

Ana Isabel Ferreira

# Projeções da Taxa de Mortalidade



Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
2012

Ana Isabel Ferreira

# Projeções da Taxa de Mortalidade



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da  
Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre  
em Engenharia Matemática*

Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
2012

## Agradecimentos

Este espaço é dedicado àqueles que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho fosse realizado. Não sendo viável nomeá-los a todos, há no entanto alguns a que não posso deixar de manifestar o meu sincero agradecimento.

À Prof. Dr<sup>o</sup> Margarida Brito (FCUP) expresse o meu agradecimento pela orientação, apoio, disponibilidade e incentivo sempre demonstrados.

À Dr<sup>o</sup> Graça Lima (Observatório de Saúde) por a disponibilidade em ceder os dados e o apoio que sempre demonstrou.

A todos os meus colegas de curso agradeço o apoio, ajuda e o incentivo que sempre tiveram ao longo do curso.

Aos meus pais, irmão e namorado pela compreensão, apoio e paciência dados nos momentos de maior stress e trabalho.

A todas as pessoas que, directa ou indirectamente, contribuíram para a execução desta tese de mestrado.

# Resumo

Este trabalho teve como objectivo o estudo e a análise da mortalidade, recorrendo a métodos de projecção de mortalidade.

Dos métodos de projecção que existem, o utilizado foi o método de Lee-Carter, que combina um modelo demográfico com um modelo de séries temporais.

Para a realização deste trabalho foram utilizados dados de 1996 a 2009 da mortalidade na Região Norte e em Portugal de forma a prever a mortalidade nestas zonas no período de 2010 a 2016.

Os dados foram fornecidos pelo observatório de saúde de Matosinhos, o qual propôs este trabalho. Este tema é de interesse de saúde pública, pois estes centro de estudos têm como finalidade prever e melhorar a saúde da população.

O software utilizado foi o R.

# Abstract

The central aim of this work is the prediction of mortality rates. We used data from 1996 to 2009 mortality in the Northern Region and Portugal in order to predict mortality in these areas in the period 2010 to 2016.

We study and analyze the mortality using the projection method of Lee and Carter. This method combines a demographic model with a time series model. We used the software R. The data were provided by the health observatory of Matosinhos, who proposed this work. This topic is of interest to public health, since these study centers are intended to provide and improve population health.

# Conteúdo

Resumo	4
Abstract	5
Índice de Tabelas	8
Índice de Figuras	9
<b>1 Introdução</b>	<b>10</b>
1.1 Objectivos	10
1.2 Dados necessários para a elaboração do trabalho	10
1.3 Observatório de saúde pública	10
1.3.1 O que é a saúde pública?	10
1.3.2 O que é um observatório de saúde pública?	11
1.3.3 Quais as principais tarefas de um observatório de saúde?	11
<b>2 Fundamentação teórica</b>	<b>12</b>
2.1 Mortalidade	12
2.1.1 A importância do estudo da mortalidade	12
2.1.2 Taxa de mortalidade geral	14
2.1.3 Taxa de mortalidade específica por idade/faixa etária	14
2.1.4 Taxa de mortalidade específica por causa	14
2.1.5 Taxa de mortalidade específica por sexo	14
2.1.6 Taxa de mortalidade infantil	15
2.2 Morbilidade	16
2.3 Padronização	16
2.3.1 Porque é feita a padronização da idade?	16
2.3.2 Como é feita a padronização da idade?	16
2.3.3 Métodos de padronização	17
2.3.4 Método de padronização direto	17
<b>3 Métodos de projecção da mortalidade</b>	<b>19</b>
3.1 Métodos de projecção	19
3.2 Modelo de Lee-Carter	20
3.2.1 O modelo demográfico	21
3.2.2 O ajustamento do modelo demográfico	21
3.2.3 Modelação do índice de mortalidade	22

3.2.4	Algumas limitações do modelo . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Aplicação do método de Lee-Carter</b>	<b>24</b>
4.1	Estimação dos parâmetros do modelo . . . . .	24
4.2	Construção de projeções de mortalidade . . . . .	26
4.2.1	Coeficiente de determinação . . . . .	27
4.3	Aplicação do Método . . . . .	27
4.3.1	Ajustamento demográfico . . . . .	27
4.3.2	Previsões para a mortalidade . . . . .	32
4.3.3	Comentários finais . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Anexo</b>	<b>37</b>

# Lista de Tabelas

2.1	Mortalidade por causa de morte em ambos os sexos e todas as idades em Matosinhos . . . . .	13
2.2	Mortalidade por causa de morte em ambos os sexos e idades inferiores a 65 anos em Matosinhos . . . . .	13
2.3	Mortalidade por causa de morte em ambos os sexos e todas as idades na Região Norte . . . . .	13
2.4	Mortalidade por causa de morte em ambos os sexos e idades inferiores a 65 anos na Região Norte . . . . .	13
2.5	Número de novos casos de tuberculose-morbilidade . . . . .	14
2.6	População estimada, número de óbitos por 1000 habitantes e taxas de mortalidade, por faixa etária, no Brasil e EUA, em 1982 . . . . .	18
2.7	Padronização da taxa de mortalidade dos EUA - População padrão- Brasil 1982 . . . . .	18
4.1	Tabela das observações da taxa de mortalidade no sexo masculino na Região Norte de 1996-2009 . . . . .	27
4.2	Tabela das observações da taxa de mortalidade no sexo feminino na Região Norte de 1996-2009 . . . . .	27
4.3	Tabela das observações da taxa de mortalidade no sexo masculino em Portugal de 1996-2009 . . . . .	28
4.4	Tabela das observações da taxa de mortalidade no sexo masculino em Portugal de 1996-2009 . . . . .	28
4.5	Tabela das projeções da taxa de mortalidade no sexo masculino na Região Norte de 2010-2016 . . . . .	32
4.6	Tabela das projeções da taxa de mortalidade no sexo feminino na Região Norte de 2010-2016 . . . . .	33
4.7	Tabela das projeções da taxa de mortalidade no sexo masculino em Portugal de 2010-2016 . . . . .	34
4.8	Tabela das projeções da taxa de mortalidade no sexo feminino em Portugal de 2010-2016 . . . . .	35

# Lista de Figuras

4.1	Taxa de mortalidade total anual logaritmizada, por grupo etário em ambos os sexos . . . . .	28
4.2	Taxa de mortalidade total anual logaritmizada, por grupo etário em Portugal em ambos os sexos . . . . .	29
4.3	Dados centrados da taxa de mortalidade total anual por grupo etário em ambos os sexos na Região Norte . . . . .	29
4.4	Dados centrados da taxa de mortalidade total anual por grupo etário em ambos os sexos em Portugal . . . . .	30
4.5	Taxas de mortalidade e respectivas estimativas produzidas pelo método de Lee-Carter na região norte . . . . .	31
4.6	Taxas de mortalidade e respectivas estimativas produzidas pelo método de Lee-Carter em Portugal . . . . .	31
4.7	Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual logaritmizada para o sexo masculino na Região Norte . . . . .	32
4.8	Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual logaritmizada para o sexo feminino na Região Norte . . . . .	33
4.9	Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual logaritmizada para o sexo masculino em Portugal . . . . .	34
4.10	Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual logaritmizada para o sexo feminino em Portugal . . . . .	35

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Objectivos

O objetivo geral deste trabalho é a análise e o estudo da mortalidade recorrendo a métodos de projeção, de forma a poder-se fazer uma previsão desta através dos dados disponíveis para a Zona Norte, Matosinhos e Portugal. O método utilizado foi o método de Lee-Carter.

### 1.2 Dados necessários para a elaboração do trabalho

Todos os dados utilizados neste trabalho, foram cedidos pelo observatório de saúde de Matosinhos.

- Óbitos por sexo, grupos etários no período de 1996 a 2009.
- População residente no concelho de Matosinhos, Região Norte e Portugal por sexo e grupos etários (fonte: INE);
- Óbitos por causa de morte na Zona Norte e Matosinhos.

### 1.3 Observatório de saúde pública

#### 1.3.1 O que é a saúde pública?

A saúde pública centra a sua ação a partir da ótica visual do estado com os interesses que ele representa nas distintas formas de organização social e política das populações. Na conceção mais tradicional, é a aplicação de conhecimentos (médicos ou não), com o objetivo de organizar sistemas e serviços de saúde, atuar em fatores condicionantes e determinantes do processo saúde-doença controlando a incidência de doenças nas populações através de ações de vigilância e intervenções governamentais (ver e.g. Felício *et. al.* 2010)

### 1.3.2 O que é um observatório de saúde pública?

- Os centros de observação de saúde são centros de trabalhos e estudos, que permitem observar e analisar de uma forma crítica, continuada e sistemática a evolução dos indicadores do estado de saúde de uma população em geral ou orientada para algum aspeto particular de saúde. Para este fim, reúnem investigadores e especialistas numa determinada temática, com a finalidade de identificar e analisar realidades, contextos, factos e processos.
- Para além de serem centros de análise são também estruturas bem claras de comunicação para dentro (informando/apoiando/avaliando a tomada de decisão e a intervenção, nomeadamente, a nível local) e para fora do sector de saúde (fazendo a advocacia da saúde e influenciando as políticas públicas com maior impacto na saúde).
- Têm como finalidade as melhorias da saúde e a diminuição das desigualdades/disparidades em saúde.
- São, geralmente, estruturas nacionais e/ou regionais, criadas como resultado de uma decisão estratégica “de topo”, e financiadas (total ou parcialmente) pelo governo.
- São estruturas de dimensão variável, com um “*staff*” multidisciplinar e tecnicamente diferenciado.
- Os observatórios de saúde regionais, em geral, organizaram-se a partir de um modelo comum, funcionando de um modo articulado, harmónico, em rede.

### 1.3.3 Quais as principais tarefas de um observatório de saúde?

- Monitorizar o estado de saúde da população e identificar as suas necessidades de saúde;
- Identificar lacunas na informação de saúde;
- Efetuar a vigilância epidemiológica das doenças transmissíveis, das doenças não transmissíveis e no âmbito da saúde ambiental;
- Avaliar e rever os programas de saúde;
- Monitorizar e avaliar o impacto do desempenho dos serviços de saúde, sobretudo, em termos da melhoria da saúde e da diminuição das desigualdades em saúde;
- Efetuar a avaliação do impacto na saúde (Health Impact Assessment);
- Efetuar/promover a Investigação aplicada;
- Garantir a partilha e translação do conhecimento;
- Fazer recomendações e comunicá-las eficaz e eficientemente a destinatários-chave (public health reporting).

# Capítulo 2

## Fundamentação teórica

### 2.1 Mortalidade

Em Epidemiologia, mortalidade é a taxa de mortalidade, ou seja, o número de óbitos em relação ao número de habitantes. A taxa de mortalidade é um indicador que reflete o número de óbitos por cada 1000 habitantes de uma população num determinado período de tempo, geralmente, um ano. Esta taxa está inversamente associada à esperança média de vida, no momento do nascimento, quanto maior é a esperança de vida, menor é a taxa de mortalidade.

Os países em vias de desenvolvimento apresentam uma taxa de mortalidade mais elevada do que os países desenvolvidos. A taxa de mortalidade habitualmente considera-se elevada quando excede os 30%, moderada quando se situa entre os 15% e os 30% e baixa quando fica abaixo dos 15%. A nível mundial, a mortalidade relacionada com a malnutrição é a principal responsável pelas taxas de mortalidade mais elevadas. Já nos países desenvolvidos, as principais causas de mortalidade são os tumores, as doenças do sistema circulatório e as doenças do sistema respiratório.

A taxa de mortalidade infantil é o indicador demográfico que indica o número de óbitos de crianças com menos de um ano de vida, num determinado período de tempo, normalmente um ano.

#### 2.1.1 A importância do estudo da mortalidade

A mortalidade ao longo dos anos foi diminuindo devido às melhorias das condições de vida da sociedade, entre elas a melhoria nos cuidados de saúde, a maior qualidade e variedade na alimentação da população e o desenvolvimento tecnológico acompanhado por um crescimento económico, havendo um aumento da esperança média de vida da população. Do ponto de vista de saúde pública é muito importante estudarmos a mortalidade e as causas desta de uma região, de uma cidade ou de um país, de forma a prever num futuro próximo os gastos a ter na saúde e tentar melhorar ainda mais as metodologias na saúde com a finalidade de ter um tempo de resposta maior a uma doença.

