U. PORTO
FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Transformadas aritméticas relacionadas com a função zeta de Riemann e fórmulas do tipo de Müntz e de Poisson

Hélder Alexandre Sá da Costa Lima
Dissertação de Mestrado apresentada à
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto,
Matemática

2016

Transformadas aritméticas relacionadas com a função zeta de Riemann e fórmulas do tipo de Müntz e de Poisson

Hélder Alexandre Sá da Costa Lima

Mestrado em Matemática
Departamento de Matemática
2016

Orientador
Semyon Borisovich Yakubovich, Professor Associado,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ______/______/_________

Agradecimentos

Aos meus pais, porque sem toda a ajuda deles nada disto era possível.
Ao meu orientador, Professor Semyon Yakubovich, pela sua disponibilidade, por toda a ajuda que me deu e por todos os conhecimentos que me transmitiu.
A todos os professores que me deram aulas nestes 5 anos na faculdade, por tudo o que me ensinaram e pela sua contribuição para a minha formação.
Aos RAM, por terem sido fundamentais para estes anos na faculdade terem sido uma experiência muito agradável.

Resumo

Nesta tese estudamos funções aritméticas, a transformada de Mellin e a função zeta de Riemann e introduzimos uma nova família de classes de funções na qual investigamos o que denominamos por transformadas aritméticas. De seguida, usamos a nossa investigação sobre transformadas aritméticas para demonstrar duas fórmulas clássicas, deduzidas por Müntz e Poisson, que são válidas para funções nas classes que introduzimos, usando métodos que podem ser generalizados para deduzir novas fórmulas e também exibimos algumas fórmulas semelhantes à fórmula de Müntz.

Palavras-chave: Transformadas aritméticas, funções aritméticas, transformada de Mellin, função zeta de Riemann, fórmula de Müntz, fórmula de Poisson.

Abstract

In this thesis we study arithmetic functions, the Mellin transform and the Riemann zeta function and we introduce a new family of classes of functions where we investigate what we call arithmetic transforms. Then we use our investigation of arithmetic transforms to demonstrate two classical formulas, deduced by Müntz and Poisson, valid for functions in the classes we introduce, making proofs that can be generalized to deduce new formulas and we also exhibit some formulas similar to the Müntz formula.

Keywords: Arithmetic transforms, aritmetic functions, Mellin transform, Riemann zeta function, Müntz formula, Poisson formula.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

No artigo [Yak14] do meu orientador podemos ver o que nós vamos denominar por transformadas aritméticas, que são transformadas que podem ser definidas como séries onde aparecem funções aritméticas ou, de forma equivalente, como integrais sobre rectas verticais do plano complexo nos quais a função zeta de Riemann aparece no integrando. O objetivo principal desta tese é usar essas transformadas aritméticas para demonstrar duas fórmulas descobertas pelo matemático alemão Müntz (1884-1956) e pelo matemático francês Poisson (1781-1840), às quais nos vamos referir por fórmula de Müntz e fórmula de Poisson, respectivamente, e fazer essas demonstrações de forma a podermos generalizá-las para deduzir novas fórmulas semelhantes a estas. Esta tese vai estar intimamente relacionada com a teoria das transformadas integrais, mais especificamente da transformada de Mellin, e das funções especiais, como a função gama de Euler e, especialmente, a função zeta de Riemann.

Após um breve capítulo com alguns resultados preliminares, o tema do capítulo 3 são as funções aritméticas, que são funções definidas no conjunto dos números naturais, e as séries de Dirichlet, que são séries onde aparecem funções aritméticas, baptizadas em homenagem ao matemático alemão Dirichlet (1805-1859). Note-se aqui que, no contexto desta tese, o conjunto dos números naturais, que vamos denotar como usual por $\mathbb{N}$, é o conjunto dos inteiros positivos (para o conjunto dos inteiros não negativos vamos utilizar a notação $\mathbb{N}_0$). Neste capítulo vamos começar por falar sobre um produto de funções aritméticas, introduzido por Dirichlet e denominado usualmente por convolução de Dirichlet, e sobre funções aritméticas multiplicativas (e completamente multiplicativas), a seguir vamos exibir alguns exemplos importantes de funções aritméticas que vão voltar a aparecer no capítulo 5 e finalmente vamos ver alguns resultados gerais sobre séries de Dirichlet.

O primeiro objectivo do capítulo 4 é fazer uma introdução à transformada de Mellin, uma transformada integral baptizada em homenagem ao matemático finlandês Hjalmar Mellin (1854-1933) e que vai ser uma ferramenta muito importante ao longo desta tese. Mas antes disso vamos fazer uma breve abordagem à transformada de Fourier, provavelmente a mais conhecida de todas as transformadas integrais, porque a transformada de Mellin pode ser obtida a partir da transformada de Fourier por uma mudança de variável, logo alguns resultados para a transformada de Mellin podem ser obtidos a partir de resultados análogos para a transformada de Fourier. Vamos também definir as transformadas de Fourier de seno e de cosseno, porque esta última aparece na fórmula de Poisson. De seguida, vamos introduzir uma nova família de classes de funções $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \in \mathbb{N}_0$, que generaliza a classe de funções $\mathcal{M}_{\alpha}$, com $\alpha > 1$, introduzida no artigo [Yak15]. Esta família de classes de funções vai ter um papel fundamental nesta tese porque o estudo de transformadas aritméticas que vamos fazer no capítulo 6 e as demonstrações de fórmulas que vamos fazer nos capítulos 7 e 8 vão ser sempre para funções nessas classes. Vamos também fazer um estudo aprofundado da transformada de Mellin das funções nas classes $\mathcal{M}_{\alpha,n}$. Um exemplo especialmente interessante da transformada de Mellin de uma função que está em todas as classes $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \in \mathbb{N}_0$, é a função gama de Euler. Assim vamos terminar o capítulo 4, estudando esta função, baptizada em homenagem ao matemático suiço Leonhard Euler (1707-1783), que é uma função analítica (em quase todo o plano complexo) que generaliza a função factorial e é provavelmente a mais conhecida das chamadas funções especiais, tendo sido alvo do interesse de muitos dos mais renomeados matemáticos desde o século XVIII até ao presente.

O tema do capítulo 5 é a função zeta de Riemann, baptizada em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866). A função zeta foi introduzida por Euler mas apenas para inteiros positivos. Euler conseguiu determinar os valores da função zeta nos inteiros positivos pares no seu artigo ”On the sums of series of reciprocals” publicado em 1740. Anteriormente Euler já tinha calculado o valor de $\zeta(2)$, que nos vai ser útil para deduzir uma fórmula no capítulo 7, o que lhe permitiu resolver o problema de Basel que perguntava o valor da série dos inversos dos quadrados perfeitos. Mais tarde, Riemann no seu artigo ”On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude” generalizou a função zeta para variável complexa, provou a sua continuação como uma função analítica em todo o plano complexo excepto no ponto $s = 1$ e estabeleceu uma relação entre os zeros da função zeta e a distribuição dos números primos, fazendo da função zeta provavelmente a ferramenta mais importante no estudo dos números primos. Foi também nesse artigo que Riemann publicou pela primeira vez a hipótese de Riemann que é um dos sete problemas do milénio seleccionados pelo Clay Mathematics Institute e está relacionado com a distribuição dos zeros da função zeta. Assim, por curiosidade, no capítulo 5 além de vermos outros resultados sobre a função zeta, incluindo a sua continuação analítica e a sua equação funcional, vamos também fazer uma referência à hipótese de Riemann, explicando porque é que esta se reduz à chamada faixa crítica da função zeta de Riemann: $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Ainda no capítulo sobre a função zeta vamos ter uma secção onde vamos exibir várias identidades que nos permitem escrever expressões onde aparece a função zeta de Riemann na forma de séries de Dirichlet absolutamente convergentes, onde aparecem algumas das funções aritméticas apresentadas no capítulo 3. As igualdades entre as séries e os integrais que definem as transformadas aritméticas introduzidas em [Yak14] resultam destas identidades.

No capítulo 6 vamos enunciar e demonstrar uma proposição que nos diz como podemos, a partir de cada série de Dirichlet exibida no capítulo 5, obter uma transformada aritmética que pode ser definida equivalentemente em forma de série ou integral, e vamos estudar uma transformada aritmética específica, que vamos denominar por transformada de Möbius, devido ao aparecimento da função de Möbius (uma das funções aritméticas que vão ser exibidas no capítulo 3) na sua transformada inversa. Esta transformada é semelhante a uma transformada referida na secção 2.12. do livro [Har40]. O nosso objectivo neste capítulo vai ser encontrar fórmulas explícitas quer em forma de série quer em forma de integral para esta transformada, para a sua inversa, e para as compostas de sucessivas iterações quer da transformada de Möbius quer da sua inversa.

Todo o trabalho que vamos fazer no capítulo 6 é feito no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$. Mas, como estamos a lidar com a função zeta de Riemann, é mais interessante entrarmos na faixa crítica $0 < \operatorname{Re} s < 1$. E é isso que fazemos no capítulo 7, onde, movendo o integral da transformada de Möbius para a faixa crítica, conseguimos demonstrar, nas classes de funções introduzidas no capítulo 4, a fórmula de Müntz, que pode ser encontrada na secção 2.11. de [Tit86],

$$\zeta(s) \int_0^\infty f(y) y^{s-1} dy = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty f(nx) - \frac{1}{x} \int_0^\infty f(t)dt \right) x^{s-1} dx,$$

onde $0 < \operatorname{Re} s < 1$. De seguida, vamos adaptar a nossa demonstração da fórmula de Müntz, partindo de outras transformadas aritméticas diferentes da transformada de Möbius, para deduzirmos, outras fórmulas semelhantes à fórmula de Müntz, que vamos denominar por fórmulas do tipo de Müntz, também para funções nas classes introduzidas no capítulo 4. Vamos terminar este capítulo obtendo fórmulas que relacionam as funções gama e zeta como casos particulares das fórmulas provadas anteriormente no capítulo.

Finalmente, no capítulo 8 vamos demonstrar, também para funções nas classes introduzidas no capítulo 4, a fórmula de Poisson, que pode ser encontrada na secção 2.8. de [Tit48],

$$\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2}(\mathcal{F}_c f)(0)+\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{F}_c f)\,(n\beta)\right)=\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)\right),$$

onde $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha\beta = 2\pi$ e $\mathcal{F}_c f$ é a transformada de Fourier de cosseno de f que, como já foi referido anteriormente, vai ser definida no capítulo 4. Para isso, vamos começar por mover o mesmo integral que definia a transformada de Möbius e que era utilizado na demonstração da fórmula de Müntz para a faixa $-1 < \operatorname{Re} s < 0$ e, de seguida, vamos utilizar vários resultados dos capítulos anteriores, incluindo a equação funcional da função zeta e várias fórmulas relacionadas com a função gama, além de algumas das propriedades das classes $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, conseguindo desta forma deduzir a fórmula de Poisson.

Capítulo 2

Resultados preliminares

Neste capítulo vamos apresentar (sem demonstrações) alguns resultados preliminares que nos vão ser úteis ao longo desta tese.
Em primeiro lugar vamos definir o espaço $L_1(\Omega)$ para uma curva Ω.

Definição 2.1. *Seja f uma função (real ou complexa) cujo domínio contém uma curva Ω. Então dizemos que $f \in L_1(\Omega)$ se o integral $\int_\Omega |f(x)|dx$ é convergente.*

De seguida apresentamos três teoremas que podem ser encontrados em [Rud87], os dois primeiros no capítulo 2 e o último no capítulo 8, e que nos permitem, sob determinadas condições, passar limites para dentro de integrais, trocar a ordem de sumação e integração em integrais de séries e trocar a ordem de integração em integrais duplos, respectivamente.

Teorema 2.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções complexas integráveis num domínio X tais que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para todo o $x \in X$. Se existir uma função $g \in L_1(X)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e para todo o $x \in X$, então $f \in L_1(X)$ e*

$$\int_X f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx. \tag{2.0.1}$$

Teorema 2.3. *Seja $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções complexas com domínio Ω tais que $f_n(x) \in L_1(\Omega)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |f_n(x)|dx < \infty.$$

Então a série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge para quase todo o $x \in \Omega$, $f(x) \in L_1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n(x)dx. \tag{2.0.2}$$

Teorema 2.4 (Teorema de Fubini)**.** *Seja $f(x,y)$ uma função definida em $X \times Y$ tal que*

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|dy \right) dx < \infty. \tag{2.0.3}$$

Então podemos trocar a ordem de integração de f, ou seja,

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)dx \right) dy. \tag{2.0.4}$$

De seguida, vamos enunciar o teorema integral de Cauchy e o teorema dos resíduos de Cauchy, dois dos teoremas fundamentais da análise complexa e, mais especificamente, do cálculo de integrais sobre curvas do plano complexo, que podem ser encontrados, por exemplo, na secção 2.1. do livro [Mar83].

Teorema 2.5 (Teorema integral de Cauchy)**.** *Seja $f(z)$ uma função analítica num domínio limitado simplesmente conexo Ω. Então*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

para qualquer curva $\gamma \subset \Omega$ fechada.

Teorema 2.6 (Teorema dos resíduos de Cauchy)**.** *Seja Ω um domínio, limitado por uma curva de Jordan γ, e $f(z)$ uma função analítica em todos os pontos de Ω excepto num número finito de pontos de singularidade $a_1, \cdots, a_k$. Então,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \operatorname*{res}_{z=a_i} f(z).$$

Ao longo desta tese vão aparecer várias vezes funções de variável complexa definidas por séries e integrais uniformemente convergentes. Por essa razão, vão nos ser úteis os próximos quatro resultados onde apresentamos os testes de Weierstrass para convergência uniforme de séries e de integrais e dois teoremas que nos mostram como definir funções analíticas a partir de séries e integrais uniformemente convergentes. Todos estes resultados podem ser encontrados em [Tit39], nas secções 1.1, 1.5, 2.8 e 2.8, respectivamente.

Teorema 2.7 (Teste de Weierstrass para convergência uniforme de séries)**.** *Seja* $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções definidas num domínio* D. *Se existir uma sucessão* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reais positivos tal que* $|f_n(z)| \leq a_n$, *para todo o* $n \in \mathbb{N}$ *e para todo o* $z \in D$, *e a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniformemente em* D.

Teorema 2.8 (Teste de Weierstrass para convergência uniforme de integrais)**.** *Seja* $f(z, w)$ *uma função de duas variáveis, onde* z *está numa região* D *e* w *está numa curva* Ω. *Se existir uma função* $g(w)$ *definida em* Ω *tal que* $|f(z, w)| \leq g(w)$, *para todo o* $z \in D$ *e para todo o* $w \in \Omega$, *e o integral* $\int_{\Omega} g(w)dw$ *é convergente, então o integral* $\int_{\Omega} f(z, w)dw$ *converge uniformemente em* D.

Teorema 2.9 (Funções analíticas definidas por séries uniformemente convergentes)**.** *Seja* $\{u_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções analíticas num região* D *do plano complexo tal que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *é uniformemente convergente em qualquer região* D' *interior de* D.
Então a função $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ *é analítica em* D *e as suas derivadas podem ser calculadas por derivação termo-a-termo.*

Teorema 2.10 (Funções analíticas definidas por integrais uniformemente convergentes)**.** *Seja* $f(z, w)$ *uma função contínua de variáveis complexas, onde* z *está numa região* D *e* w *está numa curva* Ω, *tal que, para qualquer* $w \in \Omega$ *fixo,* $f(z, w)$ *é uma função analítica em* D.
Então, se o integral $\int_{\Omega} f(z, w)dw$ *convergir uniformemente em* D, *a função* $F(z)$ *definida por esse integral é uma função analítica em* D *e as suas derivadas podem ser calculadas derivando dentro do integral.*

Contudo nem sempre essas séries e esses integrais que definem funções analíticas vão convergir em todo o plano complexo, o que nos vai fazer necessitar algumas vezes de prolongar funções analíticas para domínios maiores do que o seu domínio original. Para isso, vamos usar a técnica da continuação analítica mas, antes de definirmos o que é a continuação analítica de uma função analítica, vamos enunciar o seguinte teorema de unicidade de uma função analítica que pode ser encontrado novamente na secção 2.1. de [Mar83].

Teorema 2.11 (Unicidade de uma função analítica)**.** *Se duas funções* $f(z)$ *e* $g(z)$ *são analíticas num domínio* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *e se* $f(z) = g(z)$, *para todo o* $z \in E$, *onde* $E \subset \Omega$ *com algum ponto de acumulação de* E *no interior de* Ω, *então* $f(z) = g(z)$ *para todo o* $z \in \Omega$.

Definição 2.12 (Continuação analítica de uma função analítica)**.** *Seja $f_1(z)$ uma função analítica definida num domínio $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ e seja $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ outro domínio tal que $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Se $f_2(z)$ é uma função analítica em Ω_2 tal que $f_1(z) = f_2(z)$, para todo o $z \in \Omega$, então $f_2(z)$ é a continuação analítica de $f_1(z)$ de Ω_1 para Ω_2 através de Ω.*

Note-se que uma consequência do teorema 2.11 é que se existe uma continuação analítica de uma função f para um domínio Ω então essa continuação analítica é única. O seguinte resultado é outra consequência do teorema 2.11.

Corolário 2.13 (Princípio da conservação de equações funcionais para funções analíticas)**.** *Se uma função $f(z)$ satisfaz uma equação funcional então a continuação analítica de f a um novo domínio satisfaz a mesma equação.*

Este corolário permite-nos usar equações funcionais para fazer a continuação analítica de funções analíticas em regiões do plano complexo.
Para finalizar este capítulo inicial, vamos agora introduzir a notação de Landau: $\mathcal{O}$ grande, o pequeno e $\sim$. A notação de Landau pode ser encontrada na secção 1.6. de [HW08].

Definição 2.14 (notação de Landau)**.** *Sejam f e g funções reais ou complexas definidas em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para $a \in \mathbb{K} \dot{\cup} \infty$, escreve-se:*

- *$f = \mathcal{O}(g)$, $x \to a$, se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M|g(x)|$ numa vizinhança de a;*
- *$f = o(g)$, $x \to a$, se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;*
- *$f \sim g$, $x \to a$, se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Nas condições desta definição, é fácil de observar que, se $f = o(g)$ ou $f \sim g$, $x \to a$, então $f = \mathcal{O}(g)$, $x \to a$; e que, se $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ e $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, $x \to a$, então $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$ (esta observação também é válida substituindo $\mathcal{O}$ por o ou por $\sim$).

Capítulo 3

Funções aritméticas e séries de Dirichlet

Tal como referido na introdução, neste capítulo vamos falar sobre funções aritméticas, que são funções reais ou complexas definidas no conjunto dos números naturais.

3.1 Convolução de Dirichlet e funções multiplicativas

Comecemos esta secção por definir a convolução de Dirichlet.

Definição 3.1 (convolução de Dirichlet)**.** *Se f e g são duas funções aritméticas então a sua convolução de Dirichlet é representada por $f * g$ e é definida por:*

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right). \tag{3.1.1}$$

Observe-se que a convolução de Dirichlet de f e g podia ser definida equivalentemente por

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b). \tag{3.1.2}$$

Após fazer esta observação, é imediato que a convolução de Dirichlet é comutativa.
A partir da fórmula (3.1.2) também podemos deduzir que, se f, g e h são funções aritméticas, então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$((f * g) * h)(n) = \sum_{abc=n} f(a)g(b)h(c) = (f * (g * h))(n). \tag{3.1.3}$$

Portanto podemos concluir que a convolução de Dirichlet é comutativa e associativa.

Defina-se a função aritmética δ por

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n > 1. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Para toda a função aritmética f, mostra-se, simplesmente aplicando as definições da convolução de Dirichlet e da função δ, que $f*\delta = f = \delta*f$. Portanto, δ é o elemento neutro para a convolução de Dirichlet.

Podemos ver, na secção 2.6. do livro [Apo76], que, para toda a função aritmética f tal que $f(1) \neq 0$, existe uma única função aritmética f^{-1} tal que $f * f^{-1} = \delta = f^{-1} * f$ e que essa função f^{-1}, que é designada por inverso de Dirichlet de f, pode ser obtida de forma recursiva a partir de f por $f^{-1}(1) = \dfrac{1}{f(1)}$ e $f^{-1}(n) = -\dfrac{1}{f(1)} \displaystyle\sum_{d|n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{-1}(d)$, para $n > 1$. Se f^{-1} é o inverso de Dirichlet de f, também f é o inverso de Dirichlet de f^{-1} e dizemos que f e f^{-1} são inversos de Dirichlet (um do outro). Além disso, se f e g são funções aritméticas com $f(1) \neq 0$ e $g(1) \neq 0$ então $(f * g)(1) = f(1)g(1) \neq 0$.

Portanto, as funções aritméticas f com $f(1) \neq 0$ munidas da convolução de Dirichlet formam um grupo. Um importante subgrupo deste grupo é constituído pelas funções aritméticas multiplicativas, das quais vamos falar de seguida.

Vamos agora definir funções aritméticas multiplicativas e completamente multiplicativas.

Definição 3.2. *Uma função aritmética é multiplicativa se f não for a função aritmética nula e $f(mn) = f(m)f(n)$ sempre que $(m, n) = 1$. Uma função multiplicativa é completamente multiplicativa se $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo o $m, n \in \mathbb{N}$.*

Por exemplo, δ é uma função aritmética multiplicativa e completamente multiplicativa. Podemos observar que, se f é uma função aritmética multiplicativa, então $f(1) = 1$. Além disso, também podemos observar que uma função aritmética f tal que $f(1) = 1$ é multiplicativa se e só se $f(p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}) = f(p_1^{a_1}) \cdots f(p_n^{a_n})$, para todos os primos p_i e para todos os naturais a_i, e é completamente multiplicativa se e só se for multiplicativa e se $f(p^a) = (f(p))^a$, para todo o primo p e para todo o natural a. Assim uma função multiplicativa fica completamente determinada pelo seu valor nas potências de primos e uma função completamente multiplicativa fica completamente determinada pelo seu valor nos primos.

Vamos agora fazer referência a dois resultados relacionados com a convolução de Dirichlet de funções multiplicativas, que podem ser encontrados na secção 2.10 de [Apo76]. O primeiro resultado afirma que se f e g são funções aritméticas multiplicativas, então $f * g$ também é multiplicativa. O segundo afirma que, se f e g são funções aritméticas tais que g e $f * g$ são multiplicativas, então f também é multiplicativa. Vamos ver mais tarde exemplos que mostram que estes dois resultados não são válidos se substituirmos no seu enunciado funções multiplicativas por funções completamente multiplicativas. Como $f * f^{-1} = \delta$ e δ é uma função aritmética multiplicativa, conclui-se, como corolário do resultado anterior, que, se f é uma função aritmética multiplicativa, então f^{-1} também é multiplicativa. Portanto, as funções aritméticas multiplicativas formam mesmo um subgrupo do grupo das funções aritméticas f com $f(1) \neq 0$.

3.2 Algumas funções aritméticas

Nesta secção vamos ver alguns exemplos importantes de funções aritméticas.

Definição 3.3. *A função de Möbius ($\mu(n)$) é uma função aritmética definida por:*

- $\mu(1) = 1$*;*
- $\mu(n) = (-1)^k$*, se n é o produto de k primos distintos;*
- $\mu(n) = 0$*, se existe algum primo p tal que $p^2 \mid n$.*

A partir desta definição, podemos observar que a função de Möbius é multiplicativa. Todavia a função de Möbius não é completamente multiplicativa pois, para qualquer primo p e qualquer $a > 1$, $\mu(p^a) = 0 \neq (\mu(p))^a$.

Uma propriedade particularmente interessante da função de Möbius diz-nos que, para todo o $n > 1$,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0. \tag{3.2.1}$$

Para demonstrar esta propriedade comecemos por notar que a função aritmética constante igual a 1, que vamos denotar por $\mathit{1}$, é multiplicativa e que a função que faz corresponder, a cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{d|n} \mu(d)$ é igual a $\mu * \mathit{1}$, logo também é multiplicativa, porque é a convolução de Dirichlet de duas funções multiplicativas. Portanto esta função é determinada pelos seus valores nas potências de primos logo basta verificar que a propriedade (3.2.1) é válida nas potências de primos, o que é verdade pois, se p é primo e $a \in \mathbb{N}$, então

$$\sum_{d|p^a} \mu(d) = \sum_{i=0}^{a} \mu(p^i) = \mu(1) - \mu(p) = 1 - 1 = 0.$$

Assim, como $\mu(1) = 1$, conclui-se que $\mu * \mathit{1} = \delta$, ou seja, μ e $\mathit{1}$ são inversos de Dirichlet.
Uma consequência deste resultado é a fórmula de inversão de Möbius.

Lema 3.4 (Fórmula de inversão de Möbius)**.** *Seja f uma função aritmética e defina-se uma função aritmética g tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$g(n) = (f * \mathit{1})(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Então tem-se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, que

$$f(n) = (g * \mu)(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Relembrando que $\mathit{1} * \mu = \delta$, prova-se facilmente a fórmula de inversão de Möbius porque
$g * \mu = (f * \mathit{1}) * \mu = f * (\mathit{1} * \mu) = f * \delta = f$.
Analogamente verifica-se que a afirmação recíproca também é válida, ou seja, se temos
$f(n) = (g * \mu)(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$ então, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = (f * \mathit{1})(n) = \sum_{d|n} f(d)$.
Partindo da fórmula (3.2.1) também podemos deduzir que, se f é uma função aritmética completamente multiplicativa, então $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, porque

$$(\mu f * f)(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} f(1) = 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Também é verdadeira a afirmação recíproca, ou seja, se f é uma função aritmética multiplicativa tal que $f^{-1}(n) = \mu(n)f(n)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então f é completamente multiplicativa (ver [Apo76], secção 2.11).

