Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Provas de Avaliação de Investigação Operacional

(Enunciados e Resoluções: 1998/1999 a 2001/2002)

António Miguel Gomes
João Claro
José Fernando Oliveira
José Soeiro Ferreira
Maria Antónia Carravilla

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

1ª chamada

1999.01.08

Duração: 2 horas e 30 minutos — Com Consulta

José Fernando Oliveira Maria Antónia Carravilla

$\boxed{1}$ — **(a)** Feimiro, o grande empresário português, pretende abrir uma nova catedral do consumo nos arredores do Porto. Depois de concluídos os estudos prévios, Feimiro e os seus colaboradores mais chegados optaram por uma localização inovadora, diferente e muito marítima para o novo "shopping": o mar, em frente ao Castelo do Queijo.

Depois de tomada essa decisão e dados os custos acrescidos da solução a adoptar, era necessário fazer um estudo de viabilidade do projecto. Para tal foi nomeada uma gestora de topo pertencente aos quadros da "holding" de Feimiro, a Drª Maria Rios. Antes de dar início ao projecto, a Drª Maria Rios começou por fazer uma especificação mais detalhada do estudo de viabilidade, e considerou que este teria uma duração de 12 meses, divididos em 2 fases sequenciais de 6 meses. Relativamente aos recursos humanos necessários para realizar o estudo de viabilidade, a Drª Maria Rios considerou a necessidade de Engenheiros, Arquitectos e Sociólogos. As necessidades destes profissionais em cada uma das fases do estudo são apresentadas na tabela seguinte:

	Fase 1	Fase 2
Engenheiros	5	7
Arquitectos	10	5
Sociólogos	2	3

Esses profissionais podem ser recrutados na "holding" de Feimiro ou então podem ser contratados no mercado. Para além de engenheiros, arquitectos e sociólogos, existem, tanto na "holding" de Feimiro como no mercado, pessoas que acumulam o curso de engenharia com o curso de arquitectura. Na tabela seguinte apresentam-se os custos por fase para cada tipo de profissional, no caso de ser recrutado na "holding" ou contratado no mercado, e o número de cada um desses profissionais disponíveis dentro e fora da "holding".

Tipo	Engª	Arqª	Socª	"Holding" quant	"Holding" custo por fase	Não "holding" quant	Não "holding" custo por fase
Tipo 1	x			5	2000	∞	1000
Tipo 2		x		2	2000	∞	1000
Tipo 3			x	1	2000	∞	1000
Tipo 4	x	x		3	3000	∞	4000

A Drª Maria Rios foi também informada que é necessário ter na equipa, em cada fase, pelo menos 5 elementos da "holding", e também que, por cada 2 elementos da "holding" na equipa em cada fase é necessário contratar pelo menos 1 elemento fora da "holding".

Ajude a Drª Maria Rios, construindo o modelo do problema que lhe permita obter o conjunto de equipas que corresponda ao menor custo em recursos humanos para o projecto.

(b) Se lhe sobrar tempo no fim do teste!!

Dada a sua grande experiência de gestão de recursos humanos a Drª Maria Rios sabe que vai ter que manter um certo número de elementos da equipa entre duas fases sucessivas, mas por outro lado, sabe que convém sempre, essencialmente nestes projectos para os quais se tem que contar com grande capacidade inovadora, ter elementos novos na equipa. Esses factos levaram a que definisse que, entre duas fases seguidas, se mantivesse um número mínimo e um número máximo de cada um dos tipos de profissionais, tal como se representa na tabela seguinte:

	Nº mínimo a manter entre fases	Nº máximo a manter entre fases
Engenheiros	2	4
Arquitectos	3	5
Sociólogos	2	3

A Drª Maria Rios fixou também um número mínimo (8) e um número máximo (11) de pessoas a manter na equipa entre duas fases seguidas.

Os custos de novos contratos e de alteração de contratos estão indicados na tabela seguinte, tanto para elementos dentro como fora da "holding".

	"Holding"	Não "holding"
Contrato novo	1.000.000\$00	1.500.000\$00
Alteração de contrato	500.000\$00	700.000\$00

i) Como devem ser as novas variáveis de decisão nesta situação?

ii) Construa o novo modelo de programação linear.

2 — A inauguração do ShopShopping terá que ser um acontecimento mediático impar na história dos centros comerciais, estando já a ser planeada ao pormenor.

Particularmente importante para chamar público à inauguração é a distribuição de brindes. Estão previstos três tipos de brindes: telemóveis (da rede PESSIMUS, propriedade do empresário Feimiro), consolas CEGA e senhas de compras na rede de hipermercados OCEANUS.

Por questões de estratégia de Marketing impõe-se que:

- o número de senhas de compras seja maior ou igual à soma do número de telemóveis com as consolas;
- o número total de brindes seja pelo menos 10 milhares;
- o número de telemóveis seja pelo menos 3 milhares.

Conhecidos os custos de cada brinde (10, 8 e 5 por milhar de unidades, respectivamente) determine quantos brindes se devem encomendar de cada tipo.

(a) Formule este problema como Programação Linear e resolva-o pelo método simplex. Indique a sequência de bases admissíveis percorridas durante a resolução.

(b) Existe outra solução com valor de função objectivo igual ao da solução óptima? Justifique.

3 — O ShopShopping é já um sucesso mesmo antes da sua construção. Os pedidos à administração do centro comercial para abertura de lojas enchem a mesa de trabalho do responsável pela área Lojas. As lojas do ShopShopping vão-se agrupar por sectores, tendo o número de lojas a abrir por sector sido já fixado, num total de 31 lojas, a partir dos estudos de mercado realizados aquando do estudo de viabilidade do centro comercial. Terminado o prazo para entrega de candidaturas às lojas deram entrada 41 processos, conforme a tabela seguinte:

Sector	Candidaturas	Lojas a abrir
Restauração	15	10
Casa	2	3
Vestuário	17	10
Electrónica de consumo e comunicações	7	8

É possível negociar com os responsáveis pelas candidaturas de modo a transferirem o seu pedido para outro sector onde haja menos procura. No entanto este processo negocial caracteriza-se por algumas cedências por parte da administração do ShopShopping, nomeadamente descontos no custo das lojas e no condomínio das mesmas. Estes descontos estão representados na tabela seguinte (em percentagem):

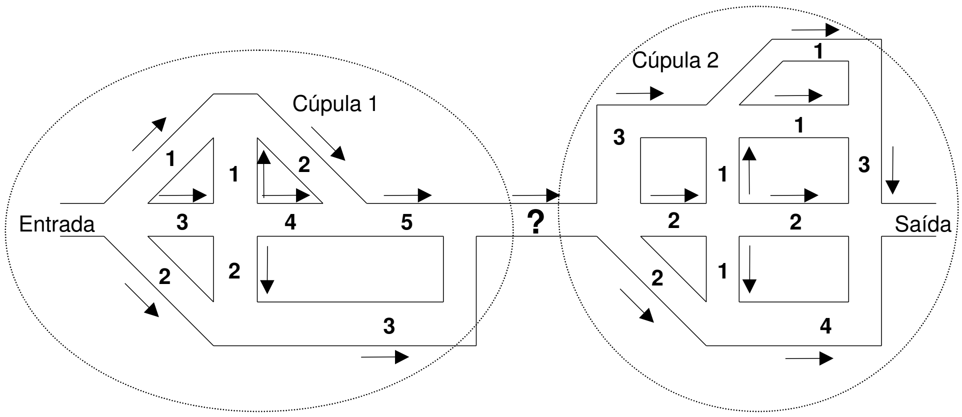
	Rest	Casa	Vest	ECC
Rest	0	20	10	20
Casa	5	0	0	0
Vest	20	10	0	30
ECC	20	5	15	0

Que transferências se sectores deve a administração do ShopShopping negociar de modo a minimizar o total de descontos a fazer aos promotores das lojas.

(a) Formule este problema como um problema de transportes.

(b) Determine uma solução inicial e faça uma iteração pelo respectivo algoritmo de transportes.

$\boxed{4}$ — Uma parte do ShopShopping vai ser construída imitando uma plataforma de exploração subaquática: duas grandes cúpulas ligadas por um grande corredor. Para que a circulação de pessoas no centro comercial decorra de uma forma fluida, é necessário que este corredor não restrinja o fluxo máximo que pode atravessar a secção subaquática do centro comercial. Na figura seguinte representa-se esquematicamente a planta desta parte do ShopShopping.



Em cada corredor está indicada a capacidade (em dezenas de pessoas por minuto) de circulação nesse corredor. O corredor de ligação entre as duas cúpulas está ainda por dimensionar, dado o seu elevado custo, crescente com o aumento de capacidade que se lhe queira atribuir. Note que por questões de segurança e fluidez de circulação os corredores funcionam como caminhos de sentido único (ver setas na figura).

Resolvendo este problema como de fluxo máximo indique qual deve ser a capacidade do corredor de ligação de forma a que o fluxo que atravessa as cúpulas seja máximo e o custo do corredor de ligação o menor possível.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

1ª chamada

99/01/08

Resolução

$\boxed{1}$ — **(a)**

- Índices

  fase – $f \in \{1, 2\}$

  tipo – $t \in \{1, 2, 3, 4\}$

  profissão – $p \in \{E, A, S\}$

  vínculo – $v \in \{H, \overline{H}\}$ (pertencentes ou não à "holding")

- Dados

  $\mathbf{Quant_{fp}}$ – quantidade de pessoas com profissão p a contratar na fase f.

  Tabela que relaciona tipos t com profissões p.

  $\mathbf{QuantVinc_{tv}}$ – quantidade de pessoas existentes com tipo t e vínculo v.

  $\mathbf{c_{tv}}$ – custo por fase de uma pessoa com tipo t e vínculo v.

- Variáveis de decisão

  $\mathbf{x_{ftpv}}$ número de pessoas com tipo t, profissão p e vínculo v que são contratados na fase f.

- Função Objectivo

  Pretendem-se minimizar os custos totais com as contratações.

$$\min \quad \sum_{f,t,p,v} \mathbf{c_{tv}} x_{ftpv} \tag{1}$$

- Restrições

$$\begin{aligned}
\forall_{f,v}\ \forall_{p\in\{A,S\}} \quad & x_{f1pv} = 0 & (2)\\
\forall_{f,v}\ \forall_{p\in\{E,S\}} \quad & x_{f2pv} = 0 & (3)\\
\forall_{f,v}\ \forall_{p\in\{E,A\}} \quad & x_{f3pv} = 0 & (4)\\
\forall_{f,v}\ \forall_{p\in\{S\}} \quad & x_{f4pv} = 0 & (5)\\
\forall_{f,p} \quad & \textstyle\sum_{t,v} x_{ftpv} \geq \mathbf{Quant_{fp}} & (6)\\
\forall_{t,v,f} \quad & \textstyle\sum_{p} x_{ftpv} \leq \mathbf{QuantVinc_{tv}} & (7)\\
\forall_{f} \quad & \textstyle\sum_{t,p} x_{ftpH} \geq 5 & (8)\\
\forall_{f} \quad & \frac{\sum_{t,p} x_{ftpH}}{2} \leq \frac{\sum_{t,p} x_{ftp\overline{H}}}{1} & (9)\\
\forall_{f,t,p,v} \quad & x_{ftpv} \geq 0 \text{ e inteiros.} & (10)
\end{aligned}$$

As restrições (2) a (5) representam a tabela que relaciona tipos t com profissões p. As restrições (6) garantem que é contratado na fase f o número de pessoas necessário com profissão p. As restrições (7) garantem que não se contratam mais pessoas de um determinado tipo t e vínculo v do que as que existem. As restrições (8) garantem que não se contratam menos de 5 pessoas da "holding" em cada fase f. As restrições (9) garantem que por cada 2 elementos da "holding" na equipa em cada fase é necessário contratar pelo menos 1 elemento exterior à "holding". As restrições (10) garantem que as variávies de decisão terão sempre valores maiores ou iguais a zero e inteiros.

Concretizando um pouco mais:

- Função Objectivo

$$\min \quad \sum_{f=1}^{2} \left\{ \sum_{t=1}^{3} \left\{ 2000 \times \sum_p x_{ftpH} + 1000 \times \sum_p x_{ftp\overline{H}} \right\} + 3000 \times \sum_p x_{f4pH} + 4000 \times \sum_p x_{f4p\overline{H}} \right\}$$

- Restrições

$$\begin{array}{rc}
\forall_{f,v}\ \forall_{p\in\{A,S\}} & x_{f1pv} = 0 \\
\forall_{f,v}\ \forall_{p\in\{E,S\}} & x_{f2pv} = 0 \\
\forall_{f,v}\ \forall_{p\in\{E,A\}} & x_{f3pv} = 0 \\
\forall_{f,v}\ \forall_{p\in\{S\}} & x_{f4pv} = 0 \\
 & x_{11EH} + x_{11E\overline{H}} + x_{14EH} + x_{14E\overline{H}} \geq 5 \\
 & x_{21EH} + x_{21E\overline{H}} + x_{24EH} + x_{24E\overline{H}} \geq 7 \\
 & x_{12AH} + x_{12A\overline{H}} + x_{14AH} + x_{14A\overline{H}} \geq 10 \\
 & x_{22AH} + x_{22A\overline{H}} + x_{24AH} + x_{24A\overline{H}} \geq 5 \\
 & x_{13SH} + x_{13S\overline{H}} \geq 2 \\
 & x_{23SH} + x_{23S\overline{H}} \geq 3 \\
\forall_f & x_{f1EH} \leq 5 \\
\forall_f & x_{f2AH} \leq 2 \\
\forall_f & x_{f3SH} \leq 1 \\
\forall_f & x_{f4EH} + x_{f4AH} \leq 3 \\
\forall_f & x_{f1E\overline{H}} \leq \infty \\
\forall_f & x_{f2A\overline{H}} \leq \infty \\
\forall_f & x_{f3S\overline{H}} \leq \infty \\
\forall_f & x_{f4E\overline{H}} + x_{f4AH} \leq \infty \\
\forall_f & x_{f1EH} + x_{f2AH} + x_{f3SH} + x_{f4EH} + x_{f4AH} \geq 5 \\
\forall_f & \frac{x_{f1EH}+x_{f2AH}+x_{f3SH}+x_{f4EH}+x_{f4AH}}{2} \leq \frac{x_{f1E\overline{H}}+x_{f2A\overline{H}}+x_{f3S\overline{H}}+x_{f4E\overline{H}}+x_{f4A\overline{H}}}{1} \\
\forall_{f,t,p,v} & x_{ftpv} \geq 0 \text{ e inteiros.}
\end{array}$$

(b) i) É necessário que as variáveis de decisão tenham "memória" da fase anterior.

- Índices
  fase – $f \in \{1,2\}$
  tipo – $t \in \{1,2,3,4\}$
  profissão na fase $(f-1)$ – $u \in \{0,E,A,S\}$ (0 se na fase $(f-1)$ não estava contratado.
  profissão na fase f– $p \in \{E,A,S\}$
  vínculo – $v \in \{H,\overline{H}\}$ (pertencentes ou não à "holding")
- Variáveis de decisão
  $\mathbf{x_{ftupv}}$ número de pessoas com tipo t e vínculo v, que são contratadas na fase f com a profissão p e na fase $(f-1)$ tinham sido contratadas com profissão u.

ii)
- Dados
  $\mathbf{Quant_{fp}}$ – quantidade de pessoas com profissão p a contratar na fase f.
  Tabela que relaciona tipos t com profissões p.
  $\mathbf{QuantVinc_{tv}}$ – quantidade de pessoas existentes com tipo t e vínculo v.
  $\mathbf{min_p}$ – número mínimo de profissionais p a manter entre fases.
  $\mathbf{max_p}$ – número máximo de profissionais p a manter entre fases.
  min – número mínimo de pessoas a manter entre fases.
  max – número máximo de pessoas a manter entre fases.
  $\mathbf{c_{tv}}$ – custo por fase de uma pessoa com tipo t e vínculo v.
  $\mathbf{cnovo_v}$ – custo de contrato novo para pessoa com vínculo v.
  $\mathbf{calt_v}$ – custo de alteração de contrato para pessoa com vínculo v.
- Função Objectivo
  Pretendem-se minimizar os custos totais com as contratações, que incluem os valores a pagar por fase a cada profissional, os custos de contratos e os custos de alteração de contratos.

$$\min \quad \sum_{f,t,u,p,v} \mathbf{c_{tv}} x_{ftupv} + \sum_{f,t,p,v} \mathbf{cnovo_v} x_{ft0pv} + \sum_{f,t,p,v} \sum_{u\in\{E,A,S\}} \mathbf{calt_v} x_{ftupv} \tag{11}$$

- Restrições

$$\forall_{u,f,v}\ \forall_{p\in\{A,S\}} \qquad x_{x_{f1upv}} = 0 \tag{12}$$
$$\forall_{u,f,v}\ \forall_{p\in\{E,S\}} \qquad x_{f2upv} = 0 \tag{13}$$
$$\forall_{u,f,v}\ \forall_{p\in\{E,A\}} \qquad x_{f3upv} = 0 \tag{14}$$
$$\forall_{u,f,v}\ \forall_{p\in\{S\}} \qquad x_{f4upv} = 0 \tag{15}$$
$$\forall_{t,p,v}\ \forall_{u\in\{E,A,S\}} \qquad x_{1tupv} = 0 \tag{16}$$
$$\forall_{u,f,p} \qquad \sum_{t,v} x_{ftupv} \geq \mathbf{Quant_{fp}} \tag{17}$$
$$\forall_{f,t,u,v} \qquad \sum_{p} x_{ftupv} \leq \mathbf{QuantVinc_{tv}} \tag{18}$$
$$\forall_{f} \qquad \sum_{t,u,p} x_{ftupH} \geq 5 \tag{19}$$

$$\forall_f \qquad \frac{\sum_{t,u,p} x_{ftupH}}{2} \leq \frac{\sum_{t,u,p} x_{ftup\overline{H}}}{1} \tag{20}$$

$$\forall_{f\in\{2\}} \qquad \mathbf{min_p} \leq \textstyle\sum_{t,p} x_{ftppv} \leq \mathbf{max_p} \tag{21}$$

$$\forall_{f\in\{2\}} \quad \mathbf{min} \leq \textstyle\sum_t \sum_p \sum_{u\in\{E,A,S\}} x_{ftupv} \leq \mathbf{max} \tag{22}$$

$$\forall_{f,t,u,p,v} \qquad x_{ftupv} \geq 0 \text{ e inteiros.} \tag{23}$$

As restrições (12) a (15) representam a tabela que relaciona tipos t com profissões p. As restrições (16) garantem que os contratos na fase 1 são todos novos. As restrições (17) garantem que é contratado na fase f o número de pessoas necessário com profissão p. As restrições (18) garantem que não se contratam mais pessoas de um determinado tipo t e vínculo v do que as que existem. As restrições (19) garantem que não se contratam menos de 5 pessoas da "holding" em cada fase f. As restrições (20) garantem que por cada 2 elementos da "holding" na equipa em cada fase é necessário contratar pelo menos 1 elemento exterior à "holding". As restrições (21) garantem que o número de profissionais p a manter entre fases está entre um valor mínimo e um valor máximo. As restrições (22) garantem que o número de pessoas a manter entre fases está entre um valor mínimo e um valor máximo. As restrições (23) garantem que as variávies de decisão terão sempre valores maiores ou iguais a zero e inteiros.

2 — **(a)** Variáveis de decisão:

x_1 – número de telemóveis (em milhares de unidades)

x_2 – número de consolas (em milhares de unidades)

x_3 – número de senhas de compras (em milhares de unidades)

Modelo:

$$\min \text{CUSTO} = 10x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 10 \\ x_1 & & & & & \geq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Introduzindo variáveis de folga e variáveis artificiais e usando o método das penalidades para retirar as variáveis artificiais da base:

$$\min Z = 10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + Ma_1 + Ma_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & s_1 & & & & & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & s_2 & & & + & a_1 & & & = & 10 \\ x_1 & & & & & & & & & - & s_3 & & & + & a_2 & = & 3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & , & a_1 & , & a_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Para construir o quadro simplex inicial falta apenas exprimir a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas, para assim se obterem os custos marginais:

$$\begin{aligned} a_1 &= 10 - x_1 - x_2 - x_3 + s_2 \\ a_2 &= 3 - x_1 + s_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= 10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + Ma_1 + Ma_2 \\ &= 10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + M(10 - x_1 - x_2 - x_3 + s_2) + M(3 - x_1 + s_3) \\ &= (10 - 2M)x_1 + (8 - M)x_2 + (5 - M)x_3 + Ms_2 + Ms_3 + 13M \end{aligned}$$

Fazendo agora as iterações pelo método simplex:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	
s_1	$\boxed{1}$	1	-1	1	0	0	0	0	$0 \rightrightarrows$
a_1	1	1	1	0	-1	0	1	0	10
a_2	1	0	0	0	0	-1	0	1	3
$-Z$	$10-2M$	$8-M$	$5-M$	0	M	M	0	0	$-13M$
	$\upuparrows$								

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	
x_1	1	1	-1	1	0	0	0	0	0
a_1	0	0	2	-1	-1	0	1	0	10
a_2	0	-1	$\boxed{1}$	-1	0	-1	0	1	$3 \rightrightarrows$
$-Z$	0	$-2+M$	$15-3M$	$-10+2M$	M	M	0	0	$-13M$
			$\upuparrows$						

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	
x_1	1	0	0	0	0	-1	0	1	3
a_1	0	$\boxed{2}$	0	1	-1	2	1	-2	$4 \rightrightarrows$
x_3	0	-1	1	-1	0	-1	0	1	3
$-Z$	0	$13-2M$	0	$5-M$	M	$15-2M$	0	$-15+3M$	$-45-4M$
		$\upuparrows$							

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	0	0	0	-1	3
x_2	0	1	0	$\boxed{1/2}$	$-1/2$	1	$2 \rightrightarrows$
x_3	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	5
$-Z$	0	0	0	$-3/2$	$13/2$	2	-71
				$\upuparrows$			

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
x_1	1	0	0	0	0	-1	3
s_1	0	2	0	1	-1	2	4
x_3	0	1	1	0	-1	1	7
$-Z$	0	3	0	0	5	5	-65

Solução óptima:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 7 \quad s_1 = 4 \quad s_2 = 0 \quad s_3 = 0$$

$$Z^* = 65$$

Durante a resolução as bases admissíveis percorridas foram as seguintes:

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 5)$$
$$(x_1, s_1, s_3) = (3, 4, 7)$$

(b) Não existem soluções óptimas alternativas porque apenas as variáveis básicas têm, no quadro óptimo, custos marginais nulos. Só se alguma variável não básica tivesse um custo marginal igual a zero é que existiria uma solução óptima alternativa.

$\boxed{3}$ — **(a)** Para formular este problema como um problema de transportes vamos considerar como origens as candidaturas às lojas e como destinos as lojas a abrir efectivamente. Quando a uma candidatura de um certo tipo é atribuída uma loja desse mesmo tipo, não há custo associado a esse "transporte". Se a uma candidatura de um tipo for atribuída uma loja de outro tipo passa a haver um custo associado a essa mudança. É necessário ainda equilibrar as candidaturas (31) com as lojas (41) através da introdução de um tipo de loja a abrir (destino) fictício que absorverá o excesso de candidaturas. As candidaturas que tiverem como destino esta coluna ficarão sem loja atribuída.

	Rest	Casa	Vest	ECC	X	
Rest	0	20	10	20	0	15
Casa	5	0	0	0	0	2
Vest	20	10	0	30	0	17
ECC	20	5	15	0	0	7
	10	3	10	8	10	

(b) Vamos determinar uma solução inicial pela regra dos custos mínimos. Necessitamos de $5 + 4 - 1$ variáveis básicas.

	Rest	Casa	Vest	ECC	X	
Rest	10 0	— 20	— 10	— 20	5 0	15
Casa	— 5	2 0	— 0	— 0	— 0	2
Vest	— 20	1 10	10 0	1 30	5 0	17
ECC	— 20	— 5	— 15	7 0	— 0	7
	10	3	10	8	10	

Fazendo uma iteração pelo algoritmo de transportes:

	0	10	0	30	0
0	10 0	— 10 20	— 10 10	— -10 20	5 0
-10	— 15 5	2-Θ 0	— 10 0	Θ $\boxed{-20}$ 0	— 10 0
0	— 20 20	1+Θ 10	10 0	1-Θ 30	5 0
-30	— 50 20	— 25 5	— 45 15	7 0	— 30 0

Com $\Theta = \min(1, 2) = 1$, dando origem ao seguinte quadro:

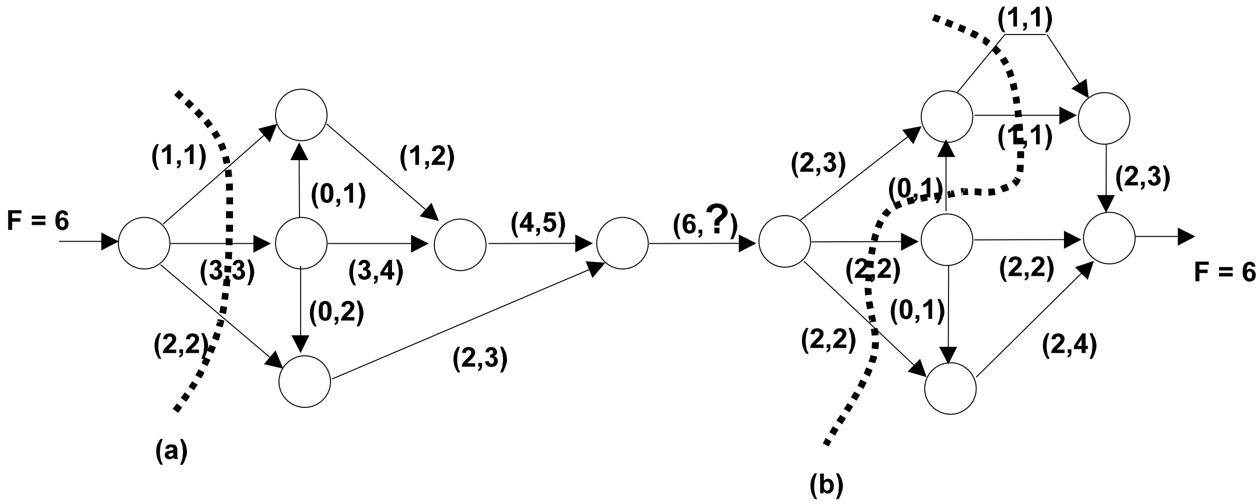
	Rest	Casa	Vest	ECC	X
Rest	10 0	— 20	— 10	— 20	5 0
Casa	— 5	1 0	— 0	1 0	— 0
Vest	— 20	2 10	10 0	— 30	5 0
ECC	— 20	— 5	— 15	7 0	— 0

4 — Esta questão pode ser resolvida de duas maneiras diferentes:

(a) Consideram-se duas sub-redes, correspondendo cada uma a uma das sub-cúpulas, calculam-se os fluxos máximos que podem atravessar cada uma delas separadamente e dimensiona-se o corredor para o menor desses fluxos (para ter menor custo).

(b) Considera-se uma rede só, em que o ramo que representa o corredor não tem uma capacidade máxima pré-definida, e calcula-se o fluxo máximo que pode atravessar essa rede. O fluxo que atravessar o ramo "corredor" define a capacidade que lhe deve ser atribuída.

Vai-se seguir a segunda hipótese nesta resolução. Apresenta-se de seguida a rede já na situação de fluxo máximo, com a indicação do corte mínimo (a) que justifica a optimalidade (máximo) do fluxo. Apresenta-se também, embora não fosse necessário, um segundo corte (b) que também é mínimo.



Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

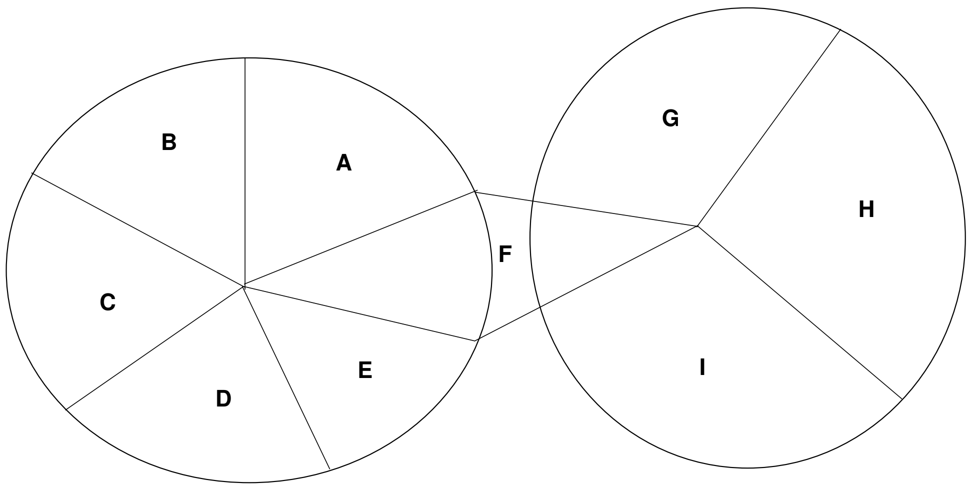
2ª chamada

99/01/28

Duração: 2 horas e 30 minutos — Com Consulta

José Fernando Oliveira Maria Antónia Carravilla

$\boxed{1}$ — **(a)** Antes de dar início à construção do ShopShopping, Feimiro necessita de definir a localização dos estaleiros da obra. Para tal começou por dividir a área de construção em sectores, tal como se representa na figura.



Sabe-se que é possível montar no máximo um estaleiro em cada sector.

A empresa de Feimiro, a única que está habilitada a montar estaleiros em plataformas marítimas, monta estaleiros de dois tipos:

- Est α – estaleiro simples, com uma capacidade de movimentação e armazenamento de 1000 toneladas de materiais durante toda a obra. Este tipo de estaleiro só pode fornecer o sector onde está instalado.
- Est β – grande estaleiro, com uma capacidade de movimentação e armazenamento de 5.000 toneladas de materiais durante toda a obra. Este tipo de estaleiro pode fornecer qualquer sector.

Por imposição das empresas de construção envolvidas, se for montado 1 estaleiro α no sector **B**, então é necessário montar um estaleiro β no sector **A** ou um estaleiro α no sector **C**. Por imposições regulamentares, o número mínimo de estaleiros a montar numa obra desta natureza e com esta área de construção é 7.

Os custos de montagem de um estaleiro num determinado sector estão representados na tabela seguinte (em 10^6 escudos).

Sector	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Est α	100	100	100	100	100	200	100	50	100
Est β	300	300	300	400	200	300	200	100	300

Os custos de funcionamento dos estaleiros também foram determinados, e são independentes do tipo de estaleiro. Por cada tonelada de material deslocada de um estaleiro para o sector onde o estaleiro se encontra, o custo fixo é 10^4 escudos. A deslocação de materiais de um estaleiro para um outro sector custa 2×10^4 escudos por tonelada.

Prevê-se que as necessidades de materiais em cada sector durante toda a obra sejam as seguintes:

Sector	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
Nec. materiais (em ton)	1000	2000	8000	5000	1000	1500	2000	3000	4000

Feimiro sabe utilizar com toda a mestria o Solver do Excel, mas tem grande dificuldade em construir modelos de Programação Linear, por isso pede-lhe ajuda a si, para que construa o modelo para este problema, por forma a que ele depois obtenha a solução óptima usando o Solver do Excel.

(b) Se lhe sobrar tempo no fim do teste!!

20 minutos depois de Feimiro ter apresentado o problema completo, já lhe vai entregar o modelo pedido, pensando que pode ir descansado para casa. No entanto, Feimiro esteve entretanto a pensar e quer acrescentar mais uma restrição ao problema.

"Pensei que poderá custar menos dinheiro se se obrigar que cada sector seja alimentado por 1 e 1 só estaleiro. Deve ser fácil alterar o modelo, e já que fez grande parte do trabalho em tão pouco tempo, irá gastar com esta pequena alteração no máximo 2 minutos."

i) Será que Feimiro vai gastar menos dinheiro neste caso? Porquê?

ii) Esta nova ideia de Feimiro irá implicar uma alteração realmente pequena?

iii) Construa o novo modelo.

$\boxed{2}$ — A construção do Shopshopping obriga a uma gestão cuidadosa dos recursos humanos. As equipas de construção podem ser de 3 tipos:

- próprias da empresa construtora (P);
- subcontratadas a empreiteiros legais (L);
- subcontratadas a empreiteiros com imigrantes ilegais (I).

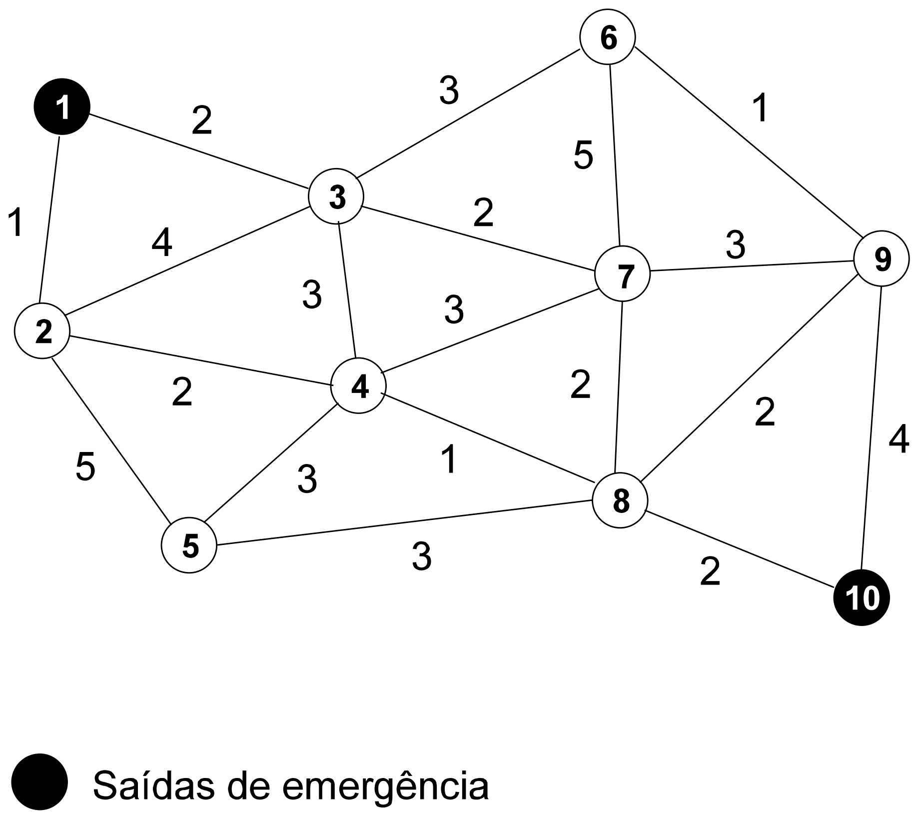
Cada tipo de equipa acarreta um custo diferente, a saber, 2.5 Mc/mês, 2 Mc/mês e 1 Mc/mês.

É necessário um total de 10 equipas, não podendo o número de equipas com imigrantes ilegais exceder metade do número das equipas restantes. Por outro lado as equipas da própria empresa deverão totalizar no mínimo 1/3 da mão de obra empregue na obra.

(a) Formule este problema como programação linear e resolva-o pelo método simplex.

(b) Diga qual o significado dos custos marginais e como são usados no método simplex.

$\boxed{3}$ — A segurança nos centros comerciais não pode ser descuidada. Em caso de emergência é necessário evacuar as pessoas o mais rapidamente possível. Para isso é necessário instalar setas nos corredores a indicarem s saída de emergência mais próxima. Na figura seguinte representa-se o esquema de corredores de um dos sectores do ShopShopping, com os respectivos comprimentos, e a localização das saídas de emergência. Utilizando o algoritmo de Dijkstra determine para cada corredor qual deve ser o sentido das setas indicando a saída de emergência mais próxima.



$\boxed{4}$ — O ShopShopping vai ter cinemas. Ora a existência de cinemas implica a existência de bilheteiras. O arquitecto responsável pelo projecto do ShopShopping pediu uma informação sobre o número de bilheteiras que seria necessário prever para o complexo de cinemas. Recorrendo ao estudo de mercado, a administração do ShopShopping concluiu que, nos períodos de maior afluência, em média chegariam 50 pessoas por hora às bilheteiras, enquanto cada bilheteira demora cerca de 3 minutos a atender cada pessoa.

Determine quantas bilheteiras se deverão prever de forma a que a probabilidade de uma pessoa, que chegue 10 minutos antes da hora do filme, consiga entrar no cinema antes do seu início, seja de 80%.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

2ª chamada

99/01/28

Resolução

$\boxed{1}$ — **(a)**

- Índices

  tipo de estaleiro – $e \in \{\alpha, \beta\}$

  sector onde está o estaleiro– $s \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$

- Dados

  $\mathbf{Cap_e}$ – capacidade total durante a obra (em toneladas) do estaleiro tipo e.

  $\mathbf{Nec_s}$ – necessidade total de materiais durante a obra (em toneladas) do sector s.

  $\mathbf{c_{es}}$ – custo de montagem (em 10^6 escudos) de um estaleiro tipo e no sector s.

- Variáveis de decisão

$$\mathbf{x_{es}} \begin{cases} 1 & \text{se estaleiro tipo } e \text{ é montado no sector } s \\ 0 & \text{se não} \end{cases} \tag{1}$$

$$\delta \quad \in \{0,1\} \;\; \text{(variável auxiliar)} \tag{2}$$

- Função Objectivo

  Pretende-se minimizar a soma dos custos de montagem dos estaleiros com os custos de movimentação de materiais.