Na zona de Matosinhos e Região Norte as doenças mais preocupantes que afectam mais a população são: HIV/sida, tumores malignos e doenças do aparelho circulatório e a tuberculose.

Assim como podemos verificar nas tabelas a seguir:

Tabela 2.1: Mortalidade por causa de morte em ambos os sexos e todas as idades em Matosinhos

Anos	2001-2003	2002-2004	2003-2005	2004-2006	2005-2007	2006-2008	2007-2009
Todas as causas	692,8	690,7	690,3	676,6	670,3	650,7	643,2
HIV/SIDA	17,0	15,7	13,6	13,3	11,0	9,5	10,0
Tumores Malignos	178,2	183,4	187,9	184,2	183,5	181,0	182,3
Tumor Maligno do Cólon e Recto	25,8	26,4	26,5	22,1	20,1	21,0	20,9
Tumor maligno da Traqueia, Brônquios e Pulmão	31,9	32,8	35,6	35,6	35,7	35,8	38,9
Tumor Maligno da Mama	22,4	23,5	22,8	18,2	15,8	14,3	16,1
Doenças do Aparelho Circulatório	210,1	211,5	197,1	172,8	161,5	158,6	159,9
Doença Isquémica do Coração	53,1	54,0	47,6	36,8	32,7	35,1	36,6
Doenças Cerebrovasculares	102,6	101,2	86,5	76,6	76,1	77,4	75,3

Tabela 2.2: Mortalidade por causa de morte em ambos os sexos e idades inferiores a 65 anos em Matosinhos

Anos	2001-2003	2002-2004	2003-2005	2004-2006	2005-2007	2006-2008	2007-2009
Todas as causas	222,6	211,8	207,7	209,6	206,3	197,0	199,5
HIV/SIDA	18,2	16,6	14,2	14,4	11,8	10,3	10,7
Tumores Malignos	72,8	77,1	80,9	82,8	79,3	79,0	80,4
Tumor Maligno do Cólon e Recto	6,3	7,3	8,1	8,3	6,7	7,4	6,3
Tumor maligno da Traqueia, Brônquios e Pulmão	15,8	16,4	17,3	17,8	17,0	18,5	20,5
Tumor Maligno da Mama	14,0	13,1	10,7	8,5	7,5	5,5	8,1
Doenças do Aparelho Circulatório	38,5	36,6	27,7	22,6	20,6	22,0	22,1
Doença Isquémica do Coração	15,5	14,8	12,2	8,7	5,9	6,3	6,8
Doenças Cerebrovasculares	15,8	14,3	8,6	7,4	9,4	9,5	8,6

Tabela 2.3: Mortalidade por causa de morte em ambos os sexos e todas as idades na Região Norte

Anos	2001-2003	2002-2004	2003-2005	2004-2006	2005-2007	2006-2008	2007-2009
Todas as causas	704,3	690,8	681,2	649,2	635,3	611,3	598,5
HIV/SIDA	6,6	6,2	5,9	5,1	5,1	4,8	4,8
Tumores Malignos	157,3	157,6	157,2	151,5	150,7	150,1	152,4
Tumor Maligno do Cólon e Recto	19,7	19,6	19,5	19,0	19,2	19,7	20,2
Tumor maligno da Traqueia, Brônquios e Pulmão	24,6	24,9	24,7	24,3	24,7	24,8	25,2
Tumor Maligno da Mama	17,8	16,6	16,6	15,5	16,2	16,3	16,6
Doenças do Aparelho Circulatório	237,9	229,2	215,4	191,6	179,0	169,1	166,8
Doença Isquémica do Coração	45,6	45,3	41,9	36,5	33,3	31,0	30,4
Doenças Cerebrovasculares	125,0	117,1	108,4	95,7	89,6	84,6	82,7

Tabela 2.4: Mortalidade por causa de morte em ambos os sexos e idades inferiores a 65 anos na Região Norte

Anos	2001-2003	2002-2004	2003-2005	2004-2006	2005-2007	2006-2008	2007-2009
Todas as causas	226,4	218,0	211,6	203,6	198,2	190,2	185,2
HIV/SIDA	7,2	6,7	6,2	5,5	5,3	5,1	5,1
Tumores Malignos	70,2	69,6	70,1	68,1	68,0	67,2	68,4
Tumor Maligno do Cólon e Recto	6,6	6,7	6,7	6,6	6,2	6,5	6,7
Tumor maligno da Traqueia, Brônquios e Pulmão	13,2	13,0	13,0	12,4	12,8	12,7	13,4
Tumor Maligno da Mama	11,4	10,9	10,9	10,2	10,4	10,5	10,8
Doenças do Aparelho Circulatório	37,5	37,3	32,3	27,5	23,2	22,3	22,1
Doença Isquémica do Coração	12,6	13,0	11,0	9,0	7,0	6,4	6,2
Doenças Cerebrovasculares	14,8	14,2	12,6	11,3	10,1	9,8	9,4

Tabela 2.5: Número de novos casos de tuberculose-morbilidade

Anos	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Uls Matosinhos	154	138	141	123	113	108	96	86	70	58	59
Região Norte	1919	1841	1892	1769	1614	1535	1458	1351	1264	1117	1017

Observando as tabelas, como já era de esperar, visto ser uma população mais jovem é visível uma mortalidade muito menor em idades inferiores a 65 anos do que em todas as idades. As doenças que causam maior mortalidade em Matosinhos e na Região Norte são as doenças do aparelho circulatório, já a tuberculose é a que provoca menor mortalidade, e cada vez com mais tendência a diminuir, pois nos tempos de hoje já existe um avanço considerável na medicina a esse nível.

Dos anos 2001-2003 para 2002-2004 registou-se um pequeno aumento em algumas causas de mortalidade, mas a partir de 2002-2004 a mortalidade por estas doenças foi sempre diminuindo, o que já era de esperar devido às novas tecnologias e avanços nestas áreas. Comparando a zona de Matosinhos com a Região Norte, não existe uma grande diferença na mortalidade nestas causas de morte.

### 2.1.2 Taxa de mortalidade geral

$$TMG = \frac{\text{Total de óbitos em determinado período de tempo}}{\text{População Total exposta ao risco de morrer (nº habitantes)}} * 10^n \quad (2.1)$$

Existem ainda as taxas de mortalidade específicas, estas taxas medem o risco de morte para uma fração da população. As taxas de mortalidade específicas mais utilizadas são: por idade/faixa etária, causa e sexo.

### 2.1.3 Taxa de mortalidade específica por idade/faixa etária

$$TME_{idade} = \frac{\text{Total de óbitos na faixa etária em determinado período de tempo}}{\text{População Total da faixa etária correspondente}} * 10^n \quad (2.2)$$

### 2.1.4 Taxa de mortalidade específica por causa

$$TME_{causa} = \frac{\text{Total de óbitos por determinada doença em determinado período de tempo}}{\text{População Total exposta ao risco de morrer}} * 10^n \quad (2.3)$$

### 2.1.5 Taxa de mortalidade específica por sexo

$$TME_{sexo} = \frac{\text{Total de óbitos do mesmo sexo em determinado período de tempo}}{\text{População Total do sexo correspondente}} * 10^n \quad (2.4)$$

Para facilitar e permitir a comparação entre as taxas calculadas para diferentes locais ou para o mesmo local em diferentes períodos de tempo, utiliza-se sempre uma referência comum (100, 1000, 10.000, 100.000, 1.000.000) que representa uma potência de base 10 ( $10^n$ ). Essa potência de 10 é escolhida de forma a tornar os números obtidos o mais próximo possível do inteiro, pois não convém trabalhar com coeficientes, índices ou taxas expressos por números decimais ( não tem sentido falar em meio óbito (0.5) por 1000 habitantes ou um décimo (0.1) de mortes menores de 1 anos por 1000 nascidos vivos). Deste modo, deve-se utilizar a base 10, procurando aumentar as frações obtidas por divisão e, conseqüentemente diminuindo o número de zeros dessas frações decimais. Por convenção, nas taxas de mortalidade geral e infantil, a base é  $10^3 = 1000$  e quando se trata de mortalidade por causas, a base mais adequada é  $10^5 = 100000$ .

### 2.1.6 Taxa de mortalidade infantil

Esta taxa é um caso especial da taxa de mortalidade específica por faixa etária, mede o risco de morte no primeiro ano de vida.

A taxa de mortalidade infantil é um dos indicadores mais sensíveis das condições de vida e saúde de uma população. A situação ideal é que nenhuma criança morresse no seu primeiro ano de vida mas é impossível reduzir essa taxa a zero, visto que, algumas crianças nascem com doenças tão graves que mesmo a atual tecnologia médica disponível ainda não pode salvar essas vidas.

Alguns casos de óbitos por mortalidade infantil são devidos a:

- Más condições sócio-económicas com conseqüências graves na nutrição, higiene e cuidados gerais.
- Falta de acesso a serviços de saúde infantil.
- Falta ou má qualidade de acesso à assistência perinatal: pré-natal, parto e atenção neonatal.

Taxa de mortalidade infantil:

$$TMI = \frac{\text{Total de óbitos em crianças menores de um ano em determinado período de tempo}}{\text{População Total de nascidos vivos}} * 10^n \quad (2.5)$$

A taxa de mortalidade infantil apresenta duas componentes: a taxa de mortalidade neonatal (precoce e tardia) e a taxa de mortalidade pós-neonatal.

No início da vida extra-uterina, correspondente ao período neonatal, as causas de óbitos mais comuns são as conseqüências de agressões sofridas intra-útero, as condições de parto e de assistência ao recém-nascido.

No período pós-neonatal, predominam as causas sócio-económicas e ambientais.

Desta forma, as sociedades mais desenvolvidas apresentam taxas de mortalidade Infantil baixas, predominando a componente neonatal (principalmente a precoce), enquanto que nos países subdesenvolvidos, as taxas de mortalidade Infantil são altas e predominando a componente pós-neonatal.

## 2.2 Morbidade

Em Epidemiologia, morbidade é a taxa de indivíduos portadores de determinada doença em relação à população local e em determinado momento. A quantidade das doenças ou cálculo de taxas de morbidade, são tarefas essenciais para a vigilância epidemiológica e para o controle das doenças que, para fins de organização dos serviços de saúde e intervenções nos níveis de saúde pública podem ser divididas em doenças transmissíveis e doenças não transmissíveis.

## 2.3 Padronização

A padronização é um procedimento estatístico aplicado às taxas de doença, morte, ferimentos que permite que populações com estruturas etárias diferentes sejam comparadas.

### 2.3.1 Porque é feita a padronização da idade?

- Quase todas doenças ocorrem com diferentes taxas nas diferentes faixas etárias.
  - A maioria das doenças crónicas tais como o cancro ocorrem com mais frequência nas faixas etárias mais idosas .
  - Entre os jovens ocorrem com mais frequência as lesões.
- A distribuição etária determina quais são os problemas de saúde mais comuns numa população.
- É uma forma de estudarmos e compararmos duas populações com tamanhos diferentes e distribuições etárias diferentes. Uma população constituída por famílias com mais crianças e jovens vai ter uma maior taxa de lesões do que uma população com menos crianças e jovens, mais idosa.
- Uma população com mais idosos tem maiores taxas de cancro do que uma com indivíduos mais jovens.
- Deste modo é necessário fazer a padronização da idade para comparar-mos duas populações.

### 2.3.2 Como é feita a padronização da idade?

Quando duas populações que estão a ser comparadas têm distribuições diferentes nas faixas etárias e os riscos de certas doenças variam com as diferentes faixas etárias, usa-se o processo de padronização pelo método directo.

Depois de definida uma população padrão e de serem feitos os cálculos para as taxas específicas por idade das doenças / mortalidade da população, calcula-se a taxa da população padrão multiplicando as taxas específicas da população em estudo pelo peso relativo por idade da população padrão.

