



Processos Estocásticos

Rui Alves
Catarina Delgado

Setembro de 1997

APRESENTAÇÃO

Este texto concretiza uma ideia que já tem alguns anos, mas que vinha sendo adiada devido a afazeres de diversa natureza.

Dois factos ocorridos no ano lectivo de 1996/97 foram determinantes na concretização deste projecto: (i) a adopção, nas disciplinas de Investigação Operacional de ambas as licenciaturas, de um livro (*Investigação Operacional*, de L. Valadares Tavares et al., McGraw-Hill, 1996) que, embora cobrindo a matéria de Programação Linear e de Filas de Espera, é omissa no que toca à Programação Linear Inteira e às Cadeias de Markov; (ii) a contratação da licenciada Catarina Delgado como assistente estagiária das referidas disciplinas.

O facto de os alunos disporem de elementos de estudos (no livro adoptado) sobre alguns pontos do programa tornou mais premente a conclusão destes textos com o objectivo de uma integral cobertura do programa. A disponibilidade da licenciada Catarina Delgado foi na realidade crucial (sem o seu trabalho e o seu entusiasmo creio que os textos não teriam ficado prontos), e o seu contributo justifica plenamente a co-autoria que lhe é devida, pois a ela se devem a primeira versão dos textos, todos os exemplos profusamente ilustrados, e a inclusão de uma maior variedade de problemas típicos de Programação Inteira.

Resta-nos desejar que os alunos, destinatários últimos destes trabalhos, deles possam vir a tirar o desejado proveito. Todas as críticas e sugestões são bemvindas, salvaguardando que todos os erros e imprecisões que os textos possam ter são da inteira responsabilidade dos autores.

Faculdade de Economia do Porto, Setembro de 1997

Prof. Doutor Rui Alves

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1.	Generalidades	1
1.2.	Classificação dos Processos Estocásticos	1
2.	CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO DISCRETO	3
2.1.	Definição	3
2.2.	Representação	3
2.3.	Probabilidades de Transição	4
2.4.	Classificação dos Estados	6
2.5.	Probabilidades Estacionárias	7
2.6.	Tempos de Transição	9
2.7.	Cadeias de Markov com Estados Absorventes	9
3.	CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO CONTÍNUO	12
3.1.	Definição	12
3.2.	Tempo de Permanência no Estado	12
3.3.	Representação	13
3.4.	Probabilidades Estacionárias	14
4.	PROCESSOS DE NASCIMENTO-MORTE	15
4.1.	Generalidades	15
4.2.	Equações de Balanço	16
5.	BIBLIOGRAFIA	16

1. INTRODUÇÃO

1.1. GENERALIDADES

Qualquer sistema real opera sempre em ambientes onde a incerteza impera, principalmente quando o sistema envolve, pela sua natureza, acções humanas imprevisíveis ou avarias de máquinas. Os modelos determinísticos certamente contribuem para a compreensão, a um nível básico, do comportamento dinâmico de um sistema. No entanto, por não poderem lidar com a incerteza, acabam por ser insuficientes nos processos de tomada de decisão. Assim, recorre-se a Processos Estocásticos como uma forma de tratar quantitativamente estes fenómenos, aproveitando certas características de regularidade que eles apresentam para serem descritos por modelos probabilísticos.

Pode definir-se um Processo Estocástico (em inglês, “Stochastic Process” ou “Random Process”) como um conjunto de variáveis aleatórias indexadas a uma variável (geralmente a variável tempo), sendo representado por $\{X(t), t \in T\}$. Estabelecendo o paralelismo com o caso determinístico, onde uma função $f(t)$ toma valores bem definidos ao longo do tempo, um processo estocástico toma valores aleatórios ao longo do tempo. Aos valores que $X(t)$ pode assumir chamam-se *estados* e ao seu conjunto X *espaço de estados*.

Como exemplos de processos estocásticos, poderemos considerar:

- 1) $X(t)$ representa o estado de uma máquina (ligada/desligada) no momento t ;
- 2) $X(t)$ representa o número de clientes numa loja no instante t ;
- 3) $X(t)$ representa o número de máquinas avariadas no fim do dia t ;
- 4) $X(t)$ representa a cotação de uma acção no fim do dia t ;
- 5) $X(t)$ representa o nível de stock de um determinado artigo no fim do dia t ;
- 6) $X(t)$ representa a condição de funcionamento dum componente no instante t .

Como se pode constatar pelos exemplos apresentados, há casos em que o tempo é considerado de forma discreta (... no fim do dia t) e outros em que é tomado de modo contínuo (... no momento t). A variável tempo é, por definição, uma variável contínua, a qual pode ser “discretizada” se os fenómenos forem observados a intervalos regulares. Outra constatação que se pode fazer é que os “estados” tanto são valores que a variável $X(t)$ pode assumir (número de clientes, número de máquinas, etc) como são estados (máquina avariada, a funcionar, etc).

1.2. CLASSIFICAÇÃO DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Para classificar os processos estocásticos analisam-se (i) o espaço de estados, (ii) a natureza do conjunto T e (iii) as características estatísticas das variáveis aleatórias que definem o processo.

(i) Espaço de estados

Se X for um conjunto de estados finito ou contável ($X = \{0, 1, 2, \dots\}$, ou seja, o conjunto de inteiros não-negativos), $X(t)$ é um “processo de estados discretos” ou, como

é usualmente referido, uma “cadeia”. Para qualquer outro caso, o processo é designado por “processo de estados contínuos”.

Dos exemplos atrás referidos os três primeiros são cadeias, enquanto que os restantes podem ser processos de estados contínuos.

