

Ricardo Gama

**Estabilidade de soluções de
inclusões diferenciais via método de
medianização**



**Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2012**

Ricardo Gama

Estabilidade de soluções de inclusões diferenciais via método de medianização



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Doutor em Matemática Aplicada*

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2012

Tese realizada sob a orientação do
Professor Doutor Gueorgui V. Smirnov e da
Professora Doutora Anna D. Guerman

Aos meus avós.

Agradecimentos

O meu profundo agradecimento aos meus amigos e à minha família, em particular aos meus pais, à Joana e à Inês, pelo apoio e incentivo durante a realização deste trabalho. Quero também deixar um sincero muito obrigado à Professora Anna Guermam e em especial ao Professor Gueorgui Smirnov que me conduziu ao longo deste percurso, sempre com grande dedicação e disponibilidade. Sem o seu apoio este trabalho não teria sido possível.

Resumo

O método de medianização é um dos mais poderosos métodos utilizados para a análise de equações diferenciais que aparecem no estudo de problemas não lineares. A ideia por trás do método consiste em substituir a equação original por uma equação medianizada, com estrutura simples e soluções próximas.

Nesta tese demonstramos extensões naturais do primeiro Teorema de Bogolyubov e do Teorema de Samoilenko-Stanzhitskii para inclusões diferenciais com segundo membro semi-contínuo superiormente. A extensão do Teorema de Bogolyubov diz respeito a intervalos de tempo finitos, enquanto que na extensão do Teorema de Samoilenko-Stanzhitskii tratamos de soluções definidas em intervalos infinitos.

É também proposto um método para estudar a estabilidade exponencial fraca de inclusões diferenciais não autónomas, aplicando um procedimento de medianização à sua primeira aproximação. Os resultados apresentados são utilizados para a resolução de alguns problemas práticos. Em particular, aplicamos o método a um problema de estabilização do movimento de uma formação de dois satélites.

Abstract

The averaging method is one of the most powerful methods used to analyse differential equations appearing in the study of nonlinear problems. The idea behind the averaging method is to replace the original equation by an averaged equation with simple structure and close solutions.

In this thesis we prove natural extensions of Bogolyubov's first theorem and the Samoilenko-Stanzhitskii theorem to differential inclusions with an upper semi-continuous right-hand side. The extension of Bogolyubov's theorem concerns finite time intervals, while the extension of the Samoilenko-Stanzhitskii theorem deals with solutions defined on the infinite interval.

A method to study weak exponential stability for time-varying differential inclusions applying an averaging procedure to a first approximation is also proposed. We use the presented results to solve some practical problems. Namely, we apply the developed method to stabilize the orbital motion of a formation of two satellites.

Résumé

La méthode de centrage est l'une des plus puissantes méthodes utilisées dans l'analyse d'équations différentielles qui apparaissent dans l'étude de problèmes non linéaires. L'idée qui préside à cette méthode consiste à remplacer l'équation originelle par une équation de centrage, avec une structure simple et des solutions proches.

Dans cette thèse, nous démontrons des extensions naturelles du premier Théorème de Bogolyubov et du Théorème de Samoilenko-Stanzhitskii pour des inclusions différentielles avec un deuxième membre semi-continu supérieurement. L'extension du Théorème de Bogolyubov concerne des intervalles de temps finis, tandis que dans l'extension du Théorème de Samoilenko-Stanzhitskii il s'agit de solutions définies dans des intervalles infinis.

On propose aussi une méthode pour étudier la stabilité exponentielle faible d'inclusions différentielles non autonomes, en appliquant une procédure de centrage à son premier approche. Les résultats présentés sont utilisés dans la résolution de quelques problèmes pratiques. En particulier, on applique la méthode à un problème de stabilisation du mouvement d'une formation de deux satellites.