### 2.3.3 Métodos de padronização

A taxa de mortalidade bruta é uma medida utilizada em saúde pública, no entanto, quando pretendemos fazer comparações entre diferentes áreas geográficas esta medida não é a mais adequada. A probabilidade de morrer aumenta fortemente com a idade, por esse facto utilizar a taxa de mortalidade para todas as idades pode induzir em erros consideráveis, pois em áreas geográficas com população mais idosa é esperado que essa taxa seja mais elevada do que em áreas cuja população é mais jovem. O mais correto será fazer comparações entre taxas específicas por idades, contudo, quando o número de populações a comparar aumenta o volume de dados necessário é enorme e de difícil análise.

Assim, o que se procura é um único valor, de fácil interpretação, que sumarie o retrato de cada população, tendo em conta a sua estrutura etária.

Existem dois métodos de padronização para resolver este problema do efeito da idade no cálculo das taxas de mortalidade:

- Método de padronização direto.
- Método de padronização indireto

O método habitualmente usado é o método de padronização direto.

### 2.3.4 Método de padronização direto

A ideia básica da padronização é a introdução de uma população cuja composição, em relação à variável a ser controlada é conhecida, e é considerada como padrão. Os coeficientes de mortalidade das populações a serem comparadas são então ajustados em relação à composição desta população padrão.

Para o cálculo do coeficiente padronizado, em primeiro lugar seleciona-se a população padrão. Como população padrão pode-se utilizar a soma das populações estudadas, somente uma delas ou uma terceira outra população.

Em seguida as taxas de mortalidade específicas por idade das populações estudadas são aplicadas nos grupos etários respectivos da população padrão, ou seja, multiplica-se cada taxa específica pelo número de pessoas no grupo etário da população padrão.

Calcula-se assim, o número de óbitos esperados nas populações estudadas se elas tivessem a distribuição etária padrão. Esta soma constitui o numerador do coeficiente padronizado. Este numerador dividido pelo total da população padrão e multiplicado por um múltiplo de 10 dá-nos o coeficiente de mortalidade padronizado pela idade.

**Exemplo**

Pretendendo-se comparar a população dos EUA com a população do Brasil no ano de 1982, a tabela a seguir representa a estimativa da população, do número de óbitos e das taxas de mortalidade em 1982 dessas duas populações.

Tabela 2.6: População estimada, número de óbitos por 1000 habitantes e taxas de mortalidade, por faixa etária, no Brasil e EUA, em 1982

Faixa Etária	Brasil			EUA		
	Habitantes – ano	óbitos	TM	Habitantes-ano	óbitos	TM
0-14	47.829.000	213262	4.5	51.351.000	58720	1.1
15-64	73.850.000	292668	4.0	153.359.000	561730	3.7
≥ 65	5.128.000	275364	53.7	26.824.000	1365230	50.9
Total	126.807.000	781294	6.2	231.534.000	1985680	8.6

Iremos então usar o Brasil como a população padrão, multiplicando os habitantes-ano desta com as taxas de mortalidade dos EUA, obtendo assim os óbitos esperados para os EUA.

Tabela 2.7: Padronização da taxa de mortalidade dos EUA - População padrão- Brasil 1982

População Padrão	População Padrão	População Padrão	EUA
Faixa Etária	Habitantes – ano(2)	TM(3)	Óbitos Esperados(2)*(3)
0-14	47.829.000	1,1	54692,6
15-64	73.850.000	3,7	270501,0
≥ 65	5.128.000	50,9	260993,9
Total	126.807.000	-	586187,4

Taxa de mortalidade padronizada , EUA (1982) :

- 586.187.4 óbitos esperados
- 4.6 óbitos por 1.000 habitantes ano

Ou seja:

- **População padrão** : Brasil;
- **TMG** EUA 1982 padronizada : 4.6 óbitos por 1000 habitantes ano;
- **TMG** Brasil 1982 : 6.2 óbitos por 1000 habitantes ano

# Capítulo 3

## Métodos de projeção da mortalidade

### 3.1 Métodos de projeção

Como já foi referido anteriormente a projeção da mortalidade é muito importante não só na área de saúde mas também para o planeamento económico e para as políticas do governo e das empresas.

No séc. XX, a mortalidade global decaiu a uma taxa relativamente constante, observando-se uma diversidade na diminuição dessa taxa em relação ao número de mortes por idade e causas de morte. Este é um dos aspectos a ter em conta na escolha do método mais adequado para a previsão da tendência da mortalidade, pois é importante observar se o modelo escolhido vai refletir essa diversidade.

Para a escolha do método mais adequado, também tem que se ter em conta se a utilização de dados históricos será capaz de prever toda a projeção da mortalidade, se podemos assumir que as tendências passadas de queda da mortalidade irão permanecer nas próximas décadas nas previsões da mortalidade sob uma perspectiva a longo prazo.

Classificam-se os métodos para projeção da mortalidade em três tipos:

- Método biomédicos que se baseiam em factores decisivos das mortes e modelam as taxas de mortalidade sob uma perspectiva biomédica.
- Métodos casuais que aplicam uma aproximação de previsão por causa, utilizando variáveis tais como factores económicos e do meio-ambiente.
- Métodos extrapolativos que se baseiam em tendências históricas para calcular as projeções da mortalidade no futuro.

Na prática, os métodos extrapolativos são os mais usados pela maioria dos demógrafos, pois essa aproximação é reconhecida como sendo a mais fiável.

Os métodos extrapolativos são geralmente divididos em:

- Modelos paramétricos que envolvem o ajustamento de uma curva/superfície parametrizada aos dados e a projeção posterior desses parâmetros para o futuro.
- Métodos de "targeting" que envolvem interpolação entre as taxas de mortalidade atuais e um conjunto de taxas esperadas, as quais se assume que vão permanecer no futuro.

Alguns métodos paramétricos podem ser facilmente obtidos com a utilização dos Modelos Lineares Generalizados (GLM).

Assume-se geralmente que o número de mortes, quando a exposição ao risco de morte é conhecida, segue uma distribuição de Poisson. Dessa forma, são obtidas estimativas futuras da mortalidade ajustando-se uma regressão de Poisson.

Um método alternativo foi proposto por Lee e Carter em 1992, combinando uma aproximação paramétrica com análise de séries temporais, que é o que irá ser utilizado neste trabalho.

## 3.2 Modelo de Lee-Carter

Ronald Lee e Lawrence Carter, em 1992, apresentaram um novo método para a extrapolação das tendências e dos padrões etários da mortalidade, que ficou conhecido pelo método de Lee-Carter.

O método inicialmente foi aplicado a dados da mortalidade dos EUA, sendo mais tarde aplicado a diversos países, entre eles, o Canadá, o Chile, o Japão, o Brasil, a Áustria e os países que constituem o grupo dos países mais industrializados-G7.

O método de Lee-Carter combina um modelo demográfico para a mortalidade com um modelo de séries temporais.

A partir da informação histórica sobre a mortalidade é estimado o modelo demográfico, obtendo-se um índice temporal do nível geral da mortalidade ( $k_t$ ), o qual é modelado como uma série temporal e é a partir dele que se calcula as projeções da mortalidade.

Lee e Carter destacam como vantagens deste método o facto de usar um modelo demográfico e o facto de se basear num conjunto de informação histórica num horizonte temporal relativamente longo e a possibilidade de obter de forma indirecta a mortalidade, para períodos para os quais não dispomos das taxas de mortalidade específicas. Em contrapartida, trata-se de um método extrapolativo, que se baseia no comportamento da mortalidade no passado para prever o futuro, e embora apresente algumas vantagens sobre outros métodos extrapolativos, tais como o facto de se basear num conjunto de dados históricos num período relativamente longo, tem as desvantagens inerentes da extrapolação.

Por outro lado, o método não considera a informação sobre os avanços da medicina, sobre a alteração do contexto sócio-económico, sobre a alteração dos estilos de vida ou sobre o aparecimento de novas doenças e as tendências verificadas nos dados históricos poderão não se manter no futuro, podendo existir alterações estruturais que em termos de previsão não irão ser contempladas.

### 3.2.1 O modelo demográfico

O modelo demográfico de mortalidade pode ser estimado a partir de uma matriz de taxas específicas de mortalidade por idade, para diversos períodos passados.

O modelo descreve a evolução da mortalidade da seguinte forma:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}, \quad x = 1, \dots, X, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.1)$$

onde  $m_{x,t}$  é a taxa de mortalidade observada para a idade  $x$  e ano  $t$ ;  $a_x$ ,  $b_x$  e  $k_t$  são parâmetros do modelo e  $\varepsilon_{x,t}$  é um termo de erro.

O conjunto de coeficientes  $a_x$  representam um vector de constantes específicas para cada uma das idades e descreve a forma geral do perfil de mortalidade por idade.

O parâmetro  $k_t$  é o índice de nível geral da mortalidade no ano  $t$ , isto é, captura a tendência temporal principal da mortalidade.

Os coeficientes  $b_x$  descrevem as alterações nas taxas de mortalidade na idade  $x$  em resposta a alterações no nível geral de mortalidade,  $k_t$ , ou seja ,

$$\frac{dm_{x,t}}{dt} = b_x \frac{dk}{dt}. \quad (3.2)$$

O termo de erro  $\varepsilon_x$ , com média zero e variância  $\sigma_\varepsilon^2$ , reflete as influências históricas específicas a cada idade não capturadas pelo modelo. O modelo sugere que estes erros seguem uma distribuição normal.

### 3.2.2 O ajustamento do modelo demográfico

O processo de ajustamento é efectuado em duas etapas:

- Estimação dos parâmetros  $a_x$ ,  $b_x$ ,  $k_t$
- Reestimação do  $k_t$ , para que o número de óbitos ajustado coincida com o número de óbitos efetivamente verificado.

Os parâmetros  $a_x$ ,  $b_x$  e  $k_t$  são estimados pelo método de mínimos quadrados. Esta estimação é obtida através da aplicação do método da decomposição em valores singulares (SVD), o qual é aplicado à matriz dos logaritmos das taxas depois de lhe ter sido subtraída a média temporal do logaritmo das taxas de mortalidade específicas por idade.

Os primeiros vectores direito e esquerdo e o respetivo valor singular provenientes da aplicação da SVD à matriz, após a normalização, fornecem uma solução única para (3.1).

Como as estimativas para  $k_t$ ,  $a_x$  e  $b_x$  são geradas a partir da matriz de logaritmos das taxas de mortalidade e não da matriz de taxas de mortalidade, o número de óbitos obtido pela aplicação das taxas de mortalidade estimadas à distribuição por idade da população, em geral, não coincide exactamente com o número de óbitos observados. Lee e Carter introduziram então uma nova etapa na estimação de  $k_t$ , ajustando-o de forma a que, para a estrutura etária da população e para os coeficientes  $a_x$  e  $b_x$ , previamente estimados, produza exactamente o número total de óbitos observados para o ano em causa. Assim:

$$D_t = \sum_x N_{x,t} e^{a_x + b_x k_t}, \quad (3.3)$$

onde  $D_t$  é o número total de óbitos observados no ano  $t$  e  $N_{x,t}$  corresponde à população da idade  $x$  no ano  $t$ .

### 3.2.3 Modelação do índice de mortalidade

Depois de ajustado o modelo demográfico, o passo seguinte é modelar  $k_t$ , como um processo estocástico de séries temporais. Para isso, Lee e Carter utilizaram a metodologia de Box-Jenkins, seleccionando um modelo ARIMA(0,1,0), ou seja, um passeio aleatório com um termo constante,  $k_t = c + k_{t-1} + \varepsilon_t$ . Com base nas estimativas do modelo utilizado, obtém-se a previsão do índice de nível de mortalidade,  $k_t$ , para um dado horizonte temporal. Conjuntamente com a previsão pontual são obtidos intervalos de confiança para a previsão de  $k_t$ . Este é um dos aspetos mais importantes do método de Lee-Carter.

