

Gestão de Stocks

# Gestão de Stocks

**Maria Antónia Carravilla**

**Abril 1997**

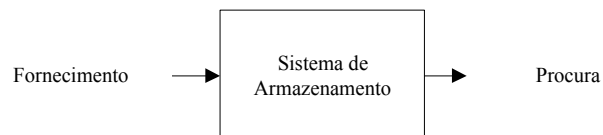
<b>1.</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>3</b>
<b>2.</b>	<b>Políticas de reaprovisionamento .....</b>	<b>5</b>
2.1	<i>Política do nível de encomenda.....</i>	5
2.2	<i>Política de revisão cíclica .....</i>	6
2.3	<i>Políticas mistas .....</i>	6
2.4	<i>Custos de operação .....</i>	7
2.4.1	Custos de encomenda .....	7
2.4.2	Custos de posse.....	7
2.4.3	Custos de ruptura .....	7
2.4.4	Custos da informação.....	8
<b>3.</b>	<b>MODELOS DETERMINÍSTICOS.....</b>	<b>9</b>
3.1	<i>Reposição instantânea; ruptura não permitida .....</i>	9
3.1.1	Pressupostos .....	9
3.1.2	Objectivos.....	10
3.1.3	Análise para um ciclo.....	10
3.1.4	Robustez da quantidade económica .....	12
3.2	<i>Reposição instantânea; ruptura permitida .....</i>	13
3.2.1	Pressupostos .....	14
3.2.2	Objectivos.....	14
3.2.3	Análise para um ciclo.....	14
3.3	<i>Reposição não instantânea, ruptura não permitida .....</i>	16
3.3.1	Pressupostos .....	17
3.3.2	Objectivos.....	17
3.3.3	Análise para um ciclo.....	17
3.4	<i>Reposição não instantânea; ruptura permitida .....</i>	19
3.4.1	Pressupostos .....	19
3.4.2	Objectivos.....	19
3.4.3	Análise para um ciclo.....	20
3.5	<i>Restrições adicionais.....</i>	21
3.5.1	Restrições de investimento.....	22
3.5.2	Outro tipo de restrições.....	23
3.5.3	Descontos de quantidade .....	24
<b>4.</b>	<b>Análise ABC .....</b>	<b>25</b>
<b>5.</b>	<b>Modelos Estocásticos.....</b>	<b>30</b>
<b>6.</b>	<b>Bibliografia.....</b>	<b>31</b>

# 1. INTRODUÇÃO

Em quase todas as empresas comerciais e na maioria das empresas industriais, de qualquer ramo de actividade, o custo dos materiais representa a maior percentagem do custo final do produto. Com a introdução de níveis superiores de automação, essa percentagem aumentará consideravelmente. Se notarmos para além disso que os stocks representam normalmente entre 20 e 50% do activo de uma empresa e que rondam 90% do capital circulante, compreende-se facilmente a importância da gestão de stocks. O objectivo que se pretende atingir com a gestão de stocks, é a redução dos stocks, atingindo, sempre que possível, o stock zero. Esse objectivo poderá ser atingido, investindo em tecnologia, layouts, reorganizando os procedimentos e diminuindo os custos associados.

A função básica de um stock é ajustar os fornecimentos à procura, por forma a que:

1. O processo de fornecimento possa funcionar quando a taxa de procura é inferior à taxa de fornecimento;
2. A procura possa ser satisfeita quando o processo de fornecimento está inactivo.



*Figura 1: Sistema de armazenamento*

As taxas de fornecimento e procura são definidas em termos de unidades do artigo por unidade de tempo.

Os problemas de gestão de stocks podem ser classificados segundo os tipos de fornecimento e de procura seguintes:

- fornecimento e procura determinísticos, com valores constantes;
- fornecimento constante e procura determinística mas variável;
- fornecimento constante, procura aleatória;
- fornecimento aleatório, procura constante;

- fornecimento e procura aleatórios.