Definição 3.5. *A função (totiente) de Euler ($\varphi(n)$) é uma função aritmética definida por*

$$\varphi(n) = \big|\{m \in \mathbb{N} : m \leq n \ e \ (m, n) = 1\}\big|.$$

Observe-se que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ é a cardinalidade de um subconjunto não vazio (porque $(1, n) = 1$) de $\{1, \cdots, n\}$ logo $1 \leq \varphi(n) \leq n$. Podemos ver, na secção 5.5 do livro [HW08], que, tal como a função de Möbius, também a função de Euler é uma função multiplicativa mas não é completamente multiplicativa porque, por exemplo, $\varphi(4) = 2 \neq 1^2 = \varphi(2)^2$. Para calcular $\varphi(n)$, com $n \in \mathbb{N}$, podemos utilizar a fórmula

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{3.2.2}$$

Como a função de Euler é multiplicativa, basta mostrar que esta fórmula se verifica para p^k, para todo o primo p e para todo o $k \in \mathbb{N}$, o que é verdade porque, como p é o único primo que divide p^k, os números inteiros que são co-primos com p^k são exatamente os inteiros que não são múltiplos de p logo $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Outro resultado sobre a função de Euler que também pode ser encontrado na secção 5.5 de [HW08] diz-nos que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n. \tag{3.2.3}$$

Portanto, denotando por Id a função aritmética identidade, podemos afirmar que $\varphi * \mathit{1} = Id$ e, usando o Teorema de Inversão de Möbius, podemos deduzir que $\varphi = \mu * Id$, ou seja, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \tag{3.2.4}$$

Definição 3.6. *A função divisora de Dirichlet ($d(n)$) é uma função aritmética que denota, para cada $n \in \mathbb{N}$, o número de divisores (naturais) de n.*

A notação de Landau também pode ser definida para funções aritméticas de forma análoga à definição 2.14, mas para funções aritméticas só interessa o caso em que o limite é infinito logo esse limite está implícito. O seguinte teorema sobre a assintótica da função $d(n)$ pode ser encontrado na secção 18.1 de [HW08] e vai-nos ser útil num capítulo mais avançado.

Teorema 3.7. $d(n) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$*, para todo o* $\epsilon > 0$.

Definição 3.8. *Fixando um número natural k, a função aritmética $d_k(n)$ denota, para cada $n \in \mathbb{N}$, o número de formas diferentes de escrever n como o produto de k factores naturais onde escritas de n como produto dos mesmos factores por ordens diferentes contam como escritas diferentes.*

Observe-se que a família das funções $d_k(n)$, com $k \in \mathbb{N}$, pode ser vista como uma generalização da função divisora de Dirichlet porque $d(n) = d_2(n)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e observe-se também que a família das funções $d_k(n)$, com k natural, pode ser definida de forma recursiva por $d_1(n) = 1$ e, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$d_{k+1}(n) = \sum_{q|n} d_k(q). \tag{3.2.5}$$

Portanto $d_{k+1} = d_k * \mathit{1}$ e, como $d_1 = \mathit{1}$, podemos deduzir que $d_k = \mathit{1} * \cdots * \mathit{1}$ (k vezes).

Então também as funções $d_k(n)$ são multiplicativas. Por outro lado, para $k > 1$, $d_k(n)$ não é completamente multiplicativa porque, para qualquer primo p, podemos observar que $d_k(p) = k$ e $d_k(p^2) = k + \binom{k}{2} = \frac{k(k+1)}{2} \neq k^2$, ou seja, $d_k(p^2) \neq (d_k(p))^2$.

Definição 3.9. *Para todo o número complexo a, define-se a função aritmética $\sigma_a(n)$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a. \tag{3.2.6}$$

Observe-se que também a família das funções aritméticas σ_a, com $a \in \mathbb{C}$, é uma generalização da função divisora de Dirichlet porque $d(n) = \sigma_0(n)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Além disso note-se que, para qualquer $a \in \mathbb{C}$, podemos escrever $\sigma_a = \mathit{1} * Id^a$, onde Id^a é a função aritmética definida por $Id^a(n) = n^a$. Portanto, como as funções Id^a são (completamente) multiplicativas, também as funções σ_a são multiplicativas mas podemos observar que não são completamente multiplicativas (por exemplo, já vimos que $\sigma_0 = d$ não é completamente multiplicativa).

Definição 3.10. *A função aritmética $a(n)$ denota o maior divisor ímpar de n.*

É imediato que $1 \leq a(n) \leq n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Observe-se que qualquer $n \in \mathbb{N}$ pode ser escrito de forma única como $n = 2^k a(n)$, com $k \in \mathbb{N}_0$ e $a(n) \in \mathbb{N}$ ímpar, e este $a(n)$ é mesmo o maior divisor ímpar de n. Portanto $a(n)$ é uma função completamente multiplicativa.

Definição 3.11. *Denota-se por $\omega(n)$ a função aritmética que representa o número de factores primos distintos de n.*

O seguinte teorema sobre a assintótica da função $\omega(n)$ pode ser encontrado no artigo [HR17] e vai-nos ser útil num capítulo mais avançado.

Teorema 3.12. $\omega(n) = \mathcal{O}\left(\ln(\ln n)\right)$.

Vamos agora deduzir uma fórmula que relaciona a função $\omega(n)$ com a função de Möbius.

Lema 3.13. *Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\omega(n)}$, ou seja, $\left(|\mu| * \mathit{1}\right)(n) = 2^{\omega(n)}$.*

Prova. Se $m, n \in \mathbb{N}$ são co-primos, não têm factores primos comuns, logo $\omega(mn) = \omega(m) + \omega(n)$ e, consequentemente, $2^{\omega(mn)} = 2^{\omega(m)} 2^{\omega(n)}$. Então a função aritmética $2^{\omega(n)}$ é multiplicativa. Além disso, como $\mathit{1}$ e $|\mu|$ são multiplicativas, também $\mathit{1} * |\mu|$ é multiplicativa. Portanto basta demonstrar que o lema se verifica para as potências de primos. Sejam p primo e $k \in \mathbb{N}$. Então $\omega(p^k) = 1$ logo, como $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ e $\mu(p^i) = 0$, para $i > 1$, podemos concluir que

$$\sum_{d|p^k} \left|\mu(p^k)\right| = \sum_{i=0}^{k} \left|\mu(p^i)\right| = 2 = 2^{\omega(p^k)}.$$

□

Definição 3.14. *Denota-se por $\Omega(n)$ a função aritmética que representa o número de factores primos de n, contando com multiplicidades.*

Definição 3.15. *A função de Liouville ($\lambda(n)$) é uma função aritmética definida por*

$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}. \tag{3.2.7}$$

Para todo o $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se $\Omega(mn) = \Omega(m) + \Omega(n)$, logo $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$. Portanto a função de Liouville é completamente multiplicativa. Assim, usando o resultado visto anteriormente sobre o inverso de Dirichlet de uma função completamente multiplicativa, podemos afirmar que $\lambda^{-1}(n) = \mu(n)\lambda(n)$. Mas, se $\mu(n) = 0$, então $\mu(n)\lambda(n) = 0 = |\mu(n)|$ e se $\mu(n) = \pm 1$, ou seja, se n é o produto de $\omega(n)$ factores primos distintos então $\lambda(n) = (-1)^{\omega(n)} = \mu(n)$ logo $\mu(n)\lambda(n) = (\mu(n))^2 = 1 = |\mu(n)|$. Portanto o inverso de Dirichlet de $\lambda(n)$ é $|\mu(n)|$, que é uma função aritmética que não é completamente multiplicativa.
Além disso, podemos ver na secção 2.12 de [Apo76] que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é um quadrado perfeito,} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{3.2.8}$$

logo $\lambda * \mathit{1} = \chi$, onde χ é a função característica do subconjunto dos quadrados perfeitos em $\mathbb{N}$.

Definição 3.16. *A função de Mangoldt ($\Lambda(n)$) é uma função aritmética definida por:*

- $\Lambda(n) = \ln p$*, se* $n = p^k$ *para algum primo* p *e algum* $k \in \mathbb{N}$*;*
- $\Lambda(n) = 0$*, caso contrário.*

A função de Mangoldt não é multiplicativa nem admite inverso de Dirichlet porque $\Lambda(1) = 0$.
Para todo o $n \geq 1$, $\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ (ver [Apo76], secção 2.8).
Portanto, considerando a função aritmética logaritmo como a restrição da função logaritmo ao conjunto dos números naturais, sabemos que $\ln = \Lambda * \mathit{1}$ e podemos agora usar a inversão de

Möbius para afirmar que $\Lambda = \mu * \ln$ e concluir que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \ln\left(\frac{n}{d}\right) = \ln n \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d) \ln d = -\sum_{d|n} \mu(d) \ln d, \tag{3.2.9}$$

onde a última igualdade se verifica porque $\ln 1 = 0$ e $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$, para todo o $n > 1$.

Definição 3.17. *$\Lambda_1(n)$ é uma função aritmética definida por $\Lambda_1(1) = 0$ e, para $n > 1$,*

$$\Lambda_1(n) = \frac{\Lambda(n)}{\ln n}. \tag{3.2.10}$$

Como $\Lambda_1(1) = 0$, $\Lambda_1(1)$ não é multiplicativa nem admite inverso de Dirichlet.

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, se $n = p^k$ para algum primo p e algum $k \in \mathbb{N}$, então

$$\Lambda_1(n) = \Lambda_1(p^k) = \frac{\Lambda(p^k)}{\ln(p^k)} = \frac{\ln(p)}{k \ln(p)} = \frac{1}{k} \tag{3.2.11}$$

e, caso contrário, $\Lambda_1(n) = 0$.

3.3 Séries de Dirichlet

Naturalmente vamos começar esta secção por definir o que é uma série de Dirichlet.

Definição 3.18. *Uma série de Dirichlet é uma série da forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \tag{3.3.1}$$

onde f é uma função aritmética.

Os quatro teoremas sobre séries de Dirichlet que se seguem podem ser encontrados no capítulo 11 de [Apo76].

Teorema 3.19. *Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ não converge absolutamente em todo o plano complexo nem diverge absolutamente em todo o plano complexo então existe $\sigma \in \mathbb{R}$, denominado por abcissa de convergência absoluta, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolutamente se $\operatorname{Re} s > \sigma$ e diverge absolutamente se $\operatorname{Re} s < \sigma$.*

Teorema 3.20. *Se $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ então*

$$\lim_{\sigma \to \infty} F(\sigma + it) = f(1), \tag{3.3.2}$$

uniformemente relativamente a $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.21 (Teorema de unicidade)**.** *Sejam duas séries de Dirichlet*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

e

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

absolutamente convergentes no semiplano $\operatorname{Re} s > a$ *para um certo* $a \in \mathbb{R}$.
Se $F(s) = G(s)$, *para todo o* s *numa sucessão* $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, *tal que* $\operatorname{Re}(s_k) \to \infty$, *quando* $k \to \infty$, *então* $f(n) = g(n)$, *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

O teorema da unicidade implica que se uma série de Dirichlet não é nula então existe um semiplano $\operatorname{Re} s > \sigma$, para algum $\sigma \in \mathbb{R}$, onde essa série de Dirichlet não se anula.

Teorema 3.22 (Produto de séries de Dirichlet)**.** *Sejam* $F(s)$ *e* $G(s)$ *duas funções representadas por séries de Dirichlet absolutamente convergentes no semiplano* $\operatorname{Re} s > a$ *para um certo* $a \in \mathbb{R}$, *isto é, existem funções aritméticas* f *e* g *tais que* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *e* $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$, *para todo o* $s \in \mathbb{C}$ *com* $\operatorname{Re} s > a$.
Então, para todo o $s \in \mathbb{C}$ *tal que* $\operatorname{Re} s > a$, $F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f * g)(n)}{n^s}$.
Reciprocamente, se $F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$ *para todo o* s *numa sucessão* $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, *tal que* $\operatorname{Re}(s_k) \to \infty$ *quando* $k \to \infty$, *então* $h = f * g$.

O seguinte corolário deste teorema permite-nos determinar o inverso de funções definidas por séries de Dirichlet.

Corolário 3.23. *Seja* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *uma série de Dirichlet onde* f *é uma função aritmética tal que* $f(1) \neq 0$. *Então se definirmos* $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^s}$, *onde* f^{-1} *é o inverso de Dirichlet de* f, *temos* $F(s)G(s) = 1$ *no semiplano onde as duas séries convergem absolutamente.*

Vamos agora enunciar e demonstrar mais alguns resultados sobre séries de Dirichlet que nos vão ser úteis mais à frente nesta tese.

Lema 3.24. *Uma série de Dirichlet absolutamente convergente num semiplano* $\operatorname{Re} s > a$ *é uniformemente convergente em qualquer semiplano* $\operatorname{Re} s \geq a_0 > a$.

Prova. Seja $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ uma série de Dirichlet absolutamente convergente num semiplano $\operatorname{Re} s > a$. Fixemos $a_0 > a$. Então, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s \geq a_0$, temos

$$\left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \frac{|f(n)|}{n^{\operatorname{Re} s}} \leq \frac{|f(n)|}{n^{a_0}}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente para $\operatorname{Re} s > a$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^{a_0}} < \infty$. Portanto, pelo teste de Weierstrass, $F(s)$ é uniformemente convergente em todo o semiplano $\operatorname{Re} s \geq a_0 > a$.

□

Lema 3.25. *Seja $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ uma série de Dirichlet absolutamente convergente num semiplano $\operatorname{Re} s > a$ e f uma função aritmética tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$, para todo o $\epsilon > 0$. Então a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > a$.*

Prova. Fixemos $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > a$. Consideremos $0 < \epsilon < \operatorname{Re} s - a$ (o que implica que $\operatorname{Re} s - \epsilon > a$). Então $f(n) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|f(n)| \leq M n^\epsilon$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e, como $G(s)$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > a$, tem-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)g(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M n^\epsilon |g(n)|}{n^{\operatorname{Re} s}} = M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(n)|}{n^{\operatorname{Re} s - \epsilon}} < \infty.$$

□

Teorema 3.26. *Uma série de Dirichlet $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > a$ é analítica nesse semiplano com derivadas*

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^k f(n)}{n^s}. \tag{3.3.3}$$

e estas séries de Dirichlet são absolutamente convergentes.

Prova. Fixemos $k \in \mathbb{N}$. Para todo o $\epsilon > 0$, $\ln n = \mathcal{O}\left(n^{\frac{\epsilon}{k}}\right)$, logo $(\ln n)^k = \mathcal{O}\left(n^\epsilon\right)$. Portanto, como $F(s)$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > a$, podemos usar o lema 3.25 para garantir que a série em (3.3.3) é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > a$. Então, pelo lema 3.24, como $F(s)$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > a$, $F(s)$ é uniformemente convergente em qualquer semiplano $\operatorname{Re} s \geq a_0 > a$ logo, pelo teorema 2.9, $F(s)$ é analítica no semiplano $\operatorname{Re} s > a$ com derivadas

$$F^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^k}{ds^k} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\ln n)^k f(n)}{n^s} = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^k f(n)}{n^s},$$

onde a última igualdade é válida porque $\ln 1 = 0$.

$\square$

Teorema 3.27. *Se* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ *é uma série de Dirichlet absolutamente convergente num semiplano* $\operatorname{Re} s > a$ *e* $f(n)$ *é completamente multiplicativa, então nesse semiplano temos*

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n) f(n)}{n^s} \tag{3.3.4}$$

e

$$\ln(F(s)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n) f(n)}{n^s} \tag{3.3.5}$$

e estas séries de Dirichlet são absolutamente convergentes.

Prova. Para todo o $n \geq 3$, $0 \leq \Lambda_1(n) \leq \Lambda(n) \leq \ln n$, logo, para todo o $\epsilon > 0$, como $\ln n = \mathcal{O}(n^\epsilon)$, também $\Lambda(n) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$ e $\Lambda_1(n) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$. Portanto, pelo lema 3.25, as séries de Dirichlet em (3.3.4) e em (3.3.5) são absolutamente convergentes no semiplano $\operatorname{Re} s > a$. Como $f(n)$ é completamente multiplicativa, $f^{-1}(n) = \mu(n) f(n)$. Além disso, como $|\mu(n)| \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > a$, também $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) f(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente nesse semiplano. Então, pelo corolário do teorema 3.22 do produto de séries de Dirichlet,

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) f(n)}{n^s} \tag{3.3.6}$$

em todo o semiplano $\operatorname{Re} s > a$.

Portanto, usando a fórmula para o produto de séries de Dirichlet dada pelo teorema 3.22 e a fórmula para $F'(s)$ obtida no teorema 3.26 (com $k = 1$), podemos concluir que

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n f(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) f(n)}{n^s} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((\ln \cdot f) * (\mu \cdot f))(n)}{n^s}.$$

Voltando a usar o facto de f ser completamente multiplicativa, podemos simplificar

$$((\ln \cdot f) * (\mu \cdot f))(n) = \sum_{d|n} \ln(d) f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) \sum_{d|n} \ln(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)(\ln * \mu)(n),$$

logo, relembrando que $\ln * \mu = \Lambda$, podemos concluir que

$$((\ln \cdot f) * (\mu \cdot f))(n) = f(n)\Lambda(n).$$

Portanto, como $\Lambda(1) = 0$, podemos concluir (3.3.4) e, finalmente, primitivando a igualdade acima, obtém-se que

$$\ln(F(s)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n) f(n)}{\ln(n) n^s} + c_1 = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n) f(n)}{n^s},$$

para algum $c_1 \in \mathbb{C}$. Mas, por (3.3.2), $\lim_{\sigma \to \infty} F(\sigma + it) = f(1) = 1$ e $\lim_{\sigma \to \infty} \ln\left(F(\sigma + it)\right) = c_1$, logo podemos concluir que $c_1 = \ln 1 = 0$.

$\square$

Capítulo 4

Da transformada de Mellin até à função gama

4.1 Transformadas de Fourier e Mellin

Como referido na introdução, o objectivo desta secção é introduzir a transformada de Mellin e esta pode ser obtida a partir da transformada de Fourier por uma mudança de variável, logo vamos começar por definir a transformada de Fourier.

Definição 4.1 (Transformada de Fourier)**.** *A transformada de Fourier de uma função f é denotada por $(\mathcal{F}f)(x)$ e, se $f(t) \in L_1\left(]-\infty, \infty[\right)$, é definida por*

$$(\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt. \tag{4.1.1}$$

Como $\left|e^{ixt}\right| = 1$, para todo o $x, t \in \mathbb{R}$, a condição $f(t) \in L_1\left([-\infty, \infty[\right)$ garante que o integral que define a transformada de Fourier é sempre absolutamente convergente e que a transformada de Fourier é limitada porque, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$|(\mathcal{F}f)(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt. \tag{4.1.2}$$

De seguida, apresentamos a fórmula de inversão para a transformada de Fourier que pode ser obtida a partir do Teorema de Inversão de Fourier da secção 7.2. de [Fol92].

Teorema 4.2 (Teorema de Inversão da Transformada de Fourier)**.** *Seja $f(x)$ uma função contínua tal que $f(t), (\mathcal{F}f)(t) \in L_1(]-\infty, \infty[)$. Então, para todo o $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(t) e^{-ixt} dt. \tag{4.1.3}$$

Vamos agora definir as transformadas de Fourier de seno e de cosseno.

Definição 4.3 (Transformada de Fourier de seno)**.** *A transformada de Fourier de seno de uma função f, é denotada por $(\mathcal{F}_s f)(x)$ e, se $f(t) \in L_1([0,\infty[)$, é definida por*

$$(\mathcal{F}_s f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t)\sin(xt)dt. \tag{4.1.4}$$

Definição 4.4 (Transformada de Fourier de cosseno)**.** *A transformada de Fourier de cosseno de uma função f, é denotada por $(\mathcal{F}_c f)(x)$, e, se $f(t) \in L_1([0,\infty[)$, é definida por*

$$(\mathcal{F}_c f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t)\cos(xt)dt. \tag{4.1.5}$$

Como $|\sin(xt)|, |\cos(xt)| \leq 1$, para todo o $x, t \in \mathbb{R}$, a condição $f(t) \in L_1([0,\infty[)$ garante que os integrais que definem as transformadas de Fourier de seno e de cosseno são absolutamente convergentes e que estas transformadas são limitadas porque, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$|(\mathcal{F}_s f)(x)|, |(\mathcal{F}_c f)(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty |f(t)|dt. \tag{4.1.6}$$

Substituindo $x = 0$ nas definições das transformadas de Fourier de seno e de cosseno, podemos deduzir que, como $\sin(0) = 0$, então $(\mathcal{F}_s f)(0) = 0$ e, como $\cos(0) = 1$, então

$$(\mathcal{F}_c f)(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t)dt. \tag{4.1.7}$$

Vamos agora finalmente introduzir a transformada de Mellin.

Definição 4.5 (Transformada de Mellin)**.** *A transformada de Mellin de uma função f, é denotada por $f^*(s)$, e é definida, para $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ tal que $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$, por*

$$f^*(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx. \tag{4.1.8}$$

A condição $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$ garante que o integral (4.1.8) é absolutamente convergente e que $f^*(s)$ é limitada na recta $\operatorname{Re} s = \sigma$ porque, para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s = \sigma$,

$$|f^*(s)| \leq \int_0^\infty \left|f(x)x^{s-1}\right| dx \leq \int_0^\infty |f(x)|\, x^{\sigma-1}dx. \tag{4.1.9}$$

Podemos deduzir da definição da transformada de Mellin que a igualdade $f^*(\overline{s}) = \overline{f^*(s)}$ é válida sempre que $f(x)x^{\operatorname{Re} s-1} \in L_1([0,\infty[)$.

Uma consequência da fórmula anterior é que, se $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$ e $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, então $|f^*(s)| \leq f^*(\sigma)$, para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s = \sigma$.

Vamos agora ver que, como afirmamos na introdução, a transformada de Mellin pode ser obtida a partir da transformada de Fourier através de uma mudança de variável.
Seja $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$. Então, partindo da definição da transformada de Mellin (4.1.8) e fazendo a mudança de variável $x = e^u$ (que implica $dx = e^u du$), obtém-se

$$f^*(\sigma + i\tau) = \int_0^\infty f(x)x^{\sigma+i\tau-1}dx = \int_{-\infty}^\infty f(e^u)(e^u)^{\sigma+i\tau-1}e^u du = \int_{-\infty}^\infty f(e^u)(e^u)^\sigma e^{i\tau u}du.$$

Além disso, $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1\left([0,\infty[\right)$ é equivalente a $f(e^u)(e^u)^\sigma \in L_1(]-\infty,+\infty[)$, porque

$$\int_{-\infty}^\infty |f(e^u)|(e^u)^\sigma du = \int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1}dx. \tag{4.1.10}$$

Portanto a transformada de Fourier de $\sqrt{2\pi}f(e^u)(e^u)^\sigma$ existe e relembrando a definição da transformada de Fourier (4.1.1) podemos concluir que

$$f^*(\sigma + i\tau) = \mathcal{F}\left(\sqrt{2\pi}(e^u)^\sigma f(e^u)\right)(\tau). \tag{4.1.11}$$

Assim podemos obter o Teorema de Inversão da Transformada de Mellin a partir do Teorema de Inversão da Transformada de Fourier.

Teorema 4.6 (Teorema de Inversão da Transformada de Mellin)**.** *Seja f uma função contínua definida em $\mathbb{R}^+$ e seja $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$ e $f^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$. Então, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds. \tag{4.1.12}$$

ou, equivalentemente,

$$f(x) = \frac{x^{-\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\sigma + i\tau)x^{-i\tau}d\tau. \tag{4.1.13}$$

Prova. Já vimos que se $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$ então $\sqrt{2\pi}(e^u)^\sigma f(e^u) \in L_1(]-\infty,+\infty[)$. Além disso é imediato que se $f^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$ então $f^*(\sigma + i\tau) \in L_1(]-\infty,+\infty[)$.
Portanto, relembrando a fórmula (4.1.11) que nos permite escreve a transformada de Mellin de $f(x)$ como uma transformada de Fourier, podemos usar o teorema 4.2 para afirmar que, para todo o $u \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{2\pi}(e^u)^\sigma f(e^u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\sigma + i\tau)e^{-itu}d\tau.$$

Escrevendo a fórmula anterior em função de $f(e^u)$ e substituindo, de seguida, $x = e^u$, obtemos, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, a fórmula (4.1.13) e, finalmente, fazendo a mudança de variável $s = \sigma + i\tau$, que implica $ds = id\tau$, obtemos a fórmula usual de inversão da transformada de Mellin (4.1.12).

□

A transformada definida pela fórmula (4.1.12), ou, equivalentemente, pela fórmula (4.1.13), é denominada por transformada inversa de Mellin. De forma recíproca ao teorema 4.6, vamos agora enunciar um teorema para calcular a transformada de Mellin de uma função definida como uma transformada inversa de Mellin.

Teorema 4.7 (Teorema de Inversão da transformada inversa de Mellin). *Seja $f^*(s)$ uma função de variável complexa, seja $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $f^*(s)$ é contínua na recta $\operatorname{Re} s = \sigma$ e $f^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$ e defina-se $f(x)$ como a transformada inversa de Mellin de $f^*(s)$, isto é, para cada $x \in \mathbb{R}^+$,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f^*(s) x^{-s} ds = \frac{x^{-\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\sigma + i\tau) x^{-i\tau} d\tau.$$

Se $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0, \infty[)$, então $f^*(s)$ é igual à transformada de Mellin de f na recta $\operatorname{Re} s = \sigma$.

