Integrais Múltiplos

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Slide 1

Versão 2

Maria Antónia Carravilla – FEUP

Integrais Duplos

Generalização do conceito de integral a subconjuntos limitados de $\Re^2$.

Seja:

$A \subset \Re^2$	limitado
$f : A \to \Re$	função limitada, $f(x, y) \geq 0$
$S = [a, b] \times [c, d] \subset \Re^2$	tal que $A \subset S$.

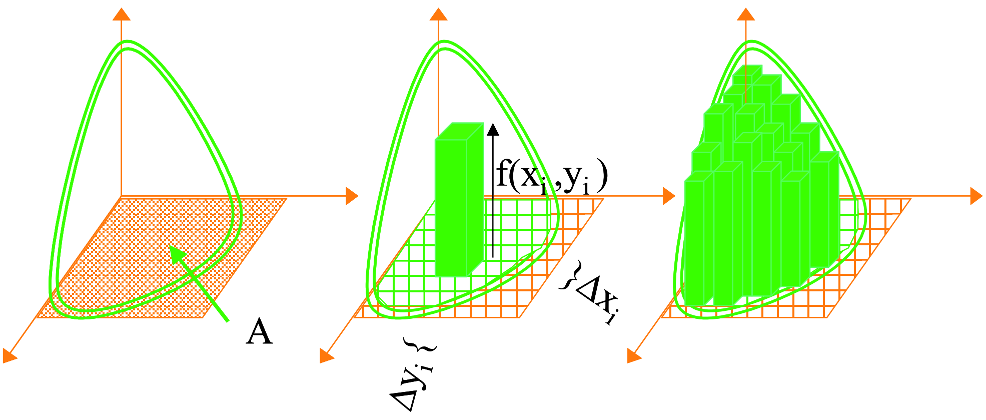
Slide 2

Nova função:

$$g : S \to \Re \begin{cases} \text{se } (x, y) \in A, & g(x, y) = f(x, y) \\ \text{se } (x, y) \in S \setminus A, & g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Integrais Duplos

Slide 3



Integrais Duplos

Seja P uma partição de S:

$$P = \{(x_0, y_0), (x_0, y_1), \ldots (x_0, y_m), \ldots (x_n, y_0), \ldots (x_n, y_m)\}$$

tal que

Slide 4

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$$

Integrais Duplos

Seja

$$M_{ji} = sup\,\{g(x,y) : x_{j-1} \leq x \leq x_j, y_{i-1} \leq y \leq y_i\}$$
$$m_{ji} = inf\,\{g(x,y) : x_{j-1} \leq x \leq x_j, y_{i-1} \leq y \leq y_i\}$$

Assim, as somas superior e inferior relativamente à partição P são:

Slide 5

Soma superior $\quad U(f,P) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} M_{ji}(x_j - x_{j-1})(y_i - y_{i-1})$

Soma inferior $\quad L(f,P) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} m_{ji}(x_j - x_{j-1})(y_i - y_{i-1})$

Dado que:

$$m_{ji} \leq M_{ji} \quad \forall_{j=1,\ldots n} \quad \forall_{i=1,\ldots m}$$

Para qualquer partição P de S:

$$L(f,P) \leq U(f,P)$$

Integrais Duplos

Seja agora P_1 um refinamento de P (qualquer subrectângulo definido por P_1 está contido num subrectângulo definido por P)

Então:

$$L(f,P) \leq L(f,P_1) \leq U(f,P_1) \leq U(f,P)$$

Como f é limitada:

Slide 6

$\mathcal{L} = \{L(f,P) : P \text{ partição de } S\}$ é um conjunto limitado superiormente supremo representa-se como: $sup\mathcal{L} = \underline{I}(f) = \int_{\underline{A}} f$ (Integral inferior de f)

$\mathcal{U} = \{U(f,P) : P \text{ partição de } S\}$ é um conjunto limitado inferiormente ínfimo representa-se como: $inf\mathcal{U} = \overline{I}(f) = \int_A^- f$ (Integral superior de f)

$$\underline{I}(f) = \int_{\underline{A}} f \leq \int_A^- f = \overline{I}(f)$$

Integrais Duplos - Definição

$$\begin{array}{ll} A \subset \Re^2 & \text{limitado} \\ f : A \rightarrow \Re & \text{função limitada,} \end{array}$$

f diz-se função integrável (segundo Riemann) se:

Slide 7

$$\int_{\underline{A}} f = \int_A^- f$$

O integral de f em A representa-se por:

$$\int_{\underline{A}} f = \int_A^- f = \int_A f = \int\int_A f(x,y)dxdy$$

Integrais Duplos - Teorema de Fubini

Suponha que:

- $S = [a, b] \times [c, d]$, $f : S \to \Re$ é integrável
- $\forall_{x \in [a,b]}$ a função $f^x : [c, d] \to \Re$ definida por $f^x(y) = f(x, y)$ é integrável (existe $\int_c^d f^x(y)dy$)

Slide 8

Então:

$$\int\int_S f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

A este processo chama-se integração iterada.

Integrais Duplos - Exemplo

Calcule os seguinte integral:

$$\int\int_S f(x, y)dxdy \text{ onde :}$$

$$f(x, y) = \sin(x + y)$$

Slide 9

$$S = [0, \pi] \times [\tfrac{\pi}{2}, \pi]$$

Integrais Duplos - Conjuntos de medida nula

Definição: Seja $A \subset \Re^2$. A diz-se um conjunto de medida nula se, para todo o $\epsilon \geq 0$ é possível definir uma família numerável de rectângulos $(S_i)_{i\geq 1}$ tais que:

Slide 10

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \text{área } S_i < \epsilon$$

[a]

[a] Não é possível determinar um escalar positivo que represente a área de A (A não tem área em $\Re^2$

Integrais Duplos - Conjuntos de medida nula

Slide 11

- Se A é um conjunto finito de pontos isolados em $\Re^2$ então é um conjunto de medida nula
- Em $\Re^2$ qualquer recta tem medida nula
- Seja $\phi : [a,b] \to \Re$ contínua. Então $Gra\ \ \phi = \big\{(x,y) \in \Re^2 : x \in [a,b], y = \phi(x)\big\}$ tem medida nula.

Teorema:

Seja $S = [a,b] \times [c,d]$ e $f : S \to \Re$ limitada.

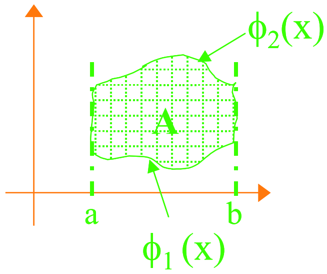
f é integrável se e só se o conjunto de pontos de descontinuidade de f em S for um conjunto de medida nula.

Integrais Duplos - Teorema (i)

Slide 12

Seja:

$$A = \{(x,y) \in \Re^2 : x \in [a,b], \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$



Seja $f : A \to \Re$ limitada e contínua no interior de A.

Então f é integrável em A e:

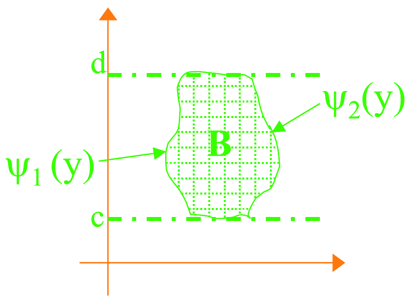
$$\int\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Integrais Duplos - Teorema (ii)

Slide 13

Seja:

$$B = \{(x,y) \in \Re^2 : y \in [c,d], \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$



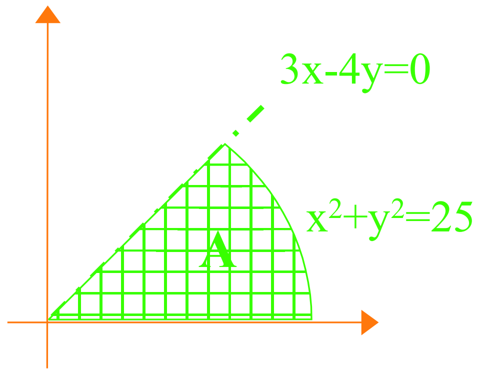
Seja $f : B \to \Re$ limitada e contínua no interior de B.