(ii) A variável temporal

Se o conjunto T , que especifica os valores da variável t , for finito ou contável, $X(t)$ é um “processo em tempo discreto” e a notação usada é $\{X(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Neste caso, T é normalmente o conjunto dos inteiros não-negativos. Em caso contrário $X(t)$ é designado por “processo em tempo contínuo”, sendo usada a notação $\{X(t), t \geq 0\}$.

Dos exemplos apresentados, os exemplos 3, 4 e 5 são processos em tempo discreto uma vez que representam quantidades observadas dia a dia, enquanto que os restantes são processos estocásticos em tempo contínuo por representarem fenómenos observados em qualquer momento do tempo.

(iii) Características estatísticas das variáveis aleatórias

Um processo estocástico diz-se *estacionário* se o seu comportamento estocástico for independente do tempo, ou seja, se a função distribuição da(s) v.a. que o define(m) não variar no tempo.

Um processo estocástico diz-se *Markoviano ou de Markov* se for estacionário e gozar da propriedade de Markov ou da “perda de memória”, isto é, se o seu comportamento futuro apenas for condicionado pelo estado presente, independentemente do seu historial ou dos estados visitados no passado. De facto, para um processo de Markov é completamente irrelevante qualquer informação sobre estados passados ou sobre o tempo de permanência no estado presente. Num processo estocástico as transições entre estados são causadas pela ocorrência de acontecimentos ou eventos, pelo que a variável aleatória directamente restringida pela propriedade de ausência de memória é o tempo entre acontecimentos sucessivos (em inglês “interevent time”). Dado que, como iremos ver mais à frente, a única distribuição contínua que apresenta esta propriedade é a distribuição exponencial, num processo de Markov todos os tempos entre acontecimentos sucessivos têm de ser exponencialmente distribuídos.

Um processo estocástico *de Semi-Markov* é uma generalização de um processo de Markov, já que, para aquele, a informação sobre o tempo de permanência no estado actual deixa de ser irrelevante; continua, contudo, a ser irrelevante para o comportamento futuro qualquer informação sobre os estados visitados no passado. A consequência é que os tempos entre acontecimentos sucessivos deixam de estar “restringidos” à distribuição exponencial, podendo seguir qualquer distribuição de probabilidade.

Não é nossa intenção abordar aqui todos os tipos de processos estocásticos existentes, mas sim analisar, com algum detalhe, uma pequena parcela, bastante relevante para o estudo de alguns problemas interessantes, desde problemas de jogos a sistemas de filas de espera: as Cadeias de Markov (tanto em tempo discreto como em tempo contínuo) e os Processos de Nascimento-Morte. Apesar da propriedade de Markov nem

sempre ter aderência à realidade, os processos de Markov são, de longe, os processos estocásticos mais utilizados graças à sua facilidade de tratamento.

Este texto encontra-se organizado da seguinte forma: no ponto 2 são estudadas Cadeias de Markov em Tempo Discreto e no ponto 3 as Cadeias de Markov em Tempo Contínuo. No ponto 4 é analisado um caso especial de Processos Estocásticos, os Processos de Nascimento-Morte. Finalmente, no ponto 5 é listada a bibliografia consultada para a elaboração do texto e considerada mais relevante nesta matéria.

2. CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO DISCRETO

2.1. DEFINIÇÃO

Uma Cadeia de Markov em Tempo Discreto é um processo estocástico em que a variável t representa intervalos de tempo, $\{X(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$, e que goza da propriedade de Markov, ou seja, a probabilidade de $X(t)$ estar no estado j no próximo período depende apenas do estado presente e não dos estados visitados em períodos passados:

$$P_{ij} = P\{X(t+1) = j \mid X(t) = i, X(t-1) = k_{t-1}, \dots, X(1) = k_1, X(0) = k_0\} = P\{X(t+1) = j \mid X(t) = i\}, \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots \quad \forall i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1} \in X$$

No nosso estudo apenas vamos considerar Cadeias de Markov com as seguintes características:

- 1) O espaço de estados X é finito ou contável (estados discretos).
- 2) As probabilidades de transição entre estados são constantes no tempo (cadeia de Markov estacionária), ou seja,

$$P_{ij} = P\{X(t+1) = j \mid X(t) = i\} = P\{X(1) = j \mid X(0) = i\}, \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots \quad \forall i, j \in X$$

2.2. REPRESENTAÇÃO

Uma Cadeia de Markov em tempo discreto fica completamente definida se conhecermos os estados $X = \{0, 1, 2, \dots, s\}$ e as probabilidades de transição entre os estados em um período. Existem duas formas de representação: graficamente, através do “diagrama de transições”, ou através da matriz quadrada \mathbf{P} que contem as probabilidades de transição em um período.

Num diagrama de transições cada estado é representado por um vértice, e cada arco orientado ligando dois vértices representa uma transição possível entre dois estados em um período, a qual tem uma certa probabilidade de ocorrência (o coeficiente associado ao arco).

Na matriz \mathbf{P} , cada linha i representa o estado actual e cada coluna j representa o estado futuro (a ordem dos estados actuais deve ser igual à dos estados futuros, respec-

tivamente, nas linhas e nas colunas de \mathbf{P}). Deste modo, o elemento p_{ij} da matriz representa a probabilidade de ocorrência da transição do estado i para o estado j em um período. A matriz \mathbf{P} é uma matriz *estocástica*, pois sendo os seus elementos probabilidades, $p_{ij} \geq 0$, e contendo cada linha i uma distribuição de probabilidade, $\sum_j p_{ij} = 1$.

Para melhor ilustrar o que foi dito, considere-se o exemplo seguinte.