Prova. Comecemos por observar que

$$f(x) = \frac{x^{-\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\sigma + i\tau) x^{-i\tau} d\tau = \frac{x^{-\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\sigma + i\tau) e^{-i\tau \ln x} dt,$$

logo, utilizando a definição da transformada de Fourier (4.1.1), podemos afirmar que

$$f(x) = \frac{x^{-\sigma}}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f^*(\sigma + i\tau))(-\ln x).$$

Fazendo agora a substituição $-\ln x = u$ (que implica $x = e^{-u}$), podemos afirmar que

$$\mathcal{F}\left(f^*(\sigma + i\tau)\right)(u) = \sqrt{2\pi}(e^{-u})^{\sigma} f(e^{-u}).$$

É imediato que, se $f^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$ então $f^*(\sigma + i\tau) \in L_1(] - \infty, +\infty[)$ e que se $f^*(s)$ é contínua na recta $\operatorname{Re} s = \sigma$ então $f^*(\sigma + it)$ é contínua. Além disso, por (4.1.10), $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0, \infty[)$ implica $\sqrt{2\pi}(e^{-u})^{\sigma} f(e^{-u}) \in L_1(] - \infty, +\infty[)$. Portanto podemos aplicar o teorema 4.2 para afirmar que

$$f^*(\sigma + i\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi}(e^{-u})^{\sigma} f(e^{-u}) e^{-iu\tau} du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-u})(e^{-u})^{\sigma + i\tau} du.$$

Finalmente, substituindo $s = \sigma + i\tau$ e fazendo novamente a mudança de variável $x = e^{-u}$, obtemos (4.1.8), logo podemos concluir que $f^*(s)$ é a transformada de Mellin de f.

□

O integral que define a transformada de Mellin de uma função f é um integral de f com uma função peso que é uma potência de x. Vamos agora ver dois lemas sobre integrais desse tipo que nos vão ser úteis.

Lema 4.8. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \le c \le b$ e $g(x)$ uma função real positiva. Se $g(x)x^a \in L_1([0,1])$ e $g(x)x^b \in L_1([1,\infty[)$, então $g(x)x^c \in L_1([0,\infty[)$ e*

$$\int_0^\infty g(x)x^c dx \le \int_0^1 g(x)x^a dx + \int_1^\infty g(x)x^b dx.$$

Prova. Como $a \le c$, então, para todo o $0 < x < 1$, $x^c \le x^a$ logo $g(x)x^c \le g(x)x^a$ e

$$\int_0^1 g(x)x^c dx \le \int_0^1 g(x)x^a dx.$$

Analogamente, como $c \le b$, então, para todo o $x > 1$, $x^c \le x^b$ logo $g(x)x^c \le g(x)x^b$ e

$$\int_1^\infty g(x)x^c dx \le \int_1^\infty g(x)x^b dx.$$

□

Lema 4.9. *Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^+$, se existir $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $0 < x < b$, $|f(x)| \le M_1 x^{-\alpha}$, então, para todo o $\sigma > \alpha$, $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1[0,b]$. Por outro lado, para $\beta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+$, se existir $M_2 \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x > a$, $|f(x)| \le M_2 x^{-\beta}$, então, para todo o $\sigma < \beta$, $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1[a,\infty[$.*

Prova. Se $|f(x)| \le M_1 x^{-\alpha}$, para todo o $0 < x < b$, então, para $\sigma > \alpha$,

$$\int_0^b |f(x)|x^{\sigma-1} dx \le \int_0^b M_1 x^{-\alpha} x^{\sigma-1} dx \le M_1 \int_0^b x^{-1+\sigma-\alpha} dx,$$

que é convergente porque $\sigma > \alpha$ implica que $-1+\sigma-\alpha > -1$.
Analogamente, se $|f(x)| \le M_2 x^{-\beta}$, para todo o $x > a$, então, para $\sigma < \beta$,

$$\int_a^\infty |f(x)|x^{\sigma-1} dx \le M_2 \int_a^\infty x^{-1+\sigma-\beta} dx,$$

que é convergente porque $\sigma < \beta$ implica que $-1+\sigma-\beta < -1$.

□

Proposição 4.10. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e sejam $f^*(s)$ uma função analítica na faixa $a < \operatorname{Re} s < b$ e $f(x)$ uma função de variável real tais que, para cada $a < \sigma < b$, $f^*(s) \in L_1([\sigma - i\infty, \sigma + i\infty])$ e, para todo o $x > 0$,*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f^*(s) x^{-s} ds.$$

Então, para todo o $a < \sigma < b$, existe $M(\sigma) \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $x > 0$, $|f(x)| \le M(\sigma)x^{-\sigma}$ e temos $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$. Além disso, a transformada de Mellin de f é igual a $f^*(s)$ em toda a faixa $a < \operatorname{Re} s < b$.

Prova. Para qualquer σ tal que $a < \sigma < b$, temos, para todo o $x > 0$,

$$|f(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds\right| \leq \frac{x^{-\sigma}}{2\pi}\left|\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |f^*(s)|ds\right|.$$

Como $f^*(s) \in L_1([\sigma - i\infty, \sigma + i\infty])$, podemos definir

$$M(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |f^*(s)|ds\right| \in \mathbb{R}$$

e concluir que $|f(x)| \leq M(\sigma)x^{-\sigma}$, para todo o $x > 0$.

Fixemos agora $a < \sigma < b$. Então podemos escolher c_1 tal que $a < c_1 < \sigma$ e existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M_1 x^{-c_1}$, para todo o $x > 0$. Portanto, como $\sigma > c_1$, sabemos, pelo lema 4.9, que $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0, 1])$. Analogamente podemos escolher c_2 tal que $b > c_2 > \sigma$ e existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M_2 x^{-c_2}$, para todo o $x > 0$, e, como $\sigma < c_2$ sabemos, pelo lema 4.9, que $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([1, \infty[)$.

Assim podemos concluir que $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0, \infty[)$. Portanto, como $a < \sigma < b$ é arbitrário, a transformada de Mellin de f está definida em toda a faixa $a < \operatorname{Re} s < b$. Além disso, como $f^*(s) \in L_1([\sigma - i\infty, \sigma + i\infty])$ e $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0, \infty[)$, para todo o $a < \sigma < b$, e $f^*(s)$ é analítica na faixa $a < \operatorname{Re} s < b$ podemos concluir, pelo teorema 4.7, que, nessa faixa, $f^*(s)$ é a transformada de Mellin de f.

□

4.2 As classes de funções $\mathcal{M}_{\alpha,n}$

Em [Yak15] é introduzida a classe de funções do tipo de Müntz.

Definição 4.11. *Uma função $f(x)$, definida para $x \in \mathbb{R}_0^+$, pertence à classe das funções de tipo de Müntz $\mathcal{M}_\alpha$, com $\alpha > 1$, se $f(x) \in \mathcal{C}^{(2)}([0, \infty[)$ e $f^{(j)}(x) = \mathcal{O}\left(x^{-\alpha-j}\right)$, $x \to \infty$, para $j = 0, 1, 2$.*

Podemos generalizar esta classe de funções da seguinte forma.

Definição 4.12. *Uma função $f(x)$, definida para $x \in \mathbb{R}_0^+$, pertence à classe das funções de tipo de Müntz generalizadas $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \in \mathbb{N}_0$, se $f \in \mathcal{C}^{(n)}([0, \infty[)$ e $f^{(j)}(x) = \mathcal{O}\left(x^{-\alpha-j}\right)$, $x \to \infty$, para $j = 0, 1, \cdots, n$.*

Note-se que, para todo o $\alpha > 1$, $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_{\alpha,2}$ e que, se $n \geq m$, então $\mathcal{M}_{\alpha,n} \subseteq \mathcal{M}_{\alpha,m}$.

Vamos agora estudar a transformada de Mellin das funções nas classes $\mathcal{M}_{\alpha,n}$.

Teorema 4.13. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \in \mathbb{N}_0$.*
Então, fixando $k = 0, 1, \cdots, n$, $f^{(k)}(x)x^{\sigma+k-1} \in L_1([0, \infty[)$, para todo o $-k < \sigma < \alpha$, e a transformada de Mellin de f, $f^*(s)$, é uma função analítica na faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$, com derivadas

$$(f^*)^{(j)}(s) = \int_0^\infty (\ln x)^j f(x)x^{s-1}dx, \tag{4.2.1}$$

para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Além disso, para qualquer $k = 0, 1, \cdots, n$, $f^*(s)$ pode ser continuada analiticamente para a faixa $-k < \operatorname{Re} s < \alpha$, por

$$f^*(s) = \frac{(-1)^k}{(s)_k} \int_0^\infty f^{(k)}(x)x^{s+k-1}dx, \tag{4.2.2}$$

onde $(s)_k$ é o símbolo de Pochhammer definido por $(s)_0 = 1$ e $(s)_k = s(s+1)\cdots(s+k-1)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, e assim $f^*(s)$ é uma função analítica em toda a faixa $-n < \operatorname{Re} s < \alpha$ excepto nos pontos $s = -k$, com $k = 0, 1, \cdots, n-1$, onde $f^*(s)$ tem um polo simples com resíduo $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, se $f^{(k)}(0) \neq 0$, e tem uma singularidade removível, se $f^{(k)}(0) = 0$.

Prova. Fixemos $0 \leq k \leq n$. Então $f^{(k)}(x)$ é contínua logo $f^{(k)}(x)$ é limitada em $[0, 1]$, isto é, existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq C_1$, para todo o $0 \leq x \leq 1$. Portanto, se $\sigma > -k$, ou seja, se $\sigma + k > 0$, podemos concluir, pelo lema 4.9, que $f^{(k)}(x)x^{\sigma+k-1} \in L_1([0, 1])$.
Por outro lado, $f^{(k)}(x) = \mathcal{O}(x^{-\alpha-k})$, $x \to \infty$, logo existe $C_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que, para todo o $x > 1$, $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq C_2 x^{-(\alpha+k)}$. Portanto, se $\sigma < \alpha$, ou seja, se $\sigma + k < \alpha + k$, logo, novamente pelo lema 4.9, $f^{(k)}(x)x^{\sigma+k-1} \in L_1([1, \infty[)$.
Assim podemos concluir que, para todo o $k = 0, 1, \cdots, n$, $f^{(k)}(x)x^{\sigma+k-1} \in L_1([0, \infty[)$, para qualquer $-k < \sigma < \alpha$.
Pelo lema 4.8, temos, para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $-k < a \leq \operatorname{Re} s \leq b < \alpha$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|f^{(k)}(x)x^{s+k-1}\right| dx &= \int_0^\infty |f^{(k)}(x)|x^{\operatorname{Re} s+k-1}dx \\ &\leq \int_0^1 |f^{(k)}(x)|x^{a+k-1}dx + \int_1^\infty |f^{(k)}(x)|x^{b+k-1}dx < \infty.\end{aligned}$$

Portanto o integral $\displaystyle\int_0^\infty f^{(k)}(x)x^{s+k-1}dx$ é uniformemente convergente em qualquer faixa do tipo $a \leq \operatorname{Re} s \leq b$, com $-k < a < b < \alpha$, logo, usando o teorema 2.10, este integral define uma função analítica na faixa $-k < \operatorname{Re} s < \alpha$ e as suas derivadas podem ser calculadas derivando dentro do integral.
Em particular, fazendo $k = 0$, nas afirmações demonstradas acima, podemos concluir que $f(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0, \infty[)$, para qualquer $0 < \sigma < \alpha$, logo a transformada de Mellin de f, $f^*(s)$,

está definida em toda a faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$ e podemos concluir também que $f^*(s)$ é analítica na faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$ e que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$(f^*)^{(j)}(s) = \frac{d^j}{ds^j}\left(\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx\right) = \int_0^\infty \frac{d^j}{ds^j}\left(f(x)x^{s-1}\right)dx = \int_0^\infty (\ln x)^j f(x)x^{s-1}dx.$$

Vamos agora demonstrar que a fórmula (4.2.2) é válida na faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$.

No caso $k = 0$ esta fórmula é válida porque é a definição de $f^*(s)$ (4.1.8).

Suponhamos agora que (4.2.2) é válida para um certo $0 \leq k \leq n-1$. Então conseguimos demonstrar que também é válida para $k+1$ usando integração por partes, porque

$$f^*(s) = \frac{(-1)^k}{(s)_k}\int_0^\infty f^{(k)}(x)x^{s+k-1}dx = \frac{(-1)^k}{(s)_k}\left(f^{(k)}(x)\frac{x^{s+k}}{s+k}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty f^{(k+1)}(x)\frac{x^{s+k}}{s+k}dx\right),$$

mas, como $\operatorname{Re}(s+k) > 0$, $\lim_{x\to 0} x^{s+k} = 0$ e, como $f^{(k)}(x) = \mathcal{O}(x^{-\alpha-k})$, $x \to \infty$ então $f^{(k)}(x)x^{s+k} = \mathcal{O}(x^{\operatorname{Re} s-\alpha})$, $x \to \infty$ logo, como $\operatorname{Re} s < \alpha$, $\lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x)x^{s+k} = 0$. Portanto,

$$f^*(s) = -\frac{(-1)^k}{(s)_k(s+k)}\int_0^\infty f^{(k+1)}(x)x^{s+k}dx = \frac{(-1)^{k+1}}{(s)_{k+1}}\int_0^\infty f^{(k+1)}(x)x^{s+(k+1)-1}dx.$$

Assim a fórmula (4.2.2) é válida para todo o $k = 0, 1, \cdots, n$ e dá-nos a continuação analítica de $f^*(s)$ para a faixa $-k \leq \operatorname{Re} s \leq \alpha$, excepto nos zeros de $(s)_k = s(s+1)\cdots(s+k-1)$, os pontos $s = 0, -1, \cdots, -(k-1)$, que podem ser polos simples ou singularidades removíveis.

Seja $0 \leq k \leq n-1$. Se $f^{(k)}(0) = 0$, então $\displaystyle\int_0^\infty f^{(k+1)}(x)dx = -f^{(k)}(0) = 0$ e este zero anula o polo simples de $\dfrac{1}{(s)_{k+1}}$ em $s = -k$ logo a singularidade de $f^*(s) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(s)_{k+1}}\displaystyle\int_0^\infty f^{(k+1)}(x)x^{s+k}dx$ em $s = -k$ é removível.

Caso contrário, se $f^{(k)}(0) \neq 0$, comecemos por escrever

$$\lim_{s\to -k}(s+k)f^*(s) = \lim_{s\to -k}\frac{(-1)^{k+1}(s+k)}{(s)_{k+1}}\int_0^\infty f^{(k+1)}(x)x^{s+k}dx.$$

Mas $\dfrac{(s+k)}{(s)_{k+1}} = \dfrac{1}{(s)_k}$ e $(-k)_k = (-k)(-(k-1))\cdots(-1) = (-1)^k k!$, logo

$$\lim_{s\to -k}\frac{(-1)^{k+1}(s+k)}{(s)_{k+1}} = \lim_{s\to -k}\frac{(-1)^{k+1}}{(s)_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(-k)_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k k!} = -\frac{1}{k!}.$$

Por outro lado, o integral $\displaystyle\int_0^\infty f^{(k+1)}(x)x^{s+k}dx$ define uma função analítica $F_{k+1}(s)$ na faixa $-(k+1) < \operatorname{Re} s < \alpha$ logo $\lim_{s\to -k} F_{k+1}(s) = F_{k+1}(-k)$, ou seja,

$$\lim_{s\to -k}\int_0^\infty f^{(k+1)}(x)x^{s+k}dx = \int_0^\infty f^{(k+1)}(x)dx = -f^{(k)}(0).$$

Portanto,

$$\lim_{s\to -k}(s+k)f^*(s) = \lim_{s\to -k}\frac{(-1)^{k+1}(s+k)}{(s)_{k+1}}\lim_{s\to -k}\int_0^\infty f^{(k+1)}(x)x^{s+k}dx = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad (4.2.3)$$

logo $s=-k$ é um polo simples de $f^*(s)$ com resíduo $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

□

Proposição 4.14. *Seja* $f\in\mathcal{M}_{\alpha,n}$*, com* $\alpha>1$ *e* $n\in\mathbb{N}_0$.
Então, fixando $-n<\sigma<\alpha$*, existe* $M(\sigma)\in\mathbb{R}$ *tal que* $|f^*(\sigma+it)|\leq\dfrac{M(\sigma)}{|t|^n}$*, para todo o* $t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$*, e, se* $n\geq 2$ *e* $\sigma\neq 0,-1,\cdots,-(n-1)$*,* $f^*(s)\in L_1(]\sigma-i\infty,\sigma+i\infty[)$*. Portanto, se* $n\geq 2$ *(e, em particular, se* $n=2$ *e* $f\in\mathcal{M}_\alpha$*), podemos escrever* $f(x)$ *como a transformada inversa de Mellin de* $f^*(s)$ *(4.1.12) sobre qualquer recta vertical* $\operatorname{Re}s=\sigma$ *com* $0<\sigma<\alpha$.

Prova. Considerando o caso $k=n$ da fórmula (4.2.2), temos

$$f^*(s) = \frac{(-1)^n}{(s)_n}\int_0^\infty f^{(n)}(x)x^{s+n-1}dx, \qquad (4.2.4)$$

para todo o $s\in\mathbb{C}$ tal que $-n<\operatorname{Re}s<\alpha$.
Mas $|(s)_n| = |s|.|s+1|\cdots|s+n-1|\geq|\operatorname{Im}s|.|\operatorname{Im}(s+1)|\cdots|\operatorname{Im}(s+n-1)| = |\operatorname{Im}s|^n$, logo, se $\operatorname{Im}s\neq 0$,

$$|f^*(s)|\leq\frac{1}{|(s)_n|}\int_0^\infty|f^{(n)}(x)x^{s+n-1}|dx\leq\frac{1}{|\operatorname{Im}s|^n}\int_0^\infty|f^{(n)}(x)|x^{\operatorname{Re}s+n-1}dx. \qquad (4.2.5)$$

Fixemos $-n<\sigma<\alpha$. Pelo teorema anterior, $f^{(n)}(x)x^{\sigma+n-1}\in L_1\left([0,\infty[\right)$, logo podemos definir $M(\sigma)=\displaystyle\int_0^\infty|f^{(n)}(x)|x^{\sigma+n-1}dx$ e concluir, a partir de (4.2.5), que $|f^*(\sigma+it)|\leq\dfrac{M(\sigma)}{|t|^n}$, para todo o $t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Suponhamos agora que $n\geq 2$ e $\sigma\neq 0,-1,\cdots,-(n-1)$. Então, $f^*(s)$ é contínua na recta $\operatorname{Re}s=\sigma$. Portanto $\displaystyle\int_{-1}^1|f^*(\sigma+it)|dt$ é um integral limitado de uma função contínua logo é convergente e $f^*(\sigma+it)\in L_1([-1,1])$. Por outro lado, como $n\geq 2$,

$$\int_1^\infty|f^*(\sigma+it)|dt\leq M(\sigma)\int_1^\infty\frac{dt}{t^n}<\infty,$$

logo $f^*(\sigma+it)\in L_1([1,+\infty[)$.
Analogamente, também se verifica que $f^*(\sigma+it)\in L_1(]-\infty,1])$. Assim podemos concluir que $f^*(\sigma+it)\in L_1(]-\infty,+\infty[)$, ou seja, que $f^*(s)\in L_1(]\sigma-i\infty,\sigma+i\infty[)$.
Portanto, f verifica as condições do Teorema de Inversão da Transformada de Mellin, para qualquer $0<\sigma<\alpha$, e podemos escrever f como a transformada inversa de Mellin de $f^*(s)$ sobre qualquer recta vertical $\operatorname{Re}s=\sigma$ com $0<\sigma<\alpha$.

□

4.3 A função gama de Euler

Seja $f(x) = e^{-x}$, para $x \in \mathbb{R}_0^+$. Sabemos que $f(x) = e^{-x} \in \mathcal{C}^{(\infty)}([0, \infty[)$ e que as suas derivadas são, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$. Além disso, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} x^{-\beta} = 0$, logo $f^{(n)}(x) = o(x^\beta)$, $x \to \infty$, o que implica que $f^{(n)}(x) = \mathcal{O}(x^\beta)$, $x \to \infty$. Portanto podemos concluir que $e^{-x} \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, para todo o $\alpha > 1$ e para todo o $n \in \mathbb{N}_0$. Assim podemos afirmar, usando o teorema 4.13, que $e^{-x} x^{\sigma-1} \in L_1\left([0, \infty[\right)$, para todo o $\sigma > 0$ e que a transformada de Mellin de e^{-x} existe no semiplano $\operatorname{Re} s > 0$. Nesse semiplano a função gama, $\Gamma(s)$, é definida como a transformada de Mellin de e^{-x}, ou seja,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx. \tag{4.3.1}$$

Como $e^{-x} \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, para todo o $\alpha > 1$ e para todo o $n \in \mathbb{N}_0$, podemos usar o teorema 4.13 para afirmar que, no semiplano $\operatorname{Re} s > 0$, $\Gamma(s)$ é uma função analítica com derivadas

$$\Gamma^{(j)}(s) = \int_0^\infty (\ln x)^j e^{-x} x^{s-1} dx. \tag{4.3.2}$$

O teorema que se segue também pode ser obtido substituindo $f(x) = e^{-x}$ no teorema 4.13.

Teorema 4.15. *Para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > 0$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$,*

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s)_n}. \tag{4.3.3}$$

Prova. Já vimos que $f(x) = e^{-x} \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$ e $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e para todo o $\alpha > 1$. Portanto, podemos substituir $f(x) = e^{-x}$ e $k = n$ na fórmula (4.2.2) e obter, para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > 0$ e todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{(s)_n} \int_0^\infty (-1)^n e^{-x} x^{s+n-1} dx = \frac{1}{(s)_n} \int_0^\infty e^{-x} x^{s+n-1} dx = \frac{\Gamma(s+n)}{(s)_n}.$$

□

Substituindo $n = 1$ no teorema anterior obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.16. *Para $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > 0$ a função gama satisfaz a equação funcional*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{4.3.4}$$

O seguinte corolário deste teorema permite-nos ver a função gama como uma generalização da função factorial.

Corolário 4.17. *Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.*

Prova. Esta proposição pode ser demonstrada usando indução sobre $n \in \mathbb{N}$.

O caso $n = 1$ verifica-se pois

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -.e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 = 0!. \tag{4.3.5}$$

O passo de indução é uma consequência imediata da equação funcional (4.3.4) porque se, para um certo $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $\Gamma(n) = (n-1)!$ então $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$.

□

Também o próximo teorema pode ser obtido substituindo $f(x) = e^{-x}$ no teorema 4.13.

Teorema 4.18. *A função gama pode ser continuada analiticamente para todo o plano complexo excepto os pontos $s = -n$, com $n \in \mathbb{N}_0$, onde tem pólos simples com resíduo $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.*

Prova. Já vimos que, para todo o $\alpha > 1$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = e^{-x} \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$ e que $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, logo $f^{(n)}(0) = (-1)^n \neq 0$. Portanto, usando novamente o teorema 4.13, podemos concluir que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(s)$ pode ser continuada analiticamente para a faixa $-n < \operatorname{Re} s < \alpha$ excepto os pontos $s = -k$, com $k = 0, -1, \cdots, -(n-1)$, onde $\Gamma(s)$ tem um polo simples com resíduo $\dfrac{(-1)^k}{k!}$.

□

Pelo corolário 2.13, as equações (4.3.3) e (4.3.4) são satisfeitas para todo o $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Usando agora a proposição 4.14 com $f(x) = e^{-x}$, também podemos concluir que, para qualquer $\sigma > 0$, $\Gamma(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$ e, para todo o $x > 0$, é válida a seguinte fórmula de Cahen e Mellin, que pode ser encontrada no artigo [HL16],

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds. \tag{4.3.6}$$

Pela definição (4.3.1) da função gama, a igualdade $\Gamma(\overline{s}) = \overline{\Gamma(s)}$ é válida em todo o semiplano $\operatorname{Re} s > 0$. Além disso, fixando $s \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos $(\overline{s})_n = \overline{(s)_n}$, porque $\overline{s} + m = \overline{s+m}$, para todo o $m \in \mathbb{N}$. Portanto a igualdade $\Gamma(\overline{s}) = \overline{\Gamma(s)}$ é válida em todo o plano complexo.

Vamos agora ver que $\Gamma(s)$ é limitada em cada recta vertical $\operatorname{Re} s = \sigma$ do plano complexo, excepto se tiver um polo nessa recta.

Proposição 4.19. *Para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s \neq -m$ com $m \in \mathbb{N}_0$, $|\Gamma(s)| \leq |\Gamma(\operatorname{Re} s)|$.*

Prova. Para $\operatorname{Re} s > 0$, $\Gamma(s)$ é a transformada de Mellin de e^{-x}, logo, como $e^{-x} > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, podemos usar a fórmula (4.1.9) para afirmar que, se $\operatorname{Re} s > 0$, então $|\Gamma(s)| \leq \Gamma(\operatorname{Re} s)$.