### 3.2.4 Algumas limitações do modelo

Ao longo do tempo, o método de Lee-Carter foi analisado e estudado com o objectivo de se verificar era realmente um método de projeção eficaz. Desta forma, foram verificadas por um lado as suas qualidades e, por outro, as suas limitações. Com a finalidade de se melhorar essas limitações, foram apresentados novos desenvolvimentos.

Lee(2000) e Lee e Miller(2001), passado dez anos da publicação do método de Lee-Carter, fazem um balanço do seu comportamento, nomeadamente enumerando as considerações que o método provocou, destacando-se as relativas ao comportamento temporal quase linear da mortalidade, à verificação da hipótese base do modelo de que o vector de coeficientes  $b_x$  se mantém fixo no tempo, às condições iniciais de previsão do modelo, ao grau de incerteza incorporado pelo modelo e à adequação dos intervalos de confiança para a previsão.

Alguns desenvolvimentos do Modelo Demográfico de Lee-Carter:

- Wilmoth(1993), com a finalidade de utilizar o método de Lee-Carter na previsão de mortalidade por causa de morte, desenvolveu um processo para ajustamento do modelo em apenas uma etapa, propondo o ajustamento de (3.1) por mínimos quadrados ponderados, usando o número de mortes observados por idade e ano, utilizando a SVD ponderada. Wilmoth(1993) propõe também a estimação do modelo usando o método da máxima verosimilhança, especificando um modelo probabilístico cujos parâmetros podem ser estimados por esse método.
- Lawrence Carter(1996) propõe a modelação do índice de mortalidade  $k_t$  utilizando modelos estruturais de séries temporais, permitindo que os parâmetros da equação de estimação variem no tempo.
- Lee e Miller(2001) propõe a alteração da segunda etapa de estimação do  $k_t$ , sendo este reestimado de maneira que o valor esperado para a esperança de vida à nascença seja igual ao valor da esperança de vida à nascença observada num dado ano. Esta alteração tem a vantagem de na segunda etapa, já não ser necessário dispor de informação sobre a distribuição da população por idade para cada ano do período em estudo.
- Carter e Prskawetz(2001) introduzem a possibilidade de modelar alterações ao longo do tempo dos padrões etários da mortalidade, isto é, alterações nos vectores  $a_x$  e  $b_x$ .
- Para além dos aperfeiçoamentos e modificações ao próprio método, este também foi aplicado à modelação e previsão da mortalidade desagregada por sexo por Carter e Lee(1992), por área geográfica por Lee e Nalt, em 1993 (citado em Lee, 2000) e por causa de morte por Wilmoth, em 1995 (citado em Lee, 2000).

- O método de Lee-Carter ultrapassou as barreiras do estudo da mortalidade tendo sido utilizado em 1992 por Lee(1992) para o estudo da fecundidade, obtendo previsões probabilísticas para a taxa de fecundidade.
- Lee e Tuljapurkar(1994) integraram as duas vertentes, mortalidade e fecundidade, obtendo previsões para a população e os respectivos intervalos de confiança.

# Capítulo 4

## Aplicação do método de Lee-Carter

### 4.1 Estimação dos parâmetros do modelo

O método de Lee-Carter, como já foi referido antes, consiste em modelar a evolução da mortalidade da seguinte forma:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t}, \quad x = 1, \dots, X, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.1)$$

onde  $m_{x,t}$  é a taxa de mortalidade observada para a idade  $x$  e ano  $t$ ;  $a_x, b_x$  e  $k_t$  são parâmetros do modelo e  $\varepsilon_{x,t}$  é um termo de erro.

A parametrização dada em (4.1) não é única uma vez que é invariante às transformações :

$$b_x \longrightarrow cb_x, \quad k_t \longrightarrow \frac{1}{c}k_t \quad \forall c \in \mathfrak{R}/0. \quad (4.2)$$

$$a_x \longrightarrow a_x + b_x c, \quad k_t \longrightarrow k_t + c \quad \forall c \in \mathfrak{R}. \quad (4.3)$$

De maneira a assegurar a unicidade da solução impõem-se as seguintes condições (ver e.g. Girosi e King 2007):

$$\sum_t k_t = 0 \quad e \quad \sum_x b_x^2 = 1. \quad (4.4)$$

De  $\sum_t k_t = 0$  pode-se concluir que o parâmetro  $a_x$  é a média empírica do grupo etário  $x$ , ao longo do tempo  $t$ , ou seja,  $a_x = \bar{m}_x$  e pode-se então reescrever o modelo em função da taxa centrada logaritmicada da mortalidade:

$$\tilde{m}_{x,t} = m_{x,t} - \bar{m}_{x,t}. \quad (4.5)$$

Uma vez que a aplicação prática do método de Lee-Carter assume implicitamente que os erros  $\varepsilon_{x,t}$  têm uma distribuição normal, a equação (4.1) pode ser reescrita como um modelo multiplicativo de efeitos fixos para as estrutura etária centrada:

$$E(\tilde{m}_{x,t}) \equiv \bar{\mu}_{x,t} = b_x k_t, \quad \tilde{m}_{x,t} \sim N(\bar{\mu}_{x,t}, \sigma^2). \quad (4.6)$$

Assim, são utilizados  $X+T$  parâmetros para aproximar os  $X \times T$  elementos da matriz:

$$m = \begin{bmatrix} m_{x_1,t_1} & m_{x_2,t_2} & \cdots & m_{x_1,t_T} \\ m_{x_2,t_1} & m_{x_2,t_2} & \cdots & m_{x_2,t_T} \\ m_{x_3,t_1} & m_{x_3,t_2} & \cdots & m_{x_3,t_T} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{x_X,t_1} & m_{x_X,t_2} & \cdots & m_{x_X,t_T} \end{bmatrix}$$

onde  $x_1, x_2, \dots, x_X$  representam  $X$  grupos etários e  $t_1, t_2, \dots, t_T$  representam  $T$  anos.

Por exemplo, com o método de Lee-Carter, o valor de  $m_{x_1,t_1}$  é aproximado pelo produto dos parâmetros de  $b_1 k_1$ .

É necessário assumir que as linhas são independentes das colunas, isto é, que não existem interações entre os escalões etários e o tempo. Outra forma de representar esta hipótese de independência é dizer que os coeficientes  $b$  não variam com o tempo.

Contudo, as evidências indicam que a maior parte dos dados não respeitam esta hipótese.

As estimativas dos parâmetros  $b_x$  e  $k_t$  podem ser obtidas através do método de decomposição em valores singulares (SVD). Este método é aplicado à matriz  $m$ , decompondo-a no produto:

$$\tilde{m} = BLU^t, \quad (4.7)$$

onde  $B$  é uma matriz unitária  $X \times X$ ,  $L$  é uma matriz diagonal  $X \times X$  com as entradas positivas ou nulas conhecidas como valores singulares e ordenadas por ordem decrescente e  $U$  é uma matriz unitária  $T \times X$ .

Esta decomposição é única a menos de uma permutação de colunas de  $B$  e  $U$  e dos correspondentes valores singulares. A estimativa para  $b$ , onde  $b = [b_1 \dots b_X]$  é a primeira coluna de  $b$  e a estimativa para  $k_t$  é  $L_{1,1} \times U_{t,1}$ .

## 4.2 Construção de projeções de mortalidade

Lee e Carter para fazerem o cálculo das projeções de mortalidade, assumem por um lado que os coeficientes  $b_x$  são constantes ao longo do tempo e, por outro lado, modelam os valores estimados de  $k_t$  como um processo estocástico de séries temporais. Para isso, Lee e Carter (1992) utilizaram a metodologia de Box-Jenkins, seleccionando um modelo ARIMA(0,1,0), ou seja, um passeio aleatório com um termo constante, deste modo:

$$\widehat{k}_t = \widehat{k}_{t-1} + \theta + \zeta_t, \quad (4.8)$$

$$\zeta_t \sim N(0, \sigma_{rw}^2), \quad (4.9)$$

onde  $\widehat{k}_t$  é a estimativa de  $k_t$ ,  $\theta$  é um termo constante cuja estimativa de máxima verossimilhança é dada por  $\widehat{\theta} = \frac{\widehat{k}_T - \widehat{k}_1}{T-1}$ ,  $\theta$  depende da primeira e última estimativas de  $k$  e  $\zeta_t$  é um termo aleatório.

O estimador de máxima verossimilhança para a variância de  $\zeta_t$  é  $\sigma_{rw}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (\widehat{k}_{t+1} - \widehat{k}_t - \widehat{\theta})^2$

e  $Var[\widehat{\theta}] = \frac{\sigma_{rw}^2}{T-1}$ .

Da equação  $\widehat{k}_t = \widehat{k}_{t-1} + \theta + \zeta_t$  deduz-se que:

$$\widehat{k}_t = \widehat{k}_{t-1} + \theta + \zeta_t = (\widehat{k}_{t-2} + \theta + \zeta_{t-1}) + \theta + \zeta_t = \widehat{k}_{t-2} + 2\theta + (\zeta_{t-1} + \zeta_t). \quad (4.10)$$

Para calcular as projeções de  $\widehat{k}_t$  no instante  $T+(\Delta t)$ , com os dados disponíveis até ao período  $T$ , utiliza-se um raciocínio análogo ao descrito acima e substitui-se  $\theta$  pela sua estimativa, obtendo-se assim:

$$\widehat{k}_{T+\Delta t} \equiv \widehat{k}_T + (\Delta t)\widehat{\theta} + \sum_{t=1}^{\Delta t} \zeta_{T+t-1} \equiv \widehat{k}_T + (\Delta t)\widehat{\theta} + \sqrt{\Delta t}\zeta_t. \quad (4.11)$$

Esta aproximação é uma consequência do facto das variáveis  $\zeta_t$  serem independentes com a variância constante para todo o  $t$ . Pela expressão acima, constata-se que os erros das projeções aumentam com a raiz quadrada do período temporal.

Da equação anterior, pode-se então obter:

$$E[\widehat{k}_{T+\Delta t} | \widehat{k}_1, \dots, \widehat{k}_T] = \mu_{T+\Delta t} = \widehat{k}_T + (\Delta t)\widehat{\theta}. \quad (4.12)$$

Substituindo a expressão (4.11) na versão empírica e vectorizada da primeira equação de (4.6), obtém-se a equação que permite obter a estimativa para a projeção da mortalidade:

$$\mu_{T+\Delta t} = \bar{m} + \widehat{b}\widehat{k}_{T+\Delta t} = \bar{m} + \widehat{b}[\widehat{k}_T + (\Delta t)\widehat{\theta}]. \quad (4.13)$$

Por exemplo, para calcular a projeção para o ano 2016, tendo disponíveis observações da mortalidade no período temporal entre 1996 e 2009, utiliza-se a equação seguinte:

$$\mu_{2016} = \bar{m} + \widehat{b} \times (\widehat{k}_{2009} + 7\widehat{\theta}) = \bar{m} + \widehat{b} \times \left( \widehat{k}_{2009} + 7 \frac{\widehat{k}_{2009} - \widehat{k}_{1996}}{13} \right). \quad (4.14)$$

Depois de calculadas as projeções, iremos calcular o coeficiente de determinação com o objectivo de verificar se a variação de dados é explicada pelo método de Lee-Carter.

### 4.2.1 Coeficiente de determinação

O coeficiente de determinação,  $R^2$  é uma medida de qualidade de um modelo econométrico em relação à sua habilidade de estimar correctamente os valores da varável resposta, o seu valor está no intervalo de 0 e 1, quanto maior o seu valor mais explicativo é o modelo.

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

onde  $SSE$ : soma de quadrados residuais;  $SSR$ : soma de quadrados de regressão;

$SST = SSR + SSE$ : soma de quadrados totais.

## 4.3 Aplicação do Método

As projeções da mortalidade usando o método de Lee-Carter foram obtidas usando o software R. Aplicando o método aos dados disponíveis, obtêm-se os gráficos apresentados a seguir.

### 4.3.1 Ajustamento demográfico

As tabelas e os gráficos apresentados a seguir ilustram o comportamento da mortalidade na região norte e em Portugal, no período entre 1996 a 2009, por grupo etário e por sexo.