  Custos de montagem dos estaleiros:

$$10^6 \times \sum_{e,s} \mathbf{c_{es}} \times x_{es} \tag{3}$$

  Custos de movimentação de materiais (soma do custo de movimentação dos materiais do estaleiro para o sector onde está montado com o custo da movimentação dos materiais do estaleiro para outros sectores):

  Custo de movimentação dos materiais do estaleiro para o sector onde está montado:

$$10^4 \times \sum_{e,s} x_{es} \times minimo(\mathbf{Cap_e}, \mathbf{Nec_s}) \tag{4}$$

  Custo de movimentação dos materiais do estaleiro para outros sectores:

$$2 \times 10^4 \times (\sum_{s} \mathbf{Nec_s} - \sum_{e,s} x_{es} \times minimo(\mathbf{Cap_e}, \mathbf{Nec_s})) \tag{5}$$

- Restrições

$$\forall_s \qquad \sum_e \mathbf{x_{es}} \leq 1 \tag{6}$$
$$\sum_s \mathbf{x_{\alpha s}} \times minimo(\mathbf{Cap}_\alpha, \mathbf{Nec_s}) + \sum_s \mathbf{x_{\beta s}} \times \mathbf{Cap}_\beta \geq \sum_s \mathbf{Nec_s} \tag{7}$$
$$\sum_{e,s} \mathbf{x_{es}} \geq 7 \tag{8}$$
$$\mathbf{x_{\alpha B}} - \delta \times 3 \leq 0 \tag{9}$$
$$1 - (\mathbf{x_{\beta A}} + \mathbf{x_{\alpha C}}) - (1-\delta) \times 3 \leq 0 \tag{10}$$

As restrições (6)indicam que só se pode montar no máximo um estaleiro em cada sector.
A restrição (7) assegura que há capacidade disponível para alimentar todos os estaleiros. Como um estaleiro tipo α só pode alimentar o sector onde está montado, a capacidade disponível nesse estaleiro será igual a mínimo($\mathbf{Cap}_\alpha, \mathbf{Nec_s}$). Os estaleiros β terão que satisfazer as restantes necessidades.
As restrições (8) impõem um número mínimo de estaleiros a montar (7 neste caso).
As restrições (9) e (10) impõem que seja montado um estaleiro β no sector **A** ou um estaleiro α no sector **C** se for montado 1 estaleiro α no sector **B**. Se $\mathbf{x_{\alpha B}} = 1$ então $\mathbf{x_{\beta A}} = 1$ ou $\mathbf{x_{\alpha C}} = 1 \Leftrightarrow$ Se $\mathbf{x_{\alpha B}} > 0$ então $\mathbf{x_{\beta A}} + \mathbf{x_{\alpha C}} \geq 1$ (majorante = 3).

(b) i) Feimiro está a introduzir mais restrições ao problema, por isso o custo da solução óptima obtida depois de acrescentadas as restrições só pode ter um valor maior ou igual ao custo da solução óptima anterior (ou então ele está a pensar noutros custos que não referiu na alínea (a)).

ii) A alteração ao modelo inicial é bastante grande, dado que vai ser necessário que as variáveis de decisão passem a ter informação sobre quais os estaleiros que alimentam um determinado sector.

iii)
- Índices
  tipo de estaleiro – $e \in \{\alpha, \beta\}$
  sector onde está o estaleiro– $s \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$
  sector alimentado por estaleiro– $k \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$
- Dados
  $\mathbf{Cap_e}$ – capacidade total durante a obra (em toneladas) do estaleiro tipo e.
  $\mathbf{Nec_k}$ – necessidade total de materiais durante a obra (em toneladas) do sector k.
  $\mathbf{c_{es}}$ – custo de montagem (em 10^6 escudos) de um estaleiro tipo e no sector s.
- Variáveis de decisão

$$\mathbf{x_{es}} \quad \begin{cases} 1 & \text{se estaleiro tipo } e \text{ é montado no sector } s \\ 0 & \text{se não} \end{cases} \tag{11}$$

$$\mathbf{y_{sk}} \quad \begin{cases} 1 & \text{se estaleiro montado no sector } s \text{ alimenta o sector } k \\ 0 & \text{se não} \end{cases} \tag{12}$$

$$\delta \quad \in \{0,1\} \ \text{(variável auxiliar)} \tag{13}$$

- Função Objectivo

  Pretende-se minimizar a soma dos custos de montagem dos estaleiros com os custos de movimentação de materiais.

  Custos de montagem dos estaleiros:

$$10^6 \times \sum_{e,s} \mathbf{c_{es}} \times x_{es} \tag{14}$$

  Custos de movimentação de materiais (soma do custo de movimentação dos materiais do estaleiro para o sector onde está montado com o custo da movimentação dos materiais do estaleiro para outros sectores):

  Custo de movimentação dos materiais do estaleiro para o sector onde está montado:

$$10^4 \times \sum_{e,s} x_{es} \times \mathbf{Nec_s} \tag{15}$$

  Custo de movimentação dos materiais dos estaleiros para outros sectores:

$$2 \times 10^4 \times (\sum_{s} \mathbf{Nec_s} - \sum_{e,s} x_{es} \times \mathbf{Nec_s}) \tag{16}$$

- Restrições

$$\forall_s \quad \textstyle\sum_e \mathbf{x_{es}} \leq 1 \tag{17}$$

$$\forall_k \quad \textstyle\sum_s \mathbf{y_{sk}} \leq 1 \tag{18}$$

$$\forall_s \quad \mathbf{x_{\alpha s}} \times \mathbf{Cap}_\alpha \geq \mathbf{y_{ss}} \times \mathbf{Nec_s} \tag{19}$$

$$\forall_s \quad \mathbf{x_{\beta s}} \times \mathbf{Cap}_\beta \geq \textstyle\sum_k (\mathbf{y_{sk}} \times \mathbf{Nec_k}) \tag{20}$$

$$\textstyle\sum_{e,s} \mathbf{x_{es}} \geq 7 \tag{21}$$

$$\mathbf{x_{\alpha B}} - \delta \times 3 \leq 0 \tag{22}$$

$$1 - (\mathbf{x_{\beta A}} + \mathbf{x_{\alpha C}}) - (1-\delta) \times 3 \leq 0 \tag{23}$$

  As restrições (17) indicam que só se pode montar no máximo um estaleiro em cada sector.

  As restrições (18) asseguram que cada sector só pode ser alimentado por um estaleiro.

As restrições (19) e (20) garantem que um estaleiro só pode alimentar um conjunto de sectores, se existir e se tiver capacidade para alimentar completamente todos esses sectores. Os estaleiros α só podem alimentar o sector em que se encontram.
As restrições (21) impõem um número mínimo de estaleiros a montar (7 neste caso).
As restrições (22) e (23) impõem que seja montado um estaleiro β no sector **A** ou um estaleiro α no sector **C** se for montado 1 estaleiro α no sector **B**. Se $\mathbf{x}_{\alpha\mathbf{B}} = 1$ então $\mathbf{x}_{\beta\mathbf{A}} = 1$ ou $\mathbf{x}_{\alpha\mathbf{C}} = 1 \Leftrightarrow$ Se $\mathbf{x}_{\alpha\mathbf{B}} > 0$ então $\mathbf{x}_{\beta\mathbf{A}} + \mathbf{x}_{\alpha\mathbf{C}} \geq 1$ (majorante = 3).

$\boxed{\mathbf{2}}$ — Variáveis de decisão:
P – número de equipas de construção próprias da empresa
L – número de equipas de construção subcontratadas a empreiteiros legais
I – número de equipas de construção subcontratadas a empreiteiros com imigrantes ilegais

Modelo:

$$\min \text{CUSTO} = 2.5P + 2L + I$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} P & + & L & + & I & = & 10 \\ -\frac{1}{2}P & - & \frac{1}{2}L & + & I & \leq & 0 \\ -\frac{2}{3}P & + & \frac{1}{3}L & + & \frac{1}{3}I & \leq & 0 \\ P & , & L & , & I & \geq & 0 \end{array}$$

Introduzindo variáveis de folga e variáveis artificiais e usando o método das penalidades para retirar as variáveis artificiais da base:

$$\min Z = 2.5P + 2L + I + Ma$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} P & + & L & + & I & & & & & + & a_1 & = & 10 \\ -\frac{1}{2}P & - & \frac{1}{2}L & + & I & + & s_1 & & & & & = & 0 \\ -\frac{2}{3}P & + & \frac{1}{3}L & + & \frac{1}{3}I & & & + & s_2 & & & = & 0 \\ P & , & L & , & I & , & s_1 & , & s_2 & , & a & \geq & 0 \end{array}$$

Para construir o quadro simplex inicial falta apenas exprimir a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas, para assim se obterem os custos marginais:

$$a = 10 - P - L - I$$

$$
\begin{aligned}
Z &= 2.5P + 2L + I + Ma \\
&= 2.5P + 2L + I + M(10 - P - L - I) \\
&= (2.5 - M)P + (2 - M)L + (1 - M)I + 10M
\end{aligned}
$$

Fazendo agora as iterações pelo método simplex:

	P	L	I	s_1	s_2	a	
a	1	1	1	0	0	1	10
s_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{1}$	1	0	0	0 $\rightrightarrows$
s_2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0
$-Z$	2.5	2	1	0	0	0	0
	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$-10M$
			$\upuparrows$				

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas é que representa o custo marginal (p.ex.: $2.5 - M$).

	P	L	I	s_1	s_2	a	
a	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	-1	0	1	10
I	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0
s_2	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	0 $\rightrightarrows$
$-Z$	3	$\frac{5}{2}$	0	-1	0	0	0
	$-\frac{3}{2}M$	$-\frac{3}{2}M$	0	$+M$	0	0	$-10M$
			$\upuparrows$				

	P	L	I	s_1	s_2	a	
a	$\boxed{3}$	0	0	0	-3	1	10 $\rightrightarrows$
I	-1	0	1	$\frac{2}{3}$	1	0	0
L	-1	1	0	$-\frac{2}{3}$	2	0	0
$-Z$	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{2}{3}$	-5	0	0
	$-3M$	0	0	0	$+3M$	0	$-10M$
	$\upuparrows$						

	P	L	I	s_1	s_2	a	
P	1	0	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
I	0	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
L	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
$-Z$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{55}{3}$
	0	0	0	0	0	$+M$	0

Solução óptima:

$$P = \frac{10}{3} \quad I = \frac{10}{3} \quad L = \frac{10}{3} \quad s_1 = 4 \quad s_2 = 0$$
$$Z^* = \frac{55}{3}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ — Para saber qual a saída de emergência mais próxima teremos que saber a distância de cada nó a cada uma das saídas de emergência e optar pela que apresentar menor distância.

Considerando que o algoritmo de Dijkstra dá *a distância mais curta entre cada nó da rede e o nó de "entrada"* basta-nos aplicar o algoritmo duas vezes a esta rede: uma tomando como nó de "entrada" o nó 1; outra tomando como nó de "entrada" o nó 10.

1) Distância mínima do nó 1 a todos os nós

Nó									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0^*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	1^*	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
		2^*	3	6	∞	∞	∞	∞	∞
			3^*	6	5	4	∞	∞	∞
				6	5	4^*	4	∞	∞
				6	5		4^*	7	∞
				6	5^*			6	6
				6^*				6	6
								6^*	6
									6^*

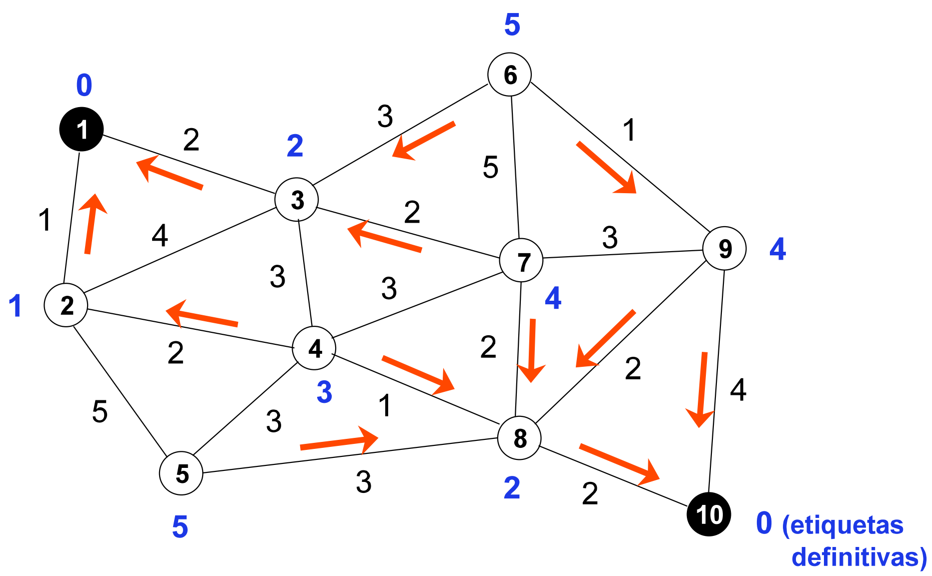
2) Distância mínima do nó 10 a todos os nós

Nó									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0^*
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2^*	4	
∞	∞	∞	3^*	5	∞	4		4	
∞	5	6		5	∞	4		4^*	
∞	5	6		5	5	4^*			
∞	5	6		5	5^*				
∞	5	6		5^*					
∞	5^*	6							
6		6^*							
6^*									

Comparando os dois quadros pode-se concluir, para cada nó, qual a saída de emergência mais próxima (nó 1 ou nó 10):

Nó	Saída de emergência mais próxima
2	1
3	1
4	1 ou 10
5	10
6	1 ou 10
7	1 ou 10
8	10
9	10

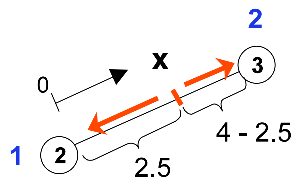
Colocando então as etiquetas (distâncias mínimas ao nó 1 ou 10, conforme o que for menor) sobre os nós da rede é possível determinar os ramos que fazem parte do caminho mínimo entre algum nó e uma saída de emergência. Para tal procede-se da mesma forma que se segue quando resolvido um problema de caminho mínimo e se pretende reconstruir o caminho propriamente dito: comparando a diferença entre etiquetas de nós adjacentes com a distância associada ao ramo que une esses nós. Se for igual é porque o ramo pertence ao caminho mínimo, senão não pertence. Por exemplo, a etiqueta do nó 6 (vale 5) menos a etiqueta do nó 3 (vale 2) é igual à distância associada ao ramo (3,6), ou seja 3. Então o ramo (3,6) pertende ao caminho mínimo em direcção à saída 1. Desta forma são identificadas os sentidos das setas para os ramos (1,3), (1,2), (2,4), (3,6), (3,7), (4,8), (5,8), (7,8), (6,9), (8,9), (8,10) e (9,10).



Os restantes ramos (corredores) não vão ter um único sentido associado, isto é, a saída de emergência mais próxima depende do ponto do corredor onde se está. Assim, tomando como exemplo o corredor (2,3), sabemos que a saída mais próxima do nó 2 está a 1 unidade de distância, enquanto a saída mais próxima do nó 3 está a 2 unidades de distância. O ponto x (medido a partir do nó 2) do corredor, que mede 4 unidades, em que as duas saídas de emergência estão a igual distância é dado pela equação:

$$1 + x = 2 + (4 - x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2} = 2.5$$

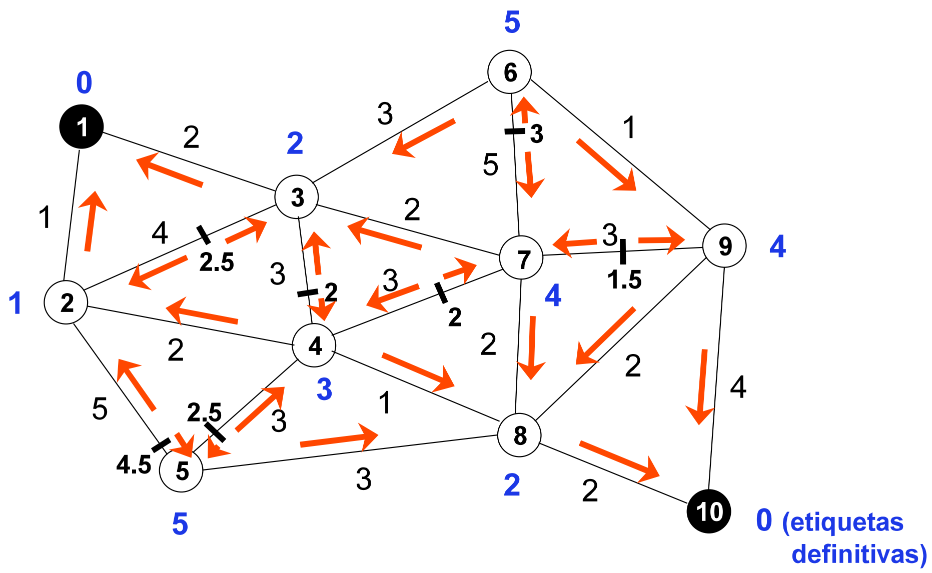
Então no corredor (2,3) os sentidos das setas indicando as saídas de emergência devem ser os seguintes:



Repetindo este racciocínio para todos os corredores ainda não marcados (tomando como origem o nó a do par ordenado de nós (a, b)):

- Corredor (2,5): $1 + x = 5 + (5 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 4.5$
- Corredor (3,4): $2 + x = 3 + (3 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 2$
- Corredor (4,5): $3 + x = 5 + (3 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 2.5$
- Corredor (4,7): $3 + x = 4 + (3 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 2$
- Corredor (7,6): $4 + x = 5 + (5 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 3$
- Corredor (7,9): $4 + x = 4 + (3 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 1.5$

A rede completa fica com os seguintes sentidos assinalados:



$\boxed{4}$ — Dados do problema:

- $\lambda = \frac{50}{60}$ pessoas/minuto $= \frac{5}{6}$ pessoas/minuto.
- $\mu = \frac{1}{3}$ pessoas/minuto.
- Logo: $\frac{\lambda}{\mu} = 2.5$.

Sendo assim só para $S \geq 3$ é que $\rho = \frac{\lambda}{S\mu} < 1$, condição para que a fila de espera esteja em equilíbrio e as fórmulas habituais possam ser aplicadas.

- **S = 3**

  A partir da tabela que dá os valores de P_0 para filas M/M/S, em função de S e de $\frac{\lambda}{\mu}$, conclui-se:

  $$P_0 = 0.0562 - \frac{0.0562 - 0.0345}{2} = 0.04535$$

  Então, a probabilidade de um indivíduo estar no sistema (na fila e a comprar bilhete) mais do que 10 minutos (caso em não chegaria ao início do filme) é dada por:

  $$P(W > 10) = \mathrm{e}^{-\frac{10}{3}} \times \left(1 + \frac{0.04535 \times 2.5^3}{6 \times (1 - \frac{2.5}{3})} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{10}{3} \times (2-2.5)}}{2 - 2.5}\right) \quad = \quad 0.2528$$

  Como a probabilidade de demorar mais do que 10 minutos é superior a 20%, 3 servidores não chegam.

- **S = 4**

  Consultando novamente a tabela dos valores de P_0:

  $$P_0 = 0.0831 - \frac{0.0831 - 0.0651}{2} = 0.0741$$

  Agora a probabilidade de um indivíduo estar no sistema mais do que 10 minutos é dada por:

  $$P(W > 10) = \mathrm{e}^{-\frac{10}{3}} \times \left(1 + \frac{0.0741 \times 2.5^4}{24 \times (1 - \frac{2.5}{4})} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{10}{3} \times (3-2.5)}}{3 - 2.5}\right) \quad = \quad 0.0543$$

  Como a probabilidade de demorar mais do que 10 minutos é de aproximadamente 6%, 4 servidores (bilheteiras) são suficientes para cumprir as condições impostas .

$$
\begin{aligned}
Z &= 2.5P + 2L + I + Ma \\
&= 2.5P + 2L + I + M(10 - P - L - I) \\
&= (2.5 - M)P + (2 - M)L + (1 - M)I + 10M
\end{aligned}
$$

Fazendo agora as iterações pelo método simplex:

	P	L	I	s_1	s_2	a	
a	1	1	1	0	0	1	10
s_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{1}$	1	0	0	$0 \rightrightarrows$
s_2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0
$-Z$	2.5	2	1	0	0	0	0
	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$-10M$
			$\upuparrows$				

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas é que representa o custo marginal (p.ex.: $2.5 - M$).

	P	L	I	s_1	s_2	a	
a	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	-1	0	1	10
I	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0
s_2	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$0 \rightrightarrows$
$-Z$	3	$\frac{5}{2}$	0	-1	0	0	0
	$-\frac{3}{2}M$	$-\frac{3}{2}M$	0	$+M$	0	0	$-10M$
			$\upuparrows$				

	P	L	I	s_1	s_2	a	
a	$\boxed{3}$	0	0	0	-3	1	$10 \rightrightarrows$
I	-1	0	1	$\frac{2}{3}$	1	0	0
L	-1	1	0	$-\frac{2}{3}$	2	0	0
$-Z$	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{2}{3}$	-5	0	0
	$-3M$	0	0	0	$+3M$	0	$-10M$
	$\upuparrows$						

	P	L	I	s_1	s_2	a	
P	1	0	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
I	0	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
L	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
$-Z$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{55}{3}$
	0	0	0	0	0	$+M$	0

Solução óptima:

$$P = \frac{10}{3} \quad I = \frac{10}{3} \quad L = \frac{10}{3} \quad s_1 = 4 \quad s_2 = 0$$

$$Z^* = \frac{55}{3}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ — Para saber qual a saída de emergência mais próxima teremos que saber a distância de cada nó a cada uma das saídas de emergência e optar pela que apresentar menor distância.

Considerando que o algoritmo de Dijkstra dá *a distância mais curta entre cada nó da rede e o nó de "entrada"* basta-nos aplicar o algoritmo duas vezes a esta rede: uma tomando como nó de "entrada" o nó 1; outra tomando como nó de "entrada" o nó 10.

1) Distância mínima do nó 1 a todos os nós

Nó									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0^*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	1^*	2	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
		2^*	3	6	∞	∞	∞	∞	∞
			3^*	6	5	4	∞	∞	∞
				6	5	4^*	4	∞	∞
				6	5		4^*	7	∞
				6	5^*			6	6
				6^*				6	6
								6^*	6
									6^*

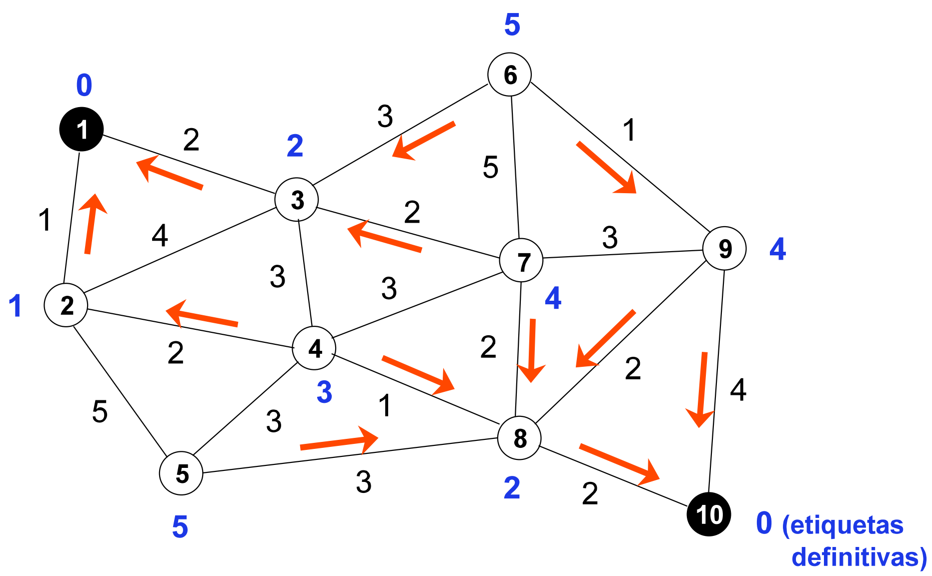
2) Distância mínima do nó 10 a todos os nós

Nó									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0^*
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	2^*	4	
∞	∞	∞	3^*	5	∞	4		4	
∞	5	6		5	∞	4		4^*	
∞	5	6		5	5	4^*			
∞	5	6		5	5^*				
∞	5	6		5^*					
∞	5^*	6							
6		6^*							
6^*									

Comparando os dois quadros pode-se concluir, para cada nó, qual a saída de emergência mais próxima (nó 1 ou nó 10):

Nó	Saída de emergência mais próxima
2	1
3	1
4	1 ou 10
5	10
6	1 ou 10
7	1 ou 10
8	10
9	10

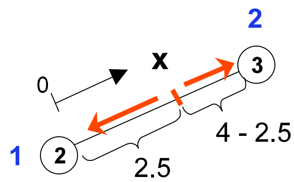
Colocando então as etiquetas (distâncias mínimas ao nó 1 ou 10, conforme o que for menor) sobre os nós da rede é possível determinar os ramos que fazem parte do caminho mínimo entre algum nó e uma saída de emergência. Para tal procede-se da mesma forma que se segue quando resolvido um problema de caminho mínimo e se pretende reconstruir o caminho propriamente dito: comparando a diferença entre etiquetas de nós adjacentes com a distância associada ao ramo que une esses nós. Se for igual é porque o ramo pertence ao caminho mínimo, senão não pertence. Por exemplo, a etiqueta do nó 6 (vale 5) menos a etiqueta do nó 3 (vale 2) é igual à distância associada ao ramo (3,6), ou seja 3. Então o ramo (3,6) pertende ao caminho mínimo em direcção à saída 1. Desta forma são identificadas os sentidos das setas para os ramos (1,3), (1,2), (2,4), (3,6), (3,7), (4,8), (5,8), (7,8), (6,9), (8,9), (8,10) e (9,10).



Os restantes ramos (corredores) não vão ter um único sentido associado, isto é, a saída de emergência mais próxima depende do ponto do corredor onde se está. Assim, tomando como exemplo o corredor (2,3), sabemos que a saída mais próxima do nó 2 está a 1 unidade de distância, enquanto a saída mais próxima do nó 3 está a 2 unidades de distância. O ponto x (medido a partir do nó 2) do corredor, que mede 4 unidades, em que as duas saídas de emergência estão a igual distância é dado pela equação:

$$1 + x = 2 + (4 - x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2} = 2.5$$

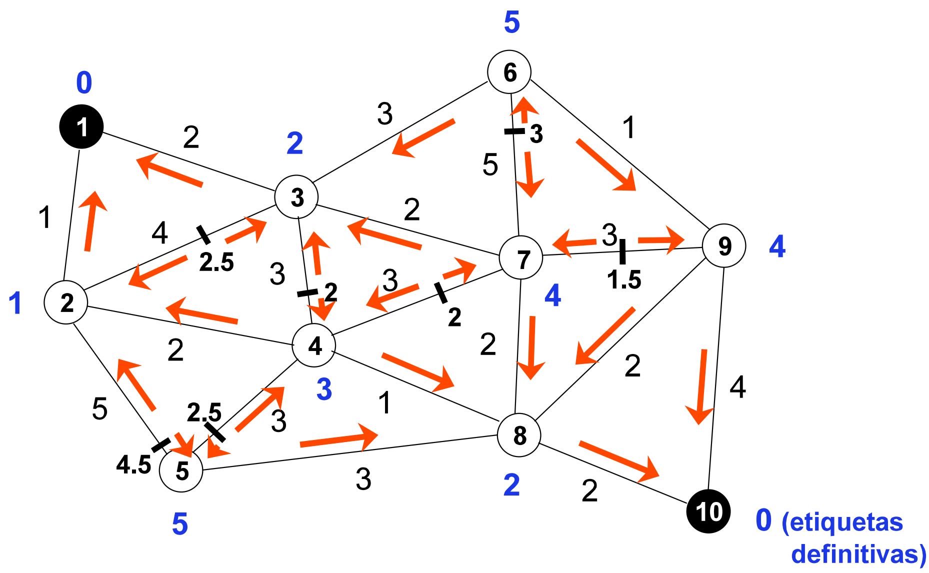
Então no corredor (2,3) os sentidos das setas indicando as saídas de emergência devem ser os seguintes:



Repetindo este racciocínio para todos os corredores ainda não marcados (tomando como origem o nó a do par ordenado de nós (a, b)):

- Corredor (2,5): $1 + x = 5 + (5 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 4.5$
- Corredor (3,4): $2 + x = 3 + (3 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 2$
- Corredor (4,5): $3 + x = 5 + (3 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 2.5$
- Corredor (4,7): $3 + x = 4 + (3 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 2$
- Corredor (7,6): $4 + x = 5 + (5 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 3$
- Corredor (7,9): $4 + x = 4 + (3 - x) \;\Leftrightarrow\; x = 1.5$

A rede completa fica com os seguintes sentidos assinalados:



$\boxed{4}$ — Dados do problema:

- $\lambda = \frac{50}{60}$ pessoas/minuto $= \frac{5}{6}$ pessoas/minuto.
- $\mu = \frac{1}{3}$ pessoas/minuto.
- Logo: $\frac{\lambda}{\mu} = 2.5$.

Sendo assim só para $S \geq 3$ é que $\rho = \frac{\lambda}{S\mu} < 1$, condição para que a fila de espera esteja em equilíbrio e as fórmulas habituais possam ser aplicadas.

- **S = 3**

  A partir da tabela que dá os valores de P_0 para filas M/M/S, em função de S e de $\frac{\lambda}{\mu}$, conclui-se:

  $$P_0 = 0.0562 - \frac{0.0562 - 0.0345}{2} = 0.04535$$

  Então, a probabilidade de um indivíduo estar no sistema (na fila e a comprar bilhete) mais do que 10 minutos (caso em não chegaria ao início do filme) é dada por:

  $$P(W > 10) = \mathrm{e}^{-\frac{10}{3}} \times \left(1 + \frac{0.04535 \times 2.5^3}{6 \times (1 - \frac{2.5}{3})} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{10}{3} \times (2-2.5)}}{2 - 2.5}\right) \quad = \quad 0.2528$$

  Como a probabilidade de demorar mais do que 10 minutos é superior a 20%, 3 servidores não chegam.

- **S = 4**

  Consultando novamente a tabela dos valores de P_0:

  $$P_0 = 0.0831 - \frac{0.0831 - 0.0651}{2} = 0.0741$$

  Agora a probabilidade de um indivíduo estar no sistema mais do que 10 minutos é dada por:

  $$P(W > 10) = \mathrm{e}^{-\frac{10}{3}} \times \left(1 + \frac{0.0741 \times 2.5^4}{24 \times (1 - \frac{2.5}{4})} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{10}{3} \times (3-2.5)}}{3 - 2.5}\right) \quad = \quad 0.0543$$

  Como a probabilidade de demorar mais do que 10 minutos é de aproximadamente 6%, 4 servidores (bilheteiras) são suficientes para cumprir as condições impostas .

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

Época de Recurso

99/02/11

Duração: 2 horas e 30 minutos — Com Consulta

José Fernando Oliveira Maria Antónia Carravilla

1 — **(a)** Alguns meses antes da abertura do ShopShopping, foi feito o levantamento dos espaços ainda por alugar. Os resultados desse levantamento são apresentados na tabela seguinte:

Espaço			Tipos de utilização permitida			
Tipo	Área (m^2)	Quant.	Restauração	Têxteis-Lar	Vestuário	Cultura
1	1000	1	x	x		x
2	200	5	x	x	x	
3	100	15			x	x
4	30	30	x	x		x

Um estudo concluído antes do lançamento do ShopShopping sugeria quantidades (número de lojas) máximas e mínimas para cada um dos tipos de lojas a abrir e definia também valores máximos e mínimos para o total de m^2 utilizados em lojas de cada um dos tipos. Com esses valores, e os dados sobre os espaços já alugados, obtiveram-se os valores apresentados na tabela seguinte. Nessa tabela também se apresenta a rentabilidade média esperada para a gestão do ShopShopping, medida em 10^3 escudos por m^2 e por mês, de cada uma das utilizações pretendidas.

	Quantidade		Nº de m^2		Rentabilidade média
	mín	máx	mín	máx	(10^3 escudos/m^2)
Restauração	10	35	1000	1500	200
Têxteis-Lar	5	10	200	2000	100
Vestuário	0	20	300	1500	150
Cultura	10	15	400	2000	190

Para além disso, especialistas de renome internacional sugerem que, para um shopping ter sucesso, por cada loja de Têxteis-Lar é necessário abrir pelo menos 2 lojas de Restauração, e por outro lado, por cada m^2 de lojas de Vestuário é necessário que haja pelo menos $5m^2$ de lojas de Cultura ou Restauração.

Construa o modelo de Programação Linear para este problema, tendo como objectivo a maximização da rentabilidade do ShopShopping.

(b) A rentabilidade dos espaços, apresentada na alínea anterior em termos médios (escudos por metro quadrado), é regida de facto por uma expressão não linear, fruto dos efeitos de saturação e de diversificação dos espaços, e dependente do tipo de espaço i:

$$\text{Rentabilidade}_i = \sqrt{C_i \times \text{Área}_i}$$

em que as constantes C_i são dadas pela seguinte tabela:

Tipo de espaço (i)	C_i
Restauração	4×10^4
Têxteis-Lar	10^4
Vestuário	2.25×10^4
Cultura	3.61×10^4

i) Altere o modelo desenvolvido anteriormente de forma a contemplar esta relação não linear.

ii) Aproxime esta relação não linear de uma forma conveniente, de modo a, com as devidas alterações, obter novamente um modelo de Programação Linear.

$\boxed{\textbf{2}}$ — O ShopShopping aposta definitivamente na segurança, dos lojistas e dos clientes. Para isso dispõe permanentemente de seguranças privados colocados em pontos estratégicos de modo a, ao serem vistos, dissuadirem o crime e controlarem a maior área possível.

Na campânula sub-aquática 1 foram determinadas 6 localizações possíveis para os seguranças. No entanto, é claro para o responsável pela segurança que o Tony Portas, o Zezé Naifa, o Chico Botas e o Quim Scar são suficientes para vigiar a zona. Dadas as características dos mencionados seguranças (peso, força, agilidade, etc.) e dos locais de vigilância, o responsável pela segurança construiu uma tabela que indica o **proveito** de um dado segurança estar "estacionado" num dado local:

	Local					
	A	B	C	D	E	F
Tony Portas	5	6	4	4	6	2
Zezé Naifa	4	1	5	3	5	2
Chico Botas	3	4	2	3	1	3
Quim Scar	5	2	1	4	6	4

No entanto, após uma segunda inspecção aos locais, o responsável decidiu que o Tony Portas não poderia ficar no local A nem no local B, por serem adjacentes a lojas de bebidas (!). Por outro lado, o local C, onde está o sector administrativo, terá que ser necessariamente ocupado por um dos 4 seguranças. Determine que locais devem ser ocupados e por que seguranças.

3 — Quando um centro comercial fecha ao público continua a fervilhar de vida no seu interior. É preciso limpar, esvaziar lixo, repor stocks nas lojas, fazer manutenção, etc., para que no dia seguinte tudo brilhe como no dia da inauguração.

Estas tarefas têm que ser levadas a cabo de uma forma organizada e respeitando algumas precedências entre elas. A sua duração não é determinística, mas a experiência acumulada de outros centros comerciais permite estabelecer que a duração de cada actividade segue uma distribuição normal com média e desvio-padrão conhecidos.

Na tabela seguinte apresenta-se essa informação:

Actividades	Actividades imediatamente anteriores	μ (horas)	σ (horas)
Recolha de lixo (RL)	—	2	0.5
Lavagem de vidros e montras (LVM)	D,MEA	3	1
Limpeza do chão (LC)	LVM,DEC,RS	4	0.5
Desinfestação (D)	—	2	0
Montagem de estruturas e andaimes (MEA)	—	1	0
Manutenção eléctrica (ME)	MEA	2	1
Reposição de stocks (RS)	RL	2	1
Decoração (DEC)	RL,ME,D,MEA	1	1

(a) Indique o valor esperado para a duração do projecto constituído por estas actividades, indicando as folgas total e livre para cada actividade.

(b) Qual é a probabilidade de este conjunto de actividades não se concluir nas 10 horas em que o centro comercial está encerrado?

4 — Dada a localização privilegiada do ShopShopping, pensou-se logo de início prever um transporte especial desde o Castelo do Queijo até à plataforma marítima. Após um estudo profundo de várias soluções possíveis, optou-se por um sistema de cadeiras individuais suspensas em cabos (muito conhecidas nas estâncias de ski). Na velocidade óptima de funcionamento, a taxa de chegada das cadeiras é de 120 por hora.

Inicialmente previa-se uma afluência de 60 pessoas por hora a este sistema de transporte, mas na realidade a afluência provou ser muito superior (da ordem das 100 pessoas por hora) e há utilizadores que desistem dizendo ter esperado mais de 10 minutos para conseguir ter acesso a uma cadeira para os transportar.

Pensando que pode ser necessário melhorar o funcionamento deste serviço, foi feito o levantamento das soluções a adoptar, que podem passar pela aquisição de um novo motor, mais potente, para o sistema de cadeiras actualmente em funcionamento ou então pela aquisição e montagem de mais um sistema de cadeiras. A aquisição de um novo motor faria aumentar a taxa de chegada de cadeiras para 200 por hora. Os custos dessas duas soluções alternativas foram dados em 10^3 escudos por hora e são, respectivamente, 150 e 200. O custo por hora da solução inicial é de 100×10^3 escudos por hora.