Caso contrário, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{Re} s > -n$. Como $\operatorname{Re}(s+n) = \operatorname{Re} s + n > 0$, o caso $\operatorname{Re} s > 0$ implica que $|\Gamma(s+n)| \leq \Gamma(\operatorname{Re}(s+n)) = \Gamma(\operatorname{Re} s + n)$. Por outro lado, observe-se que, para todo o

$m \in \mathbb{N}_0$, $0 \neq |\operatorname{Re} s + m| = |\operatorname{Re}(s+m)| \leq |s+m|$. Portanto $0 \neq |(\operatorname{Re} s)_n| \leq |(s)_n|$. Assim podemos usar a fórmula (4.3.3) para concluir que

$$|\Gamma(s)| = \frac{|\Gamma(s+n)|}{|(s)_n|} \leq \frac{\Gamma(\operatorname{Re} s + n)}{|(\operatorname{Re} s)_n|} = |\Gamma(\operatorname{Re} s)|.$$

□

De seguida, vamos enunciar duas fórmulas bastante conhecidas que vão ser necessárias em cálculos com a função gama que vamos realizar e que podem ser encontradas, por exemplo, na secção 1.2. de [Leb65]: a fórmula de reflexão de Euler e a fórmula de duplicação de Legendre. Em ambos os casos, a demonstração é feita numa faixa ou num semiplano do plano complexo onde se pode usar a definição da função gama para $\operatorname{Re} s > 0$ (4.3.1) e, de seguida, utiliza-se o corolário 2.13 para argumentar que a fórmula é válida em todo o plano complexo excepto nos pontos onde as funções envolvidas têm polos.

Teorema 4.20 (Fórmula de reflexão de Euler)**.** *Para todo o* $s \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$*,*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}. \tag{4.3.7}$$

Teorema 4.21 (Fórmula de duplicação de Legendre)**.** *Para todo o* $s \in \mathbb{C} \Big\backslash \left\{-\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$*,*

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \tag{4.3.8}$$

A fórmula de duplicação de Legendre pode ser generalizada pela fórmula de multiplicação de Gauss.

Teorema 4.22 (Fórmula de multiplicação de Gauss)**.** *Para qualquer* $m \in \mathbb{N}$ *fixo e para todo o* $s \in \mathbb{C} \backslash \left\{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$*,*

$$\Gamma(ms) = m^{ms-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-m}{2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(s + \frac{k}{m}\right). \tag{4.3.9}$$

O próximo resultado que vamos apresentar é uma consequência particularmente importante da fórmula de reflexão de Euler.

Corolário 4.23. *A função gama não tem zeros.*

Prova. Seja $s \in \mathbb{C}$.
Se $s = n \in \mathbb{N}$, então, pelo corolário 4.17, $\Gamma(n) = (n-1)! \neq 0$.
Se $s = -m$, com $m \in \mathbb{N}_0$, então, pela proposição 4.18, $s = -m$ é um pólo de $\Gamma(s)$.

Caso contrário, $s \notin \mathbb{Z}$, logo $\sin(\pi s) \neq 0$ e, pela proposição 4.18, s e $1-s$ não são pólos da função gama. Então $\Gamma(s), \Gamma(1-s) \in \mathbb{C}$ com $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)} \neq 0$, logo podemos concluir que $\Gamma(s) \neq 0$.

□

O valor mais conhecido da função gama com argumento não inteiro é provavelmente

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{4.3.10}$$

Curiosamente, este valor pode ser obtido quase directamente como consequência quer da fórmula de reflexão de Euler quer da fórmula de duplicação de Legendre, fazendo, em ambos os casos, a substituição $s = \dfrac{1}{2}$ e relembrando que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\Gamma(1) = 1$, respectivamente.

Para finalizar este capítulo, exibimos a fórmula de Stirling (que pode ser encontrada na secção 1.4. de [Leb65]) para o comportamento assintótico da função gama $\Gamma(s)$ quando $|s| \to \infty$:

$$\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s}. \tag{4.3.11}$$

Usando a equação funcional (4.3.4) e o corolário 4.17, podemos obter, como consequência da fórmula anterior, a fórmula de Stirling de aproximação da função factorial:

$$n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1-\frac{1}{2}} e^{-n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{4.3.12}$$

Capítulo 5

A função zeta de Riemann

O tema deste capítulo é a função zeta de Riemann, que, no semiplano $\mathrm{Re}\, s > 1$, é definida pela série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{5.0.1}$$

Utilizando o teste do integral, pode-se verificar que esta série de Dirichlet é absolutamente convergente no semiplano $\mathrm{Re}\, s > 1$. Portanto podemos utilizar o teorema 3.26 para concluir que a função zeta de Riemann é analítica no semiplano $\mathrm{Re}\, s > 1$ com derivadas

$$\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^s}, \tag{5.0.2}$$

e que estas séries de Dirichlet são absolutamente convergentes no semiplano $\mathrm{Re}\, s > 1$.
Como referido na introdução, Euler determinou o valor de $\zeta(2)$:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{5.0.3}$$

Em [Cha03] podem ser encontradas várias provas desta identidade, incluindo uma prova semelhante à prova original de Euler.
O valor de $\zeta(2)$ vai nos ser útil mais tarde e o mesmo se passa com o valor de $\zeta'(2)$:

$$\zeta'(2) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \left(\gamma + \ln \left(\frac{2\pi}{A^{12}} \right) \right), \tag{5.0.4}$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni, definida por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) \tag{5.0.5}$$

e A é a constante de Glaisher-Kinkelin definida por

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} k^k}{n^{n^2/2+n/2+1/12}e^{-n^2/4}}. \tag{5.0.6}$$

Vamos agora ver como escrever $\zeta(s)$, com $\operatorname{Re} s > 1$, na forma de um produto infinito ao longo dos primos, o produto de Euler para a função zeta. Este resultado, deduzido originalmente por Euler, pode ser encontrado, por exemplo, na secção 1.1. do livro [Tit86], que foi a nossa principal referência bibliográfica sobre a função zeta de Riemann.

Teorema 5.1. *Se* $\operatorname{Re} s > 1$*, então*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{5.0.7}$$

Como consequência do teorema 3.21 de unicidade de uma série de Dirichlet, sabemos que existe um semiplano $\operatorname{Re} s > \sigma$, com $\sigma \in \mathbb{R}$, tal que $\zeta(s)$ não se anula nesse semiplano. Em [Tit86], podemos ver, como corolário do teorema 5.1, que esse semiplano pode ser o semiplano $\operatorname{Re} s > 1$.

Vamos agora introduzir a função eta de Dirichlet $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$, também conhecida como a função zeta alternada, $\zeta^*(s)$.

Teorema 5.2. *Para* $s \in \mathbb{C}$ *tal que* $\operatorname{Re} s > 1$ *é válida a fórmula:*

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \tag{5.0.8}$$

e esta série define uma função analítica no semiplano $\operatorname{Re} s > 0$*.*

Prova. Para $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > 1$, podemos escrever a função zeta na forma de série de Dirichlet (5.0.1) e podemos concluir que a fórmula (5.0.8) se verifica porque

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n \text{ par}} \frac{2}{n^s} = \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^s} + \sum_{n \text{ par}} \frac{-1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Observemos que

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \left((2m-1)^{-s} - (2m)^{-s}\right) \tag{5.0.9}$$

e que, para todo o $m \in \mathbb{N}$ e para todo o $s \in \mathbb{C}$,

$$(2m-1)^{-s} - (2m)^{-s} = -x^{-s}\Big|_{2m-1}^{2m} = \int_{2m-1}^{2m} s x^{-s-1} dx.$$

Sejam $c_0, c_1, t \in \mathbb{R}^+$ com $c_0 < c_1$. Então, para qualquer s no rectângulo do plano complexo definido por $c_0 \leq \operatorname{Re} s \leq c_1$ e $|\operatorname{Im} s| \leq t$, temos $|s| \leq \sqrt{c_1^2 + t^2} =: C$ logo

$$\left|(2m-1)^{-s} - (2m)^{-s}\right| \leq \int_{2m-1}^{2m} |s| x^{\operatorname{Re}(-s-1)} dx = |s| \int_{2m-1}^{2m} x^{-\operatorname{Re} s - 1} dx \leq C \int_{2m-1}^{2m} x^{-c_0-1} dx.$$

Observemos agora que

$$\sum_{m=1}^{\infty} C \int_{2m-1}^{2m} x^{-c_0-1} dx \leq C \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} x^{-c_0-1} dx = C \int_{1}^{\infty} x^{-c_0-1} dx$$

e, como $c_0 > 0$ implica $-c_0 - 1 < -1$, este integral é convergente. Portanto podemos concluir, pelo teste de Weierstrass, que a série em (5.0.9) é uniformemente convergente no rectângulo $\{s \in \mathbb{C} : c_0 \leq \operatorname{Re} s \leq c_1, |\operatorname{Im} s| \leq t\}$ logo, como $c_0 > 0$ pode ser arbitrariamente pequeno e $c_1 > c_0$ e $t > 0$ podem ser arbitrariamente grandes, esta série define uma função analítica em todo o semiplano $\operatorname{Re} s > 0$.

$\square$

Este teorema permite-nos prolongar $\zeta(s)$ como uma função analítica no semiplano $\operatorname{Re} s > 0$ excepto nos zeros (simples) de $1 - 2^{1-s}$, os pontos da forma $s_k = 1 + \frac{2k\pi}{\ln 2} i$, com $k \in \mathbb{Z}$, onde $\zeta(s)$ pode ter polos. Mas no artigo [Son03] podemos ver que nestes pontos, excepto em $s_0 = 1$, $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 0$, logo estes pontos não são polos de $\zeta(s)$. Portanto $\zeta(s)$ é uma função analítica em todo o semiplano $\operatorname{Re} s > 0$ excepto no ponto $s = 1$.

O próximo teorema dá-nos a continuação analítica de $\zeta(s)$ para todo o plano complexo (excepto o ponto $s = 1$).

Teorema 5.3. *A função zeta de Riemann é analítica em todo o plano complexo excepto no ponto* $s = 1$ *onde tem um polo simples com resíduo* 1 *e satisfaz a equação funcional*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \tag{5.0.10}$$

Este teorema é o tema do capítulo 2 de [Tit86], no qual pode ser encontrado o enunciado e várias demonstrações deste teorema.

Note-se que, a partir das fórmulas (5.0.1) e (5.0.8), podemos deduzir que a fórmula $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$ é válida em todo o semiplano $\operatorname{Re} s > 0$ e além disso a equação funcional (5.0.10) preserva esta fórmula logo podemos concluir que $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$, para todo o $s \neq 1 \in \mathbb{C}$.

Vamos agora ver como utilizar a equação funcional da função zeta para reduzir a hipótese de Riemann à faixa crítica. Sabemos que $\zeta(s)$ é analítica e não tem zeros no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ e que $\Gamma(s)$ é analítica no semiplano $\operatorname{Re} s > 0$ e não tem zeros em todo o plano complexo. Se $\operatorname{Re} s <$

0, então $\operatorname{Re}(1-s) = 1 - \operatorname{Re} s > 1$ logo $1-s$ não é um pólo nem um zero das funções zeta e gama. Então, como 2^{-s} e π^{s-1} são duas funções inteiras que nunca se anulam, é uma consequência da equação funcional (5.0.10) que, se $\operatorname{Re} s < 0$, então $\zeta(s) = 0$ se e só se $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$, ou seja, se e só se $\frac{s}{2} \in \mathbb{Z}$. Portanto os únicos zeros de $\zeta(s)$ com $\operatorname{Re} s < 0$ são os inteiros negativos pares, que são chamados os zeros triviais da função zeta de Riemann. Assim podemos afirmar que qualquer zero não trivial da função zeta está na faixa $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$. A hipótese de Riemann conjectura que, se s é um zero não trivial da função zeta, então $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Em 1896, Hadamard e de la Vallée Poussin provaram independentemente que $\zeta(s)$ não tem zeros na recta vertical $\operatorname{Re} s = 1$, sendo este resultado e as suas consequências o tema do capítulo 3 de [Tit86]. Portanto, usando novamente a equação funcional (5.0.10) e como $\zeta(0) \neq 0$, podemos concluir que $\zeta(s)$ também não tem zeros na recta vertical $\operatorname{Re} s = 0$, logo a hipótese de Riemann reduz-se à faixa crítica $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Afirmamos acima que $\zeta(0) \neq 0$. Vamos agora ver que também podemos usar a equação funcional da função zeta de Riemann para calcular o valor de $\zeta(0)$. Como a função zeta é analítica, logo contínua, em todo o plano complexo excepto o ponto $s = 1$, podemos afirmar que $\zeta(0) = \lim_{s \to 0} \zeta(s)$ logo

$$\zeta(0) = \lim_{s \to 0} 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s) = \frac{\Gamma(1)}{2} \lim_{s \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\frac{\pi s}{2}} \lim_{s \to 0} s\zeta(1-s). \tag{5.0.11}$$

Fazendo uma mudança de variável $z = \frac{\pi s}{2}$,

$$\lim_{s \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\frac{\pi s}{2}} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1. \tag{5.0.12}$$

Por outro lado, como $w = 1$ é um polo simples da função zeta,

$$\lim_{w \to 1} (w-1)\zeta(w) = \operatorname*{res}_{w=1} \zeta(w) = 1, \tag{5.0.13}$$

logo, fazendo uma mudança de variável $w = 1 - s$,

$$\lim_{s \to 0} s\zeta(1-s) = -\lim_{w \to 1} (w-1)\zeta(w) = -1. \tag{5.0.14}$$

Assim, como $\Gamma(1) = 1$ (4.3.5), podemos concluir que

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}. \tag{5.0.15}$$

Como a função zeta é uma função analítica em todo o plano complexo excepto no ponto $s = 1$ onde tem um polo simples de resíduo 1, temos a seguinte representação em série de Laurent para a função zeta:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (s-1)^n, \tag{5.0.16}$$

com coeficientes únicos $c_n \in \mathbb{C}$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Esta série de Laurent converge uniformemente em qualquer anel $\{s \in \mathbb{C} : r \leq |s-1| \leq R\}$, com $r, R \in \mathbb{R}^+$ e $r < R$, logo, pelo teorema 2.9, podemos obter a sua derivada, derivando termo-a-termo:

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (s-1)^{n-1}. \tag{5.0.17}$$

No capítulo 7. vamos precisar do valor do limite $\lim\limits_{s\to 1} \Big(\zeta(s) + (s-1)\zeta'(s)\Big)$. Usando as séries de Laurent (5.0.16) e (5.0.17), temos

$$\lim_{s\to 1} \Big(\zeta(s) + (s-1)\zeta'(s)\Big) = \lim_{s\to 1} \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_n (s-1)^n\right) = c_0. \tag{5.0.18}$$

Pretendemos agora determinar c_0. Para isso, observe-se que

$$c_0 = \lim_{s\to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right). \tag{5.0.19}$$

Mas podemos ver, na secção 2.1. de [Tit86], que este limite é igual a γ, logo

$$\lim_{s\to 1} \Big(\zeta(s) + (s-1)\zeta'(s)\Big) = \lim_{s\to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma. \tag{5.0.20}$$

Finalmente, antes de passarmos para a secção sobre séries de Dirichlet relacionadas com a função zeta, vamos enunciar um teorema, que é equivalente a um teorema que pode ser encontrado na secção 1.5. do livro [Ivi85], sobre o comportamento da função zeta nas rectas verticais do plano complexo.

Teorema 5.4. *Fixando $t_0 > 0$, existe $M > 0$ tal que, para todo o $t \geq t_0$,*

$$\zeta(\sigma \pm it) \leq \begin{cases} M & \text{se } \sigma \geq 2, \\ M \ln t & \text{se } 1 \leq \sigma \leq 2, \\ M t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t & \text{se } 0 \leq \sigma \leq 1, \\ M t^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln t & \text{se } \sigma \leq 0. \end{cases} \tag{5.0.21}$$

5.1 Séries de Dirichlet relacionadas com a função zeta

Nesta secção vamos exibir várias igualdades que nos permitem escrever expressões onde aparece a função zeta de Riemann na forma de séries de Dirichlet absolutamente convergentes num semiplano do plano complexo. Já vimos neste capítulo representações em séries de Dirichlet absolutamente convergentes no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ para a função zeta (5.0.1), para as suas derivadas (5.0.2) e para a função eta $(1-2^{1-s})\zeta(s)$ (5.0.8).

Aplicando o teorema 3.27 ao caso particular da função zeta de Riemann, podemos obter representações como séries de Dirichlet absolutamente convergentes no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ para a derivada logarítmica da função zeta e para o logaritmo da função zeta:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}; \tag{5.1.1}$$

e

$$\ln(\zeta(s)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s}. \tag{5.1.2}$$

Substituindo $g(n) = 1$ no lema 3.25, obtém-se o seguinte lema que nos vai ser útil para garantir a convergência absoluta de algumas das séries de Dirichlet que se seguem.

Lema 5.5. *Seja f uma função aritmética tal que $f(n) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$, para todo o $\epsilon > 0$. Então a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$.*

Vamos agora começar a determinar mais representações na forma de séries de Dirichlet absolutamente convergentes num semiplano do plano complexo para expressões onde aparece a função zeta de Riemann.

Teorema 5.6. *No semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ verifica-se a igualdade*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{5.1.3}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Prova. A série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$, porque $|\mu(n)| \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, logo, se $\operatorname{Re} s > 1$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\mu(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} = \zeta(\operatorname{Re} s) < \infty.$$

Além disso, a igualdade (5.1.3) é válida no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$, como consequência do corolário 3.23 do teorema do produto de séries de Dirichlet, porque μ e *1* são inversos de Dirichlet.

□

A convergência absoluta desta série no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$, garante-nos, pelo teorema 3.26, que $\frac{1}{\zeta(s)}$ é analítica nesse semiplano, o que nos dá uma maneira alternativa de garantir que $\zeta(s)$ não se anula no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$.

Teorema 5.7. *Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ verifica-se a igualdade*

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}, \tag{5.1.4}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.
Em particular, para qualquer $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > 1$, podemos escrever

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}. \tag{5.1.5}$$

Note-se que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, denotamos $(\zeta(s))^k$ por $\zeta^k(s)$, para simplificar a notação e vamos manter essa notação até ao final da tese.
Antes de provar o teorema 5.7, vamos demonstrar o seguinte lema que nos permite majorar as funções $d_k(n)$.

Lema 5.8. *Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $d_k(n) \leq (d(n))^{k-1}$.*

Prova. Vamos provar este lema, por indução sobre $k \in \mathbb{N}$.
Para $k = 1$ e $k = 2$, o lema verifica-se porque $d_1(n) = 1 = (d(n))^0$ e $d_2(n) = d(n)$.
Suponhamos agora que o lema é válido para $k \geq 2$. Observe-se que, se $q, n \in \mathbb{N}$ e $q|n$, então qualquer divisor de q também é divisor de n, logo $d(q) \leq d(n)$. Então estamos em condições de provar que o lema também se verifica para $k+1$ porque

$$d_{k+1}(n) = \sum_{q|n} d_k(q) \leq \sum_{q|n} (d(q))^{k-1} \leq \sum_{q|n} (d(n))^{k-1} = d(n)(d(n))^{k-1} = (d(n))^k.$$

□

Para provar a convergência absoluta da série em (5.1.4), vamos usar o seguinte resultado que é um corolário do lema anterior e do teorema 3.7.

Corolário 5.9. *Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $d_k(n) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$, para todo o $\epsilon > 0$.*

Prova. Fixemos $k \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$. Pelo lema anterior, sabemos que $d_k(n) \leq (d(n))^{k-1}$ e, pelo teorema 3.7, sabemos que $d(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{\epsilon}{k-1}})$. Portanto podemos concluir que $d_k(n) = \mathcal{O}(n^{\epsilon})$.

□

Prova do teorema 5.7. Usando o lema 5.5 e o corolário 5.9, podemos concluir que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}$ converge absolutamente no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$.

Vamos agora demonstrar, por indução sobre $k \in \mathbb{N}$, que, se $\operatorname{Re} s > 1$, então a igualdade (5.1.4) verifica-se. O caso $k = 1$ é a representação da função zeta de Riemann em forma de série de Dirichlet (5.0.1). Além disso, relembrando o teorema 3.22 do produto de séries de Dirichlet e a proposição 3.2.5 que nos diz que $d_{k+1} = d_k * \mathit{1}$, para todo o $k \in \mathbb{N}$, podemos mostrar também que, se a igualdade (5.1.4) se verifica para um certo $k \in \mathbb{N}$, também se verifica para $k+1$ pois

$$\zeta^{k+1}(s) = \zeta^k(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d_k * \mathit{1})(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{k+1}(n)}{n^s}.$$

□

Teorema 5.10. *No semiplano* $\operatorname{Re} s > 1$ *verifica-se a igualdade*

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}, \tag{5.1.6}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Prova. A série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ porque $|\lambda(n)| = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como $\mathit{1} * \lambda = \chi$ (onde χ é a função característica do subconjunto dos quadrados perfeitos em $\mathbb{N}$), podemos calcular, se $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathit{1} * \lambda)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2)^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2s}} = \zeta(2s),$$

o que nos permite concluir que a igualdade (5.1.6) se verifica.

□

Teorema 5.11. *No semiplano* $\operatorname{Re} s > 1$ *verifica-se a igualdade*

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}, \tag{5.1.7}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Prova. A série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ porque, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $|\mu(n)| \leq 1$.

Para s tal que $\operatorname{Re} s > 1$, a igualdade (5.1.7) é uma consequência do teorema 5.10 e do corolário 3.23, porque já vimos que $|\mu|$ e λ são inversos de Dirichlet.

□

Teorema 5.12. *No semiplano* $\operatorname{Re} s > 1$ *verifica-se a igualdade*

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s}, \tag{5.1.8}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Para provar a convergência absoluta da série em (5.1.8), vamos usar o seguinte resultado que é um corolário do teorema 3.12.

Corolário 5.13. $2^{\omega(n)} = \mathcal{O}(n^{\epsilon})$*, para todo o* $\epsilon > 0$*.*

Prova. Pelo teorema 3.12, sabemos que $\omega(n) = \mathcal{O}(\ln(\ln n))$, ou seja, que existe $M > 0$ tal que $\omega(n) \leq M \ln(\ln n)$, para todo o $n \geq 3$ (apenas para $n \geq 3$, porque só se $n > e$ é que temos $\ln n > 1$ e $\ln(\ln n) > 0$). Portanto, para $n \geq 3$, tem-se $2^{\omega(n)} \leq 2^{M \ln(\ln n)} \leq e^{M \ln(\ln n)} = (\ln n)^M$. Mas $\ln n = \mathcal{O}(n^{\delta})$, para todo o $\delta > 0$, logo, para qualquer $\epsilon > 0$, sabemos que $\ln n = \mathcal{O}\left(n^{\frac{\epsilon}{M}}\right)$ e, consequentemente, $2^{\omega(n)} = \mathcal{O}(n^{\epsilon})$.

□

Prova do teorema 5.12. Usando o lema 5.5 e o corolário 5.13, podemos concluir que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s}$ converge absolutamente no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$. Por outro lado, usando o lema 3.13, podemos concluir que, se $\operatorname{Re} s > 1$, então a igualdade (5.1.8) verifica-se pois

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\mu| * \mathit{1})(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s}.$$

□

Teorema 5.14. *No semiplano* $\operatorname{Re} s > 1$ *verifica-se a igualdade*

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} \tag{5.1.9}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Para provar este teorema vamos utilizar o seguinte lema auxiliar.

Lema 5.15. *Para todo o* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{q|n} 2^{\omega(q)} = d(n^2)$*, ou seja,* $2^{\omega(n)} * \mathit{1} = d(n^2)$*.*

Prova. Como $d(n)$ é uma função aritmética multiplicativa, também $d(n^2)$ é multiplicativa e, como $\mathit{1}$ e $2^{\omega(n)}$ são multiplicativas, também $\mathit{1} * 2^{\omega(n)}$ é multiplicativa. Portanto, basta demonstrar que o lema se verifica para as potências de primos, o que é verdade porque, se p é primo e $k \in \mathbb{N}$, então, como $\omega(1) = 0$ e $\omega(p^i) = 1$, para todo o $i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{q|p^k} 2^{\omega(q)} = \sum_{i=0}^{k} 2^{\omega(p^i)} = 1 + 2k = d(p^{2k}) = d((p^k)^2).$$

□

Prova do teorema 5.14. Pelo teorema 3.7, temos, para qualquer $\epsilon > 0$, $d(n) = \mathcal{O}\left(n^{\frac{\epsilon}{2}}\right)$, logo $d(n^2) = \mathcal{O}\left((n^2)^{\frac{\epsilon}{2}}\right) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$. Consequentemente, pelo lema 5.5, a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s}$ converge absolutamente no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$. Por outro lado, usando o lema 5.15, podemos concluir que, se $\operatorname{Re} s > 1$, então a igualdade (5.1.9) verifica-se pois

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{\omega(n)} * \mathit{1})(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s}.$$

□

Teorema 5.16. *No semiplano* $\operatorname{Re} s > 1$ *verifica-se a igualdade*

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d(n))^2}{n^s} \tag{5.1.10}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Novamente vamos utilizar um lema auxiliar para provar este teorema.

