U.PORTO
FEP FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Otimização de portfólios para várias medidas de risco: aplicação em R

Dauno Leandro Silveira Barros

Obtenção do grau de Mestre em Métodos Quantitativos em Economia e Gestão, com especialização em Economia

Orientador: Professor doutor José Abílio Matos

2013

Nota Biográfica

Dauno Leandro Silveira Barros nascido em Valongo a 09 de Abril de 1986, tendo-se formado em Gestão na Faculdade de Economia da Universidade do Porto em 2010.

Terminada a licenciatura continuou os estudos novamente na Faculdade de Economia da Universidade do Porto, tendo concluído a parte curricular do Mestrado Métodos Quantitativos em Economia e Gestão em 2012.

Profissionalmente desempenhou funções como sócio gerente da empresa Soblem Indústria de Mobiliário e Decorações Lda, bem como funções de gestor de produto na empresa *BLUEBIRD, SA.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, o meu agradecimento irá para o meu orientador, o Professor Doutor José Abílio Matos, pela sua entrega, dedicação, capacidade de motivação e porque sem ele, sem a sua persistência e conhecimentos abrangentes dentro desta temática nada disto seria possível.

Gostaria de agradecer em especial à minha namorada, Eliana Dias por ser a minha musa inspiradora em todos os momentos da minha vida.

Agradeço também aos meus pais, Maria Manuela Moreira Silveira e Manuel Magalhães Ramalho de Barros pela educação que me deram, bem como por me fazerem sempre acreditar que é possível ir mais além. Também agradeço às minhas irmãs pelo seu apoio incondicional.

Por fim, quero agradecer aos meus amigos Nuno Magalhães, Fábio Silva, Fábio Teixeira e Manuel Moreira porque sem eles eu não seria a pessoa que sou hoje.

Resumo

Este trabalho visa unir os dois grandes temas, portfólios (carteiras de ativos) e a otimização, aproveitando a componente computacional da otimização para resolver problemas que de outra forma seria impossível.

Ao longo do trabalho, farei uma breve introdução aos portfólios/carteiras de ativos, mais em foco estudarei diferentes medidas de risco, coerentes e não coerentes, as quais serão modeladas e introduzidas no nosso código de modo a poderem ser usadas e comparadas computacionalmente ao longo de toda a dissertação.

Tive como principal fonte de inspiração o artigo de Alejandro Balbás, Raquel Balbás e Silvia Mayoral, intitulado *Portfolio choice and optimal hedging with general risk functions: A simplex-like algorithm*, *2009*. E como código base, o código criado por *"Eric Zivot" November 11,2008"* , estando disponível em url: http://faculty.washington.edu/ezivot/econ424/portfoliofunctions.pdf.

Abstract

This work has the objective of uniting two major themes, the portfolios (asset portfolios) and the optimization, taking advantage of computational optimization to solve issues that would be otherwise impossible.

Throughout this work, I am going to make an introduction to the asset portfolios, focusing on the risk measures, coherent and non coherent, which will be modeled to be better used on our code in a way that can be compared in a computational matter, throughout the entire dissertation.

As major source, I used an article by Alejandro Balbás, Raquel Balbás and Silvia Mauoral, named "Portfolio choice and optimal hedging with general risk functions: A simplex-like algorithm, 2009". As base code, I used the one created by "Eric Zivot" November 11, 2008, available at:

http://faculty.washington.edu/ezivot/econ424/portfoliofunctions.pdf

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução

Todos os dias temos milhares de pessoas tentando investir da melhor maneira possível as suas poupanças. Para muitos os retornos fixos e baixos (retornos sem risco) seriam uma forma lenta de empobrecimento e como solução tendem a procurar carteiras de ativos, ativos reais ou ativos financeiros.

Estas carteiras de ativos permitem ganhos extraordinários, no entanto como tudo na vida existe o reverso da moeda, neste caso o risco, poderemos ganhar muito ou então perder tudo.

A minha dissertação vê aqui o seu principal fundamento, como fazer as pessoas ganharem o que desejam com o mínimo risco possível?

Para tal, será necessário estudar as várias maneiras de medir o nosso risco (medidas de risco), conseguindo quantificar o risco poderemos controla-lo, e conseguir um melhor *Trade-off* risco/retorno adaptado a cada especulador.

Com este intuito, irei modelar diversas medidas de risco de modo a introduzir uma componente computacional a esta dissertação, sendo assim possível ao longo da mesma, comparar depois os nossos resultados a nível numérico e gráfico e conseguindo resolver problemas que analiticamente seriam impossíveis.

2 Definições

Risco:

Existem várias definições de risco, um exemplo de uma definição simples é a de Gitman (1997) “O risco em seu sentido fundamental, pode ser definido como a possibilidade de prejuízos financeiros”. Também podemos ver o risco como a incerteza associada a um ativo ou uma carteira de ativos, podemos ainda ver o risco como a variabilidade/volatilidade em relação a um valor esperado. No entanto, o risco de um investimento estará sempre associado ao facto de o retorno efetivo de um investimento poder estar abaixo do retorno esperado, gerando desse modo uma perda.

Nos mercados financeiros devemos dividir o risco em duas classes distintas, visto eles terem características distintas:

a) Risco Sistemático;

b) Rico Não-Sistemático.

a) Risco Sistemático

Quando falamos em risco sistemático estamo-nos a referir à parcela de risco do mercado em si, este risco não pode ser diversificado, ou seja, não pode diminuir nem desaparecer. Está intimamente ligado às flutuações de mercado como um todo e como tal está presente em tudo que nele existe.

b) Risco Não-Sistemático

Quando nos referimos ao risco não-sistemático estamos a falar da parcela do risco que depende das características individuais de cada ativo, este risco sim, pode ser eliminado (total ou parcialmente) através da diversificação de ativos.

"Stock Split"

Um *stock split* é um aumento de o número de ações por parte de uma empresa, em que apesar de o número de ações ser aumentado, o valor das mesmas desceu proporcionalmente de modo ao valor total da empresa se manter inalterável, porque nenhum valor foi realmente adicionado à empresa com esta operação. Geralmente é usado para aumentar a liquidez dos títulos, tornando o seu preço mais apelativo ao especulador.

"Short Selling"

Podemos definir *short selling* como a prática de vender a descoberto, vender um ativo que ainda não nos pertence, mas que iremos pedir "emprestado" para vender e futuramente iremos comprar realmente para pagar o "empréstimo". O objetivo é vender agora mais caro e comprar no futuro mais barato e lucrar com essa diferença. Quando o preço do ativo desce obtemos um ganho, e quando o preço do ativo sobe obtemos uma perda. Como tal o *short selling* é executado por especuladores que apostam na descida no valor do ativo.

Carteiras de investimentos

Carteiras de investimentos são um conjunto de ativos pertencentes a um investidor, pessoa física ou pessoa jurídica, podendo este ser constituído por ações, fundos, títulos públicos, aplicações imobiliárias, entre outros.

Retorno esperado

É o valor que se espera que uma ação ou conjunto de ações possa gerar no próximo período, este valor é meramente especulativo, podendo o valor efetivamente observado ser maior ou menor que o esperado. Quando falamos do retorno esperado de uma carteira de investimentos estamo-nos a referir a média ponderada dos retornos dos ativos que a compõem.

Retorno simples

Retorno simples é dado pela fórmula:

$$\frac{Pt \ - Pt-1}{Pt-1}.$$

Onde o Pt é o nosso retorno no dia t, e o nosso Pt-1, é o nosso no retorno no dia t-1

Retorno contínuo

O retorno contínuo é dado pela fórmula:

$$\mathrm{Ln}\ (P_t/P_{t-1})$$

Onde o Pt é o nosso retorno no dia t, e o nosso Pt-1, é o nosso no retorno no dia t-1.

3 Descrição da base de dados em uso

A base de dados refere-se às cotações das empresas que compõem o PSI20 em Agosto de 2013

PSI20	
Símbolo	Nome
ALTR	ALTRI
BANIF	BANIF BCO INTL FUNC
BCP	BCP R
BES	ESPIRITO SANTO R
BPI	BANCO BPI R
CFN	COFINA
EDP	EDP-ENERGIAS R
EDPR	EDP RENOVAVEIS
EGL	MOTA ENGIL
ESF	ESPIRIT SAN FIN
GALP	GALP ENERGIA -B-
JMT	JERONIMO MARTINS
PTC	PT TELECOM SGPS N
PTI	PORTUCEL
RENE	REN
SEM	SEMAPA R
SNC	SONAECOM R
SON	SONAE R
SONI	SONAE INDUSTRIA R
ZONOP	ZON OPTIMUS

Tabela 1: PSI20 nome e símbolo dos ativos constituintes, retirado do website: *www.yahoofinance.com*

O PSI20 é um índice que é constituído pelas 20 maiores empresas cotadas na bolsa de Lisboa. A minha base de dados irá ser constituída pelos retornos diários durante o período de 1 Julho de 2005, a 31 Agosto de 2013 (sensivelmente 8 anos). Dos meus dados irei excluir as empresas que não tenham oito ou mais anos de existência em bolsa, bem como corrigir se existir algum ativo que tenha sido alvo de algum *stock split*.

Verificados os dados fui obrigado a corrigir os valores da JMS porque em Maio de 2007 foi alvo de um *stock split* passando as suas ações de um valor nominal de 5.00 € para 1.00€, outro dos casos é o da ALTR que fui obrigado a corrigir os valores para não haver enviesamento dos resultados, visto por duas vezes ter sido alvo de *stock splits* (22-02-2011 e 02-05-2006), tendo visto duas vezes o valor nominal sido reduzido para metade, primeiramente de 0.5€ para 0.25€ e por fim de 0.25€ para 0.125€, tendo estes valores sido corrigidos poderão ser utilizados ao longo deste trabalho sem qualquer risco de enviesamento.

Temos ainda o caso da "ZON" que durante o decorrer da minha tese se fundiu com a "Optimus", dando origem á "ZONOP" como tal irei retirá-la para que não haja enviesamento de resultados.

Verifiquei que havia cinco empresas com algumas falhas nas observações ao longo do período em causa, sendo elas: CFN,EGL, ESF, SEM e SON, estas cinco empresas serão excluídas do meu estudo.

Por fim, excluí as empresas que não tinham os 8 anos de observações na nossa amostra, sendo elas BANIF,EDPR, GALP, RENE e SONI. Tanto neste caso como no anterior, o problema apesar de ter origens diferentes o resultado final é o mesmo, tem observações insuficientes e como tal tem que ser excluídos para não enviesar os resultados.

Tendo em conta já todas as exclusões, os ativos que permanecem em estudo serão: "ALTR", "BCP", "BES", "BPI", "EDP", "JMT", "PTC", "PTI" e "SNC".

Os dados foram retirados do website: www.yahoofinance.com através de uma ferramenta do "R", que importou diretamente do website, tendo transformado as cotações diárias em retornos contínuos, através da fórmula:

$$\boxed{\textbf{Retorno contínuos t} = \log\left(x_t / x_{t-1}\right)}$$

Onde o X_t representa o retorno do dia t, e onde o X_{t-1} representa o retorno no dia t-1.

O recurso aos retornos contínuos deve-se às melhores propriedades matemáticas e de modelação que estes têm quando comparados com os retornos simples.

Irei considerar a nossa taxa de retorno sem risco como sendo 0.000025.