Índice

Agradecimentos	5
Resumo	6
Abstract	7
Résumé	8
Introdução	11
1 Conceitos básicos e resultados auxiliares	14
1.1 Conjuntos e aplicações multívocas	15
1.2 Inclusões diferenciais	19
1.3 Estabilidade	20
1.4 Análise da estabilidade fraca através da primeira aproximação .	23
1.5 Equações diferenciais com segundo membro descontínuo	25
2 Método de medianização	30
2.1 Método de medianização	30
2.2 Método de medianização em equações diferenciais com segundo membro descontínuo	32
2.3 Método de medianização em inclusões diferenciais	35
3 Extensões do Método de Medianização	41

3.1	Aplicações multívocas lipschitzianas	41
3.2	Teorema de aproximação	52
3.3	Aplicações multívocas semi-contínuas superiormente	55
4	Estabilidade	62
4.1	Estabilidade	63
4.2	Estabilidade Parcial	65
5	Estabilidade Fraca	69
5.1	Estabilidade exponencial fraca de sistemas de controlo lineares .	70
5.2	Estabilidade exponencial fraca para inclusões diferenciais	80
5.3	Inclusões diferenciais geradas por sistemas de controlo	84
	Referências	87

Introdução

A complexidade dos sistemas dinâmicos e das equações associadas em muitos problemas práticos, obriga à utilização de métodos de aproximação ao problema original, de modo a permitir inferir características importantes no estudo do mesmo. Em particular, no estudo de oscilações não-lineares foram desenvolvidas várias técnicas com esse propósito, ver por exemplo Nayfeh (2000). Entre elas, o método de medianização assume um papel de destaque, pela sua naturalidade e bons resultados que garante.

O método de medianização, consiste em substituir o sistema de equações original por um outro sistema. Este novo sistema de equações é autónomo, facilitando o seu estudo e caracterização. Esta técnica é aplicada na resolução de uma vasta gama de problemas práticos, sendo a sua justificação rigorosa dada pelo Teorema de Boguliobov. Este resultado garante que, mediante algumas condições, as soluções dos dois sistemas se mantêm próximas, num intervalo de tempo finito tão grande quanto se deseje. Impondo condições mais fortes no sistema medianizado, as estimativas de proximidade das soluções dos dois sistemas, obtidas no resultado anterior, são justificadas em todo o intervalo infinito de tempo por vários teoremas. Entre eles, o Teorema de Samoilenko-Stanzhitskii tem a forma mais geral e natural.

Apesar do grande êxito do método de medianização, existem problemas nos quais, os sistemas em estudo são descritos por equações diferenciais com segundo membro descontínuo, violando as condições exigidas pelos Teoremas de Boguliobov e de Samoilenko-Stanzhitskii. Assim, apesar de muitos autores aplicarem o método de medianização a estes sistemas, a sua utilização não é possível de ser justificada rigorosamente à luz dos teoremas anteriores, levando à procura de extensões dos mesmos, de modo a abranger sistemas descontínuos.

De facto, no estudo de equações com segundo membro descontínuo, o próprio conceito clássico de solução deixa de ser válido, sendo necessário proceder à sua generalização. Existem várias propostas nesse sentido, sendo a mais globalmente aceite a definição de solução proposta por Filippov, Filippov (1988).

A generalização de Filippov consiste em substituir a equação diferencial com segundo membro descontínuo por uma inclusão diferencial. As soluções do

problema descontínuo serão então, soluções de uma inclusão diferencial, onde o segundo membro é semi-contínuo superiormente. A reformulação do problema com sistemas descontínuos para um problema escrito na linguagem de inclusões diferenciais, impõe que se obtenham também, novos resultados para justificar a utilização do método de medianização em inclusões diferenciais. Mais uma vez, os resultados existentes na literatura têm condições que, em muitos casos, invalidam a sua aplicabilidade a inclusões semi-contínuas superiormente, e logo, a sistemas descritos por equações diferenciais com segundo membro descontínuo.