(a) Indique qual o tempo médio de espera em cada uma das três situações apresentadas.

(b) Considerando que o custo por cliente e por hora de espera é de 200×10^3 escudos, indique qual a melhor solução.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

Época de Recurso

99/02/11

Resolução

1 — **(a)**

- Índices

  tipo de espaço – $e \in \{1, 2, 3, 4\}$

  tipo de utilização– $u \in \{R, T, V, C\}$

- Dados

  $\mathbf{Area_e}$ – área do espaço tipo e.

  $\mathbf{Quant_e}$ – quantidade de espaços tipo e.

  Tabela que relaciona cada tipo de espaço com o tipo de utilização permitida.

  $\mathbf{QuantMin_u}$ – quantidade mínima de espaços com utilização u.

  $\mathbf{QuantMax_u}$ – quantidade máxima de espaços com utilização u.

  $\mathbf{AreaMin_u}$ – área total mínima para espaços com utilização u.

  $\mathbf{AreaMax_u}$ – área total máxima para espaços com utilização u.

  $\mathbf{Renta_u}$ – Rentabilidade (em 10^3 escudos por m^2) de espaços com utilização u.

- Variáveis de decisão

  $\mathbf{x_{eu}}$ – quantidade de espaços tipo e com utilização u.

- Função Objectivo

  Pretende-se maximizar a rentabilidade mensal (em 10^3 escudos).

$$\sum_{e,u} \mathbf{Renta_u} \times \mathbf{Area_e} \times x_{eu} \tag{1}$$

- Restrições

$$\mathbf{x_{1V}} = \mathbf{x_{2C}} = \mathbf{x_{3R}} = \mathbf{x_{3T}} = \mathbf{x_{4V}} = 0 \tag{2}$$

$$\forall_e \quad \textstyle\sum_u \mathbf{x_{eu}} \leq \mathbf{Quant_e} \tag{3}$$

$$\forall_u \quad \mathbf{QuantMin_u} \leq \textstyle\sum_e \mathbf{x_{eu}} \leq \mathbf{QuantMax_u} \tag{4}$$

$$\forall_u \quad \mathbf{AreaMin_u} \leq \textstyle\sum_e \mathbf{x_{eu}} \times \mathbf{Area_e} \leq \mathbf{AreaMax_u} \tag{5}$$

$$\frac{\sum_e \mathbf{x_{eT}}}{1} \leq \frac{\sum_e \mathbf{x_{eR}}}{2} \tag{6}$$

$$\frac{\sum_e \mathbf{Area_e} \times \mathbf{x_{eV}}}{1} \leq \frac{\sum_e \mathbf{Area_e} \times (\mathbf{x_{eC}} + \mathbf{x_{eR}})}{5} \tag{7}$$

$$\forall_{e,u} \quad \mathbf{x_{eu}} \geq 0 \text{ e inteiros.} \tag{8}$$

As restrições (2) representam a tabela que relaciona cada tipo de espaço com o tipo de utilização permitida.

As restrições (3) garantem que não se podem usar mais espaços tipo e do que os que existem.

As restrições (4) garantem que o número de espaços com utilização u deve estar entre valor máximo e mínimo permitido.

As restrições (5) garantem que a área total de espaços com utilização u deve estar entre valor máximo e mínimo permitido.

As restrições (6) garantem que por cada loja de Têxteis-Lar ($u = T$) é necessário abrir pelo menos 2 lojas de Restauração ($u = R$):

A restrição (7) garante que por cada m^2 de lojas de Vestuário ($u = V$) é necessário que haja pelo menos $5m^2$ de lojas de Cultura ($u = C$) ou Restauração ($u = R$).

As restrições (8) garantem que as variáveis de decisão terão sempre valores maiores ou iguais a zero e inteiros.

(b) i) A introdução de uma rentabilidade não linear só vai ter implicações na função objectivo, mantendo-se as restrições. Dado que a não-linearidade não afecta as variáveis de decisão, o modelo continua a ser linear.

- Função Objectivo

  Pretende-se maximizar a rentabilidade mensal (em 10^3 escudos).

$$\sum_{e,u} \sqrt{C_u \times \mathbf{Area_e}} \times \mathbf{Area_e} \times x_{eu} \tag{9}$$

ii) Não é necessário fazer aproximações para a relação da rentabilidade, dado que o modelo se manteve linear.

$\boxed{2}$ — Problema de afectação (maximização).

Conversão num problema de minimização:

$\max c_{ij} = 6 \qquad \Rightarrow \qquad$ Matriz dos complementos para 6:

1	0	2	2	0	4
2	5	1	3	1	4
3	2	4	3	5	3
1	4	5	2	0	2

Introdução de seguranças fictícios (para tornar a matriz quadrada) e das restrições apresentadas:

∞	∞	2	2	0	4
2	5	1	3	1	4
3	2	4	3	5	3
1	4	5	2	0	2
0	0	∞	0	0	0
0	0	∞	0	0	0

Iterações do método húngaro:

(i) Subtracção do menor elemento de cada linha

$$\begin{array}{|cccccc|}
\hline
\infty & \infty & 2 & 2 & 0 & 4 \\
1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

(ii) O menor elemento de cada coluna é zero, pelo que a matriz de custos fica inalterada.

(iii) Iteração 1

$$\begin{array}{|c|c|cc|cc|}
\hline
\infty & \infty & 2 & 2 & 0 & 4 \\
\boxed{1} & 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 5 & 2 & 0 & 2 \\
\hline
0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \infty & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

(iv) Iteração 2

$$\begin{array}{||c|c|c|c|c|c|}
\hline
\infty & \infty & 2 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 4 & 5 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & \infty & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & \infty & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

6 riscos $\Rightarrow$ Solução óptima

(v) Escolha de 6 zeros independentes

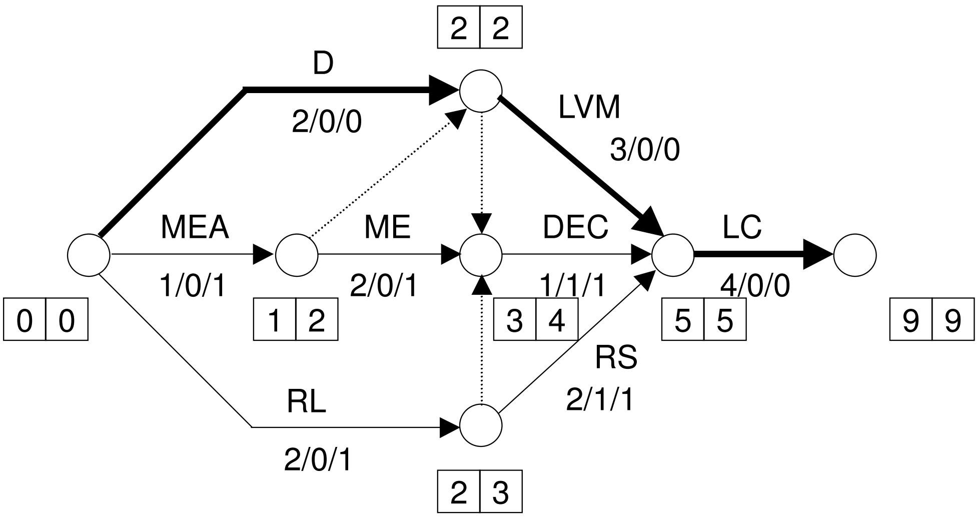
$$\begin{array}{|cccccc|}
\hline
\infty & \infty & 2 & 1 & \boxed{0} & 3 \\
0 & 4 & \boxed{0} & 1 & 0 & 2 \\
0 & \boxed{0} & 2 & 0 & 3 & 0 \\
\boxed{0} & 4 & 5 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & \infty & \boxed{0} & 1 & 0 \\
0 & 1 & \infty & 0 & 1 & \boxed{0} \\
\hline
\end{array}$$

Solução óptima: TP-E; ZN-C; CB-B; QS-A

Proveito da solução óptima: $6 + 5 + 4 + 5 = 20$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ — Planeamento e controlo de projectos.

(a) Desenho da rede e detrminação da folgas e do caminho crítico



Caminho crítico: D – LVM – LC

(b)

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\text{caminho crítico}} &= 0^2 + 1^2 + 0.5^2 = 1.25 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{1.25} = 1.118 \\ \mu_{\text{caminho crítico}} &= 2 + 3 + 4 = 9\end{aligned}$$

$$P(D \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10-9}{\sqrt{1.25}}\right) = P(Z \geq 0.89) = 0.1867 = 18.7\%$$

$\boxed{4}$ — **(a)** Tempo médio de espera $= W_q$

	Situação actual	com um motor mais potente	com 2 sistemas de cadeiras
Número de servidores S	1	1	2
Tipo de fila	M/M/1	M/M/1	M/M/2
Taxa de atendimento μ	$120\frac{\text{pessoas}}{\text{hora}}$	$200\frac{\text{pessoas}}{\text{hora}}$	$120\frac{\text{pessoas}}{\text{hora}}$
Taxa de chegada λ	$100\frac{\text{pessoas}}{\text{hora}}$	$100\frac{\text{pessoas}}{\text{hora}}$	$100\frac{\text{pessoas}}{\text{hora}}$
$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6} = 0.8333$
$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$
P_0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0.4119
$L_q = \dfrac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} \overset{(S=1)}{=} \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$	4.167	$\frac{1}{2}$	0.1751
$W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$	0.04167 horas = = 2.5 minutos	0.005 horas = = 0.3 minutos	0.001751 horas = = 0.105 minutos

(b) Análise dos custos

	Situação actual	com motor	com 2 sistemas de cadeiras
Custo do sistema por hora (em \$)	100×10^3	150×10^3	200×10^3
Custo de espera dos clientes por hora (em \$)			
$= W_q \times \lambda \times 200 \times 10^3$	833.4×10^3	100×10^3	35.02×10^3
Custo Total (em \$)	933.4×10^3	250×10^3	235.02×10^3

A melhor solução é duplicar o sistema de cadeiras.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

1ª chamada

2000.01.18

Duração: 2 horas e 30 minutos — Com Consulta

1. A implantação em Portugal da cadeia internacional de hotéis "Sonhos e Companhia Limitada" vai ser uma realidade num futuro próximo. Para administrar a cadeia fizeram-se contactos ao mais alto nível e foram escolhidos três administradores de nacionalidade portuguesa que passamos a apresentar. *Zés Quema*, especialista em questões políticas; *Tó Danota*, especialista em questões económicas; *Hotelmaria*, especialista em questões de hotelaria.

O presidente do conselho de administração, *Pa Gatudo Sol Nascente* é o dono da cadeia internacional "Sonhos e Companhia Limitada", um Macaense com um desconhecimento total da língua e cultura portuguesas mas com uma grande sensibilidade para o negócio em geral e muito especialmente para a hotelaria.

A primeira reunião da administração decorreu ontem e como *Pa Gatudo Sol Nascente*, dada a sua larga experiência, sabia que seriam abordados temas resolúveis apenas com técnicas de Investigação Operacional, convocou também para participar na reunião *João Solução*, conhecido especialista em IO. Hoje de madrugada fomos acordados por um telefonema de *João Solução*, desesperado por não conseguir resolver os problemas levantados na reunião. A sua dificuldade consiste essencialmente na modelização do problema.

Para que o pudéssemos ajudar,*João Solução* descreveu a reunião em que participou ...

O objectivo dessa reunião consistia em obter opiniões dos administradores sobre o número de hotéis a abrir em Portugal, sua localização, dimensão e número de estrelas.

Pa Gatudo Sol Nascente afirmou que não compensava abrir menos do que 20 hotéis e que não disponibilizava mais do que 100.000.000 unidades monetárias para realização de todo o projecto.

Zés Quema afirmou que, para se conseguirem as autorizações seria necessário abrir pelo menos 10 hotéis nas grandes cidades.

Tó Danota e *Hotelmaria* tinham já realizado várias reuniões prévias e tinham chegado às seguintes conclusões:

- Será necessário considerar 3 dimensões de hotéis, hotéis pequenos, com aproximadamente 20 quartos, médios, com aproximadamente 50 quartos e hotéis grandes, com aproximadamente 100 quartos;
- Dado o tipo de clientes da cadeia "Sonhos e Companhia Limitada" só se considera a abertura de hotéis de $***$, $****$ e $*****$;
- Admitem-se 3 tipos de localizações, nas grandes cidades, no campo e na praia.

Posteriormente, e com base nas decisões tomadas com *Hotelmaria*, *Tó Danota* tinha feito um estudo da rentabilidade e dos custos de construção de hotéis de vários tipos. Os resultados desse estudo são apresentados nas tabelas 1 e 2.

Dimensão	Grandes cidades			Campo			Praia		
	$* * *$	$* * * *$	$* * * * *$	$* * *$	$* * * *$	$* * * * *$	$* * *$	$* * * *$	$* * * * *$
Pequeno	20	30	20	10	20	10	10	20	10
Médio	30	40	30	20	30	15	20	30	15
Grande	40	50	40	30	40	20	30	40	20

Tabela 1: Lucro anual para cada localização, dimensão e número de $*$, (em unidades monetárias)

Dimensão	Grandes cidades			Campo			Praia		
	$* * *$	$* * * *$	$* * * * *$	$* * *$	$* * * *$	$* * * * *$	$* * *$	$* * * *$	$* * * * *$
Pequeno	3000	4000	4000	2000	3000	3000	2000	3000	3000
Médio	4000	5000	5000	3000	4000	4000	3000	4000	4000
Grande	5000	6000	6000	4000	5000	5000	4000	5000	5000

Tabela 2: Custo de construção de hotéis para cada localização dimensão e número de $*$, (em unidades monetárias)

Hotelmaria afirmou que por cada hotel de $* * *$ e pequeno é necessário construir pelo menos 2 hotéis de $* * * * *$ no campo. *Hotelmaria* também se mostrou muito renitente quanto ao mínimo de 20 hotéis e afirmou que a construção de menos de 25 hotéis seria pouco rentável.

(a) Construa o modelo de programação linear inteira que permitiria encontrar a solução óptima para este problema.

(b) **Se lhe sobrar tempo no fim do teste!!**

João Solução deve uns favores a *Zés Quema* e este telefonou-lhe a seguir à reunião e sugeriu-lhe que seria importante que não se abrissem simultaneamente hotéis de $* * * * *$ no campo e na praia e também que se se abrissem mais do que 3 hotéis pequenos de $* * *$ no campo, então seria forçoso abrir pelo menos 2 hotéis grandes de $* * * * *$ no campo.

i) Construa o modelo de programação linear inteira que permitiria encontrar a solução óptima para este problema.

ii) Acha que a exigência de não abrir simultaneamente hotéis de $* * * * *$ no campo e na praia tem alguma influência:

A. No valor da função objectivo para a solução óptima? Justifique.

B. Na solução óptima do problema? Justifique.

2. O conselho de administração da "Sonhos e Companhia Limitada" tem de tomar algumas decisões sobre a forma de financiar a implantação da cadeia em Portugal. Depois da proveitosa ajuda prestada pelo Eng. *João Solução* no definição da estratégia de implantacão, decidiram de novo recorrer aos seus serviços.

Para financiar a sua implantação em Portugal e "Sonhos e Companhia Limitada" pode recorrer a capitais próprios (autofinanciamento), a empréstimos bancários e a subsídios do governo português. Cada uma das formas de financiamento tem um *plafond* (máximo) disponível e uma taxa de juro associada. O custo global do financiamento é calculado multiplicando as taxas de juro pelos respectivos capitais:

- O máximo de autofinanciamento da "Sonhos e Companhia Limitada" é de 35.000.000 unidades monetárias, a uma taxa de juro de 3% (corresponde ao lucro que seria obtido num investimento alternativo);
- O recurso a empréstimos bancários está limitado a 80.000.000 unidades monetárias, sendo o respectivo juro de 2.5%;
- O governo português está disposto a financiar a implantação da "Sonhos e Companhia Limitada" até ao máximo de 20.000.000 unidades monetárias, sem juros. No entanto o governo português limita o valor do subsídio a metade do autofinanciamento da "Sonhos e Companhia Limitada";
- Por fim é necessário garantir que o investimento total a realizar (100.000.000 unidades monetárias, ver problema 1) seja totalmente financiado.

Ajude o Eng. *João Solução* a encontrar a melhor estratégia de financiamento para a implantação da cadeia de hotéis "Sonhos e Companhia Limitada" em Portugal.

Formule este problema como Programação Linear e resolva-o pelo método simplex.

3. *Sóvista* despertou a atenção da administração da "Sonhos e Companhia Limitada". É uma zona bem especial de Portugal, com boas praias e proximidade de montanha, com belezas naturais únicas, com aldeias e monumentos de grande interesse histórico. Além do mais está pouco explorada, parecendo oferecer, à partida, boas condições gerais para um desenvolvimento controlado de turismo. Vai ser contemplada, portanto, para a construção de instalações hoteleiras, embora existam dúvidas fundamentais sobre a dimensão conveniente para essas mesmas instalações.

Admitem-se para já 4 tipos de construção/decisão (dimensões 1, 2, 3 e 4) sendo a decisão final de algum modo dependente dos custos associados de construção e de manutenção e da escassez, por eventual subdimensionamento e correspondente prejuízo para o nome da empresa. Uma equipa especializada conseguiu condensar estes aspectos numa tabela de penalidades anuais. Naturalmente que tais penalidades, que a administração pretende ver reduzidas por uma decisão acertada (e qual o critério conveniente?), serão afectadas pelo crescimento do turismo. Foram considerados 4 cenários:

Cenário a: turismo muito reduzido;
Cenário b: turismo moderado;
Cenário c: crescimento gradual;
Cenário d: crescimento forte.

A seguinte tabela apresenta as penalidades correspondentes a decisões e cenários considerados:

D/Cenário	a	b	c	d
1	150	270	350	470
2	225	225	375	450
3	300	300	300	400
4	400	420	450	450

(a) Quais as decisões convenientes segundo os critérios Maximin, Maximax e da Perda de Oportunidade?

(b) Supondo que foi possível associar probabilidades aos cenários mencionados, indique qual a decisão conveniente segundo o critério do Valor Esperado.

Cenário	a	b	c	d
Probabilidade	0.1	0.2	0.4	0.3

(c) Compare e comente, muito sucintamente, os resultados obtidos em a) e b). Com os dados disponíveis, qual será a 'decisão acertada'?

4. Uma das primeiras decisões do Conselho de Administração da "Sonhos e Companhia Limitada – Portugal" foi o lançamento do concurso para a construção dos vários hotéis em Portugal. Seguindo a estratégia já usada nos outros países, o concurso e adjudicação das obras é feito não por edifício mas por arte, isto é, há um empreiteiro para a obra de toscos, outro ou o mesmo para as infra-estrututuras, outro ou o mesmo para a obra de trolha, etc. Dada a dimensão da obra (mais de 20 hotéis), e apesar de o concurso ter sido internacional, apenas 4 grupos de construção civil passaram a pré-qualificação e entregaram propostas. A primeira fase de selecção passa pelo factor custo e pretende-se, de uma forma cega (sem saber quem são os construtores, que aqui serão designados pelas letras A, B, C e D), fazer a atribuição das obras aos construtores de modo a que o custo global seja mínimo. Só após esta fase serão analisados os itens correspondentes ao curriculum de cada grupo e à sua capacidade de construção. Voltando à análise dos custos, usando as regras habituais do grupo, não serão adjudicadas mais do que 2 artes a um mesmo construtor e a cada construtor deverá ser adjudicada pelo menos uma arte. Usando os dados da tabela 3, formule este problema como um problema de afectação e resolva-o pelo método húngaro.

Arte	A	B	C	D
Toscos	3.5	—	3	—
Infra-estruturas	0.5	0.25	—	—
Isolamento e impermeabilizações	1.5	1	1.1	—
Trolha	2	2.5	1.5	2
Carpinteiro	2	1.5	—	2

Tabela 3: Propostas entregues para cada uma das artes da construção dos hotéis (milhões de contos)

5. O Conselho de Administração da cadeia internacional de hotéis "Sonhos e Companhia Limitada", numa reunião que decorreu na semana passada, fez o levantamento do projecto "implantação em Portugal". O projecto foi dividido em tarefas, tendo as suas precedências sido estabelecidas e os tempos de execução médios, e desvios-padrão, estimados. Todos esses valores estão representados na tabela seguinte.

Actividade	Descrição	Duração média (semanas)	Desvio-Padrão (semanas)	Actividades imediatamente posteriores
A	Definição da estratégia da empresa	3	1	B
B	Selecção de entidades financiadoras	5	2	C
C	Adaptação da estratégia face ao financiamento	2	1	D, H, O
D	Selecção de candidatos para direcção de hotéis	25	3	E
E	Formação e tomada de posse nas funções	60	1	M, F
F	Selecção de candidatos para "staff" de hotéis	5	2	G
G	Formação e tomada de posse nas funções	15	1	N
H	Escolha, negociação e aquisição de terrenos	5	2	I
I	Elaboração dos projectos de arquitectura	30	5	J, M
J	Elaboração dos projectos das especialidades	10	3	L
L	Construção dos hotéis	60	10	N
M	Elaboração dos projectos de equipamento	30	1	N
N	Aquisição e montagem de equipamento	10	1	P
O	Definição e lançamento de campanha de "marketing"	5	1	P
P	Abertura dos hotéis	0	0	-

(a) Desenhe a rede de actividades correspondente ao projecto.

(b) Calcule as datas de início mais cedo e datas de fim mais tarde de todas as actividades.

(c) Determine o caminho crítico deste projecto.

(d) Calcule as folgas totais e livres das actividades M, J e L.

(e) Qual é a probabilidade de o projecto se atrasar 2 semanas ou mais?

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

1ª chamada

2000.01.18

Resolução

1. (a)
- Índices
  localização – $i \in \{1,2,3\} \equiv$ {grandes cidades, campo, praia}
  dimensão – $j \in \{1,2,3\} \equiv$ {pequeno, médio, grande}
  nº de estrelas – $k \in \{1,2,3\} \equiv \{***, ****, *****\}$
- Dados
  $\mathbf{Lucro_{ijk}}$ – Lucro anual para cada localização i, dimensão j e número de $*$ k, (em unidades monetárias) (tabela 1 do enunciado).
  $\mathbf{c_{ijk}}$ – Custo de construção de hotéis para cada localização i, dimensão j e número de $*$ k, (em unidades monetárias) (tabela 2 do enunciado).
- Variáveis de decisão
  $\mathbf{x_{ijk}}$ – Número de hotéis a construir na localização i, com dimensão j e número de $*$ k
- Função Objectivo
  Pretende-se maximizar o lucro total anual.

$$\max \quad \sum_{i,j,k} \mathbf{Lucro_{ijk}} x_{ijk} \tag{1}$$

- Restrições

$$\sum_{i,j,k} x_{ijk} \geq 20 \tag{2}$$
$$\sum_{i,j,k} x_{ijk} \geq 25 \tag{3}$$
$$\sum_{j,k} x_{1jk} \geq 10 \tag{4}$$
$$\sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk} \leq 100.000.000 \tag{5}$$
$$2 \times \sum_{i} x_{i11} \leq \sum_j x_{2j3} \tag{6}$$
$$\forall_{i,j,k} \quad x_{ijk} \geq 0 \text{ e inteiros.} \tag{7}$$

As restrições (2) e (3) garantem que não se abrem menos hotéis do que os mínimos sugeridos respectivamente por *Pa Gatudo Sol Nascente* e por *Hotelmaria* (a restrição imposta por *Pa Gatudo Sol Nascente* é redundante). A restrição (4) garante se abrem sempre mais do que 10 hotéis nas grandes cidades. A restrição (5) garante que não se ultrapassa o financiamento assegurado por *Pa Gatudo Sol Nascente*. A restrição (6) garante que a imposição de *Hotelmaria* quanto à relação entre quantidades de hotéis se verifica. As restrições (7) garantem que as variáveis de decisão terão sempre valores maiores ou iguais a zero e inteiros.

(b)
- Índices
  localização $- \; i \in \{1,2,3\} \equiv \{$grandes cidades, campo, praia$\}$
  dimensão $- \; j \in \{1,2,3\} \equiv \{$pequeno, médio, grande$\}$
  nº de estrelas $- \; k \in \{1,2,3\} \equiv \{***, ****, *****\}$
- Dados
  $\mathbf{Lucro_{ijk}}$ – Lucro anual para cada localização i, dimensão j e número de $*$ k, (em unidades monetárias) (tabela 1 do enunciado).
  $\mathbf{c_{ijk}}$ – Custo de construção de hotéis para cada localização i, dimensão j e número de $*$ k, (em unidades monetárias) (tabela 2 do enunciado).
- Variáveis de decisão

$$\mathbf{x_{ijk}} \quad \text{Número de hotéis a construir na localização } i, \tag{8}$$

$$\text{com dimensão } j \text{ e número de } * \; k \tag{9}$$

$$\delta_{simult} \begin{cases} 1 & \text{se só se abrirem hotéis de } ***** \text{ no campo} \\ 0 & \text{se só se abrirem hotéis de } ***** \text{ na praia} \end{cases} \tag{10}$$

$$\delta \quad \in \{0,1\} \;\; \text{(variável auxiliar)} \tag{11}$$

- Função Objectivo
  Pretende-se maximizar o lucro total anual.

$$\max \quad \textstyle\sum_{i,j,k} \mathbf{Lucro_{ijk}} x_{ijk} \tag{12}$$

- Restrições

$$\sum_{i,j,k} x_{ijk} \geq 20 \tag{13}$$

$$\sum_{i,j,k} x_{ijk} \geq 25 \tag{14}$$

$$\sum_{j,k} x_{1jk} \geq 10 \tag{15}$$

$$\sum_{i,j,k} c_{ijk} x_{ijk} \leq 100.000.000 \tag{16}$$

$$2 \times \sum_{i} x_{i11} \leq \textstyle\sum_j x_{2j3} \tag{17}$$

$$\sum_{j} x_{2j3} \leq \delta_{simult} M \tag{18}$$

$$\sum_{j} x_{3j3} \leq (1 - \delta_{simult}) M \tag{19}$$

$$x_{211} - 3 - \delta M \leq 0 \tag{20}$$

$$2 - x_{233} - (1 - \delta) M \leq 0 \tag{21}$$

$$\forall_{i,j,k} \quad x_{ijk} \geq 0 \text{ e inteiros.} \tag{22}$$

As restrições (13) e (14) garantem que não se abrem menos hotéis do que os mínimos sugeridos respectivamente por *Pa Gatudo Sol Nascente* e por *Hotel-*

maria (a restrição imposta por *Pa Gatudo Sol Nascente* é redundante). A restrição (15) garante se abrem sempre mais do que 10 hotéis nas grandes cidades. A restrição (16) garante que não se ultrapassa o financiamento assegurado por *Pa Gatudo Sol Nascente*. A restrição (17) garante que a imposição de *Hotelmaria* quanto à relação entre quantidades de hotéis se verifica. As restrições (18) e (19) garantem que só se abrem hotéis de $*****$ no campo se não se abrirem hotéis de $*****$ na praia (e vice-versa). As restrições (20) e (21) garantem que se abrirem mais do que 3 hotéis pequenos de $***$ no campo, então será forçoso abrir pelo menos 2 hotéis grandes de $*****$ no campo. As restrições (22) garantem que as variáveis de decisão terão sempre valores maiores ou iguais a zero e inteiros.

(c) Dado que não há nenhuma restrição que imponha um número mínimo de hotéis de $*****$ a abrir quer no campo quer na praia e dado que, por um lado, o custo de construção desses hotéis é $\geq$ ao custo de construção (nos mesmos locais) de hotéis com $***$ e $****$ e por outro lado o lucro anual é menor, a solução óptima do problema da alínea (a) não irá com certeza incluir a construção de hotéis de $*****$ quer no campo quer na praia. Assim:

i) Não haverá alteração no valor da função objectivo porque ...

ii) Não haverá alteração na solução óptima do problema.

2. Variáveis de decisão (em milhões de unidades monetárias):

A — valor total do autofinanciamento da "Sonhos e Companhia Limitada";

B — valor total dos empéstimos junto de bancos;

S — valor total dos subsídios a atribuir pelo governo português;

Modelo:

$$min\,\text{CUSTO} = 3A + 2.5B + 0S$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & + & B & + & S & \geq & 100 \\
A & & & & & \leq & 35 \\
 & & B & & & \leq & 80 \\
 & & & & S & \leq & 20 \\
-1 & & & + & 2S & \leq & 0 \\
A & , & B & , & S & \geq & 0
\end{array}$$

Introduzindo varáveis de folga e variáveis artificiais e usando o método das penalidades para retirar as variáveis artificiais da base:

$$min\,Z = 3A + 2.5B + M\,a_1$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
A & + & B & + & S & - & f_1 & & & & & & & & & + & a_1 & \geq & 100 \\
A & & & & & & & + & f_2 & & & & & & & & & \leq & 35 \\
 & & B & & & & & & & + & f_3 & & & & & & & \leq & 80 \\
 & & & & S & & & & & & & + & f_4 & & & & & \leq & 20 \\
-1 & & & + & 2S & & & & & & & & & + & f_5 & & & \leq & 0 \\
A & , & B & , & S & , & f_1 & , & f_2 & , & f_3 & , & f_4 & , & f_5 & , & a_1 & \geq & 0
\end{array}$$

Para construir o quadro simplex inicial falta exprimir a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas, para assim se obterem os custos marginais:

$$a_1 = 100 - A - B - S + f_1$$

$$\begin{aligned} Z &= 3A + 2.5B + M\,a_1 \\ &= 3A + 2.5B + M\,(100 - A - B - S + f_1) \\ &= (3 - M)A + (2.5 - M)B + M\,S + M\,f_1 + 100M \end{aligned}$$

Fazendo agora as iterações pelo método simplex:

	A	B	S	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	a_1	
a_1	1	1	1	-1	0	0	0	0	1	100
f_2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	35
f_3	0	1	0	0	0	1	0	0	0	80
f_4	0	0	1	0	0	0	1	0	0	20
$\leftleftarrows f_5$	-1	0	$\boxed{2}$	0	0	0	0	1	0	0
$-Z$	3	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-M$	$-M$	$-M$	M	0	0	0	0	0	$-100M$
			$\upuparrows$							

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas representa o custo marginal (p.ex.: $3-M$).

	A	B	S	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	a_1	
a_1	$\frac{3}{2}$	1	0	-1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	100
$\leftleftarrows f_2$	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	0	0	0	35
f_3	0	1	0	0	0	1	0	0	0	80
f_4	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	20
S	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$-Z$	3	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$-\frac{3}{2}M$	$-M$	0	M	0	0	0	$\frac{1}{2}M$	0	$-100M$
	$\upuparrows$									

	A	B	S	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	a_1	
$\leftleftarrows a_1$	0	$\boxed{1}$	0	-1	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{95}{2}$
A	1	0	0	0	1	0	0	0	0	35
f_3	0	1	0	0	0	1	0	0	0	80
f_4	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
S	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{35}{2}$
$-Z$	0	$\frac{5}{2}$	0	0	-3	0	0	0	0	-105
	0	$-M$	0	M	$\frac{3}{2}M$	0	0	$\frac{1}{2}M$	0	$-\frac{95}{2}M$
		$\upuparrows$								

	A	B	S	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	a_1	
B	0	1	0	-1	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{95}{2}$
A	1	0	0	0	1	0	0	0	0	35
f_3	1	0	0	1	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{65}{2}$
f_4	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
S	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{35}{2}$
$-Z$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{895}{4}$
	0	0	0	0	0	0	0	0	M	0

Solução óptima:

$$A = 35 \quad B = \frac{95}{2} \quad S = \frac{35}{2}$$

$$Z^* = \frac{895}{4}$$

3. **(a)** Maximin: Melhor decisão D = 3

D	Pior
1	470
2	450
3	400
4	450

Maximax: Melhor decisão D = 1

D	Melhor
1	150
2	225
3	300
4	400

Perda de oportunidade: Melhor decisão D = 1

	Perdas de oportunidade				
D	a	b	c	d	Pior perda
1	0	45	50	70	70
2	75	0	75	50	75
3	150	75	0	0	150
4	250	195	150	50	250

(b) Melhor decisão D = 3

D	$\sum P_i.p_i$
1	350.0
2	352.5
3	330.0
4	439.0

(c) —

4. Para formular este problema como um problema de afectação termos que desdobrar cada construtor num número de clones igual ao número de artes que lhe pode ser atribuído.

Para garantir que todos os construtores têm pelo menos uma obra, impede-se – custo ∞ – que a um dos clones de cada construtor possa ser atribuída uma obra fictícia (X).

	A1	A2	B1	B2	C1	C2	D1	D2
Tos	3.5	3.5	∞	∞	3	3	∞	∞
Infr	0.5	0.5	0.25	0.25	∞	∞	∞	∞
Isol	1.5	1.5	1	1	1.1	1.1	∞	∞
Trol	2	2	2.5	2.5	1.5	1.5	2	2
Carp	2	2	1.5	1.5	∞	∞	2	2
X	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0
X	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0
X	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0

Subtrair o menor elemento a cada linha:

	A1	A2	B1	B2	C1	C2	D1	D2
Tos	0.5	0.5	∞	∞	0	0	∞	∞
Infr	0.25	0.25	0	0	∞	∞	∞	∞
Isol	0.5	0.5	0	0	0.1	0.1	∞	∞
Trol	0.5	0.5	1	1	0	0	0.5	0.5
Carp	0.5	0.5	0	0	∞	∞	0.5	0.5
X	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0
X	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0
X	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0

Subtrair o menor elemento a cada coluna e riscar os zeros:

	A1	A2	B1	B2	C1	C2	D1	D2
Tos	0.25	0.5	∞	∞	$\boxed{0}$	0	∞	∞
Infr	$\boxed{0}$	0.25	0	0	∞	∞	∞	∞
Isol	0.25	0.5	$\boxed{0}$	0	0.1	0.1	∞	∞
Trol	0.25	0.5	1	1	0	0	$\boxed{0}$	0.5
Carp	0.25	0.5	0	$\boxed{0}$	∞	∞	0	0.5
X	∞	$\boxed{0}$	∞	0	∞	0	∞	0
X	∞	0	∞	0	∞	$\boxed{0}$	∞	0
X	∞	0	∞	0	∞	0	∞	$\boxed{0}$

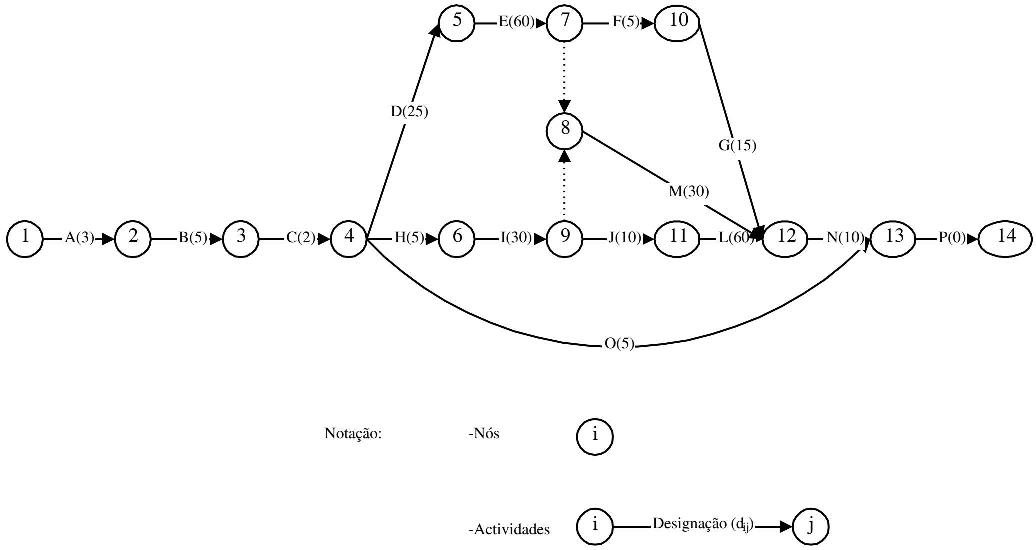
8 riscos $\Rightarrow$ solução óptima.

Solução:

Construtor A – Infra-estruturas
Construtor B – Isolamento e impermeabilizações e Carpinteiro
Construtor C – Toscos
Construtor D – Trolha

Custo = 8 milhões de contos

5. **(a)** Construindo a rede de projecto obtém-se:



(b) Data de início mais próximo de uma actividade (i,j).

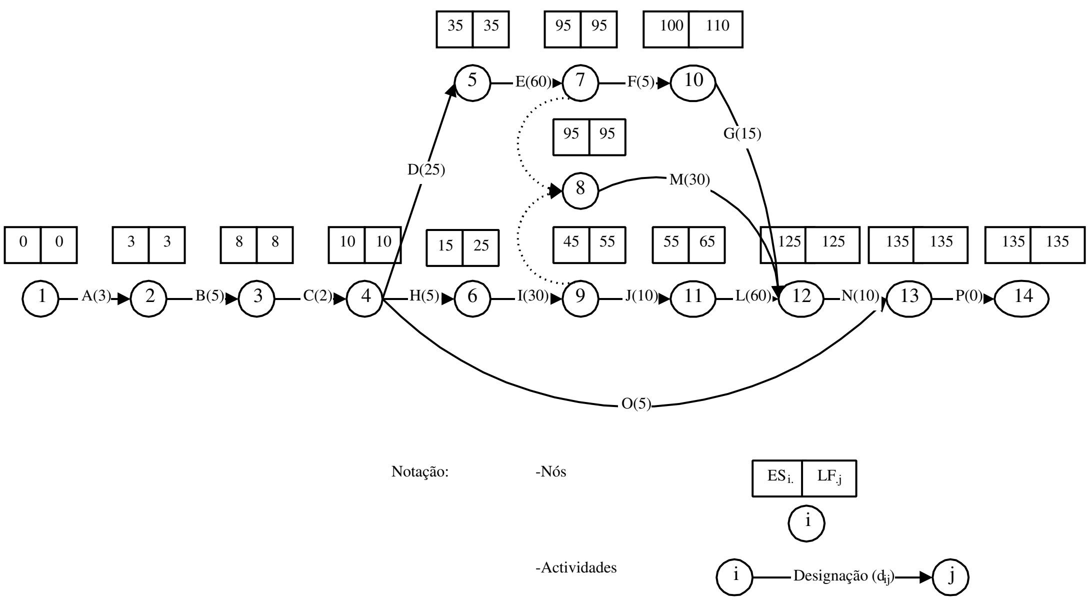
Corresponde à duração do caminho mais longo entre o nó INÍCIO e o nó I, e é comum a todas as actividades que partem do nó i.