4 Teoria Moderna do Portfólio

A Teoria do Portfólio explica como os investidores racionais, irão usar o princípio da diversificação para otimizar as suas carteiras de investimentos através de modelos de otimização de portfólio com origem na área económico-financeira. Markowitz (1952) foi pioneiro no desenvolvimento da teoria do portfólio com a proposição do modelo média-variância. A teoria do portfólio estabelece que, decisões relacionadas com a seleção de investimentos, que devem ser tomadas com base na relação risco-retorno.
Como tal um investidor racional irá otimizar o seu retorno tendo em conta o determinado risco que está disposto a correr, ou irá minimizar o risco tendo em conta um determinado retorno que quer atingir. A medida exata desse *trade-off* será diferente para cada investidor com base nas suas características individuais a aversão ao risco. Com o aparecimento da teoria de Markowitz começou-se a olhar para os títulos de investimento como um todo e não simplesmente selecionar os melhores individualmente, passou a olhar-se para como os ativos se relacionavam entre si, de modo a conseguir melhores resultados conjuntos. Quando nos referimos à teoria de HM estamos a falar do modelo de Media-Variância, que ficou assim conhecido pelo facto de girar em torno do retorno esperado (média) e no desvio-padrão (variância) das carteiras de ativos.

Pressupostos da teoria de Markowitz:

1. Risco de um portfólio é baseado na variabilidade dos retornos do portfólio;
2. Um investidor é avesso ao risco;
3. Um investidor prefere aumentar o consumo;
4. Função utilidade do investidor, é côncava e crescente, devido à sua aversão ao risco e preferência de consumo;
5. A análise é baseada no modelo de período único de investimento;

6. Um investidor quer maximizar o seu retorno da carteira para um dado nível de risco ou minimizar o risco para um determinado retorno;

7. Um investidor é racional na natureza.

Como citei anteriormente, antes da entrada da teoria de Markowitz era impensável olhar para os ativos como um todo, sendo o normal apostar nos ativos com melhor retorno e menor risco. Mas, Markowitz conseguiu formalizar uma matemática de diversificação, conseguiu provar matematicamente que os ativos variam de formas diferentes, que reagem de formas diferentes e como tal podemos utilizar esses movimentos diferentes (movimentos negativos anulam movimentos positivos e vice-versa) para diminuir o risco, assim sendo os investidores deveriam começar a selecionar carteiras de investimento e não ativos de investimento individuais.

Devido a este grande passo introduzido por Markowitz, ele foi considerado o pai da teoria dos portfólios, provando que afinal a relação risco-retorno de um ativo individualmente afinal não era assim tão importante.

Mais tarde, surgiu William Sharpe aluno de Markowitz, que juntamente com John Lintner e Jack Treynor desenvolveram o modelo que ficou conhecido por Modelo de Avaliação de Ativos Financeiros ou "Capital Asset Pricing Model", no qual o coeficiente beta representa a taxa de retorno esperada de uma ação, e esta é definida pela covariância do seu preço com o nível global de mercado. O pressuposto fundamental seria a diversificação do risco não-sistemático.

Em 1964, William Sharpe desenvolve um modelo imaginando um mundo onde todos os investidores utilizam a teoria da seleção de carteiras de Markowitz através da tomada de decisões usando a avaliação das médias e variâncias dos ativos. Sharpe supõe que os investidores compartilham dos mesmos retornos esperados, variâncias e covariâncias. Mas ele não assume que os investidores tenham todos o mesmo grau de aversão ao risco. Eles podem reduzir o grau de exposição ao risco selecionando mais ativos de menor risco, ou construindo carteiras combinando muitos ativos de risco.

O CAPM descreve a relação entre o risco de mercado e as taxas de retorno exigidas.

Tem como pressupostos:

1) Existe a possibilidade de se efetuar investimento em ativos sem risco;

2) Os investidores são maximizadores da utilidade esperada e escolhem os seus investimentos entre carteiras alternativas com base no seu retorno esperado e respetivo desvio padrão;

3) Os investidores podem endividar-se a uma taxa de juro igual à que podem emprestar num montante ilimitado a uma dada taxa de juro isenta de risco (no entanto as taxas de endividamento, em princípio, são maiores que as taxas de empréstimo);

4) Todos os investidores têm expectativas homogéneas, quer quanto ao retorno esperado, à variância e covariância do retorno dos ativos;

5) Não existem impostos nem custos de transação;

6) O cálculo de betas "futuros" parte do pressuposto que os dados históricos se irão repetir (o que sabemos que há incerteza neste princípio).

A linha de mercado de capitais (LMC) descreve a relação risco/retorno para carteiras eficientes e iremos abordá-la na sua vertente prática no capítulo 8.

5 Análise de Portfolio

O meu portfólio tomará em conta os dados para os 9 ativos já mencionados anteriormente, os dados que disponho são 2127 cotações ajustadas diárias para cada ativo, que depois de transformadas através da fórmula do retorno diário, irão dar origem a 2126 retornos diários para cada ativo perdendo-se uma observação durante o processo.

Na tabela abaixo seguem os retornos esperados (retornos médios) para o portfólio em estudo, tendo sido calculados através do programa R.

Ativos	**Retornos Esperados**
ALTR	0.0007854100
BCP	-0.0006139941
BES	-0.0005381751
BPI	-0.0002244220
EDP	0.0001020678
JMT	0.0003973671
PTC	-0.0001161455
PTI.	0.0001791509
SNC	-0.00009926621

Tabela 2: Retorno esperado dos ativos

Por simples observação da tabela 2, verificamos que o nosso ativo com melhor retorno é o ALTR, como tal se um especulador não tivesse em consideração o risco iria apostar todo seu capital neste ativo. No entanto, ao longo do trabalho iremos verificar que não será de todo a nossa melhor opção, visto o fator risco ser fulcral quando se fala em carteiras de ações.

Ativos	**Variância dos retornos**
ALTR	0.0003718692071644
BCP	0.0001954118418567
BES	0.0001617309374408
BPI	0.0001126960227263
EDP	0.0000520577396027
JMT	0.0000803138510482
PTC	0.0000626981771053
PTI.	0.0000491887474764
SNC	0.0000844998390645

Tabela 3:Variancia dos ativos

A variância dos retornos mede-nos a volatilidade em torno da média, podendo neste caso ser utilizada como medida de risco, ou seja, quanto maior é a variância mais arriscado é o ativo correspondente. Especuladores avessos ao risco apostam em ativos com menor risco logo neste caso com menores variâncias, tendo em conta a nossa amostra os ativos com menores variâncias serão a EDP e a PTI, logo alvo preferencial de especuladores avessos ao risco.

Por outro lado os ativos com maior risco (maior variância), são a ALTR e BCP por teoria seriam alvo preferencial de especulares menos avessos ao risco. No entanto, ainda devemos ter em conta que a variância dos retornos não diferencia os ganhos das perdas. Temos como exemplo o caso da ALTR que tem grande variância pelos elevados ganhos ao longo do tempo que provoca um retorno esperado positivo, contra o exemplo do ativo BCP que tem tido grande variância pelas elevadas perdas ao longo do tempo por consequência com retorno esperado negativo. Como tal, um especulador não pode olhar apenas para a variância mas também terá que estudar a origem da mesma, sendo assim, um especulador menos avesso ao risco iria preferir o ativo ALTR (devido ao seu retorno esperado e variância elevados).

Abaixo segue a matriz de correlações, calculada a partir do programa R,

Matriz de Correlação	ALTR	BCP	BES	BPI	EDP	JMT	PTC	PTI	SNC
ALTR	1	0.1895881	0.2196667	0.2043615	0.2586724	0.2128967	0.2104317	0.2765694	0.2520857
BCP	0.1895881	1	0.3900001	0.4176628	0.2599295	0.2375234	0.2315918	0.2761317	0.2704931
BES	0.2196667	0.3900001	1	0.5434134	0.3593841	0.2356759	0.3459005	0.3342785	0.2870690
BPI	0.2043615	0.4176628	0.5434134	1	0.3869856	0.2775566	0.3432150	0.3381245	0.3583772
EDP	0.2586724	0.2599295	0.3593841	0.3869856	1	0.3518828	0.4330962	0.3864724	0.3987958
JMT	0.2128967	0.2375234	0.2356759	0.2775566	0.3518828	1	0.2900086	0.2819256	0.2618301
PTC	0.2104317	0.2315918	0.3459005	0.3432150	0.4330962	0.2900086	1	0.3227111	0.3291461
PTI	0.2765694	0.2761317	0.3342785	0.3381245	0.3864724	0.2819256	0.3227111	1	0.3897040
SNC	0.2520857	0.2704931	0.2870690	0.3583772	0.3987958	0.2618301	0.3291461	0.3897040	1

Tabela 4:Matriz de Correlações

	ALTR	BCP	BES	BPI	EDP
ALTR	0.0013195362	0.0002214335	0.0002210809	0.0001831946	0.0001561889
BCP	0.0002214335	0.0010338158	0.0003474262	0.0003313983	0.0001389206
BES	0.0002210809	0.0003474262	0.0007676312	0.0003715434	0.0001655102
BPI	0.0001831946	0.0003313983	0.0003715434	0.0006089838	0.0001587403
EDP	0.0001561889	0.0001389206	0.0001655102	0.0001587403	0.0002762989
JMT	0.0001590099	0.0001570263	0.0001342567	0.0001408312	0.0001202630
PTC	0.0001401351	0.0001365116	0.0001756922	0.0001552724	0.0001319772
PTI	0.0001625858	0.0001436830	0.0001498830	0.0001350353	0.0001039623
SNC	0.0001939391	0.0001841977	0.0001684492	0.0001873051	0.0001403933

	JMT	PTC	PTI	SNC
ALTR	0.0001590099	0.0001401351	0.0001625858	0.0001939391
BCP	0.0001570263	0.0001365116	0.0001436830	0.0001841977
BES	0.0001342567	0.0001756922	0.0001498830	0.0001684492
BPI	0.0001408312	0.0001552724	0.0001350353	0.0001873051
EDP	0.0001261630	0.0001319772	0.0001039623	0.0001403933
JMT	0.0004227550	0.0001093152	0.0009380947	0.0001140172
PTC	0.0001093152	0.0003360857	0.0009574292	0.0001277968
PTI	0.0009380947	0.0009574292	0.0002618999	0.0001335700
SNC	0.0001140172	0.0001277968	0.0001335700	0.0004485520

Tabela 5: Matriz de covariâncias

6 Breve enquadramento sobre Otimização

Quando em matemática se fala em otimização, referimo-nos sobretudo à resolução de problemas de minimização/maximização de uma função, durante este trabalho irei sobretudo minimizar as diversas medidas de risco, sujeitas a restrições de igualdade e desigualdade, de modo a obter carteiras ótimas.

Iremos entrar no campo da otimização devido sobretudo à sua componente computacional que quero incutir ao longo da minha tese, visto querer abordar as medidas de risco como funções de otimização (minimizando o risco), conseguindo assim unir os dois grandes temas (portfólios e otimização), com a introdução da componente computacional conseguiremos resolver casos que não são possíveis de resolver analiticamente.

Existem vários métodos numéricos de otimização para resolução de problemas de otimização com restrições lineares e não lineares.

No nosso caso especifico apenas nos interessa os métodos que resolvam problemas numéricos com restrições não lineares, nomeadamente:

- Métodos de penalização;
- Programação quadrática sequencial (SQP);
- Método dos pontos interiores.

Métodos de penalização:

Neste método substitui-se o problema original por uma sequência de subproblemas nos quais as restrições são representadas por termos adicionados à função objetivo. Nos métodos de penalização quadrática adiciona-se um múltiplo do quadrado da violação a cada restrição.

Programação quadrática sequencial (SQP):

A programação quadrática sequencial (SQP) é uma abordagem para resolver problemas de programação não linear através da resolução de uma sequência de problemas de programação quadrática. A ideia é modelar no iterado corrente x_k através de um subproblema de programação quadrática e usar o minimizador deste subproblema para definir o novo iterado x_{k+1}, é obvio que a dificuldade está em desenhar o subproblema quadrático de modo a que produza um bom passo para o problema de otimização não linear.

Método dos pontos interiores:

O método dos pontos interiores ou método de barreira primal como também é conhecido. Em relação aos métodos de penalização, onde as aproximações sucessivas não são admissíveis, nestes são sempre admissíveis. Sobre certas condições os minimizadores da função barreira primal aproximam a solução à medida que μ tende para zero (*Vasconselos, 2010).*

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ \text{s.a} & c_i(x) \geq 0, \quad i \in D \end{array}$$

$$\min f(x) - \mu \sum_{i \in D} \ln c_i(x), \mu > 0$$

Com vista à resolução dos nossos problemas de otimização, computacionalmente iremos fazer recurso ao pacote ALABAMA da linguagem R.

