N m <sup>-2</sup> ]	26.92x10 <sup>9</sup>
$\rho$ [Kg m <sup>-3</sup> ]	2710

Tabela 2. Razões de amortecimento modal

Modos	1°	2°	3°	4°
$\xi$ [%].	1.71	0.72	0.42	0.41

Tabela 3. Propriedades do material piezoelétrico

PXE 5			
$c_{11}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	13.11x10 <sup>10</sup>	$d_{31}$ [m V <sup>-1</sup> ]	-215x10 <sup>-12</sup>
$c_{12}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	7.984x10 <sup>10</sup>	$d_{33}$ [m V <sup>-1</sup> ]	500x10 <sup>-12</sup>
$c_{13}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	8.439x10 <sup>10</sup>	$d_{15}$ [m V <sup>-1</sup> ]	515x10 <sup>-12</sup>
$c_{33}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	12.31x10 <sup>10</sup>	$\epsilon_{11}^T / \epsilon_0$	1800
$c_{44}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	2.564x10 <sup>10</sup>	$\epsilon_{33}^T / \epsilon_0$	2100
$c_{66}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	2.564x10 <sup>10</sup>	$\rho$ [Kg m <sup>-3</sup> ]	7800

De forma a implementar por via experimental um sistema de controlo por *feedback* com base nas medições da velocidade, foi utilizado um transdutor *laser* Polytec – OFV 303 para a medição da resposta dinâmica. Para a aquisição de dados foi utilizado um analisador dinâmico de sinal Brüel & Kjær – 2035 de dois canais com um módulo de geração de sinal. A excitação, de tipo multi-seno numa banda de frequência [0; 400 Hz], foi aplicada à viga através de uma cerâmica piezoelétrica. A montagem experimental é apresentada de forma esquemática na figura 3. As cerâmicas piezoelétricas (figura 4) foram fixadas na viga através de um adesivo não condutor à base de cianocrilato (Loctite - 496).

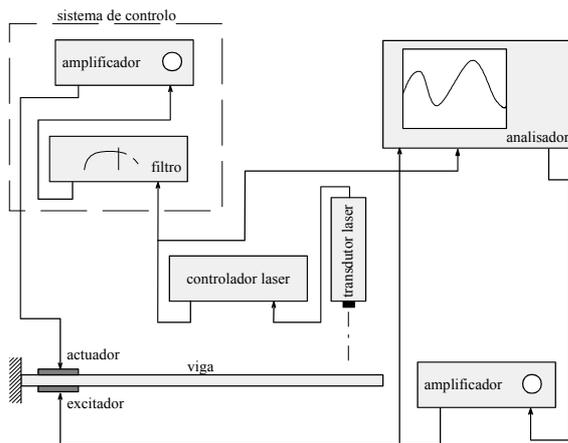


Figura 3. Esquema da montagem experimental do sistema de controlo por *feedback* da velocidade

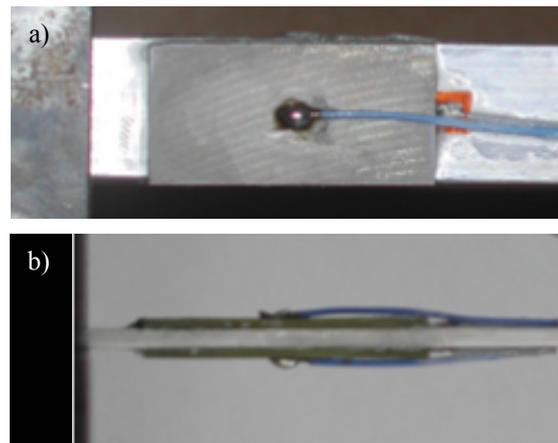


Figura 4. Montagem das cerâmicas piezoelétricas: a) vista de lado, b) vista de cima

A resposta da viga foi medida pelo transdutor *laser* a 15 mm da extremidade livre e o sinal do transdutor *laser* (velocidade) foi utilizado como tensão de controlo a aplicar à segunda cerâmica piezoelétrica (actuador). Para isso, o sinal produzido pelo transdutor é condicionado por um filtro Krohn-Hite – 3550 e por um amplificador operacional de ganho regulável, o qual possui um ganho máximo de 101 e uma tensão máxima de ±150 V.