$ES_{ij} = max_{k \in \{m \ldots n\}} \{ES_{ki} + d_{ki}\}, \forall_j$

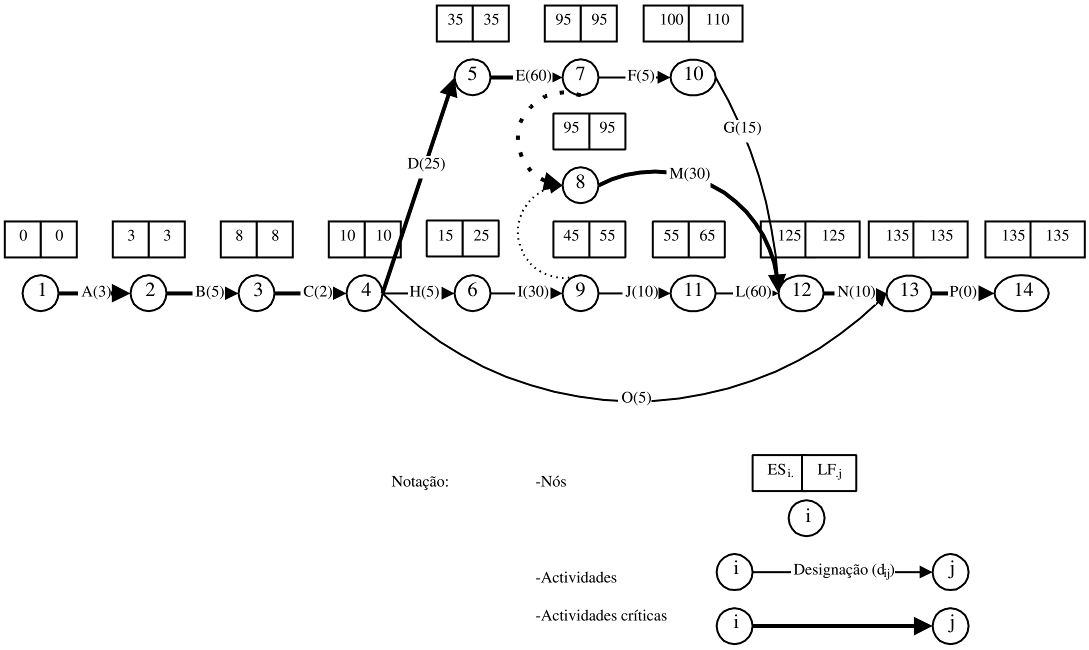
Data de conclusão mais afastada de uma actividade (i,j).

Corresponde à última data em que é possível terminar a actividade sem atrasar o projecto, e é comum a todas as actividades que "chegam" ao nó j

$LF_{ij} = min_{k \in \{m \ldots n\}} \{LF_{jk} - d_{jk}\}, \forall_i$



(c) O caminho crítico é o caminho mais longo (demorado)que liga o nó INÍCIO ao nó FIM. O caminho crítico determina a duração possível do projecto e é constituído pelas actividades críticas.



(d)
- Folga Total - máximo atraso que o início de uma actividade pode sofrer (em relação ao seu início mais próximo), sem que isso implique um atraso no projecto.
  $FT_{ij} = LF_{ij} - (ES_{ij} + d_{ij})$
- Folga Livre - máximo atraso que uma actividade pode sofrer (em relação ao seu início mais próximo), sem impedir que as actividades subsequentes possam ter início nas respectivas datas de início mais próximas.
  $FL_{ij} = ES_{jk} - (ES_{ij} + d_{ij})$

$FT_M = 125 - (95 + 30) = 0$

$FL_M = 125 - (95 + 30) = 0$

$FT_L = 125 - (55 + 60) = 10$

$FL_L = 125 - (55 + 60) = 10$

$FT_J = 65 - (45 + 10) = 10$

$FL_J = 55 - (45 + 10) = 0$

(e) Duração média do projecto:

$\mu_T = \mu_A + \mu_B + \mu_C + \mu_D + \mu_E + \mu_M + \mu_N + \mu_P = 135$

Variância da duração do projecto:

$\sigma_T^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + \sigma_D^2 + \sigma_E^2 + \sigma_M^2 + \sigma_N^2 + \sigma_P^2 = 18$

$Prob(D_T > 137) = Prob(D'_T > \frac{137-135}{\sqrt{18}}) = Prob(D'_T > 0.47) \approx (1 - 0.6808) \approx 32\%$

A probabilidade de o projecto se atrasar 2 semanas ou mais é de 32%.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

2ª chamada

2000.01.29

Duração: 2 horas e 30 minutos — Com Consulta

1. Os hotéis de grande dimensão são locais por onde circula muita gente: hóspedes e seus convidados e ainda os frequentadores dos restaurantes, bares e *health clubs*. Esta situação propicia que outras pessoas, com intenções menos boas, também entrem nos hotéis e se misturem com os clientes. O hotel tem que garantir a segurança dos clientes e a integridade da sua propriedade.

O "Sonhos e Companhia Limitada" presta particular atenção a esta questão e o seu Departamento de Segurança dispõe dos mais modernos meios de vigilância. No entanto, a tecnologia por si só não resolve tudo: não adianta ter câmaras de vídeo a gravar 24 horas por dia se não estiverem bem posicionadas, em particular porque os orçamentos são sempre limitados e não se pode gastar todo o dinheiro disponível em câmaras de vídeo.

O problema que se põe neste momento ao Departamento de Segurança é exactamente o da decisão sobre o tipo, número e local de colocação de câmaras de vídeo no R/C da nova unidade hoteleira de Castelo de Vide. O R/C é o espaço de arquitectura mais complexa e onde se situam todos os serviços de utilização pelo público em geral. As câmaras a instalar podem ser de dois modelos diferentes: a COMECORDA 130S, que tem um ângulo de "visão" de 130^0 e custa 200 contos a unidade, e a COMECORDA 90S, que tem um ângulo de "visão" de 90^0 e custa 80 contos a unidade. Um trabalho de levantamento prévio permitiu determinar locais para a possível implantação das câmaras, assim como determinar que zonas ficariam cobertas pela colocação de cada um dos tipos de câmaras em cada um dos hipotéticos locais. Note-se que em cada local poderá ficar instalada apenas uma câmara. Esses dados estão resumidos nas tabelas 1 e 2.

	Local de colocação				
Zona	A	B	C	D	E
Porta de entrada	X		X		X
Recepção	X	X	X		
Elevadores	X	X	X		
Restaurante		X	X		X
Bar		X		X	X
Health Club				X	X
Sala de conferências				X	

Tabela 1: Cobertura das zonas pelas câmaras COMECORDA 130S

O regulamento de segurança impõe condições muito rigorosas que devem ser respeitadas:

- Todas as zonas devem ser cobertas por pelo menos uma câmara, com excepção da recepção e dos elevadores que têm que ser cobertos por 2 câmaras.
- Terão que existir pelo menos três câmaras, para garantir alguma redundância no sistema.

	Local de colocação				
Zona	A	B	C	D	E
Porta de entrada	X		X		
Recepção	X	X			
Elevadores		X	X		
Restaurante					X
Bar					X
Health Club				X	
Sala de conferências				X	

Tabela 2: Cobertura das zonas pelas câmaras COMECORDA 90S

- Pelo menos uma câmara que venha a cobrir a porta de entrada deverá ser diferente daquela, ou daquelas, que vierem a cobrir os elevadores.

(a) Construa um modelo de programação linear inteira que permitiria encontrar a solução óptima para este problema.

(b) **Se lhe sobrar tempo no fim do teste!!**

Introduza agora no modelo o custo de instalação das câmaras. Os locais A e B ficam próximos um do outro pelo que a infra-estrutura de comunicações e alimentação de energia, que é necessário montar para alimentar as câmaras que lá fiquem instaladas, é comum. O custo de infra-estruturar esses locais é de 100 contos. O mesmo sucede com os locais C e D que partilham a mesma infra-estrutura, que por sua vez tem um custo de 75 contos. Já o local E tem que ser infra-estruturado sozinho, a um custo de 50 contos.

Altere o modelo desenvolvido na alínea anterior de modo a incorporar na função objectivo os custos de instalação das câmaras.

2. Os administradores da "Sonhos e Companhia Limitada" dão muita atenção às questões ambientais. Dentro desta política da empresa é dada particular atenção à reciclagem de materiais, já que possibilita a obtenção de proveitos adicionais.

Os responsáveis dos 2 hotéis da "Sonhos e Companhia Limitada" da região do grande Porto reuniram-se para definirem uma estratégia. Na reunião também estava presente o Eng. *Reciclado* (especialista em reciclagem) a quem foi encomendado um pré-estudo sobre as possibilidades de reciclagem de materiais na região.

Segundo o pré-estudo do Eng. *Reciclado* existem, na região, 3 centros de reciclagem de materiais (Polir I, Polir II e Polir III). Os centros Polir I e o Polir II têm tecnologia para reciclar vidro ou papel, enquanto o centro Polir III apenas consegue reciclar vidro. O pré-estudo incidiu também sobre os valores unitários líquidos (já descontando custos de transporte) que cada um dos centros está disposto a pagar por cada tonelada de resíduo (estes valores dependem da tecnologia de reciclagem de cada centro, do resíduo e das distâncias). Estes valores estão indicados nas tabelas seguintes:

Papel	Polir I	Polir II	Polir III
Hotel1	9	7	—
Hotel2	7	5	—

Vidro	Polir I	Polir II	Polir III
Hotel1	5	6	9
Hotel2	6	4	8

O centro Polir I tem capacidade para processar 26 toneladas de resíduos. A capacidade disponível no centro Polir II é de 24 toneladas. Por fim o centro Polir III consegue processar 15 toneladas de vidro.

Na tabela seguinte estão indicadas as quantidades de resíduos geradas por cada um dos hotéis.

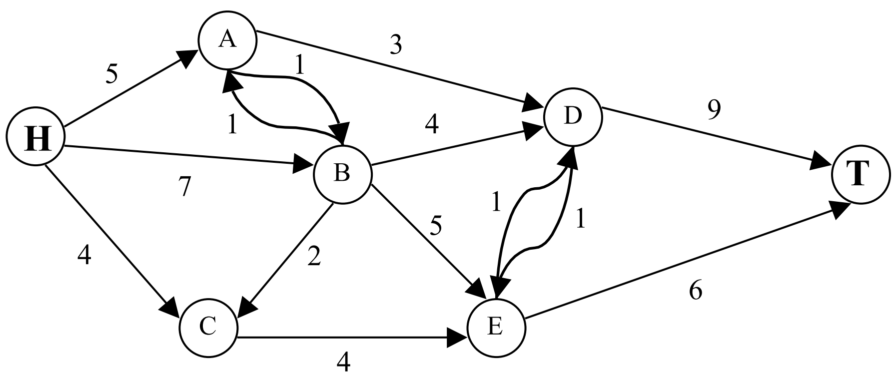
	Hotel1	Hotel2
Papel	13	13
Vidro	18	13

Qual deve ser a política de transporte dos resíduos de modo a maximizar os proveitos obtidos com a reciclagem.

(a) Formule este problema como um problema de transportes.

(b) Determine a solução inicial (sugestão: utilize a regra do custo mínimo) e resolva o problema pelo algoritmo de transportes (pare ao fim de 3 iterações caso não atinja a solução óptima antes).

3. A administração da "Sonhos e Companhia Limitada" já se decidiu sobre o tipo de investimentos hoteleiros a fazer em *Sóvista*. *Sóvista* é uma região bem especial de Portugal, com praias excelentes e proximidade de montanha, com belezas naturais únicas, com aldeias e monumentos de grande interesse histórico. Para a decisão da empresa também foi determinante um estudo elaborado sobre a viabilidade de exploração, com vantagens para a empresa e para o turismo, e sem qualquer prejuízo assinalável para o ambiente, de um sistema de visitas a locais históricos e a zonas de especial encanto natural. Os locais de interesse (A, B, C, D, E, T) que poderão vir a ser contemplados, e respectivos os acessos, estão representados na rede. **H** corresponde à instalação hoteleira, o ponto de partida, e **T** é o local de visita fundamental (obrigatória). A autoridade local do Ministério do Ambiente impôs, naturalmente, limites superiores ao número de visitas (grupos excursionistas) a passar por cada acesso, conforme também se assinala na rede.



(a) Determine a forma de maximizar o número de visitas diárias a **T**, naturalmente respeitando os limites impostos ao fluxo em cada acesso (arco da rede). Todos os locais de interesse serão visitados por algum grupo?

[Deverá utilizar o algoritmo apresentado nas aulas].

(b) Apresente um modelo de optimização que permita calcular o número máximo de visitas v, entre o nó **H** e o nó **T**, bem como as quantidades usadas das capacidades dos arcos. Refira-se ao tipo de modelo que formulou e ao modo como o poderia resolver.

Poderá simplificar o modelo, pela eliminação de alguma(s) equação redundante?

4. Depois de lançado o projecto "implantação em Portugal" da cadeia internacional de hotéis "Sonhos e Companhia Limitada", os directores dos hotéis detectaram que novas imposições governamentais exigiam a construção de Estações de Tratamento de Água Residuais junto a cada um dos hoteis. Decidiu-se então aproveitar essa exigência para lançar o novo projecto "Hotel Amigo dos Clientes e do Ambiente" que trata basicamente da construção das ETAR's, mas que vende bem. Esse projecto foi então dividido em tarefas, tendo as suas precedências sido estabelecidas e os tempos de execução médios, e desvios-padrão, estimados. Todos esses valores estão representados na tabela seguinte.

Actividade	Descrição	Duração média (semanas)	Desvio-Padrão (semanas)	Actividades imediatamente anteriores
A	Estudo dos efluentes produzidos pelos hotéis	5	1	-
B	Selecção de gabinetes de projectos "elegíveis"	10	2	-
C	Apresentação de estudos prévios genéricos	10	1	A, B
D	Selecção de terrenos "elegíveis"	10	3	-
E	Negociação dos terrenos	10	3	C, D
F	Compra dos terrenos	5	2	E
G	Escolha dos gabinetes de projectos	10	1	C
H	Elaboração dos projectos das ETAR's	10	3	F, G
I	Escolha dos empreiteiros	5	1	H
J	Obtenção da licença de construção	10	5	F
L	Construção das ETAR's	20	5	I, J

(a) Desenhe a rede de actividades correspondente ao projecto.

(b) Calcule as datas de início mais cedo e datas de fim mais tarde de todas as actividades.

(c) Determine o caminho crítico deste projecto.

(d) Calcule as folgas totais e livres das actividades A e G.

(e) Qual é a probabilidade de o projecto se atrasar 10 semanas ou mais?

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

2ª chamada

2000.01.29

Resolução

1. **(a)** Variáveis de decisão:

$x_{i,j} \in \{0,1\}$ – instalação ou não de uma câmara do tipo $i \in \{1,2\}$ (1 – COMECORDA 130S, 2 – COMECORDA 90S) no local $j \in \{A,B,C,D,E\}$.

Restrições:

$x_{1A}+x_{1C}+x_{1E}+x_{2A}+x_{2C} \geq 1$	Porta de entrada
$x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}+x_{2A}+x_{2B} \geq 2$	Recepção
$x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}+x_{2B}+x_{2C} \geq 2$	Elevadores
$x_{1B}+x_{1C}+x_{1E}+x_{2E} \geq 1$	Restaurante
$x_{1B}+x_{1D}+x_{1E}+x_{2E} \geq 1$	Bar
$x_{1D}+x_{1E}+x_{2D} \geq 1$	*Health Club*
$x_{1D}+x_{2D} \geq 1$	Sala de Conferências
$x_{1j}+x_{2j} \leq 1 \quad \forall_j$	Máximo de uma câmara por local
$\sum_i \sum_j x_{ij} \geq 3$	Redundância do sistema
$x_{1A} \leq x_{1C}+x_{1E}+x_{2C}$	Elevador coberto por câmara no local $A \Rightarrow$ câmara a cobrir a porta de entrada nos locais C ou E
$x_{1C}+x_{2C} \leq x_{1A}+x_{1E}+x_{2A}$	Elevador coberto por câmara no local $C \Rightarrow$ câmara a cobrir a porta de entrada nos locais A ou E
$x_{ij} \in \{0,1\}$	

Função objectivo:

$$\min \text{CUSTO} = 200\sum_j x_{1j} + 80\sum_j x_{2j}$$

(b) Variáveis de decisão auxiliares:

$\delta_i \in \{0,1\}$ – instalação ou não de uma câmara qualquer nos locais A,B ($i=1$) ou nos locais C,D ($i=2$).

Restrições adicionais:

$\delta_1 \geq x_{1A} + x_{2A}$ Se uma câmara for instalada no local A então δ_1 passa a valer 1

$\delta_1 \geq x_{1B} + x_{2B}$ Se uma câmara for instalada no local B então δ_1 passa a valer 1

$\delta_2 \geq x_{1C} + x_{2C}$ Se uma câmara for instalada no local C então δ_2 passa a valer 1

$\delta_2 \geq x_{1D} + x_{2D}$ Se uma câmara for instalada no local D então δ_2 passa a valer 1

$\delta_i \in \{0, 1\}$

Nova função objectivo:

$$\min \text{CUSTO} = 200 \sum_j x_{1j} + 80 \sum_j x_{2j} + 100\delta_1 + 75\delta_2 + 50(x_{1E} + x_{2E})$$

2. **(a)** Para formular este problema como um problema de transportes é necessário separar os dois tipos de resíduos produzidos em cada hotel, considerando as seguintes variáveis: $H1p$, $H1v$, $H2p$ e $H2v$ (p — resíduos de papel, v — resíduos de vidro, Hn — hotel n). Como origens do nosso problema de transportes vamos considerar os quatro hotéis anteriores e como destinos os três centros de tratamento de resíduos ($PolirI$, $PolirII$, $PolirIII$).

Os custos unitários de transporte entre cada um hotéis e os diferentes centros de tratamento estão indicados nas tabelas do enunciado. O custo de transporte de resíduos de papel para o centro de tratamento $PolirIII$ é ∞ uma vez que este centro não tem capacidade de reciclar papel. Isto será modelizado através de um lucro muito negativo $-M$.

É necessário ainda equilibrar os resíduos produzidos (57) com a capacidade dos centros de tratamento (65) através da introdução de um hotel (origem) fictício que fornecerá a quantidade de resíduos (papel e/ou vidro) em falta. Um centro de tratamento que receba resíduos do hotel fictício não terá toda a sua capacidade de reciclagem utilizada.

	$PolirI$	$PolirII$	$PolirIII$	
$H1p$	9	7	$-M$	13
$H1v$	5	6	9	18
$H2p$	7	5	$-M$	13
$H2v$	6	4	8	13
Hf	0	0	0	8
	26	24	15	

(b) Vamos determinar uma solução inicial pela regra dos custos mínimos. Necessitamos de 3 + 5 - 1 variáveis básicas.

	$PolirI$	$PolirII$	$PolirIII$	
$H1p$	13 9	— 7	— $-M$	13
$H1v$	— 5	3 6	15 9	18
$H2p$	13 7	— 5	— $-M$	13
$H2v$	0 6	13 4	— 8	13
Hf	— 0	8 0	— 0	8
	26	24	15	

Fazendo uma iteração pelo algoritmo de transpostes:

	0	-2	1
9	13 9	— 0 7	— $-M-10$ $-M$
8	— -3 5	$3+\theta$ 6	$15-\theta$ 9
7	13 7	— 0 5	— $-M-8$ $-M$
6	0 6	$13-\theta$ 4	θ $\boxed{1}$ 8
2	— -2 0	8 0	— -3 0

$$\theta = min(13, 15) = 13$$

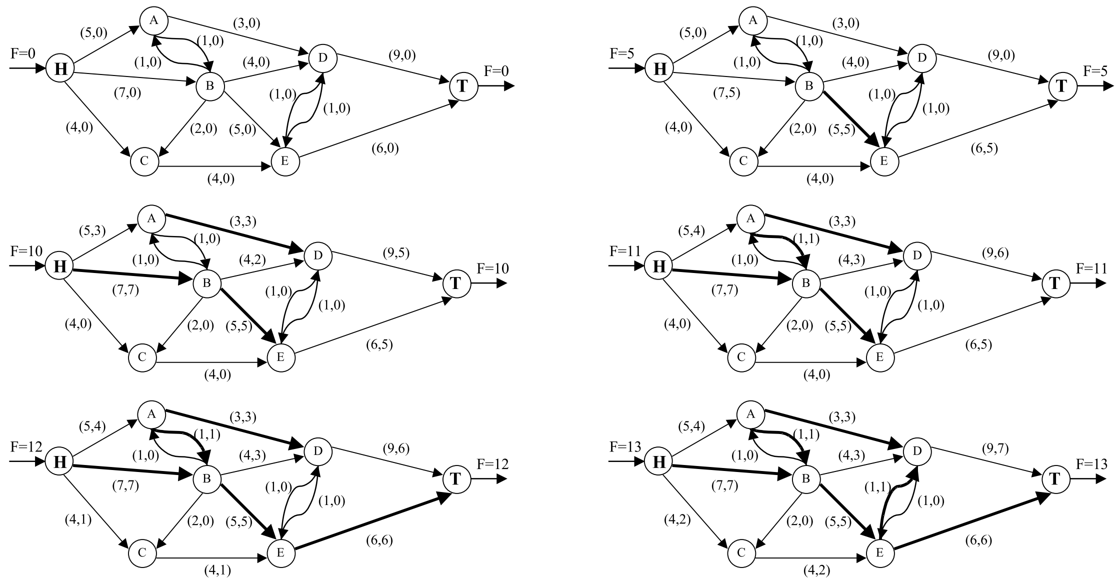
Obtemos o quadro final:

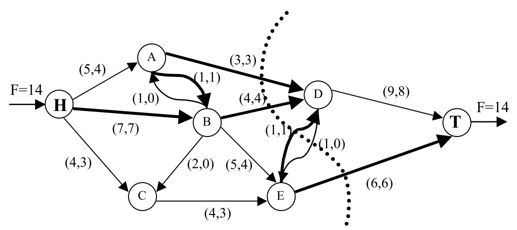
	0	-1	2
9	13 9	— -1 7	— $-M-11$ $-M$
7	— -2 5	16 6	2 9
7	13 7	— -1 5	— $-M-9$ $-M$
6	0 6	— -1 4	13 8
1	— -1 0	8 0	— -3 0

$$\text{Lucro} = 426$$

$$\text{Solução Óptima: } \begin{cases} H1p \xrightarrow{13} PolirI; \\ H1v \xrightarrow{16} PolirII; \\ H1v \xrightarrow{2} PolirIII; \\ H2p \xrightarrow{13} PolirI; \\ H2v \xrightarrow{0} PolirI; \\ H2v \xrightarrow{13} PolirIII; \\ Hf \xrightarrow{8} PolirII; \end{cases}$$

3. **(a)** Seleccionando os caminhos para saturar por ordem descrescente de capacidade:





Para obter a saturação da rede é necessário neste último diagrama considerar um fluxo de uma unidade a atravessar o ramo BE no sentido negativo, o que é admissível aplicando o conceito de adição algébrica de fluxos e desde que o fluxo resultante não seja negativo. Este ramo deixa de estar saturado. O corte indicado prova a optimalidade desta solução.

(b) **Modelo:**

x_{ij} – fluxo que passa no ramo (i, j), de i para j

$$\max x_{HA} + x_{HB} + x_{HC}$$

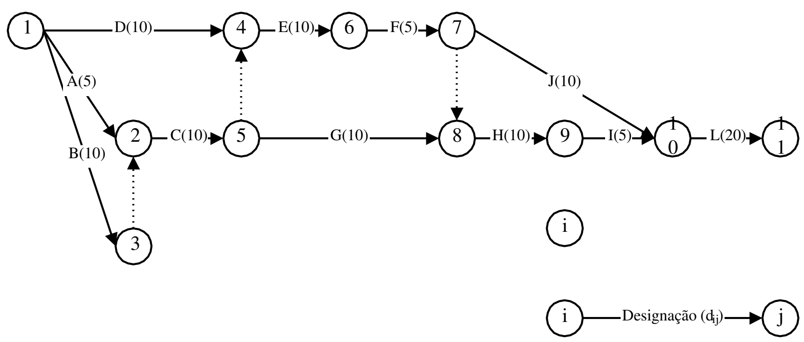
suj. a:

$$
\begin{aligned}
x_{HA} + x_{BA} &= x_{AB} + x_{AD} && \text{(equilíbrio de fluxos nos nós)} \\
x_{AB} + x_{HB} &= x_{BA} + x_{BC} + x_{BE} + x_{BD} \\
x_{HC} + x_{BC} &= x_{CE} \\
x_{AD} + x_{BD} + x_{ED} &= x_{DE} + x_{DT} \\
x_{BE} + x_{CE} + x_{DE} &= x_{ED} + x_{ET} \\
x_{HA} &\leq 5 && \text{(restrições de capacidade)} \\
x_{HB} &\leq 7 \\
x_{HC} &\leq 4 \\
x_{AB} &\leq 1 \\
x_{AD} &\leq 3 \\
x_{BA} &\leq 1 \\
x_{BC} &\leq 2 \\
x_{BD} &\leq 4 \\
x_{BE} &\leq 5 \\
x_{CE} &\leq 4 \\
x_{DT} &\leq 9 \\
x_{DE} &\leq 1 \\
x_{ED} &\leq 1 \\
x_{ET} &\leq 6 \\
x_{ij} &\geq 0, \forall_{i,j}
\end{aligned}
$$

Este é um modelo de programação linear e poderia ser resolvido pelo método simplex.

Nenhuma das equações de equilíbrio de fluxo nos nós é redundante uma vez que não foram consideradas as equações referentes aos nós de entrada e de saída. Do ponto de vista de modelo tal poderia ser verificado observando que nenhuma das equações é linearmente dependente das outras.

4. **(a)** Construindo a rede de projecto obtém-se:



(b) Data de início mais próximo de uma actividade (i,j).

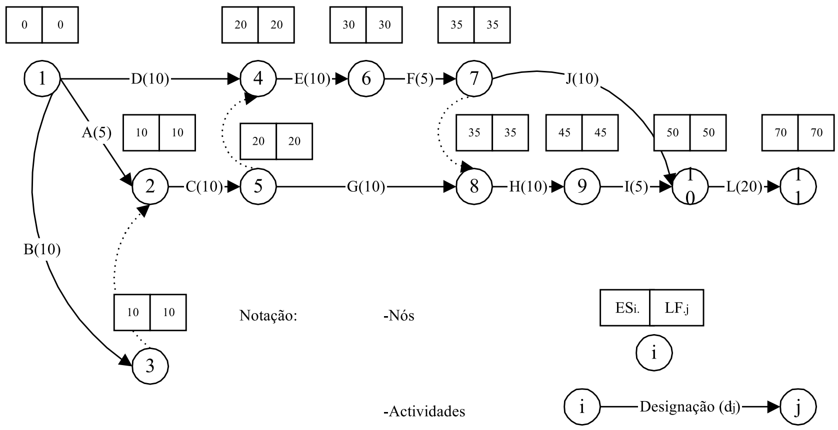
Corresponde à duração do caminho mais longo entre o nó INÍCIO e o nó I, e é comum a todas as actividades que partem do nó i.

$ES_{ij} = max_{k \in \{m \ldots n\}} \left\{ ES_{ki} + d_{ki} \right\}, \forall_j$

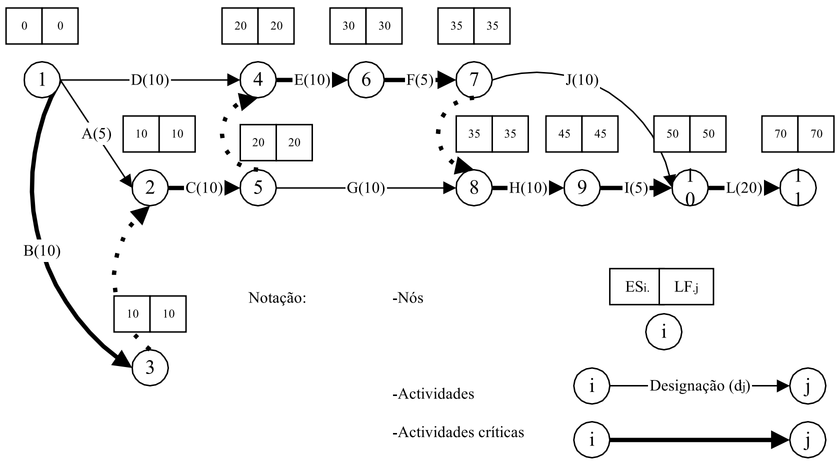
Data de conclusão mais afastada de uma actividade (i,j).

Corresponde à última data em que é possível terminar a actividade sem atrasar o projecto, e é comum a todas as actividades que "chegam" ao nó j

$LF_{ij} = min_{k \in \{m \ldots n\}} \{LF_{jk} - d_{jk}\}, \forall_i$



(c) O caminho crítico é o caminho mais longo (demorado)que liga o nó INÍCIO ao nó FIM. O caminho crítico determina a duração possível do projecto e é constituído pelas actividades críticas.



(d)
- Folga Total - máximo atraso que o início de uma actividade pode sofrer (em relação ao seu início mais próximo), sem que isso implique um atraso no projecto.
  $FT_{ij} = LF_{ij} - (ES_{ij} + d_{ij})$
- Folga Livre - máximo atraso que uma actividade pode sofrer (em relação ao seu início mais próximo), sem impedir que as actividades subsequentes possam ter início nas respectivas datas de início mais próximas.
  $FL_{ij} = ES_{jk} - (ES_{ij} + d_{ij})$

$FT_A = 10 - (5 + 0) = 5$

$FL_A = 10 - (5 + 0) = 5$

$FT_G = 35 - (10 + 20) = 5$

$FL_G = 35 - (10 + 20) = 5$

(e) Duração média do projecto:

$\mu_T = \mu_B + \mu_C + \mu_E + \mu_F + \mu_H + \mu_I + \mu_L = 70$

Variância da duração do projecto:
$\sigma_T^2 = \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + \sigma_E^2 + \sigma_F^2 + \sigma_H^2 + \sigma_I^2 + \sigma_L^2 = 53$
$Prob(D_T > 80) = Prob(D'_T > \frac{80-70}{\sqrt{53}}) = Prob(D'_T > 1.37) \approx (1 - 0.9147) \approx 8.5\%$
A probabilidade de o projecto se atrasar 10 semanas ou mais é de 8.5%.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

Recurso

2000.02.17

Duração: 2 horas e 30 minutos — Com Consulta

1. Duma vez por todas, e já que se trata dum novo hotel da Sonhos e Companhia Limitada, o planeamento diário dos recursos em pessoal de apoio (para quartos, salas, limpeza, etc) vai ser elaborado com mais ponderação. A seguinte tabela representa as necessidades mínimas conforme aos períodos diários, já calculadas com base na experiência em outros hotéis similares da empresa:

Períodos	Horas	Nº mínimo de funcionários
1	06 - 10	30
2	10 - 14	60
3	14 - 18	40
4	18 - 22	70
5	22 - 02	30
6	02 - 06	20

Os funcionários entrarão ao serviço no início de cada período trabalhando 8 horas seguidas (2 períodos), embora com pequenos intervalos. Os períodos 1 e 5 serão pagos 20% acima do valor normal e o 6º período 40% acima do valor normal.

(a) Apresente um modelo de optimização para a resolução deste problema.

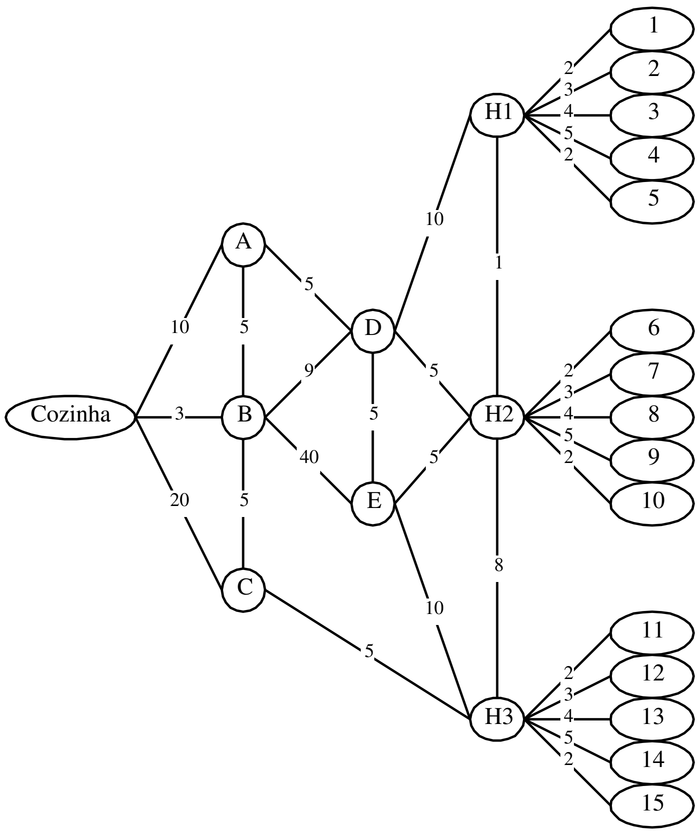
(b) Sem grande apuro, um dos elementos da gestão da Sonhos e Companhia Limitada (que em tempos estudou IO) chegou a uma solução admissível para o problema - ver tabela. Por outro lado, decidiu correr um programa de Programação Linear (variáveis contínuas) de que dispunha (não entrando em conta com o facto do número de funcionários ser inteiro) para assim ver o que seria a solução do problema relaxado, e de algum modo comparar o resultado com a solução admissível já achada. A solução óptima do problema relaxado está também na tabela:

Períodos	Solução admissível	Solução óptima (por Prog. Linear)
1	10	10.000
2	50	50.000
3	0	40.000
4	70	30.000
5	0	0.000
6	20	20.000

Poderá assegurar que a solução óptima obtida por Prog. Linear é uma solução óptima do problema dado? Porquê? O que poderá afirmar sobre a solução admissível?

2. Um dos hotel de ∗∗∗∗∗ da cadeia internacional "Sonhos e Companhia Limitada"decidiu promover uma campanha especial para casais apaixonados: um fim-de-semana que incluía, entre outras mordomias, o serviço de pequenos almoços directamente nos quartos. Esse serviço seria obviamente aproveitado por todos os clientes, o que implicava a entrega de um grande número de pequenos almoços.

Um dos empregados dos escritórios tentou resolver o problema, e começou por obter a rede apresentada na figura seguinte, onde os valores indicados nos ramos indicam o "inconveniente"associado ao transporte de um pequeno almoço entre dois nós. Ajude agora o empregado (utilizando o algoritmo de Dijkstra), determinando os caminhos a percorrer entre a cozinha e TODOS os quartos, por forma a minimizar os "inconvenientes".



3. Um dos hotéis de 5 estrelas da "Sonhos e Companhia Limitada" foi escolhido para acolher uma conferência científica que se vai realizar em Portugal. Os responsáveis da conferência reservaram todos os quartos disponíveis e acordaram com o director do hotel que o hotel se encarregaria de disponibilizar todas as refeições (pequeno almoço, almoço e jantar) para os participantes da conferência.

Durante o período (5 dias) de realização da conferência, alguns dos serviços do hotel terão de ser reforçados para responder às necessidades da conferência. O director do hotel pode recorrer a funcionários de 2 hotéis da "Sonhos e Companhia Limitada" existentes nas proximidades (um de 4 estrelas e outro de 3 estrelas) ou então recorrer a duas empresas especializadas (a "DesenrascaEmpregados"" e a "QualityMen"). De seguida estão descritos os custos e as limitações associadas a cada alternativa à disposição do director:

- O hotel de 3 estrelas pode disponibilizar funcionários de média qualidade a um custo unitário de 300 unidades monetárias;

- O hotel de 4 estrelas pode disponibilizar 3 funcionários de alta qualidade a um custo unitário de 350 unidades monetárias;
- A "DesenrascaEmpregados" pode disponibilizar funcionários de média qualidade a um custo unitário de 280 unidades monetárias;
- A "QualityMen" pode disponibilizar funcionários de alta qualidade a um custo unitário de 340 unidades monetárias;
- São necessários 8 funcionários de média qualidade e 5 de alta qualidade;
- Para garantir os elevados padrões de qualidade da "Sonhos e Companhia Limitada", o director do hotel prefere que o número de funcionários vindos dos outros hotéis seja superior ao dos funcionários a contratar.