O ALABAMA permite a resolução de problemas de minimização através de um processo interativo do género do *simplex*, que se irá basear nos métodos de programação quadrática, sendo de simples utilização bastando apenas a introdução de uma função (função que deve minimizar), bem como das restrições do tipo de igualdade e ainda as restrições do tipo de desigualdade, solucionando o nosso problema indica-nos o nosso ponto ótimo.

Adicionalmente com o intuito de diminuir o tempo computacional/ número de interações necessárias para chegar à solução do nosso problema. Podemos também inserir a matriz hessiana (matriz das derivadas parciais de segunda ordem da função), e vetor jacobiano (vetor das derivadas parciais de primeira ordem da função).

Sendo que ao longo do trabalho irei introduzir as matrizes hessiana e jacobiana pelo menos uma vez como exemplo de como se pode utilizar, sendo que no restante trabalho não irei utilizar visto o tempo computacional exigido para resolução dos problemas em causa ser diminuto.

7 Medidas de risco

Quando se investe em ações ou fundos de ações, é inevitável a existência de um risco sempre associado, como tal, uma das principais necessidades é conseguir quantificar esse risco, para conseguir otimizar os investimentos e minimizar os riscos. Existem várias medidas de que foram sendo abordadas ao longo do tempo, podemos no entanto subdividir estas medidas de risco em dois grupos medidas de risco não coerentes e medidas de risco coerentes.

Exemplos de medidas de risco não coerentes:

1- Desvio-padrão (variância);

2- Valor em Risco (VaR);

O conceito de medidas de risco coerentes nasceu com *Artzner et al.* [ADEH97], quando propôs a existência de quatro axiomas de medição de risco, como tal as medidas de risco que obedeciam a estes axiomas foram consideradas medidas de risco coerentes, todas as restantes passaram a ser nomeadas de medidas de risco não coerentes.

Axiomas

1- Monotonicidade, se $X \leq Y$, então $p(X) \leq p(Y)$;

2- Invariância sobre translações, se $m \in \Re$, então $p(X+m)= p(x)-m$, onde "m" representa o titulo sem risco

3- Homogeneidade positiva, se $\lambda \geq 0$, então $p(\lambda X) = \lambda p(X)$;

4- Sub-aditividade (convexidade), $p(X+Y) \leq p(X) + p(Y)$.

O primeiro axioma, a monotonicidade diz que associamos maiores riscos a maiores perdas, neste caso à possibilidade de originar maiores perdas.

A invariância, o nosso segundo axioma da invariância sobre transações diz-nos que o nosso título sem risco, neste caso intitulado “m”, é como o próprio nome indica livre de risco e nunca poderá causar perdas.

Homogeneidade positiva significa que o risco de cada título não depende da quantidade comprada de cada título, ou seja, não conseguimos controlar o risco alterando a quantidade comprada do mesmo título. O risco de um determinado título será sempre o mesmo independentemente da quantidade comprada, ou seja, se o ativo A tem um risco de 5%, não importa comprar 1 ou 10 ou até mesmo 100 do nosso ativo A, que o nosso risco do ativo A continuará a ser de 5%.

A Sub-aditividade mostra-nos que o risco conjunto dos ativos é igual ou inferior ao somatório individual dos riscos, mostra-nos que a diversificação de portfólios resulta, e que provoca uma diminuição do risco.

Exemplos de medidas de risco coerentes:

1-CVaR

- **Desvio-Padrão:**

O desvio-padrão é uma das principais medidas de risco utilizadas devido à sua simplicidade e facilidade de utilização, é uma medida estatística que serve para medir a dispersão de uma variável em torno da sua média, no caso de uma carteira de ações serve para medir a variabilidade dos retornos em relação ao retorno médio. Neste caso, quanto maior for o desvio-padrão de um portfólio maior será o nível de incerteza/risco associado a esse portfólio, ou seja, maior a probabilidade de haver retornos positivos ou negativos extremos.

Tem como principais desvantagens o facto de tratar ganhos e perdas da mesma forma e ser insensível a caudas pesadas.

Fórmula do Desvio-Padrão

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Em que:

n =tamanho da amostra;
xi =valor da amostra na posição i;
$\overline{x}$ =média da amostra.

- **Valor em Risco (VaR)**

O VaR surge da necessidade de controlar e quantificar a exposição das carteiras aos riscos de mercado, mais focado nas grandes perdas. Esta medida de risco teve um crescendo na sua utilização depois da falência do banco Barings PLC, em Fevereiro de 1995, na altura um grande banco com 233 anos de história. Esta medida de risco permite-nos quantificar o risco inerente a cada carteira. O VaR de uma carteira por definição pode ser apresentada como uma estimativa da perda máxima em valor monetário para um determinado nível de confiança estatístico, assumindo um determinado horizonte temporal de permanência em posse dessa mesma carteira.

Existem 4 métodos de medição do VaR:

- **Simulação histórica do VaR:** calculamos a distribuição empírica através dos dados históricos da carteira. Através dessa distribuição extraímos o quantil adequado e calculamos o VaR.

- **Simulação de Monte Carlo do VaR:** neste método geramos aleatoriamente diferentes carteiras, após gerar carteiras suficientes conseguimos gerar uma distribuição de perdas. Com esta distribuição criada podemos facilmente calcular o VaR para diferentes probabilidades, exatamente como fazíamos no método de simulação histórica.

- **Método da Variância-Covariância VaR *(também* conhecido como Método Delta-Normal)**: este método permite calcular o VaR para carteiras simples, permite-nos calcular o VaR diretamente a partir das volatilidades e das correlações entre os fatores de risco.

- **Método Delta-Gama:** este método abandona a hipótese de linearidade do método anterior, assumindo uma hipótese quadrática, que permite incorporar variação de segunda ordem no cálculo da rentabilidade da carteira, permitindo deste modo calcular o VaR de carteiras complexas. No entanto, tem a desvantagem de o seu cálculo ser mais complexo necessitando de uma matemática mais sofisticada devido à introdução da hipótese quadrática.

- **CVaR (condicional VaR)**

Uma das deficiências do VaR é não fornecer a magnitude das possíveis perdas além do limite que o mesmo identifica, ou seja, não possibilita nenhuma informação sobre o quão grande pode ser o prejuízo, uma vez que este é representado pelo extremo da cauda esquerda da distribuição e representa a parcela que é superior ao próprio VaR e dado que há uma pequena probabilidade do investidor sofrer uma perda maior que o VaR segundo *Liang e Park (2007)*, o CVaR quantifica este montante, uma vez que mensurada a quantia esperada condicionada ao facto de que o valor do prejuízo médio maior ou igual ao VaR.

Como grande vantagem em relação ao VaR apresenta-se o facto de o VaR apresentar algumas inconformidades em relação aos axiomas de coerência como medida de risco, nomeadamente em relação à falta de convexidade, monotonicidade e sub-aditividade, enquanto o CVaR respeita estes axiomas e como tal é considerado uma medida de risco coerente.

Segundo Dowd (2005), o CVaR representa a média das piores perdas possíveis, e é dada por :

$$CVaR(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} q_p \, dp$$

Onde q_p é o quantil de uma futura perda/ganho esperado em um portfólio, em um período estabelecido para esta análise.

8 Funcionamento do Código em R

Utilizando as nossas medidas risco apresentadas ao longo da tese como funções a minimizar, tentando sobretudo conciliar dois grandes temas como são a otimização e os portfólios, irei a partir de agora transformar os problemas de portfólios em problemas de otimização e solucioná-los computacionalmente através do programa R.

Como ponto de partida usamos o código presente em *"Computing effecient Portfolios in R" "Eric Zivot" November 11,2008"* disponível em url: http://faculty.washington.edu/ezivot/econ424/portfoliofunctions.pdf

O código original implementa uma análise de Markowitz onde os problemas de otimização estudados são calculados utilizando as resoluções analíticas resultantes da aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange. As restrições estudadas são apenas de igualdade, fazendo, por exemplo, com que as soluções considerem o caso de "short selling" uma vez que os pesos não são necessariamente positivos (o que implica uma restrição de desigualdade).

Um dos interesses do código tem também a ver com a implementação de uma programação orientada por objeto ao R. Esta facilidade sintática permite-nos, por exemplo estender a definição de métodos genéricos (print, summary, plot,...) aos objetos do tipo portfólio.

O nosso propósito com este código foi o de levantar as restrições relativas à otimização ao mesmo tempo que estendíamos a análise a novos casos cujas soluções não são resolúveis analiticamente, usando o código inicial como referência (benchmark) no desenvolvimento do novo código. Daí termos usado durante o desenvolvimento do código os mesmos dados usados pela versão original.

Irei começar por explicar o funcionamento do nosso código, utilizando-o na nossa base de dados teste e mais á frente no nosso trabalho mostrarei alguns exemplos de aplicação do código na nossa base de dados PSI20.

A base de dados de teste é composta por 251 retornos correspondentes a 6 ativos com risco, e mais um ativo sem risco (que será o nosso 7º ativo).

Ativo sem risco=0.05 (taxa de retorno sem risco).

Os nossos ativos com risco são: A B B Ltd. , A C C Ltd., Aban Offshore Ltd., Adani Enterprises Ltd., Ador Welding Ltd. e Aftek Ltd.

Os nossos retornos esperados e variâncias dos ativos da nossa base de dados teste são:

Ativos	**Retornos Esperados**	**Variância**
A B B Ltd.	0.03932271	4,832408739
A C C Ltd.	0.08824701	2,686716915
Aban Offshore Ltd.	0.03948207	7,655801731
Adani Enterprises Ltd.	0.17207171	5,255622091
Ador Welding Ltd.	0.03629482	5,964954617
Aftek Ltd.	0.10589641	7,737990693

Tabela6: Retornos esperados e variâncias dos ativos da base de dados teste

O código pode se dividir em 6 funções principais:

1. getPortfolio
2. efficient.portfolio
3. globalMin.portfolio
4. tangency.portfolio
5. efficient.portfolio.var
6. efficient.portfolio.cvar

1) getPortfolio

Podemos considerar esta função, como sendo a nossa principal função, visto que será a nossa função geradora de portfólios.

Recebe como dados de entrada:

- er (retornos esperados dos ativos/ média dos retornos);
- cov.mat (matriz de covariância dos ativos);
- weights (pesos relativos a cada um dos ativos);
- retornos.observados (base de dados com os retornos observados).

Gera como dados de saída:

- er (retorno esperado do portfólio);
- sd (desvio-padrão do portfólio);
- cov.mat (matriz de covariâncias);
- er.vec (vector dos retornos esperados);
- weights (pesos relativos a cada um dos ativos).

Como exemplo de como passo-a-passo utilizar este código e mais especificamente esta função funciona, geraremos um portfólio com os pesos todos iguais, ao qual chamaremos “igual.por”.

1º Importar base de dados (basedados <- read.csv("Markowitz.csv"))

2º Calcular retornos esperados (medias = colMeans(basedados[,-7]))

3º Calcular matriz covariâncias (covm = cov(basedados[,-7]))

4º Calcular pesos ativos (ew = rep(1,6)/6)

Feitos estes 4 passos, agora será simples criar o nosso portfólio, com retornos todos iguais.