Lema 5.17. *Para todo o* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{q|n} d(n^2) = (d(n))^2$*, ou seja,* $d(n^2) * \mathit{1} = (d(n))^2$*.*

Prova. Como $d(n)$ é uma função aritmética multiplicativa, também $(d(n))^2$ é multiplicativa e, como $\mathit{1}$ e $d(n^2)$ são multiplicativas, também $\mathit{1} * d(n^2)$ é multiplicativa. Portanto, basta demonstrar que o lema se verifica para as potências de primos, o que é verdade porque, se p é primo e $k \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}\sum_{q|p^k} d(q^2) &= \sum_{i=0}^{k} d(p^{2i}) = \sum_{i=0}^{k} (2i+1) = \sum_{i=0}^{2k+1} i - 2\sum_{i=0}^{k} i = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} - 2\frac{k(k+1)}{2} \\ &= (2k+1)(k+1) - k(k+1) = (k+1)^2 = (d(p^k))^2.\end{aligned}$$

□

Prova do teorema 5.16. Pelo teorema 3.7, temos, para qualquer $\epsilon > 0$, $d(n) = \mathcal{O}\left(n^{\frac{\epsilon}{2}}\right)$, logo $(d(n))^2 = \mathcal{O}\left(n^{\epsilon}\right)$. Consequentemente, pelo lema 5.5, a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d(n))^2}{n^s}$ converge absolutamente no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$. Por outro lado, usando o lema 5.17, podemos concluir que, se $\operatorname{Re} s > 1$, então a igualdade (5.1.10) verifica-se pois

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d(n^2) * \mathit{1})(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d(n))^2}{n^s}.$$

□

Teorema 5.18. *No semiplano* $\operatorname{Re} s > 2$ *verifica-se a igualdade*

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}, \tag{5.1.11}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Prova. A série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > 2$ porque $1 \leq \varphi(n) \leq n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, logo, se $\operatorname{Re} s > 2$ (isto é, se $\operatorname{Re} s - 1 > 1$), tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{\operatorname{Re} s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s - 1}} = \zeta(\operatorname{Re} s - 1) < \infty.$$

Além disso, para $\operatorname{Re} s > 2$, relembrando que $\varphi * \mathit{1}$, podemos calcular

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathit{1} * \varphi)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1),$$

o que nos permite concluir que a igualdade (5.1.11) se verifica.

□

Teorema 5.19. *No semiplano* $\operatorname{Re} s > 2$ *verifica-se a igualdade*

$$\frac{1 - 2^{1-s}}{1 - 2^{-s}} \zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \tag{5.1.12}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Prova. A série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > 2$ porque $1 \leq a(n) \leq n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Seja agora $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > 2$. Então $\left|2^{-s}\right| = 2^{\operatorname{Re}(-s)} = 2^{-\operatorname{Re} s} \leq 2^{-2} = \frac{1}{4} < 1$, logo é válida a seguinte expansão em série de Taylor:

$$\frac{1}{1 - 2^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-s})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2^k)^{-s}.$$

Portanto, como $\mathrm{Re}(s-1) > 1$, temos

$$\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\zeta(s-1) = \sum_{k=0}^{\infty}(2^k)^{-s}\left((1-2^{1-s})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m^{s-1}}\right).$$

De seguida podemos simplificar

$$(1-2^{1-s})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m^{s-1}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m^{s-1}} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)^{s-1}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m^{s-1}} - \sum_{m \text{ par}}\frac{1}{m^{s-1}} = \sum_{m \text{ ímpar}}\frac{m}{m^s}$$

e assim estamos em condições de concluir que

$$\frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\zeta(s-1) = \sum_{k=0}^{\infty}(2^k)^{-s}\sum_{m \text{ ímpar}}\frac{m}{m^s} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m \text{ ímpar}}\frac{m}{(2^k m)^s} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m \text{ ímpar}}\frac{a(2^k m)}{(2^k m)^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s},$$

onde a última igualdade é válida porque a convergência absoluta desta série nos permite alterar a ordem da soma dos seus termos.

□

Teorema 5.20. *Fixemos $a \in \mathbb{C}$. No semiplano $\mathrm{Re}\, s > \max\{1, \mathrm{Re}\, a + 1\}$ verifica-se a igualdade*

$$\zeta(s)\zeta(s-a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)}{n^s}, \tag{5.1.13}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Antes de provar este teorema, vamos demonstrar um resultado que nos vai auxiliar a garantir a convergência absoluta da série em (5.1.13).

Lema 5.21. *Para todo o $n \in \mathbb{N}$ e para todo o $a \in \mathbb{C}$, temos $|\sigma_a(n)| \leq d(n)$, se $\mathrm{Re}\, a < 0$, e $|\sigma_a(n)| \leq d(n)n^{\mathrm{Re}\, a}$, se $\mathrm{Re}\, a > 0$.*

Prova. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{C}$. Se $\mathrm{Re}\, a \leq 0$, então temos, para qualquer divisor d de n, $|d^a| = d^{\mathrm{Re}\, a} \leq d^0 = 1$, o que implica que $|\sigma_a(n)| \leq \sum_{d|n}|d^a| \leq \sum_{d|n} 1 = d(n)$. Por outro lado, se $\mathrm{Re}\, a > 0$, então temos, para qualquer divisor d de n, $|d^a| = d^{\mathrm{Re}\, a} \leq n^{\mathrm{Re}\, a}$, porque $d \leq n$, o que implica que $\sum_{d|n}|d^a| \leq \sum_{d|n} n^{\mathrm{Re}\, a} = d(n)n^{\mathrm{Re}\, a}$.

□

Prova do teorema 5.20. Se $\mathrm{Re}\, a \leq 0$, então sabemos que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\mathrm{Re}\, s > \max\{1, \mathrm{Re}\, a + 1\} = 1$, logo podemos concluir, usando o lema anterior, que também a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\mathrm{Re}\, s > \max\{1, \mathrm{Re}\, a + 1\} = 1$.

Caso contrário, se $\operatorname{Re} a > 0$, então, como a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\operatorname{Re} a}}{n^{\operatorname{Re} s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s - \operatorname{Re} a}}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a + 1$, podemos utilizar o lema 3.25 e o teorema 3.7 para afirmar que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n) n^{\operatorname{Re} a}}{n^{\operatorname{Re} s}}$ é absolutamente convergente nesse semiplano e podemos utilizar o lema anterior para concluir que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^s}$ é absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > \max\{1, \operatorname{Re} a + 1\} = \operatorname{Re} a + 1$.

Relembremos agora que, definindo $Id^a(n) = n^a$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos $1 * Id^a(n) = \sigma_a(n)$. Então, se $\operatorname{Re} s > \max\{1, \operatorname{Re} a + 1\}$, a igualdade (5.1.13) verifica-se pois

$$\zeta(s)\zeta(s-a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 * Id^a)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^s}.$$

□

Teorema 5.22. *Fixemos* $a, b \in \mathbb{C}$.

No semiplano $\operatorname{Re} s > \max\{1, \operatorname{Re} a + 1, \operatorname{Re} b + 1, \operatorname{Re}(a+b) + 1\}$ *verifica-se a igualdade*

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}, \tag{5.1.14}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

A igualdade (5.1.14) pode ser encontrada em [Ram16]. Temos quatro casos possíveis dependendo de $\operatorname{Re} a$ e $\operatorname{Re} b$ serem positivos ou não, e em cada um destes quatro casos podemos provar a convergência absoluta da série nessa igualdade de forma semelhante ao procedimento efetuado na demonstração da convergência absoluta no teorema anterior.

Agora vamos procurar uma representação em forma de série de Dirichlet para $\frac{1}{\zeta^k(s)}$ (com $k \in \mathbb{N}$) que vai ser fundamental para o capítulo seguinte. Com esse objectivo, vamos começar por definir a seguinte família de funções aritméticas que generaliza a função de Möbius.

Definição 5.23. *Defina-se a família de funções aritméticas* $\mu_k(n)$, *com* $k \in \mathbb{N}$, *de forma recursiva por* $\mu_1(n) = \mu(n)$ *e*

$$\mu_{k+1}(n) = (\mu_k * \mu)(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \mu_k(d), \tag{5.1.15}$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$.

Equivalentemente podemos definir, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mu_k = \mu * \cdots * \mu$ (k vezes).

Os dois lemas que se seguem permitem-nos, respectivamente, determinar e majorar o valor de $\mu_k(n)$, para todo o $k, n \in \mathbb{N}$.

Lema 5.24. *Seja $k \in \mathbb{N}$. Então $\mu_k(n)$ é uma função aritmética multiplicativa tal que, para todo o primo p e todo o $r \in \mathbb{N}$,*

$$\mu_k(p^r) = (-1)^r \binom{k}{r}. \tag{5.1.16}$$

Prova. A convolução de Dirichlet de duas funções aritméticas multiplicativas é multiplicativa, logo, como a função de Möbius é multiplicativa pode-se concluir, pela definição de $\mu_k(n)$ e usando indução sobre $k \in \mathbb{N}$, que $\mu_k(n)$ é uma função multiplicativa.

Vamos agora mostrar, novamente usando indução sobre k, que a fórmula (5.1.16) se verifica para todo o $k \in \mathbb{N}$. Fixemos p primo. Seja $r \in \mathbb{N}$. Se $r > 1$, então $\mu(p^r) = 0$ e $\binom{1}{r} = 0$, logo $\mu(p^r) = (-1)^r \binom{1}{r}$. Se $r = 1$, então $\mu(p) = -1$ e $\binom{1}{1} = 1$, logo $\mu(p) = -1 = (-1)^1 \binom{1}{1}$. Portanto o caso $k = 1$ de (5.1.16) verifica-se.

Suponhamos agora que a fórmula (5.1.16) se verifica para um certo $k \in \mathbb{N}$ e vejamos que então também se verifica para $k+1$. Fixemos p primo e $r \in \mathbb{N}$. Observe-se que os divisores de p^r são os números da forma p^s como $0 \leq s \leq r$. Então, pela fórmula (5.1.15), temos

$$\mu_{k+1}(p^r) = \sum_{d|p^r} \mu\left(\frac{p^r}{d}\right) \mu_k(d) = \sum_{s=0}^{r} \mu(p^{r-s})\mu_k(p^s).$$

Mas $\mu(p^{r-s}) = 0$, se $r - s > 1$, isto é, se $s < r-1$; $\mu(p^{r-s}) = -1$, se $r - s = 1$, isto é, se $s = r-1$; e $\mu(p^{r-s}) = 1$, se $r - s = 0$, isto é, se $s = r$. Portanto temos

$$\mu_{k+1}(p^r) = \sum_{s=0}^{r} \mu(p^{r-s})\mu_k(p^s) = \mu_k(p^r) - \mu_k(p^{r-1}).$$

Usando agora a hipótese de indução, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\mu_{k+1}(p^r) = \mu_k(p^r) - \mu_k(p^{r-1}) &= (-1)^r \binom{k}{r} - (-1)^{r-1}\binom{k}{r-1} \\ &= (-1)^r \left[\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1}\right] = (-1)^r \binom{k+1}{r}.\end{aligned}$$

□

Lema 5.25. *Para todo o $k \in \mathbb{N}$ e para todo o $n \in \mathbb{N}$, temos $|\mu_k(n)| \leq d_k(n)$.*

Prova. Vamos provar este lema por indução sobre k.

Para $k = 1$, o lema verifica-se pois $|\mu_1(n)| = |\mu(n)| \leq 1 = d_1(n)$.

Suponhamos agora que o lema é válido para um certo $k \in \mathbb{N}$. Então, relembrando as fórmulas (5.1.15) e (3.2.5), podemos concluir que também é válido para $k+1$ porque

$$|\mu_{k+1}(n)| \leq \sum_{q|n} \left|\mu\left(\frac{n}{q}\right)\right| |\mu_k(q)| \leq \sum_{q|n} |\mu_k(q)| \leq \sum_{q|n} d_k(q) = d_{k+1}(n).$$

□

Teorema 5.26. *No semiplano* $\operatorname{Re} s > 1$ *verifica-se, para todo o* $k \in \mathbb{N}$*, a igualdade*

$$\frac{1}{\zeta^k(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_k(n)}{n^s}, \tag{5.1.17}$$

e esta série de Dirichlet é absolutamente convergente nesse semiplano.

Prova. Fixemos $k \in \mathbb{N}$. Pelo lema anterior, sabemos que $|\mu_k(n)| \leq d_k(n)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e, pelo lema 5.9, sabemos que $d_k(n) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$, para todo o $\epsilon > 0$. Portanto, podemos concluir que $\mu_k(n) = \mathcal{O}(n^\epsilon)$, para todo o $\epsilon > 0$ e, consequentemente, pelo lema 5.5, a série em (5.1.17) converge absolutamente para qualquer $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s > 1$.
Vamos agora provar a igualdade pretendida por indução.
O caso $k = 1$ é a série de Dirichlet para $\frac{1}{\zeta(s)}$ (5.1.3).
Suponhamos que o lema é válido para $k \in \mathbb{N}$. Então também é válido para $k + 1$ porque

$$\frac{1}{\zeta^{k+1}(s)} = \frac{1}{\zeta^k(s)}\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_k(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_k * \mu)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{k+1}(n)}{n^s}.$$

$\square$

A fórmula (5.1.16) permite-nos generalizar a família de funções $\mu_k(n)$, com $k \in \mathbb{N}$, definindo, para todo o $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mu_\alpha(n)$ como a função aritmética multiplicativa tal que, para cada primo p e cada $r \in \mathbb{N}$,

$$\mu_\alpha(p^r) = (-1)^r \binom{\alpha}{r} = \frac{(-1)^r \left(\alpha - (r-1)\right)_r}{r!}. \tag{5.1.18}$$

As funções $\mu_\alpha(n)$, com $\alpha \in \mathbb{C}$, foram introduzidas por Jean-Marie Souriau no seu artigo "Généralisation de certaines formules arithmétiques d'inversion" de 1944, onde também mostrou que, definindo $\mu_\alpha(n)$ desta forma, temos a seguinte representação de $\frac{1}{\zeta^\alpha(s)}$ em forma de série de Dirichlet no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\frac{1}{\zeta^\alpha(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_\alpha(n)}{n^s}. \tag{5.1.19}$$

Para finalizar este capítulo vamos fazer uma breve referência aos produtos de Euler de séries de Dirichlet. Na secção 11.5. de [Apo76] pode ser encontrado um teorema que generaliza o teorema 5.1 e nos permite escrever funções representadas por séries de Dirichlet absolutamente convergentes, como produtos ao longo dos primos, denominados por produtos de Euler, e também podem ser encontrados exemplos dos produtos de Euler de algumas funções relacionadas com a função zeta de Riemann.

Alternativamente ao processo de obter séries de Dirichlet para funções relacionadas com a função de Riemann e a partir destas séries obter produtos de Euler, também é possível partir do produto de Euler para a função zeta de Riemann (5.0.7), deduzir os produtos de Euler para as funções relacionadas com a função de Riemann e a partir desses produtos usar as definições das funções aritméticas para obter séries de Dirichlet para essas funções. É esse o processo utilizado no capítulo 1 de [Tit86] para obter as séries de Dirichlet que foram deduzidas anteriormente.

Capítulo 6

Iterações de transformadas aritméticas

Vamos começar este capítulo enunciando uma proposição que mostra como se garante a igualdade entre a forma de série e a forma de integral de transformadas aritméticas, em cujo integral aparecem funções definidas por séries de Dirichlet, aplicadas a funções nas classes $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Esta proposição permite-nos ter, para cada série de Dirichlet exibida no capítulo anterior, uma transformada aritmética que pode ser definida equivalentemente em forma de série ou de integral.

Proposição 6.1. *Sejam $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$, $g(n)$ uma função aritmética e $G(s)$ definida pela série de Dirichlet absolutamente convergente no semiplano $\operatorname{Re} s > a$*

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}. \tag{6.0.1}$$

Então, para todo o $\max\{0, a\} < \sigma < \alpha$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(s) f^*(s) x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) f(nx). \tag{6.0.2}$$

Prova. Fixemos $\max\{0, a\} < \sigma < \alpha$. Como $\sigma > a$, podemos usar (6.0.1) para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(s) f^*(s) x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} f^*(s) x^{-s} ds.$$

Como a série de Dirichlet em (6.0.1) é absolutamente convergente se $\operatorname{Re} s > a$ e, como $\sigma > a$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(n)|}{n^{\sigma}}$ é convergente. Por outro lado, como $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, $n \geq 2$ e $0 < \sigma < \alpha$, a proposição 4.14 garante-nos que $f^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$. Então

$$\left| \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{g(n)}{n^s} f^*(s) x^{-s} \right| ds \right| \leq x^{-\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(n)|}{n^{\sigma}} \left| \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} |f^*(s)| ds \right| < \infty.$$

Portanto podemos utilizar o teorema 2.3 para trocar a ordem da série e do integral e obter

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} G(s)f^*(s)x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f^*(s)(xn)^{-s}ds.$$

Finalmente, podemos usar novamente a proposição 4.14, que nos diz que f é a transformada inversa de Mellin de f^* para concluirmos o resultado pretendido.

□

6.1 Transformada de Möbius

Como referido na introdução, nesta secção vamos determinar as representações em série e em integral de uma transformada aritmética específica, a transformada de Möbius, da sua transformada inversa e da composta de sucessivas iterações da transformada de Möbius e da sua inversa nas classes de funções $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$.

Definição 6.2. *A transformada de Möbius de uma função f é definida por:*

$$(\Theta f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx).$$

O objectivo deste subcapítulo vai ser provar o teorema que se segue.

Teorema 6.3. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então, para qualquer $1 < \sigma < \alpha$, a transformada de Möbius, a inversa da transformada de Möbius, e as composições de $k \in \mathbb{N}$ iterações da transformada de Möbius e da sua inversa podem ser representadas em forma de integral e de série dadas pelas seguintes fórmulas:*

$$(\Theta f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx); \tag{6.1.1}$$

$$(\Theta^{-1} f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f^*(s)}{\zeta(s)}x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)f(nx); \tag{6.1.2}$$

$$(\Theta^k f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta^k(s)f^*(s)x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n)f(nx); \tag{6.1.3}$$

$$\left((\Theta^{-1})^k f\right)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f^*(s)}{\zeta^k(s)}x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_k(n)f(nx). \tag{6.1.4}$$

As igualdades entre as séries e os integrais nas fórmulas do teorema 6.3 são casos particulares da proposição 6.1, com $a = 1$, utilizando, respectivamente, as fórmulas (5.0.1), (5.1.3), (5.1.4) e (5.1.17) e a convergência absoluta das respectivas séries de Dirichlet no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$. Portanto basta-nos provar a validade das representações em forma de integral.

Com esse objectivo comecemos por observar que, para todo o $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} s > 1$, temos

$$|\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} = \zeta(\operatorname{Re} s) \tag{6.1.5}$$

e

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^{\operatorname{Re} s}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} = \zeta(\operatorname{Re} s). \tag{6.1.6}$$

Assim podemos concluir que, para todo o $k \in \mathbb{N}$ e para todo o $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\left|\zeta^k(s)\right|, \left|\frac{1}{\zeta^k(s)}\right| \leq \zeta^k(\operatorname{Re} s). \tag{6.1.7}$$

O resultado que se segue é uma consequência desta fórmula.

Lema 6.4. *Se* $\sigma > 1$ *e* $\phi(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$, *então, para todo o* $k \in \mathbb{N}$,

$$\zeta^k(s)\phi(s)x^{-s}, \frac{\phi(s)}{\zeta^k(s)}x^{-s} \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[).$$

Prova. Se $\sigma > 1$, $\phi(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$ e $k \in \mathbb{N}$, então, usando a observação anterior, podemos afirmar que

$$\left|\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left|\zeta^k(s)\phi(s)x^{-s}\right| ds\right| \leq x^{-\sigma}\zeta^k(\sigma) \left|\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |\phi(s)| ds\right| < \infty.$$

Portanto $\zeta^k(s)\phi(s)x^{-s} \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$.

Analogamente vê-se que $\dfrac{\phi(s)}{\zeta^k(s)}x^{-s} \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$.

□

A proposição 4.14 diz-nos que, se $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$, então, para qualquer $0 < \sigma < \alpha$, $f^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$. Assim podemos deduzir do lema 6.4 o seguinte corolário, que nos garante que todos os integrais que aparecem no teorema 6.3 são absolutamente convergentes.

Corolário 6.5. *Seja* $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, *com* $\alpha > 1$ *e* $n \geq 2$. *Então, para todo o* $k \in \mathbb{N}$ *e para qualquer* $1 < \sigma < \alpha$, $\zeta^k(s)f^*(s)x^{-s}, \dfrac{f^*(s)}{\zeta^k(s)}x^{-s} \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$.

Vamos agora provar, por indução sobre $k \in \mathbb{N}$, que, para todo o $1 < \sigma < \alpha$,

$$(\Theta^k f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta^k(s) f^*(s) x^{-s} ds. \tag{6.1.8}$$

Com este objectivo, vamos começar por demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 6.6. *Seja $g^*(s)$ uma função analítica na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$ tal que, para todo o $1 < \sigma < \alpha$, $g^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$ e seja $g(x)$ uma função de variável real tal que*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} g^*(s) x^{-s} ds,$$

para todo o $1 < \sigma < \alpha$. Então $(\Theta g)(x) x^{\sigma - 1} \in L_1([0, \infty[)$, para todo o $1 < \sigma < \alpha$; a transformada de Mellin de Θg, na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$, é $(\Theta g)^*(s) = \zeta(s) g^*(s)$ e

$$(\Theta g)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \zeta(s) g^*(s) x^{-s} ds.$$

Prova. Como $g^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$, para todo o $1 < \sigma < \alpha$, e $g^*(s)$ é uma função analítica na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$, estamos nas condições da proposição 4.10 logo, para todo o $1 < \sigma < \alpha$, existe $M(\sigma) \in \mathbb{R}$ tal que $|g(x)| \leq M(\sigma) x^{-\sigma}$, para todo o $x > 0$, e $g(x) x^{\sigma - 1} \in L_1([0, \infty[)$ e, na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$, $g^*(s)$ é a transformada de Mellin de g.

Fixemos agora $1 < \sigma < \alpha$. Se escolhermos algum $1 < c_1 < \sigma$, sabemos que existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|g(y)| \leq M_1 y^{-c_1}$, para todo o $y > 0$, logo $(\Theta g)(x) x^{\sigma - 1} \in L_1\left([0, 1]\right)$ porque

$$\begin{aligned}\int_0^1 |(\Theta g)(x)| x^{\sigma - 1} dx &\leq \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |g(nx)| x^{\sigma - 1} dx \leq \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} M_1 (nx)^{-c_1} x^{\sigma - 1} dx \\ &\leq M_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-c_1}} \int_0^1 x^{-1 - c_1 + \sigma} dx \leq M_1 \zeta(c_1) \int_0^1 x^{-1 - c_1 + \sigma} dx < \infty\end{aligned}$$

e este último integral é convergente porque $c_1 < \sigma$ implica $-1 - c_1 + \sigma > -1$.

Analogamente, escolhendo algum $\sigma < c_2 < \alpha$, existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tal que $|g(y)| \leq M_2 . y^{-c_2}$, para todo o $y > 0$, logo $(\Theta g)(x) x^{\sigma - 1} \in L_1\left([1, \infty[\right)$ porque

$$\int_1^{\infty} |(\Theta g)(x)| x^{\sigma - 1} dx \leq M_2 \zeta(c_2) \int_1^{\infty} x^{-1 - c_2 + \sigma} dx < \infty$$

e este último integral é convergente porque $c_2 > \sigma$ implica $-1 - c_2 + \sigma < -1$.

Portanto $(\Theta g)(x) x^{\sigma - 1} \in L_1\left([0, \infty[\right)$, para todo o $1 < \sigma < \alpha$, logo a transformada de Mellin de $(\Theta g)(x)$, $(\Theta g)^*(s)$, existe em toda a faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$ e, além disso, para calcularmos $(\Theta g)^*(s)$ nesta faixa podemos usar o teorema 2.3 para trocar a ordem do integral e da série e obter que

$$(\Theta g)^*(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g(nx) x^{s-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} g(nx) x^{s-1} dx.$$

Vamos agora multiplicar (dentro do integral) e dividir (fora do integral) por n^s, de forma a fazermos aparecer a função zeta de Riemann e de seguida vamos fazer uma mudança de variável no integral para $u = nx$ (que implica $du = ndx$). Com este processo obtemos que

$$(\Theta g)^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} g(nx)(nx)^{s-1}(ndx) = \zeta(s) \int_0^{\infty} g(u) u^{s-1} du.$$

Mas, como já vimos que, na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$, a transformada de Mellin de g existe e é igual a $g^*(s)$, então este último integral é igual a $g^*(s)$, logo $(\Theta g)^*(s) = \zeta(s)g^*(s)$. Finalmente, como $g^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$ e $\sigma > 1$, podemos usar o lema 6.4 para afirmar que $(\Theta g)^*(s) = \zeta(s)g^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$. Portanto podemos aplicar o Teorema de Inversão da Transformada de Mellin para concluir que

$$(\Theta g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta(s)g^*(s)x^{-s}ds.$$

□

Relembrando a proposição 4.14 sabemos que, como $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$ e $n \geq 2$, então

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f^*(s)x^{-s}ds,$$

onde $f^*(s)$ é a transformada de Mellin de f e é uma função analítica na faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$ tal que $f^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$, para todo o $0 < \sigma < \alpha$. Portanto f está nas condições da proposição 6.6 logo

$$(\Theta f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds,$$

ou seja, o caso $k = 1$ da fórmula (6.1.8) verifica-se.

Suponhamos que a fórmula (6.1.8) se verifica para um certo $k \in \mathbb{N}$. Como $\zeta(s)$ é analítica no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ e $f^*(s)$ é analítica na faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$, $\zeta^k(s)f^*(s)$ é uma função analítica na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$. Além disso, pelo corolário 6.5, sabemos que $\zeta^k(s)f^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$. Portanto estamos nas condições da proposição 6.6 logo, como $(\Theta^{k+1}f) = \Theta(\Theta^k f)$, podemos concluir que

$$(\Theta^{k+1}f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta(s)\left(\zeta^k(s)f^*(s)\right)x^{-s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta^{k+1}(s)f^*(s)x^{-s}ds.$$

Assim o passo de indução está provado e conclui-se que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e para todo o $1 < \sigma < \alpha$, a fórmula (6.1.8) se verifica, ou seja, está provada a representação integral na fórmula (6.1.3) do teorema 6.3.