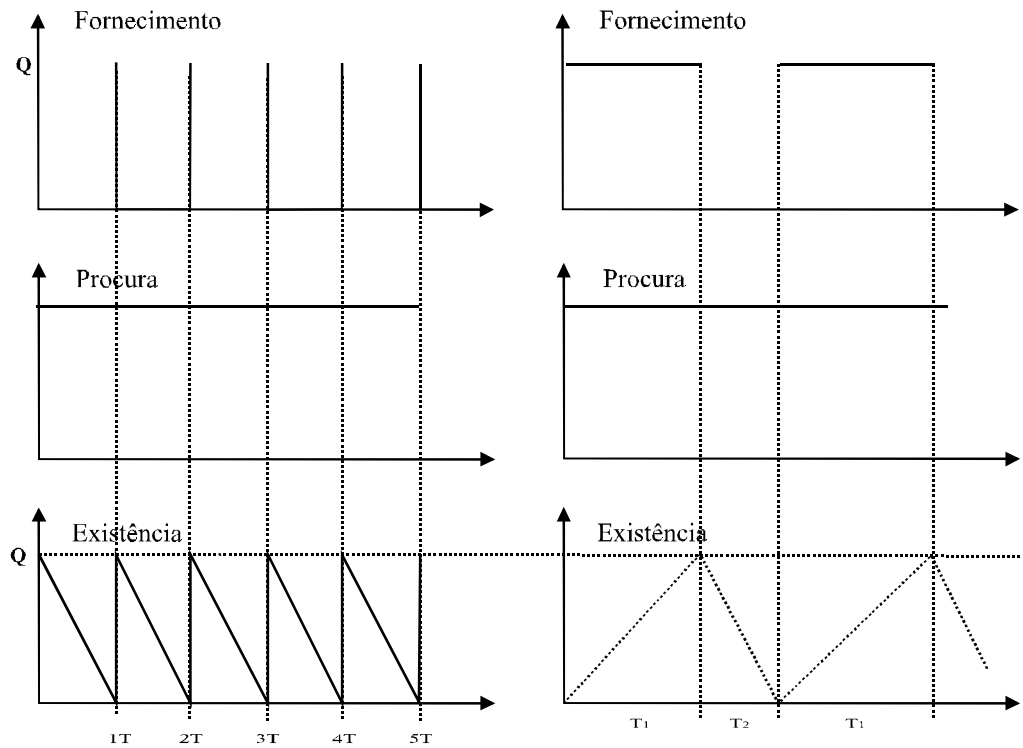


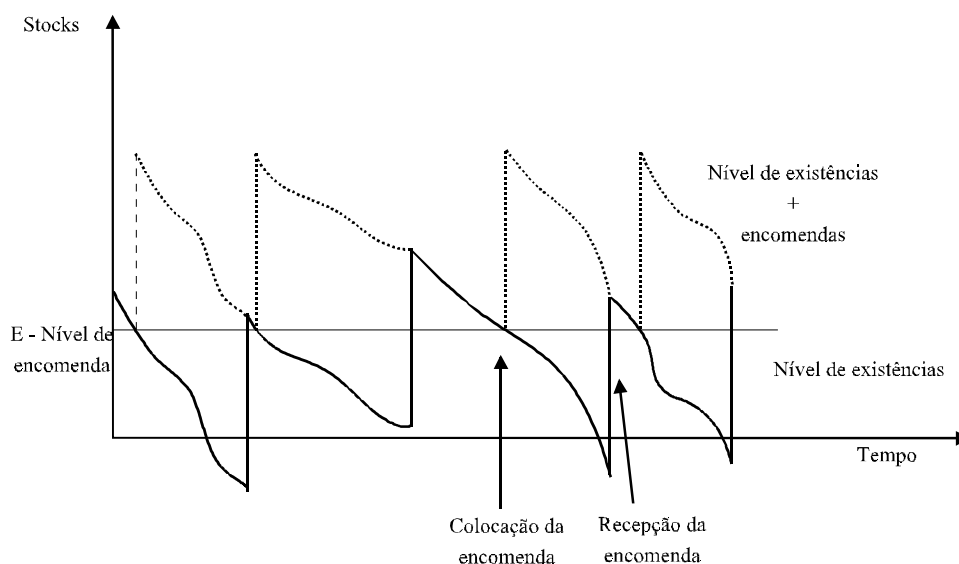
Figura 2: Duas formas possíveis de fornecimento

## 2. POLÍTICAS DE REAPROVISIONAMENTO

Quando se pretende gerir um stock, é necessário tomar decisões quanto ao momento em que se devem colocar as encomendas dos produtos e quanto à quantidade a encomendar de cada vez, e de entre as várias soluções admissíveis para o problema, escolher-se-à aquela que corresponda a um custo mínimo.

### 2.1 Política do nível de encomenda

Uma encomenda (de dimensão fixa pré determinada) é colocada sempre que o stock desce até um nível pré fixado (nível de encomenda).



*Figura 3: Gestão de Stocks - Política do nível de encomenda*

A utilização da política do nível de encomenda, implica a manutenção de um conhecimento contínuo do sistema ( para poder sempre controlar a passagem do stock abaixo do nível E). Em teoria, sempre que haja uma entrada ou saída de produtos do armazém, as existências devem ser recalculadas.

## 2.2 Política de revisão cíclica

As encomendas são colocadas a intervalos fixos de tempo (intervalo de encomenda) e a quantidade a encomendar é variável, e calculada por forma a elevar o stock até um nível máximo  $M$ .

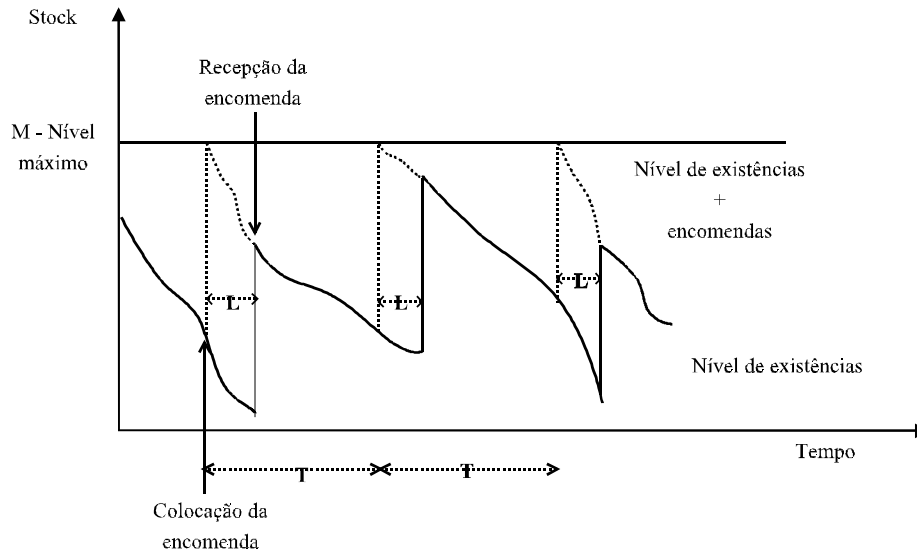


Figura 4: Gestão de Stocks - Política de revisão cíclica

Quando se utiliza a política da revisão cíclica, o stock é apenas inspeccionado a intervalos regulares de tempo, no entanto há sempre o risco de haver rupturas de stock entre os vários pontos de revisão.

## 2.3 Políticas mistas

Para evitar os problemas relacionados com as políticas de gestão de stocks apresentadas anteriormente, tais como a necessidade de manter um conhecimento contínuo do sistema, no caso da política do nível de encomenda, ou o risco de rupturas de stock, no caso da política de revisão cíclica pode-se optar por uma **política mista**, na qual se realiza uma inspeção a intervalos fixos de tempo. Se o stock desceu abaixo de  $s$  (nível mínimo) é colocada uma encomenda de dimensão variável que o eleva até ao nível  $S$  (nível máximo). Se o stock não desceu abaixo de  $s$ , não é colocada nenhuma encomenda.