Então f é integrável em A e:

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Integrais Duplos - Exemplo

Slide 14



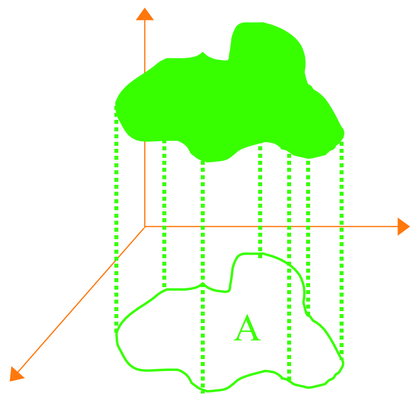
$$\int\int_A f(x,y)dxdy$$

Integrais Duplos

Slide 15

Representação geométrica de $\int\int_A f(x,y)dxdy$

- $f(x,y) \geq 0 \ \forall_{(x,y)\in A}$
- $f(x,y) = 1$



Integrais Duplos - Mudanças de variável

Teorema:

Sejam D^* e D subconjuntos de $\Re^2$.

Seja

$$\begin{aligned} F : D^* &\rightarrow D \\ (u,v) &\rightsquigarrow (x(u,v), y(u,v)) \end{aligned}$$

Slide 16

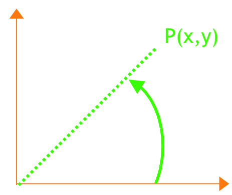
Uma função de classe C_1 e bijectiva. Seja $f : D \rightarrow \Re$ uma função integrável. Então:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Observação: $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ é o determinante da matriz Jacobiana de F

Integrais Duplos - Mudanças de variável

Coordenadas Polares:
Considere-se a função:

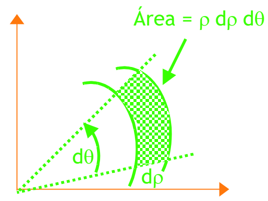


$$\begin{aligned} F : \Re_0^+ \times [0, 2\pi[&\rightarrow \Re^2 \\ (\rho, \theta) &\rightsquigarrow (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{aligned}$$

Slide 17

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = det\mathcal{J}F(\rho,\theta) = det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix} = \rho$$

$$\int\int_D f(x,y)dx\ dy = \int\int_{D^*} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\ d\rho\ d\theta$$



Integrais Duplos - Mudanças de variável - Exemplo

Slide 18

Calcular:

$$\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$\text{onde: } A=\left\{(x,y)\in\Re^2:(x-a)^2+y^2\leq a^2\right\}$$

em coordenadas polares.

1. Determinar a variação máxima de θ
2. Fixar $\theta = const.$ Como varia ρ com θ?

Troque agora a ordem de integração...

Integrais Duplos - Mudanças de variável - Exemplo

Slide 19

Calcular:

$$\int\int_T f(x,y)dxdy$$

$$\text{onde: } T=\left\{(x,y)\in\Re^2: x\in[0,1], -x\leq y\leq x\right\}$$
$$\bigcup$$
$$\left\{(x,y)\in\Re^2: x\in[1,2], x-2\leq y\leq 2-x\right\}$$

usando a mudança de variável: $u = y + x$ e $v = y - x$.

Integrais Duplos - Cálculo de áreas de superfícies

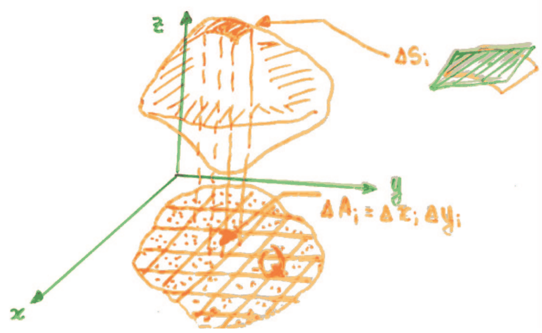
Slide 20

Problema:
Dada uma região $Q \subset \Re^2$ e uma função $f : Q \to \Re$, pretende-se calcular a área da superfície $z = f(x, y)$. Isto é, pretende-se calcular a área de :

$$Graf = \{(x, y, z) : (x, y) \in Q, z = f(x, y)\}$$

Definindo $F : \Re^3 \to \Re$ por $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, tem-se:

$$S = Graf = S_F(0) = \{(x, y, z) : (x, y) \in Q, F(x, y, z) = 0\}$$

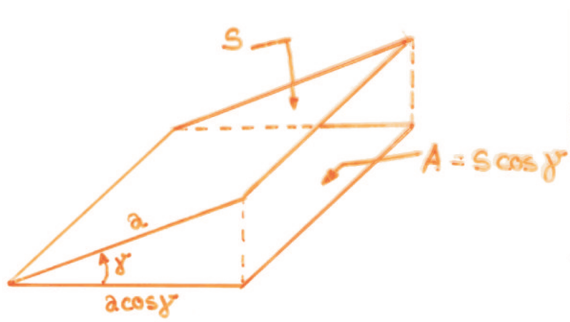


Integrais Duplos - Cálculo de áreas de superfícies

Slide 21

$$dS \cos\gamma = dA \Leftrightarrow dS = \frac{dA}{\cos\gamma}$$

$$S = \int\int dS = \int\int_Q \frac{dA}{\cos\gamma}$$



Integrais Duplos - Cálculo de áreas de superfícies

Slide 22

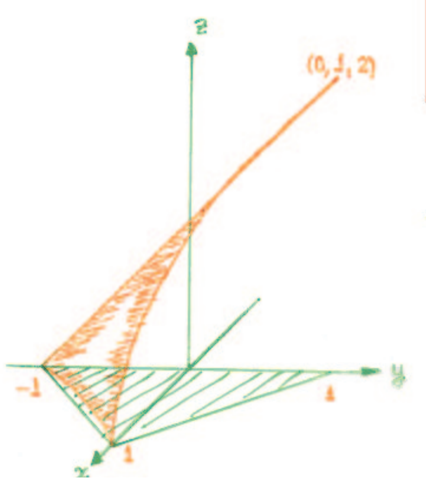
$$\cos\gamma = \frac{|\nabla F(x_i, y_i, z_i) \cdot (0,0,1)|}{\| \nabla F(x_i, y_i, z_i) \| \| (0,0,1) \|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1}}$$

$$S = \int\int_Q \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1 \, dA}$$

Integrais Duplos - Cálculo de áreas de superfícies - Exemplo (Larson)

Slide 23

Calcular a área da superfície $f(x,y) = 1 - x^2 + y$ que se encontra por cima da região triangular de vértices $(1,0,0)$, $(0,-1,0)$ e $(0,1,0)$, tal como se representa na figura.



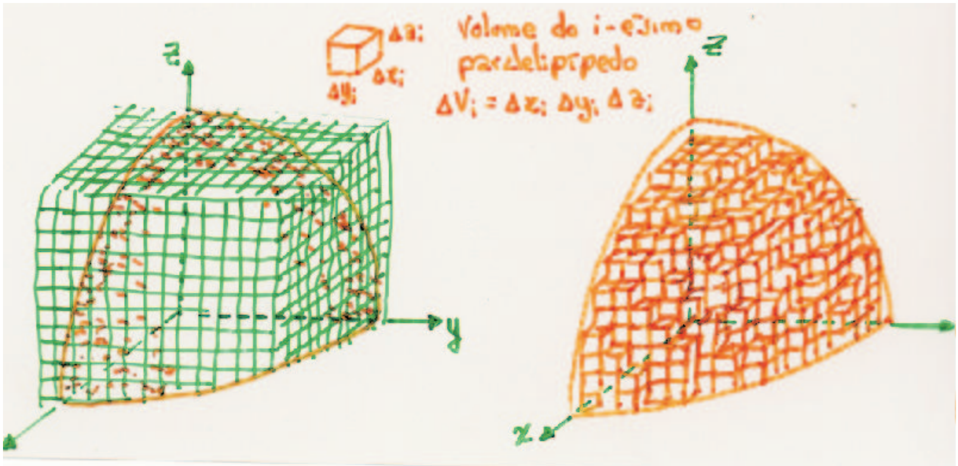
Integrais Triplos

Seja:

$$Q \subset \Re^3 \qquad \text{limitado}$$
$$f : Q \to \Re \qquad \text{função limitada,}$$

$$\int\int\int_Q f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

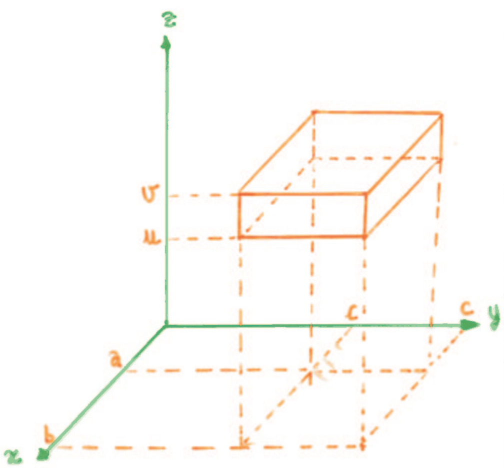
Slide 24



Integrais Triplos - Teorema de Fubini

$$\int_B f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x,y,z)dz\ dy\ dx$$