(a) Formule este problema como Programação Linear e resolva-o pelo método simplex.

(b) Comente a solução obtida e a adequabilidade do modelo de Programação Linear, e da técnica de resolução utilizada, a este problema concreto.

4. Como é habitual em qualquer unidade hoteleira, os hotéis da "Sonhos e Companhia Limitada" têm mecanismos de avaliação da satisfação dos clientes, quer da iniciativa dos próprios (as habituais caixas de sugestões), quer interpelando directamente os clientes através de entrevistas pessoais.

O Departamento de Qualidade detectou uma queixa recorrente na unidade de Santa Maria do Bouro: à hora do pequeno-almoço os hóspedes têm que esperar demasiado tempo por um elevador quando pretendem descer do restaurante para os quartos ou para a recepção do hotel. Objectivando, a maioria dos clientes afirma ter de esperar mais de 5 minutos para conseguir descer no elevador. Intrigado com esta afirmação o Departamento de Qualidade promoveu um estudo do serviço de elevadores do hotel de Santa Maria do Bouro, no horário do pequeno-almoço, tendo recolhido a seguinte informação:

- número de elevadores em serviço – 2
- tempo médio entre paragens de um elevador no andar do restaurante – 1.5 minutos
- número médio de pessoas transportado em cada viagem, por cada elevador – 8
- número médio de pessoas que chegam, por minuto, à fila para os elevadores – 8

Verifique se a afirmação dos clientes, em termos médios, é correcta.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

Recurso

2000.02.17

Resolução

1. **(a)** Definem-se:

X_i $(i = 1, \ldots, 6)$ – número de funcionários que entra ao serviço no início do período i.

Então o modelo de optimização poderá ser:

$$\min \text{custo} = 1.2(X_1 + X_5) + X_2 + X_3 + X_4 + 1.4X_6$$

suj. a:

$$\begin{aligned} X_1 + X_6 &\geq 30 \\ X_2 + X_1 &\geq 60 \\ X_3 + X_2 &\geq 40 \\ X_4 + X_3 &\geq 70 \\ X_5 + X_4 &\geq 30 \\ X_6 + X_5 &\geq 20 \\ X_i &\geq 0 \text{ e inteiras} \end{aligned}$$

(b) Tópicos de resposta:

- A solução óptima do problema relaxado é óptima para o problema dado. A PL encontrará a melhor solução (com variáveis inteiras incluídas).
- A solução admissível é também óptima porque atribui à função objectivo o mesmo valor - para esta função objectivo o valor óptimo é 160.

2. A partir da rede dada no enunciado pode-se verificar que só se pode chegar a cada um dos quartos se se passar pelo respectivo hall, sendo assim, a determinação da inconveniência mínima para chegar a cada um dos quartos passa por:

(a) Determinar (utilizando o algoritmo de Dijkstra) o percurso com a inconveniência mínima para chegar a cada um dos três halls.

(b) Adicionar a esse percurso o percurso do hall respectivo para cada quarto.

Seguindo o procedimento descrito, obtivemos o seguinte quadro:

	Nós								
iter	Cozinha	A	B	C	D	E	H1	H2	H3
0	0*	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0*	10	3*	20	∞	∞	∞	∞	∞
2	0*	8*	3*	8	12	43	∞	∞	∞
3	0*	8*	3*	8*	12	43	∞	∞	∞
4	0*	8*	3*	8*	12*	43	∞	∞	13
5	0*	8*	3*	8*	12*	17	22	17	13*
6	0*	8*	3*	8*	12*	17*	22	17	13*
7	0*	8*	3*	8*	12*	17*	22	17	13*
8	0*	8*	3*	8*	12*	17*	18*	17*	13*

Percurso com inconveniência mínima entre a cozinha e os quartos 1 a 5:

cozinha → B → D → H2 → H1 → Quartos 1 a 5.

A inconveniência de cada percurso obtém-se somando a 18 (cozinha → H1) a inconveniência de chegar de H1 a cada um dos quartos.

Percurso com inconveniência mínima entre a cozinha e os quartos 6 a 10:

cozinha → B → D → H2 → Quartos 6 a 10.

A inconveniência de cada percurso obtém-se somando a 17 (cozinha → H2) a inconveniência de chegar de H2 a cada um dos quartos.

Percurso com inconveniência mínima entre a cozinha e os quartos 11 a 15:

cozinha → B → C → H3 → Quartos 11 a 15.

A inconveniência de cada percurso obtém-se somando a 13 (cozinha → H3) a inconveniência de chegar de H3 a cada um dos quartos.

3. **(a)** Variáveis de decisão:

H_3 — número de empregados a requisitar ao hotel de 3 estrelas;
H_4 — número de empregados a requisitar ao hotel de 4 estrelas;
D — número de empregados a contratar à “DesenrascaEmpregados”;
Q — número de empregados a contratar à “QualityMen”;

Modelo:

$$min\,\text{CUSTO} = 300H_3 + 350H_4 + 280D + 340Q$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} H_3 & & & + & D & & & \geq & 8 \\ & & H_4 & & & + & Q & \geq & 5 \\ -H_3 & - & H_4 & + & D & + & Q & \leq & 0 \\ & & H_4 & & & & & \leq & 3 \\ H_3 & , & H_4 & , & D & , & Q & \geq & 0 \end{array}$$

Introduzindo varáveis de folga e variáveis artificiais e usando o método das penalidades para retirar as variáveis artificiais da base:

$$min\,Z = 300H_3 + 350H_4 + 280D + 340Q + M\,(a_1 + a_2)$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcrcl}
H_3 & & & + & D & & & - & f_1 & & & & & & & + & a_1 & & & \geq & 8 \\
 & & H_4 & & & + & Q & & & - & f_2 & & & & & & & + & a_2 & \geq & 5 \\
-H_3 & - & H_4 & + & D & + & Q & & & & & + & f_3 & & & & & & & \leq & 0 \\
 & & H_4 & & & & & & & & & & & + & f_4 & & & & & \leq & 3 \\
H_3 & , & H_4 & , & D & , & Q & , & f_1 & , & f_2 & , & f_3 & , & f_4 & , & a_1 & , & a_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Para construir o quadro simplex inicial falta exprimir a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas, para assim se obterem os custos marginais:

$$a_1 = 8 - H_3 - D + f_1$$

$$a_2 = 5 - H_4 - Q + f_2$$

$$\begin{aligned}
Z &= 300H_3 + 350H_4 + 280D + 340Q + M\,(a_1 + a_2) \\
&= 300H_3 + 350H_4 + 280D + 340Q + M\,(8 - H_3 - D + f_1 + 5 - H_4 - Q + f_2) \\
&= (300 - M)H_3 + (350 - M)H_4 + (280 - M)D + (340 - M)Q + M\,f_1 + M\,f_2 + 13M
\end{aligned}$$

Fazendo agora as iterações pelo método simplex:

	H_3	H_4	D	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	a_1	a_2	
a_1	1	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	8
a_2	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	1	5
$\Leftarrow f_3$	-1	-1	$\boxed{1}$	1	0	0	1	0	0	0	0
f_4	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3
$-Z$	300	350	280	340	0	0	0	0	0	0	0
	$-M$	$-M$	$-M$	$-M$	M	M	0	0	0	0	$-13M$
			$\Uparrow$								

Nota: A linha dos custos marginais está dividida em duas com a única finalidade de simplificar os cálculos. A soma das duas linhas representa o custo marginal (p.ex.: $300 - M$).

	H_3	H_4	D	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	a_1	a_2	
$\Leftarrow a_1$	$\boxed{2}$	1	0	-1	-1	0	-1	0	1	0	8
a_2	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	1	5
D	-1	-1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
f_4	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3
$-Z$	580	630	0	60	0	0	-280	0	0	0	0
	$-2M$	$-2M$	0	0	M	M	M	0	0	0	$-13M$
	$\Uparrow$										

	H_3	H_4	D	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	a_1	a_2	
H_3	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	4
a_2	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	1	5
D	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	4
$\Leftarrow f_4$	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	1	0	0	3
$-Z$	0	340	0	350	290	0	10	0	-290	0	-2320
	0	$-M$	0	$-M$	0	M	0	0	M	0	$-5M$
		$\Uparrow$									

	H_3	H_4	D	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	a_1	a_2	
H_3	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
$\Leftarrow a_2$	0	0	0	$\boxed{1}$	0	-1	0	-1	0	1	2
D	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{11}{2}$
H_4	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3
$-Z$	0	0	0	350	290	0	10	-340	-290	0	-3340
	0	0	0	$-M$	0	M	0	M	M	0	$-2M$
				$\Uparrow$							

	H_3	H_4	D	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	a_1	a_2	
H_3	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
Q	0	0	0	1	0	-1	0	-1	0	1	2
D	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
H_4	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	3
$-Z$	0	0	0	0	290	350	10	10	-290	-350	-4040
	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	0

Solução óptima:

$$H_3 = \frac{7}{2} \quad H_4 = 3 \quad D = \frac{9}{2} \quad Q = 2$$

$$Z^* = 4040$$

4. Neste problema o atendimento é em grupo (são transportadas 8 pessoas de cada vez). Para contemplar esta situação basta dividir o número de chegadas ao sistema por 8 e resolver como habitualmente.

Taxa de chegada:

$$\lambda = 1 \quad \frac{\text{grupos de 8 pessoas}}{\text{minuto}}$$

Taxa de atendimento:

$$\mu = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} \quad \frac{\text{grupos de 8 pessoas}}{\text{minuto}}$$

Objecto do estudo: pretende-se verificar se a afirmação:
"espera-se mais de 5 minutos por um elevador"
é verdadeira ou não.

$$S = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Fila M/M/2}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{S \times \mu} = \frac{3}{4}$$

$$P_0 = 0.1438$$

Número médio de grupos de 8 pessoas na fila:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.1438(1.5)^2 0.75}{2!(1-0.75)^2} = 1.9413$$

Finalmente, o tempo médio de espera na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.9413}{1} = 1.9413 \quad \text{minutos.}$$

Logo a afirmação dos clientes, em média, é incorrecta.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

1ª chamada

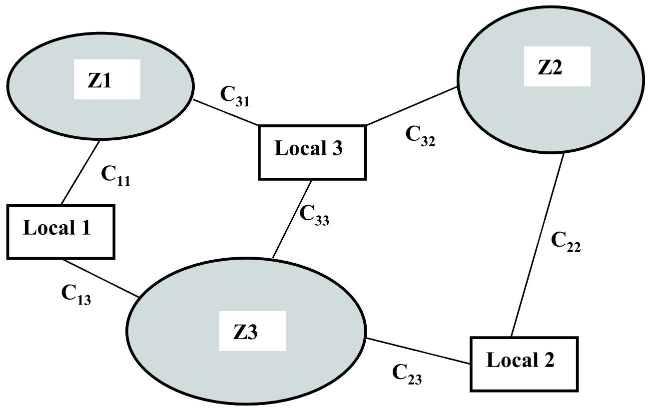
2001.01.09

Duração: 2 horas — Com Consulta

Responda a cada questão numa folha separada

1. A TRANSPORTO necessita, inevitavelmente, de duas novas estações de Recolha e Manutenção para os seus autocarros. Novos autocarros vão ser adquiridos para melhorar o serviço prestado, e para fazer face à desactivação da linha de comboio entre a Sª da Hora e a Trindade, para futura instalação do Metro.

Uma dessas duas novas estações poderá resultar da recuperação e expansão duma estação actualmente existente – no Local 1.



Há 3 locais candidatos para localização dessas estações, Local 1 (onde actualmente já se encontra uma estação), Local 2 e Local 3, conforme à figura. As duas novas estações servirão então 3 zonas clientes da grande cidade, Z_1, Z_2 e Z_3, devidamente identificadas pela empresa, com uma necessidade de autocarros de, respectivamente, A_1, A_2 e A_3 unidades. Os projectos das instalações permitirão que dois locais/estações quaisquer possam satisfazer todas as necessidades previstas em autocarros, das 3 zonas. No entanto, o Local 1 apenas abastecerá as zonas Z_1 e Z_3 e o Local 2 apenas as zonas Z_2 e Z_3. Já o Local 3 poderá disponibilizar autocarros para todas as zonas. O custo unitário do serviço da zona j a partir do Local i é C_{ij}.

A empresa dispõe dos seguintes dados da tabela:

Local	Capacidade	Investimento inicial	Custo unitário de operação
1	K_1	I_1	O_1
2	K_2	I_2	O_2
3	K_3	I_3	O_3

O investimento inicial I_1, no Local 1, será relativamente baixo, pelo facto de aí já existir uma estação. Também por esse facto, se o Local 1 não for seleccionado, o espaço e as instalações correspondentes poderão render o valor R_1.

O problema de decisão/optimização que a TRANSPORTO enfrenta é o da selecção de dois locais convenientes para localizar as duas novas Estações de Recolha e Manutenção, optimizando o resultado final, receita, se houver, menos o custo total de investimento inicial, de operação e de serviço.

Apresente um modelo de optimização, que deverá caracterizar, para este problema.

2. O sindicato dos maquinistas da CP (*Comboios Portuenses*) convocou uma greve para a próxima segunda-feira, que vai afectar fortemente a população da área metropolitana do Porto. De forma a minimizar os efeitos negativos desta greve, o conselho de administração da TRANSPORTO decidiu implementar um sistema de transportes alternativos.

A solução encontrada foi o recurso a autocarros de passageiros alugados a empresas privadas. Uma consulta ao mercado mostrou existirem três empresas (R.E.S.END, SANTO ESPÍRITO e GONDOLENSE) interessadas em alugar autocarros à TRANSPORTO.

O estudo dos fluxo de passageiros, quantidades e destinos, diariamente transportados pela CP mostrou serem necessários 50 autocarros. Para corrigir uma injustiça ocorrida durante o aluguer de autocarros aquando da última greve, o conselho de administração da TRANSPORTO pretende que o número de autocarros alugados à SANTO ESPÍRITO seja no máximo $\frac{1}{3}$ do número de autocarros alugados à GONDOLENSE.

A R.E.S.END tem 15 autocarros disponíveis para aluguer a um custo 100 mil escudos por dia. A SANTO ESPÍRITO dispõe de 55 autocarros a um custo de 95 mil escudos por dia. A GONDOLENSE tem autocarros para alugar a 115 mil escudos por dia, não indicando nenhum valor para o número de autocarros disponíveis.

Ajude o conselho de administração da TRANSPORTO a encontrar o melhor plano para o aluguer dos autocarros.

Formule este problema como Programação Linear e resolva a sua relaxação linear (isto é, não considerando as condições de integralidade para as variáveis) pelo método simplex.

3. A TRANSPORTO realiza periodicamente o planeamento do trabalho das suas equipas de fiscalização de títulos de transporte. Numa primeira fase, esse planeamento tem lugar a um nível agregado, com base numa divisão do dia de trabalho em três períodos, e da área de intervenção em cinco grandes zonas: Cintura Norte, Radial Norte, Centro, Radial Sul e Cintura Sul. A empresa procedeu recentemente a um estudo que permitiu determinar o número máximo de equipas a colocar em cada zona, e em cada um dos períodos:

Zonas	Período 1	Período 2	Período 3
Cintura Norte	—	5	—
Radial Norte	8	4	10
Centro	13	15	18
Radial Sul	18	13	6
Cintura Sul	—	4	—

Cada equipa começa o dia numa dada zona, no período seguinte poderá manter-se nessa zona ou fiscalizar outra zona e no terceiro período idem. Por exemplo, uma equipa poderá fiscalizar a zona Radial Norte no 1º período, a zona Cintura Norte no segundo e tornar a fiscalizar a Radial Norte no terceiro período. Com base na experiência da empresa nesta actividade, existe um conjunto de directivas em relação à organização do trabalho, a seguir estritamente no planeamento:

- Do primeiro para o segundo período:
  - As equipas que estavam na Radial Norte só podem manter-se nessa zona ou ser transferidas para a Cintura Norte.
  - As equipas que estavam na zona Centro só podem manter-se nessa zona ou ser transferidas para a Radial Sul.
  - As equipas que estavam na Radial Sul são obrigatoriamente transferidas para a Cintura Sul.
- Do segundo para o terceiro período:
  - As equipas que estavam na Cintura Norte são obrigatoriamente transferidas para a Radial Norte;
  - As equipas que estavam na Cintura Sul são obrigatoriamente transferidas para a Radial Sul;
  - As equipas que estavam na Radial Sul só podem manter-se nessa zona.
  - As equipas que estavam na Radial Norte são obrigatoriamente transferidas para o Centro.
  - As equipas que estavam na zona Centro só podem manter-se nessa zona.

Com base nesta informação, a TRANSPORTO pretende determinar o número máximo de equipas de fiscalização que podem perfazer os três períodos completos, e uma organização de trabalho que permita atingir esse objectivo.

(a) Com base nesta informação construa uma rede correspondente às várias sequências de zonas que se podem construir, com as zonas correspondendo aos ramos, respeitando as restrições apresentadas. Não se esqueça que em cada período cada zona (ramo) só pode aparecer uma vez.

(b) Resolva o problema como um problema de fluxo máximo, recorrendo ao algoritmo apresentado nas aulas.

4. A equipa de futebol do Futebol Clube do Porto (FCP) irá disputar os quartos de final da Taça UEFA contra o Roma. Como é sabido esta eliminatória disputa-se num sistema de duas mãos, com um primeiro jogo em Roma no dia 8 de Março e um segundo jogo no Estádio das Antas no dia 15 de Março.

É por causa deste jogo que os responsáveis da TRANSPORTO se encontram reunidos com a Direcção da Sociedade Anónima Desportiva (SAD) para o futebol do FCP. Os jogos das competições europeias atraem tradicionalmente muitos adeptos ao estádio, e um jogo dos quartos de final contra o Roma, que para aqui chegar derrotou o Liverpool, será com certeza um jogo de casa cheia. Bem, com certeza não... Depende bastante do resultado da primeira mão. É sabido que um mau resultado no jogo da primeira mão desmoraliza as hostes futebolísticas e a afluência ao jogo da segunda mão é bastante menor. E é isto exactamente que os responsáveis pelos eventos especiais da TRANSPORTO estão a fazer na sede da SAD Portista: estimar o público que irá estar presente neste jogo para planear os transportes públicos para essa noite.

Considerou-se que, para efeito de afluência ao jogo, o resultado do primeiro jogo poderia ser classificado a partir da diferença de golos: 2 golos ou mais contra o FCP, 1 golo contra o FCP, igual número de golos (empate), 1 golo a favor do FCP, 2 golos ou mais a favor do FCP. Do ponto de vista do transporte dos adeptos para e do Estádio das Antas as alternativas que estão sobre a mesa são a manutenção do número e frequência de veículos habitual, que corresponde a uma capacidade de transporte em tempo útil[1] de cerca de 5000 passageiros, duplicar esta capacidade ou quadruplicá-la. A relação entre os resultados do primeiro jogo e o número de espectadores no jogo está representada na tabela seguinte:

Resultado	Número de espectadores
Derrota por 2 golos ou mais	5000
Derrota por um golo	10000
Empate	30000
Vitória por um golo	45000
Vitória por dois golos ou mais	50000

Também é sabido que cerca de 40% dos adeptos procurarão os serviços da TRANSPORTO para irem assistir ao jogo.

Do ponto de vista económico há a considerar o custo de operar a frota com a capacidade habitual (750 contos), com o dobro da capacidade (2000 contos) ou com o quádruplo da capacidade (4000 contos). Cada passageiro transportado pagará dois bilhetes de 100$00 (um para a ida e outro para a volta a casa). A TRANSPORTO aposta fortemente no incremento da utilização dos transportes públicos, nomeadamente através da implementação de um serviço de qualidade. Assim decidiu impor a si própria uma penalização de 100$00 por cada passageiro que usa os transportes públicos mas não é transportado em tempo útil por falta de capacidade.

(a) Determine pelo critério de decisão de Laplace qual a decisão que maximiza os lucros da TRANSPORTO.

(b) Entrando agora com as questões desportivas, a SAD do FCP atribuiu as seguintes probabilidades aso resultados do jogo da primeira mão:

Resultado	Probabilidade
Derrota por 2 golos ou mais	0.05
Derrota por um golo	0.1
Empate	0.5
Vitória por um golo	0.2
Vitória por dois golos ou mais	0.15

Determine pelo critério da maximização do valor esperado a decisão que maximiza os lucros da TRANSPORTO.

[1] Sair de casa uma hora e trinta antes do início do jogo e estar de regresso uma hora após o fim do jogo.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

1ª chamada

2001.01.09

Resolução

1. Definam-se as seguintes variáveis, contínuas e binárias:

$$x_{ij} \quad - \quad \text{quantidade de autocarros a enviar do } Local_i \text{ para } Z_j$$

$$l_i = \begin{cases} 1 \text{ , se o } Local_i \text{ é escolhido} \\ 0 \text{ , se o } Local_i \text{ não é escolhido} \end{cases}$$

Então surge o seguinte modelo de Programação Inteira:

$$\begin{aligned} \text{Max } R \;=\; & R_1\,(1-l_1) - [I_1\,l_1 + C_{11}\,x_{11} + C_{13}\,x_{13} + \\ & + O_1\,(x_{11}+x_{13}) + I_2\,l_2 + C_{22}\,x_{22} + C_{23}\,x_{23} + \\ & + O_2\,(x_{22}+x_{23}) + I_3\,l_3 + C_{31}\,x_{31} + C_{32}\,x_{32} + C_{33}\,x_{33} + \\ & + O_3\,(x_{31}+x_{32}+x_{33})] \end{aligned}$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccccl} x_{11} & & & + & x_{13} & \leq & K_1\,l_1 \\ & & x_{22} & + & x_{23} & \leq & K_2\,l_2 \\ x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & \leq & K_3\,l_3 \\ x_{11} & & & + & x_{31} & \geq & A_1 \\ & & x_{22} & + & x_{32} & \geq & A_2 \\ x_{13} & + & x_{23} & + & x_{33} & \geq & A_3 \\ l_1 & + & l_2 & + & l_3 & = & 2 \end{array}$$

$$l_i \in \{0,1\} \quad (i=1,2,3)$$
$$x_{ij} \geq 0 \;, \quad (i,j)$$

2. **Nota:** A resolução deste problema obriga à utilização de um modelo de programação inteira, de modo a garantir a integralidade da solução obtida. O modelo apresentado resolve a relaxação linear do problema apresentado, tal como é pedido no enunciado.

Variáveis de decisão:

X_1 — número de autocarros a alugar à R.E.S.END;

X_2 — número de autocarros a alugar à SANTO ESPÍRITO;

X_3 — número de autocarros a alugar à GONDOLENSE;

Modelo:

$$min\,\text{CUSTO} = 100X_1 + 95X_2 + 115X_3$$

$$\begin{array}{lcccccl}
\text{suj. a:} & & & & & & \\
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & 50 \\
 & & 3X_2 & - & X_3 & \leq & 0 \\
X_1 & & & & & \leq & 15 \\
 & & X_2 & & & \leq & 55 \\
X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Na resolução deste problema, não é necessário considerar a restrição $X_2 \leq 55$, dado que o número de autocarros disponíneis (55) é superior ao número de autocarros necessários (50).

Introduzindo varáveis de folga e variáveis artificiais, e usando o método das penalidades para retirar as variáveis artificiais da base:

$$min\,Z = 100X_1 + 95X_2 + 115X_3 + M\,a_1$$

$$\begin{array}{lcccccccccccl}
\text{suj. a:} & & & & & & & & & & & & \\
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & & & & + & a_1 & = & 50 \\
 & + & 3X_2 & - & X_3 & + & s_2 & & & & & = & 50 \\
X_1 & & & & & & & + & s_3 & & & = & 15 \\
X_1 & , & X_2 & , & X_3 & , & s_2 & , & s_3 & , & a_1 & \geq & 0
\end{array}$$

Para construir o quadro simplex inicial falta exprimir a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas, para assim se obterem os custos marginais:

$$a_1 = 50 - X_1 - X_2 - X_3$$

$$\begin{aligned}
Z &= 100X_1 + 95X_2 + 115X_3 + M\,a_1 \\
&= 100X_1 + 95X_2 + 115X_3 + M\,(50 - X_1 - X_2 - X_3) \\
&= (100 - M)X_1 + (95 - M)X_2 + (115 - M)X_3 + 50M
\end{aligned}$$

Fazendo agora as iterações pelo método simplex:

		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	
	A_1	1	1	1	0	0	1	50
$\Leftarrow$	S_2	0	$\boxed{3}$	-1	1	0	0	0
	S_3	1	0	0	0	1	0	15
	$-Z$	100	95	115	0	0	0	0
		$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$-50M$
			$\Uparrow$					

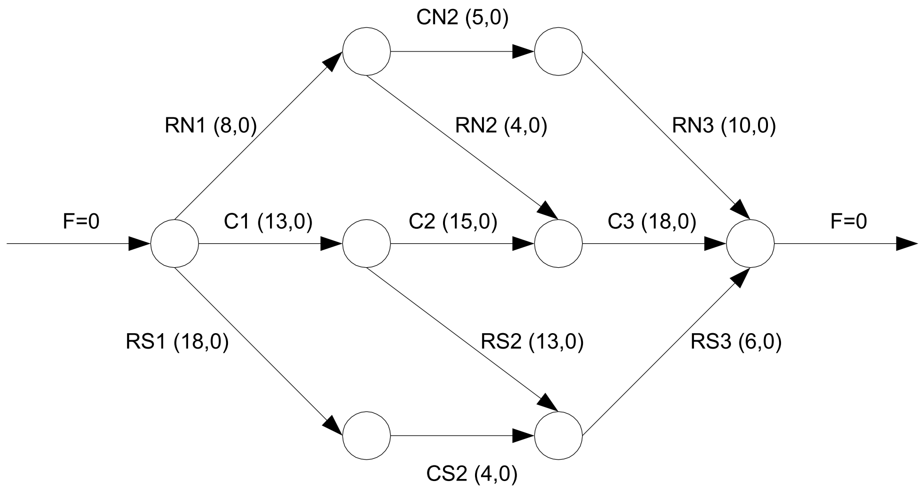
		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	
$\Leftarrow$	A_1	1	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	50
	X_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
	S_3	1	0	0	0	1	0	15
	$-Z$	100	0	$\frac{440}{3}$	$-\frac{95}{3}$	0	0	0
		$-M$	0	$-\frac{4}{3}M$	$\frac{1}{3}M$	0	0	$-50M$
				$\Uparrow$				

		X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	A_1	
	X_3	$\frac{3}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{75}{2}$
	X_2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{2}$
$\Leftarrow$	S_3	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	15
	$-Z$	-10	0	0	5	0	-110	-5500
		0	0	0	0	0	M	0
		$\Uparrow$						

	X_1	X_2	X_3	S_2	S_3	
X_3	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{105}{4}$
X_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{35}{4}$
X_1	1	0	0	0	1	15
$-Z$	0	0	0	5	10	-5350

A solução óptima é alugar 15 autocarros à R.E.S.END, 8.75 à SANTO ESPÍRITO e 26.25, com um custo total de 5.350.000$00.

3. Rede de sequências de zonas:

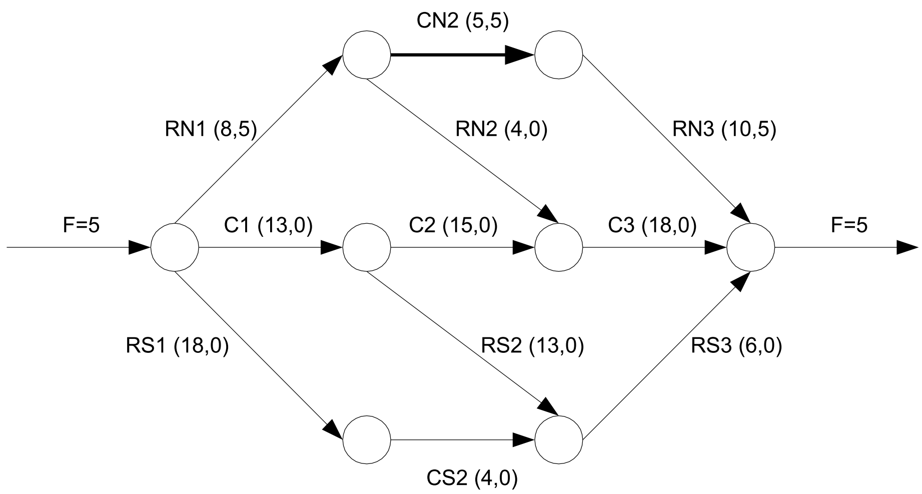


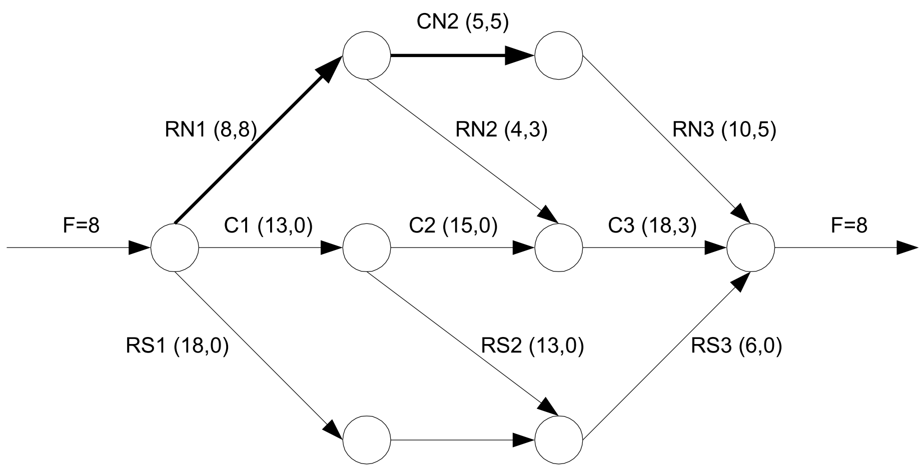
Legenda:

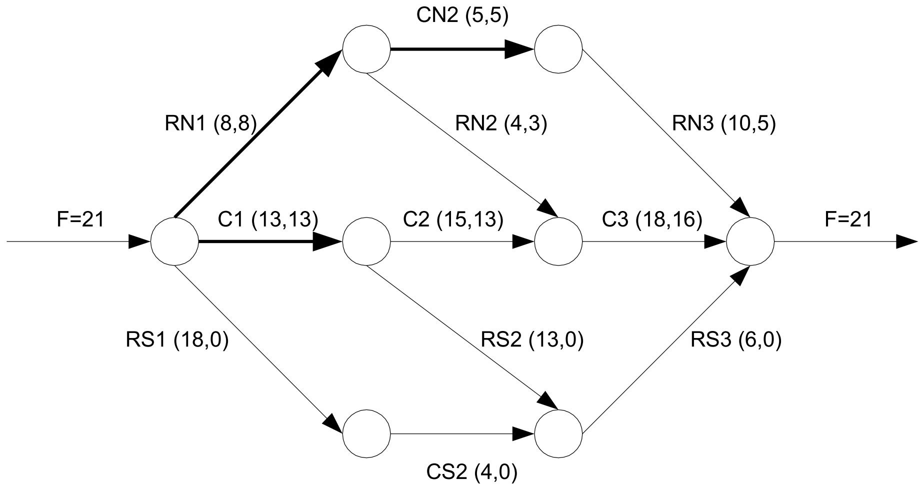
CN - Cintura Norte
RN - Radial Norte
C - Centro
RS - Radial Sul
CS - Cintura Sul

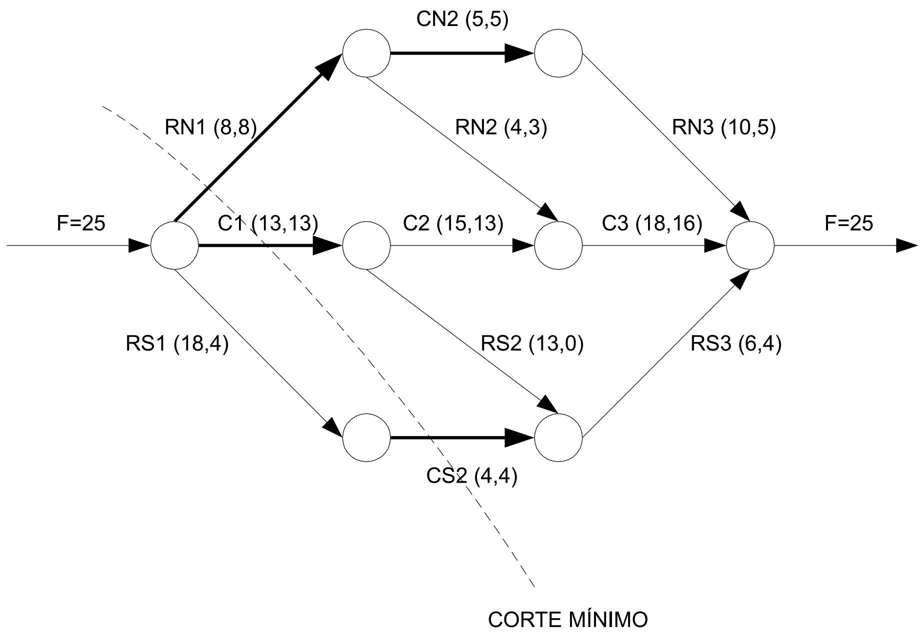
O número após a sigla indica o período do dia.

Saturando de cima para baixo:









A TRANSPORTO poderá colocar um máximo de 25 equipas de fiscalização a realizar os três períodos completos.

Uma possível organização de trabalho, correspondente às iterações realizadas, seria a seguinte:

Nº de equipas	Período 1	Período 2	Período 3
5	Radial Norte	Cintura Norte	Radial Norte
3	Radial Norte	Radial Norte	Centro
13	Centro	Centro	Centro
4	Radial Sul	Cintura Sul	Radial Sul

4. A matriz de decisão que a seguir se apresenta foi construída tendo em atenção os seguintes aspectos:

- As necessidades de transporte são calculadas a partir do número de espectadores esperado para cada resultado da primeira mão, afectado pela percentagem correspondente aos adeptos que procurarão os serviços da TRANSPORTO.
- As capacidades de transporte correspondem a manter a frota, duplicá-la ou quadruplicá-la.
- Os passageiros que não podem ser transportados em tempo útil procuram outro meio de transporte, pelo que não pagam os 2 bilhetes de 100\$00, apenas provocam o tal "prejuízo" de 100\$00. Alternativamente poder-se-ia considerar que eles vão ao jogo de qualquer modo com a TRANSPORTO, mas insatisfeitos. Nesse caso esses clientes pagariam 2 bilhetes de 100\$00 mas a sua insatisfação "custaria" à TRANSPORTO 100\$00. Não foi essa a filosofia seguida na presente resolução.

		Estados da natureza (necessidades de transporte)					Alínea a)	Alínea b)
Número de espectadores		2000	4000	12000	18000	20000	Lucro	Lucro
Probabilidades (alínea b)		0,05	0,1	0,5	0,2	0,15	médio	esperado
Decisões (capacidade de transporte)	5000	2000x0,2 -0 -750 = **-350**	4000x0,2 -0 -750 = **50**	5000x0,2 -7000x0,1 -750 = **-450**	5000x0,2 -13000x0,1 -750 = **-1050**	5000x0,2 -15000x0,1 -750 = **-1250**	**-610**	-635
	10000	2000x0,2 -0 -2000 = **-160**	4000x0,2 -0 -2000 = **-1200**	10000x0,2 -2000x0,1 -2000 = **-200**	10000x0,2 -8000x0,1 -2000 = **-800**	10000x0,2 -10000x0,1 -2000 = **-1000**	-960	**-610**
	20000	2000x0,2 -0 -4000 = **-3600**	4000x0,2 -0 -4000 = **-3200**	12000x0,2 -0 -4000 = **-1600**	18000x0,2 -0 -4000 = **-400**	20000x0,2 -0 -4000 = **0**	-1760	-1380

(a) A decisão que maximiza o lucro segundo o critério de Laplace (ou do lucro médio) seria manter a frota e resultaria num lucro negativo (prejuízo) de 610 contos (mesmo sendo negativo é, em média, o menos negativo).

(b) A decisão que maximiza o lucro segundo o critério do máximo lucro esperado seria duplicar a frota e isso resultaria também num lucro de -610 contos.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

1ª chamada

2002.01.08

Duração: 2 horas e 30 minutos — Com Consulta

Responda a cada questão numa folha separada

1. Quem pensou que com a mudança de instalações da FEUP para a Asprela iam deixar de ser necessárias obras estava muito enganado. Pouco tempo depois de concluída a mudança começaram a chover pedidos para os serviços técnicos e de manutenção (STM), exigindo a alteração de posição de uma parede, a demolição de parte de uma fachada, a alimentação de água e esgotos num canto recôndito de um laboratório, a alimentação trifásica numa zona onde antes só se previa a instalação de máquinas monofásicas, etc. Por vezes, alguns dias depois, o pedido era anulado e substituído por outro ou então alterado.

A Direcção da FEUP decidiu que seria melhor esperar aproximadamente meio ano até os pedidos estabilizarem, para depois fazer uma análise global para poder tomar melhores decisões.

Findo esse meio ano, foram recolhidos e analisados todos os pedidos que tinham entretanto surgido. Para cada pedido foi feita uma avaliação da prioridade da sua execução e custo estimado. Esses dados foram resumidos na tabela seguinte, onde também se indica por que Departamento/Serviço foi feito o pedido.

Os níveis de prioridade são 1, 2, e 3, onde o nível 1 corresponde à prioridade máxima. Os únicos Departamentos que fizeram pedidos de obras foram o Departamento de Engenharia Civil (DEC), o Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores (DEEC) e o Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial (DEMEGI). Relativamente aos serviços, todos os pedidos são do CICA.