Com base no modelo de elementos finitos desenvolvido, para o sistema em malha fechada com controlo por *feedback* da velocidade, o lugar geométrico das raízes, para ganhos

compreendidos nos intervalos  $[-\infty, 0]$  e  $[0, +\infty]$ , é apresentado nas figuras 5 e 6, respectivamente. É possível observar-se que o aumento do ganho de controlo desloca os pólos ( $\times$ ) do sistema em malha fechada na direcção dos zeros ( $\circ$ ). Esse deslocamento, no caso de os afastar do eixo imaginário,  $\text{Re}(s)=0$ , e desde que se situem no semi-plano esquerdo, representa um acréscimo da razão de amortecimento modal, a qual, para  $\xi \ll 1$ , pode ser aproximada por  $\xi = -\text{Re}(s)/|\text{Im}(s)|$ .

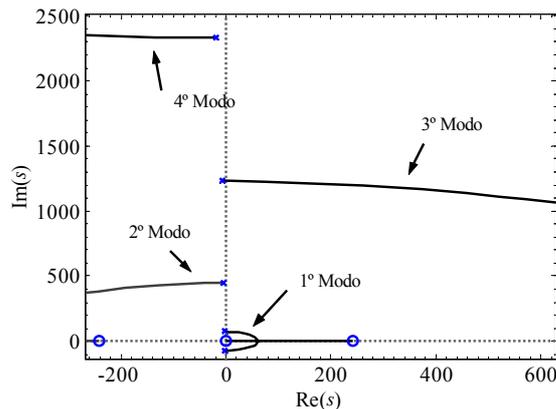


Figura 5. Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada para ganhos no intervalo  $[-\infty, 0]$

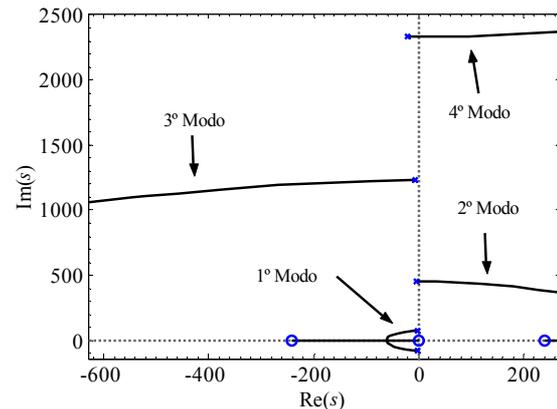


Figura 6. Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada para ganhos no intervalo  $[0, +\infty]$ .

Da análise das figuras 5 e 6 constata-se que existe uma simetria de comportamento consoante o sinal do ganho escolhido. Assim, para valores positivos do ganho, os modos pares são facilmente excitados, mesmo para valores de ganho relativamente baixos. Ao contrário, para ganhos negativos, um comportamento oposto é obtido e os modos ímpares são facilmente excitados. Dessa forma, com o objectivo de amortecer o primeiro modo, o valor do ganho, que afecta todos os modos, teria que ser limitado ao ganho máximo admissível sem que o segundo e o quarto modo sejam excitados. Porém, nestas condições, o sistema de controlo seria muito ineficiente. Uma alternativa é considerar, na definição da tensão de controlo, um valor de velocidade com apenas a contribuição do primeiro modo [15]. Essa situação foi materializada experimentalmente através de um filtro passa-banda (10-12 Hz) regulado ao primeiro modo, o qual foi aplicado ao sinal da velocidade medida. Assim, de forma a amortecer o primeiro modo, o valor do ganho pode ser escolhido livremente, apenas limitado pela tensão de saturação dos actuadores piezoeléctricos, sem haver o risco de excitar os modos pares.

A função de resposta em frequência em malha aberta, obtida entre a velocidade medida a 15 mm da extremidade livre da viga e a tensão aplicada ao excitador, e a sua função coerência, são apresentadas na figura 7. Como se pode constatar, existe uma boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos. As frequências de ressonância dos dois primeiros modos apresentam desvios reduzidos e verifica-se um desvio máximo de

4.75% para o quarto modo (tabela 4). Com efeito, verifica-se que o modelo numérico sobrestima o valor efectivo das frequências de ressonância, o que se atribui à colagem das cerâmicas piezoeléctricas que, dada a dificuldade em garantir a transmissibilidade completa dos esforços nas interfaces com a viga, dá origem a uma diminuição da rigidez da estrutura, mantendo, no entanto, a sua massa inalterada. Dessa forma, as frequências de ressonância experimentais tomam valores inferiores aos numéricos. Na figura 7 pode constatar-se que a função coerência evidencia uma boa eficiência do actuador piezoeléctrico na excitação da estrutura, demonstrando a relação de causalidade entre a resposta e a excitação, e revela uma elevada razão sinal/ruído.