Slide 25

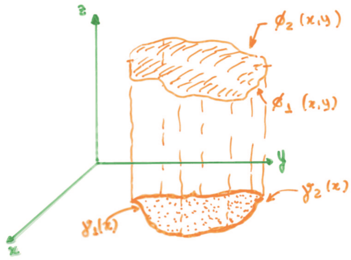


Integrais Triplos

Slide 26

$$\int_W f(x,y,z)dV = \int\int_D \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy\ dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

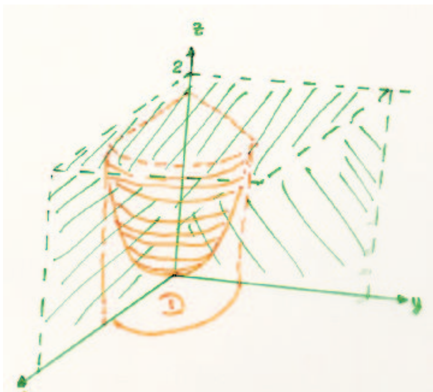


Integrais Triplos - Exemplo

Slide 27

Seja W uma região limitada pelos planos $x = 0, y = 0, z = 2$ e o parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$ e $x \geq 0,\ y \geq 0$. Calcular:

$$\int_W x dx dy dz$$



Integrais Triplos - Exemplo

Cálculo de Volumes:

Determinar o volume do sólido limitado pelo elipsóide de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Slide 28

Integrais Triplos - Mudanças de variável

Teorema:

Sejam B^* e B subconjuntos de $\Re^3$.

Seja

$$\begin{aligned} F : B^* &\rightarrow B \\ (u, v, w) &\rightsquigarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{aligned}$$

Slide 29

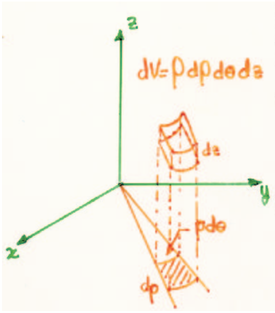
Uma função de classe C_1 e bijectiva. Seja $f : B \rightarrow \Re$ uma função integrável. Então:

$$\int\int\int_B f(x, y, z) dxdydz =$$

$$= \int\int\int_{B^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw$$

Observação: $\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|$ é o determinante da matriz Jacobiana de F

Integrais Triplos - Mudanças de variável - Coordenadas Cilíndricas:



Slide 30

Considere-se a função:

$$\begin{aligned} F : \Re_0^+ \times [0, 2\pi[\times \Re &\rightarrow \Re^3 \\ (\rho, \theta, z) &\rightsquigarrow (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}\right| = det\mathcal{J}F(\rho,\theta,z) = det\begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho$$

$$\int\int\int_B f(x,y,z)dx\ dy\ dz = \int\int\int_{B^*} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\ d\rho\ d\theta\ dz$$

Integrais Triplos - Coordenadas Cilíndricas - Exemplo (Larson)

Slide 31

Calcular o volume da região sólida que o cilindro de equação

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

retira da esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2^2$$

Integrais Triplos - Coordenadas Cilíndricas - Exemplo (Larson)

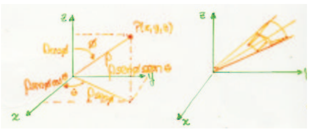
Calcular a massa do elipsóide de equação

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16$$

Slide 32 sabendo que a densidade em cada ponto é proporcional à distância entre o ponto e o plano xy.

Integrais Triplos - Mudanças de variável - Coordenadas Esféricas:

Considere-se a função:



Slide 33

$$\begin{aligned} F : \Re_0^+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi[&\to \Re^3 \\ (\rho, \theta, \phi) &\rightsquigarrow (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi) \end{aligned}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = det\mathcal{J}F(\rho,\theta,\phi) = det\begin{bmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$= \rho^2\sin\phi$$

$$\int\int\int_B f(x,y,z)dx\ dy\ dz =$$

$$\int\int\int_{B^*} f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\rho^2\ \sin\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi$$

Integrais Triplos - Coordenadas Esféricas - Exemplo (Larson)

Slide 34

Calcular o volume da região sólida Q limitada inferiormente pela parte superior do cone

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e superiormente pela esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$