Nº do pedido	Prioridade	Custo estimado (kEuro)	Depart/Serviço responsável
1	1	200	DEC
2	2	2000	DEEC
3	1	100	CICA
4	1	4000	CICA
5	3	400	DEEC
6	1	500	CICA
7	2	700	CICA
8	1	2500	DEC
9	3	1800	DEMEGI
10	2	600	DEEC
11	1	100	DEMEGI
12	3	900	DEEC
13	2	1100	DEC
14	3	1500	DEMEGI

(a) Depois de muitas negociações com os Departamentos e Serviços que fizeram os pedidos, a Direcção decidiu que deveria ser tido em conta o seguinte:

- as obras decorrerão em duas fases;

- na primeira fase será atendido um número de pedidos igual para cada Departamento/Serviço;
- na segunda fase serão atendidos os restantes pedidos;
- o valor a gastar em obras na primeira fase não pode exceder 8.000 kEuro;
- as penalidades a aplicar dependem das prioridades dos pedidos e da fase em que são atendidos. Para pedidos atendidos na fase 1, a penalidade é igual à prioridade; para pedidos atendidos na fase 2, a penalidade é igual a 3-prioridade.
- pretende-se fazer o plano das obras, minimizando a soma das penalidades associadas.

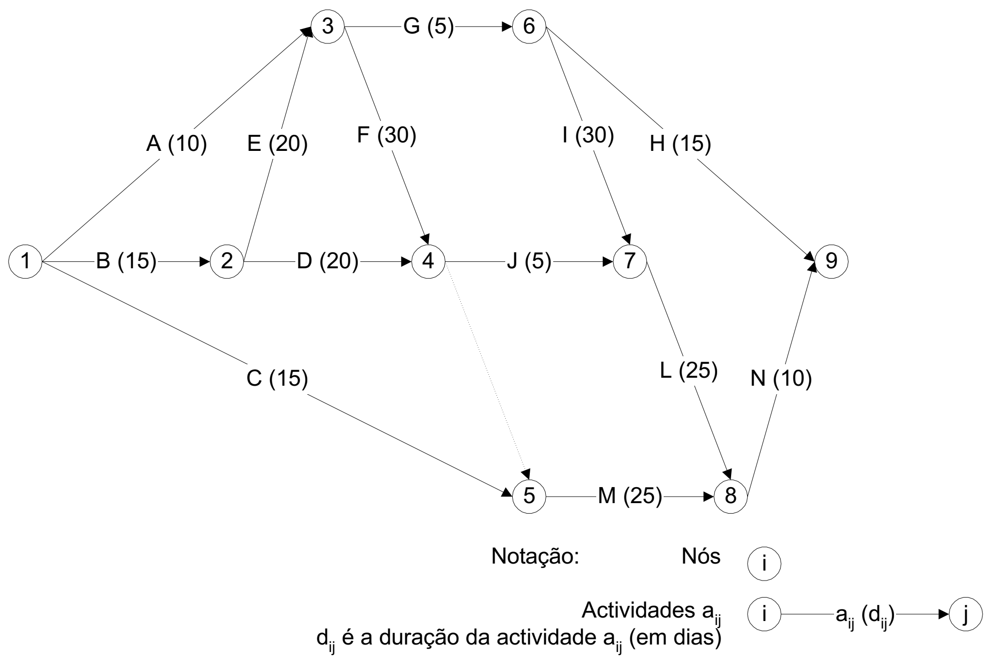
Os STM necessitam de conhecer o plano de obras óptimo, mas mais do que isso, precisam que seja construído o **modelo** de programação linear para este problema, para que possam encontrar a solução óptima para outros problemas que possam surgir no futuro.

(b) *Se tiver tempo no fim do teste...* Construa o modelo de programação linear para este problema, considerando que tem uma tabela de dados genérica:

Nº do pedido	Prioridade	Custo estimado (kEuro)	Depart/Serviço responsável
i	p_i	c_i	ds_i

2. Numa instituição de ensino superior da dimensão da FEUP e com a grande diversidade de equipamentos que necessitam de manutenção, é necessário recorrer aos serviços de uma empresa da especialidade. Um contrato dessa dimensão exige no entanto a abertura de um concurso público internacional ao qual estão associadas várias tarefas com precedência e duração pré-determinadas.

Depois de fazer o levantamento de todas essas tarefas, das suas precedências e durações, construiu-se a rede de projecto que se apresenta a seguir.



(a) As tarefas A, C, I e J serão totalmente executadas por funcionários da FEUP e, especialmente para essas tarefas, a Direcção da FEUP necessita de saber com que folgas pode contar (folga livre e folga total).

(b) Que actividades do projecto pertencem ao caminho crítico? Há só um caminho crítico?

(c) Após uma análise cuidada da rede de projecto verificou-se que era absolutamente necessário reduzir a duração do projecto o máximo possível. Só algumas das actividades admitem redução. Essas actividades estão listadas na tabela seguinte, assim como os custos unitários de redução e a redução máxima. Determine a redução máxima possível para o projecto, quais as actividades envolvidas e qual o custo total dessa redução.

Actividade	Redução máxima	Custo unitário de redução
A	5	10
E	5	10
F	2	5
J	1	5
N	5	15

3. Uma das despesas mais importantes no orçamento de funcionamento da FEUP, depois dos vencimentos dos funcionários, é a limpeza. No entanto, e apesar dos valores elevados pagos, dado o nível de formação baixo das funcionárias da empresa de limpeza, a qualidade do serviço prestado não é famosa. Um dos problemas está relacionado com a diversidade de produtos que têm que ser aplicados, conforme os locais a limpar. Para além da aplicação do produto errado não resultar na limpeza desejada, a mistura inadvertida de alguns dos produtos resulta em reacções químicas de consequências desagradáveis e mesmo perigosas. Assim sendo, o Departamento de Engenharia Química resolveu apoiar a empresa na concepção de um novo produto de limpeza, que poderia ser eficazmente aplicado em qualquer local, substituindo o arsenal de produtos actualmente utilizado.

Esse produto terá três componentes, que por uma questão de segredo comercial aqui serão designados pelos nomes de código *CL*, *LX* e *SN*. Consideradas as restrições às quantidades de cada componente que se podem misturar e a contribuição de cada um para a eficácia global da limpeza (nem todos contribuem positivamente mas são necessárias para a estabilidade química do produto final), chegou-se ao seguinte modelo de Programação Linear:

$$max\,\text{EFICÁCIA} = -2\,CL + 22\,LX - 2\,SN$$

$$\begin{array}{l} \text{suj. a:} \\ \begin{array}{rcrcrcr} CL & + & LX & + & SN & \leq & 50 \\ CL & & & & & \leq & 15 \\ CL & - & 4LX & & & \geq & 0 \\ & - & 2LX & + & SN & = & 0 \\ CL & , & LX & , & SN & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

(a) Resolva este problema pelo método simplex.

(b) Não foi dito na alínea anterior mas as unidade em que são medidas as quantidades dos componentes a misturar não podem tomar um valor qualquer. De facto as variáveis de decisão tomam valores num sistema de medida próprio e **só podem assumir valores inteiros**.

Diga em que é que esta restrição adicional alteraria a resolução que apresentou para responder à alínea anterior e exponha sucintamente como procederia para obter a solução óptima inteira para este problema. Explique nomeadamente como poderia aproveitar o resultado obtido na alínea anterior.

4. **A**dosinda, **B**erengário, **C**apitolina, **D**urvalino, **E**vandro e **F**ulgêncio são 6 candidatos para incorporarem os **Serviços Técnicos e de Manutenção** da nova **FEUP** – a escolha recairá em pelo menos um(a) candidato(a) para cada uma das quatro unidades que constituem os Serviços:

U1 – Unidade de construção civil

U2 – Unidade de manutenção de equipamentos

U3 – Unidade de gestão técnica

U4 – Unidade de higiene, segurança e ambiente

A Unidade de construção civil (**U1**) exige 2 novos elementos; nem a **A**dosinda nem o **F**ulgêncio poderão integrar a Unidade de manutenção de equipamentos (**U2**); o **B**erengário deverá, necessariamente, ser seleccionado, devido a uma promessa de contrato anterior.

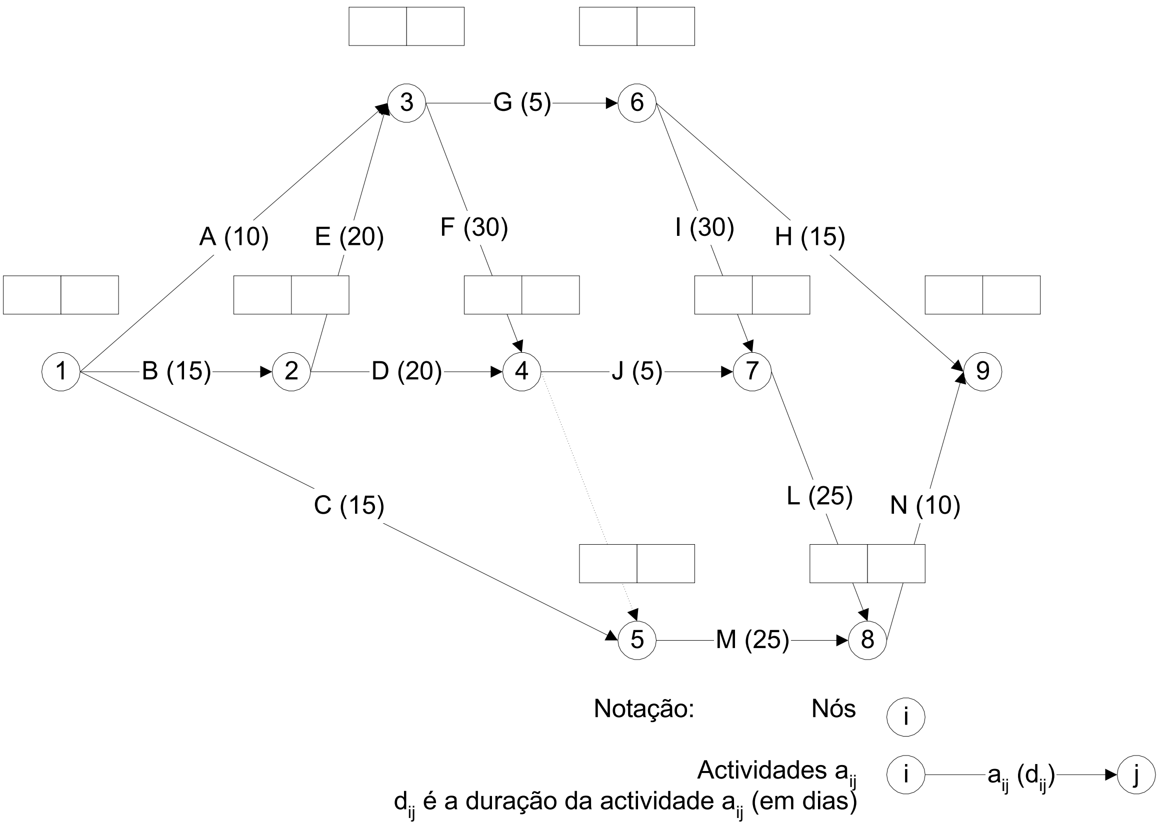
Os **Serviços Técnicos e de Manutenção** da FEUP**,** apoiados nos CVs, na realização de entrevistas e em testes, conseguiram completar a seguinte tabela com os resultados (ou ganhos) associados à selecção dos vários candidatos para as quatro Unidades (considera-se o resultado na **U1** como a soma dos valores resultantes da selecção de dois candidatos):

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
U1	6	7	4	4	10	2
U2	–	6	4	3	2	–
U3	3	7	8	5	4	3
U4	9	3	2	5	10	8

(a) Formule a situação descrita como um Problema de Afectação. Determine uma solução admissível bem como o seu valor.

(b) Determine uma afectação óptima pelo Algoritmo Húngaro e calcule o seu valor.

Nome:


1
2
3
4
5
6
7
8
9
A (10)
B (15)
C (15)
D (20)
E (20)
F (30)
G (5)
H (15)
I (30)
J (5)
L (25)
M (25)
N (10)
Notação:
Nós
i
Actividades a_{ij}
d_{ij} é a duração da actividade a_{ij} (em dias)
i
a_{ij} (d_{ij})
j

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

2ª chamada

2001.01.24

Duração: 2 horas — Com Consulta

Responda a cada questão numa folha separada

1. Como é sabido a TRANSPORTO disporá, muito brevemente, já a partir de Março, de duas novas Estações de Recolha e Manutenção para os seus autocarros. Novos autocarros vão ser adquiridos, para melhorar o serviço prestado e para fazer face à desactivação da linha de comboio entre a Sª da Hora e a Trindade, para futura instalação do Metro. A localização dessas instalações já está decidida, após a conclusão dum estudo apoiado em Investigação Operacional.

A questão agora é bem diferente: a empresa vai precisar, provisoriamente, para os meses de Março a Julho, das horas de serviço especializado (que está bem caracterizado) indicadas na tabela:

Mês 1 Março	Mês 2 Abril	Mês 3 Maio	Mês 4 Junho	Mês 5 Julho
6000 h	7000 h	8000 h	9500 h	11000 h

No início de Março a TRANSPORTO já dispõe de 50 técnicos especializados para o efeito. Cada técnico(a) especializado(a) poderá trabalhar até 160 h por mês. Cada novo técnico deverá ser treinado. Leva um mês a treinar um técnico. Durante o mês de treino, o técnico (aprendiz) precisará de 50 h de supervisão dum técnico especializado. Cada técnico especializado ganha 2000 euros por mês (mesmo que ele, ou ela, não trabalhe as 160 h).

Durante o mês de treino, o técnico (aprendiz) ganhará 1000 euros. No fim de cada mês pelo menos 5% dos técnicos especializados sairão para outros departamentos da empresa.

(a) Apresente um modelo de PL cuja solução possa ajudar a TRANSPORTO a reduzir os custos incorridos para satisfazer as necessidades em horas de serviço especializado dos 5 meses.

(b) A solução óptima desse modelo está no quadro, e apresenta o custo óptimo de 592879,20 euros:

	Março	Abril	Maio	Junho	Julho
Técnicos novos	0	9,2651	11,4501	9,5181	0
Técnicos especializados	50,0000	46,6453	53,5782	62,3494	68,7500

Como interpreta esta solução e como a aproveitaria para ajudar a TRANSPORTO a resolver o problema em questão? Existe uma excelente solução, e com valores inteiros, de custo 598000,00 euros. Poderá haver outra solução (também inteira) cujo custo seja inferior ao dado pela solução óptima do PL? Justifique.

2. A TRANSPORTO pretende lançar um concurso público com vista à aquisição de 50 novos autocarros. Os responsáveis da TRANSPORTO dividiram o concurso público em várias tarefas descritas na tabela seguinte. Na tabela estão igualmente indicadas as relações de precedência entre as várias tarefas, as suas durações médias e os respectivos desvios padrões.

Actividade	Descrição	Duração média (semanas)	Desvio-Padrão (semanas)	Actividades imediatamente anteriores
A	Elaboração do caderno de encargos	3	0.5	-
B	Consulta prévia aos fabricantes	2	0.3	A,C
C	Lançamento do concurso público	4	0	-
D	Preparação das viaturas de teste	4	1.0	C
E	Consulta a entidades financiadoras	3	0.3	B
F	Recepção das propostas	4	0.5	B
G	Avaliação financeira	3	0.6	D, E, F
H	Ensaio das viaturas de teste	7	1.5	D, F
I	Selecção da proposta vencedora	1	0.2	G, H

(a) Desenhe a rede de actividades correspondente ao projecto.

(b) Calcule as datas de início mais cedo e datas de fim mais tarde de todas as actividades e determine o caminho crítico deste projecto.

(c) Calcule as folgas totais e livres das actividades A e G.

(d) Os responsáveis da TRANSPORTO pretendem saber em que semana devem lançar o concurso de forma a que exista pelo menos uma probabilidade de 95% de o concurso estar concluído até à semana 30 do ano (isto é até 30 de Julho)?

3. A TRANSPORTO possui actualmente apenas uma equipa própria de assistência no local a avarias de autocarros. Quando esta equipa se encontra ocupada, a TRANSPORTO mantém em espera, no máximo, um pedido de assistência, sendo todos os pedidos subsequentes encaminhados para uma empresa subcontratada especializada. Esta empresa tem capacidade para satisfazer de imediato qualquer número de pedidos.

A administração da TRANSPORTO está convencida de que os custos de subcontratação são relativamente elevados, e encomendou um estudo sobre a possibilidade de deixar de subcontratar este serviço, passando a ter duas equipas próprias e mantendo em espera todos os restantes pedidos.

O custo por hora de uma equipa própria é de 75 euros. O custo por cada intervenção de equipas subcontratadas é de 100 euros. O custo médio por hora de avaria de um autocarro (por perda de clientes) está estimado em 300 euros.

Os registos de intervenções da TRANSPORTO evidenciam a existência de uma distribuição de Poisson para a ocorrência de avarias, com uma média de 2 avarias por hora. Uma equipa própria demora em média 27 minutos a satisfazer um pedido de assistência, seguindo este tempo de serviço uma distribuição Exponencial Negativa. Uma equipa subcontratada demora em média 32 minutos a satisfazer um pedido de assistência.

Estude e compare, do ponto de vista dos custos, a situação actual e o cenário potencial.

4. O EURO 2004 é já uma preocupação para a TRANSPORTO. Escolhida como transportadora oficial do EURO 2004, a TRANSPORTO comprometeu-se a adquirir um conjunto de novos autocarros pensados e preparados para transportar jornalistas de e para os estádios de todo o país. Estes autocarros possuem, em cada lugar, televisão, rádio e ligação à *internet* para computadores portáteis, para além de várias tomadas de energia para carregamento de dispositivos portáteis.

O problema da TRANSPORTO é decidir quantos autocarros encomendar. Estudos prévios indicam a existência de 3 alternativas quanto à importância jornalística que os meios de comunicação internacional irão dar ao evento: MUITO GRANDE, GRANDE, MÉDIA. Esta importância não pode ser determinada à partida pois dependerá de vários factores económicos, políticos e sociais, mas os estudos atribuem-lhes probabilidades de ocorrência de 0.2, 0.4, 0.4. Encomendas de 50, 20 e 10 autocarros iriam ao encontro das necessidades para cada uma das situações de procura dos meios de informação, a um custo unitário de 15000 contos, 18000 contos e 20000 contos, respectivamente. Cada autocarro efectivamente usado no EURO 2004 originará um lucro de exploração de cerca de 2000 contos.

No entanto conseguiu negociar uma claúsula contratual que lhe permite, no caso de os meios de comunicação social atribuírem uma importância apenas média ao evento, reduzir, ou não, para metade a encomenda previamente efectuada, embora com uma penalização de 5.000 contos por cada autocarro a menos face à encomenda original. Mas esta decisão tem de ser tomada 1 ano antes do início do EURO 2004... Ora os próprios meios de informação dão maior ou menor atenção aos eventos em face de alguns indicadores que se obtêm mais em cima do acontecimento, tais como a venda de bilhetes. Assim se quando os bilhetes forem postos à venda (início de 2004) a procura for elevada (situação a que se atribui uma probabilidade de 60%), os meios de informação que classificam o evento como de importância MÉDIA repensarão a sua classificação, passando-a para ELEVADA.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

2ª chamada

2001.01.24

Resolução

1. Definem-se:

E_i - n^o de técnicos especializados no início do mês i (i = 1, ...,5)

A_i - n^o de técnicos aprendizes no início do mês i (i = 1, ...,5)

C - custo total

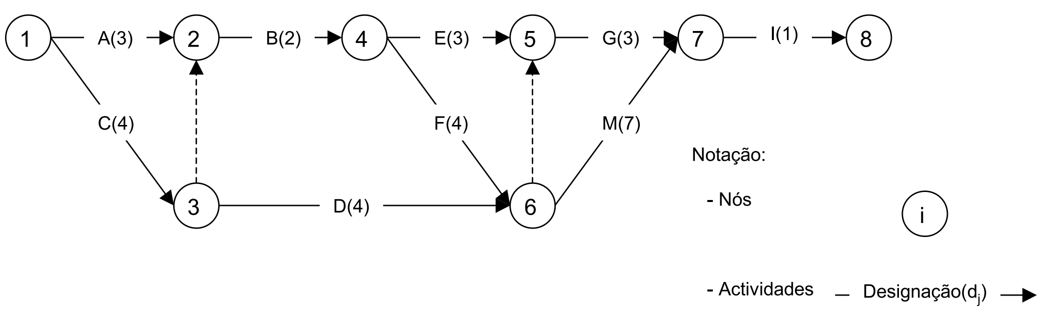
(a) Modelo de PL:

Min C = 2000 E_1 + 2000 E_2 + 2000 E_3 + 2000 E_4 + 2000 E_5 +
+ 1000 A_1 + 1000 A_2 + 1000 A_3 + 1000 A_4 +1000 A_5
suj. a:
$160\ E_1 - 50\ A_1 \geq 6000$
$160\ E_2 - 50\ A_2 \geq 7000$
$160\ E_3 - 50\ A_3 \geq 8000$
$160\ E_4 - 50\ A_4 \geq 9500$
$160\ E_5 - 50\ A_5 \geq 11000$
$E_1 = 50$
$0.95\ E_1 + A_1 \geq E_2$
$0.95\ E_2 + A_2 \geq E_3$
$0.95\ E_3 + A_3 \geq E_4$
$0.95\ E_4 + A_4 \geq E_5$

E_i , A_i ≥ 0 (i = 1, ...,5)

(b) —

2. **(a)** Construindo a rede de projecto obtém-se:



(b) Data de início mais próximo de uma actividade (i,j).

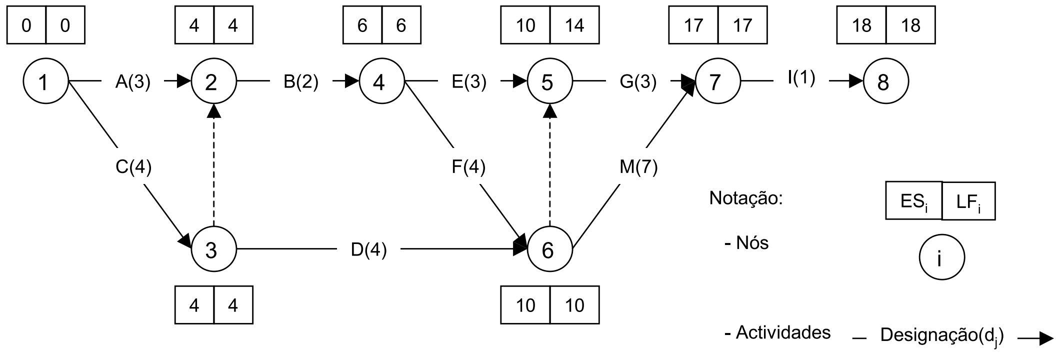
Corresponde à duração do caminho mais longo entre o nó INÍCIO e o nó I, e é comum a todas as actividades que partem do nó i.

$ES_{ij} = max_{k \in \{m \ldots n\}} \{ES_{ki} + d_{ki}\}, \forall_j$

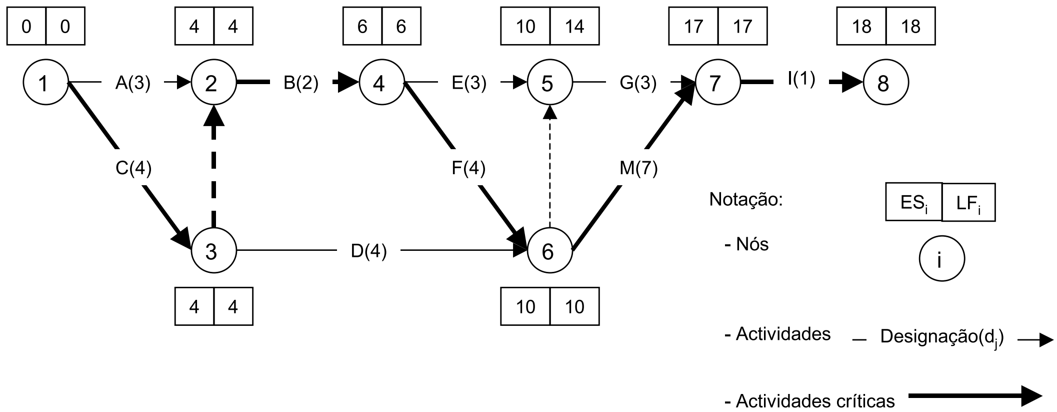
Data de conclusão mais afastada de uma actividade (i,j).

Corresponde à última data em que é possível terminar a actividade sem atrasar o projecto, e é comum a todas as actividades que "chegam" ao nó j

$LF_{ij} = min_{k \in \{m \ldots n\}} \{LF_{jk} - d_{jk}\}, \forall_i$



O caminho crítico é o caminho mais longo (demorado)que liga o nó INÍCIO ao nó FIM. O caminho crítico determina a duração possível do projecto e é constituído pelas actividades críticas.



(c)
- Folga Total - máximo atraso que o início de uma actividade pode sofrer (em relação ao seu início mais próximo), sem que isso implique um atraso no projecto.
  $FT_{ij} = LF_{ij} - (ES_{ij} + d_{ij})$
- Folga Livre - máximo atraso que uma actividade pode sofrer (em relação ao seu início mais próximo), sem impedir que as actividades subsequentes possam ter início nas respectivas datas de início mais próximas.
  $FL_{ij} = ES_{jk} - (ES_{ij} + d_{ij})$

$FT_A = 4 - (0 + 3) = 1$
$FL_A = 4 - (0 + 3) = 1$
$FT_G = 17 - (10 + 3) = 4$
$FL_G = 17 - (10 + 3) = 4$

(d) Duração média do projecto:

$\mu_T = \mu_C + \mu_B + \mu_F + \mu_H + \mu_I = 18$

Variância da duração do projecto:

$\sigma_T^2 = \sigma_C^2 + \sigma_B^2 + \sigma_F^2 + \sigma_H^2 + \sigma_I^2 = 2.63$

$Prob(D_T < X) \geq 95\% \Leftrightarrow Prob(D'_T < \frac{X-18}{\sqrt{2.63}}) \geq 95\%$

Da tabela da distribuição Normal retira-se que $\frac{X-18}{\sqrt{2.63}} \geq 1.645$, logo:

$X \geq 1.645\sqrt{2.63} + 18 \Leftrightarrow X \geq 20.66$

Pelo que para o projecto possa estar finalizado na semana 30 com 95% de probabilidade é necessário começá-lo 20.66 semanas antes, ou seja o seu início terá de ocorrer antes da semana 10.

3.

Situação actual

Número de servidores S	1
Tipo de fila	M/M/1/K
Nº elementos no sistema K	2
Taxa de atendimento μ	$\frac{60}{27} = 2.222$ avarias/hora
Taxa de chegada λ	2 avarias/hora
$\frac{\lambda}{\mu}$	0.9
$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$	0.9
P_0	0.3690
$P_K = \rho^K . P_0$	0.2989
$\bar{\lambda} = \lambda.(1-P_K)$	1.4022
$\lambda - \bar{\lambda}$	0.5978
$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$	0.9299
$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$	0.6632

Cenário potencial

Número de servidores S	2
Tipo de fila	M/M/S
Taxa de atendimento μ	$\frac{60}{27} = 2.222$ avarias/hora
Taxa de chegada λ	2 avarias/hora
$\frac{\lambda}{\mu}$	0.9
$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$	0.45
P_0	0.3793
$L_q = \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2}$	0.2286
$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$	1.1286
$W = \frac{L}{\lambda}$	0.5643

Custos por hora (euros)

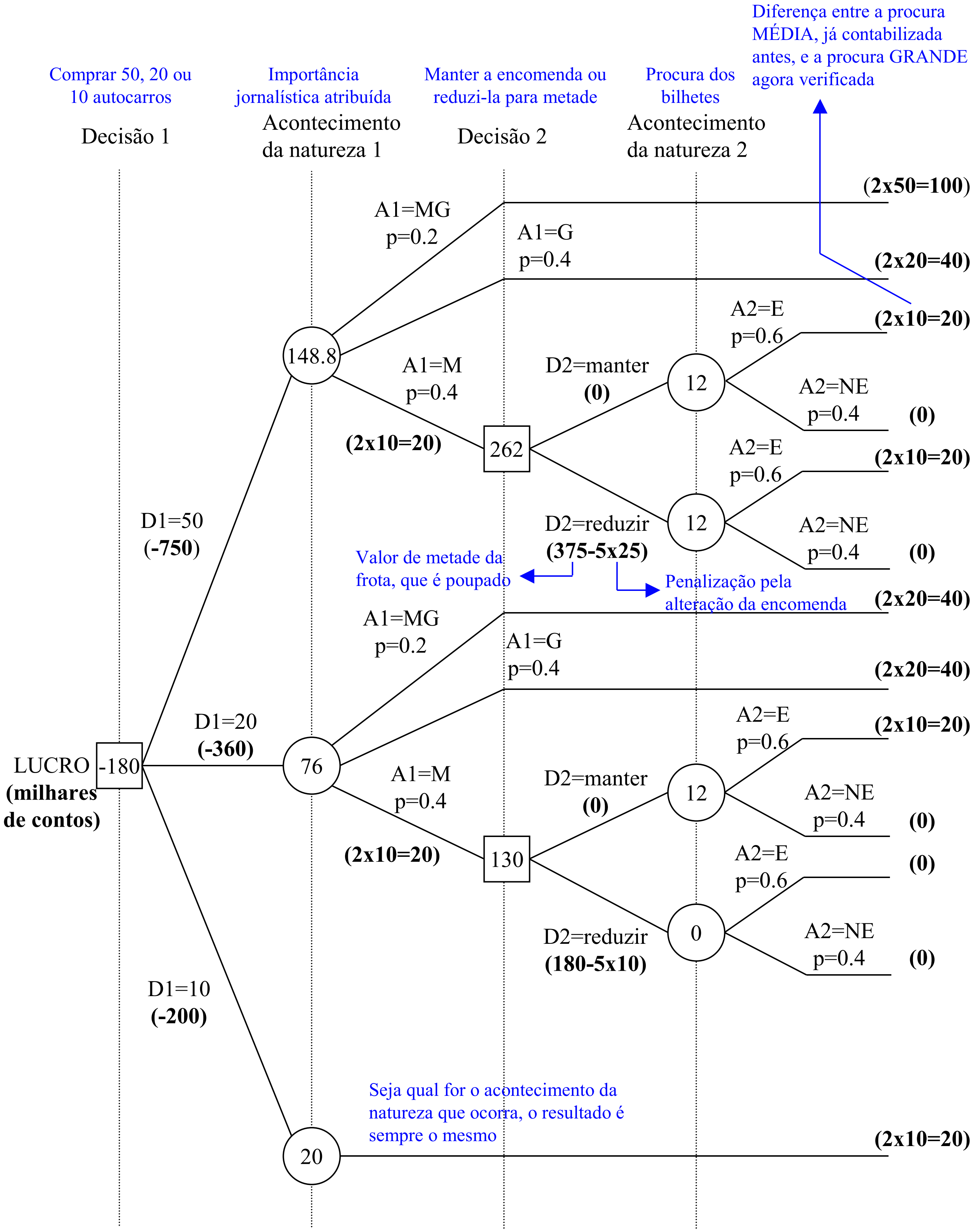
Equipas próprias	
S.75	75.00
Avarias atendidas por equipas próprias	
$\bar{\lambda}$.W.300	278.97
Equipas subcontratadas	
$(\lambda - \bar{\lambda})$.100	59.78
Avarias atendidas por equipas subcontratadas	
$(\lambda - \bar{\lambda}).1/\mu_{SC}$.300	95.65
Total	509.40

Custos por hora (euros)

Equipas próprias	
S.75	150.00
Avarias atendidas por equipas próprias	
λ.W.300	338.58
Total	488.58

A empresa subcontratada atende de imediato qualquer número de pedidos, logo não terá fila de espera. Nessas condições, o tempo de espera será nulo e a média do tempo total de atendimento de avarias por equipas subcontratadas será $\frac{1}{\mu_{SC}} = \frac{32}{60} = 0.533$ horas. Comparando as duas situações do ponto de vista dos custos, o cenário potencial com duas equipas próprias afigura-se mais vantajoso.

4.



A decisão que maximiza o valor esperado do lucro (originando um prejuízo de 180.000 contos) é encomendar 10 autocarros.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

Época de Recurso
2001.02.07

Duração: 2 horas — Com Consulta

Responda a cada questão numa folha separada

1. A TRANSPORTO vai disponibilizar, entre os meses de Maio e Setembro próximos, um, dois ou três serviços novos - PORTOTOUR, em colaboração com o *Turismo* e a *Porto 2001*, que se destinam especialmente a turistas, propondo-lhes um melhor conhecimento e desfrutação da cidade do Porto e arredores.

Cada um desses serviços, **PT1**, **PT2** ou **PT3**, exigirá, mas em diferentes proporções, dois tipos de transporte, designados por **Bus1** e **Bus2**. A tabela seguinte indica as proporções referidas, as capacidades disponíveis actuais bem como o **êxito** semanal esperado – que foi difícil de caracterizar, relativo a cada tipo de serviço.

	PT1	**PT2**	**PT3**	Capacidade disponível
Bus1	7	3	1	$\leq$ 28
Bus2	2	4	6	$\leq$ 19
Êxito unitário	e1	e2	e3	

Por exemplo, disponibilizar uma unidade de serviço **PT1** por semana, recorrerá a 7 **Bus1** e a 2 **Bus2**, com o **êxito** (semanal) de **e1**.

As capacidades actuais são de todo insuficientes pelo que se deverá proceder à expansão dos transportes, a disponibilizar semanalmente durante o período referido.

A administração da TRANSPORTO já tomou algumas decisões:

- aumentando a capacidade de **Bus1**, então a escolha será 5 ou 15 novas unidades, envolvendo investimentos de 50§ou 80§, respectivamente;
- aumentando a capacidade de **Bus2**, então a escolha será entre 10 ou 20 novas unidades, envolvendo investimentos de 30§ou 50§, respectivamente.

O investimento, para este efeito, não deverá ultrapassar 140§.

Claro que a empresa pretende saber quantos serviços, de tipo **PT1**, **PT2** ou **PT3**, deverá oferecer por forma a maximizar o **êxito** semanal, desta sua nova iniciativa.

(a) Apresente um modelo de optimização para este problema. Como o poderia resolver?

(b) Modifique o modelo apresentado, por forma a poder lidar com as situações:

- a empresa só aumentará a capacidade de **Bus2** se também aumentar a capacidade de **Bus1**;
- por razões especiais, ou se realizam pelo menos 2 serviços **PT1** por semana, ou então a TRANSPORTO não oferecerá este serviço.

2. Publicidade, publicidade, publicidade... A uma grande empresa não basta ser grande: tem que parecê-lo. A TRANSPORTO vai lançar uma campanha publicitária para aumentar a notoriedade da respectiva marca.[1]

Apoiado por uma empresa de publicidade o Conselho de Administração tem que decidir sobre a forma de fazer a publicidade: *outdoors*, televisão e imprensa. A cada um destes meios está associado um impacto (número de pessoas exposta à publicidade) e um custo unitário (ver tabela).

	Outdoors	Televisão	Imprensa
Impacto por anúncio (milhares de pessoas)	10	20	5
Custo de cada anúncio (milhares de euros)	2	10	1

O Conselho de Administração não pretende gastar mais do que 200 milhares de euros nesta campanha e, por convicção de um dos administradores, haverá um mínimo de 10 anúncios na televisão. Enquanto relativamente ao número de anúncios na televisão e na imprensa não há qualquer limite, existe uma disponibilidade máxima de 20 anúncios em *outdoors*. O objectivo é maximizar o impacto total da campanha publicitária.

Formule este problema como um problema de Programação Linear (não considerando as naturais restrições de integralidade nas variáveis) e resolva-o pelo método simplex.

3. A remodelação do material circulante é uma preocupação permanente da TRANSPORTO. Neste momento têm entre mãos o lançamento de um concurso para a aquisição de novos autocarros. Vão ser adquiridos 4 tipos de autocarros: "Diesel", "Gás", "Misto" e "Eléctrico". O concurso será limitado e foram escolhidos, após consulta prévia, três concorrentes: BOLBO, MERCD e a ADP – Autocarros de Portugal.

A cada concorrente deverá ser adjudicada a compra de pelo menos um tipo de autocarros, ficando um dos concorrentes com a encomenda de dois tipos de autocarros. Dada a menor dimensão da ADP, ficou desde logo estabelecido que este concorrente não poderia ficar com a encomenda dupla. Por sua vez, dada a pouca experiência com a respectiva tecnologia, a MERCD ficou excluída do fornecimento dos autocarros movidos a energia eléctrica.

Para adjudicar estas encomendas cada proposta foi pontuada de 1 a 10 segundo dois critérios: custo (quando mais baixo mas pontos) e qualidade do material proposto (quanto mais alta mais pontos). Na tabela seguinte apresentam-se as pontuações atribuídas.

Custo	Diesel	Gás	Misto	Eléctrico	Qualidade	Diesel	Gás	Misto	Eléctrico
BOLBO	8	7	6	4	BOLBO	6	8	5	7
MERCD	4	3	4	6	MERCD	8	7	8	5
ADP	9	8	8	7	ADP	4	3	5	2

(a) **Considerando separadamente os dois critérios de avaliação**, formule estes problemas como problemas de afectação, construa as respectivas matrizes de eficiências e resolva-os pelo método húngaro.