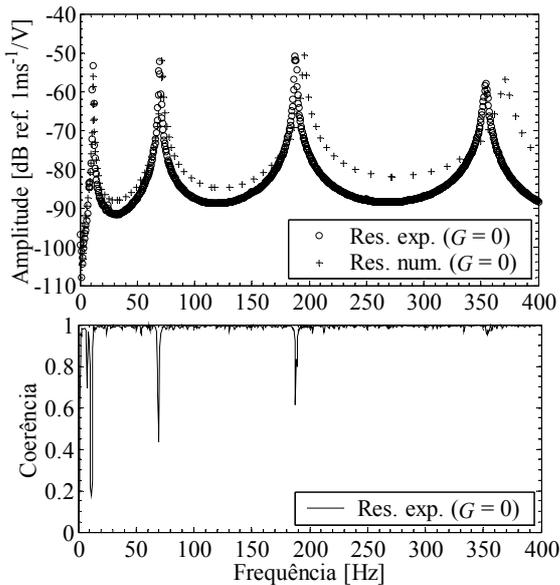


Figura 7. FRF e coerência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha aberta

Tabela 4. Freq. naturais do sistema em malha aberta

Modos	1°	2°	3°	4°
Res. exp. [Hz]	11.50	69.50	188.0	354.0
Res. num. [Hz]	11.71	71.75	195.9	370.8
Desvio [%]	1.83	3.24	4.20	4.75

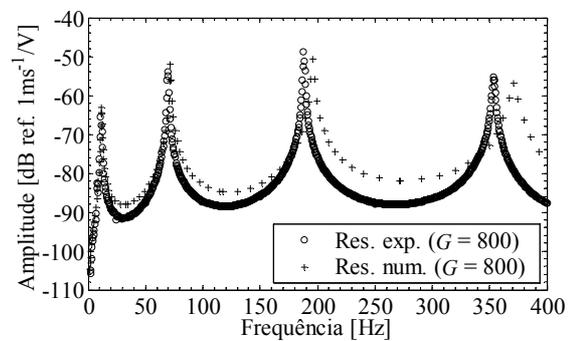


Figura 8. FRF entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada (c/ filtro)

As funções de resposta em frequência numérica e experimental em malha fechada, obtidas para um valor de ganho  $G = 800$  ( $G = G_{\text{amp}} \times \text{Sens.}_{\text{laser}}$ ), são apresentadas na figura 8. Como se pode observar na figura, apenas o primeiro modo é amortecido. Ambos os resultados, experimentais e numéricos, demonstram esse facto. A concordância entre resultados é bastante boa e a amplitude do primeiro modo em malha aberta (figura 7), com um valor médio entre os resultados experimentais e numéricos de  $-55$  dB, diminui para cerca de  $-65$  dB em malha fechada.

Como referido anteriormente, e de forma a poder otimizar a razão de amortecimento do primeiro modo sem excitar os modos pares, torna-se necessário filtrar o sinal de *feedback*. Nas figuras 9 e 10 são apresentadas as funções de resposta em frequência do sistema em malha fechada, sem recorrer à filtragem do sinal de *feedback*. Dos resultados numéricos e experimentais constata-se que, para valores de ganho positivos crescentes os modos pares são excitados e os ímpares amortecidos (figura 9). Porém, quando o valor do ganho é negativo

(figura 10), o comportamento oposto é observado, confirmando-se, assim, as indicações fornecidas pelo lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada (figuras 5 e 6).

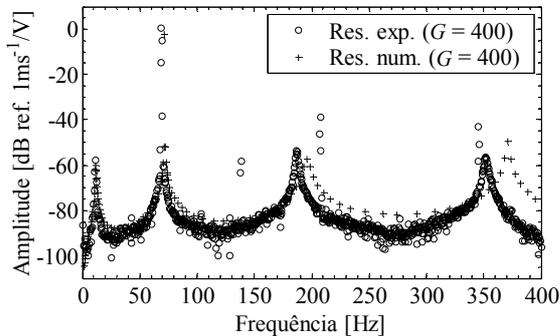


Figura 9. FRF entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada (s/ filtro, ganho positivo)