## 2.4 Custos de operação

Para ser possível comparar os custos associados a cada uma das políticas de reaprovisionamento, é necessário analisar os custos envolvidos no funcionamento do sistema. Como se verá seguidamente, alguns desses custos variam com o tipo de política de reaprovisionamento adoptada.

### 2.4.1 Custos de encomenda

$$A + c_1Q$$

$c_1$  - custo unitário, que pode ser constante ou dependente da quantidade (descontos de quantidade).

$Q$  - quantidade encomendada

$A$  - custo associado ao processamento de uma encomenda, que vamos admitir ser independente da quantidade encomendada.

### 2.4.2 Custos de posse

Os custos de posse são os custos de manutenção dos artigos em armazém, e incluem custos monetários directos (seguros, impostos, renda do armazém,...), custos de funcionamento do armazém (iluminação, vigilância,...), custos de oportunidade que correspondem à maior taxa de juro que o sistema poderia obter em investimentos alternativos e custos de obsolescência que correspondem ao custo original da unidade + “lucro” que se poderia obter desde a data de compra até à data de eliminação do artigo - valor de salvado. Normalmente, como hipótese simplificativa considera-se que os custos de posse são proporcionais ao investimento em stocks, em qualquer instante no tempo.

### 2.4.3 Custos de ruptura

Neste caso podem ocorrer duas situações:

- O cliente espera a vinda dos artigos não entregues no prazo, o que pode implicar a perda de “bom nome” que é um custo difícil de quantificar. Por

## Gestão de Stocks

outro lado se os artigos forem utilizados no processo produtivo o custo associado é o custo de paragem das máquinas (e eventualmente custo de entrega atrasada de artigos a jusante no processo produtivo).

- O cliente desiste dos artigos, com custos que incluir a perda de lucros futuros por o cliente passar a abastecer-se noutros fornecedores.

### 2.4.4 Custos da informação

Os custos da informação são os custos associados à obtenção de informação para a tomada de decisões, e dependem do tipo de política de reaprovisionamento adoptada. Esses custos incluem entre outros, os custos de utilização de um sistema informático e a realização de previsões de procura



### 3. MODELOS DETERMINÍSTICOS

No caso de a procura e o fornecimento serem determinísticos, a política do nível de encomenda, e a política de revisão cíclica apresentadas na secção 2 coincidem, e fixar o intervalo entre encomendas significa fixar a quantidade a encomendar (e vice-versa)

$$Q = Td$$

$Q$  = quantidade encomendada

$T$  = intervalo de tempo entre encomendas

$d$  = procura por unidade de tempo

#### 3.1 Reposição instantânea; ruptura não permitida

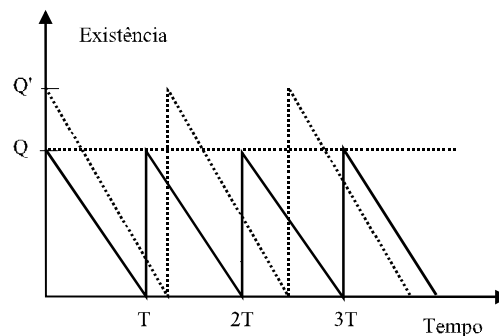


Figura 5: Reposição instantânea; ruptura não permitida

##### 3.1.1 Pressupostos

- taxa de procura  $d$  determinística e constante;
- quantidade encomendada  $Q$  é fornecida de uma forma instantânea a intervalos fixos de tempo  $T$  (ciclo de reaprovisionamento);
- não se verificam situações de ruptura do stock.

### 3.1.2 Objectivos

- determinar  $Q$  (ou  $T$ , já que  $Q = Td$ ) que minimize os custos

### 3.1.3 Análise para um ciclo

#### 3.1.3.1 Custos de encomenda:

$$A + c_1 Q$$

#### 3.1.3.2 Custo de posse = $c_2 \frac{Q}{2} T$

$c_2$  - custo de manter em stock uma unidade de artigo durante uma unidade de tempo;

$\frac{Q}{2}$  - nível médio de existências.

#### 3.1.3.3 Custo total

Custo total de armazenamento por ciclo ( $C_T$ ):

$$C_T = A + c_1 Q + c_2 \frac{Q}{2} T$$

Custo por unidade de tempo ( $K$ )

$$K = \frac{C_T}{T} = \frac{A}{T} + c_1 \frac{Q}{T} + c_2 \frac{Q}{2} \quad (\text{e atendendo a que } T = \frac{Q}{d})$$

$$\Rightarrow K = \frac{Ad}{Q} + c_1 d + c_2 \frac{Q}{2}$$

Que valor de  $Q$  minimiza o custo ?

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -\frac{Ad}{Q^2} + \frac{c_2}{2} = 0$$

Valor óptimo da quantidade a encomendar  $Q^* = \sqrt{\frac{2Ad}{c_2}}$

A fórmula para  $Q^*$  apresentada, é conhecida por **Fórmula de Wilson**, e com essa fórmula obtém-se a quantidade económica de encomenda (QEE).