Queremos ver que a inversa da transformada de Möbius é

$$(\Theta^{-1}f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)f(nx). \tag{6.1.9}$$

Mas primeiro vamos provar, por indução sobre $k \in \mathbb{N}$, que, para $\sigma > 1$,

$$\left((\Theta^{-1})^k f\right)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f^*(s)}{\zeta^k(s)}x^{-s}ds, \tag{6.1.10}$$

onde $\Theta^{-1}f$ é definida por (6.1.9). Novamente, vamos começar por demonstrar uma proposição auxiliar (análoga à proposição 6.6).

Proposição 6.7. *Seja $g^*(s)$ uma função analítica na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$ tal que $g^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$, para todo o $1 < \sigma < \alpha$, e seja $g(x)$ uma função tal que*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g^*(s)x^{-s}ds,$$

para todo o $1 < \sigma < \alpha$. Então $(\Theta^{-1}g)(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$, para todo o $1 < \sigma < \alpha$; na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$, a transformada de Mellin de $\Theta^{-1}g$ é $(\Theta^{-1}g)^*(s) = \dfrac{g^*(s)}{\zeta(s)}$ e

$$(\Theta^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{g^*(s)}{\zeta(s)}x^{-s}ds.$$

Prova. Tal como na proposição 6.6 sabemos que, para todo o $1 < \sigma < \alpha$, existe $M(\sigma) \in \mathbb{R}$ tal que $|g(x)| \leq M(\sigma)x^{-\sigma}$, para todo o $x > 0$, e $g(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$ e sabemos que, na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$, a transformada de Mellin de g é igual a $g^*(s)$.
Como $|\mu(n)| \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, mostra-se que $(\Theta^{-1}g)(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$, para todo o $1 < \sigma < \alpha$, de forma análoga à usada para mostrar que $(\Theta g)(x)x^{\sigma-1} \in L_1([0,\infty[)$, na prova da proposição 6.6. Portanto a transformada de Mellin de $(\Theta^{-1}g)(x)$, $(\Theta^{-1}g)^*(s)$, existe em toda a faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$ e, além disso, podemos usar o teorema 2.3 para trocar a ordem do integral e da série e calcular, na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$,

$$\begin{aligned}(\Theta^{-1}g)^*(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \mu(n)g(nx)x^{s-1}dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \mu(n)g(nx)x^{s-1}dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^s}\int_0^\infty g(nx)(nx)^{s-1}(ndx) = \frac{1}{\zeta(s)}\int_0^\infty g(u)u^{s-1}du.\end{aligned}$$

Mas, na faixa $1 < \operatorname{Re} s < \alpha$, $g^*(s)$ é a transformada de Mellin de g, logo $(\Theta^{-1}g)^*(s) = \dfrac{g^*(s)}{\zeta(s)}$.
Finalmente, como $g^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$, podemos usar o lema 6.4, para garantir que também $(\Theta^{-1}g)^*(s) = \dfrac{g^*(s)}{\zeta(s)} \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$, logo podemos aplicar o Teorema de Inversão da Transformada de Mellin para concluir que

$$(\Theta^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{g^*(s)}{\zeta(s)}x^{-s}ds.$$

□

Novamente, relembrando a proposição 4.14, sabemos que f está nas condições da proposição 6.6 logo

$$(\Theta^{-1}f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f^*(s)}{\zeta(s)}x^{-s}ds,$$

ou seja, o caso $k = 1$ da fórmula (6.1.10) verifica-se.

Suponhamos que a fórmula (6.1.10) se verifica para um certo $k \in \mathbb{N}$. Como $\dfrac{1}{\zeta(s)}$ é analítica no semiplano $\mathrm{Re}\, s > 1$ e $f^*(s)$ é analítica na faixa $0 < \mathrm{Re}\, s < \alpha$, $\dfrac{f^*(s)}{\zeta^k(s)}$ é uma função analítica na faixa $1 < \mathrm{Re}\, s < \alpha$. Além disso, pelo corolário 6.5, sabemos que $\dfrac{f^*(s)}{\zeta^k(s)} \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$. Portanto estamos nas condições da proposição 6.7 logo, como $\left((\Theta^{-1})^{k+1} f\right) = \Theta^{-1}\left((\Theta^{-1})^k f\right)$, podemos concluir que

$$((\Theta^{-1})^{k+1} f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\left((\Theta^{-1})^k f\right)^*(s)}{\zeta(s)} x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{f^*(s)}{\zeta^{k+1}(s)} x^{-s} ds.$$

Assim o passo de indução está provado e conclui-se que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e para todo o $1 < \sigma < \alpha$, a fórmula (6.1.10) se verifica, ou seja, está provada a representação integral na fórmula (6.1.4) do teorema 6.3.

Resta-nos apenas verificar que Θ^{-1} é mesmo a inversa da transformada de Möbius. Com esse objectivo consideremos a proposição 6.6 com $g = \Theta^{-1} f$. Note-se que já vimos que a transformada de Mellin de $\Theta^{-1} f$ é $(\Theta^{-1} f)^*(s) = \dfrac{f^*(s)}{\zeta(s)}$ e que $\Theta^{-1} f$ e $(\Theta^{-1} f)^*(s)$ satisfazem as condições da proposição 6.6. Então

$$\left(\Theta(\Theta^{-1} f)\right)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \zeta(s)(\Theta^{-1} f)^*(s) x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f^*(s) x^{-s} ds = f(x).$$

Portanto $\Theta\left(\Theta^{-1} f\right) = f$.

Analogamente, considerando a proposição 6.7 com $g = \Theta f$, prova-se que $\Theta^{-1}(\Theta f) = f$.

Assim podemos concluir que Θ^{-1} é mesmo a inversa da transformada de Möbius, o que termina a demonstração do teorema 6.3 e encerra este capítulo.

Capítulo 7

Fórmulas do tipo de Müntz

7.1 Demonstração da fórmula de Müntz

Nesta secção vamos demonstrar a fórmula de Müntz, enunciada na introdução, para uma função f na classe $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. A seguinte proposição vai ser fundamental nesta demonstração.

Proposição 7.1. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então, para todo o $0 < c_0 < 1$,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty}\zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty}f(nx) - \frac{1}{x}f^*(1). \tag{7.1.1}$$

Antes de demonstrarmos esta proposição, vamos enunciar e demonstrar um resultado semelhante ao teorema dos resíduos para integrais sobre rectas verticais do plano complexo.

Teorema 7.2. *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $c < a < b < d$, e seja $\phi(s)$ uma função tal que $\phi(s)$ é analítica em toda a faixa $c < \operatorname{Re} s < d$ excepto num ponto $s = s_0$, com $a < \operatorname{Re}(s_0) < b$, $\phi(s) \in L_1(]a - i\infty, a + i\infty[)$, $\phi(s) \in L_1(]b - i\infty, b + i\infty[)$ e*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{a\pm iN}^{b\pm iN}\phi(s)ds = 0. \tag{7.1.2}$$

Então

$$\operatorname*{res}_{s=s_0}\phi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\phi(s)ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\phi(s)ds. \tag{7.1.3}$$

Em particular, se $\phi(s)$ é analítica em toda a faixa $c < \operatorname{Re} s < d$,

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\phi(s)ds = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\phi(s)ds. \tag{7.1.4}$$

Prova. Para qualquer $N \in \mathbb{R}^+$, defina-se Ω_N como o rectângulo obtido a partir das rectas verticais $\operatorname{Re} s = a$ e $\operatorname{Re} s = b$ e das rectas horizontais $\operatorname{Im} s = N$ e $\operatorname{Im} s = -N$ percorrido no sentido positivo. Então, usando o teorema dos resíduos de Cauchy, podemos afirmar que

$$\operatorname*{res}_{s=s_0} \phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega_N} \phi(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{b-iN}^{b+iN} + \int_{b+iN}^{a+iN} + \int_{a+iN}^{a-iN} + \int_{a-iN}^{b-iN} \right) \phi(s) ds, \tag{7.1.5}$$

ou seja,

$$\operatorname*{res}_{s=s_0} \phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iN}^{b+iN} \phi(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iN}^{a+iN} \phi(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iN}^{b-iN} \phi(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{a+iN}^{b+iN} \phi(s) ds. \tag{7.1.6}$$

O próximo passo vai ser aplicar o limite $N \to \infty$ a esta fórmula.

Como $\phi(s) \in L_1(]a - i\infty, a + i\infty[)$,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{a-iN}^{a+iN} \phi(s) ds = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \phi(s) ds \tag{7.1.7}$$

e, como $\phi(s) \in L_1(]b - i\infty, b + i\infty[)$,

$$\lim_{N\to\infty} \int_{b-iN}^{b+iN} \phi(s) ds = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \phi(s) ds. \tag{7.1.8}$$

Portanto, aplicando o limite $N \to \infty$ à fórmula (7.1.6) e usando as fórmulas (7.1.2), (7.1.7) e (7.1.8), conclui-se o resultado pretendido (7.1.3).

No caso de $\phi(s)$ ser analítica em toda a faixa $a < \operatorname{Re} s < b$, utiliza-se o teorema integral de Cauchy (2.5) em vez do teorema dos resíduos e portanto aparece um 0 em vez do resíduo e podemos concluir (7.1.4).

□

De seguida, vamos enunciar e demonstrar dois lemas auxiliares que nos vão permitir estar nas condições do teorema anterior quando demonstrarmos a proposição 7.1.

Lema 7.3. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então $\zeta(s) f^*(s) x^{-s} \in L_1(]u - i\infty, u + i\infty[)$, para todo o $u \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{3}{2} - n < u < 1$ e $u \notin \mathbb{Z}$.*

Prova. Seja $u \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{3}{2} - n < u < 1$ e $u \notin \mathbb{Z}$. Comecemos por fazer uma mudança de variável $s = u + it$, que implica $ds = idt$, para afirmar que

$$\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} |\zeta(s) f^*(s) x^{-s}| ds = i x^{-u} \int_{-\infty}^{+\infty} |\zeta(u + it) f^*(u + it)| \, dt. \tag{7.1.9}$$

Como $u \neq 1$, $\zeta(s)$ é contínua na recta $\operatorname{Re} s = u$ e, como $u \notin \mathbb{Z}$, também $f^*(s)$ é contínua na recta $\operatorname{Re} s = u$, logo $\zeta(s)f^*(s)$ é contínua na recta $\operatorname{Re} s = u$. Portanto $\zeta(u+it)f^*(u+it)$ é uma função (com variável real t) contínua e, consequentemente, $\zeta(u+it)f^*(u+it) \in L_1[-1,1]$.

Relembrando a fórmula (4.2.5), sabemos que, se definirmos $K = \displaystyle\int_0^\infty |f^{(n)}(x)|x^{u+n-1}dx$, então $|f^*(u \pm it)| \leq \dfrac{K}{|t|^n}$, para todo o $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, e usando o teorema 5.4 com $t_0 = 1$, sabemos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $t > 1$, $|\zeta(u \pm it)| \leq Mt^{\frac{1-u}{2}} \ln t$, se $0 < u < 1$, e $|\zeta(u \pm it)| \leq Mt^{\frac{1}{2}-u} \ln t$, se $u < 0$.

Portanto, se $0 < u < 1$,

$$\int_1^\infty |\zeta(u+it)f^*(u+it)|\, dt \leq \int_1^\infty Mt^{\frac{1-u}{2}} \ln t\, \frac{K}{t^n} dt \leq MK \int_1^\infty \ln t \cdot t^{\frac{1-u-2n}{2}} dt$$

e este último integral é convergente porque $u > 0$ e $n \geq 2$ implica $\dfrac{1-u-2n}{2} < -\dfrac{3}{2} < -1$.

Caso contrário, $\dfrac{3}{2} - n < u < 0$ logo

$$\int_1^\infty |\zeta(u+it)f^*(u+it)|\, dt \leq MK \int_1^\infty \ln t \cdot t^{\frac{1}{2}-u-n} dt$$

e este último integral é convergente porque $u > \dfrac{3}{2} - n$ implica $\dfrac{1}{2} - u - n < -1$.

Portanto $\zeta(u+it)f^*(u+it) \in L_1([1,\infty])$ e, analogamente, $\zeta(u+it)f^*(u+it) \in L_1(]-\infty,-1])$. Assim podemos concluir que $\zeta(u+it)f^*(u+it) \in L_1(]-\infty,+\infty[)$ e, consequentemente, pela fórmula (7.1.9), $\zeta(s)f^*(s)x^{-s} \in L_1(]u-i\infty, u+i\infty[)$.

$\square$

Lema 7.4. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, para todo o $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{2} - n < u_1 < u_2 < \alpha$,*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{u_1 \pm iN}^{u_2 \pm iN} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds = 0. \tag{7.1.10}$$

Prova. Sejam $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\dfrac{1}{2} - n < u_1 < u_2 < \alpha$. Comecemos por observar que

$$\left|\int_{u_1\pm iN}^{u_2\pm iN} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds\right| \leq \left|\int_{u_1\pm iN}^{u_2\pm iN} \left|\zeta(s)f^*(s)x^{-s}\right| ds\right| = \int_{u_1}^{u_2} |\zeta(u \pm iN)f^*(u \pm iN)|\, x^{-u}du$$

e que o integral $\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} x^{-u}du$ é sempre convergente porque é um integral limitado de uma função contínua.

Para qualquer $u_1 \leq u \leq u_2$, podemos aplicar o lema 4.8 para afirmar que,

$$\int_0^\infty \left|f^{(n)}(x)\right| x^{u+n-1}dx \leq \int_0^1 \left|f^{(n)}(x)\right| x^{u_1+n-1}dx + \int_1^\infty \left|f^{(n)}(x)\right| x^{u_2+n-1}dx = C.$$

Então, relembrando a fórmula (4.2.5), temos, para todo o $N > 0$,

$$|f^*(u \pm iN)| \leq \frac{1}{N^n} \int_0^\infty |f^{(n)}(x)| x^{u+n-1} dx \leq \frac{C}{N^n}.$$

Utilizando o teorema 5.4, com $t_0 = 1$, sabemos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $N > 1$: $|\zeta(u \pm iN)| \leq M \ln N$, se $1 \leq u \leq \alpha$; $|\zeta(u \pm iN)| \leq M N^{\frac{1-u}{2}} \ln N \leq M\sqrt{N} \ln N$, se $0 \leq u \leq 1$; e $|\zeta(u \pm iN)| \leq M N^{\frac{1}{2}-u} \ln N$, se $u \leq 0$. A partir daqui seja sempre $N > 1$.

Se $1 \leq u_1 < u_2 < \alpha$,

$$\int_{u_1}^{u_2} |\zeta(u \pm iN) f^*(u \pm iN)|\, x^{-u} du \leq \int_{u_1}^{u_2} M \ln N \,\frac{C}{N^n} x^{-u} du = MC\, \frac{\ln N}{N^n} \int_{u_1}^{u_2} x^{-u} du \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

Analogamente, se $0 \leq u_1 < u_2 \leq 1$,

$$\int_{u_1}^{u_2} |\zeta(u \pm iN) f^*(u \pm iN)|\, x^{-u} du \leq MC\, \frac{\ln N}{N^{n-\frac{1}{2}}} \int_{u_1}^{u_2} x^{-u} du \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

Finalmente, se $\dfrac{1}{2} - n < u_1 < u_2 \leq 0$, então

$$\int_{u_1}^{u_2} |\zeta(u \pm iN) f^*(u \pm iN)|\, x^{-u} du \leq MC \ln N \cdot N^{-u_1 + \frac{1}{2} - n} \int_{u_1}^{u_2} x^{-u} du \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

Além disso, podemos transformar cada um dos casos possíveis para $\dfrac{1}{2} - n < u_1 < u_2 < \alpha$ em somas dos três casos anteriores, e assim podemos concluir que

$$\lim_{N \to \infty} \int_{u_1 \pm iN}^{u_2 \pm iN} \zeta(s) f^*(s) x^{-s} ds = 0.$$

□

Prova da proposição 7.1. Fixemos $0 < c_0 < 1$ e $1 < \sigma < \alpha$.

Como $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $n \geq 2$, $f^*(s)$ é analítica na faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$, pelo teorema 4.13. Além disso, x^{-s} é uma função inteira e $\zeta(s)$ é analítica em todo o plano complexo excepto no ponto $s = 1$ onde tem um pólo simples. Portanto a função $\zeta(s) f^*(s) x^{-s}$ é analítica em toda a faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$, excepto no ponto $s = 1$ onde tem um polo simples.

Como $\sigma > 1$, sabemos, pelo corolário 6.5, que $\zeta(s) f^*(s) x^{-s} \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$ e, como $0 < c_0 < 1$, sabemos, pelo lema 7.3, que $\zeta(s) f^*(s) x^{-s} \in L_1(]c_0 - i\infty, c_0 + i\infty[)$.

Além disso, pelo lema 7.4, sabemos que $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \int_{c_0 \pm iN}^{\sigma \pm iN} \zeta(s) f^*(s) x^{-s} ds = 0$.

Portanto podemos utilizar o teorema 7.2 para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \zeta(s) f^*(s) x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \zeta(s) f^*(s) x^{-s} ds - \operatorname*{res}_{s=1} \left(\zeta(s) f^*(s) x^{-s}\right). \qquad (7.1.11)$$

Relembrando a fórmula (6.1.1) do teorema 6.3, sabemos que, como $1 < \sigma < \alpha$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx). \tag{7.1.12}$$

Além disso, como $s = 1$ é um polo simples de $\zeta(s)f^*(s)x^{-s}$, podemos calcular $\operatorname*{res}_{s=1}\left(\zeta(s)f^*(s)x^{-s}\right)$, relembrando que $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$ (5.0.13):

$$\operatorname*{res}_{s=1}(\zeta(s)f^*(s)x^{-s}) = \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)f^*(s)x^{-s} = f^*(1)x^{-1}\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = \frac{1}{x}f^*(1). \tag{7.1.13}$$

Portanto, partindo da fórmula (7.1.11) e aplicando-lhe as igualdades (7.1.12) e (7.1.13), podemos concluir a fórmula (7.1.1), como pretendido.

□

Finalmente, como já vimos que $\zeta(s)f^*(s) \in L_1(]c_0 - i\infty, c_0 + i\infty[)$, para todo o $0 < c_0 < 1$, e que $\zeta(s)f^*(s)$ é analítica na faixa $0 < \operatorname{Re} s < 1$, podemos partir da fórmula (7.1.1) e aplicar a proposição 4.10 para obter o teorema que se segue.

Teorema 7.5. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então a fórmula*

$$\zeta(s)f^*(s) = \int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) - \frac{1}{x}\,f^*(1)\right)x^{s-1}dx \tag{7.1.14}$$

é válida para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Mas, como $f^*(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt$, para todo o $s \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re} s > 0$ e, em particular, se $s = 1$, $f^*(1) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)dt$, a fórmula (7.1.14) é equivalente à fórmula de Müntz e assim concluímos a demonstração da fórmula de Müntz na classe $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$.

7.2 Fórmula do tipo de Müntz - caso $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$

Nesta secção vamos deduzir uma fórmula do tipo de Müntz onde aparece $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$.

Lema 7.6. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s} \in L_1(]u - i\infty, u + i\infty[)$, para todo o $u \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{2} < u < \alpha$ e $u \neq 1$.*

Prova. Seja $u \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{2} < u < \alpha$ e $u \neq 1$. Como $2u > 1$, então, para qualquer $s \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re} s = u$, relembrando (6.1.6), temos $\left|\dfrac{1}{\zeta(2s)}\right| \leq \zeta(2u)$. Portanto

$$\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right|ds \leq \zeta(2u)\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\left|\zeta(s)f^*(s)x^{-s}\right|ds < \infty, \tag{7.2.1}$$

onde o último integral é convergente porque $\zeta(s)f^*(s)x^{-s} \in L_1(]u-i\infty, u+i\infty[)$ (ver corolário 6.5, se $1 < u < \alpha$, e ver lema 7.3, se $\frac{1}{2} < u < 1$).

$\square$

Lema 7.7. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{u_1 \pm iN}^{u_2 \pm iN} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}ds = 0,$$

para todos os $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{2} < u_1 < u_2 < \alpha$.

Prova. Sejam $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{2} < u_1 < u_2 < \alpha$. Para todo o $u \geq u_1$, temos $2u \geq 2u_1 > 1$ logo, para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s \geq u_1 > \frac{1}{2}$, temos $\left|\frac{1}{\zeta(2s)}\right| \leq \zeta(2\operatorname{Re} s) \leq \zeta(2u_1)$.
Portanto, relembrando o lema 7.4, podemos concluir que

$$\left|\int_{u_1 \pm iN}^{u_2 \pm iN} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}ds\right| \leq \zeta(2u_1) \left|\int_{u_1 \pm iN}^{u_2 \pm iN} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

$\square$

Proposição 7.8. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então, para todo o $\frac{1}{2} < c_0 < 1$,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| f(nx) - \frac{6}{\pi^2 x} f^*(1). \tag{7.2.2}$$

Prova. Fixemos $\frac{1}{2} < c_0 < 1$ e $1 < \sigma < \alpha$.
Vimos na demonstração da proposição 7.1 que a função $\zeta(s)f^*(s)x^{-s}$ é analítica em toda a faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$ excepto no ponto $s = 1$ onde tem um polo simples. Então, como a analiticidade de $\frac{1}{\zeta(s)}$ no semiplano $\operatorname{Re} s > 1$ implica que $\frac{1}{\zeta(2s)}$ é analítica no semiplano $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, podemos concluir que a função $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}$ é analítica em toda a faixa $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \alpha$, excepto no ponto $s = 1$ onde tem um polo simples.
Portanto podemos utilizar os lemas 7.6 e 7.7 e o teorema 7.2 para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}ds - \operatorname*{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}\right). \tag{7.2.3}$$

Como $1 < \sigma < \alpha$, podemos partir da fórmula (5.1.7) e usar a proposição 6.1 para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} f^*(s)x^{-s}ds = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| f(nx). \tag{7.2.4}$$

Além disso, como $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}$ tem um polo simples no ponto $s=1$ e $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ (5.0.3),

$$\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right)=\lim_{s\to 1}(s-1)\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}=\frac{f^*(1)x^{-1}}{\zeta(2)}\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)=\frac{6}{\pi^2 x}f^*(1). \tag{7.2.5}$$

Assim, substituindo (7.2.4) e (7.2.5) em (7.2.3), podemos concluir (7.2.2), como pretendido.

□

Como já vimos que $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)\in L_1(]c_0-i\infty,c_0+i\infty[)$, para todo o $\frac{1}{2}<c_0<1$, e que $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)$ é analítica na faixa $\frac{1}{2}<\operatorname{Re}s<1$, podemos partir da fórmula (7.2.2) e aplicar a proposição 4.10 para obter a nossa primeira fórmula do tipo de Müntz.

Teorema 7.9. *Seja $f\in\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha>1$ e $n\geq 2$. Então a fórmula do tipo de Müntz*

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\mu(n)|f(nx)-\frac{6}{\pi^2 x}f^*(1)\right)dx, \tag{7.2.6}$$

é válida para todo o $s\in\mathbb{C}$ tal que $\frac{1}{2}<\operatorname{Re}s<1$.

7.3 Fórmula do tipo de Müntz - caso $\zeta^k(s)$

Nesta secção vamos deduzir uma fórmula do tipo de Müntz onde aparece $\zeta^k(s)$, com $k\in\mathbb{N}$, e, a seguir, vamos confirmar que essa fórmula para $k=1$ é a fórmula de Müntz e vamos determinar a fórmula específica para $k=2$. Vamos começar por generalizar os lemas 7.3 e 7.4, fazendo aparecer $\zeta^k(s)$, com $k\in\mathbb{N}$, em vez de $\zeta(s)$.

Lema 7.10. *Sejam $k\in\mathbb{N}$ e $f\in\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha>1$ e $n\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq 1+\frac{k}{2}$. Então $\zeta^k(s)f^*(s)x^{-s}\in L_1(]u-i\infty,u+i\infty[)$, para todo o $u\in\mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{2}-\frac{n-1}{k}<u<1$ e $u\notin\mathbb{Z}$.*

Observe-se que, para $k=1$, este lema é equivalente ao lema 7.3. A ideia da demonstração deste lema também vai ser semelhante à da demonstração do lema 7.3.

Prova. Seja $u\in\mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{2}-\frac{n-1}{k}<u<1$ e $u\notin\mathbb{Z}$. Como $u\neq 1$, $\zeta(s)$ é contínua na recta $\operatorname{Re}s=u$ e, como $u\notin\mathbb{Z}$, $f^*(s)$ também é contínua na recta $\operatorname{Re}s=u$, logo também $\zeta^k(s)f^*(s)$ é contínua na recta $\operatorname{Re}s=u$. Portanto $\zeta^k(u+it)f^*(u+it)$ é uma função contínua e, consequentemente, $\zeta(u+it)f^*(u+it)\in L_1[-1,1]$.

Usando as majorações para $f^*(u+it)$ e para $\zeta(u+it)$ dadas, pela fórmula (4.2.5) e pelo teorema 5.4 (com $t_0=1$), sabemos que existe $K\in\mathbb{R}$ tal que $|f^*(u+it)|\leq\frac{K}{|t|^n}$, para todo o $t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, e que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $t > 1$, $|\zeta(u \pm it)| \leq Mt^{\frac{1-u}{2}} \ln t$, se $0 < u < 1$, e $|\zeta(u \pm it)| \leq Mt^{\frac{1}{2}-u} \ln t$, se $u < 0$.