No pequeno país Verdscamp'sfloridos, a bebida tradicional, um estranho licor de flores silvestres, é produzida apenas por duas famílias concorrentes, a família Florescente e a família Petalado. Cada família introduziu, ao longo das gerações, diferentes alterações na fórmula original, de forma a conferir ao “seu” licor um sabor especial. Embora as fórmulas sejam guardadas no “segredo dos deuses”, descobriu-se que uma porção de pétalas de malmequeres pode realmente “fazer a diferença”, garantindo à família Florescente a primazia nas preferências dos verdscamp'sflorideses. De facto, verificou-se que, para cada pessoa que compre o licor Florescente há 90% de probabilidade de o próximo licor que comprar seja licor Florescente; já para cada pessoa que compre o licor Petalado há só 80% de probabilidade de a essência de miosótis o tornar tão inesquecível que o próximo licor comprado seja ainda o licor Petalado.

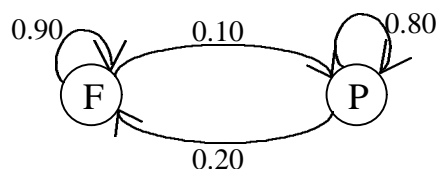
Com base nestes dados, pretende-se construir uma cadeia de Markov que represente a situação descrita.

Se $X(t)$ representar o tipo de licor comprado por uma pessoa na sua t -ésima compra, então a cadeia de Markov limita-se a assumir um dos dois valores seguintes: F (último licor comprado foi o Florescente) ou P (último licor comprado foi o Petalado). O espaço de estados será, deste modo, $X = \{F, P\}$.

A cadeia de Markov pode então ser descrita pela seguinte matriz (estocástica) de transições:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (F) & (P) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (F) \\ (P) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Uma outra forma de representar a cadeia é através do diagrama de transições:



2.3. PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO

O conhecimento das probabilidades de transição entre os estados é de grande importância nas cadeias de Markov. Conforme foi referido anteriormente, as probabilidades de transição em um período fazem parte da “definição” da cadeia de Markov. É igualmente importante conhecer as probabilidades de transição em n períodos ou passos.

Define-se a probabilidade de transição em n passos como

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X(t+n) = j \mid X(t) = i\} = P\{X(n) = j \mid X(0) = i\}, \forall t=0, 1, 2, \dots \forall i, j \in X$$

Uma das formas de obter o valor de $p_{ij}^{(n)}$ é calcular as probabilidades de cada um dos caminhos que, partindo do estado i , conduzem ao estado j em n passos, e somá-las. Apesar da aparente simplicidade deste método, à medida que n aumenta também aumenta a possibilidade de esquecimento de caminhos alternativos e o cálculo da probabilidade torna-se mais complexo. Alternativamente pode-se calcular o elemento (i,j) da matriz \mathbf{P}^n , método bastante mais eficiente.

Para demonstrar a equivalência dos dois métodos, retomar-se-á o exemplo definido no ponto anterior. Suponhamos que se pretende conhecer a probabilidade de a terceira compra futura de um habitante de Verdscamp'sfloridos ser licor Petalado, sabendo que, no momento presente, comprou licor Florescente, ou seja, $p_{FP}^{(3)}$.

Uma hipótese seria calcular as probabilidades de todas as sequências de compras, de forma que a transição FP ocorra em três aquisições ou passos. Assim, verifica-se que só há quatro sequências diferentes de transições em três passos tais que, partindo do estado F, se acaba no estado P:

- (1) F → P → P → P
- (2) F → F → P → P
- (3) F → F → F → P
- (4) F → P → F → P

Relembrando que, se A e B forem independentes, $P\{A \text{ e } B\} = P\{A\} \times P\{B\}$, podemos então calcular a probabilidade de cada sequência:

- (1) $P\{F \rightarrow P \text{ e } P \rightarrow P \text{ e } P \rightarrow P\} = 0.1 \times 0.8 \times 0.8 = 0.064$
- (2) $P\{F \rightarrow F \text{ e } F \rightarrow P \text{ e } P \rightarrow P\} = 0.9 \times 0.1 \times 0.8 = 0.072$
- (3) $P\{F \rightarrow F \text{ e } F \rightarrow F \text{ e } F \rightarrow P\} = 0.9 \times 0.9 \times 0.1 = 0.081$
- (4) $P\{F \rightarrow P \text{ e } P \rightarrow F \text{ e } F \rightarrow P\} = 0.1 \times 0.2 \times 0.1 = 0.002$

Do mesmo modo, $P\{A \text{ ou } B\} = P\{A\} + P\{B\}$, pelo que

$$p_{FP}^{(3)} = 0.064 + 0.072 + 0.081 + 0.002 = 0.219$$

Houve aqui a aplicação directa das *equações de Chapman-Kolmogorov*:

$$p_{ij}^{(q+m)} = \sum_k p_{ik}^{(q)} p_{kj}^{(m)}$$

De facto, assumindo $q = 1$ e $m = 2$ aquisições,

$$p_{FP}^{(3)} = P\{F \rightarrow P\} \times P^{(2)}\{P \rightarrow P\} + P\{F \rightarrow F\} \times P^{(2)}\{F \rightarrow P\},$$

sendo

$$P^{(2)}\{P \rightarrow P\} = P\{P \rightarrow P\} \times P\{P \rightarrow P\} + P\{P \rightarrow F\} \times P\{F \rightarrow P\} \text{ e}$$

$$P^{(2)}\{F \rightarrow P\} = P\{F \rightarrow P\} \times P\{P \rightarrow P\} + P\{F \rightarrow F\} \times P\{F \rightarrow P\}.$$

Este resultado pode ser obtido por outra via, pois o elemento da linha que corresponde ao estado F (estado actual) e da coluna que corresponde ao estado P (estado futuro) da matriz \mathbf{P}^3 é exactamente 0.219, como se poderá ver seguidamente.

$$\mathbf{P}^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} (F) & (P) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (F) \\ (P) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Na verdade, a forma usada para calcular o valor anterior (somar as probabilidades de caminhos alternativos) corresponde exactamente à operação de multiplicação de matrizes que nos conduz a \mathbf{P}^3 , tendo correspondência directa com as equações de Chapman-Kolmogorov.