Custo total mínimo por unidade de tempo (custo total para a quantidade óptima de encomenda):

$$K^* = c_1d + \sqrt{2c_2Ad}$$

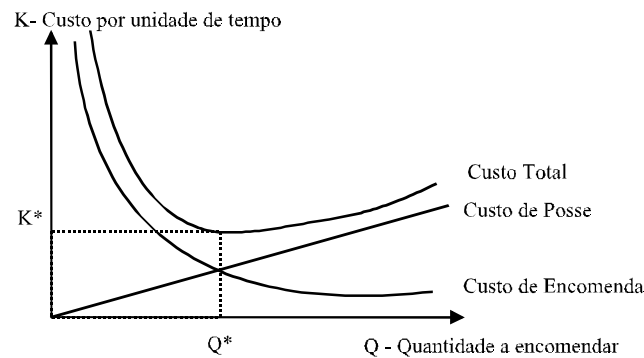


Figura 6 : Curvas dos custos dependendo da quantidade a encomendar  $Q^*$

Observações:

1. O custo associado às encomendas é uma função não linear, decrescente com a quantidade a encomendar (menos vezes se incorre na despesa fixa  $A$ );
2. A curva dos custos de posse é linear com  $Q$ ;
3. A curva dos custos totais é uma função convexa, com um mínimo associado a um balanço entre:
  - investimento em stocks;
  - despesas de colocação e processamento de encomendas;

4. Em  $Q^*$  não intervém  $c_1$  (custo unitário de aquisição do artigo), que se admitiu independente da quantidade encomendada.

### 3.1.4 Robustez da quantidade económica

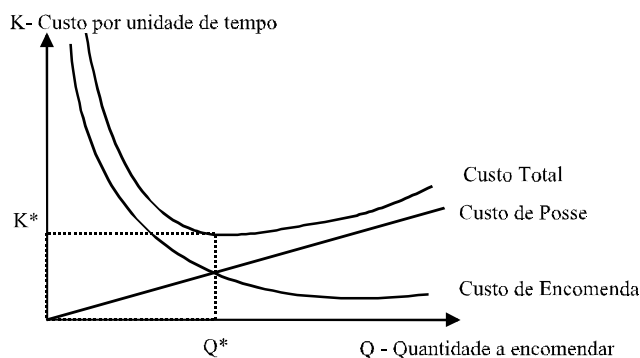


Figura 7: Robustez da Quantidade Económica

Considere-se a expressão para a quantidade económica de encomenda  $Q^*$  deduzida na secção 3.1.3.3. É de esperar que o valor para  $Q^*$  determinado corresponda a um número fraccionário que interessa arredondar ou para números inteiros ou para múltiplos de um módulo prático de aprovisionamento. A questão que se pode por nessa situação é a de qual a sensibilidade dos custos às variações em torno de  $Q^*$ . Ou melhor, será que alterando a quantidade económica para um valor mais “conveniente”, vai haver uma grande alteração nos custos?

Pode-se notar na Figura 7, que a função custo não varia muito em torno de  $Q^*$ . Sendo assim, pequenas alterações de  $Q$  em torno de  $Q^*$ , não têm grandes repercussões em termos de custos. No entanto (repare-se novamente na Figura 7) é melhor aumentar  $Q$  do que diminuir (dado que a alteração nos custos é menor).

Ignoremos a componente  $c_1d$  nos custos totais,  $K = \frac{Ad}{Q} + c_1d + c_2 \frac{Q}{2}$  e  $K^* = c_1d + \sqrt{2c_2Ad}$ , dado que é independente da política adoptada.

Sejam então  $k = \frac{K}{K^*}$  e  $q = \frac{Q}{Q^*}$ . Dado que  $Q^* = \sqrt{\frac{2Ad}{c_2}}$ , obtém-se:

$$k = \frac{K}{K^*} = \frac{\frac{Ad}{Q} + c_2 \frac{Q}{2}}{\sqrt{2c_2 Ad}} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{Ad}{2c_2}} + \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{c_2}{2Ad}} = \frac{Q^*}{2Q} + \frac{Q}{2Q^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q} + q \right)$$

$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q} + q \right) \Rightarrow q^2 - 2kq + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q_1 = k - \sqrt{k^2 - 1} \\ q_2 = k + \sqrt{k^2 - 1} \end{cases}$$

Esta equação encontra-se representada na Figura 8. Repare-se que se permitirmos um aumento do custo do valor mínimo  $K^*$  para  $kK^*$ , a quantidade a encomendar pode oscilar entre  $q_1Q^*$  e  $q_2Q^*$ .

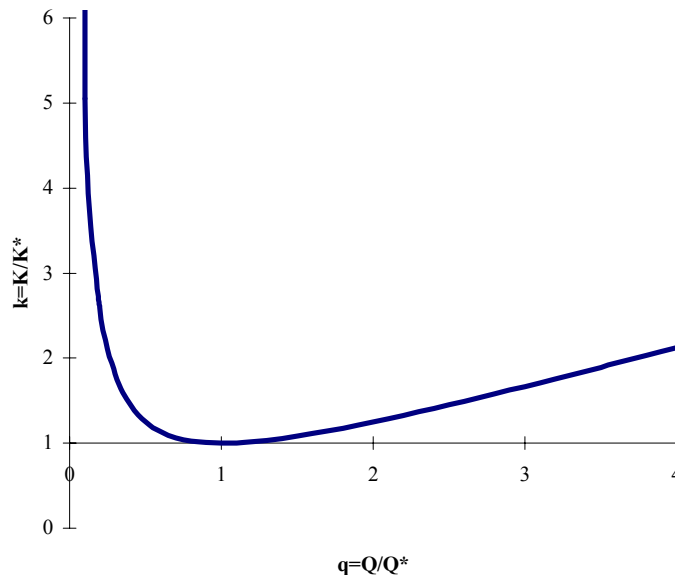


Figura 8: Sensibilidade do custo à quantidade económica

### 3.2 Reposição instantânea; ruptura permitida

Considere-se agora a situação representada na Figura 9:

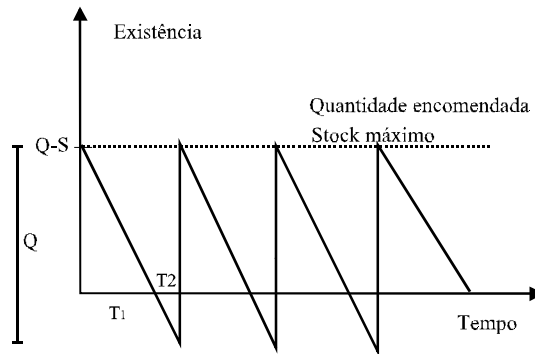


Figura 9: Reposição instantânea - ruptura permitida

### 3.2.1 Pressupostos

- taxa de procura  $d$  determinística e constante;
- quantidade encomendada  $Q$  é fornecida de uma forma instantânea a intervalos fixos de tempo  $T = T_1 + T_2$  (ciclo de reaprovisionamento).