Basta introduzir:

igual.port <-getPortfolio(er=medias,cov.mat=covm,weights=ew,
retornos.observados=(basedados[,-7]))

Correndo esta linha de código o nosso portfólio encontra-se criado, podendo agora ser visualizado de duas maneiras distintas:

1) Em forma output:

Fazendo correr apenas: igual.port

```
> igual.port
Call:
getPortfolio(er = medias, cov.mat = covm, weights = ew, retornos.observados = r1[,
    -7])

Portfolio assets returns:     0.03932271 0.08824701 0.03948207 0.17207171 0.03629482 0.10$

Portfolio assets cov:     4.8324087 0.4323572 1.0226384 0.3040590 0.8950267 0.1726072 0.4$

Portfolio expected return:     0.08021912
Portfolio standard deviation:  1.301347
Portfolio weights:
            A.B.B.Ltd.               A.C.C.Ltd.     Aban.Offshore.Ltd.
                0.1667                   0.1667                 0.1667
Adani.Enterprises.Ltd.       Ador.Welding.Ltd.             Aftek.Ltd.
                0.1667                   0.1667                 0.1667
```

Figura 1: output gerado em R pela função getPortfolio

As informações fundamentais que podemos retirar do *output* deste portfólio são o seu retorno esperado (*portfolio expected return*) de 0.0821912 e o seu desvio-padrão (*portfolio standard deviation*) de 1.301347.

2) Em forma de Gráfico de Barras:

Dando a indicação: plot(igual.port)

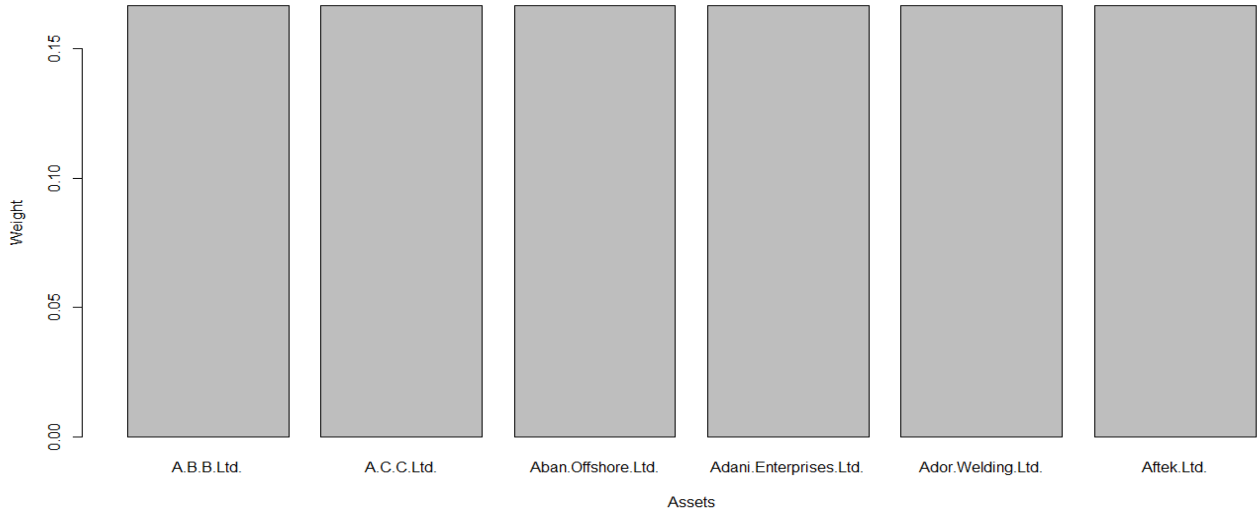

Figura 2: gráfico de barras representativo dos pesos dos ativos do portfólio

O cálculo deste portfólio em que os pesos são todos idênticos teve como principal objetivo exemplificar o funcionamento da função getPortfolio, no entanto também o iremos utilizar como ponto de partida razoável para as próximas funções. Visto elas necessitarem de um ponto de partida para as suas interações, e este ser um ponto de partida razoável e de fácil obtenção.

2) efficient.portfolio

Esta função gera portfólios eficientes para diferentes tipos de retorno do portfólio, na prática nós colocamo-nos na posição de especulador decidindo qual o retorno que desejamos para o nosso portfólio, e esta função nos dará a combinação de pesos ideal que nos permite obter a menor variância tendo em conta o retorno desejado.

Quando nos referimos a portfólio eficiente, referimo-nos ao portfólio que minimiza a nossa medida de risco, neste caso que minimiza a variância, tendo em conta que o retorno esperado é um dado.

Recebe como dados de entrada:

- portfólio (um portfólio como ponto de partida, usaremos o “igual.port”)
- target.return (retorno esperado para o portfólio);

Gera como dados de saída:

- er (retorno esperado do portfólio);
- sd (desvio-padrão do portfólio);
- cov.mat (matriz de covariâncias);
- er.vec (vector dos retornos esperados);
- weights (pesos relativos a cada um dos ativos).

Tendo em conta que já temos o ponto de partida calculado anteriormente agora computacionalmente será bastante simples bastando apenas introduzir:

retornoefc=efficient.portfolio(igual.port,0.1)

Depois de correr a linha de código acima mencionada, já temos criado o nosso portfólio eficiente para um retorno esperado de 0.1 podendo agora verificar o seu output novamente de duas maneiras distintas:

1) Em forma output:

Introduzindo: retornoefc

```
> retornoefc
Call:
getPortfolio(er = medias, cov.mat = covm, weights = ew, retornos.observados = r1[,
    -7])

Portfolio assets returns:     0.03932271 0.08824701 0.03948207 0.17207171 0.03629482 0.10$

Portfolio assets cov:     4.8324087 0.4323572 1.0226384 0.3040590 0.8950267 0.1726072 0.4$

Portfolio expected return:     0.1
Portfolio standard deviation:  1.202265
Portfolio weights:
[1] 0.1756 0.3745 0.0000 0.2537 0.0630 0.1332
```

Figura 3: output gerado em R pela função “efficient.portfolio”

Podemos agora verificar do nosso output que realmente se obteve um retorno esperado de 0.1, e que para esse retorno esperado o nosso portfólio terá um desvio-padrão mínimo de 1.202265 e para isso mostra-nos os pesos que devemos atribuir a cada ativo, 0.01756 (A.B.B.Ltd.) , 0.03745 (A.C.C.Ltd.), 0.0000 (Aban.Offshore.Ltd.), 0.02537(Adani.Enterprises.Ltd.) , 0.0630 (Ador.Welding.Ltd.) e 0.1332(Aftek.Ltd.).

2) Em forma de Gráfico de Barras:

Dando a indicação: plot(retornoefc)

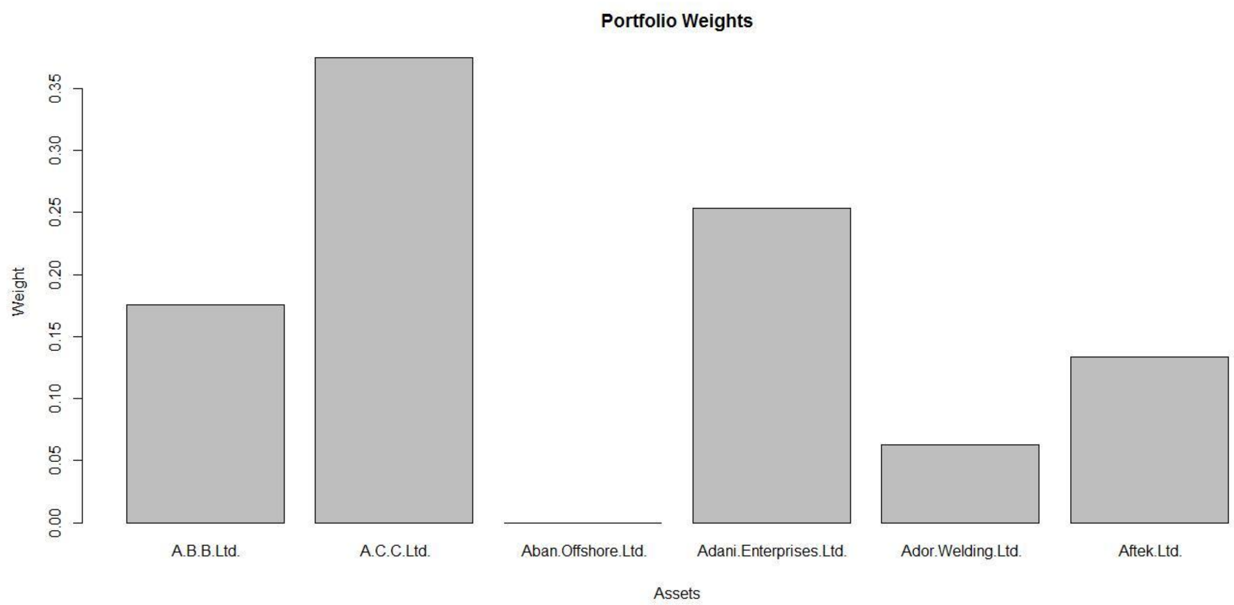

Figura 4: gráfico de barras representativo dos pesos dos ativos do portfólio eficiente com retorno esperado 0.1

Gostaria no entanto de salientar que, quando utilizamos o *efficient.portfolio* temos que ter em conta que existem limitações ao nível do retorno máximo que o nosso portfólio pode atingir, que será sempre igual ao retorno esperado do ativo com maior retorno. Neste caso o nosso retorno máximo seria 0.17207171 com um peso de 1 no ativo Adani Enterprises Ltd.

Por outro lado, quando pensamos no retorno esperado mínimo, temos que deixar de lado os portfólios com retornos esperados inferiores aos do retorno esperado do ativo sem risco, visto que se os especuladores conseguirem maiores retornos aplicando sem qualquer risco, investiriam todo o seu dinheiro no ativo sem risco.

Quando se fala em retornos eficientes não podemos deixar de lado, o mínimo global, ponto onde a variância mínima é atingida (risco mínimo visto estarmos a usar a variância como medida de risco), e a partir do qual, diminuir o retorno esperado não se traduz numa diminuição da variância. Logo se nós queremos minimizar o risco obtendo o máximo retorno possível, a partir deste ponto isso deixa de acontecer (não há mais diminuição da variância), logo, o nosso mínimo global será o ponto onde se encontra o nosso retorno mínimo aceitável e consequentemente será a carteira ideal para especuladores com grande aversão ao risco.

3) globalMin.portfolio

A função "globalMin.portfolio" permite-nos calcular o mínimo global, ponto onde os nossos retornos eficientes atingem a variância mínima.

Recebe como dados de entrada:

- portfólio (um portfólio como ponto de partida, usaremos o "igual.port").

Gera como dados de saída:

- er (retorno esperado do portfólio);
- sd (desvio-padrão do portfólio);
- cov.mat (matriz de covariâncias);
- er.vec (vector dos retornos esperados);
- weights (pesos relativos a cada um dos ativos).

Como ponto de partida usaremos o “igual.port” , tendo em conta que já se encontra criado este ponto inicial será muito simples conseguir o ponto desejado, teremos que introduzir:

gmin.port <- globalMin.portfolio(igual.port)

Correndo a linha de código acima mencionada fica criado o nosso portfólio de variância mínima, o nosso mínimo global, podendo verificar o seu output de duas maneiras distintas:

1) Em forma output:

Introduzindo: gmin.port

```
> gmin.port
Call:
getPortfolio(er = medias, cov.mat = covm, weights = ew, retornos.observados = r1[,
    -7])

Portfolio assets returns:     0.03932271 0.08824701 0.03948207 0.17207171 0.03629482 0.10$

Portfolio assets cov:     4.8324087 0.4323572 1.0226384 0.3040590 0.8950267 0.1726072 0.4$

Portfolio expected return:     0.08816913
Portfolio standard deviation:  1.179488
Portfolio weights:
[1] 0.2185 0.3763 0.0000 0.1693 0.1112 0.1247
```

Figura 5: output gerado em R pela função globalMin.portfolio

Deste *output* retirámos que o nosso mínimo global será o portfólio constituído pelos os pesos 0.2185 (A.B.B.Ltd.) , 0.3763 (A.C.C.Ltd.), 0.0000 (Aban.Offshore.Ltd.), 0.1693 (Adani.Enterprises.Ltd.) , 0.1112 (Ador.Welding.Ltd.) e 0.1247(Aftek.Ltd.). No qual obteremos um retorno esperado de 0.08816913 e uma variância de 0.08816913. Gostaria de salientar que o nosso portfólio de variância mínima tem uma variância inferior ao nosso ativo com variância mínima (0.08816913 < 2,686716915), isto deve-se ao fator diversificação. Se assim não fosse o nosso portfólio de variância mínima seria o portfólio constituído simplesmente pelo ativo de variância mínima.