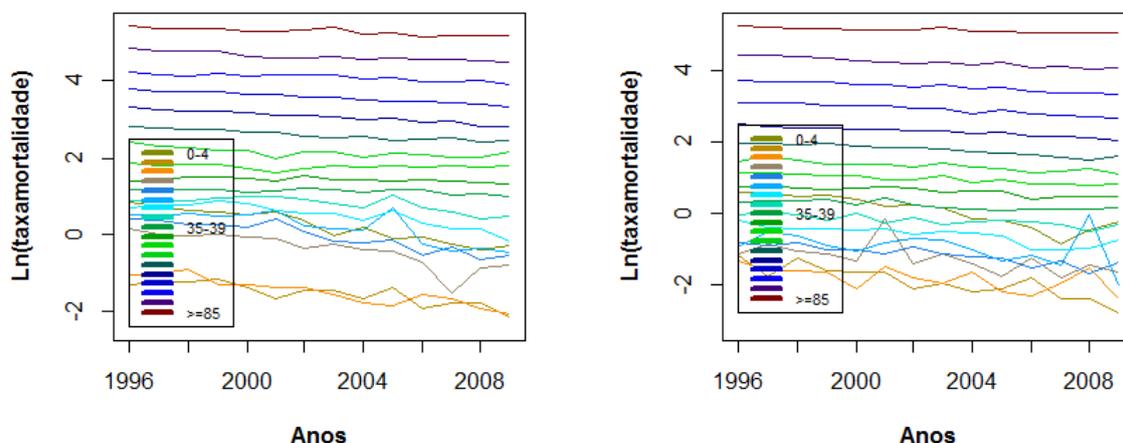
Na Região Norte:

Tabela 4.1: Tabela das observações da taxa de mortalidade no sexo masculino na Região Norte de 1996-2009

Anos	1996	1997	1998	1999	2000	....	2005	2006	2007	2008	2009
0-4	0.8329091	0.737164066	0.59883650	0.582215620	0.51879379	....	-0.09431068	-0.0618754	-0.2484614	-0.3856625	-0.3011051
5-9	-1.3093333	-1.237874356	-1.23787436	-1.171182982	-1.38629436	....	-1.42711636	-1.6607312	-1.38629436	-1.8971200	-1.7719568
10-14	-1.0498221	-0.994252273	-0.89159812	-1.309333320	-1.30933332	....	-1.83258146	-1.5606477	-1.6607312	-1.8971200	-2.0402208
15-19	0.1570037	0.009950331	-0.05129329	0.009950331	-0.07257069	....	-0.43078292	-0.7133499	-1.5141277	-0.8675006	-0.7985077
20-24	0.3852624	0.371563556	0.25464222	0.270027137	0.17395331	....	-0.15082289	-0.5276327	-0.3147107	-0.6539265	-0.5276327
25-29	0.5007753	0.476234179	0.55961579	0.476234179	0.52472853	....	0.67294447	-0.2357223	-0.4155154	-0.3710637	-0.4780358
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
65-69	3.3250360	3.249986820	3.20761263	3.207208020	3.17722015	....	3.04879899	2.9396909	2.9486407	2.8201877	2.8178011
70-74	3.7839623	3.713815939	3.72424660	3.721588629	3.65480547	....	3.46979017	3.4732079	3.4413792	3.3891248	3.3354136
75-79	4.2361334	4.164336934	4.13276367	4.205140280	4.12922896	....	4.06645936	3.9924964	3.9611940	3.9941558	3.8936553
80-84	4.8439508	4.758148751	4.77643080	4.764308407	4.62575682	....	4.60527018	4.5711997	4.5449955	4.5130549	4.4814194
85+	5.4247738	5.366536606	5.34481920	5.356161656	5.28634599	....	5.24544388	5.1394975	5.1792523	5.1579627	5.1776740

Tabela 4.2: Tabela das observações da taxa de mortalidade no sexo feminino na Região Norte de 1996-2009

Anos	1996	1997	1998	1999	2000	....	2005	2006	2007	2008	2009
0-4	0.58778666	0.582215620	0.4510756	0.4762342	0.37843644	....	-0.19845094	-0.4004776	-0.8675006	-0.49429632	-0.2357223
5-9	-1.20397280	-1.771956842	-1.2729657	-1.6094379	-1.66073121	....	-2.12026354	-1.8325815	-2.4079456	-2.40794561	-2.8134107
10-14	-1.34707365	-1.609437912	-1.6094379	-1.6607312	-2.12026354	....	-2.20727491	-2.3227878	-1.9661129	-1.56064775	-2.4079456
15-19	-1.13943428	-0.867500568	-1.0788097	-1.1394343	-1.34707365	....	-1.77195684	-1.2729657	-1.8325815	-1.46967597	-1.6607312
20-24	-0.82098055	-0.916290732	-0.8209806	-1.0498221	-1.02165125	....	-1.27296568	-1.5606477	-1.3470736	-1.71479843	-1.3862944
25-29	-0.96758403	-0.527632742	-0.6539265	-0.9162907	-1.07880966	....	-1.34707365	-1.2039728	-1.4696760	-0.05129329	-2.0402208
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
65-69	2.54002595	2.454447442	2.4123360	2.4256873	2.35896543	....	2.29253476	2.1724764	2.1758874	2.12704052	2.0464017
70-74	3.12895112	3.123685638	3.1152915	3.0506938	3.02819946	....	2.90032209	2.7862450	2.7593768	2.73241756	2.6769035
75-79	3.75349610	3.710151589	3.7025358	3.7074558	3.63863824	....	3.54961739	3.4349545	3.3891248	3.39282913	3.3527072
80-84	4.45655416	4.446643278	4.4015841	4.3572215	4.28867703	....	4.24089500	4.1105459	4.1234178	4.05975312	4.0883265
85+	5.27264052	5.210523866	5.1992150	5.1797590	5.13190853	....	5.12384492	5.0718558	5.0892000	5.07003564	5.0627849



(a) Taxa de mortalidade total anual logaritmizada por grupo etário, para o sexo masculino na Região Norte  
 (b) Taxa de mortalidade total anual logaritmizada por grupo etário, para o sexo feminino na Região Norte

Figura 4.1: Taxa de mortalidade total anual logaritmizada, por grupo etário em ambos os sexos

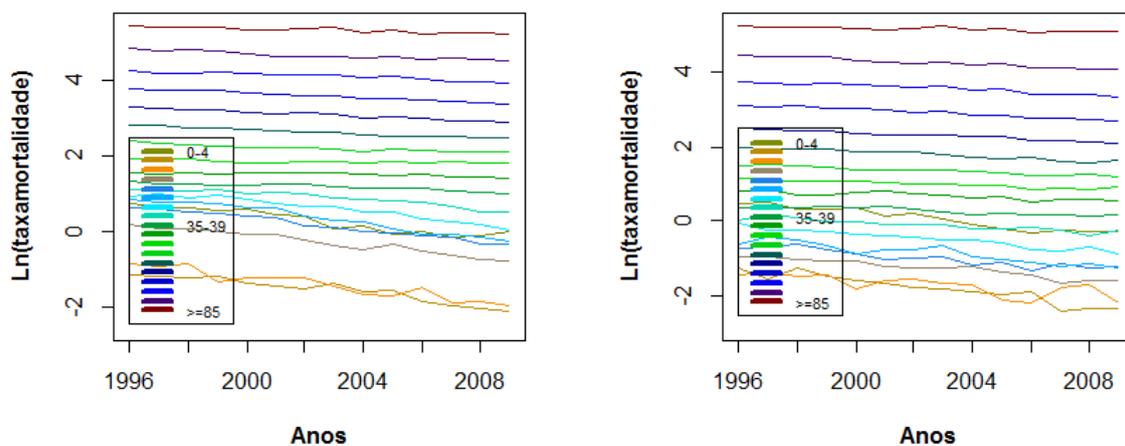
Em Portugal:

Tabela 4.3: Tabela das observações da taxa de mortalidade no sexo masculino em Portugal de 1996-2009

Anos	1996	1997	1998	1999	2000	....	2005	2006	2007	2008	2009
0-4	0.7227060	0.66268797	0.61518564	0.54232429	0.57097955	....	-0.09431068	-0.03045921	-0.16251893	-0.1392621	-0.02020271
5-9	-1.1394343	-1.17118298	-1.23787436	-1.20397280	-1.38629436	....	-1.56064775	-1.83258146	-1.96611286	-2.0402208	-2.12026354
10-14	-0.8675006	-0.91629073	-0.84397007	-1.34707365	-1.23787436	....	-1.71479843	-1.46967597	-1.89711998	-1.8325815	-1.96611286
15-19	0.1570037	0.05826891	0.07696104	-0.03045921	-0.07257069	....	-0.34249031	-0.52763274	-0.65392647	-0.7550226	-0.79850770
20-24	0.6097656	0.56531381	0.50681760	0.46373402	0.39204209	....	-0.04082199	-0.13926207	-0.17435339	-0.3285041	-0.32850407
25-29	0.8197798	0.77472717	0.75141609	0.73236789	0.59332685	....	0.05826891	-0.07257069	-0.07257069	-0.1508229	-0.26136476
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
65-69	3.2857865	3.23985423	3.23159460	3.20801708	3.15487049	....	3.03927058	2.99673177	2.94021956	2.9112631	2.88703286
70-74	3.7591049	3.73145990	3.72689752	3.71454720	3.67300410	....	3.51363281	3.46354601	3.44808097	3.4031954	3.36764060
75-79	4.2293124	4.17330977	4.17377170	4.20334843	4.16651017	....	4.08715209	4.01259206	3.95603989	3.9590974	3.91102251
80-84	4.8309503	4.77457535	4.79388791	4.74510603	4.66917732	....	4.62359932	4.55029152	4.56038200	4.5439329	4.51732210
85+	5.4222150	5.37504690	5.37175368	5.37374946	5.29826737	....	5.30121317	5.21314067	5.21705308	5.2290209	5.20828324

Tabela 4.4: Tabela das observações da taxa de mortalidade no sexo masculino em Portugal de 1996-2009

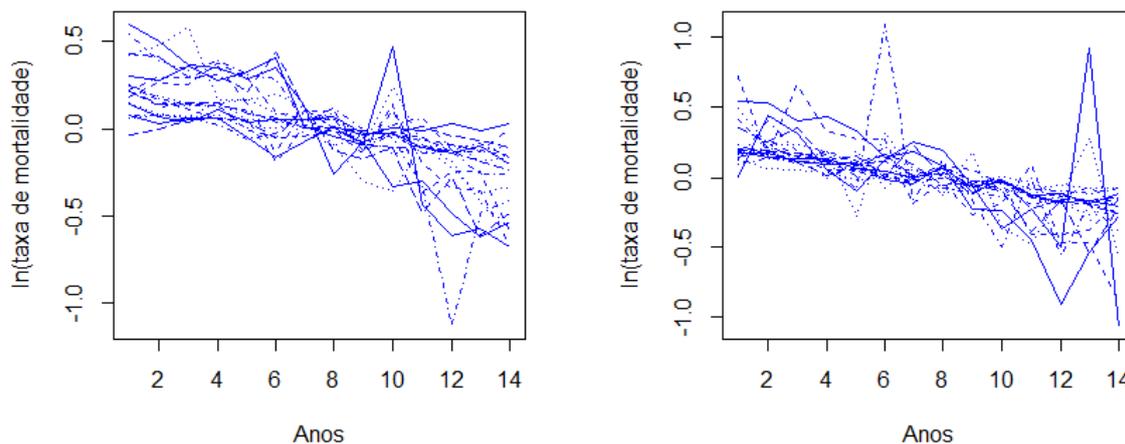
Anos	1996	1997	1998	1999	2000	....	2005	2006	2007	2008	2009
0-4	0.4700036	0.4946962	0.30748470	0.32930375	0.34358970	....	-0.2231436	-0.3424903	-0.2357223	-0.3011051	-0.2876821
5-9	-1.2729657	-1.5606477	-1.27296568	-1.46967597	-1.60943791	....	-1.9661129	-1.8971200	-2.4079456	-2.3538784	-2.3434071
10-14	-1.4271164	-1.3862944	-1.46967597	-1.42711636	-1.83258146	....	-2.1202635	-2.2072749	-1.7719568	-1.7147984	-2.2072749
15-19	-0.9675840	-0.9675840	-1.04982212	-1.07880966	-1.07880966	....	-1.3862944	-1.4271164	-1.6607312	-1.6094379	-1.6094379
20-24	-0.7339692	-0.7133499	-0.61618614	-0.77652879	-0.86750057	....	-1.1086626	-1.3470736	-1.1394343	-1.2729657	-1.2378744
25-29	-0.6348783	-0.4462871	-0.49429632	-0.67334455	-0.89159812	....	-1.0216512	-1.1086626	-1.2378744	-1.1394343	-1.2729657
....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....
65-69	2.5289235	2.4882344	2.42745408	2.45272775	2.37676449	....	2.3055806	2.1747517	2.1849270	2.1505987	2.1210632
70-74	3.1289511	3.0796138	3.10368942	3.05069383	3.03927058	....	2.8518619	2.7813007	2.7644305	2.7317667	2.6939513
75-79	3.7476199	3.7025358	3.68034312	3.70671937	3.66918682	....	3.5544906	3.4275147	3.4160860	3.3965198	3.3513066
80-84	4.4657932	4.4353304	4.41992436	4.41243459	4.29986710	....	4.2400309	4.1221218	4.1318009	4.1011547	4.1057789
85+	5.2488119	5.1915670	5.20075966	5.21384821	5.15479336	....	5.1692901	5.0756737	5.1068542	5.1072174	5.0829560