### 3.2.2 Objectivos

- determinar  $Q$  e  $S$  que minimizem os custos.

### 3.2.3 Análise para um ciclo

#### 3.2.3.1 Custo de encomenda = $A + c_1Q$

#### 3.2.3.2 Custo de posse (incidente apenas sobre níveis de existência positivos)

$$= c_2 \frac{Q-S}{2} T_1$$

$c_2$  - custo de manter em stock uma unidade de artigo durante uma unidade de tempo;

$\frac{Q-S}{2}$  - nível médio de existências;

$T_1$  - período com nível de existências positivo.

### 3.2.3.3 Custos de ruptura = $c_3 \frac{S}{2} T_2$

Admite-se que os custos de ruptura são proporcionais ao número de unidades em falta e ao tempo de penúria.

$c_3$  - custo por unidade em falta e por unidade de tempo;

$\frac{S}{2}$  - nível médio de unidades em falta;

$T_2$  - período com nível de existências negativo.

### 3.2.3.4 Custo total

Custo total de armazenamento por ciclo ( $C_T$ ):

$$C_T = A + c_1 Q + c_2 \frac{Q-S}{2} T_1 + c_3 \frac{S}{2} T_2$$

Da Figura 9, retira-se que  $T_1 = \frac{Q-S}{d}$  e que  $T_2 = \frac{S}{d}$ . Substituindo esses valores na equação para  $C_T$ , obtém-se:

$$C_T = A + c_1 Q + c_2 \frac{(Q-S)^2}{2d} + c_3 \frac{S^2}{2d}$$

O custo total por unidade de tempo é dado por:

$$K = \frac{C_T}{T} = \frac{A}{T} + c_1 \frac{Q}{T} + \frac{c_2}{2d} \frac{(Q-S)^2}{T} + \frac{c_3}{2d} \frac{S^2}{T} \quad (\text{e atendendo a que } T = \frac{Q}{d})$$

$$K(Q, S) = \frac{Ad}{Q} + c_1 d + \frac{c_2}{2} \frac{(Q-S)^2}{Q} + \frac{c_3}{2} \frac{S^2}{Q}$$

Existem neste caso duas variáveis de decisão,  $Q$  e  $S$ . Para obter o valor mínimo para  $K$ , ( $K^*$ ) calculam-se os valores de  $Q^*$  e de  $S^*$  que são solução do sistema de equações (para  $c_3 \neq 0$ ):

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial S} = 0 \end{cases}$$

obtendo-se:  $Q^* = \sqrt{\frac{2Ad}{c_2}} \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$  e  $S^* = \sqrt{2Adc_2} \frac{1}{\sqrt{c_3(c_2 + c_3)}}$ .

Note-se que  $\lim_{c_3 \rightarrow \infty} S^* = 0$  e que  $\lim_{c_3 \rightarrow \infty} Q^* = \sqrt{\frac{2Ad}{c_2}}$  (caso de ruptura não permitida).

Substituindo os valores obtidos para  $Q^*$  e  $S^*$  na equação de  $K$ , o custo total mínimo ( $K^*$ ) será:

$$K^* = c_1d + \sqrt{\frac{2Adc_2c_3}{c_2 + c_3}}$$

### 3.3 Reposição não instantânea, ruptura não permitida

Enquanto que nos casos apresentados anteriormente, a reposição do stock era instantânea, neste caso considera-se que existe um período durante o qual a encomenda é entregue (ver Figura 10). Esta situação ocorre por exemplo, quando o stock é alimentado por produção própria da empresa, e a taxa de fornecimento considera-se que corresponde à taxa de produção.



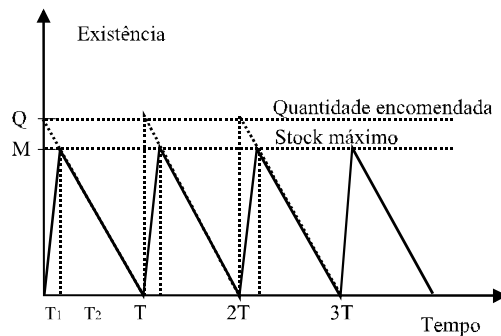


Figura 10: Reposição não instantânea; ruptura não permitida

### 3.3.1 Pressupostos

- taxa de procura  $d$  determinística e constante;
- taxa de fornecimento (ou de produção)  $p$  constante nos períodos de fornecimento;
- não se verificam situações de ruptura do stock.

### 3.3.2 Objectivos

- determinar  $Q$  (ou  $T$ , já que  $Q = Td$ ) que minimize os custos

### 3.3.3 Análise para um ciclo

#### 3.3.3.1 Observações:

- $T_1 = \frac{Q}{p}$  é o período em que há produção

$$M = Q - dT_1 = Q\left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

- $T_2 = \frac{M}{d}$  é o período em que há apenas consumo:

$$T_2 = \frac{M}{d} = \frac{Q}{d} \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

3.3.3.2 Custo de encomenda =  $A + c_1 Q$

3.3.3.3 Custo de posse por ciclo =  $c_2 \frac{M}{2} T$

$c_2$  - custo de manter em stock uma unidade de artigo durante uma unidade de tempo;

$\frac{M}{2}$  - nível médio de existências.