É importante referir que se \mathbf{P} for uma matriz estocástica, então qualquer potência de \mathbf{P} também o é, pois $\mathbf{P}^n = [p_{ij}^{(n)}]$, sendo $p_{ij}^{(n)} \geq 0$ e $\sum_j p_{ij}^{(n)} = 1$.

2.4. CLASSIFICAÇÃO DOS ESTADOS

Um caminho do estado i para o estado j é uma sequência de transições com probabilidades de ocorrência positivas que ligam os dois estados (do exemplo anterior: $F \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow P$). Não existe qualquer limite ao número de transições nem há a obrigação de a sequência ser a mais curta entre os dois estados.

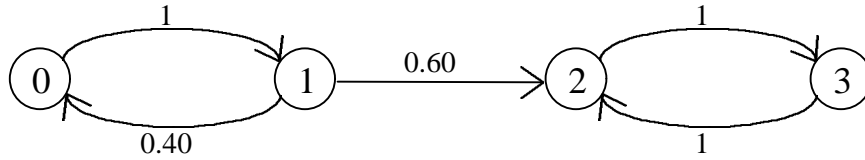
Diz-se que o estado j é atingível a partir do estado i se e só se houver pelo menos um caminho de i para j . Dois estados i e j são *comunicantes* se e só se j for atingível a partir de i e i for atingível a partir de j .

Diz-se que uma Cadeia de Markov é *irredutível* se e só se qualquer estado j for atingível a partir de qualquer estado i , ou seja, se todos os estados forem comunicantes.

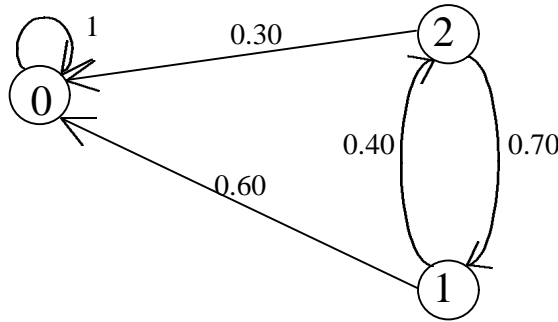
Um estado j diz-se *transiente* se existir um estado k que seja atingível a partir de j , mas não sendo j atingível a partir de k . Por outras palavras, se j for transiente não há a garantia de, saindo de j , voltar lá.

Um estado j diz-se *recorrente* se não for transiente, ou seja, se for sempre possível regressar a j .

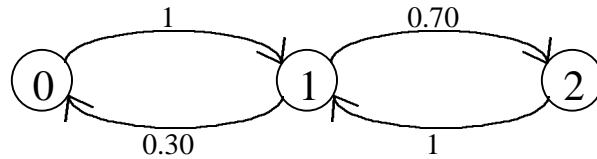
No exemplo seguinte os estados 0 e 1 são transientes enquanto os estados 2 e 3 são recorrentes.



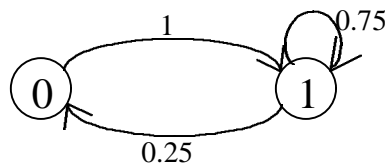
Um estado j diz-se *absorvente* se após o processo lá entrar não mais voltar a sair, ou seja, se $p_{jj} = 1$. No exemplo seguinte o estado 0 é absorvente enquanto os estados 1 e 2 são transientes.



Um estado recorrente j diz-se *periódico* com período $k > 1$ se k for o menor inteiro tal que todos os caminhos de j para j tiverem um comprimento múltiplo de k (ou seja, k é o máximo divisor comum dos comprimentos de todos os caminhos do estado j para o estado j). No exemplo seguinte os estados 0 e 1 têm período $k = 2$.



Um estado recorrente diz-se *aperiódico* se $k = 1$. Uma cadeia de Markov diz-se *ergódica* se todos os estados forem recorrentes, aperiódicos e comunicantes. A cadeia seguinte é ergódica.



2.5. PROBABILIDADES ESTACIONÁRIAS

Numa Cadeia de Markov irredutível e ergódica, decorrido um número muito elevado de períodos de tempo ($n \rightarrow \infty$), a probabilidade de o processo estar no estado j é constante e independente do estado inicial i , como se pode observar através da matriz \mathbf{P}^{16} , que contem as probabilidades de transição em dezasseis períodos:

$$\mathbf{P}^{16} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{(F)} & \text{(P)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{(F)} \\ \text{(P)} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.6677 & 0.3323 \\ 0.6644 & 0.3356 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A esta probabilidade chama-se *probabilidade estacionária* do estado j e representa-se por π_j . Por outras palavras,

$$p_{ij}^{(n+1)} \approx p_{ij}^{(n)} \approx \pi_j \quad \text{quando } n \rightarrow \infty .$$

Tendo esta característica presente, e como (pelas equações de Chapman-Kolmogorov) $p_{ij}^{(n+1)}$ pode ser escrito como o produto [linha i de \mathbf{P}^n] \times [coluna j de \mathbf{P}], então, para n muito elevado, podemos escrever

$$\pi_j = \pi \text{ [coluna } j \text{ de } \mathbf{P}], \text{ sendo } \pi \text{ o vector linha } [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_s].$$