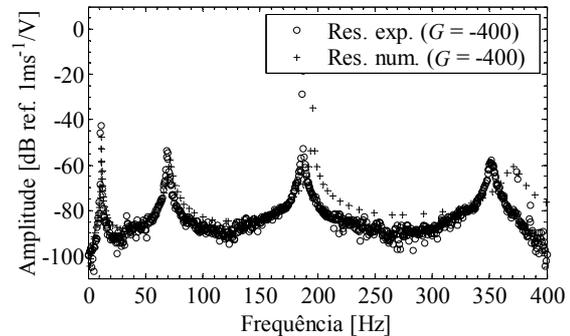


Figura 10. FRF entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada (s/ filtro, ganho negativo)

## 7. CONCLUSÃO

Da análise experimental verificou-se que a colagem das cerâmicas piezoeléctricas condiciona fortemente o desempenho do sistema adaptativo. Uma correcta colagem deverá ser efectuada de forma a garantir uma boa transmissibilidade de esforços nas interfaces com a viga, permitindo assim uma melhor capacidade de actuação das cerâmicas piezoeléctricas, e uma melhor concordância entre o modelo numérico e o experimental.

O sistema de controlo por *feedback* da velocidade, utilizando um transdutor *laser* como sensor, mostrou-se eficiente no controlo de vibrações. Com este esquema de controlo, foram obtidas razões de amortecimento consideráveis com um esforço de controlo admissível. Porém, os resultados numéricos e experimentais mostraram que elevados ganhos de controlo podem desestabilizar determinados modos. Para evitar este fenómeno recorreu-se à filtragem do sinal de forma a controlar especificamente um determinado modo, tendo sido demonstrado, na aplicação em causa, que esse tipo de controlo é bastante eficiente no amortecimento do primeiro modo.

O elemento finito desenvolvido demonstrou, através da comparação dos resultados numéricos com os experimentais, uma elevada robustez e fiabilidade na obtenção da resposta mecânica e eléctrica de vigas adaptativas. Além disso, o modelo numérico proposto constitui uma ferramenta particularmente interessante na antevisão e resolução de eventuais instabilidades, permitindo, numa fase de concepção do sistema de controlo, analisar e definir a melhor solução para o controlo activo de vibrações. Dessa forma, a implementação experimental é facilitada e a sua performance é melhorada.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação para a Ciência e a Tecnologia a Bolsa de Investigação Científica concedida no âmbito do financiamento plurianual das unidades de investigação.

## REFERÊNCIAS

- [1] C.R. Fuller, S.J. Elliott e P.A. Nelson, *Active control of vibration*, Academic Press, London (1996).
- [2] A. Preumont, *Vibration control of active structures: An introduction*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).
- [3] J.F. Nye, *Physical properties of crystals: Their representation by tensors and matrices*, Clarendon Press, Oxford (1957).
- [4] A. Benjeddou, Advances in piezoelectric finite element modelling of adaptive structural elements: A survey, *Computers and Structures*, **76**, 347-363 (2000).
- [5] D.H. Robbins e J.N. Reddy, Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layerwise displacement theory, *Computers and Structures*, **41**, 265-279 (1991).
- [6] H.F. Tiersten, *Linear piezoelectric plate vibrations*, Plenum Press, New York (1969).
- [7] H.S. Tzou, *Piezoelectric shells: Distributed sensing and control of continua*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1993).
- [8] N.N. Rogacheva, *The theory of piezoelectric shells and plates*, CRC Press, Boca Raton, London (1994).
- [9] D.A. Saravanos, P.R. Heyliger e D.A. Hopkins, Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates, *International Journal of Solids and Structures*, **34**, 359-378 (1997).
- [10] IEEE Std, *Standard on piezoelectricity*, ANSI/IEEE Std 176-1987 (1988).
- [11] M. Krommer e H. Irschik, On the influence of the electric field on free transverse vibrations of smart beams, *Smart Materials and Structures*, **8**, 401-410 (1999).
- [12] D.A. Saravanos e P.R. Heyliger, Coupled layerwise analysis of composite beams with embedded piezoelectric sensors and actuators, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **6**, 350-363 (1995).
- [13] C.M.A. Vasques e J. Dias Rodrigues, Coupled three-layered analysis of smart piezoelectric beams with different electric boundary conditions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, submetido para publicação.
- [14] J.B. Burl, *Linear optimal control*, Addison-Wesley, California (1999).
- [15] C.M.A. Vasques e J. Dias Rodrigues, Validação experimental do modelo layerwise no controlo activo de vibrações de vigas com actuadores piezoeléctricos e um transdutor laser, *Mecânica Experimental*, submetido para publicação.