Em forma de Gráfico de Barras:
Dando a indicação: plot(gmin.port)

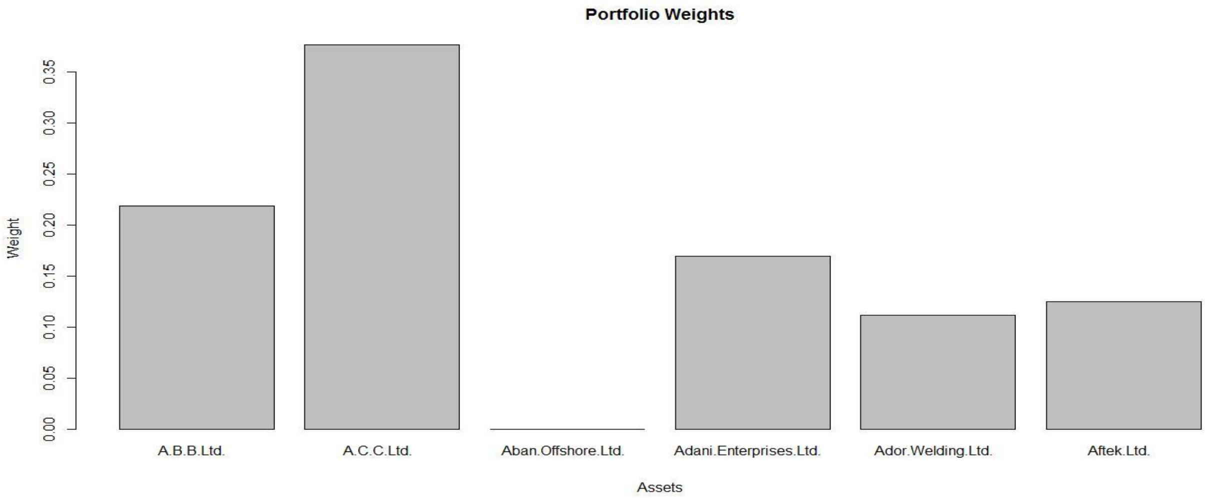

Figura 6: gráfico de barras representativo do mínimo global

4) tangency.portfolio

A função tangency.portfolio irá nos calcular o portfólio de tangência, ou seja, o portfólio com o máximo índice de Sharpe, ou ainda por outras palavras portfólio com maior retorno esperado por unidade de risco. Graficamente, a carteira com o máximo índice de Sharpe é o ponto onde uma reta que passa no ponto origem (0, 0) é tangente à fronteira eficiente, e daí advém o nome Portfólio de tangência.

Recebe como dados de entrada:

- portfólio (um portfólio como ponto de partida, usaremos o “igual.port”);
- risk.free (taxa de retorno sem risco)

Gera como dados de saída:

- er (retorno esperado do portfólio);
- sd (desvio-padrão do portfólio);
- cov.mat (matriz de covariâncias);
- er.vec (vector dos retornos esperados);
- weights (pesos relativos a cada um dos ativos).

Tendo em conta que já temos o ponto de partida calculado anteriormente (igual.port) agora computacionalmente será bastante simples bastando apenas introduzir:

tan.port <- tangency.portfolio(igual.port, 0.05)

Introduzida a linha de código, o nosso portfólio tangência já se encontra criado, para uma taxa sem risco de 0.05, sendo possível observar novamente de duas maneiras distintas:

1) Em forma output:

Introduzindo: tan.port

```
> tan.port
Call:
getPortfolio(er = medias, cov.mat = covm, weights = ew, retornos.observados = r1[,
    -7])

Portfolio assets returns:     0.03932271 0.08824701 0.03948207 0.17207171 0.03629482 0.10$

Portfolio assets cov:     4.8324087 0.4323572 1.0226384 0.3040590 0.8950267 0.1726072 0.4$

Portfolio expected return:     0.1439159
Portfolio standard deviation:  1.653816
Portfolio weights:
[1] 0.0000 0.2194 0.0000 0.6330 0.0000 0.1476
```

Figura 7: output gerado em R pela função tangency.portfolio

Deste *output* concluímos que o portfólio tangência é constituído por 0.02194 do ativo A C C Ltd., 0.6330 do ativo Adani Enterprises Ltd. e por 0.1476 do ativo Aftek Ltd.. Sabendo que o nosso retorno esperado do portfólio é 0.1439159 e o seu desvio-padrão é 1.653816, podemos calcular o seu rácio de Sharp (dividindo o retorno esperado pelo desvio-padrão).

$$0.1439159/1.653816= 0.0870205$$

Este valor é interessante calcular visto ser o máximo rácio de Sharp que se pode obter, podendo portanto concluir que é neste ponto aonde o especulador terá a melhor relação risco/retorno.

2) Em forma de Gráfico de Barras:

Dando a indicação: plot(tan.port)

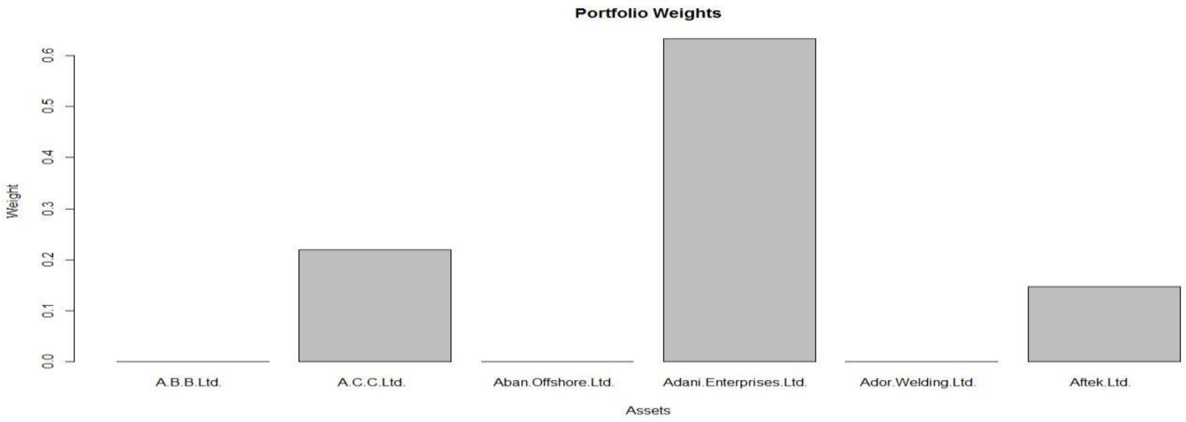

Figura 8: gráfico de barras representativo do portfólio de tangencia

Gráfico da fronteira eficiente

Utilizando as nossas 4 funções iniciais, que são baseados nas teorias modernas do portfólio será ainda possível criar um gráfico da nossa fronteira eficiente, no qual estará também representada, a linha de mercado de capitais, o mínimo global e o portfólio tangência.

O nosso mínimo global e portfólio de tangência já foram calculados, ficando agora a faltar a linha de mercado de capitais, bem como criar uma diversidade de portfólios eficientes de modo a representarem a nossa linha.

Computacionalmente iremos introduzir as seguintes linhas de código:

```
retornoefc1<- efficient.portfolio(igual.port,0.01)

retornoefc2<- efficient.portfolio(igual.port,0.015)

retornoefc3<- efficient.portfolio(igual.port,0.020)

retornoefc4<- efficient.portfolio(igual.port,0.025)

…

retornoefc35<- efficient.portfolio(igual.port,0.185)


points(retornoefc$sd, retornoefc$er, col="black")

points(retornoefc1$sd, retornoefc1$er, col="black")

points(retornoefc2$sd, retornoefc2$er, col="black")

…..

points(retornoefc35$sd, retornoefc35$er, col="black")

points(gmin.port$sd, gmin.port$er, col="blue")

points(tan.port$sd, tan.port$er, col="red")

sr.tan = (tan.port$er - s.risco)/tan.port$sd

abline(a=s.risco, b=sr.tan)
```

Após introdução das linhas de código anteriores iremos obter o seguinte gráfico:

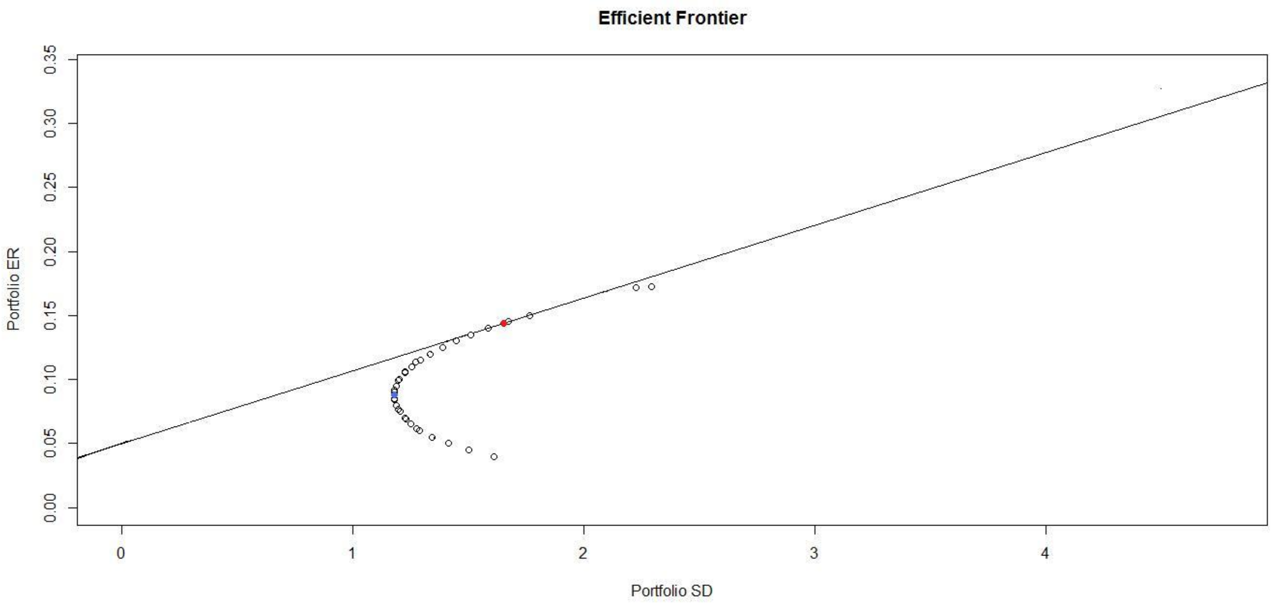

Figura 8: Fronteira para eficiente base dedos teste

No nosso gráfico acima, os pontos a preto são uma representação da fronteira eficiente, salientou-se dois pontos fundamentais da fronteira eficiente a cor, a azul o nosso ponto de variância mínima (mínimo global), e a vermelho o nosso ponto com maior índice de Sharpe, que como podemos verificar, é tangente com a reta representada, a reta representa linha de mercado de capitais, tendo como origem o nosso valor do retorno sem risco 0.05 e fazendo tangência com a nossa fronteira eficiente.

Este gráfico sintetiza de certo modo toda a teoria moderna do portfólio, dando uma ideia generalizada de como os especuladores irão investir, especuladores irão andar mais perto do nosso mínimo global, especuladores mais arriscados irão se situar mais do nosso portfólio tangência, basicamente dependendo da perceção de risco/retorno de cada especulador irá movimentar-se ao longo da nossa fronteira achando uma posição entre o nosso mínimo global e o portfólio de tangência.