Isto corresponde a um sistema de equações ($\pi = \pi \mathbf{P}$) em que o número de equações é igual ao número de variáveis, sendo ambos iguais ao número de estados. No entanto este sistema é indeterminado, pois uma das equações é redundante; a indeterminação é resolvida acrescentando a equação que garante que a solução seja uma distribuição de probabilidades. Assim, para conhecer as probabilidades estacionárias π_j resolve-se o sistema

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_j \pi_j = 1 \quad (2).$$

Subtraindo $\pi_j p_{jj}$ a ambos os membros das equações (1) do sistema, elas podem ser re-escritas da seguinte forma

$$\pi_j (1 - p_{jj}) = \sum_{i \neq j} \pi_i p_{ij} ,$$

tendo a seguinte interpretação:

$$\begin{aligned} & \text{[Probabilidade de uma transição para fora do estado } j \text{]} = \\ & = \text{[Probabilidade de uma transição para o estado } j \text{]}. \end{aligned}$$

Relembrando o exemplo que nos acompanha desde o início, quais as probabilidades estacionárias?

$$\begin{aligned} \pi_F &= 0.90 \pi_F + 0.20 \pi_P & \pi_F &= 0.6666 \\ \pi_P &= 0.10 \pi_F + 0.80 \pi_P & \Rightarrow & \\ \pi_F + \pi_P &= 1 & \pi_P &= 0.3333 \end{aligned}$$

O que estes valores significam é que, após bastante tempo, cerca de dois terços das pessoas, em média, comprarão o licor Florescente, enquanto que só um terço delas irá comprar o licor Petalado. Deste modo as probabilidades estacionárias podem ser usadas como indicadores das quotas de mercado de cada marca e ser muito úteis em processos de tomada de decisão. De facto, a família Petalado sabe que se conseguir aumentar o grau de fidelização dos clientes que compram o seu licor aumentará a sua quota de mercado, servindo o modelo para quantificar estes aumentos.

2.6. TEMPOS DE TRANSIÇÃO

O tempo (medido em número de períodos) que decorre até que o processo, partindo do estado i , atinja o estado j pela primeira vez, é chamado *tempo de transição* (em inglês, “first passage time”). Se o estado final coincidir com o estado inicial ($j = i$), este tempo é chamado de *tempo de recorrência* para o estado i . O tempo de transição do estado i para o estado j é representado por t_{ij} .

Trata-se de uma variável aleatória, uma vez que assumirá diferentes valores com diferentes probabilidades, consoante o caminho percorrido entre os dois estados. Conhecer a distribuição de probabilidade das variáveis t_{ij} pode não ser fácil. É, no entanto, relativamente simples conhecer o seu valor esperado ($E[t_{ij}] = \mu_{ij}$), chamado tempo esperado de transição (ou de recorrência, consoante o caso).

Para calcular o tempo esperado da transição de i para j não é preciso encontrar todos os caminhos entre i e j e as respectivas probabilidades de ocorrência. Além de fastidioso, seria praticamente impossível obter o valor desejado desta forma. Qualquer que seja a cadeia de Markov, a transição do estado i para o estado j é feita em um período com probabilidade p_{ij} , e em todos os outros casos ($k \neq j$) o número esperado de períodos será igual a $(1 + \mu_{kj})$ com probabilidade p_{ik} . Então podemos escrever a seguinte expressão

$$\mu_{ij} = p_{ij} (1) + \sum_{k \neq j} p_{ik} (1 + \mu_{kj}),$$

a qual, depois de simplificada, dá origem ao seguinte sistema de equações lineares:

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj}.$$

Voltando novamente ao exemplo anterior:

$$\begin{aligned} \mu_{FF} &= 1 + 0.10 \mu_{PF} & \mu_{FF} &= 1.5 \\ \mu_{FP} &= 1 + 0.90 \mu_{FP} & \Rightarrow \mu_{FP} &= 10 \\ \mu_{PF} &= 1 + 0.80 \mu_{PF} & \Rightarrow \mu_{PF} &= 5 \\ \mu_{PP} &= 1 + 0.20 \mu_{FP} & \mu_{PP} &= 3 \end{aligned}$$

No caso dos tempos médios de recorrência verifica-se que $\mu_{ii} = 1/\pi_i$. No exemplo considerado, μ_{FP} significa que uma pessoa que compre o licor Florescente demora, em média, 10 períodos até passar a comprar licor Petalado.

2.7. CADEIAS DE MARKOV COM ESTADOS ABSORVENTES

Consideremos agora o caso das cadeia de Markov com estado(s) absorvente(s). Uma vez que um estado absorvente j tem $p_{jj} = 1$, uma vez visitado a Cadeia de Markov não mais sai deste estado. Assim, numa cadeia de Markov com estados absorventes qualquer estado que comunique com um estado absorvente é um estado transiente.

Se pensarmos no que acontece à medida que o número de períodos vai aumentando ($n \rightarrow \infty$), concluímos que a probabilidade de o processo estar num estado transiente (obviamente) tende para zero. Ou seja, no longo prazo o processo estará num estado absorvente. Neste caso interessa conhecer a probabilidade de, estando num dado estado transiente, o processo vir a entrar (mais tarde ou mais cedo) num estado absorvente. Estas probabilidades são chamadas *probabilidades estacionárias de absorção*, ou seja, as probabilidades de o processo passar de um qualquer estado transiente para um qualquer estado absorvente num qualquer número de períodos.