3.3.3.4 Custo total

Custo total de armazenamento por ciclo ( $C_T$ ):

$$C_T = A + c_1 Q + c_2 \frac{M}{2} T = A + c_1 Q + c_2 \frac{TQ}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

Custo por unidade tempo  $K$  (e atendendo a que  $T = \frac{Q}{d}$ )

$$K = \frac{C_T}{T} = \frac{A}{T} + c_1 \frac{Q}{T} + c_2 \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right) = \frac{Ad}{Q} + c_1 d + c_2 \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

Quantidade económica de produção ( $Q^*$ ), obtida por resolução da equação  $\frac{\partial K}{\partial Q} = 0$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ad}{c_2}} \sqrt{\frac{p}{p-d}}$$

Note-se que  $\lim_{p \rightarrow \infty} Q^* = \sqrt{\frac{2Ad}{c_2}}$ , que corresponde à fórmula de Wilson obtida para o caso

em que a reposição é instantânea.

O custo total mínimo por unidade de tempo será então:

$$K^* = c_1 d + \sqrt{2c_2 A d} \sqrt{\frac{p-d}{p}}$$

Note-se também que  $\lim_{p \rightarrow \infty} K^* = c_1 d + \sqrt{2c_2 A d}$ , expressão obtida para o caso em que a reposição é instantânea.

### 3.4 Reposição não instantânea; ruptura permitida

Considera-se também neste caso (ver Figura 11) que existe um período durante o qual a encomenda é entregue (stock é alimentado por produção própria da empresa), e a taxa de fornecimento considera-se que corresponde à taxa de produção.

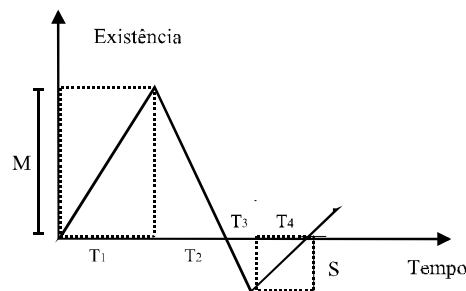


Figura 11: Reposição não instantânea - ruptura permitida

#### 3.4.1 Pressupostos

- taxa de procura  $d$  determinística e constante;
- taxa de fornecimento (ou de produção)  $p$  constante nos períodos de fornecimento.

#### 3.4.2 Objectivos

- determinar  $Q$  e  $S$  que minimizem os custos

### 3.4.3 Análise para um ciclo

#### 3.4.3.1 Observações:

- $M = T_1(p - d) = T_2d$

- $S = T_4(p - d) = T_3d$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} = \frac{d}{p - d}$$

- $Q = Td = (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)d = \frac{pd}{p - d}(T_2 + T_3)$

#### 3.4.3.2 Custo de encomenda = $A + c_1Q$

#### 3.4.3.3 Custo de posse (incidente apenas sobre níveis de existência positivos)

$$= c_2 \frac{M}{2}(T_1 + T_2)$$

$c_2$  - custo de manter em stock uma unidade de artigo durante uma unidade de tempo;

$\frac{M}{2}$  - nível médio de unidades em armazém;

$T_1 + T_2$  - período com nível de existências positivo

#### 3.4.3.4 Custos de ruptura = $c_3 \frac{S}{2}(T_3 + T_4)$

Admite-se que os custos de ruptura são proporcionais ao número de unidades em falta e ao tempo de penúria.

$c_3$  - custo por unidade em falta e por unidade de tempo;

$\frac{S}{2}$  - nível médio de unidades em falta;

$T_3 + T_4$  - período com nível de existências negativo.

### 3.4.3.5 Custo total

Custo total de armazenamento por ciclo ( $C_T$ ):

$$C_T = A + c_1 Q + c_2 \frac{M}{2} (T_1 + T_2) + c_3 \frac{S}{2} (T_3 + T_4)$$

Tratando as equações do mesmo modo que nos casos anteriores, obtêm-se as seguintes expressões para  $Q^*$ ,  $S^*$ ,  $T_2^*$ ,  $T_3^*$  e  $K^*$ :

$$S^* = \sqrt{2Ad \frac{c_2}{(c_2 + c_3)c_3} \frac{p-d}{p}} \quad Q^* = \sqrt{2Ad \frac{c_2 + c_3}{c_2 c_3} \frac{p}{p-d}}$$

$$T_2^* = \sqrt{\frac{2A}{d} \frac{c_3}{(c_2 + c_3)c_2} \frac{p-d}{p}} \quad T_3^* = \sqrt{\frac{2A}{d} \frac{c_2}{(c_2 + c_3)c_3} \frac{p-d}{p}}$$

$$K^* = \sqrt{2Ad \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3} \frac{p-d}{p}} + dc_1$$

## 3.5 Restrições adicionais

Na determinação da quantidade económica, admitiu-se que não havia limitações de qualquer tipo, tais como no capital a investir, no espaço de armazenagem, etc. No entanto, nas situações reais, tais limitações existem sempre, especialmente quando se gerem stocks de milhares de artigos. Nesse caso é necessário ser capaz de fazer uma repartição dos recursos escassos pelos vários produtos em stock.

### 3.5.1 Restrições de investimento

Estas restrições têm que ser introduzidas sempre que existe um limite máximo para o investimento admissível.