(a) Taxa de mortalidade total anual logaritmizada por grupo etário, para o sexo masculino em Portugal (b) Taxa de mortalidade total anual logaritmizada por grupo etário, para o sexo feminino em Portugal

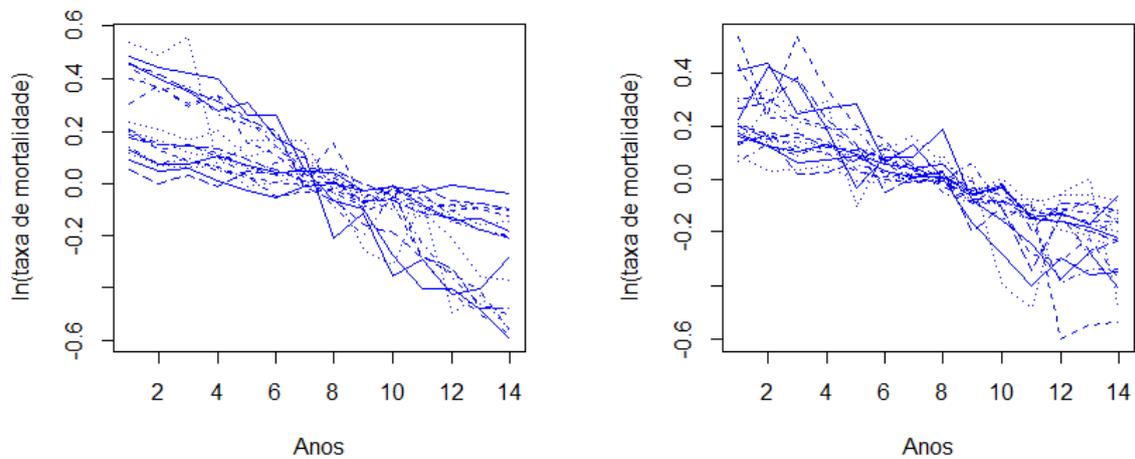
Figura 4.2: Taxa de mortalidade total anual logaritmizada, por grupo etário em Portugal em ambos os sexos

Depois de centrar a matriz dos dados, de modo a regularizar a série de mortalidade em ambos os sexos, obtêm-se os resultados seguintes:



(a) Dados centrados da taxa de mortalidade total anual por grupo etário, para o sexo masculino na Região Norte (b) dados centrados da taxa de mortalidade total anual por grupo etário, para o sexo feminino na Região Norte

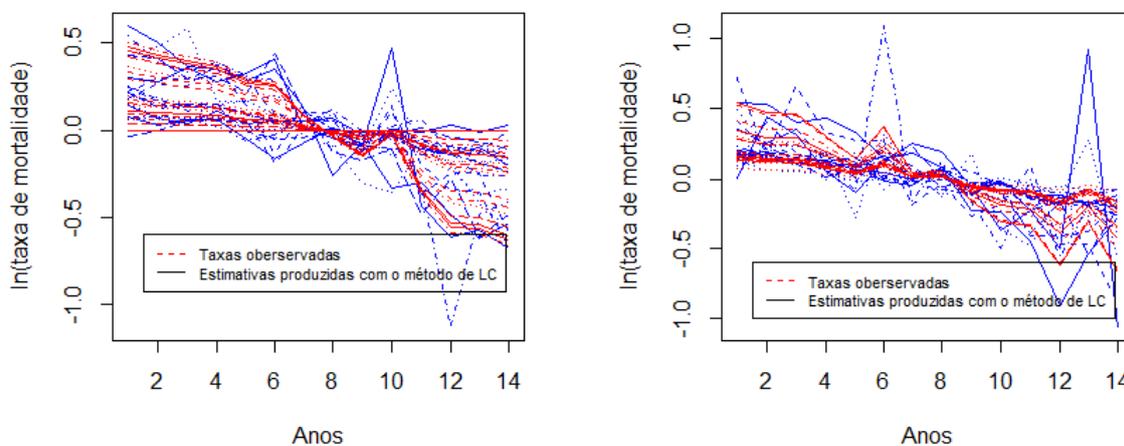
Figura 4.3: Dados centrados da taxa de mortalidade total anual por grupo etário em ambos os sexos na Região Norte



(a) Dados centrados da taxa de mortalidade total anual por grupo etário, para o sexo masculino em Portugal  
(b) dados centrados da taxa de mortalidade total anual por grupo etário, para o sexo feminino em Portugal

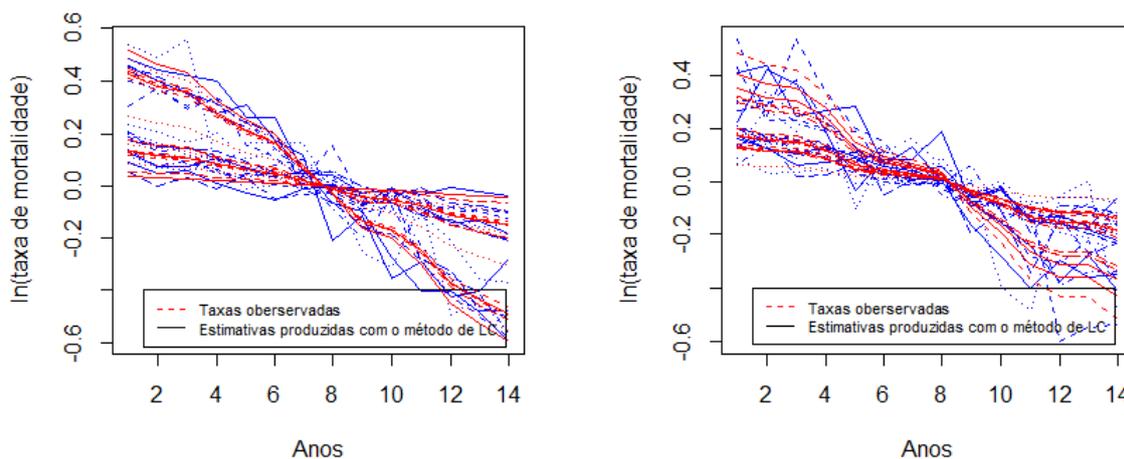
Figura 4.4: Dados centrados da taxa de mortalidade total anual por grupo etário em ambos os sexos em Portugal

Aplicada a metodologia de Lee-Carter para o ajustamento do modelo demográfico obtém-se um coeficiente de determinação ( $R^2$ ) de aproximadamente, 99,3% (sexo masculino, Região Norte), 99,5% (sexo feminino, Região Norte), 99,3% (sexo masculino, Portugal) e 99,9% (sexo feminino, Portugal). Logo pode-se concluir que a variação dos dados de mortalidade nas populações estudadas e neste período de tempo, é praticamente explicado pelo método de Lee-Carter. A qualidade desse ajustamento é ilustrada nos gráficos a seguir.



(a) Taxas de mortalidade e respectivas estimativas produzidas pelo método de Lee-Carter, para o sexo masculino na Região Norte  
 (b) Taxas de mortalidade e respectivas estimativas produzidas pelo método de Lee-Carter, para o sexo feminino na Região Norte

Figura 4.5: Taxas de mortalidade e respectivas estimativas produzidas pelo método de Lee-Carter na região norte



(a) Taxas de mortalidade e respectivas estimativas produzidas pelo método de Lee-Carter, para o sexo masculino em Portugal  
 (b) Taxas de mortalidade e respectivas estimativas produzidas pelo método de Lee-Carter, para o sexo feminino em Portugal

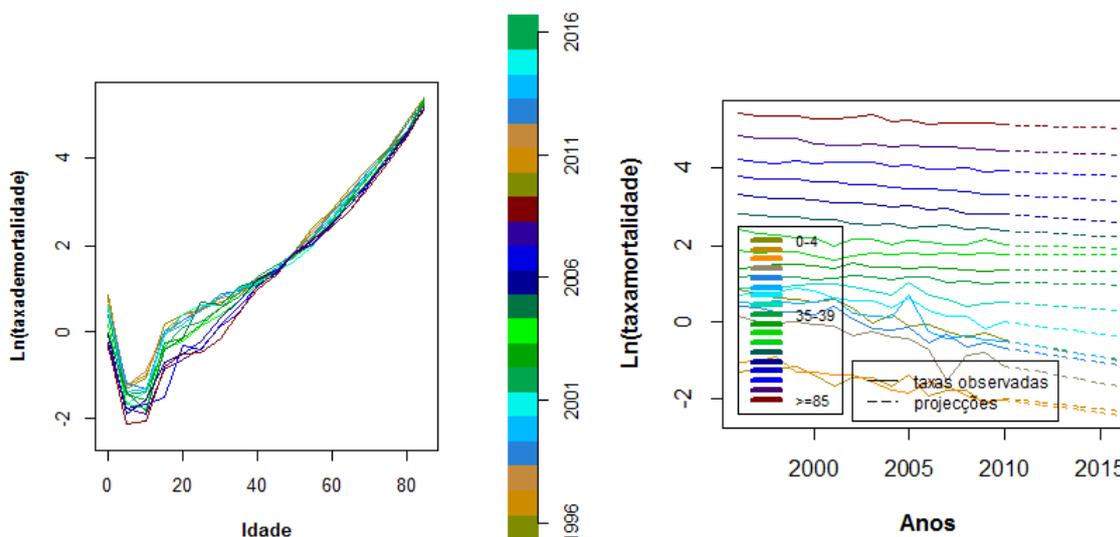
Figura 4.6: Taxas de mortalidade e respectivas estimativas produzidas pelo método de Lee-Carter em Portugal

### 4.3.2 Previsões para a mortalidade

Os gráficos e as tabelas apresentadas a seguir ilustram a previsão da mortalidade para todas as causas, para indivíduos do sexo feminino e masculino na Região Norte e Portugal pelo método de Lee-Carter.