Para ilustrar este tipo de cadeia de Markov, consideremos o seguinte exemplo:

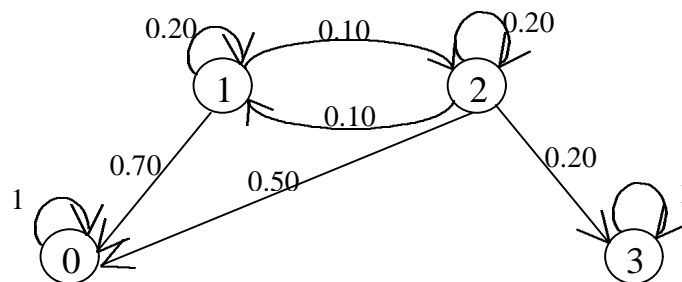
Na loja de artigos informáticos do Sr. Pague-Depressa, os clientes são divididos em categorias, consoante o nível dos pagamentos já efectuados: pagou (categ. 0), atrasado não mais de 30 dias (categ. 1), atrasado não mais de 60 dias (categ. 2) ou caloteiro (categ. 3). As contas são verificadas mensalmente e o estado de cada cliente é determinado. Segundo as regras do Sr. Pague-Depressa, os clientes deverão pagar uma conta dentro de 30 dias mas, pagando prestações, podem-se atrasar no máximo 60 dias; a partir dessa data o Sr. Pague-Depressa entrega os dados do cliente a uma empresa especializada em cobrança de dívidas.

Após a análise dos dados históricos da loja, construiu-se a seguinte matriz de transições:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0) & (3) & (1) & (2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0) \\ (3) \\ (1) \\ (2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Com base nestes dados, pretende-se conhecer a probabilidade de um cliente acabar, eventualmente, na categoria 3 (caloteiro), dado estar actualmente quer na categoria 1 quer na categoria 2.

O diagrama de transições é o seguinte:



Consideremos as seguintes partições na matriz das probabilidades de transição:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix},$$

em que: \mathbf{I} é a matriz (identidade) que contem as probabilidades de transição entre estados absorventes; $\mathbf{0}$ é a matriz nula, indicando que não existem transições dos estados

absorventes para os estados transientes; \mathbf{R} é a matriz que contém as probabilidades de transição dos estados transientes para os estados absorventes; \mathbf{Q} é a matriz que contém as probabilidades de transição entre estados transientes.

As probabilidades de passar de um qualquer estado transiente para um qualquer estado absorvente

- em 1 período são dadas por \mathbf{R} ;
- em 2 períodos são dadas por \mathbf{QR} ;
- em 3 períodos são dadas por $\mathbf{Q}^2\mathbf{R}$;
-
- em $n+1$ períodos são dadas por $\mathbf{Q}^n\mathbf{R}$.

Para obter as probabilidades de passar de um qualquer estado transiente para um qualquer estado absorvente num *qualquer* número de períodos temos que considerar a soma

$$\mathbf{R} + \mathbf{QR} + \mathbf{Q}^2\mathbf{R} + \mathbf{Q}^3\mathbf{R} + \dots = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} ,$$

Ou seja, os elementos da matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R}$ são as probabilidades estacionárias de absorção. Alternativamente, chegava-se à mesma conclusão se se considerasse a matriz \mathbf{P}^n quando $n \rightarrow \infty$.

A matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ é chamada a matriz fundamental da cadeia de Markov, tendo os seus elementos um significado especial: o elemento (i,j) representa o número esperado de vezes que o estado transiente j é visitado antes de o processo entrar num estado absorvente qualquer, partindo do estado transiente i . No exemplo anterior

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.968 & 0.032 \\ 0.747 & 0.254 \end{bmatrix}$$

Assim, a probabilidade de um cliente ser, eventualmente, caloteiro é igual a 0.032 se o seu débito não tiver mais de 30 dias e é igual a 0.254 se o seu débito tiver entre 30 e 60 dias. Por outro lado,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.27 & 0.16 \\ 0.16 & 1.27 \end{bmatrix}$$

o que significa que uma conta com um débito até 30 dias demora $1.27 + 0.16 = 1.43$ meses até estar totalmente liquidada. Note-se que é possível uma conta “rejuvenescer”, ou seja, ter um débito entre 30 e 60 dias num mês e no mês seguinte ter um débito até 30 dias (por pagamento do débito antigo e novas compras).

3. CADEIAS DE MARKOV EM TEMPO CONTÍNUO

3.1. DEFINIÇÃO

Uma cadeia de Markov em tempo contínuo é, como a designação indica, uma cadeia de Markov em que a variável tempo é contínua, representando instantes ou momentos do tempo (e não períodos no tempo como no ponto anterior). Assim, uma cadeia de Markov em tempo contínuo é um processo estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ com a propriedade de Markov, ou seja, a probabilidade de o processo estar no estado j num momento futuro depende apenas do estado presente e não dos estados visitados em qualquer momento passado:

$$P_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u) = k \text{ para } 0 \leq u \leq s\} = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\}, \quad \forall i, j, k \in X$$

Apenas vamos considerar cadeias de Markov com as seguintes características:

- 1) O espaço de estados X é finito ou contável.
- 2) As probabilidades de transição de um estado para outro não dependem do tempo de permanência nesse estado (cadeia estacionária), ou seja,

$$P_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}, \quad \forall s \geq 0 \quad \forall i, j \in X$$

3.2. TEMPO DE PERMANÊNCIA NO ESTADO

O tempo que o processo permanece em cada estado passa a ser uma consideração importante, pois o processo é em tempo contínuo e não em tempo discreto. Este tempo é, naturalmente, incerto ou aleatório. Seja τ_i a variável aleatória “tempo de permanência no estado i ”, isto é, o tempo necessário para que o sistema saia do estado i , efectuando uma transição para outro estado.