Considere-se então que a empresa pode investir no máximo um capital  $D$ , que pretende adquirir vários produtos ( $j = 1, \dots, m$ ) e que se trata da situação de reposição instantânea e ruptura não permitida. Nesse caso, o stock óptimo para cada produto é:

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2A_j d_j}{c_{2j}}}$$

o gasto total com a encomenda, não pode exceder  $D$ ,

$$\sum_{j=1}^m (c_{1j} Q_j + A_j) \leq D$$

e pretende-se minimizar o custo por unidade de tempo:

$$K = \sum_{j=1}^m \left( \frac{A_j d_j}{Q_j} + c_{1j} d_j + c_{2j} \frac{Q_j}{2} \right)$$

Usando um multiplicador de Lagrange  $\Theta \geq 0$ , pode-se escrever:

$$\min. J = \sum_{j=1}^m \left( \frac{A_j d_j}{Q_j} + c_{1j} d_j + c_{2j} \frac{Q_j}{2} \right) + \Theta \left( \sum_{j=1}^m (c_{1j} Q_j + A_j) - D \right)$$

$J$  terá um mínimo para valores de  $Q_j$  que verifiquem simultaneamente as  $m+1$  equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall_j \frac{\partial J}{\partial Q_j} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \Theta} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall_j Q_j = \sqrt{\frac{2d_j A_j}{c_{2j} + 2\Theta^* c_{1j}}} \\ \sum_{j=1}^m (c_{1j} Q_j + A_j) = D \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall_j Q_j = \sqrt{\frac{2d_j A_j}{c_{2j} + 2\Theta^* c_{1j}}} \\ \sum_{j=1}^m \left( c_{1j} \sqrt{\frac{2d_j A_j}{c_{2j} + 2\Theta^* c_{1j}}} + A_j \right) = D \end{array} \right.$$

Assim, calcula-se  $\Theta^*$  a partir da equação de baixo, e substitui-se nas  $m$  equações de cima, obtendo-se os valores para  $Q_j^*$ .

Substituindo os valores de  $Q_j^*$  na equação  $K^* = \sum_{j=1}^m \left( \frac{A_j d_j}{Q_j^*} + c_{1j} d_j + c_{2j} \frac{Q_j^*}{2} \right)$  obtém-se o custo por unidade de tempo da solução obtida.

Repare-se que o valor  $\Theta^*$  é o decréscimo marginal de  $K$  quando se relaxa  $D$  de uma unidade, ou de outro modo,  $\Theta^*$  indica quanto reduz o custo variável global  $K$  se se investir  $D+1$  em vez de  $D$ .

### 3.5.2 Outro tipo de restrições

Se ocorrerem outros tipos de restrições, tais como limitações no espaço disponível para armazenamento ou limitações no número máximo admissível de encomendas, é sempre necessário acrescentar essas restrições tal como no caso, tratado na secção 3.5.1, de limitações de investimento.

O problema será sempre:

$$\min \sum_{j=1}^m \left( \frac{A_j d_j}{Q_j} + c_{1j} d_j + c_{2j} \frac{Q_j}{2} \right)$$

*sujeito à restrição*

No caso em que há limitações no espaço de armazenamento, a restrição a acrescentar será do tipo:

$$\sum_{j=1}^m f_j Q_j \leq f$$

considerando-se que o produto tipo  $j$  ocupa  $f_j$  unidades de capacidade, e que a capacidade total de armazenamento é  $f$ .

No caso em que há limitações ao número de encomendas a colocar, a restrição a acrescentar será do tipo:

$$\sum_{j=1}^m \frac{d_j}{Q_j} \leq N$$

onde  $N$  é o número máximo de encomendas a colocar.

Em ambos os casos, a solução poderá ser obtida utilizando multiplicadores de Lagrange, tal como em 3.5.1.

### 3.5.3 Descontos de quantidade

Os fornecedores e fabricantes oferecem frequentemente descontos aos seus clientes, por diversas razões:

- Para reduzirem stocks acumulados;
- Para aumentarem o volume de produção (vendas);
- Para reduzirem o seu próprio stock que se poderá tornar obsoleto.

Quando  $Q^*$  é maior que a quantidade necessária para receber desconto, esta questão não se coloca. No caso de  $Q^*$  ser menor que a quantidade necessária para receber desconto, é necessário verificar se vale ou não a pena aumentar a quantidade a encomendar para beneficiar de um desconto.



## 4. ANÁLISE ABC

A utilização dos modelos apresentados até ao momento nos processos de decisão, exige estimativas bastante rigorosas de todos os custos envolvidos, assim como o conhecimento da procura e dos prazos de entrega dos fornecedores. A manutenção dessa informação para todos os artigos em stock teria um custo muito elevado e, para alguns dos artigos em stock, a economia conseguida não compensaria esses gastos. Como se viu na secção anterior, os custos  $K$  são função crescente de  $c_i d_i$ , a que se chama valor anual de uso  $U_i = c_i d_i$ , onde:

$c_i$  - custo unitário do artigo

$d_i$  - taxa de procura anual

A análise ABC consiste na classificação dos artigos em stock segundo  $U_i$ . Essa classificação permite dividir os produtos em três classes e os stocks desses produtos serão tanto mais controlados, quanto maior for o seu valor de uso.

Procedimento a seguir para realizar uma análise ABC:

1. Criar uma tabela com a taxa de procura anual de cada artigo, e o seu custo por unidade;

Código do artigo	Taxa de procura anual	custo/unidade (milhares \$)
Q10	10 000	13
R20	5 000	5
S30	2 000	6
T40	1 000	18
U50	100	55
V60	5 000	8
W70	2 000	2
X80	200	12
Y90	25 000	10

2. Calcular o valor de uso ( $U_i$ ) para cada artigo;

Código do artigo	Taxa de procura anual	custo/unidade (milhares \$)	Valor de uso
Q10	10 000	13	130 000
R20	5 000	5	25 000
S30	2 000	6	12 000
T40	1 000	18	18 000
U50	100	55	5 500
V60	5 000	8	40 000
W70	2 000	2	4 000
X80	200	12	2 400
Y90	25 000	10	250 000

3. Ordenar os artigos por ordem decrescente de valor de uso ( $U_i$ );

Código do artigo	Taxa de procura anual	custo/unidade (milhares \$)	Valor de uso
Y90	25 000	10	250 000
Q10	10 000	13	130 000
V60	5 000	8	40 000
R20	5 000	5	25 000
T40	1 000	18	18 000
S30	2 000	6	12 000
U50	100	55	5 500
W70	2 000	2	4 000
X80	200	12	2 400

4. Calcular a percentagem do número de ordem no número total de artigos;

Código do artigo	Número de ordem	% Total	Valor de uso
Y90	1	11.1	250 000
Q10	2	22.2	130 000
V60	3	33.3	40 000
R20	4	44.4	25 000
T40	5	55.5	18 000
S30	6	66.6	12 000
U50	7	77.7	5 500
W70	8	88.8	4 000
X80	9	100	2 400

- Calcular o acumulado dos  $U_i$  para cada artigo;
- Calcular a percentagem do acumulado no valor do uso total para o conjunto de artigos.