Tabela 4.5: Tabela das projeções da taxa de mortalidade no sexo masculino na Região Norte de 2010-2016

Anos	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
0-4	-0.485134107	-0.5704395	-0.6557450	-0.7410504	-0.8263558	-0.9116612	-0.9969667
5-9	-1.983264530	-2.0366350	-2.0900054	-2.1433758	-2.1967462	-2.2501167	-2.3034871
10-14	-2.024394743	-2.0895479	-2.1547010	-2.2198542	-2.2850073	-2.3501605	-2.4153136
15-19	-1.137693298	-1.2272615	-1.3168297	-1.4063979	-1.4959660	-1.5855342	-1.6751024
20-24	-0.679495555	-0.7549391	-0.8303827	-0.9058262	-0.9812698	-1.0567133	-1.1321569
25-29	-0.487885341	-0.5695168	-0.6511483	-0.7327798	-0.8144113	-0.8960428	-0.9776742
30-34	-0.008346672	-0.0688073	-0.1292679	-0.1897286	-0.2501892	-0.3106498	-0.3711105
35-39	0.493809000	0.4586402	0.4234714	0.3883026	0.3531338	0.3179651	0.2827963
40-44	1.029471402	1.0171648	1.0048582	0.9925516	0.9802449	0.9679383	0.9556317
45-49	1.384470152	1.3773981	1.3703261	1.3632541	1.3561821	1.3491101	1.3420381
50-54	1.787589088	1.7872746	1.7869601	1.7866456	1.7863311	1.7860166	1.7857021
55-59	2.021599371	2.0049557	1.9883121	1.9716684	1.9550248	1.9383811	1.9217375
60-64	2.386584729	2.3603779	2.3341711	2.3079643	2.2817574	2.2555506	2.2293438
65-69	2.802231088	2.7700827	2.7379342	2.7057858	2.6736374	2.6414890	2.6093405
70-74	3.326795595	3.2979592	3.2691228	3.2402864	3.2114501	3.1826137	3.1537773
75-79	3.924634537	3.9046677	3.8847008	3.8647339	3.8447670	3.8248001	3.8048332
80-84	4.460675972	4.4404484	4.4202208	4.3999932	4.3797656	4.3595381	4.3393105
85+	5.129685702	5.1123478	5.0950099	5.0776719	5.0603340	5.0429961	5.0256582

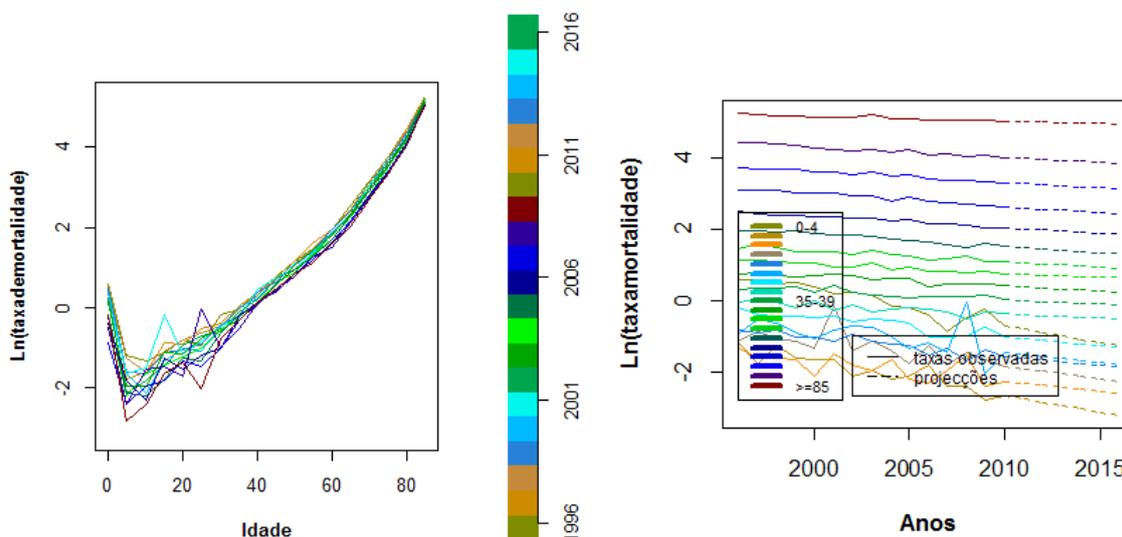


(a) Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual, logaritmizada, para indivíduos do sexo masculino da Região Norte  
 (b) Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual, logaritmizada, para indivíduos do sexo masculino da Região Norte, por grupo etário

Figura 4.7: Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual logaritmizada para o sexo masculino na Região Norte

Tabela 4.6: Tabela das projeções da taxa de mortalidade no sexo feminino na Região Norte de 2010-2016

Anos	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
0-4	-0.72219905	-0.81597219	-0.90974532	-1.00351846	-1.09729160	-1.1910647	-1.2848379
5-9	-2.67861721	-2.76967501	-2.86073280	-2.95179060	-3.04284839	-3.1339062	-3.2249640
10-14	-2.27823426	-2.33150011	-2.38476597	-2.43803182	-2.49129767	-2.5445635	-2.5978294
15-19	-1.84827209	-1.91912708	-1.98998206	-2.06083704	-2.13169203	-2.2025470	-2.2734020
20-24	-1.57732750	-1.62657635	-1.67582520	-1.72507404	-1.77432289	-1.8235717	-1.8728206
25-29	-1.45870205	-1.51806893	-1.57743580	-1.63680267	-1.69616955	-1.7555364	-1.8149033
30-34	-1.02382733	-1.07377948	-1.12373163	-1.17368378	-1.22363593	-1.2735881	-1.3235402
35-39	-0.38926526	-0.41160018	-0.43393510	-0.45627002	-0.47860493	-0.5009398	-0.5232748
40-44	0.00825687	-0.01634284	-0.04094255	-0.06554227	-0.09014198	-0.1147417	-0.1393414
45-49	0.39515125	0.36741151	0.33967176	0.31193202	0.28419228	0.2564525	0.2287128
50-54	0.78392611	0.75968152	0.73543693	0.71119234	0.68694775	0.6627032	0.6384586
55-59	1.11155349	1.08276425	1.05397501	1.02518577	0.99639653	0.9676073	0.9388181
60-64	1.52948211	1.49738654	1.46529096	1.43319538	1.40109981	1.3690042	1.3369087
65-69	2.06589396	2.03660463	2.00731531	1.97802598	1.94873665	1.9194473	1.8901580
70-74	2.65160292	2.61707448	2.58254604	2.54801760	2.51348916	2.4789607	2.4444323
75-79	3.32869054	3.29947932	3.27026810	3.24105688	3.21184567	3.1826344	3.1534232
80-84	4.02924295	4.00238493	3.97552692	3.94866890	3.92181089	3.8949529	3.8680949
85+	5.04566092	5.03330350	5.02094608	5.00858866	4.99623125	4.9838738	4.9715164

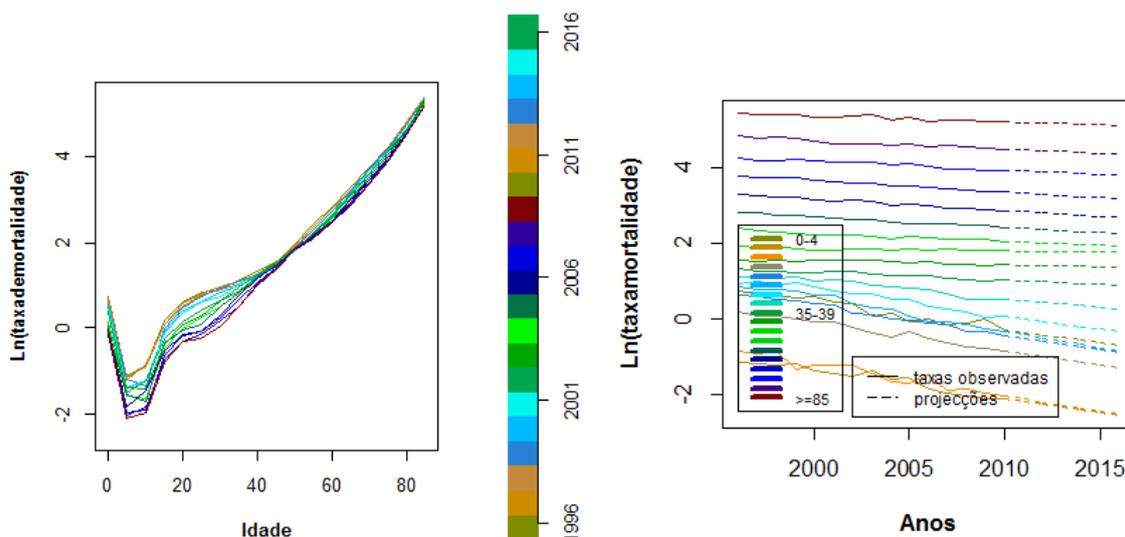


(a) Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual, logaritmizada, para indivíduos do sexo feminino da Região Norte  
 (b) Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual, logaritmizada, para indivíduos do sexo feminino da Região Norte, por grupo etário

Figura 4.8: Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual logaritmizada para o sexo feminino na Região Norte

Tabela 4.7: Tabela das projeções da taxa de mortalidade no sexo masculino em Portugal de 2010-2016

Anos	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
0-4	-0.29617220	-0.36667286	-0.43717351	-0.5076742	-0.5781748	-0.6486755	-0.7191761
5-9	-2.11120990	-2.18309524	-2.25498058	-2.3268659	-2.3987513	-2.4706366	-2.5425220
10-14	-2.03998244	-2.12017193	-2.20036142	-2.2805509	-2.3607404	-2.4409299	-2.5211194
15-19	-0.85846471	-0.92958600	-1.00070729	-1.0718286	-1.1429499	-1.2140712	-1.2851925
20-24	-0.43733842	-0.51133436	-0.58533030	-0.6593262	-0.7333222	-0.8073181	-0.8813140
25-29	-0.34577122	-0.43133512	-0.51689903	-0.6024629	-0.6880268	-0.7735907	-0.8591546
30-34	0.05265311	-0.01507279	-0.08279869	-0.1505246	-0.2182505	-0.2859764	-0.3537023
35-39	0.51678598	0.47243655	0.42808712	0.3837377	0.3393883	0.2950388	0.2506894
40-44	1.01125169	0.98879609	0.96634049	0.9438849	0.9214293	0.8989737	0.8765181
45-49	1.44454267	1.43527717	1.42601168	1.4167462	1.4074807	1.3982152	1.3889497
50-54	1.80879614	1.80280350	1.79681087	1.7908182	1.7848256	1.7788330	1.7728403
55-59	2.05795169	2.03830471	2.01865772	1.9990107	1.9793638	1.9597168	1.9400698
60-64	2.42026810	2.39383122	2.36739434	2.3409575	2.3145206	2.2880837	2.2616468
65-69	2.86211043	2.83343970	2.80476896	2.7760982	2.7474275	2.7187568	2.6900860
70-74	3.34855182	3.31925657	3.28996131	3.2606661	3.2313708	3.2020755	3.1727803
75-79	3.92539564	3.90359588	3.88179613	3.8599964	3.8381966	3.8163969	3.7945971
80-84	4.47734555	4.45634587	4.43534620	4.4143465	4.3933468	4.3723472	4.3513475
85+	5.19047840	5.17594852	5.16141864	5.1468888	5.1323589	5.1178290	5.1032991

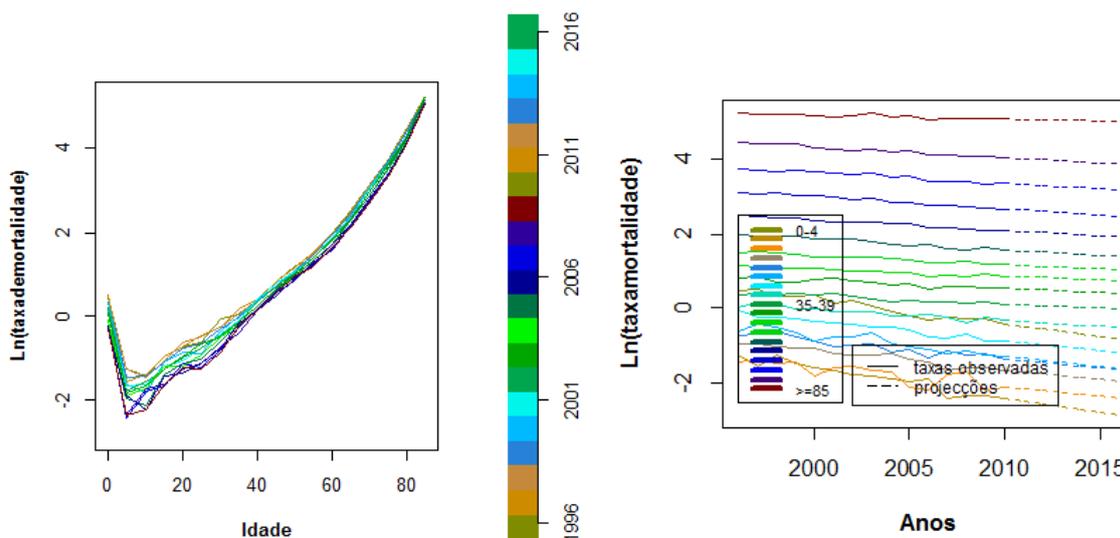


(a) Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual, logaritmizada, para indivíduos do sexo masculino em Portugal  
 (b) Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual, logaritmizada, para indivíduos do sexo masculino em Portugal, por grupo etário