Então, facilmente se conclui que o processo permanece no estado i entre os instantes 0 e t se e só se o tempo de permanência no estado i for superior a t , ou seja,

$$P\{X(t) = i \mid X(0) = i\} = P\{\tau_i > t \mid \tau_i > 0\} = P\{\tau_i > t\}, \quad \forall t \geq 0 \quad \forall i \in X.$$

Por outro lado, o sistema permanece no estado i entre os instantes s e $(t + s)$ se e só se o tempo necessário para que o sistema saia do estado i for superior a $(t + s)$, dado que o tempo de permanência no estado i era superior a s , ou seja,

$$P\{X(t + s) = i \mid X(s) = i\} = P\{\tau_i > t + s \mid \tau_i > s\}, \quad \forall t, s \geq 0 \quad \forall i \in X.$$

Como $P\{X(t+s) = i \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = i \mid X(0) = i\}$ então $P\{\tau_i > t+s \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$. Por outras palavras, a distribuição da variável aleatória “tempo de permanência num dado estado” é independente do tempo que o processo tenha já passado nesse estado (propriedade da ausência de memória). Como a única distribuição contínua que goza desta propriedade é a distribuição exponencial, concluímos que τ_i tem distribuição exponencial.

Suponhamos que a variável aleatória $\tau_i \geq 0$ tem distribuição exponencial com parâmetro (taxa) μ_i . Então a função distribuição é dada por $F\tau_i(t) = P\{\tau_i \leq t\} = 1 - e^{-t\mu_i} \forall t \geq 0$. O valor esperado é $E[\tau_i] = 1/\mu_i$ e a variância é $V[\tau_i] = 1/\mu_i^2$, verificando-se sempre que a média é igual ao desvio padrão, sendo ambos iguais ao inverso do parâmetro.

A distribuição exponencial goza de duas propriedades muito importantes no estudo das cadeias de Markov em tempo contínuo, as quais serão apresentadas sem qualquer demonstração. Uma, que foi já referida é a propriedade da “ausência de memória”, segundo a qual $P\{\tau_i > t + s \mid \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}$, $\forall s, t \geq 0$. A outra diz-nos que se a variável aleatória τ_{\min} for o mínimo de diferentes variáveis aleatórias independentes ($\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$), cada qual com distribuição exponencial de parâmetro μ_i ($i=1, \dots, N$), então τ_{\min} tem também distribuição exponencial, sendo o parâmetro dado por $\mu = \sum_i \mu_i$.

3.3. REPRESENTAÇÃO

Uma Cadeia de Markov em tempo contínuo fica completamente definida se conhecermos os estados $X = \{0, 1, 2, \dots, s\}$, o parâmetro μ_i da distribuição (exponencial) de cada variável τ_i (tempo de permanência em cada estado i) e as probabilidades de o processo transitar para o estado j , dado que saiu do estado i (p_{ij}). Em alternativa a conhecer os parâmetros μ_i e as probabilidades p_{ij} , basta conhecer as taxas de transição entre os estados, μ_{ij} .

A interpretação intuitiva de μ_i e de μ_{ij} é de que se trata de taxas de transição. Concretamente, μ_i é a taxa de transição para fora do estado i , significando que μ_i é o número esperado de vezes que o processo sai do estado i por unidade de tempo passado no estado i . Assim, μ_i é o inverso do tempo médio de permanência no estado i , ou seja, $E[\tau_i] = 1/\mu_i$. De modo semelhante, μ_{ij} é a taxa de transição do estado i para o estado j , significando isto que μ_{ij} é o número esperado de vezes que o processo efectua uma transição de i para j por unidade de tempo passado no estado i .

Existem duas formas de representação: graficamente, através do “diagrama de transições”, ou através de uma matriz quadrada \mathbf{U} que contem as taxas de transição.

Num diagrama de transições cada estado é representado por um vértice, e cada arco orientado ligando dois vértices representa uma transição possível entre dois estados, sendo o coeficiente associado ao arco a respectiva taxa.

Na matriz \mathbf{U} , cada linha i representa o estado actual e cada coluna j representa o estado futuro (a ordem dos estados actuais deve ser igual à dos estados futuros, respectivamente, nas linhas e nas colunas de \mathbf{U}). Deste modo, o elemento μ_{ij} da matriz representa a taxa de transição do estado i para o estado j .

As taxas de transição μ_{ij} são dadas por $\mu_{ij} = \mu_i p_{ij}$ ($i \neq j$), e portanto verifica-se que

$$\sum_{j \neq i} \mu_{ij} = \mu_i \sum_{j \neq i} p_{ij} = \mu_i .$$

3.4. PROBABILIDADES ESTACIONÁRIAS

No estudo das cadeias de Markov em tempo contínuo interessa conhecer as probabilidades estacionárias ($t \rightarrow \infty$) de o processo estar nos diferentes estados (π_j).

Para se obterem as probabilidades estacionárias, escrevem-se as chamadas “equações de balanço” que traduzem a ideia de que, em equilíbrio, a taxa média de saídas de um qualquer estado deve ser igual à taxa média de entradas nesse mesmo estado. Essas equações constituem o seguinte sistema:

$$\mu_j \pi_j = \sum_{i \neq j} \pi_i \mu_{ij} . \quad (1)$$

À semelhança do que acontecia nas cadeias em tempo discreto, também o sistema (1) é indeterminado. Encontram-se, então, as probabilidades estacionárias acrescentando a equação seguinte:

$$\sum_j \pi_j = 1 . \quad (2)$$

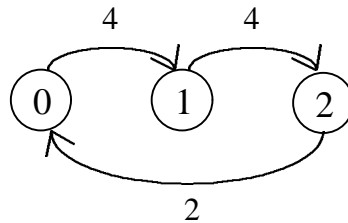
Consideremos o exemplo seguinte:

Uma máquina, integrada numa linha de produção, solda duas peças idênticas. Sabe-se que o tempo entre duas chegadas consecutivas de peças à máquina tem uma distribuição exponencial com média igual a um quarto de hora. Da mesma forma, o tempo de soldagem segue uma distribuição exponencial com média igual a meia hora. Pretende-se construir uma cadeia de Markov que represente a situação descrita, determinando as probabilidades estacionárias.