[1] A notoriedade está relacionada com o número de pessoas que reconhece a marca e a identifica com o produto associado.

(b) Por razões estratégicas a TRANSPORTO pretende que seja a MERCD a ficar com a encomenda dupla. Como ponderaria os dois critérios de avaliação, isto é, que peso daria a cada um dos critérios ao construir uma única matriz de eficiências, de modo a que a solução óptima do problema de afectação global resultasse na MERCD a ficar com duas encomendas. Qual seria a solução nesse caso?

4. A TRANSPORTO vai construir um novo centro de abastecimento de combustível. Um estudo das características do local escolhido concluiu não ser possível a instalação de mais do que cinco bombas.

Análises estatísticas permitiram determinar que o tempo de abastecimento de cada autocarro segue uma distribuição Exponencial Negativa com média de 5 minutos, e que as chegadas dos autocarros deverão seguir uma distribuição de Poisson com média de 28.8 autocarros por hora. Os custos horários imputados a uma bomba estão estimados em 125 euros, enquanto à ausência de circulação dos autocarros correspondem custos estimados em 300 euros por hora.

A TRANSPORTO pretende que a probabilidade de um autocarro não ser atendido de imediato seja inferior a 1/3.

(a) Determine quais as configurações possíveis para o centro de abastecimento que garantem o nível de serviço especificado pela TRANSPORTO.

(b) Analise essas configurações do ponto de vista dos custos.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

Época de Recurso

2001.02.07

Resolução

1. PTi (i =1,2,3) – N^o de serviços PTi a disponibilizar

δ_j (j =1,2) – variável binária, que informará sobre o aumento da capacidade de **Bus1**.

η_k (k =1,2) – variável binária, que informará sobre o aumento da capacidade de **Bus2**.

(a) Modelo de optimização:

Max Êxito = e1 PT1 + e2 PT2 + e3 PT3

suj. a:

7 PT1 + 3 PT2 + 1 PT3 – 5 δ_1 – 15 $\delta_2 \leq 28$

2 PT1 + 4 PT2 + 6 PT3 – 10 η_1 – 20 $\eta_2 \quad \leq 19$

50 δ_1 + 80 δ_2 + 30 η_1 + 50 $\eta_2 \quad \leq 140$

$\delta_1 \quad +\delta_2 \quad \leq \quad 1$

$\eta_1 \quad +\eta_2 \quad \leq \quad 1$

PT1, PT2 , PT3 ≥ 0

$\delta_1 \quad ,\delta_2 \quad ,\eta_1 \quad ,\eta_2 \quad = \quad$ 0 ou 1

(b) Incluir no modelo anterior:

$\eta_1 \quad +\eta_2 \leq \delta_1 \quad +\delta_2$

PT1 – M $\mu \quad \leq 0$

(PT1 – 2 μ) ≤ 0

$\mu \quad = \quad$ 0 ou 1 , M grande

2. **Nota:** A resolução deste problema obriga à utilização de um modelo de programação inteira, de modo a garantir a integralidade da solução obtida. O modelo apresentado resolve a relaxação linear do problema apresentado, tal como é pedido no enunciado.

Variáveis de decisão:

X_O — número de anúncios em *outdoors*;

X_T — número de anúncios na televisão;

X_I — número de anúncios na imprensa;

Modelo:

$$max\, \text{IMPACTO} = 10X_O + 20X_T + 5X_I$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccccc} 2X_O & + & 10X_T & + & X_I & \leq & 200 \\ & & X_T & & & \geq & 10 \\ X_O & & & & & \leq & 20 \\ X_O & , & X_T & , & X_I & \geq & 0 \end{array}$$

Introduzindo varáveis de folga e variáveis artificiais, e usando o método das penalidades para retirar as variáveis artificiais da base:

$$max\, I = 10X_O + 20X_T + 5X_I - M\, a_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
2X_O & + & 10X_T & + & X_I & + & s_1 & & & & & & & = & 200 \\
 & & X_T & & & & & - & s_2 & & & + & a_2 & = & 10 \\
X_O & & & & & & & & & + & s_3 & & & = & 20 \\
X_1 & , & X_2 & , & X_3 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & , & a_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Para construir o quadro simplex inicial falta exprimir a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas, para assim se obterem os custos marginais:

$$a_2 = 10 - X_T + s_2$$

$$\begin{aligned}
I &= 10X_O + 20X_T + 5X_I - M\, a_2 \\
&= 10X_O + 20X_T + 5X_I - M\,(10 - X_T + s_2) \\
&= 10X_O + (20 + M)X_T + 5X_I + -Ms_2 - 10M
\end{aligned}$$

Fazendo agora as iterações pelo método simplex:

		X_O	X_T	X_I	s_1	s_2	s_3	a_2	
	s_1	10	20	5	1	0	0	0	50
$\Leftarrow$	a_2	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	1	10
	s_3	1	0	0	0	0	1	0	20
	$-I$	10	20	5	0	0	0	0	0
		0	M	0	0	$-M$	0	0	$10M$
			$\Uparrow$						

		X_O	X_T	X_I	s_1	s_2	s_3	a_2	
$\Leftarrow$	s_1	2	0	1	1	$\boxed{10}$	0	-10	100
	X_T	0	1	0	0	-1	0	1	10
	s_3	1	0	0	0	0	1	0	20
	$-I$	10	0	5	0	20	0	-20	-200
		0	0	0	0	0	0	$-M$	0
						$\Uparrow$			

		X_O	X_T	X_I	s_1	s_2	s_3	
	s_2	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	0	10
	X_T	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	20
$\Leftarrow$	s_3	$\boxed{1}$	0	0	0	0	1	20
	$-I$	6	0	3	-2	0	0	-400
		$\Uparrow$						

		X_O	X_T	X_I	s_1	s_2	s_3	
$\Leftarrow$	s_2	0	0	$\boxed{\frac{1}{10}}$	$\frac{1}{10}$	1	$-\frac{2}{10}$	6
	X_T	0	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{2}{10}$	16
	X_O	1	0	0	0	0	1	20
	$-I$	0	0	3	-2	0	-6	-520
				$\Uparrow$				

	X_O	X_T	X_I	s_1	s_2	s_3	
X_I	0	0	1	1	10	-2	60
X_T	0	1	0	0	-1	0	10
X_O	1	0	0	0	0	1	20
$-I$	0	0	0	-5	-30	0	-700

A solução óptima é efectuar 20 anúncios em *Outdoors*, 10 anúncios na Televisão e 60 anúncios na Imprensa, com um impacto total de 700.

3. **(a)** Critério “custo”

	D	G	M	E
B	8	7	6	4
M	4	3	4	6
A	9	8	8	7

Maximização

$\longrightarrow$

	D	G	M	E
B	1	2	3	5
M	5	6	5	3
A	0	1	1	2

Minimização

Formulação como afectação, considerando as restrições apresentadas no enunciado:

	D	G	M	E	X
B1	1	2	3	5	0
B2	1	2	3	5	∞
M1	5	6	5	∞	0
M2	5	6	5	∞	∞
A	0	1	1	2	∞

Os valores infinitos foram introduzidos para que que cada concorrente tenha pelo menos uma encomenda (quarta coluna) e que para que a MERCD não fique com a versão ”eléctrico”(terceira coluna).

	D	G	M	E	X
B1	1	2	3	5	0
B2	0	1	2	4	∞
M1	5	6	5	∞	0
M2	0	1	0	∞	∞
A	0	1	1	2	∞

Subtracção a cada linha do menor elemento dessa linha.

	D	G	M	E	X
B1	$\boxed{1}$	1	3	3	**0**
B2	**0**	**0**	**2**	**2**	∞
M1	5	5	5	∞	**0**
M2	**0**	**0**	**0**	∞	∞
A	**0**	**0**	**1**	**0**	∞

Subtracção a cada coluna do menor elemento dessa coluna.
Realização da 1ª iteração: estão realçados a negro os elementos das linhas e colunas riscadas e rodeado por uma caixa o menor elemento de entre os não riscados.
Como se obtiveram 4 riscos (< 5) as iterações prosseguem.

	D	G	M	E	X
B1	$\boxed{\mathbf{0}}$	**0**	2	2	**0**
B2	**0**	$\boxed{\mathbf{0}}$	2	2	∞
M1	**4**	**4**	4	∞	$\boxed{\mathbf{0}}$
M2	**0**	**0**	$\boxed{\mathbf{0}}$	∞	∞
A	**0**	**0**	**1**	$\boxed{\mathbf{0}}$	∞

5 riscos, logo a solução é óptima. Estão rodeados por um quadrado os elementos que formam a solução óptima:
BOLBO → D + G
MERCD → M
ADP → E
"Lucro" = 26

(b) Critério "qualidade"

	D	G	M	E
B	6	8	5	7
M	8	7	8	5
A	4	3	5	2

Maximização

$\longrightarrow$

	D	G	M	E
B	2	0	3	1
M	0	1	0	3
A	4	5	3	6

Minimização

Formulação como afectação, considerando as restrições apresentadas no enunciado:

	D	G	M	E	X
B1	2	0	3	1	0
B2	2	0	3	1	∞
M1	0	1	0	∞	0
M2	0	1	0	∞	∞
A	4	5	3	6	∞

Os valores infinitos foram introduzidos para que que cada concorrente tenha pelo menos uma encomenda (quarta coluna) e que para que a MERCD não fique com a versão "eléctrico"(terceira coluna).

	D	G	M	E	X
B1	2	0	3	1	0
B2	2	0	3	1	∞
M1	0	1	0	∞	0
M2	0	1	0	∞	∞
A	1	2	0	3	∞

Subtracção a cada linha do menor elemento dessa linha.

	D	G	M	E	X
B1	**2**	$\boxed{\mathbf{0}}$	**3**	**0**	**0**
B2	**2**	**0**	**3**	$\boxed{\mathbf{0}}$	∞
M1	**0**	**1**	**0**	∞	$\boxed{\mathbf{0}}$
M2	$\boxed{\mathbf{0}}$	**1**	**0**	∞	∞
A	**1**	**2**	$\boxed{\mathbf{0}}$	**2**	∞

Subtracção a cada linha do menor elemento dessa linha. Foram necessários 5 riscos logo esta solução é óptima.
Estão rodeados por um quadrado os elementos que formam a solução óptima:
BOLBO → G + E
MERCD → D
ADP → M
"Lucro" = 28

(c) Duas resoluções alternativas:

Alternativa 1 Para que a MERCD fique com duas encomendas é necessário que o critério em que foi melhor pontuada que a BOLBO seja mais valorizado, isto é, é preciso que a "Qualidade" tenha um peso maior do que o "Custo". Então. poder-se-ia construir uma matriz única em que cada valor seria a média ponderada dos dois critérios com um peso maior para a "Qualidade".

Alternativa 2 Dar pesos relativos aos dois critérios arbitrários e fazer uma matriz de afectação com apenas a MERCD duplicada.

4. **(a)** Número de servidores e taxas de atendimento e chegada:

Cenários possíveis					
Número de servidores S	1	2	3	4	5
Tipo de fila	M/M/1	M/M/2	M/M/3	M/M/4	M/M/5
Taxa de atendimento μ	12	12	12	12	12
Taxa de chegada λ	28.8	28.8	28.8	28.8	28.8
$\frac{\lambda}{\mu}$	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$	2.4	1.2	0.8	0.6	0.48

Apenas as configurações com um número de bombas superior a 2 permitem o equilíbrio do sistema.

Cenários de equilíbrio			
Número de servidores S	3	4	5
Tipo de fila	M/M/3	M/M/4	M/M/5
Taxa de atendimento μ	12	12	12
Taxa de chegada λ	28.8	28.8	28.8
$\frac{\lambda}{\mu}$	2.4	2.4	2.4
$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$	0.8	0.6	0.48
P_0	0.0562	0.0831	0.0889
$L_q = \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \rho}{S!(1-\rho)^2}$	2.5888	0.4306	0.1048
$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$	4.9888	2.8306	2.5048
$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$ (horas)	0.0899	0.0150	0.0036
$W = \frac{L}{\lambda}$ (horas)	0.1732	0.0983	0.0870
$P(W_q > 0) = 1 - \sum_{n=0}^{S-1} P_n$	0.6472	0.2870	0.1135

Apenas as configurações com um número de bombas superior a 3 satisfazem o requisito que especifica que a probabilidade de um autocarro não ser atendido de imediato deverá ser inferior a 1/3.

(b) Neste caso:

Análise de custos horários		
Número de servidores S	4	5
Tipo de fila	M/M/4	M/M/5
L	2.8306	2.5048
Custos horários das bombas S.125 (euros)	500.00	625.00
Custos de ausência de circulação L.300 (euros)	849.18	751.44
Custos totais (euros)	1349.18	1376.44

A solução mais favorável do ponto de vista dos custos corresponde à configuração com 4 bombas de combustível.

LICENCIATURA EM ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

1ª chamada

2002.01.08

RESOLUÇÃO

1. (a)

- Índices
  nº pedido – $i \in \{1, 2 \ldots 14\}$
  fase – $j \in \{1, 2\}$
- Dados
  $\mathbf{c_i}$ – custo estimado do pedido i.
  $\mathbf{p_i}$ – prioridade do pedido i.
  $\mathbf{pen_{ij}}$ – penalidade associada ao pedido i se for atendido na fase j.
- Variáveis de decisão

$$x_{ij} \quad \begin{cases} 1 & \text{se pedido } i \text{ for atendido na fase } j \\ 0 & \text{se não} \end{cases} \tag{1}$$

- Função Objectivo
  Pretende-se minimizar a soma das penalidades associadas ao facto de um pedido com prioridade p_i ser atendido na fase j.
  $\min(x_{11}+x_{31}+x_{41}+x_{61}+x_{81}+x_{111})\times 1+(x_{12}+x_{32}+x_{42}+x_{62}+x_{82}+x_{112})\times 2$
  $+ (x_{21}+x_{71}+x_{101}+x_{131})\times 2+(x_{22}+x_{72}+x_{102}+x_{132})\times 1$
  $+ (x_{51}+x_{91}+x_{121}+x_{141})\times 3$
- Restrições

$$\sum_i c_i \times x_{i1} \leq 8.000 \tag{2}$$

$$x_{11}+x_{81}+x_{131}-x_{21}-x_{51}-x_{101}-x_{121}=0 \tag{3}$$

$$x_{11}+x_{81}+x_{131}-x_{91}-x_{111}-x_{141}=0 \tag{4}$$

$$x_{11}+x_{81}+x_{131}-x_{31}-x_{41}-x_{61}-x_{71}=0 \tag{5}$$

$$\forall_i \quad \textstyle\sum_j x_{ij}=1 \tag{6}$$

A restrição (2) garante que não serão gastos mais do que 8.000 kEuro na primeira fase.
As restrições (3), (4) e (5) garantem que na primeira fase será atendido um número igual de pedidos de cada um dos Departamentos e Serviços.
As restrições (6) garantem que cada um dos pedidos será atendido só uma vez (na primeira ou na segunda fase).

(b)

- Índices
  nº pedido – $i \in \{1, 2, \ldots I\}$
  fase – $j \in \{1, 2\}$
- Dados
  $\mathbf{c_i}$ – custo estimado do pedido i.

$\mathbf{p_i}$ – prioridade do pedido i.
$\mathbf{ds_i}$ – departamento/serviço responsável pelo pedido i; $\mathbf{ds_i} \in \{1, 2 \ldots K\}$
$\mathbf{pen_{ij}}$ – penalidade associada ao pedido i se for atendido na fase j; $\mathbf{pen_{i1}} = \mathbf{p_i}$; $\mathbf{pen_{i2}} = 3 - \mathbf{p_i}$

- Variáveis de decisão

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se pedido } i \text{ for atendido na fase } j \\ 0 & \text{se não} \end{cases} \tag{7}$$

- Função Objectivo
Pretende-se minimizar a soma das penalidades associadas ao facto de um pedido com prioridade p_i ser atendido na fase j.

$$\min \quad \textstyle\sum_{ijk} x_{ijk} \times pen_{ij} \tag{8}$$

- Restrições

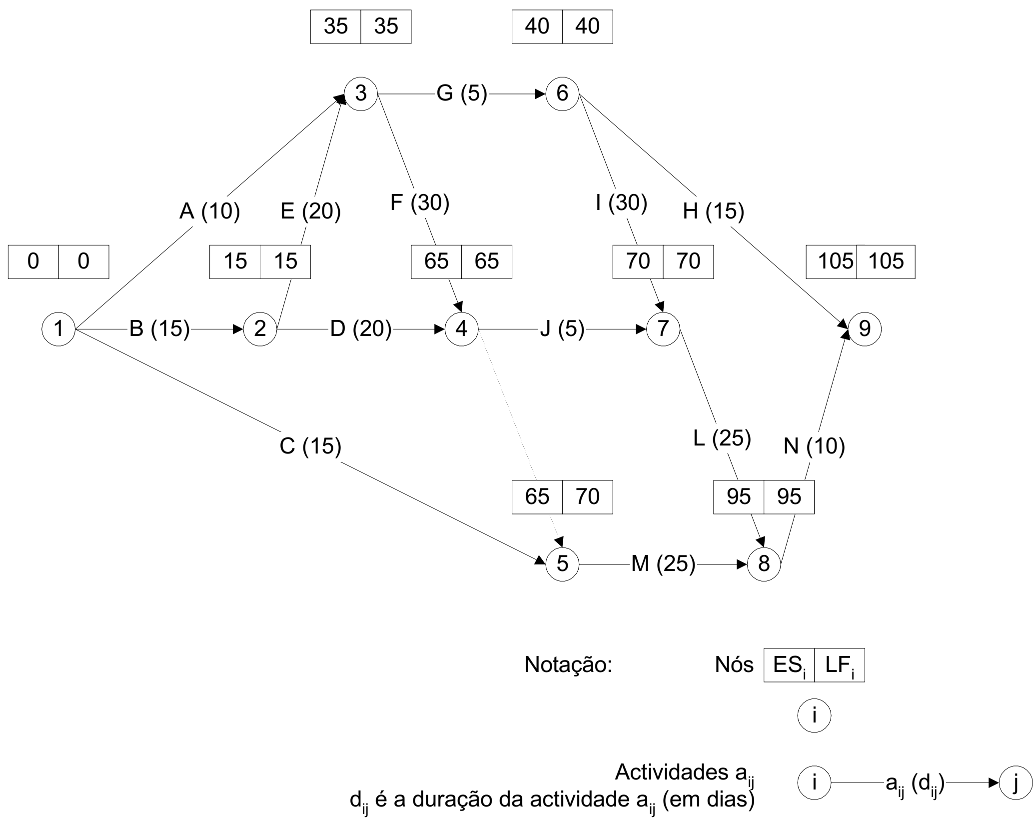
$$\sum_i \qquad c_i \times x_{i1} \leq 8.000 \tag{9}$$

$$\forall_{k=2\ldots K} \quad \textstyle\sum_{i:ds_i=1} x_{i1} - \sum_{i:ds_i=k} x_{i1} = 0 \tag{10}$$

$$\forall_i \qquad \textstyle\sum_j x_{ij} = 1 \tag{11}$$

A restrição (9) garante que não serão gastos mais do que 8.000 kEuro na primeira fase.
As restrições (10) garantem que na primeira fase será atendido um número igual de pedidos de cada um dos Departamentos e Serviços.
As restrições (11) garantem que cada um dos pedidos será atendido só uma vez (na primeira ou na segunda fase).

2. **(a)** Para determinar as folgas total e livre das actividades a executar pela FEUP é necessário começar por determinar as datas de início mais cedo e as datas de fim mais tarde para cada um dos nós. esses valores estão representados na figura seguinte:



Actividade	Folga Total	Folga Livre
A	$35-(0+10)=25$	$35-(0+10)=25$
C	$70-(0+15)=55$	$65-(0+15)=50$
I	$70-(40+30)=0$	$70-(40+30)=0$
J	$70-(65+5)=0$	$70-(65+5)=0$

(b) Há dois caminhos críticos. As actividades que pertencem ao "1º"caminho crítico são: BEFJLN. As actividades que pertencem ao "2º"caminho crítico são: BEGILN.

(c) A redução da actividade A não implicará nenhuma redução da duração total do projecto enquanto as actividades B e E pertencerem ao caminho crítico. Por essa razão a redução proposta para a actividade A será 0.

A actividade E deverá ser reduzida de 5 unidades, o que implicará um custo total de $5 \times 10 = 50$.

A redução das actividades F e J não implicarão nenhuma redução da duração total do projecto se as actividades que decorrem em paralelo (G e I) não puderem ser reduzidas. Por essa razão a redução proposta para as actividades F e J será 0.

A actividade N deverá ser reduzida de 5 unidades, o que implicará um custo total de $5 \times 15 = 75$.

Será então possível reduzir o projecto de 10 dias, para um total de 95 dias, com um custo adicional de 125.

3. (a)

$$max\, \mathrm{Z} = -2\,CL + 22\,LX - 2\,SN$$

$$
\begin{array}{lcccccl}
\text{suj. a:} \\
CL & + & LX & + & SN & \leq & 50 \\
CL & & & & & \leq & 15 \\
CL & - & 4LX & & & \geq & 0 \\
 & - & 2LX & + & SN & = & 0 \\
CL & , & LX & , & SN & \geq & 0
\end{array}
$$

Introduzindo varáveis de folga e variáveis artificiais, e usando o método das penalidades para retirar as variáveis artificiais da base:

$$max\, Z = -2\,CL + 22\,LX - 2\,SN - M\,a_1 - M\,a_2$$

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccl}
\text{suj. a:} \\
CL & + & LX & + & SN & + & s_1 & & & & & & & & & = & 50 \\
CL & & & & & & & + & s_2 & & & & & & & = & 15 \\
CL & - & 4LX & & & & & & & - & s_3 & + & a_1 & & & = & 0 \\
 & - & 2LX & + & SN & & & & & & & & & + & a_2 & = & 0 \\
CL & , & LX & , & SN & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & , & a_1 & , & a_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Para construir o quadro simplex inicial falta exprimir a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas, para assim se obterem os custos marginais:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -CL + 4LX - s_3 \\
a_2 &= 2LX - SN
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z &= -2CL + 22LX - 2SN - Ma_1 - Ma_2 \\
&= -2CL + 22LX - 2SN - M(-CL + 4LX - s_3) - M(2LX - SN) \\
&= (-2 + M)CL + (22 - 6M)LX + (-2 + M)SN - Ms_3
\end{aligned}
$$

Fazendo agora as iterações pelo método simplex:

		CL	LX	SN	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	
	s_1	1	1	1	1	0	0	0	0	50
	s_2	1	0	0	0	1	0	0	0	15
	a_1	1	-4	0	0	0	-1	1	0	0
$\Leftarrow$	a_2	0	-2	$\boxed{1}$	0	0	0	0	1	0
	$-Z$	-2	22	-2	0	0	0	0	0	0
		$+M$	$-6M$	$+M$	0	0	$-M$	0	0	0
				$\Uparrow$						

	CL	LX	SN	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	
s_1	1	3	0	1	0	0	0	-1	50
s_2	1	0	0	0	1	0	0	0	15
$\Leftarrow$ a_1	$\boxed{1}$	-4	0	0	0	-1	1	0	0
SN	0	-2	1	0	0	0	0	1	0
$-Z$	-2	18	0	0	0	0	0	2	0
	$+M$	$-4M$	0	0	0	$-M$	0	$-M$	0
	$\Uparrow$								

	CL	LX	SN	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	
s_1	0	7	0	1	0	1	-1	-1	50
$\Leftarrow$ s_2	0	$\boxed{4}$	0	0	1	1	-1	0	15
CL	1	-4	0	0	0	-1	1	0	0
SN	0	-2	1	0	0	0	0	1	0
$-Z$	0	10	0	0	0	-2	2	2	0
	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0
		$\Uparrow$							

	CL	LX	SN	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	0	1	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{95}{4}$
LX	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
CL	1	0	0	0	1	0	15
SN	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
$-Z$	0	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{75}{2}$

Solução óptima:

$$(CL, LX, SN, s_1, s_2, s_3)^\star = \left(15, \frac{15}{4}, \frac{15}{2}, \frac{95}{4}, 0, 0\right)$$

$$\text{com} \quad Z^\star = \frac{75}{2}$$

Nota: Uma resolução alternativa passaria por multiplicar a terceira restrição por -1 transformando-a numa restrição de $\leq$ e dispensando assim uma das variáveis artificiais uma vez que a própria variável de folga serviria para a base inicial. Este "truque" só é possível porque o lado direito dessa restrição é zero!

(b) O método simplex permite obter soluções óptimas para problemas de programação linear, isto é problemas de programação matemática em que quer a função objectivo quer as restrições são lineares e as variáveis de decisão tomam valores num subconjunto dos números reais. Quando as variáveis de decisão têm que pertencer a um subconjunto dos números inteiros passamos a ter um problema de programação inteira. É portanto um problema de programação inteira que se teria que resolver nesta segunda alínea.

A obtenção de soluções inteiras óptimas não se faz através de arredondamentos das soluções óptimas fraccionárias, por mais expeditos ou "inteligentes" que esses arredondamentos sejam. A obtenção de soluções inteiras óptimas implica a aplicação de um algoritmo especial: o algoritmo de "branch and bound" (B&B).

O ponto de partida do algoritmo de B&B é a solução do problema relaxado, isto é, a solução do mesmo problema mas sem considerar a obrigatoriedade de as variáveis serem inteiras. Foi exactamente isso que se fez na primeira alínea, pelo que a solução aí obtida seria o ponto de partida para a resolução neste alínea.

A partir então de uma solução fraccionária vai-se seleccionar uma variável que não seja inteira nessa solução e gerar dois sub-problemas, cada um deles com uma restrição adicional. Por exemplo, se se seleccionasse LX (também poderia ser SN mas não CL dado esta última ser já inteira), geravam-se dois sub-problemas iguais ao problema inicial mais uma condição: para um deles seria a condição $LX \leq 3$, enquanto para o outro seria $LX \geq 4$. Com isto tenta-se afastar a solução da zona fraccinária onde ela se situa.

Sub-problema 1

$$max\, \mathrm{Z} = -2\,CL + 22\,LX - 2\,SN$$

suj. a:

$$\begin{array}{ccccccc} CL & + & LX & + & SN & \leq & 50 \\ CL & & & & & \leq & 15 \\ CL & - & 4LX & & & \geq & 0 \\ & - & 2LX & + & SN & = & 0 \\ & & LX & & & \leq & 3 \\ CL & , & LX & , & SN & \geq & 0 \end{array}$$

Sub-problema 2

$$max\, \mathrm{Z} = -2\,CL + 22\,LX - 2\,SN$$

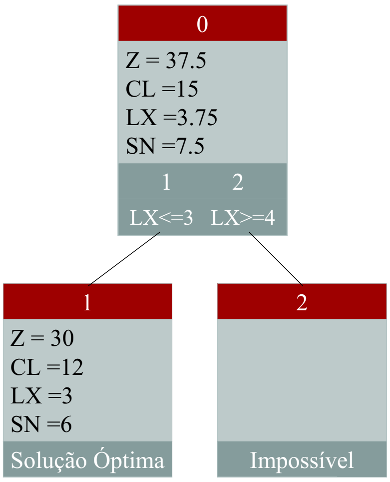
suj. a:

$$\begin{array}{ccccccc} CL & + & LX & + & SN & \leq & 50 \\ CL & & & & & \leq & 15 \\ CL & - & 4LX & & & \geq & 0 \\ & - & 2LX & + & SN & = & 0 \\ & & LX & & & \geq & 4 \\ CL & , & LX & , & SN & \geq & 0 \end{array}$$

Cada um destes problemas é resolvido pelo método simplex, podendo originar novas soluções não inteiras. Note-se que nem sequer para a variável LX é garantido que as soluções destes sub-problemas seja inteira. No entanto, aplicando sucessivamente este processo de ramificação vamos construindo uma árvore de sub-problemas que terá como nós terminais (aqueles a partir dos quais não se ramifica mais) soluções inteiras. A solução óptima inteira será a melhor das soluções inteiras, o que neste caso corresponde à solução com maior valor (o problema é de maximização). É de esperar que este valor óptimo seja pior que o valor óptimo não inteiro, uma vez que é obtido por introdução de mais restrições: ao restringir-se mais um problema nunca se pode obter uma solução melhor.

A enumeração exaustiva de todos os nós desta árvore de pesquisa pode ser evitada através da consideração de limites superiores e inferiores, isto é, através da consideração da informação que soluções inteiras já obtidas nos trazem.

Para este problema em concreto, e escolhendo a variável LX para a primeira ramificação, a árvore de sub-problemas seria extremamente simples:


0
Z = 37.5
CL =15
LX =3.75
SN =7.5
1
2
LX<=3
LX>=4
1
Z = 30
CL =12
LX =3
SN =6
Solução Óptima
2
Impossível

4.

Passos da resolução:

1. **Problema de maximização**

→ dois colaboradores para **U1**

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
U1a	6	7	4	4	10	2
U1b	6	7	4	4	10	2
U2	-	6	4	3	2	-
U3	3	7	8	5	4	3
U4	9	3	2	5	10	8
U??	0	-	0	0	0	0

2. **Problema de minimização**

→ o novo quadro, incluindo 'custos', é obtido subtraindo os resultados ao valor máximo (10).

→ representa-se também uma solução admissível, com resultado:
32 = 6+7+4+5+10.
Fulgêncio não é seleccionado!

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
U1a	4	3	6	6	0	8
U1b	4	3	6	6	0	8
U2	∞	4	6	7	8	∞
U3	7	3	2	5	6	7
U4	1	7	8	5	0	2
U??	10	∞	10	10	10	10

Algoritmo Húngaro para obter uma afectação óptima:

→ tentar obter pelo menos um 0 em cada linha e em cada coluna, subtraindo o menor elemento nas colunas ... e depois nas linhas

5 (traços) < 6 (nº var. básicas)

3	0	4	1	0	6
3	0	4	1	0	6
∞	1	4	2	8	∞
6	0	0	0	6	5
0	4	6	0	0	0
9	∞	8	5	10	8

3	0	4	1	0	6
3	0	4	1	0	6
∞	0	3	1	7	∞
6	0	0	0	6	5
0	4	6	0	0	0
4	∞	3	0	5	3

→ o menor elemento no quadro anterior é 3, então ...

6 traços – consegue-se identificar uma afectação óptima no próximo quadro.

0	0	1	1	0	3
0	0	1	1	0	3
∞	0	0	1	7	∞
6	3	0	3	9	5
0	7	6	3	3	0
1	∞	0	0	5	0

Afectação óptima:

U1	**A**dosinda + **E**vandro	6 + 10
U2	**B**erengário	6
U3	**C**apitolina	8
U4	**F**ulgêncio	8

Durvalino não é seleccionado.

Resultado óptimo: ***38***

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

2ª chamada

2002.01.23

Duração: 2 horas e 30 minutos — Com Consulta

Responda a cada questão numa folha separada

1. Cento e vinte e três. É o número de funcionárias de limpeza que diariamente trabalham na FEUP para assegurar a manutenção das necessárias condições de limpeza e higiene nas instalações. E não são demasiadas. De facto, com este número de funcionárias não é possível limpar todos os espaços todos os dias.

Os espaços distribuem-se por 12 edifícios, com diferentes ocupações e utilizações (tabela 1). Note-se que cada edifício tem diferentes tipos de espaços, em diferentes quantidades, tal como consta também da tabela 1

Tabela 1: Edifícios da FEUP

		Quantidade				
Edifício	Ocupação	Laboratórios	Salas de aulas	Gabinetes	Salas de secretariado	"Open spaces"
A	Administração	0	0	10	20	1
B	Aulas	10	131	0	1	0
C	Biblioteca	0	0	20	2	7
D	CICA	11	0	10	1	0
E	Departamento de Química	29	0	30	9	0
F	Departamentos de Minas e Metalurgia	20	0	27	6	0
G	Departamento de Civil	30	0	33	10	1
H	Departamento de Civil	2	0	10	1	1
I	Departamento de Electrotecnia	42	0	61	16	0
J	Departamento de Electrotecnia	13	0	30	3	1
L	Departamento de Mecânica	31	0	30	10	0
M	Departamento de Mecânica	6	0	21	3	1

Cada espaço tem características próprias (tabela 2) que passam pelo:

- tempo que leva a limpar cada sala, gabinete, laboratório, etc. (aqui medido em número de funcionárias, entendendo-se que 0.25 funcionárias representa um quarto de um dia de trabalho de uma funcionária),
- periodicidade mínima da limpeza de cada sala, gabinete, etc. (medida em número de "limpezas" por semana, isto é na frequência da limpeza)

- factor de satisfação que, multiplicado pelo número de vezes que cada sala, gabinete, laboratório, etc. em concreto é limpo por semana, dá uma medida da satisfação dos utilizadores desse espaço.

Tabela 2: Características dos espaços

Tipo de espaço	Nº de funcionárias	Frequência mínima	Factor de satisfação
Laboratórios	0.250	3	8
Salas de aulas	0.125	5	3
Gabinetes	0.125	1	10
Salas de secretariado	0.250	2	8
"Open spaces"	16.0	3	5

Pretende-se então saber quantas vezes cada tipo de espaço em cada edifício deve ser limpo por semana, sabendo que se dispõe de 123 funcionárias todos os dias de uma semana de 5 dias de trabalho, respeitando as condições descritas e tendo como objectivo maximizar a satisfação global dos utilizadores da FEUP. Considere que estes são valores médios para cada tipo de espaço dentro de cada edifício, pelo que teria sentido uma resposta do tipo "os laboratórios do edifício X vão ser limpos 3.7 vezes por semana".

Note-se que espaços do mesmo tipo em edifícios diferentes não têm que ser limpos com a mesma frequência. No entanto, para evitar diferenças grandes na qualidade de serviço, algumas regras foram estabelecidas pela Direcção da FEUP:

- a frequência de limpeza dos diversos espaços pertencentes aos edifícios ocupados pelos departamentos tem que ser rigorosamente igual para todos os edifícios dos departamentos;
- a frequência de limpeza dos gabinetes dos edifícios do CICA e da Biblioteca, não pode diferir entre si mais do que 25% do valor mínimo apresentado na tabela 2;
- finalmente, se para algum edifício a frequência de limpeza dos gabinetes atingir ou ultrapassar o dobro dos mínimos impostos, então para todos os outros edifícios a frequência de limpeza dos gabinetes deve ser de pelo menos 1.5 a frequência mínima.

Como se vê a limpeza dos gabinetes é uma questão delicada...

Formule este problema.

2. Apesar de todo o planeamento e controlo, em todas as grandes obras só depois de as instalações começarem a ser utilizadas é que se descobre que o cliente não especificou, os técnicos não projectaram, os empreiteiros não executaram e os fiscais não fiscalizaram. Pois é. O Laboratório de Resistência dos Materiais precisa de instalar um equipamento pesado especial e a ligação ao posto de transformação (PT) que serve a FEUP não está feita. A única solução é pois utilizar as tubagens existentes e passar o cabo desde o PT até ao laboratório.

O problema que se coloca é o de seleccionar o melhor percurso para o cabo, dentro da intrincada rede de alimentação de energia eléctrica da FEUP (Figura 1). Para além da óbvia consideração das distâncias (tabela 3), que devem ser minimizadas, há ainda a considerar a dificuldade da passagem do cabo: há tubagens que estão já tão cheias que a dificuldade de passar um cabo adicional é grande. Os Serviços Técnicos e de

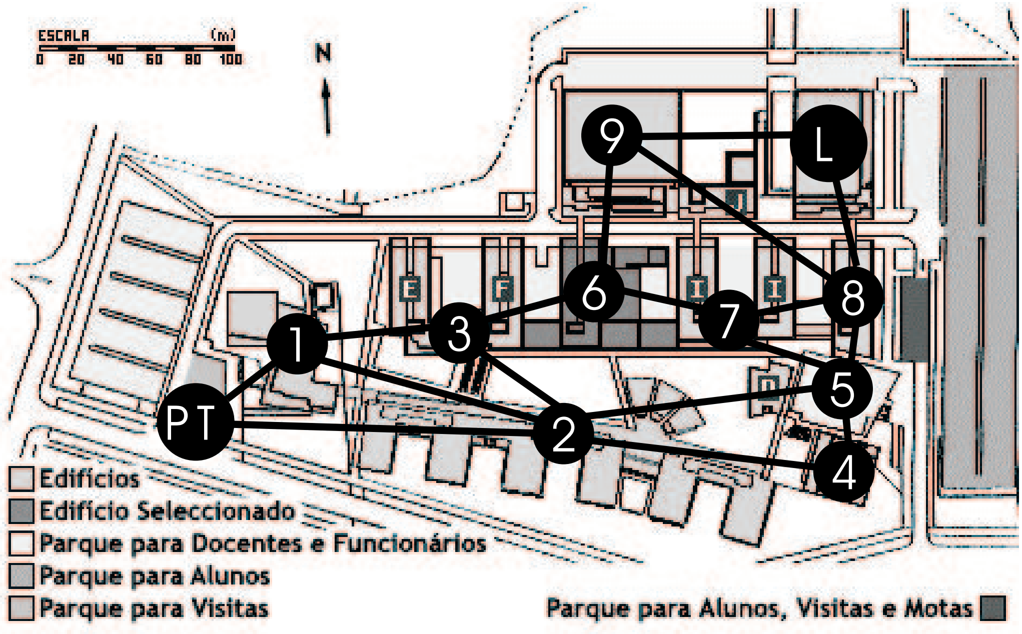


Figura 1: Rede de distribuição eléctrica da FEUP

Manutenção da FEUP fizeram um levantamento do estado da rede e atribuíram um factor de dificuldade de passagem do cabo (numa escala de 1 a 10) a cada troço (tabela 4).