Número de ordem	% Total	Valor de uso	Acumulado	% Total
1	11.11	250 000	250 000	51.345
2	22.22	130 000	380 000	78.045
3	33.33	40 000	420 000	86.260
4	44.44	25 000	445 000	91.394
5	55.55	18 000	463 000	95.091
6	66.66	12 000	475 000	97.556
7	77.77	5 500	480 500	98.686
8	88.88	4 000	484 500	99.507
9	100	2 400	486 900	100.000

Observe-se que:

## Gestão de Stocks

1. Apenas 20% dos artigos são responsáveis por 80% da totalidade dos valores de uso;
2. Metade dos artigos representa 7% do valor total de uso.

### Configuração Típica:

- 15-25 % dos artigos correspondem a 75-85 % do valor de uso;
- 40-45 % dos artigos correspondem a 5-10 % do valor de uso.

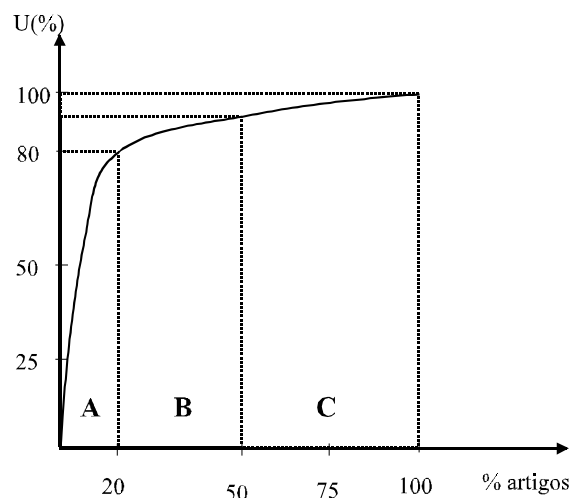


Figura 12: Curva ABC

Deve-se controlar cuidadosamente o stock dos artigos da zona A, dado que correspondem a uma pequena percentagem dos artigos (<20%) e a uma grande percentagem do valor de uso (80%).

O controlo do stock dos artigos passa por:

1. Determinação dos parâmetros de gestão;
2. Controlo das existências;
3. Acompanhamento das encomendas;
4. Exploração das vantagens dos fornecedores.

A gestão dos artigos da zona C pode ser feita de modo grosseiro, dado que esses artigos têm uma pequena incidência sobre os custos.

Regras práticas para a gestão dos stocks para cada uma das zonas representadas no gráfico:

#### Artigos da **classe A**

Estes artigos devem ser controlados frequentemente, de forma a manter existências baixas e a evitar rupturas. Assim, os custos e consumos devem ser revistos à data de encomenda, para calcular cuidadosamente quantidades e datas de reaprovisionamento.

#### Artigos da **classe B**

Os artigos da classe B podem ser controlados de forma mais automatizada, e os dados e parâmetros devem ser revistos 3 ou 4 vezes ao ano.

#### Artigos da **classe C**

Quantidades a encomendar devem cobrir 6/12 meses, podendo-se fazer um registo simples das entradas em armazém, sem inventário permanente. Os níveis de stock de segurança podem ser altos por forma a minimizar os inconvenientes de eventuais rupturas.

#### Observações:

1. Esta análise é obtida directamente a partir da leitura do ficheiro mestre de artigos;
2. As classes **A**, **B** e **C** são definidas através de percentagens previamente fixadas;
  - para o número de artigos-20% e 50%;
  - ou para o valor de uso-80% e 90%.
3. A classe **A** termina no ponto da curva de maior raio de curvatura.

A análise **ABC** pode aplicar-se a outros fenómenos económicos, sociais ou políticos, em que se verifica o mesmo princípio: uma minoria de entidades de um grupo é responsável pela maior parte dos efeitos.

## 5. MODELOS ESTOCÁSTICOS

Partimos até agora sempre do princípio que conhecíamos muito bem quando e quanto é que os clientes compravam, e quando e quanto é que os fornecedores entregavam, mas numa situação real, nem a procura nem o fornecimento são conhecidos com certeza. É assim importante considerar situações nas quais a aleatoriedade das variáveis afecta o comportamento do sistema.

É necessário entrar em linha de conta com:

1. Flutuações aleatórias da procura;
2. Flutuações aleatórias do tempo de entrega das encomendas (tempo que decorre entre a colocação da encomenda para abastecimento do stock e a entrada do material em armazém, pronto a ser consumido).

É nesses casos que é necessário criar stocks de segurança, que servem para proteger o sistema contra tempos de entrega ou procuras superiores ao normal.

Uma ruptura de stock apresenta normalmente as seguintes consequências:

- Perda de venda ou paragem de fabricação (custos possíveis de calcular);
- Perda de imagem junto do mercado (custos bastante difíceis de calcular).

A existência de um stock de segurança, implica um aumento do custo de posse. Esse custo adicional pode, no entanto, ser compensado pela economia gerada pela não ocorrência de rupturas.

Teremos então em cada caso, que encontrar um valor justo para o stock de segurança, valor esse que será resultante de uma análise de compromisso.

## 6. BIBLIOGRAFIA

Vasconcelos, Bernardo Calafate (1986). Gestão de Stocks - 2. Modelos Determinísticos.

Oliveira, Rui Carvalho. Introdução aos modelos de gestão de stocks.