Portanto, se $0 < u < 1$, então, como $u > 0$ e $n \geq 1 + \dfrac{k}{2}$ implica $\dfrac{1-u}{2}k - n < -1$,

$$\int_1^{\infty} |\zeta(u+it) f^*(u+it)|\, dt \leq MK \int_1^{\infty} \ln t \cdot t^{\frac{1-u}{2}k-n} dt < \infty.$$

Caso contrário, se $u < 0$, então, como $u > \dfrac{1}{2} - \dfrac{n-1}{k}$ implica $\left(\dfrac{1}{2} - u\right) k - n < -1$,

$$\int_1^{\infty} \left|\zeta^k(u+it) f^*(u+it)\right| dt \leq MK \int_1^{\infty} \ln t \cdot t^{(\frac{1}{2}-u)k-n} dt < \infty.$$

Assim podemos concluir que $\zeta^k(u+it)f^*(u+it) \in L_1([1,\infty])$. Analogamente, conclui-se que $\zeta^k(u+it)f^*(u+it) \in L_1(]-\infty,-1])$. Portanto $\zeta^k(u+it)f^*(u+it) \in L_1(]-\infty,+\infty[)$ e, consequentemente, $\zeta^k(s)f^*(s)x^{-s} \in L_1(]u-i\infty, u+i\infty[)$.

$\square$

Lema 7.11. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{k}{2}$. Então, para todo o $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{k} < u_1 < u_2 < \alpha$,*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{u_1 \pm iN}^{u_2 \pm iN} \zeta^k(s) f^*(s) x^{-s} ds = 0.$$

Observe-se que, para $k = 1$, este lema é equivalente ao lema 7.4. A ideia da demonstração deste lema também vai ser semelhante à da demonstração do lema 7.4.

Prova. Sejam $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{k} < u_1 < u_2 < \alpha$.

Tal como foi feito na demonstração do lema 7.4, podemos utilizar a fórmula (4.2.5), para garantir que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que, se $u_1 \leq u \leq u_2$, então $|f^*(u \pm iN)| \leq \dfrac{C}{N^n}$, para todo o $N > 0$, e podemos utilizar o teorema 5.4, com $t_0 = 1$, para garantir que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo o $N > 1$: $|\zeta(u \pm iN)| \leq M \ln N$, se $1 \leq u \leq \alpha$; $|\zeta(u \pm iN)| \leq MN^{\frac{1-u}{2}} \ln N \leq M\sqrt{N} \ln N$, se $0 \leq u \leq 1$; e $|\zeta(u \pm iN)| \leq MN^{\frac{1}{2}-u} \ln N$, se $u \leq 0$. A partir daqui seja sempre $N > 1$.

Se $1 \leq u_1 < u_2 < \alpha$,

$$\int_{u_1}^{u_2} \left|\zeta^k(u \pm iN) f^*(u \pm iN)\right| x^{-u} du \leq MC \frac{(\ln N)^k}{N^n} \int_{u_1}^{u_2} x^{-u} du \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Analogamente, se $0 \leq u_1 < u_2 \leq 1$, como $n > \dfrac{k}{2}$,

$$\int_{u_1}^{u_2} \left|\zeta^k(u \pm iN) f^*(u \pm iN)\right| x^{-u} du \leq MC \frac{(\ln N)^k}{N^{n-\frac{k}{2}}} \int_{u_1}^{u_2} x^{-u} du \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Finalmente, se $\frac{1}{2} - \frac{n}{k} < u_1 < u_2 \leq 0$, então, como $u_1 > \frac{1}{2} - \frac{n}{k}$ implica $\left(\frac{1}{2} - u_1\right) k - n < 0$,

$$\int_{u_1}^{u_2} \left|\zeta^k(u \pm iN) f^*(u \pm iN)\right| x^{-u} du \leq MC\,(\ln N)^k \cdot N^{\left(\frac{1}{2}-u_1\right)k-n} \int_{u_1}^{u_2} x^{-u} du \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

□

Observe-se que, nos lemas 7.8. e 7.9., o limite inferior para a parte real u é sempre menor do que $\frac{1}{2}$ e que estes lemas estão enunciados de forma a, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, podermos mover o integral sobre uma recta vertical de $\zeta^k(s) f^*(s) x^{-s}$ tão para a esquerda quanto queiramos, escolhendo n suficientemente grande.

Proposição 7.12. *Seja $k \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 1 + \frac{k}{2}$. Então, para todo o $0 < c_0 < 1$,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \zeta^k(s) f^*(s) x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) f(nx) - \operatorname*{res}_{s=1} \left(\zeta^k(s) f^*(s) x^{-s}\right). \qquad (7.3.1)$$

Prova. Fixemos $0 < c_0 < 1$ e $1 < \sigma < \alpha$.

A função $\zeta^k(s) f^*(s) x^{-s}$ é analítica em toda a faixa $0 < \operatorname{Re} s < \alpha$, excepto no ponto $s = 1$ onde tem um polo de ordem k.

Como $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$ e $n \geq 1 + \frac{k}{2} > \frac{k}{2}$, estamos nas condições dos lemas 7.10 e 7.11. Então, como $n \geq 1 + \frac{k}{2}$ implica $\frac{1}{k} - \frac{n-1}{k} \leq 0$, logo $\frac{1}{k} - \frac{n}{k} < \frac{1}{k} - \frac{n-1}{k} \leq 0 < c_0 < 1$, podemos concluir que $\zeta^k(s) f^*(s) x^{-s} \in L_1(]c_0 - i\infty, c_0 + i\infty[)$ e que $\lim_{N\to\infty} \int_{c_0 \pm iN}^{\sigma \pm iN} \zeta^k(s) f^*(s) x^{-s} ds = 0$. Além disso, sabemos, pelo corolário 6.5, que, como $1 < \sigma < \alpha$, $\zeta^k(s) f^*(s) x^{-s} \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$.

Portanto podemos utilizar o teorema 7.2 para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \zeta^k(s) f^*(s) x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \zeta^k(s) f^*(s) x^{-s} ds - \operatorname*{res}_{s=1} \left(\zeta^k(s) f^*(s) x^{-s}\right).$$

Finalmente, relembrando a fórmula (6.1.3) do teorema 6.3, sabemos que, como $1 < \sigma < \alpha$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \zeta^k(s) f^*(s) x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) f(nx)$$

e assim podemos deduzir (7.3.1), como pretendido.

□

Como já vimos que $\zeta^k(s) f^*(s) \in L_1(]c_0 - i\infty, c_0 + i\infty[)$, para todo o $0 < c_0 < 1$, e que $\zeta^k(s) f^*(s)$ é analítica na faixa $0 < \operatorname{Re} s < 1$ podemos partir da fórmula (7.3.1) e aplicar a proposição 4.10 para obter mais uma fórmula do tipo de Müntz.

Teorema 7.13. *Seja $k \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 1 + \frac{k}{2}$. Então a fórmula do tipo de Müntz*

$$\zeta^k(s)f^*(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^\infty d_k(n)f(nx) - \operatorname*{res}_{s=1}\left(\zeta^k(s)f^*(s)x^{-s}\right)\right)dx \tag{7.3.2}$$

é válida para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Vamos agora ver o que acontece se substituirmos $k = 1$ e $k = 2$ nesta fórmula.

No caso $k = 1$, como $d_1(n) = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e $\operatorname*{res}_{s=1}(\zeta(s)f^*(s)x^{-s}) = \frac{1}{x}f^*(1)$, obtém-se a fórmula de Müntz, tal como previsto.

No caso $k = 2$, $d_2(n) = d(n)$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e temos de calcular

$$\operatorname*{res}_{s=1}\left(\zeta^k(s)f^*(s)x^{-s}\right) = \lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left((s-1)^2\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s}\right). \tag{7.3.3}$$

Comecemos por expandir

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big((s-1)^2\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s}\Big) &= 2(s-1)\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s} + 2(s-1)^2\zeta'(s)\zeta(s)f^*(s)x^{-s}\\ &\quad + (s-1)^2\zeta^2(s)(f^*)'(s)x^{-s} - (s-1)^2\zeta^2(s)f^*(s)\ln x x^{-s}.\end{aligned}$$

Simplificando esta expressão, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big((s-1)^2\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s}\Big) &= 2(s-1)\zeta(s)f^*(s)x^{-s}\Big(\zeta(s) + (s-1)\zeta'(s)\Big)\\ &\quad + x^{-s}\Big((s-1)\zeta(s)\Big)^2\Big((f^*)'(s) - \ln x f^*(s)\Big).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\Big((s-1)^2\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s}\Big) &= \frac{2}{x}f^*(1)\lim_{s\to1}\left((s-1)\zeta(s)\right)\lim_{s\to1}\Big(\zeta(s)+(s-1)\zeta'(s)\Big)\\ &\quad + \frac{1}{x}\left(\lim_{s\to1}\left((s-1)\zeta(s)\right)\right)^2\Big((f^*)'(1) - \ln x f^*(1)\Big),\end{aligned}$$

e assim, utilizando as fórmulas (5.0.13) e (5.0.20), podemos deduzir que

$$\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\Big((s-1)^2\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s}\Big) = \frac{2\gamma - \ln x}{x}f^*(1) + \frac{1}{x}(f^*)'(1). \tag{7.3.4}$$

Mas, relembrando a fórmula (4.2.1), sabemos que

$$(f^*)'(1) = \int_0^\infty \ln t f(t)dt. \tag{7.3.5}$$

Então podemos afirmar que

$$\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\Big((s-1)^2\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s}\Big) = \frac{2\gamma - \ln x}{x}\int_0^\infty f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^\infty \ln t f(t)dt \tag{7.3.6}$$

e, juntando esta expressão num só integral e fazendo a mudança de variável $t = xy$, ou seja, $y = \dfrac{t}{x}$, podemos concluir que

$$\lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\Big((s-1)^2\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s}\Big) = \int_0^\infty f(t)\left(2\gamma + \ln\left(\frac{t}{x}\right)\right)\frac{dt}{x} = \int_0^\infty f(xy)\,(2\gamma + \ln y)\,dy. \tag{7.3.7}$$

Portanto, substituindo $k = 2$ no teorema 7.13, podemos obter a seguinte fórmula do tipo de Müntz.

Teorema 7.14. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então a fórmula do tipo de Müntz*

$$\zeta^2(s)f^*(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^\infty d(n)f(nx) - \int_0^\infty f(xy)\,(2\gamma + \ln y)\,dy\right)dx, \tag{7.3.8}$$

é válida para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

7.4 Fórmula do tipo de Müntz - caso $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$

Nesta secção vamos deduzir uma fórmula do tipo de Müntz onde aparece $\dfrac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$.

Lema 7.15. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então, para todo o $u \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{2} < u < \alpha$ e $u \neq 1$, $\dfrac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s} \in L_1(]u - i\infty, u + i\infty[)$.*

A prova deste lema é análoga à do lema 7.6 utilizando o lema 7.10 em vez do lema 7.3.

Prova. Seja $u \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{2} < u < \alpha$ e $u \neq 1$. Como $u > \frac{1}{2}$ então $2u > 1$ logo, pela fórmula (6.1.6), sabemos que $\left|\dfrac{1}{\zeta(2s)}\right| \leq \zeta(2u)$, para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s = u$. Portanto

$$\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\left|\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right|ds \leq \zeta(2u)\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\left|\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s}\right|ds < \infty,$$

onde o último integral é convergente porque $\zeta^2(s)f^*(s)x^{-s} \in L_1(]u - i\infty, u + i\infty[)$ (ver corolário 6.5, se $1 < u < \alpha$, e ver lema 7.10, se $\frac{1}{2} < u < 1$).

□

Lema 7.16. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então, para todo o $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{2} < u_1 < u_2 < \alpha$,*

$$\lim_{N\to\infty}\int_{u_1\pm iN}^{u_2\pm iN}\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}ds = 0.$$

A prova deste lema é análoga à do lema 7.7 utilizando o lema 7.11 em vez do lema 7.4.

Prova. Sejam $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{2} < u_1 < u_2 < \alpha$.

Para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s \geq u_1 > \frac{1}{2}$, temos $\left|\frac{1}{\zeta(2s)}\right| \leq \zeta(2\operatorname{Re} s) \leq \zeta(2u_1)$.

Portanto, relembrando o lema 7.11, podemos concluir que

$$\left|\int_{u_1 \pm iN}^{u_2 \pm iN} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds\right| \leq \zeta(2u_1) \left|\int_{u_1 \pm iN}^{u_2 \pm iN} \zeta^2(s) f^*(s) x^{-s} ds\right| \xrightarrow{N \to \infty} 0.$$

□

Proposição 7.17. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então, para todo o $\frac{1}{2} < c_0 < 1$,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} f(nx) - \frac{6}{\pi^2 x} \left(\ln\left(\frac{A^{24}}{4\pi^2 x}\right) f^*(1) + (f^*)'(1) \right). \quad (7.4.1)$$

Prova. Fixemos $\frac{1}{2} < c_0 < 1$ e $1 < \sigma < \alpha$.

A função $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s}$ é analítica em toda a faixa $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \alpha$, excepto no ponto $s = 1$ onde tem um polo duplo, logo podemos utilizar os lemas 7.15 e 7.16 e o teorema 7.2 para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds - \operatorname*{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} \right).$$

Como $1 < \sigma < \alpha$, podemos partir da fórmula (5.1.8) e usar a proposição 6.1 para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} f(nx). \quad (7.4.2)$$

Como $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s}$ tem um polo duplo no ponto $s = 1$, então

$$\begin{aligned}
\operatorname*{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} \right) &= \lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} \left((s-1)^2 \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} \right) \\
&= \lim_{s \to 1} \left(\frac{1}{\zeta(2s)} \frac{d}{ds} \Big((s-1)^2 \zeta^2(s) f^*(s) x^{-s} \Big) + \big((s-1)\zeta(s)\big)^2 f^*(s) x^{-s} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\zeta(2s)} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\zeta(2)} \lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} \left((s-1)^2 \zeta^2(s) f^*(s) x^{-s} \right) + \frac{1}{x} f^*(1) \left(\lim_{s \to 1} \left((s-1)\zeta(s) \right) \right)^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\zeta(2s)} \right) \bigg|_{s=1}.
\end{aligned}$$

Usando as fórmulas (5.0.3) e (5.0.4), podemos determinar

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\zeta(2s)} \right) \bigg|_{s=1} = -\frac{2\zeta'(2)}{(\zeta(2))^2} = -2 \frac{\frac{\pi^2}{6} \left(\gamma + \ln\left(\frac{2\pi}{A^{12}}\right) \right)}{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2} = \frac{12}{\pi^2} \left(\ln\left(\frac{A^{12}}{2\pi}\right) - \gamma \right).$$

Assim, relembrando (5.0.13) e (7.3.4), podemos afirmar que

$$\operatorname*{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} f^*(s) x^{-s} \right) = \frac{12\gamma - 6\ln x}{\pi^2 x} f^*(1) + \frac{6}{\pi^2 x} (f^*)'(1) + \frac{12}{\pi^2 x} \left(\ln\left(\frac{A^{12}}{2\pi}\right) - \gamma \right) f^*(1),$$

Portanto, simplificando esta expressão, temos

$$\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right)=\frac{6}{\pi^2 x}\left(\ln\left(\frac{A^{24}}{4\pi^2 x}\right)f^*(1)+(f^*)'(1)\right) \tag{7.4.3}$$

e, consequentemente, podemos concluir (7.4.1) como pretendido.

□

Como já vimos que $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)\in L_1(]c_0-i\infty,c_0+i\infty[)$, para todo o $\frac{1}{2}<c_0<1$, e que $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)$ é analítica na faixa $\frac{1}{2}<\operatorname{Re}s<1$, podemos partir da fórmula (7.4.1) e aplicar a proposição 4.10 para obter mais uma fórmula do tipo de Müntz.

Teorema 7.18. *Seja $f\in\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha>1$ e $n\geq 2$. Então a fórmula do tipo de Müntz*

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}2^{\omega(n)}f(nx)-\frac{6}{\pi^2 x}\left(\ln\left(\frac{A^{24}}{4\pi^2 x}\right)f^*(1)+(f^*)'(1)\right)\right)dx, \tag{7.4.4}$$

é válida para todo o $s\in\mathbb{C}$ tal que $\frac{1}{2}<\operatorname{Re}s<1$.

De forma análoga à usada para demonstrar o teorema (7.18), também se pode demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 7.19. *Seja $f\in\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha>1$ e $n\geq 3$. Então as fórmulas do tipo de Müntz*

$$\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}d(n^2)f(nx)-\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right)\right)dx \tag{7.4.5}$$

e

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}d^2(n)f(nx)-\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right)\right)dx \tag{7.4.6}$$

são válidas para todo o $s\in\mathbb{C}$ tal que $\frac{1}{2}<\operatorname{Re}s<1$.

Contudo, vamos omitir os cálculos dos resíduos

$$\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\left((s-1)^3\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right) \tag{7.4.7}$$

e

$$\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right)=\frac{1}{6}\lim_{s\to 1}\frac{d^3}{ds^3}\left((s-1)^4\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}f^*(s)x^{-s}\right), \tag{7.4.8}$$

porque esses cálculos seriam demasiado trabalhosos.

A partir de outras séries de Dirichlet que representam expressões onde aparece a função zeta de Riemann exibidas na secção 5.1, poderiam ser obtidas outras fórmulas do tipo de Müntz.

7.5 Identidades com as funções gama e zeta

Como $f(x) = e^{-x} \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, para todo o $\alpha > 1$ e todo o $n \in \mathbb{N}$, podemos substituir $f(x) = e^{-x}$, e, consequentemente, $f^*(s) = \Gamma(s)$, na fórmula equivalente à fórmula de Müntz (7.1.14) para obter

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} - \frac{1}{x}\Gamma(1) \right) x^{s-1} dx. \tag{7.5.1}$$

Mas $\Gamma(1) = 1$ (4.3.5) e, como $x > 0$ implica $0 < e^{-x} < 1$,

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} = \sum_{n=1}^\infty (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}. \tag{7.5.2}$$

Portanto, para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $0 < \operatorname{Re} s < 1$, é válida a seguinte fórmula:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{s-1} dx, \tag{7.5.3}$$

que pode ser encontrada na secção 2.7. de [Tit86].

Usando este raciocínio, podemos partir das fórmulas de tipo de Müntz que demonstramos anteriormente neste capítulo e substituir $f(x) = e^{-x}$ e $f^*(s) = \Gamma(s)$ para obter mais fórmulas que relacionam a função gama de Euler e a função zeta de Riemann.

Na secção 6.3 de [Hav03] podemos ver que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Portanto, substituindo $f^*(s) = \Gamma(s)$ na fórmula (7.3.4), obtemos

$$\lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}(s-1)^2\zeta^2(s)\Gamma(s)x^{-s} = \frac{2\gamma - \ln x}{x} - \frac{\gamma}{x} = \frac{\gamma - \ln x}{x}, \tag{7.5.4}$$

logo, fazendo $k = 2$ e $f(x) = e^{-x}$ na fórmula do tipo de Müntz onde aparece $\zeta^k(s)$ (7.3.2), obtemos a seguinte fórmula válida para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $0 < \operatorname{Re} s < 1$:

$$\zeta^2(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \left(\sum_{n=1}^\infty d(n)e^{-nx} + \frac{\ln x - \gamma}{x} \right) dx. \tag{7.5.5}$$

Finalmente, a partir das fórmulas do tipo de Müntz onde aparecem $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ (7.2.6) e $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$ (7.4.4), obtemos as seguintes fórmulas válidas para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < 1$:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \left(\sum_{n=1}^\infty |\mu(n)|e^{-nx} - \frac{6}{\pi^2 x} \right) dx \tag{7.5.6}$$

e

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \left(\sum_{n=1}^\infty 2^{\omega(n)}e^{-nx} - \frac{6}{\pi^2 x}\left(\ln\left(\frac{A^{24}}{4\pi^2 x} \right) + \gamma \right) \right) dx. \tag{7.5.7}$$

Capítulo 8

Fórmula de Poisson

O nosso objectivo neste capítulo vai ser provar a fórmula de Poisson, enunciada na introdução, para $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 3$. Comecemos por definir, para cada $x \in \mathbb{R}^+$,

$$(Pf)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) - \frac{1}{x}\int_0^{\infty} f(t)dt. \tag{8.0.1}$$

Relembrando a proposição 7.1, temos, para todo o $0 < c_0 < 1$,

$$(Pf)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds. \tag{8.0.2}$$

Proposição 8.1. *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \geq 2$. Então, para todo o $-\frac{1}{2} < \sigma < 0$,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds = (Pf)(x) + \frac{1}{2}f(0). \tag{8.0.3}$$

Prova. Fixemos $-\frac{1}{2} < \sigma < 0$ e $0 < c_0 < 1$. Pelo teorema 4.13, $f^*(s)$ é analítica na faixa $-1 < \operatorname{Re} s < \alpha$ excepto no ponto $s = 0$ onde tem um polo simples se $f(0) \neq 0$ e tem uma singularidade removível se $f(0) = 0$. Portanto, como x^{-s} é uma função inteira e $\zeta(s)$ é analítica em todo o plano complexo excepto no ponto $s = 1$, $\zeta(s)f^*(s)x^{-s}$ é analítica em toda a faixa $-1 < \operatorname{Re} s < 1$, excepto no ponto $s = 0$ onde tem um polo simples se $f(0) \neq 0$ e tem uma singularidade removível se $f(0) = 0$.

Relembrando agora os lemas 7.3 e 7.4, sabemos que $\zeta(s)f^*(s)x^{-s} \in L_1(]c_0 - i\infty, c_0 + i\infty[)$, $\zeta(s)f^*(s)x^{-s} \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$ e

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\sigma\pm iN}^{c_0\pm iN} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds = 0, \tag{8.0.4}$$

logo estamos em condições de utilizar o teorema 7.2 para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \zeta(s)f^*(s)x^{-s}ds - \operatorname*{res}_{s=0}\left(\zeta(s)f^*(s)x^{-s}\right). \tag{8.0.5}$$

Portanto, relembrando (8.0.2), basta-nos agora ver que $\operatorname*{res}_{s=0} \zeta(s) f^*(s) x^{-s} = -\frac{1}{2} f(0)$.
Se $f(0) = 0$ então $\zeta(s) f^*(s) x^{-s}$ tem uma singularidade removível em $s = 0$ logo

$$\operatorname*{res}_{s=0} \zeta(s) f^*(s) x^{-s} = 0 = -\frac{1}{2} f(0). \tag{8.0.6}$$

Se $f(0) \neq 0$ então $\zeta(s) f^*(s) x^{-s}$ tem um polo simples em $s = 0$ e

$$\operatorname*{res}_{s=0} \zeta(s) f^*(s) x^{-s} = \lim_{s \to 0} s \zeta(s) f^*(s) x^{-s} = \zeta(0) \lim_{s \to 0} s f^*(s). \tag{8.0.7}$$

Mas $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ (5.0.15) e $\lim_{s \to 0} s f^*(s) = f(0)$ (obtém-se substituindo $k = 0$ em (4.2.3)), logo podemos concluir, como pretendido, que $\operatorname*{res}_{s=0} \zeta(s) f^*(s) x^{-s} = -\frac{1}{2} f(0)$.

□

Utilizando a equação funcional (5.0.10) da função zeta de Riemann, podemos afirmar que $\zeta(s) f^*(s) = \zeta(1-s) k^*(s) f^*(s)$, para $k^*(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)$.
Portanto, definindo $g^*(s) = k^*(s) f^*(s)$, podemos utilizar a proposição 8.1 para deduzir que, para cada $-\frac{1}{2} < \sigma < 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \zeta(1-s) g^*(s) x^{-s} ds = (Pf)(x) + \frac{1}{2} f(0). \tag{8.0.8}$$

Como $\operatorname{Re} s = \sigma < 0$, então $\operatorname{Re}(1-s) = 1 - \operatorname{Re} s > 1$, logo podemos escrever $\zeta(1-s)$ em forma de série de Dirichlet, por (5.0.1), e obter, para $-\frac{1}{2} < \sigma < 0$,

$$(Pf)(x) + \frac{1}{2} f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} g^*(s) x^{-s} ds. \tag{8.0.9}$$

Pretendemos usar o teorema 2.3 para trocar a ordem de integração e sumação na fórmula anterior. Com esse objectivo, comecemos por observar que

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{1-s}} g^*(s) x^{-s} \right| ds = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\sigma}} x^{-\sigma} \left| g^*(s) \right| ds = \zeta(1-\sigma) x^{-\sigma} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left| g^*(s) \right| ds,$$

logo

$$\left| \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{1-s}} g^*(s) x^{-s} \right| ds \right| = \zeta(1-\sigma) x^{-\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g^*(\sigma + it) \right| dt.$$

Portanto queremos ver que $g^*(\sigma + it) \in L_1(]-\infty, +\infty[)$. Como 2^s, π^{s-1} e $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ são funções inteiras, $\Gamma(1-s)$ é analítica em todo o plano complexo excepto nos inteiros não positivos e $f^*(s)$ é analítica em toda a faixa $-n < \operatorname{Re} s < \alpha$ excepto nos inteiros não positivos, podemos concluir que, como $-\dfrac{1}{2} < \sigma < 0$, $g^*(s)$ é contínua na recta $\operatorname{Re} s = \sigma$, ou seja, $g^*(\sigma + it)$ é uma função contínua e, consequentemente, $g^*(\sigma + it) \in L_1([-1, 1])$.