Tabela 3: Distâncias entre os nós da rede eléctrica da FEUP

	PT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	L
PT	—	2	3	—	—	—	—	—	—	—	—
1	2	—	2.5	1	—	—	—	—	—	—	—
2	3	2.5	—	1	2	2.5	—	—	—	—	—
3	—	1	1	—	—	—	0.8	—	—	—	—
4	—	—	2	—	—	0.5	—	—	—	—	—
5	—	—	2.5	—	0.5	—	—	1.3	0.5	—	—
6	—	—	—	0.8	—	—	—	1	—	1.2	—
7	—	—	—	—	—	1.3	1	—	1	—	—
8	—	—	—	—	—	0.5	—	1	—	2.5	1
9	—	—	—	—	—	—	1.2	—	2.5	—	2
L	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	—

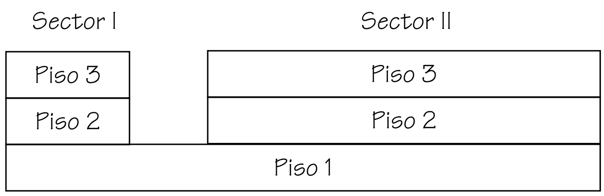
Tabela 4: Factor de dificuldade de passagem do cabo entre os nós da rede eléctrica da FEUP

	PT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	L
PT	—	5	2	—	—	—	—	—	—	—	—
1	5	—	3	1	—	—	—	—	—	—	—
2	2	3	—	7	1	5	—	—	—	—	—
3	—	1	7	—	—	—	8	—	—	—	—
4	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—
5	—	—	5	—	1	—	—	2	5	—	—
6	—	—	—	8	—	—	—	3	—	7	—
7	—	—	—	—	—	2	3	—	4	—	—
8	—	—	—	—	—	5	—	4	—	5	5
9	—	—	—	—	—	—	7	—	5	—	3
L	—	—	—	—	—	—	—	—	5	3	—

(a) Aplicando o algoritmo de Dijkstra determine os caminhos mais curtos considerando separadamente a distância e a dificuldade como as grandezas a minimizar.

(b) Considerando que, muito provavelmente, o caminho "mais curto" e o "menos difícil" não coincidirão, sugira uma forma de encontrar um caminho que considerasse quer a distância quer a dificuldade como factores a minimizar. Descreva esta sua estratégia claramente, passo a passo, com suficiente detalhe.

3. Durante o período de férias de Natal os contínuos da FEUP têm que preparar as salas para a época de exames. A preparação das salas implica, entre outras tarefas, a troca de mesas entre salas. As trocas são realizadas entre os sectores/pisos do edifício B que se representam na figura seguinte:



O número de mesas disponível em cada Sector/Piso e o número de mesas necessário em cada Sector/Piso estão representados na tabela seguinte:

Sector/Piso	I/3	I/2	II/3	II/2	Piso 1
Quantidade actual de mesas (conjuntos de 10)	14	15	7	2	20
Quantidade de mesas necessárias (conjuntos de 10)	0	8	30	10	10

Na tabela seguinte representa-se o tempo necessário (em minutos) para transportar um conjunto de **10 mesas** entre Sectores/Pisos:

Sector/Piso	I/3	I/2	II/3	II/2	Piso 1
I/3	0	5	20	15	10
I/2	5	0	15	10	5
II/3	20	15	0	5	10
II/2	15	10	5	0	5
Piso 1	10	5	10	5	0

Pretende-se que:

(a) Obtenha uma solução inicial pela regra do canto NW.

(b) A solução inicial obtida corresponde a um grafo conexo? Se não corresponder a um grafo conexo, complete-a de tal forma que corresponda a um grafo conexo.

(c) Partindo da solução inicial obtida na alínea anterior, obtenha a solução óptima para o problema usando o Algoritmo de Transportes.

(d) Descreva as ordens a dar aos contínuos e indique quanto tempo será gasto na operação de troca de mesas.

4. Como é sabido, **A**dosinda, **B**erengário, **C**apitolina, **D**urvalino, **E**vandro e **F**ulgêncio candidataram-se aos **Serviços Técnicos e de Manutenção** da nova **FEUP**, constituídos por quatro unidades:

U1 – Unidade de construção civil

U2 – Unidade de manutenção de equipamentos

U3 – Unidade de gestão técnica

U4 – Unidade de higiene, segurança e ambiente

Após a selecção (óptima) a Unidade de construção civil (**U1**) ficou com 2 novos elementos, a **A**dosinda e o **E**vandro, na **U2** ficou o **B**erengário, a **C**apitolina ficou na **U3** e **F**ulgêncio ficou na **U4**. **D**urvalino não foi escolhido mas talvez venha a ter outra hipótese de concorrer, caso seja aberto novo concurso, agora apenas para a **U2** – Unidade de manutenção de equipamentos.

Efectivamente, verifica-se actualmente alguma demora na resposta à manutenção de equipamentos electrónicos, à qual está apenas adstrito um elemento da **U2**. Por isso mesmo, a direcção da Unidade quer estudar melhor o assunto por forma a fundamentar uma eventual proposta de contratação dum novo colaborador à direcção da FEUP.

Sabe-se que o sistema é do tipo M/M/S, com S=1 actualmente, que há em média 4 solicitações/tarefas por dia e que um funcionário poderá despachar, em média, 6 tarefas por dia. O custo por dia dum funcionário de manutenção é de 75 euros.

Apoie a **U2** – Unidade de manutenção de equipamentos, calculando, para a alternativa de 2 funcionários (s=2), o n^o médio de tarefas no "sistema", e o tempo médio que uma solicitação/tarefa aguarda até ser realizada.

Perspectivando o problema ao nível dos custos envolvidos (custo com colaboradores + custo associado à espera (equipamento não utilizado)), a partir de que valor do custo de espera (por dia) lhe parece conveniente contratar um novo colaborador?

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

2ª chamada

2002.01.23

Resolução

1. Variáveis de decisão:

x_{ij} – número de vezes que o espaço do tipo i no edifício j é limpo por semana.

$i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ em que:

i	Tipo de espaço
1	Laboratórios
3	Salas de aulas
3	Gabinetes
4	Salas de secretariado
5	"Open spaces"

$j \in \{A, B, C, D, X\}$

Nota: Dada a condição imposta no fim do enunciado de todos os tipos de espaços dos Departamentos terem que ter a mesma frequência de limpeza, os vários edifícios dos Departamentos (E a M) podem ser aglutinados num único edifício virtual X, com um número de espaços que é a soma desses edifícios todos, a saber:

		Quantidade				
Edifício	Ocupação	Laboratórios	Salas de aulas	Gabinetes	Salas de secretariado	"Open spaces"
X	Departamentos	173	0	242	58	4

Função objectivo:

$$\max \text{SATISFAÇÃO GLOBAL} = 8\sum_j x_{1j} + 3\sum_j x_{2j} + 10\sum_j x_{3j} + 8\sum_j x_{4j} + 5\sum_j x_{5j}$$

Restrições:

Tempo / Número de funcionárias disponíveis por semana

$$\begin{array}{lllll}
 & & 0.125 \times 10 \times x_{3A} & +0.25 \times 20 \times x_{4A} & +16 \times 1 \times x_{5A} \\
+0.25 \times 10 \times x_{1B} & +0.125 \times 131 \times x_{2B} & & +0.25 \times 1 \times x_{4B} & \\
 & & +0.125 \times 20 \times x_{3C} & +0.25 \times 2 \times x_{4C} & +16 \times 7 \times x_{5C} \\
+0.25 \times 11 \times x_{1D} & & +0.125 \times 10 \times x_{3D} & +0.25 \times 1 \times x_{4D} & \\
+0.25 \times 173 \times x_{1X} & & +0.125 \times 242 \times x_{3X} & +0.25 \times 58 \times x_{4X} & +16 \times 4 \times x_{5X} \\
 & & & & \leq 5 \times 123
\end{array}$$

Frequência mínima de limpeza

$$
\begin{aligned}
x_{1j} &\geq 3,\ \forall_j \\
x_{2j} &\geq 5,\ \forall_j \\
x_{3j} &\geq 1,\ \forall_j \\
x_{4j} &\geq 2,\ \forall_j \\
x_{5j} &\geq 3,\ \forall_j
\end{aligned}
$$

Relação CICA/Bilbioteca

$$|x_{3C} - x_{3D}| \leq 0.25 \times 1$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
x_{3C} - x_{3D} &\leq 0.25 \\
x_{3C} - x_{3D} &\geq -0.25
\end{aligned}
$$

Implicação relativa a ultrapassar o dobro dos mínimos impostos na limpeza dos gabinetes

$$
\begin{array}{c}
x_{3A} \geq 2 \times 1 \\
\vee \\
x_{3C} \geq 2 \times 1 \\
\vee \\
x_{3D} \geq 2 \times 1 \\
\vee \\
x_{3X} \geq 2 \times 1
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
x_{3C} \geq 1.5 \times 1 \\
x_{3D} \geq 1.5 \times 1 \\
x_{3X} \geq 1.5 \times 1
\end{cases}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
x_{3A} - 2 &\leq \delta M \\
x_{3C} - 2 &\leq \delta M \\
x_{3D} - 2 &\leq \delta M \\
x_{3X} - 2 &\leq \delta M \\
x_{3A} - 1.5 &\geq (\delta - 1)M \\
x_{3C} - 1.5 &\geq (\delta - 1)M \\
x_{3D} - 1.5 &\geq (\delta - 1)M \\
x_{3X} - 1.5 &\geq (\delta - 1)M \\
\delta &\in \{0, 1\} \\
M &\rightarrow +\infty
\end{aligned}
$$

2. **(a)** Aplicação do algoritmo de Dijkstra usando como custos as distâncias:

PT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	L
$0^\star$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	$2^\star$	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
		$3^\star$	3	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
			$3^\star$	5	5.5	∞	∞	∞	∞	∞
				5	5.5	$3.8^\star$	∞	∞	∞	∞
				5	5.5		$4.8^\star$	∞	5	∞
				$5^\star$	5.5			5.8	5	∞
					5.5			5.8	$5^\star$	∞
					$5.5^\star$			5.8		7
								$5.8^\star$		7
										$6.8^\star$

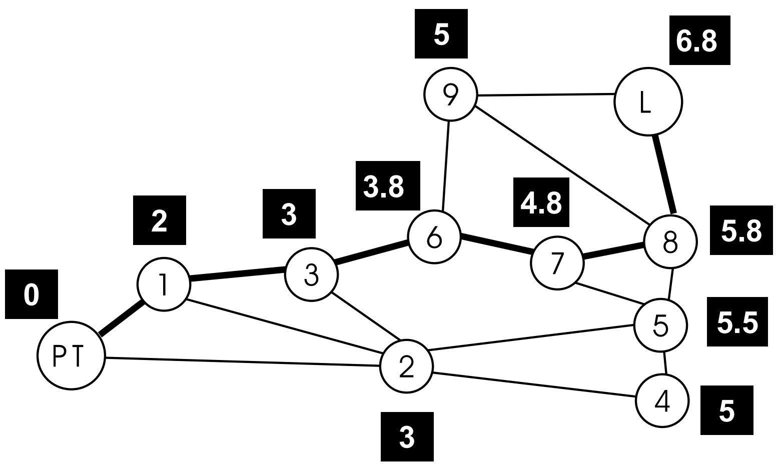
Aplicação do algoritmo de Dijkstra usando como custos o factor de dificuldade na passagem do cabo :

PT	1	2	3	4	5	6	7	8	9	L
$0^\star$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	5	$2^\star$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	5		9	$3^\star$	7	∞	∞	∞	∞	∞
	5		9		$4^\star$	∞	∞	∞	∞	∞
	$5^\star$		9			∞	6	9	∞	∞
			$6^\star$			∞	6	9	∞	∞
						14	$6^\star$	9	∞	∞
						$9^\star$		9	∞	∞
								$9^\star$	16	∞
									$14^\star$	14
										$14^\star$

Nas figuras seguintes estão representados os dois caminhos mínimos.

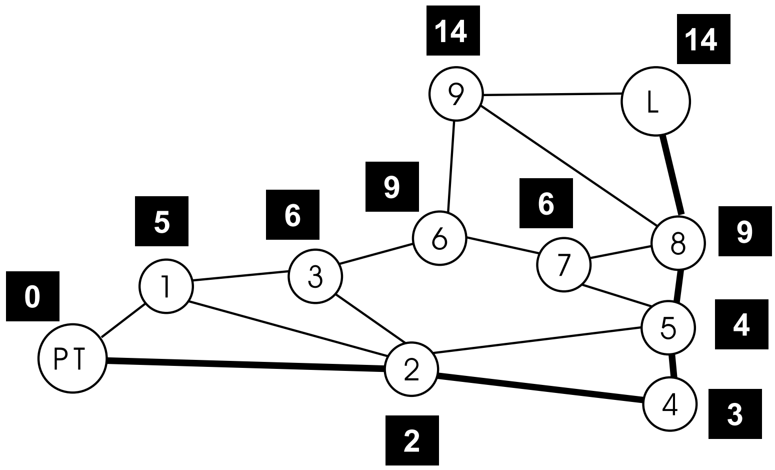
Custo = distância

Caminho mínimo: PT – 1 – 3 – 6 – 7 – 8 – L



Custo = factor de dificuldade

Caminho mínimo: PT – 2 – 4 – 5 – 8 – L



(b) Esta questão não tem uma resposta única, nem sequer tem uma número de respostas finito... ou pelo menos será um número finito muito grande. Como tal uma resposta a esta questão não deveria ser incluída numa correcção pois poderia levar um aluno menos avisado a tomá-la como norma e limitaria a sua capacidade de inovar, criar e construir novos saberes a partir dos adquiridos anteriormente. E é sobre isso mesmo que esta questão trata. No entanto, considerando que não temos alunos desses, apresentaremos a título meramente ilustrativo a resposta mais simples de que fomos capazes de nos lembrar. Estamos certos de que os nossos alunos se lembraram de respostas bem mais interessantes.

A ideia base desta proposta de resolução é resolver um único problema de caminho mínimo, através do algoritmo de Dijkstra, usando como custos para os ramos a soma ponderada da distância e da dificuldade. Isto é, procurando acertar-se com os Serviços Técnicos e de Manutenção um peso β, o custo c_{ij} de cada ramo ij da rede seria:

$$c_{ij} = dist_{ij} + \beta\, dif_{ij}$$

em que $dist_{ij}$ e dif_{ij} são respectivamente a distância e a dificuldade associadas ao ramo ij. A utilização de um factor de ponderação é crucial, uma vez que estamos a somar grandezas claramente diferentes.

3. Para formular o problema como um problema de transportes é necessário começar por determinar os fornecedores (F) e os consumidores (C) de mesas. Também é necessário determinar quantas mesas podem ser fornecidas por cada fornecedor e quantas mesas devem ser recebidas por cada consumidor.

Esses valores estão representados na tabela seguinte:

Sector/Piso	I/3	I/2	II/3	II/2	Piso 1
F/C	F	F	C	C	F
Quantidades a fornecer/receber (conjuntos de 10)	14	7	23	8	10

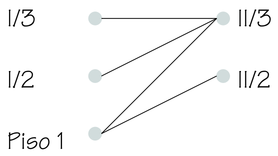
Representando as origens, destinos e custos em forma tabular, obtém-se a tabela representada a seguir.

	II/3	II/2	
I/3	20	15	14
I/2	15	10	07
Piso 1	10	05	10
	23	08	

(a) Na tabela seguinte representa-se a solução inicial obtida pela regra do canto NW.

	II/3	II/2	
I/3	14 (20)	- (15)	14
I/2	07 (15)	- (10)	07
Piso 1	02 (10)	08 (05)	10
	23	08	

(b) Na figura seguinte representa-se o grafo correspondente à solução inicial obtida na alínea anterior. Como se pode verificar, trata-se de um grafo conexo.



(c) Na tabela seguinte está representada a primeira iteração pelo Algoritmo de Transportes.

	II/3 0	II/2 -5	
I/3 20	14 (20)	- 0 (15)	14
I/2 15	07 (15)	- 0 (10)	07
Piso 1 10	02 (10)	08 (05)	10
	23	08	

Dado que os custos marginais das variáveis não básicas são não negativos, a solução inicial obtida pela regra do canto NW é uma solução óptima. Como esses custos marginais são nulos, isso significa que há outras soluções óptimas alternativas.

(d) Ordens a dar aos contínuos:

É necessário transportar 14 conjuntos de 10 mesas de I/3 para II/3; é necessário transportar 7 conjuntos de 10 mesas de I/2 para II/3; é necessário transportar 2 conjuntos de 10 mesas do Piso 1 para II/3; é necessário transportar 8 conjuntos de 10 mesas do Piso 1 para II/2.

A operação de troca de mesas demorará: $14 \times 20 + 7 \times 15 + 2 \times 10 + 8 \times 5 = 445 minutos$, pouco menos do que um dia de trabalho.

4.

Taxa de solicitações/tarefas:

λ = 4 chegadas/dia

Taxa de atendimentos (tarefas realizadas por dia):

μ = 6 atendimentos/dia

Situação M/M/1

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ → ρ = 4/6

$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$ → w_q = 1/3 dia

$W = Wq + \frac{1}{\mu}$ → w = 1/2 dia

Cálculo de C_t (s) ≡ Custo total envolvido, por dia, com s funcionários (em euro)

C_f ≡ Custo de funcionários, por dia (em euro):

C_f = s x 75 → C_f = 1 x 75

C_e ≡ Custo de espera total, por dia (em euro):

C ≡ custo associado à espera (equipamento não utilizado)

C_e = w x λ x C → C_e = 1/2 x 4 x C

Então C_t (s=1) = 1 x 75 + 1/2 x 4 x C (em euro)

Situação M/M/2

λ/μ = 4/6

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ → ρ = 4/12 e P_0 = 1/2 (em tabela)

$Lq = \frac{P_0(\lambda / \mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}$ → L_q = 1/12 tarefa

$L = Lq + \lambda / \mu$ → L = 9/12 tarefa

$Wq = \frac{Lq}{\lambda}$ → W_q = 1/48 dia

$W = Wq + \frac{1}{\mu}$ → W = 9/48 dia

Cálculo de C_t (s) $\equiv$ Custo total envolvido, por dia, com s funcionários (em euro)

$C_f \equiv$ Custo de funcionários, por dia (em euro):
$C_f = s \times 75$ $\rightarrow$ $C_f = 2 \times 75$

$C_e \equiv$ Custo de espera total, por dia (em euro):
$C \equiv$ custo associado à espera (equipamento não utilizado)
$C_e = w \times \lambda \times C$ $\rightarrow$ $C_e = (9/48) \times 4 \times C$

Então $C_t\ (s=2) = 2 \times 75 + (9/48) \times 4 \times C$ (em euro)

Cálculo do valor de C que torna conveniente a contratação de novo colaborador (atendendo apenas aos custos expostos):

$$C_t\ (s=2) < C_t\ (s=1)$$

$2 \times 75 + (9/48) \times 4 \times C < 1 \times 75 + 1/2 \times 4 \times C$ $\rightarrow$ $C > 60$ (euros)

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

Recurso

2002.02.06

Duração: 2 horas e 30 minutos — Com Consulta

Responda a cada questão numa folha separada

1. A **Unidade de Manutenção de Equipamentos** (**UME**), entre as várias actividades que realiza, também produz peças, modelos e equipamentos que são usados em laboratórios. Em particular, a **UME** pretende agora planear a produção de dois modelos, **Mod1** e **Mod2**, necessários para cada um dos próximos dois meses.

A previsão da procura refere 60 unidades de **Mod1** e 70 unidades de **Mod2** para o próximo mês e 70 de **Mod1** e 80 de **Mod2** para o 2^o mês. A tabela seguinte tem dados suplementares:

Modelo	Custos de Produção (euros /hora)	Trabalho necessário para fabrico (horas)	Trabalho necessário para montagem (horas)	*Stock* actual
Mod1	8	3	2	15
Mod2	10	4	3	10

No último mês a **UME** utilizou 500 horas de trabalho para este efeito. Este valor total de mão-de-obra (para fabrico + montagem) não poderá aumentar ou diminuir de mais de 60 horas de mês para mês, por motivos de equilíbrio nas várias actividades da **UME**. Por outro lado, consideram-se custos de *stock* mensais à razão de 2% dos custos de produção, baseados nos níveis de *stock* no fim do mês. A **UME** pretende ter pelo menos 15 unidades de cada modelo, ao fim dos dois meses em questão.

Apresente um modelo de optimização que permita determinar um plano de produção para minimizar os custos totais de produção e de *stocks*, satisfazendo a procura prevista e respeitando as exigências referidas.

Apresente um modelo geral que permitisse resolver um problema semelhante, colocado num horizonte de 12 meses. Poderá arbitrar os dados como entender.

2. Há vários tipos de tarefas (serviços) na FEUP que podem ser realizadas indiferentemente por pessoal das várias unidades que constituem os **Serviços Técnicos e de Manutenção**. Em particular vai-se agora proceder à elaboração dum plano de afectação das tarefas indiferenciadas **T1**, **T2** e **T3** pelas unidades:

UCC – Unidade de construção civil

UME – Unidade de manutenção de equipamentos

UGT – Unidade de gestão técnica

A **UCC** poderá realizar no máximo 20 daquelas tarefas, a **UME** poderá realizar no máximo 10 tarefas e a **UGT** poderá realizar no máximo 35 tarefas. Há 25 tarefas **T1** a realizar, 20 tarefas **T2** e 20 tarefas **T3** a realizar. A seguinte tabela informa sobre as possibilidades (quantas tarefas) de realização das várias tarefas pelas diferentes unidades:

	T1	T2	T3
UCC	15	10	-
UME	5	-	10
UGT	10	5	5

Estabeleça o melhor plano de realização das tarefas em questão. Deverá formular o problema como de Fluxo Máximo numa rede e resolvê-lo pelo algoritmo apresentado.

3. Na afectação de verbas às actividades de manutenção dos grandes edifícios, uma questão interessante é saber quanto se deve atribuir às actividades de manutenção correctiva, às actividades de manutenção preventiva e à renovação do equipamento (que neste problema associamos às variáveis x_1, x_2 e x_3, respectivamente). Sabe-se qual é o retorno típico, em termos de funcionamento dos equipamentos, por cada euro afectado a cada uma dessa actividades e é o retorno global que se pretende maximizar. A consideração de algumas restrições à relação entre os dinheiros a orçamentar para cada actividade (relacionados com valores mínimos, máximos e orçamento disponível – 7×10^5 euros) conduzem-nos directamente ao seguinte modelo de Programação Linear:

$$max\, \mathrm{Z} = 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
\text{suj. a:} & & & & & & & \\
- & 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 8 \\
 & & & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 6 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

(a) Resolva este problema até à optimalidade pelo método simplex.

(b) Existem outras soluções óptimas para além da que acabou de determinar? Quantas? Como as determinaria? Qual seria o seu valor de função objectivo?

4. A LimpaMelhor, empresa líder no mercado de limpeza de grandes instituições, pretende participar no concurso público para limpeza das instalações da FEUP.

Em conversas preliminares com o responsável pelos serviços de manutenção da FEUP e após uma visita exaustiva às instalações da FEUP, os responsáveis pela empresa detectaram a necessidade de equipamentos que tornariam a limpeza mais rápida, eficiente e segura.

- **(LE)** - Lavadora eléctrica para corredor do edifício das salas de aula. Dada a dimensão do corredor principal desse edifício, parece ser justificada a utilização de um equipamento que reduza a necessidade de mão-de-obra.
- **(EE)** - Equipamento elevatório com capacidade de elevação até 50m, para facilitar/permitir a limpeza de todos os vidros da FEUP.

A LimpaMelhor deverá adquirir os equipamentos antes do início do concurso, dado que os equipamentos de apoio à limpeza serão um dos factores relevantes no processo de decisão. Os equipamentos que forem adquiridos serão utilizados a 100% nas instalações da FEUP.

Apresentam-se na tabela seguinte os resultados possíveis para o concurso e as probabilidades associadas a cada um dos resultados para cada uma das decisões possíveis.

	Não comprar	comprar **(LE)**	comprar **(LE)** e **(EE)**
Não adjudicado	0.6	0.4	0.3
Adjudicação de $\frac{1}{2}$	0.3	0.4	0.3
Adjudicação total	0.1	0.2	0.4

Na tabela seguinte está representada a matriz de decisão. Os valores apresentados correspondem a lucros.

	Não comprar	comprar **(LE)**	comprar **(LE)** e **(EE)**
Não adjudicado	0	-100	-200
Adjudicação de $\frac{1}{2}$	10	0	100
Adjudicação total	20	100	200

(a) Construa a Árvore de Decisão para este problema.

(b) Determine a decisão que corresponde ao Máximo Valor Esperado.

(c) Construa a matriz correspondente à Perda de Oportunidade Esperada.

Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Investigação Operacional

Recurso

2002.02.06

Resolução

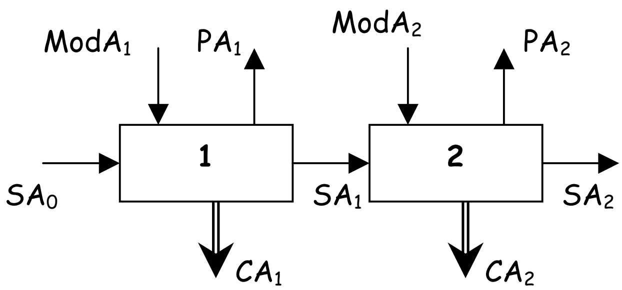
Resolução:

1 a)

Variáveis:

- ModAi – produção do ModA no mês i (i=1,2)
- ModBi – produção do ModB no mês i (i=1,2)
- PAi – procura do ModA no mês i (i=1,2)
- PBi – procura do ModB no mês i (i=1,2)
- SAi – *stock* do ModA no mês i (i=0,1,2)
- SBi – *stock* do ModB no mês i (i=0,1,2)
- CAi – custos totais de produção do ModA no mês i (i=1,2)
- CBi – custos totais de produção do ModB no mês i (i=1,2)
- Ti – horas de trabalho no mês i (i=1,2)

Caso do ModA



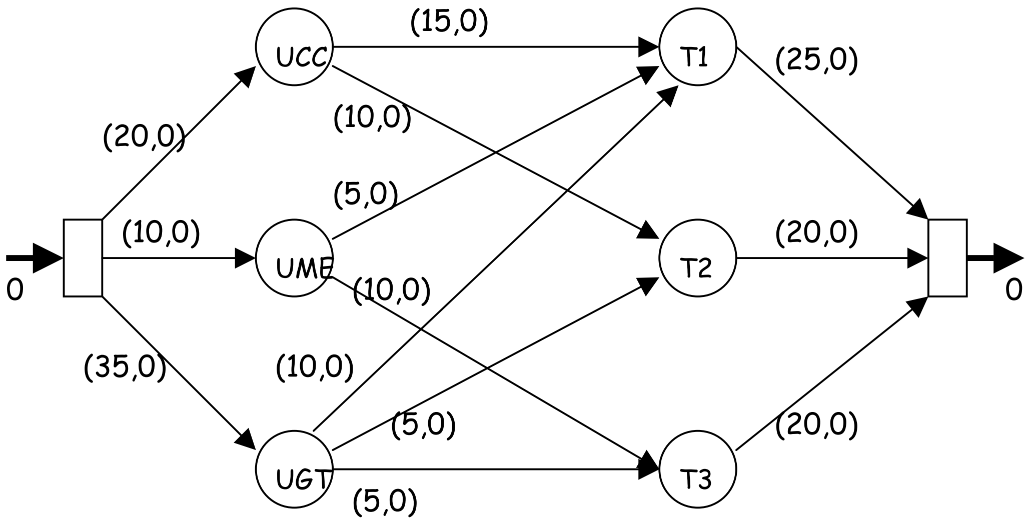
Modelo de optimização:

$$min \sum_{i=1}^{2} C1i + C2i$$

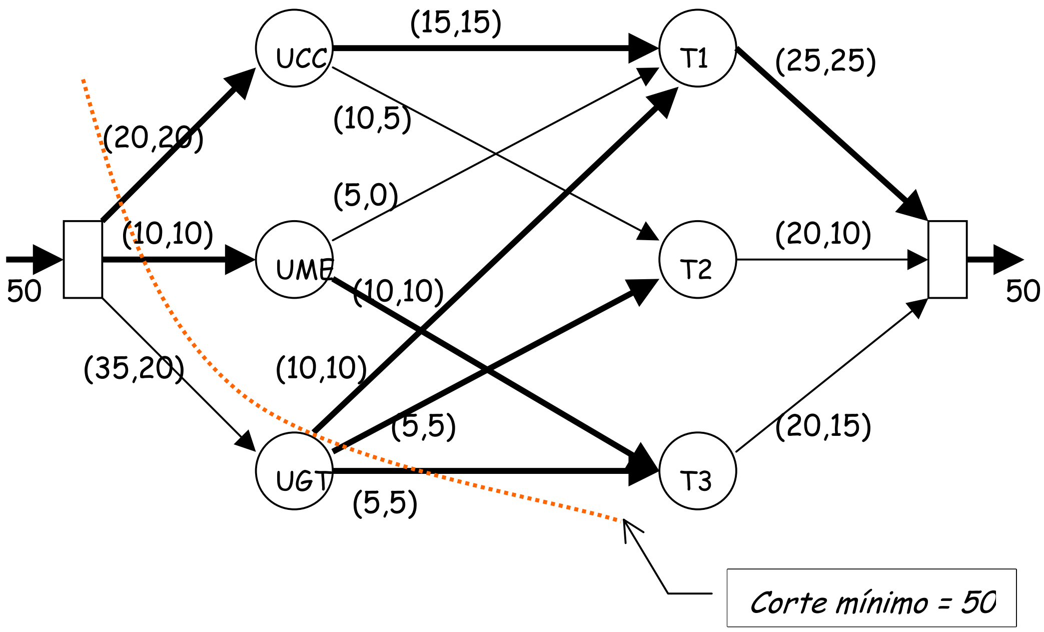
suj. a:

$CAi = 8\times(3+2)ModAi + 0.02\times8\times(3+2)SAi \quad i=1,2$
$CBi = 10\times(4+3)ModBi + 0.02\times10\times(4+3)SBi \quad i=1,2$
$SAi = SA(i-1) + ModAi - PAi \quad i=1,2$
$SBi = SB(i-1) + ModBi - PBi \quad i=1,2$
$SA0 = 15; \quad SB0 = 10; \quad SA2 \geq 15; \quad SB2 \geq 15$
$PA1 = 60; \quad PA2 = 70; \quad PB1 = 70; \quad PB2 = 80$
$T1 = (3+2)ModA1 + (4+3)ModB1$
$T2 = (3+2)ModA1 + (4+3)ModB1$
$440 \leq T1 \leq 560$
$T1 - 60 \leq T2 \leq T1 + 60$
$CAi, CBi, ModAi, ModBi, SAi, SBi, PAi, PBi, T1, T2 \geq 0 \quad (i)$

Representação inicial:



Na próxima rede está representado o fluxo máximo – total de tarefas (50):



Um plano óptimo de realização das tarefas:

	T1	T2	T3
UCC	15	5	-
UME	0	-	10
UGT	10	5	5

3. (a)

$$max\,\mathrm{Z} = 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -\;2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 8 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Introduzindo varáveis de folga e variáveis artificiais, e usando o método das penalidades para retirar as variáveis artificiais da base:

$$max\,Z = 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 - M\,a_1 - M\,a_2$$

suj. a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl} -\;2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & s_1 & & & & & & & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & s_2 & & & & & & & = & 8 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & & & & & - & s_3 & + & a_1 & & & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & & & + & a_2 & = & 7 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & s_1 & , & s_2 & , & s_3 & , & a_1 & , & a_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Para construir o quadro simplex inicial falta exprimir a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas, para assim se obterem os custos marginais:

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 - x_2 - 3x_3 + s_3 \\ a_2 &= 7 - x_1 - x_2 - x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 - Ma_1 - Ma_2 \\ &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 - M(6 - x_2 - 3x_3 + s_3) - M(7 - x_1 - x_2 - x_3) \\ &= -13M + (2 + M)x_1 + (3 + 2M)x_2 + (1 + 4M)x_3 - Ms_3 \end{aligned}$$

Fazendo agora as iterações pelo método simplex:

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	
	s_1	-2	-2	1	1	0	0	0	0	2
	s_2	1	2	0	0	1	0	0	0	8
$\Leftarrow$	a_1	0	1	$\boxed{3}$	0	0	-1	1	0	6
	a_2	1	1	1	0	0	0	0	1	7
	$-Z$	2	3	1	0	0	0	0	0	0
		$+M$	$+2M$	$+4M$	0	0	$-M$	0	0	$+13M$
				$\Uparrow$						

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	
	s_1	-2	$-\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
	s_2	1	2	0	0	1	0	0	0	8
	x_3	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
$\Leftarrow$	a_2	$\boxed{1}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	5
	$-Z$	2	$\frac{8}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-2
		$+M$	$+\frac{2}{3}M$	0	0	0	$+\frac{1}{3}M$	$-\frac{4}{3}M$	0	$+5M$
		$\Uparrow$								

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	
	s_1	0	-1	0	1	0	1	-1	2	10
$\Leftarrow$	s_2	0	$\boxed{\frac{4}{3}}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	3
	x_3	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
	x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	5
	$-Z$	0	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-2	-12
		0	0	0	0	0		$-M$	$-M$	
			$\Uparrow$							

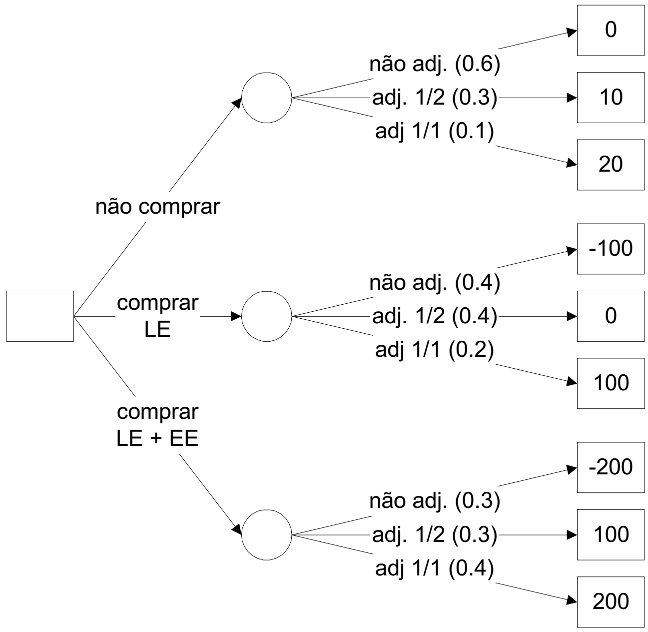
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{49}{4}$
s_2	0	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_3	0	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_1	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
$-Z$	0	0	0	0	-1	0	-15

Solução óptima:

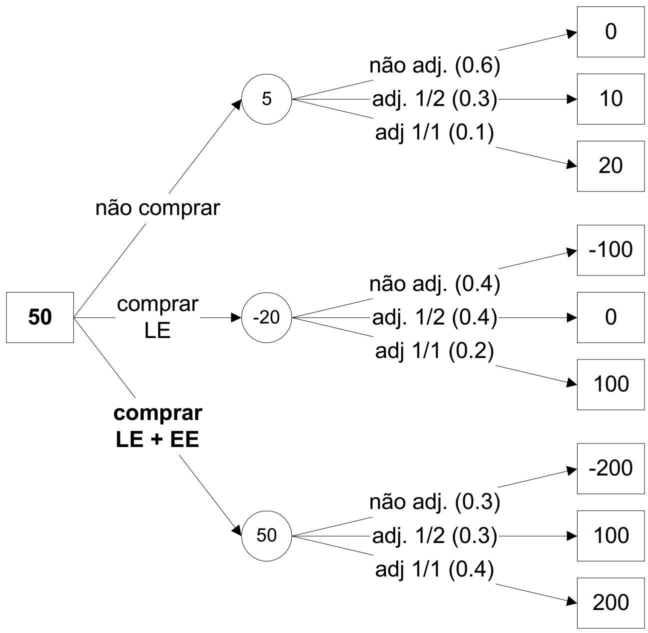
$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3)^\star = \left(\frac{7}{2}, 0, \frac{5}{4}, \frac{49}{4}, \frac{9}{4}, 0\right)$$
$$\text{com} \quad Z^\star = 15$$

(b) Há soluções óptimas alternativas pois no quadro óptimo existe uma variável não básica com custo marginal nulo. Isso significa que se essa variável entrasse para a base teríamos uma solução básica diferente mas com igual valor (óptimo) da função objectivo. No entanto não é só essa solução óptima que existe a mais. Qualquer solução que seja combinação linear destas duas, isto é, que esteja sobre a aresta que une os dois vértices a que estas soluções básicas correspondem, ainda é solução óptima do problema. Temos portanto um número infinito de soluções óptimas, das quais apenas duas são básicas.

4. **(a)** A Árvore de Decisão para o problema descrito está representada na figura seguinte:



(b) Na figura seguinte estão representados os cálculos para determinação da decisão correspondente ao máximo valor esperado.



(c) A matriz correspondente à Perda de Oportunidade Esperada é a seguinte:

	Não comprar	comprar **(LE)**	comprar **(LE)** e **(EE)**
Não adjudicado	0	100	200
Adjudicação de $\frac{1}{2}$	90	100	0
Adjudicação total	180	100	0