Se $X(t)$ representar o número de peças na máquina no momento t , então $X(t)$ limita-se a assumir um dos três valores seguintes: 0, 1 ou 2 peças. O espaço de estados será, deste modo, $X = \{0, 1, 2\}$. Existem apenas dois tipos de acontecimentos: chegada de uma peça à máquina ($\mu_{ch}=4$ peças/h) e saída das duas peças soldadas ($\mu_p=2$ peças soldadas/h).

As transições são descritas seguidamente no respectivo diagrama. As transições $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 2$ correspondem à chegada de uma peça à máquina, enquanto a transição $2 \rightarrow 0$ corresponde à saída das peças soldadas. Não se considera a possibilidade de haver

a transição $0 \rightarrow 2$ pelo facto de se considerar que só ocorre um evento de cada vez (é possível efectuar a separação temporal de acontecimentos quase simultâneos).



A matriz que contém as taxas de transição é a seguinte:

$$\mathbf{U} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0) & (1) & (2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0) \\ (1) \\ (2) \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Para calcular as probabilidades estacionárias, escrevemos as equações de balanço e a equação de normalização:

Equações de balanço:	estado 0:	$4 \pi_0 = 2 \pi_2$
	estado 1:	$4 \pi_1 = 4 \pi_0$
	estado 2:	$2 \pi_2 = 4 \pi_1$
Equação de normalização:		$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

A solução do sistema é $\pi_0 = 0.25$, $\pi_1 = 0.25$ e $\pi_2 = 0.50$. Significa isto que a máquina passa 25% do tempo com 0 ou 1 peça, e 50% com 2 peças.

4. PROCESSOS DE NASCIMENTO-MORTE

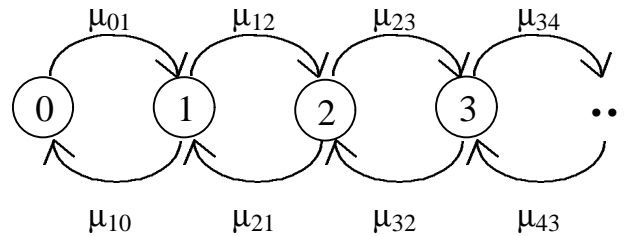
4.1. GENERALIDADES

Os Processos de Nascimento-Morte são processos estocásticos muito utilizados na descrição de Sistemas de Filas de Espera, dada a sua particular estrutura: as transições de um qualquer estado só são possíveis para estados “vizinhos” (i.e., de um estado i para os estados $i+1$ ou $i-1$). De facto, adoptando um espaço de estados $X = \{0, 1, \dots\}$ e representando cada estado um certo “nível de população” (número de clientes numa loja, número de mensagens num atendedor de chamadas, número de produtos a processar, etc) tais transições podem ser facilmente interpretadas: a transição do estado i para o estado $i+1$ será um “nascimento” (por exemplo, chegada de um cliente), por significar um aumento do “nível da população”, enquanto que a transição do estado i para o estado $i-1$ será uma “morte” (partida de um cliente), por significar um decréscimo do “nível da população”.

4.2. EQUAÇÕES DE BALANÇO

As equações de balanço são facilmente escritas a partir do diagrama de transições, pois o facto de as transições de um qualquer estado só serem possíveis para, no máximo, dois estados torna as equações bastante compactas.

Consideremos o seguinte diagrama de transições:



As equações de balanço serão, então:

$$\begin{array}{ll}
 \text{estado 0:} & \pi_0 \mu_{01} = \pi_1 \mu_{10} \\
 \text{estado 1:} & \pi_1 (\mu_{10} + \mu_{12}) = \pi_0 \mu_{01} + \pi_2 \mu_{21} \\
 \text{estado 2:} & \pi_2 (\mu_{21} + \mu_{23}) = \pi_1 \mu_{12} + \pi_3 \mu_{32} \\
 \dots & \dots \\
 \text{estado n:} & \pi_n (\mu_{n,n-1} + \mu_{n,n+1}) = \pi_{n-1} \mu_{n-1,n} + \pi_{n+1} \mu_{n+1,n}
 \end{array}$$

Da primeira equação concluímos que $\pi_1 = (\mu_{01}/\mu_{10}) \pi_0$. Da segunda equação, e substituindo π_1 pela sua expressão em termos de π_0 , tiramos que $\pi_2 = (\mu_{12} \mu_{01} / \mu_{21} \mu_{10}) \pi_0$. Prosseguindo da mesma forma é possível exprimir as restantes probabilidades em termos de π_0 , e através da equação de normalização encontrar o valor de π_0 . As restantes probabilidades estacionárias são então muito simples de calcular.

5. BIBLIOGRAFIA

Çinlar, Erhan (1975), *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall, Inc.

Hillier, G. and J. Lieberman (1995), *Introduction to Operations Research*, Sixth Edition, McGraw-Hill.

Kleinrock, Leonard (1975), *Queueing Systems (Vol. I: Theory)*, John Wiley & Sons.

Ross, Sheldon M. (1983), *Stochastic Processes*, John Wiley & Sons.

Winston, Wayne L. (1994), *Operations Research – Applications and Algorithms*, Third Edition, Duxbury Press.