Por outro lado, utilizando as fórmulas de reflexão de Euler (4.3.7) e de duplicação de Legendre (4.3.8) para a função gama, temos

$$k^*(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) = 2^s \pi^{s-1} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)$$

e, simplificando esta expressão, podemos concluir que

$$k^*(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}. \tag{8.0.10}$$

Relembremos agora que $\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s}$, $|s| \to \infty$, pela fórmula de Stirling (4.3.11) para a função gama. Assim, para $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s = \sigma$, temos, quando $|s| \to \infty$,

$$|k^*(s)| = \left| \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \right| \sim \pi^{\sigma-\frac{1}{2}} \left| \frac{\left(\frac{1-s}{2}\right)^{-\frac{s}{2}} e^{\frac{s-1}{2}}}{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{s-1}{2}} e^{-\frac{s}{2}}} \right| = (2\pi e)^{\sigma-\frac{1}{2}} \frac{|1-s|^{-\frac{\sigma}{2}}}{|s|^{\frac{\sigma-1}{2}}} \sim (2\pi e)^{\sigma-\frac{1}{2}} |s|^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Então $k^*(\sigma + it) = \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma}\right)$, $t \to \pm\infty$. Por outro lado, relembrando a fórmula (4.2.5), sabemos que $f^*(\sigma + it) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^n}\right)$, $t \to \pm\infty$. Portanto $g^*(\sigma + it) = \mathcal{O}\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma-n}\right)$, $t \to \pm\infty$. Mas, como $\sigma > -\dfrac{1}{2}$, então $n \geq 2$ implica $\dfrac{1}{2} - \sigma - n < -1$, logo $g^*(\sigma + it) \in L_1(]-\infty, -1])$ e $g^*(\sigma + it) \in L_1([1, +\infty[)$. Assim podemos concluir que $g^*(\sigma + it) \in L_1(]-\infty, +\infty[)$ e, consequentemente,

$$\left| \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{1-s}} g^*(s) x^{-s} \right| ds \right| = \zeta(1-\sigma) x^{-\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} |g^*(\sigma + it)| \, dt < \infty.$$

Portanto podemos aplicar o teorema 2.3 à fórmula (8.0.9) e deduzir que, para $-\dfrac{1}{2} < \sigma < 0$,

$$(Pf)(x) + \frac{1}{2} f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i n} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g^*(s) \left(\frac{x}{n}\right)^{-s} ds. \tag{8.0.11}$$

Precisamos agora de determinar $g(x)$, definida como a transformada inversa de Mellin de $g^*(s)$, ou seja,

$$g(x) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g^*(s) x^{-s} ds. \tag{8.0.12}$$

Defina-se $k(x)$ como a transformada inversa de Mellin de $k^*(s)$, isto é,

$$k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} k^*(s) x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} x^{-s} ds, \tag{8.0.13}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e queremos escolher valores para c que nos garantam a convergência deste integral e calcular o integral. Vamos fazer a mudança de variável $\dfrac{1-s}{2} = z$, que implica $s = 1 - 2z$, logo $ds = -2dz$, e, se $\operatorname{Re} s = c$, então $\operatorname{Re} z = \dfrac{1-c}{2} = c_1$. Portanto

$$k(x) = \frac{2}{2\pi i} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \pi^{\frac{1}{2} - 2z} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right)} x^{2z-1} dz = \frac{2\sqrt{\pi}}{x 2\pi i} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right)} \left(\left(\frac{\pi}{x}\right)^2\right)^{-z} dz.$$

Para calcular este integral e determinar $k(x)$, vamos usar o teorema de Slater, que pode ser encontrado na secção 4.2. de [Mar83]. Usando a mesma notação do teorema de Slater em [Mar83], temos $(a) = (0)$, $(d) = \left(\dfrac{1}{2}\right)$ e $b = c = \emptyset$ e temos $A = D = 1$ e $B = C = 0$, logo $A + B = 1 = C + D$ e $A + D - B - C = 2$ e podemos utilizar o teorema de Slater se $\operatorname{Re} z > 0$ e se $2 \operatorname{Re} z < -\operatorname{Re}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, ou seja, se $\operatorname{Re} z < \dfrac{1}{4}$. Portanto, se $0 < \operatorname{Re} z = c_1 = \dfrac{1-c}{2} < \dfrac{1}{4}$, o que é equivalente a ter $\dfrac{1}{2} < c < 1$, o teorema de Slater garante-nos que

$$k(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{x} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} {}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{\pi}{x}\right)^2\right), \tag{8.0.14}$$

onde ${}_0F_1\left(\dfrac{1}{2}; -\left(\dfrac{\pi}{x}\right)^2\right)$ é um caso particular da série hipergeométrica generalizada (ver secção 4.1. de [Mar83]), e, por definição, para $a \in \mathbb{C}$ fixo, tem-se

$${}_0F_1(a; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(a)_n n!}. \tag{8.0.15}$$

Sabemos que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (4.3.10) e, além disso, podemos usar a definição do símbolo de Pochhammer para calcular

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n}{2^n \times 2 \times 4 \times \cdots \times 2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}. \tag{8.0.16}$$

Assim podemos concluir que

$$k(x) = \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} n! \left(-\left(\frac{\pi}{x}\right)^2\right)^n}{(2n)! n!} = \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \frac{2}{x} \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right). \tag{8.0.17}$$

Já sabemos que $f^*(s)$ é analítica na faixa $-1 < \operatorname{Re} s < \alpha$, excepto no ponto $s = 0$ onde pode ter uma singularidade removível ou um polo simples. Por outro lado, como 2^s, π^{s-1} e $\sin\left(\dfrac{\pi s}{2}\right)$ são funções inteiras e a função $\Gamma(1-s)$ é analítica no semiplano $\operatorname{Re}(1-s) > 0$, ou seja, $\operatorname{Re} s < 1$, podemos deduzir que $k^*(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\dfrac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)$ é analítica no semiplano $\operatorname{Re} s < 1$. Portanto $f^*(s)k^*(s)$ é analítica na faixa $-1 < \operatorname{Re} s < 1$ excepto no ponto $s = 0$. Mas $k^*(0) = 0$, o que anula o (possível) polo simples de $f^*(s)$ em $s = 0$, logo a singularidade de $g^*(s) = f^*(s)k^*(s)$ em

$s = 0$ é removível. Portanto, pelo teorema 7.2, podemos substituir, na definição de $g(x)$ (8.0.12), $-\frac{1}{2} < \sigma < 0$ por qualquer real entre -1 e 1. Em particular, temos

$$g(x) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} g^*(s)x^{-s}ds = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} f^*(s)k^*(s)x^{-s}ds. \tag{8.0.18}$$

Vamos agora ver que, se $0 < \operatorname{Re} s = \sigma < 1$, então $k^*(s) = \int_0^\infty k(y)y^{s-1}dy$. Para calcular este integral, vamos começar por usar a fórmula (8.0.17) e a seguir vamos fazer uma mudança de variável $u = \frac{2\pi}{y}$, que implica $y = \frac{2\pi}{u}$ e $\frac{dy}{y} = -\frac{du}{u}$. Então obtemos que

$$\int_0^\infty k(y)y^{s-1}dy = \int_0^\infty 2\cos\left(\frac{2\pi}{y}\right)y^{s-1}\frac{dy}{y} = 2\int_0^\infty \cos(u)\left(\frac{2\pi}{u}\right)^{s-1}\frac{du}{u} = 2^s\pi^{s-1}\int_0^\infty \cos(u)u^{-s}du. \tag{8.0.19}$$

Usando a fórmula exponencial para o cosseno, podemos afirmar que

$$\int_0^\infty \cos(u)u^{-s}du = \int_0^\infty \frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}u^{-s}du = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{iu}u^{-s}du + \int_0^\infty e^{-iu}u^{-s}du\right). \tag{8.0.20}$$

Vamos agora calcular o primeiro destes dois integrais, fazendo uma mudança de variável $u = iv$, que implica $du = idv$ e $iu = -v$:

$$\int_0^\infty e^{iu}u^{-s}du = \int_0^{-i\infty} e^{-v}(iv)^{-s}idv = -i^{1-s}\int_{-i\infty}^0 e^{-v}v^{-s}dv. \tag{8.0.21}$$

Defina-se, para cada $N > 0$, Ω_N como a intersecção do círculo $|s| = N$ com o quarto quadrante do plano complexo, ou seja, $\Omega_N = \left\{v = Ne^{-i\theta} : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$. Como $e^{-v}v^{-s}$ é uma função inteira, o teorema integral de Cauchy garante-nos que, para cada $N > 0$,

$$\int_{-iN}^0 e^{-v}v^{-s}dv + \int_0^N e^{-v}v^{-s}dv + \int_{\Omega_N} e^{-v}v^{-s}dv = 0. \tag{8.0.22}$$

Vamos agora ver que

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega_N} e^{-v}v^{-s}dv = 0. \tag{8.0.23}$$

Como os elementos em Ω_N são da forma $v = Ne^{-i\theta}$, podemos fazer uma mudança de variável e calcular este integral com variável θ:

$$\int_{\Omega_N} e^{-v}v^{-s}dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Ne^{-i\theta}}(Ne^{-i\theta})^{-s}d(Ne^{-i\theta}) = -iN^{1-s}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Ne^{-i\theta}+i\theta(s-1)}d\theta.$$

Então, como

$$\operatorname{Re}(-Ne^{-i\theta}+i\theta(s-1)) = -N\operatorname{Re}(e^{-i\theta}) + \theta\operatorname{Re}(i(s-1)) = -N\cos\theta - \theta\operatorname{Im} s,$$

podemos afirmar que

$$\left|\int_{\Omega_N} e^{-v}v^{-s}dv\right| \leq N^{1-\sigma}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\mathrm{Re}(-Ne^{-i\theta}+i\theta(s-1))}d\theta = N^{1-\sigma}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-N\cos\theta}e^{-\theta\,\mathrm{Im}\,s}d\theta.$$

Mas, para s fixo e $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, $e^{-\theta\,\mathrm{Im}\,s} \leq 1$, se $\mathrm{Im}\,s \geq 0$, e $e^{-\theta\,\mathrm{Im}\,s} \leq e^{-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Im}\,s}$, se $\mathrm{Im}\,s < 0$, logo $e^{-\theta\,\mathrm{Im}\,s} \leq \max\{1, e^{-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{Im}\,s}\} = K$ e

$$\left|\int_{\Omega_N} e^{-v}v^{-s}dv\right| \leq KN^{1-\sigma}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-N\cos\theta}d\theta.$$

Fazendo a mudança de variável $t = \cos\theta$ que implica $\theta = \arccos t$ e $d\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-N\cos\theta}d\theta = \int_0^1 e^{-Nt}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-Nt}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-Nt}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

e podemos observar que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-Nt}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-Nt}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\left.\frac{e^{-Nt}}{N}\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{e^{-\frac{N}{2}}-1}{N}$$

e

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-Nt}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq e^{-\frac{N}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\,e^{-\frac{N}{2}}\arccos t\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{N}{2}}.$$

Portanto

$$\left|\int_{\Omega_N} e^{-v}v^{-s}dv\right| \leq K\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{N}{2}}N^{-\sigma} - \frac{2}{\sqrt{3}}\,N^{-\sigma} + \frac{\pi}{3}\,e^{-\frac{N}{2}}N^{1-\sigma}\right) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

e assim, podemos concluir, como pretendido, que

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega_N} e^{-v}v^{-s}dv = 0.$$

Portanto, aplicando o limite $N \to \infty$ a (8.0.22), obtemos que

$$\int_{-i\infty}^0 e^{-v}v^{-s}dv + \int_0^{\infty} e^{-v}v^{-s}dv = 0, \tag{8.0.24}$$

ou seja,

$$\int_{-i\infty}^0 e^{-v}v^{-s}dv = -\int_0^{\infty} e^{-v}v^{-s}dv = -\Gamma(1-s). \tag{8.0.25}$$

Além disso, $i^{-s} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-s} = e^{-i\frac{\pi s}{2}}$, logo, substituindo em (8.0.21),

$$\int_0^{\infty} e^{iu}u^{-s}du = ie^{-i\frac{\pi s}{2}}\Gamma(1-s). \tag{8.0.26}$$

Analogamente,

$$\int_0^{\infty} e^{-iu}u^{-s}du = \int_0^{-i\infty} e^{-v}(-iv)^{-s}(-idv) = (-i)^{1-s}\int_0^{-i\infty} e^{-v}v^{-s}dv = -ie^{i\frac{\pi s}{2}}\Gamma(1-s). \tag{8.0.27}$$

Assim, substituindo (8.0.26) (8.0.27) em (8.0.20), obtemos

$$\int_0^{\infty}\cos(u)u^{-s}du = \frac{ie^{-i\frac{\pi s}{2}} - ie^{i\frac{\pi s}{2}}}{2}\Gamma(1-s) = \frac{e^{i\frac{\pi s}{2}} - e^{-i\frac{\pi s}{2}}}{2i}\Gamma(1-s) = \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s) \tag{8.0.28}$$

e, consequentemente, substituindo em (8.0.19), podemos concluir que

$$\int_0^{\infty} k(y)y^{s-1}dy = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s) = k^*(s). \tag{8.0.29}$$

Portanto

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} f^*(s)\left(\int_0^{\infty} k(y)y^{s-1}dy\right)x^{-s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\lim_{N\to\infty} f^*(s)x^{-s}\int_{\frac{1}{N}}^{\infty} k(y)y^{s-1}dy\, ds. \tag{8.0.30}$$

Fixemos $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ e $N > 1$. Comecemos por observar que, como $-\frac{3}{2} < -1$,

$$\left|\int_1^{\infty} k(y)y^{s-1}dy\right| \le \int_1^{\infty}\left|k(y)y^{s-1}\right|dy = \int_1^{\infty}\frac{2}{y}\left|\cos\left(\frac{2\pi}{y}\right)\right|y^{\frac{1}{2}-1}dy \le 2\int_1^{\infty} y^{-\frac{3}{2}}dy = c_1.$$

Por outro lado, fazendo uma mudança de variável $u = \frac{1}{y}$ temos

$$\int_{\frac{1}{N}}^{1} k(y)y^{s-1}dy = \int_{\frac{1}{N}}^{1}\frac{2}{y}\cos\left(\frac{2\pi}{y}\right)y^{s-1}dy = 2\int_1^{N}\cos(2\pi u)\,u^{-s}du$$

e, além disso, integrando por partes, temos

$$\int_1^{N}\cos(2\pi u)\,u^{-s}du = \left.\frac{\sin(2\pi u)}{2\pi}u^{-s}\right|_1^{N} + \frac{s}{2\pi}\int_1^{N}\sin(2\pi u)u^{-s-1}du,$$

logo, como $\sin(2\pi) = 0$, podemos afirmar que

$$\left|\int_{\frac{1}{N}}^{1} k(y)y^{s-1}dy\right| \le \frac{N^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} + \frac{|s|}{2\pi}\int_1^{N} u^{-\frac{1}{2}-1}du \le \frac{1}{2\pi} + \frac{|s|}{2\pi}\int_1^{\infty} u^{-\frac{3}{2}}du = c_2 + c_3.|s|.$$

Portanto

$$\left|\int_{\frac{1}{N}}^{\infty} k(y)y^{s-1}dy\right| \le \left|\int_{\frac{1}{N}}^{1} k(y)y^{s-1}dy\right| + \left|\int_1^{\infty} k(y)y^{s-1}dy\right| = c_1 + c_2 + c_3.|s|$$

logo, como $|s| \ge \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, podemos concluir que, definindo $C = 2c_1 + 2c_2 + c_3$,

$$\left|\int_{\frac{1}{N}}^{\infty} k(y)y^{s-1}dy\right| \le 2.|s|(c_1 + c_2) + c_3.|s| = C.|s|. \tag{8.0.31}$$

Portanto, para todo o $N > 1$,

$$\left| f^*(s)x^{-s} \int_{\frac{1}{N}}^{\infty} k(y)y^{s-1}dy \right| \leq Cx^{-\frac{1}{2}}.|s|.|f^*(s)|. \tag{8.0.32}$$

Como $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $n \geq 3$, então, pela proposição 4.14, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f^*(s)| \leq \dfrac{M}{|t|^n}$, para todo o $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Assim, como $n \geq 3$ implica $n-1 \geq 2$, podemos concluir que $sf^*(s) \in L_1\left(\left]\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right[\right)$ de forma semelhante à que se usa na demonstração da proposição 4.14 para concluir que $f^*(s) \in L_1(]\sigma - i\infty, \sigma + i\infty[)$. Portanto

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} Cx^{-\frac{1}{2}}|s|.|f^*(s)|ds \leq \frac{C}{\sqrt{x}} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |sf^*(s)|ds < \infty, \tag{8.0.33}$$

logo estamos em condições de aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue à fórmula (8.0.30) para passar o limite para fora do integral e concluir que

$$g(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int_{\frac{1}{N}}^{\infty} f^*(s)k(y)y^{s-1}x^{-s}dy\, ds. \tag{8.0.34}$$

Fazendo agora a mudança de variável $y = \dfrac{x}{t}$, que implica $dy = -x\,\dfrac{dt}{t^2}$, podemos escrever

$$g(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int_{0}^{xN} f^*(s)k\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{x}{t}\right)^{s-1} x^{1-s}\,\frac{dt}{t^2}\, ds, \tag{8.0.35}$$

ou seja,

$$g(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int_{0}^{xN} f^*(s)k\left(\frac{x}{t}\right) t^{-s-1}dt\, ds. \tag{8.0.36}$$

Mas, relembrando (8.0.17),

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int_{0}^{xN} \left| f^*(s)k\left(\frac{x}{t}\right) t^{-s-1} \right| dt\, ds \leq \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int_{0}^{xN} |f^*(s)|\, \frac{2t}{x} \left|\cos\left(\frac{2\pi t}{x}\right)\right| t^{-\frac{1}{2}-1}dt\, ds, \tag{8.0.37}$$

logo, como $-\dfrac{1}{2} > -1$ e $f^*(s) \in L_1\left(\left]\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right[\right)$,

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int_{0}^{xN} \left| f^*(s)k\left(\frac{x}{t}\right) t^{-s-1} \right| dt\, ds \leq \frac{2}{x} \int_{0}^{xN} t^{-\frac{1}{2}}dt \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} |f^*(s)|ds < \infty. \tag{8.0.38}$$

Portanto podemos aplicar o teorema de Fubini para trocar a ordem de integração em (8.0.36) e concluir que

$$g(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{xN} k\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} f^*(s)t^{-s}ds\, \frac{dt}{t}.$$

Finalmente, como $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$ e $n \geq 2$, podemos aplicar a proposição 4.14 para concluir que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g^*(s)x^{-s}ds = \lim_{N\to\infty}\int_0^{xN} k\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} k\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,\frac{dt}{t}, \tag{8.0.39}$$

onde a última igualdade é válida porque

$$\int_0^{\infty}\left|k\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\right|\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty}\frac{2t}{x}\left|\cos\left(\frac{2\pi t}{x}\right)\right||f(t)|\,\frac{dt}{t} \leq \frac{2}{x}\int_0^{\infty}|f(t)|dt < \infty. \tag{8.0.40}$$

Portanto podemos concluir que

$$g(x) = \int_0^{\infty} k\left(\frac{x}{t}\right) f(t)\,\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty}\frac{2t}{x}\cos\left(\frac{2\pi t}{x}\right) f(t)\,\frac{dt}{t} = \frac{2}{x}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{2\pi}{x}t\right) f(t)dt. \tag{8.0.41}$$

Relembrando a definição da transformada de Fourier de cosseno (4.1.5) podemos afirmar que

$$g(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}(\mathcal{F}_c f)\left(\frac{2\pi}{x}\right). \tag{8.0.42}$$

Portanto, relembrando (8.0.11), podemos afirmar que

$$(Pf)(x) + \frac{1}{2}f(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,g\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sqrt{2\pi}n}{x}\,(\mathcal{F}_c f)\left(\frac{2\pi n}{x}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{F}_c f)\left(n\frac{2\pi}{x}\right). \tag{8.0.43}$$

e, relembrando a definição de $(Pf)(x)$ (8.0.1), podemos concluir que

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{F}_c f)\left(n\frac{2\pi}{x}\right) = (Pf)(x) + \frac{1}{2}f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) - \frac{1}{x}\int_0^{\infty} f(t)dt + \frac{1}{2}f(0).$$

Portanto, relembrando agora a fórmula (4.1.7), temos

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{F}_c f)\left(n\frac{2\pi}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) - \frac{1}{x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathcal{F}_c f)(0) + \frac{1}{2}f(0),$$

e, multiplicando todas as parcelas desta igualdade por $\sqrt{x}$ e reagrupando essas parcelas, podemos concluir que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{F}_c f)\left(n\frac{2\pi}{x}\right) + \frac{1}{2}(\mathcal{F}_c f)(0)\right) = \sqrt{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) + \frac{1}{2}f(0)\right). \tag{8.0.44}$$

Finalmente fazendo $\alpha = x$ e $\beta = \dfrac{2\pi}{x}$, obtemos o teorema que se segue, alcançando o objectivo deste capítulo.

Teorema 8.2 (Fórmula de Poisson)**.** *Seja $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $n \geq 3$. Então a fórmula de Poisson*

$$\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2}(\mathcal{F}_c f)(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{F}_c f)\,(n\beta)\right) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\right), \tag{8.0.45}$$

é válida para todo o $\alpha, \beta > 0$ com $\alpha\beta = 2\pi$.

Observação. O único momento nesta demonstração da fórmula de Poisson onde necessitamos da condição $n \geq 3$ (onde $f \in \mathcal{M}_{\alpha,n}$) foi para provar as condições necessárias para utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Mostrando que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\int_{\frac{1}{N}}^{\infty} k(y)y^{s-1}dy\right| \leq C$, para todo o $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$ e para qualquer $N \in \mathbb{N}$, a condição $n \geq 2$ seria suficiente e a nossa demonstração também seria válida para todas as funções $f \in \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_{\alpha,2}$. Para isso seria suficiente mostrar que se $f \in \mathcal{M}_\alpha$ então $f \in \mathcal{K}$ para a classe de funções $\mathcal{K}$ definida na secção 2.1. do livro [YL94] mas vamos omitir essa demonstração e manter a condição $n \geq 3$.

Capítulo 9

Conclusão

No capítulo 4 introduzimos uma nova família de classes de funções $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, com $\alpha > 1$ e $n \in \mathbb{N}_0$, que generaliza a classe $\mathcal{M}_\alpha$. Todos os resultados que vimos nos capítulos 6, 7 e 8 foram demonstrados para funções em classes $\mathcal{M}_{\alpha,n}$. Ainda no capítulo 4 fizemos um estudo aprofundado da transformada de Mellin das funções nessas classes $\mathcal{M}_{\alpha,n}$.

No capítulo 5 exibimos representações em séries de Dirichlet para várias funções relacionadas coma função zeta de Riemann e no capítulo 6 enunciamos uma proposição que nos permite, a partir de cada uma dessas séries de Dirichlet, obter uma transformada aritmética que pode ser representada em forma de série, onde aparece uma função aritmética, e em forma de integral, onde aparece a função zeta. Também no capítulo 6, conseguimos determinar representações em série e em integral para as iterações da transformada (aritmética) de Möbius e da sua inversa em classes de funções $\mathcal{M}_{\alpha,n}$.

No capítulo 7, conseguimos fazer uma nova demonstração da fórmula de Müntz, nas classes $\mathcal{M}_{\alpha,n}$, e conseguimos fazer essa demonstração de forma a que, utilizando um raciocínio análogo, mas partindo de outras transformadas aritméticas, também conseguimos deduzir várias novas fórmulas do tipo de Müntz nas mesmas classes de funções.

Finalmente, no capítulo 8, obtivemos uma nova demonstração da fórmula de Poisson, também esta válida para funções em classes $\mathcal{M}_{\alpha,n}$.

Bibliografia

[Apo76] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[Cha03] R. Chapman. Evaluating $\zeta(2)$. 2003.

[Fol92] G.B. Folland. *Fourier Analysis and Its Applications*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.

[Har40] G.H. Hardy. *Ramanujan: Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1940.

[Hav03] J. Havil. *Gamma, Exploring Euler's constant*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[HL16] G.H. Hardy and J.E. Littlewood. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes. *Acta Mathematica*, 41(1):119$-$196, 1916.

[HR17] G.H. Hardy and S. Ramanujan. The normal number of prime factors of a number n. *Quarterly Journal of Mathematics*, 48:76$-$92, 1917.

[HW08] G.H. Hardy and E.M. Wright. *Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, Oxford, Sixth edition, 2008.

[Ivi85] A. Ivic. *The Riemann Zeta-function*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.

[Leb65] N.N. Lebedev. *Special Functions and Their Applications*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[Mar83] O.I. Marichev. *Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions*. Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Limited, Chichester, 1983.

[Ram16] S. Ramanujan. Some formulae in the analytic theory of numbers. *Messenger of Mathematics*, 45:81−84, 1916.

[Rud87] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, Third edition, 1987.

[Son03] J. Sondow. Zeros of the alternating zeta function on the line $\mathrm{Re}(s) = 1$. *American Mathematical Monthly*, 110(5):435−437, 2003.

[Tit39] E.C. Titchmarsh. *The Theory of Functions*. Oxford University Press, Oxford, Second edition, 1939.

[Tit48] E.C. Titchmarsh. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Chelsea Publishing Co., New York, Second edition, 1948.

[Tit86] E.C. Titchmarsh. *The Theory of the Riemann Zeta-function*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, Second edition, 1986.

[Yak14] S.B. Yakubovich. Integral and series transformations via Ramanujan's identities and Salem's type equivalences to the Riemann hypothesis. *Integral Transforms and Special Functions*, 25(4):255−271, 2014.

[Yak15] S.B. Yakubovich. New summation and transformation formulas of the Poisson, Müntz, Möbius and Voronoi type. *Integral Transforms and Special Functions*, 26(10):768−795, 2015.

[YL94] S.B. Yakubovich and Y.F. Luchko. *The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions*. Number 287 in Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.