5) efficient.portfolio.var

A função efficient.portfolio.var irá calcular um portfólio que minimiza a nossa medida de risco, neste caso o “Valor em Risco” (VaR). Esta medida de risco será calculada pelo método analítico, no qual assumiremos que os nossos dados se comportam mediante uma distribuição normal.

Recebe como dados de entrada:

- portfólio (um portfólio como ponto de partida, usaremos o “igual.port”);
- VM (valor monetário, valor que iremos investir)

Gera como dados de saída:

- er (retorno esperado do portfólio);
- sd (desvio-padrão do portfólio);
- cov.mat (matriz de covariâncias);
- er.vec (vector dos retornos esperados);
- weights (pesos relativos a cada um dos ativos).

Tendo em conta que já temos o ponto de partida calculado anteriormente (igual.port) e o nosso VM podemos atribuir o número 1 (porque alterando o VM não irá alterar a constituição do portfólio), agora computacionalmente será bastante simples bastando apenas introduzir:

```
var=efficient.portfolio.var(igual.port,1)
```

Introduzida a linha de código, o nosso portfólio que minimiza o VaR já se encontra criado, para um VM de 1, sendo possível observar novamente de duas maneiras distintas:

1) Em forma output:

Introduzindo: var

```
> var
Call:
getPortfolio(er = medias, cov.mat = covm, weights = ew, retornos.observados = r1[,
    -7])

Portfolio assets returns:     0.03932271 0.08824701 0.03948207 0.17207171 0.03629482 0.10$

Portfolio assets cov:     4.8324087 0.4323572 1.0226384 0.3040590 0.8950267 0.1726072 0.4$

Portfolio expected return:     0.08816751
Portfolio standard deviation:  1.179488
Portfolio weights:
[1] 0.2185 0.3763 0.0000 0.1693 0.1112 0.1247
```

Figura 9: output gerado em R pela função efficient.portfolio.var

2)Em forma de Gráfico de Barras:

Dando a indicação: plot(var)

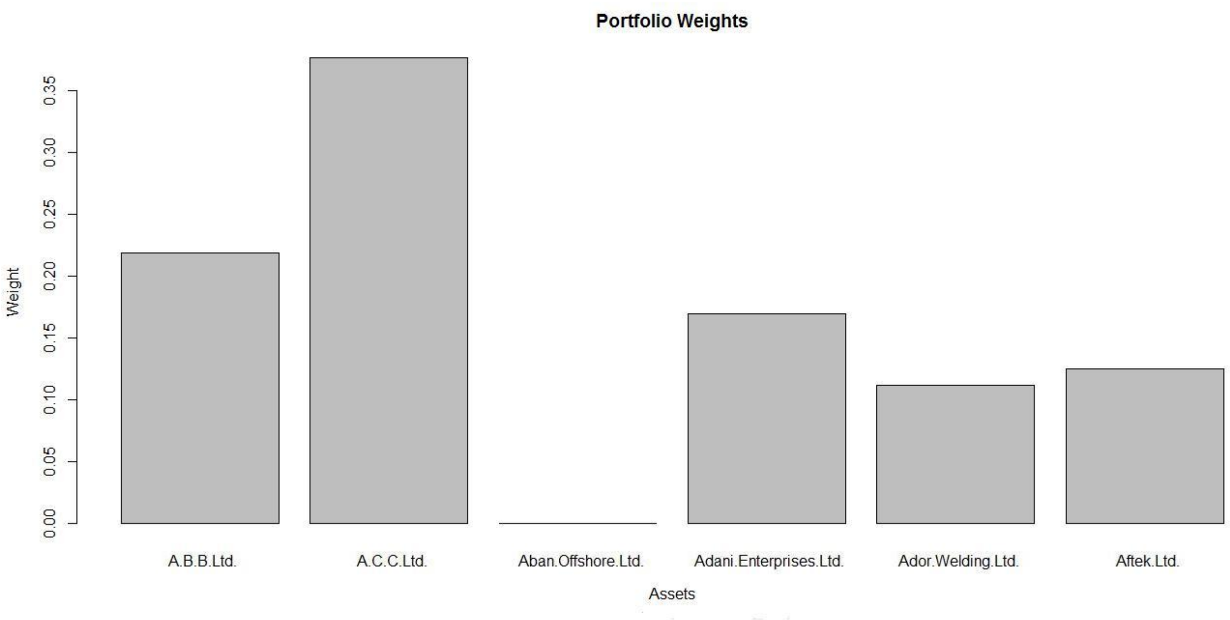

Figura 10: Gráfico de barras representativo dos pesos dos ativos do portfólio que minimiza o VaR

Gostaria de salientar o pormenor de que o nosso portfólio com o mínimo VaR, é exatamente igual ao nosso mínimo global, ou seja ao portfólio com menor variância. Isto deve-se sobretudo ao facto de utilizarmos o método analítico como cálculo do VaR, nomeadamente a fórmula:

$$VaR = VM * DP * N(p) * n^{1/2}$$

Onde o:

VM= Valor monetário (no nosso caso =1);

DP= Desvio-padrão do portfólio (nossa variável);

N(p)= Quantil da função distribuição (nosso caso 1.645 para um nível de confiança de 95%)

n= número de períodos (no nosso caso será apenas para um período)

Dissecando a nossa função a que minimizamos observamos que a nossa única variável, é o nosso desvio-padrão, então torna-se evidente que minimizar o VaR (pelo método analítico) ou minimizar a variância (mínimo global) apesar de serem medidas de risco diferentes, se obterá o mesmo resultado, apenas com o acrescento que podemos quantificar as nossas perdas. Neste caso o nosso VaR seria 1.94.

6) efficient.portfolio.cvar

A função efficient.portfolio.cvar irá calcular um portfólio que minimiza a nossa medida de risco, neste caso o condicional VaR (CVaR). Esta medida de risco ao contrário das apresentadas até agora, respeita ao 4 axiomas e é considerada uma medida de risco coerente. Enquanto o VaR graficamente representa um ponto, o CVaR pode ser visto como uma área, podemos ainda ver o CVar como uma média das diferentes VaR pertencentes a um determinado intervalo.

Recebe como dados de entrada:

- portfólio (um portfólio como ponto de partida, usaremos o "igual.port");
- epsilon (percentil)

Gera como dados de saída:

- er (retorno esperado do portfólio);
- sd (desvio-padrão do portfólio);
- cov.mat (matriz de covariâncias);
- er.vec (vector dos retornos esperados);
- weights (pesos relativos a cada um dos ativos).

Tendo em conta que já temos o ponto de partida calculado anteriormente, basta agora escolher o nosso épsilon (optei por 0.05), e depois introduzir:

Cvar0.05=efficient.portfolio.cvar(igual.port,0.05)

Introduzida a linha de código, o nosso portfólio que minimiza o CVaR já se encontra criado, para um épsilon de 0.05, sendo possível observar novamente de duas maneiras distintas:

1) Em forma output:

Introduzindo: cvar0.05

```
> cvar0.05
Call:
getPortfolio(er = medias, cov.mat = covm, weights = ew, retornos.observados = r1[,
    -7])

Portfolio assets returns:     0.03932271 0.08824701 0.03948207 0.17207171 0.03629482 0.10$

Portfolio assets cov:     4.8324087 0.4323572 1.0226384 0.3040590 0.8950267 0.1726072 0.4$

Portfolio expected return:     0.08165155
Portfolio standard deviation:  1.285952
Portfolio weights:
[1] 0.1838 0.6169 0.0003 0.0203 0.0351 0.1435
```

Figura 11: output gerado em R pela função efficient.portfolio.cvar

2)Em forma de Gráfico de Barras:

Dando a indicação: plot(cvar)

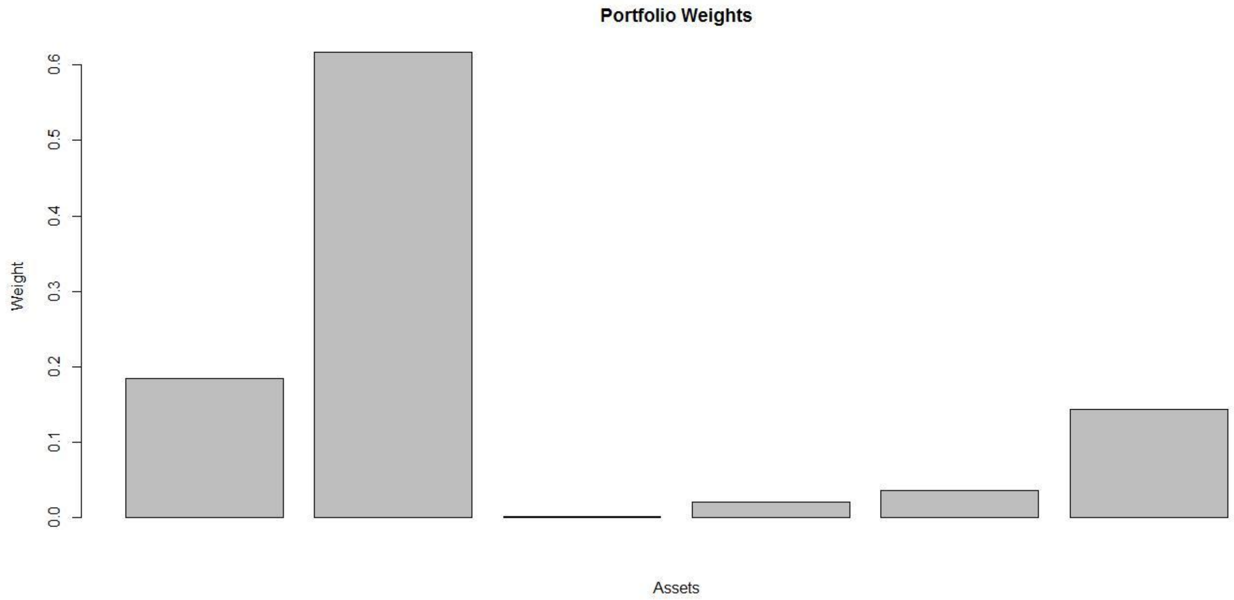

Figura 12: Gráfico de barras representativo dos pesos dos ativos do portfólio que minimiza o CVaR (épsilon=0.05)

Tendo em conta estes *outputs* verificamos que para um épsilon de 0.05 o nosso portfólio que minimiza o CVaR tem como pesos 0.1838 (A.B.B.Ltd.) , 0.6169 (A.C.C.Ltd.), 0.0003 (Aban.Offshore.Ltd.), 0.0203 (Adani.Enterprises.Ltd.) , 0.0351 (Ador.Welding.Ltd.) e 0.1435 (Aftek.Ltd.), um retorno esperado de 0.08165155, uma variância de 1.285952 e um CVaR de 2.056, sendo este valor tem em conta a média dos 5% piores casos, este medida visa ter em conta as maiores perdas, e como tal seria o portfólio ideal para especuladores avessos ao risco.

9 Exemplos de aplicação do Código em R ao PSI20

1. **Teoria Moderna do Portfólio (desvio-padrão/ variância como medida de risco)**

Vamos começar por computacionalmente achar o nosso mínimo global, este mínimo vai-nos dar o retorno eficiente com variância mínima do nosso portfólio (PSI20), o nosso ativo BCP foi excluído visto estar a transformar o nosso mínimo global num valor negativo, o que não permitia tirar conclusões validas.

Os nossos retornos eficientes serão sempre calculados sujeitos as duas seguintes restrições:

1) Os pesos dos ativos não poderão ser negativos, ou seja, nunca poderá haver short selling;

2) O somatório dos pesos será sempre igual a 1.