Figura 4.9: Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual logaritmizada para o sexo masculino em Portugal

Tabela 4.8: Tabela das projeções da taxa de mortalidade no sexo feminino em Portugal de 2010-2016

Anos	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
0-4	-0.4368065	-0.50124099	-0.56567545	-0.63010992	-0.69454439	-0.758978860	-0.82341333
5-9	-2.4006731	-2.47760889	-2.55454470	-2.63148052	-2.70841633	-2.785352151	-2.86228797
10-14	-2.1062320	-2.15611884	-2.20600568	-2.25589252	-2.30577936	-2.355666196	-2.40555303
15-19	-1.6547865	-1.70467542	-1.75456436	-1.80445331	-1.85434225	-1.904231192	-1.95412014
20-24	-1.3655067	-1.41273987	-1.45997306	-1.50720626	-1.55443946	-1.601672652	-1.64890585
25-29	-1.2907859	-1.34628294	-1.40177997	-1.45727700	-1.51277403	-1.568271058	-1.62376809
30-34	-0.8801757	-0.93081574	-0.98145573	-1.03209571	-1.08273570	-1.133375693	-1.18401568
35-39	-0.3383397	-0.36798307	-0.39762641	-0.42726975	-0.45691310	-0.486556442	-0.51619979
40-44	0.1039152	0.08255294	0.06119064	0.03982834	0.01846604	-0.002896263	-0.02425856
45-49	0.5198139	0.49982924	0.47984456	0.45985988	0.43987520	0.419890521	0.39990584
50-54	0.8585659	0.83774497	0.81692402	0.79610306	0.77528210	0.754461146	0.73364019
55-59	1.1975883	1.17471634	1.15184439	1.12897244	1.10610049	1.083228541	1.06035659
60-64	1.5896046	1.56099047	1.53237632	1.50376217	1.47514802	1.446533872	1.41791972
65-69	2.1090172	2.08162528	2.05423334	2.02684140	1.99944946	1.972057522	1.94466558
70-74	2.6827474	2.65092595	2.61910453	2.58728312	2.55546170	2.523640287	2.49181887
75-79	3.3605640	3.33262397	3.30468390	3.27674382	3.24880375	3.220863671	3.19292360
80-84	4.0543061	4.02707353	3.99984097	3.97260841	3.94537586	3.918143302	3.89091075
85+	5.0817073	5.07141944	5.06113158	5.05084371	5.04055584	5.030267976	5.01998011



(a) Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual, logaritmizada, para indivíduos do sexo feminino em Portugal  
 (b) Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual, logaritmizada, para indivíduos do sexo feminino em Portugal, por grupo etário

Figura 4.10: Observações e projeções da taxa de mortalidade total anual logaritmizada para o sexo feminino em Portugal

### 4.3.3 Comentários finais

Com base nos dados de mortalidade de Portugal e Região Norte em ambos os sexos por grupos etários no período de 1996 a 2009, foram calculadas projeções para os anos de 2010 a 2016.

Em particular, depois de se aplicar o método de Lee-Carter aos dados no período de 1996-2009, constatou-se que as taxas de mortalidade obtidas eram muito próximas das realmente observadas. Assim, pode-se concluir que o método de Lee-Carter é uma boa aproximação da realidade, mas como todos os métodos tem as suas limitações:

- O facto de se basear apenas em dados históricos, não sendo analisado os avanços da medicina e da qualidade de vida é um aspecto negativo para o modelo.
- Em 2000, os autores do modelo fazem um balanço das aplicações deste, destacando as considerações seguintes:
  - Comportamento quase linear da mortalidade.
  - Verificação da hipótese base do modelo de que o vector de coeficientes  $b_x$  se mantém fixo no tempo.
  - Condições iniciais do modelo.
  - Grau de incerteza incorporado pelo modelo à adequação dos intervalos de confiança para a previsão.

Relativamente às projeções da mortalidade, os resultados obtidos pelo método de Lee-Carter parecem, em geral, satisfatórios pois, em particular, verifica-se uma diminuição da taxa de mortalidade, ao longo dos anos estudados.

# Capítulo 5

## Anexo

### Séries Temporais

Uma série temporal é um conjunto de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo, que não se podem prever exactamente: são observações ou medidas de um processo estocástico, denotam-se, por exemplo por  $X_t, t = 1, \dots, N$ .

Em modelos de regressão linear com dados cross-section a ordem das observações é irrelevante para a análise, em séries temporais a ordem dos dados é fundamental.

Uma característica muito importante deste tipo de dados é que as observações vizinhas são dependentes e o interesse é analisar e modelar essa dependência.

A análise de séries temporais existem nas mais variadas áreas de aplicação como:

- Economia e finanças: taxa diária do câmbio, euro/USdólar, taxa de inflação mensal/anual, taxa de desemprego mensal/anual;
- Ciências sociais: taxa de natalidade anual, taxa de alfabetização anual, número de acidentes por mês na IP5;
- Epidemiologia e medicina: número de infeções por HIV por ano.
- Metereologia e Ambiente: temperatura média diária, pluviosidade mensal, caudal do Rio Douro, nível do mar em Cascais.

### Exemplos

- Série dos registos da temperatura diária de alguma cidade, o primeiro dado representa a temperatura do primeiro dia e assim sucessivamente. 25, 24, 22, 20, 21, 28=temperatura média de uma cidade ao longo de vários dias.
- Número de homicídios anuais num determinado país: 200, 151, 196, 154, 245, 143
- Salário de uma pessoa em cada mês durante um ano.

### Componentes de uma série temporal

- Tendência: Capta os elementos relacionados com a série a longo prazo.
- Ciclo: Designam-se por longas ondas, mais ou menos regulares, em torno de uma linha de tendência.
- Sazonalidade: Capta os padrões regulares da série.
- Aleatório: Capta todos os efeitos que não foram incorporados pela série temporal a partir dos três componentes anteriores, ou seja, é o resíduo.

### Tipos de Série

Seja  $Y(t), t \in T$ , onde  $Y$  é a variável de interesse e  $T$  é o conjunto de dados.

- Discreta:  $T = t_1, t_2, \dots, t_n$   
Ex: Exportações mensais de 1970 a 1980  
01/1970, 02/1970, ..., 11/1980, 12/1980
- Contínua:  $T = t : t_1 < t < t_2$   
Ex: Registo da maré no Rio de Janeiro durante 1 ano,  $T = [0, 24]$ , se a unidade de tempo é a hora.
- Multivariada: Observações são  $Y_1(t), \dots, Y_k(t), t \in T$   
Ex: Vendas mensais  $Y_1(t)$  e gastos com propaganda  $Y_2(t)$ .

### Definição

As séries temporais podem ser estacionárias ou não estacionárias. Quando os valores da série podem ser escritos através de uma função matemática  $y = f(\text{tempo})$  diz-se que a série é determinística. Quando a série envolve, além de uma função matemática do tempo, também um termo aleatório  $y = f(\text{tempo}, \varepsilon)$  a série é chamada estocástica.

Normalmente as séries temporais são analisadas a partir das suas principais componentes como: tendência, ciclo, sazonalidade e variações aleatórias.

### Previsão

Um método de previsão é um algoritmo que produz uma previsão pontual. Um modelo Estatístico/estocástico fornece um processo de geração de dados que pode ser usado para produzir uma distribuição de probabilidade para  $X_{n+h}$  (de onde se pode obter uma previsão pontual).

Dadas  $n$  observações de uma série temporal,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  prever valores futuros de  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+h}$ , onde  $n$  diz-se a origem,  $n+h$  o horizonte e  $h$  é o número de passos adiante.  $\hat{X}_n(h)$  é uma função de  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $\hat{X}_n(h) = g(\underline{X})$ , e designa-se pela previsão de  $X_{n+h}$ ,  $h = 1, 2, \dots$

O critério para se obter  $\hat{X}_n(h)$  é minimizar o erro quadrático médio  $\sum_{i=1}^h (\hat{X}_n(i) - \hat{X}_{n+i})^2$ .

**Critério do erro quadrático médio**

Se  $X$  é uma v.a. com  $E(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$  então  $E(X - c)^2$  é mínimo para  $c = \mu$ .

Se  $Y$  é uma v.a. e  $h(X)$  uma função de  $X$  então  $E(Y - h(X))^2$  é mínimo se  $h(X) = E(Y|X)$ .

Então:  $\hat{X}_n(h) = E(X_{n+h}|X_1, X_2, \dots, X_n)$

**ARIMA(p,d,q)**

É um modelo utilizado na modelação e previsões de séries temporais, que significa modelo auto-regressivo integrado de média móvel. Foi sistematizado em 1976 pelos estatísticos George Box e Gwilym Jenkins, o que torna o modelo conhecido também por Box-Jenkins. O Modelo ARIMA é uma generalização do modelo auto-regressivo de média móvel (ARMA). A representação ARIMA(p,d,q) refere-se, respectivamente, às ordens de auto-regressão, de integração e de média móvel:

- $p$  é o número de termos auto-regressivos;
- $d$  é o número de diferenças;
- $q$  é o número de termos da média móvel.

No caso de  $d=0$ , temos o modelo ARMA(p,q) e no caso de também  $q=0$ , temos os modelos AR(p). O Modelo ARIMA(0,1,0) é um passeio aleatório. O modelo ARIMA(p,d,q) é dado pela equação:

$$(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i)(1 - L)^d X_t = (1 + \sum_{i=1}^q \theta_i L^i) \varepsilon_t$$

$L$  é o operador defasagem

Ou seja, no caso de ARIMA(0,1,0):

$$X_t = c + X_{t-1} + \varepsilon_t$$

# Bibliografia

- [1] CARTER, L. R., Forecasting U.S. Mortality: A Comparison of Box-Jenkins ARIMA and Structural Time Series Models, *The Sociological Quarterly*, Vol. 37, n.º 1, pp. 127-144, 1996.
- [2] CARTER, L. R. & PRSKAWETZ, A., *Examining Structural Shifts in Mortality Using the Lee-Carter Method*, Max Planck Institute for Demographic Research WP 2001-007, Germany, <http://www.demogr.mpg.de>.
- [3] COELHO, E. , The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality – The Portuguese Experience, *Revista de Estudos Demográficos*, nº37, pp. 25-34, 2005.
- [4] FELÍCIO M. ET. AL., *Observatórios Locais de saúde. Algumas perguntas e respostas para a sua implementação*, Administração Regional de Saúde do Norte, I.P., 2010.
- [5] GIROSI, F. & KING, G. , *Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method.*, 2007, <http://gking.harvard.edu>.
- [6] LEE, R., The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with various Extensions and Applications, *North American Actuarial Journal*, Vol. 4, n.º 1, pp. 80-93, 2000.
- [7] LEE, R. & CARTER, L., Modelling and Forecasting US Mortality, *Journal of the American Statistical Association*, 419, pp. 659-675, 1992.
- [8] LEE, R. & MILLER, T. , Evaluating the Performance of Lee-Carter Mortality Forecasts, University of California, Berkeley, *Demography*, Vol.38, pp. 537-549, 2001.
- [9] SILVA, M. E., *Notas das Aulas Séries Temporais 2011/2012*
- [10] TULJAPURKAR, S., LI, NAN & BOE, C., A Universal Pattern of Mortality Decline in the G7 Countries, *Nature*, Vol.405, pp. 789-792, 2000.
- [11] WILMOTH, J. R., *Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality Change*, Technical Report, Department of Demography, University of California, Berkeley, 1993, <http://www.demog.berkeley.edu>.