Portfólio de Mínimo risco, mínimo global (variância mínima)

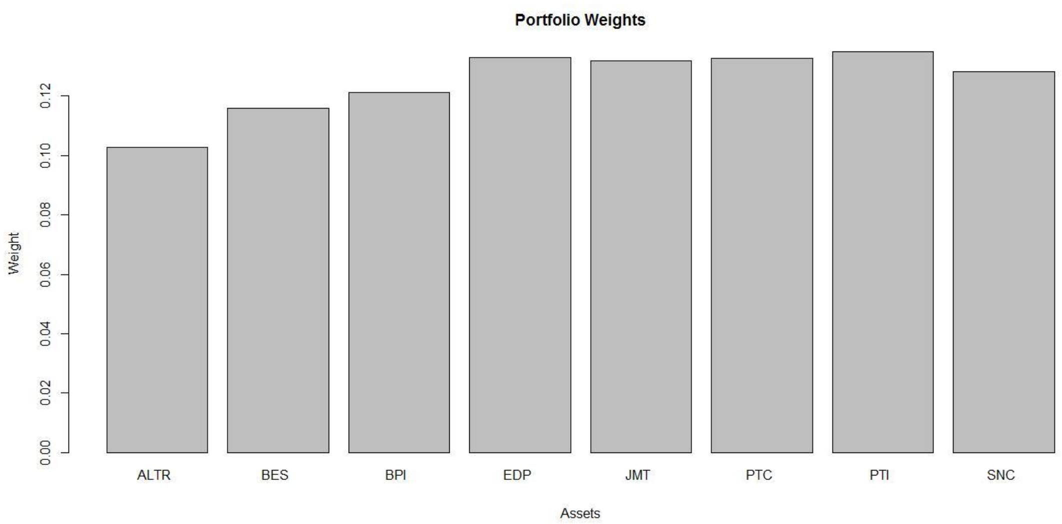

Figura 13: Gráfico de barras representativo dos pesos dos ativos para o mínimo global (produzida em R)

Este gráfico de barras representa as quantidades em proporção que devemos investir em cada título para que o nosso risco seja o mínimo, seria a carteira ótima para especuladores avessos ao risco (consideramos que esta é a nossa carteira eficiente com mínima variância)

Mas como vimos anteriormente, cada investidor tem a sua própria perceção do risco e o seu próprio nível de aversão a esse mesmo risco, bem como níveis desejados de retornos diferentes, logo falar em carteira ótima não faria sentido porque irá existir uma carteira ótima para cada indivíduo, existirá uma diferente combinação retorno/risco, que não podemos traduzir num ponto ótimo, mas sim numa espécie de uma linha que é a nossa fronteira eficiente.

Irei calcular os nossos retornos eficientes para uma diversidade de retornos diferentes, em seguida colocarei esses pontos num gráfico, e esse conjunto de pontos será uma representação aproximada da nossa fronteira eficiente.

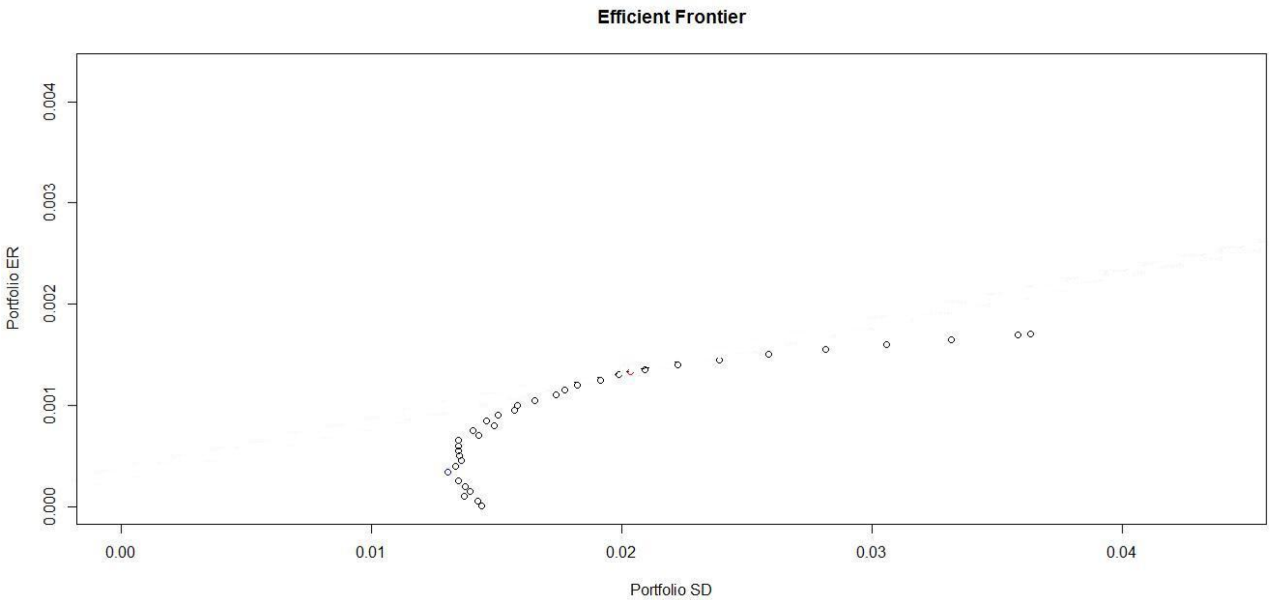

Figura 14: Gráfico fronteira eficiente

Cálculo do portfólio com mínimo CVAR com Épsilon 0.05, do nosso PSI20

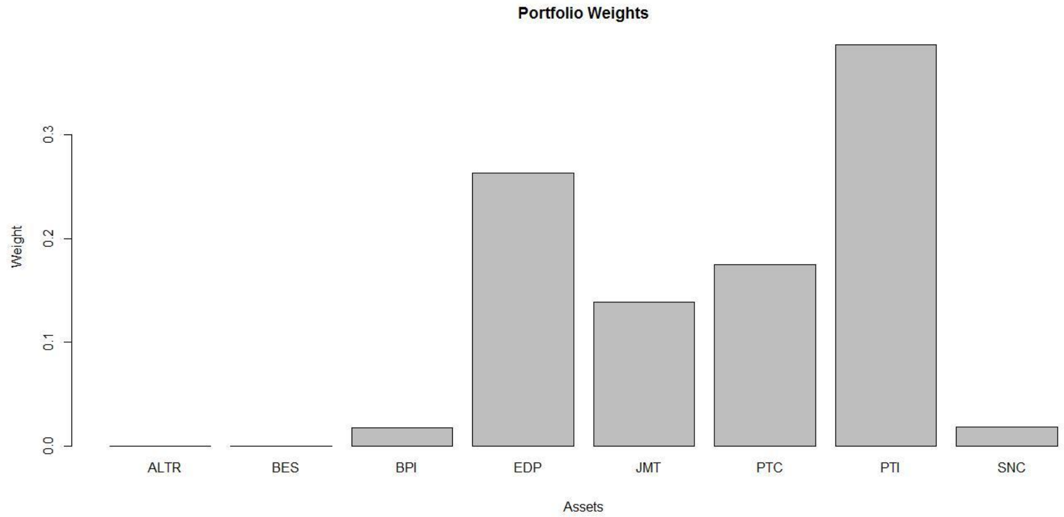

Figura 15: Gráfico representativo mínimo CVaR

Portfólio de Máximo Retorno PSI20

Quando o objetivo do nosso especulador é conseguir o máximo retorno possível, sem olhar a riscos. A nossa resposta é simples o nosso retorno máximo acontecerá quanto for atribuído o peso de 1 no nosso ativo com retorno maior, neste caso ALTR, e peso zero nos restantes, sendo que o retorno esperado da nossa carteira será igual ao retorno do nosso ativo, e o risco será igual à sua variância.

Neste caso 0.078541% seria o nosso retorno máximo possível do nosso portfólio com uma variância de 0.0003718692071644.

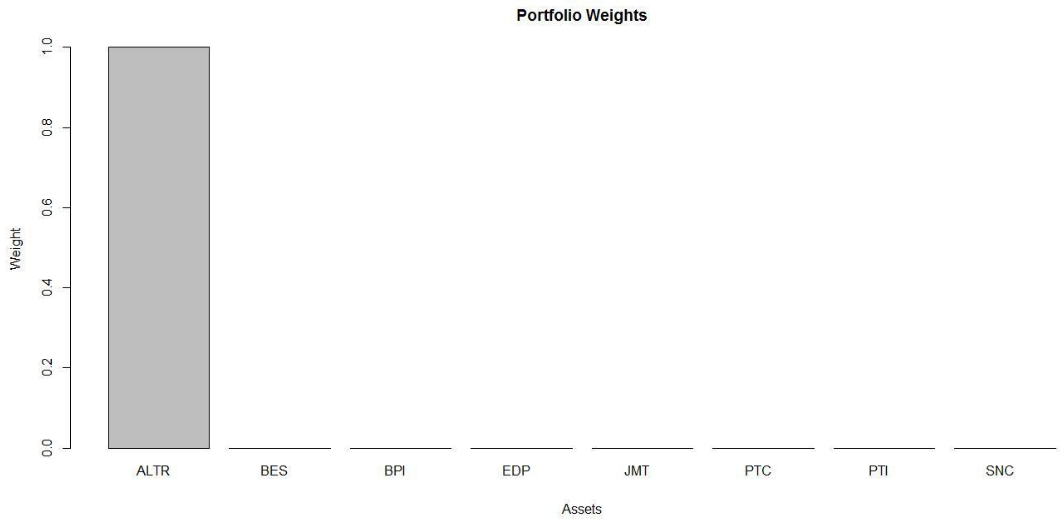

Figura 16: Gráfico máximo retorno

11 Conclusão:

Abordamos ao longo de todo o trabalho a temática dos portfólios quer sobre um ponto de vista teórico quer sobre um ponto de vista prático/computacional.

Na perspetiva do investidor há várias preocupações que se traduzem na prática em diferentes medidas de risco. Igualmente na perspetiva do investidor o risco é para ser minimizado, sem no entanto nos esquecermos que numa carteira de ativos o nosso risco nunca será nulo. O risco existe sempre e quem gere ativos tem que ter sempre isso em consideração.

No entanto esse risco pode ser minorado e controlado como mostra-mos ao longo do trabalho. A vantagem da utilização dos computadores na modelação do risco é que nos permite criar modelos mais realistas mesmo que analiticamente não sejam tratáveis. Na prática os investidores usam pacotes de software como caixas negras que no entanto escodem os detalhes de implementação. Neste trabalho, mesmo que de uma forma simples, mostramos como com a utilização de métodos de otimização mais recentes conseguimos resolver de uma forma simples, no sentido em que a formulação computacional do problema segue a formulação teórica. Este trabalho seria por exemplo impossível há mais de dez anos atrás, quer porque a teoria não existia quer porque os métodos numéricos e computacionais ainda não estavam desenvolvidos o suficiente para poderem ser utilizados desta forma.

Em termos económicos e financeiros gostaria no entanto de ressalvar que durante a teoria de Markowitz não diferencia os ganhos das perdas, considerando tudo como risco, como tal uma empresa com grande risco pode ser simplesmente uma empresa que tenha a ter um crescimento abrupto, conseguimos no entanto com a introdução da medida de risco VaR e CVaR resolvemos esta questão que se evidenciava no código base, conseguindo também adicionar restrições mais realistas (*ausência de short selling*).

12Bibliografia

Staley, Kathryn F. "The Art of Short Selling"   John Wiley & Sons, Inc. 1997

Risco sistêmico, derivativos e crises financeiras, por Márcio G. P. Garcia. Depto. de Economia – PUC-RJ, 1996

SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. The Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952

SHARPE, W. F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425-442, 1964.

M. Rubinstein. Markowitz's "Portfólio Selection": A Fifty-Year Retrospective.
The Journal of Finance, 57(3):1041–1045, 2002.

"Métodos numéricos para optimização com restrições" Paulo B. Vasconselos, 2010.

Alejandro Balbás, Raquel Balbás e Silvia Mayoral, intitulado *Portfolio choice and optimal hedging with general risk functions: A simplex-like algorithm, 2009*

Gitman, Lawrence J, "Principles of Managerial Finance", 12th edition, Addison Wesley Longman (2010).

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., Heath, D. "Coherent measures of risk." Mathematical finance 9, no. 3 (1999): 203-228.

Liang, Bing, and Hyuna Park. "Risk Measures for Hedge Funds: a Cross-sectional Approach." European Financial Management 13, no. 2 (2007): 333-370.

Dowd, K., Cairns, A. J., & Blake, D. (2006). Mortality-dependent financial risk measures. Insurance: Mathematics and Economics, 38(3), 427-440.

[Web01] http://finance.yahoo.com

[Web02] http://pt.wikipedia.org

[Web03] http://faculty.washington.edu/ezivot/econ424/portfoliofunctions.pdf

Anexo 1: Stock Split "ALTRI SGPS S.A."

NOTICES

NYSE Euronext

AVISO DE EVENTO CORPORATIVO:	Stock Split
TRI SGPS S.A. LOCALIZAÇÃO:	**AL**
	Lis
bon	
Nº DE AVISO:	LIS_20110218_00226_EUR
DATA DE DISSEMINAÇÃO :	18/02/2011
MERCADO:	Euronext Lisbon

Stock split do valor das acções

A Assembleia Geral da(o(ALTRI SGPS S.A., ocorrida em 17/05/2010, deliberou proceder ao *stock split* das suas acções ordinárias através da alteração do valor nominal de 0,25 EUR para 0,125 EUR.

A quantidade admitida das acções ordinárias no Euronext Lisbon é, desta forma, aumentada de
102.565.836 para 205.131.672.

A data efectiva do split é 22/02/2011.

As ordens constantes do livro de ordens das acções ordinárias do ALTRI SGPS S.A. serão canceladas nas seguintes condições:

Cancelamento de ordens:	no final da sessão de bolsa de 21/02/2011
Data de renovação das ordens:	22/02/2011

<u>Altri, SGPS</u>

Denominação:	ALTRI SGPS		
Código ISIN:	PTALT0AE0002	Código Euronext:	PTALT0AE0002
Simbolo de Negociação:	ALTR	Código National:	ALT AE

CORPORATE EVENT NOTICE:	Split of shares
TRI SGPS S.A. LOCATION:	**AL**
	Lis
bon	
NOTICE:	LIS_20110218_00226_EUR
DATE:	18/02/2011
MARKET:	Euronext Lisbon

Split of the value of the outstanding shares

General Meeting held on 17/05/2010 of ALTRI SGPS S.A. decided to proceed to the split changing the nominal value of the ordinary shares from 0,25 EUR to 0,125 EUR.

Number of outstanding shares on Euronext Lisbon is therefore increased from 102.565.836 to

205.131.672. Effective date of the split is 22/02/2011.

The ordinary shares ALTRI SGPS S.A. order book will be purged into the following conditions:

Cancellation of orders:	21/02/2011 at the end of the trading session
Orders to be renewed date:	22/02/2011

<u>Altri, SGPS</u>

Designation:	ALTRI SGPS		
ISIN:	PTALT0AE0002	Euronext code:	PTALT0AE0002
Symbol:	ALTR	National code:	ALT AE

Anexo 2: Stock Split "JMS"

Jerónimo Martins, following the decision approved in the General Shareholders Meeting held on 30th March, informs about the split in five new shares (each with a nominal value of one euro) of each of the existing 125,858,644 shares (each with a nominal value of 5 euros).

"Interbolsa - Sociedade Gestora de Liquidação e de Sistemas Centralizados de Valores Mobiliários, S.A." (Company that manages and centralises securities transactions) will proceed with the stock split on 31st May 2007. Starting on 28th May 2007 the transactions in the Euronext Lisbon will be settled accordingly to the new nominal value.

The changes in the Company's Articles of Association were registered on 20th April at the Commercial Registry Office.

LISBON,9 MAY 2007

Cláudia Falcão

ANEXO 3: Sript em R criado ao longo do trabalho

```
# Functions:
#      1. getPortfolio
#      2. efficient.frontier
#      3. globalMin.portfolio
#      4. tangency.portfolio
#      5.  efficient.portfolio.cvar
#      6. efficient.portfolio.cvar
library(alabama)
#
var.port=function(portfolio,w){
  return (t(w) %*% portfolio$cov.mat %*% w)
}
#
Cvar=function(portfolio,w,epsilon){
  returns.observed <- as.matrix(portfolio$returns.daily) %*% w
 returns.sorted <- sort(returns.observed)
  n <- length(returns.observed)
  ne <- ceiling(n*epsilon)
  return(-1/epsilon*(1/n *sum(returns.sorted[1:(ne-1)]))+
  (epsilon-(ne-1)/n)*returns.sorted[ne])
}
#
getPortfolio <-
function(er, cov.mat, weights,retornos.observados)
{
      # contruct portfolio object
      # inputs:
      # er
      # cov.mat
```

```
# weights
# retornos.observados
#
# output is portfolio
# call
# er                    portfolio expected return
# sd                    portfolio standard deviation
 # cov.mat
 # er.vec
 # returns.daily
 # weights            N x 1 vector of portfolio weights
#
call <- match.call()

#
# check for valid inputs
#
asset.names <- names(er)
weights <- as.vector(weights)
names(weights) = names(er)
er <- as.vector(er)
if(length(er) != length(weights))
     stop("dimensions of er and weights do not match")
cov.mat <- as.matrix(cov.mat)
if(length(er) != nrow(cov.mat))
     stop("dimensions of er and cov.mat do not match")
if(any(diag(chol(cov.mat)) <= 0))
     stop("Covariance matrix not positive definite")

#
```

```
      # create portfolio
      #
      er.port <- crossprod(er,weights)
      sd.port <- sqrt(weights %*% cov.mat %*% weights)
      ans <- list("call" = call,
             "er" = as.vector(er.port),
             "sd" = as.vector(sd.port),
            "cov.mat"=cov.mat,
            "er.vec"=er,
             "returns.daily"=retornos.observados,
             "weights" = weights)
      class(ans) <- "portfolio"
      ans
}

efficient.portfolio <-
function(portfolio,target.return)
{
  # compute minimum variance portfolio subject to target return
  #
  #
  # inputs:
  # portfolio
  # target.return
  #
  # output is portfolio object with the following elements
  # portfolio
  call <- match.call()

  #
```

```
  # compute efficient portfolio
  #
  #
  risk.measure <- function (w){
    h <- rep(NA,1)
    h[1]<-      var.port(portfolio,w)
    return (h)
   }

   hin <- function(w) {
     h <- w
     return(h)
   }

   heq <- function(w) {
     h <- rep(NA, 1)
     h[1] <- sum(w)-1
     h[2] <- crossprod(portfolio$er.vec,w) - target.return
     return(h)
   }

  w=rep(1/length(portfolio$er.vec),length(portfolio$er.vec))
  portfolio$weights =
constrOptim.nl(par=w,fn=risk.measure,hin=hin,heq=heq)$par
  portfolio$er <- crossprod(portfolio$er.vec,portfolio$weights)
  portfolio$sd <- sqrt(portfolio$weights %*% portfolio$cov.mat
%*% portfolio$weights)

  portfolio
}
```

```
globalMin.portfolio <-
function( portfolio)
{
  # Compute global minimum variance portfolio
  #
  # inputs:
  # portfolio
  #
  # output is portfolio object with the following elements
  # portfolio
  call <- match.call()

  # compute global minimum portfolio
  #
  risk.measure <- function (w){
    h <- rep(NA,1)
    h[1]<-      var.port(portfolio,w)
    return (h)
   }

   hin <- function(w) {
     h <- w
```

```
    return(h)
   }

   heq <- function(w) {
     h <- rep(NA, 1)
     h[1] <- sum(w)-1
     return(h)
   }



   hin.jac <- function(w) {
     j <- diag(length(w))
     return(j)
   }

   heq.jac <- function(w) {
     j <- matrix(NA,1,length(w))
     j[1, ] <- rep(1,length(w))
     return(j)
   }



  w=rep(1/length(portfolio$er.vec),length(portfolio$er.vec))
  portfolio$weights =
constrOptim.nl(par=w,fn=risk.measure,hin=hin,heq=heq,hin.jac=hin
.jac,heq.jac=heq.jac)$par
  portfolio$er <- crossprod(portfolio$er.vec,portfolio$weights)
  portfolio$sd <- sqrt(portfolio$weights %*% portfolio$cov.mat
%*% portfolio$weights)

  portfolio
}
```

```
tangency.portfolio <-
function(portfolio,risk.free)
{
  # compute tangency portfolio
  #
  # inputs:
  # portofolio
  # risk.free

  #
  # output is portfolio object with the following elements
  # call               captures function call
  # portofolio
  call <- match.call()

  #
  # compute global minimum variance portfolio
  #
  gmin.port <- globalMin.portfolio(igual.port)
  if(gmin.port$er < risk.free)
    stop("Risk-free rate greater than avg return on global
minimum variance portfolio")

  #

  risk.measure <- function (w){
```

```
    h <- rep(NA,1)

    h[1]<-      -(crossprod(w,portfolio$er.vec)-risk.free)
/sqrt(var.port(portfolio,w))  #o rf tem k se repetir para
subtrair por todos elementos do vetor

    return (h)

   }


     hin <- function(w) {

     h <- w

     return(h)

   }


   heq <- function(w) {

     h <- rep(NA, 1)

     h[1] <- sum(w)-1

     return(h)

   }




 w=rep(1/length(portfolio$er.vec),length(portfolio$er.vec))

  portfolio$weights =
constrOptim.nl(par=w,fn=risk.measure,hin=hin,heq=heq)$par

  portfolio$er <- crossprod(portfolio$er.vec,portfolio$weights)

  portfolio$sd <- sqrt(portfolio$weights %*% portfolio$cov.mat
%*% portfolio$weights)


  portfolio

}

######################
```

```
efficient.portfolio.var <-
function(portfolio,VM)
{
  #
  #
  # inputs:
  # portfolio
  # VM    #(monetary value)
  #
  # output is portfolio object with the following elements
  # portfolio
  call <- match.call()

  #
  # compute efficient portfolio
  #
  #
  risk.measure <- function (w){
    h <- rep(NA,1)
    h[1]<-      VM * sqrt(w %*% portfolio$cov.mat %*%
w)*1.645*1^(1/2)
    return (h)
   }

   hin <- function(w) {
     h <- w
     return(h)
   }

   heq <- function(w) {
     h <- rep(NA, 1)
```

```
    h[1] <- sum(w)-1
    return(h)
   }

  w=rep(1/length(portfolio$er.vec),length(portfolio$er.vec))
  portfolio$weights =
constrOptim.nl(par=w,fn=risk.measure,hin=hin,heq=heq)$par
  portfolio$er <- crossprod(portfolio$er.vec,portfolio$weights)
  portfolio$sd <- sqrt(portfolio$weights %*% portfolio$cov.mat
%*% portfolio$weights)

  portfolio
}

####

efficient.portfolio.cvar <-
function(portfolio,epsilon)
{
  # compute minimum variance portfolio subject to target return
  #
  #
  # inputs:
  # portfolio
  # target.return
  #
  # output is portfolio object with the following elements
  # portfolio
```

```
  call <- match.call()

  #
  # compute efficient portfolio
  #
  #
  risk.measure <- function (w){
    h <- rep(NA,1)
    h[1]<-      Cvar(portfolio,w, epsilon)
    return (h)
   }

   hin <- function(w) {
     h <- w
     return(h)
   }

   heq <- function(w) {
     h <- rep(NA, 1)
     h[1] <- sum(w)-1
     return(h)
   }

  w=rep(1/length(portfolio$er.vec),length(portfolio$er.vec))
  portfolio$weights =
constrOptim.nl(par=w,fn=risk.measure,hin=hin,heq=heq)$par
  portfolio$er <- crossprod(portfolio$er.vec,portfolio$weights)
  portfolio$sd <- sqrt(portfolio$weights %*% portfolio$cov.mat
%*% portfolio$weights)
  portfolio
}
```