O trabalho desenvolvido nesta tese foi originalmente motivado pelo trabalho de Guerman et al. (1989). Neste artigo, os autores estudaram o problema da estabilização passiva do movimento de um satélite com barras de material magnético com histerese incorporado. A inserção de barras com material magnético com histerese no satélite faz com que o mesmo interaja com o campo magnético terrestre, originando um amortecimento de oscilações que surgem depois da separação do satélite do foguetão. A dinâmica deste sistema com histerese é descrita por equações diferenciais cujo segundo membro apresenta funções descontínuas. Este facto levou-nos ao desenvolvimento do trabalho que passamos a descrever.

Nesta tese, são apresentados resultados que justificam rigorosamente a aplicação do método de medianização num enquadramento mais geral, que os resultados anteriormente referidos. Em particular, eles legitimam a utilização do método em sistemas descontínuos. Os resultados obtidos são aplicados a alguns problemas de natureza mais prática, como problemas de controlo e de estabilização do movimento de satélites em formação.

A tese apresenta a seguinte estrutura: no primeiro capítulo fazemos uma breve apresentação dos resultados e definições mais relevantes necessárias para a elaboração deste trabalho. Nomeadamente, apresentamos alguns conceitos de análise multívoca e de inclusões diferenciais, revemos a teoria de Filippov sobre equações diferenciais com segundo membro descontínuo e terminamos com uma revisão de alguns resultados de análise qualitativa de inclusões diferenciais, recorrendo a técnicas de primeira aproximação.

No segundo capítulo, fazemos uma revisão exaustiva da literatura existente sobre a justificação da aplicabilidade do método de medianização a equações diferenciais com segundo membro descontínuo e a inclusões diferenciais. Efetuamos uma comparação detalhada dos resultados existentes, assim como das condições utilizadas para garantir os mesmos. Esta revisão vai permitir contextualizar de forma mais objetiva os resultados apresentados posteriormente.

No terceiro capítulo, apresentamos duas extensões do método de medianização. Começamos por demonstrar o Teorema de Bogolyobov para inclusões

Lipschitzianas, sob condições mais gerais do que as impostas nos resultados existentes. Seguidamente, provamos um teorema de aproximação que mostra a possibilidade de aproximar o conjunto das soluções de uma inclusão não autónoma semi-contínua superiormente, por uma sucessão decrescente de conjuntos de soluções de inclusões diferenciais Lipschitzianas. Por fim, utilizando os dois teoremas anteriores, demonstramos o resultado principal, estendendo o Teorema de Boguliobov a inclusões diferenciais semi-contínuas superiormente.

No quarto capítulo, estendemos o resultado anterior ao intervalo infinito. Considerando a estabilidade assintótica da posição de equilíbrio da inclusão medianizada, mostramos uma generalização do Teorema de Samoilenko-Stanzhitskii para inclusões diferenciais. A mesma questão será também abordada para o caso da estabilidade parcial.

No quinto capítulo, utilizamos o método de medianização para inferir propriedades de estabilidade fraca do sistema original. As técnicas desenvolvidas são aplicadas a um problema de estabilização do movimento de uma formação de satélites. Usando técnicas de primeira aproximação, o método é também aplicado a problemas de controlo mais gerais. Alguns exemplos concretos são também apresentados.

Os resultados principais da tese foram publicados em:

- R. Gama, A. Guerman, G. Smirnov, *On the asymptotic stability of discontinuous systems analysed via the averaging method*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Volume 74, Issue 4, 15 February, pp. 1513-1522, 2011.
- R. Gama and G. Smirnov, *Partial Stability of Discontinuous Systems via Averaging Method*, ICNAAM 2010: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2010, AIP Conf. Proc., September 30, Volume 1281, pp. 481-484, 2010.
- R. Gama, G. Smirnov, *Exponential Stability via Averaging Method and Applications*, In *Proceedings of the 1st IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems - DyCoSS12*, March, 2012, Porto, Portugal (em publicação).
- R. Gama and G. Smirnov, *Weak Exponential Stability for Time-Periodic Differential Inclusions via First Approximation Averaging*, *Set-Valued and Variational Analysis*, 2012, DOI:10.1007/s11228-012-0216-1

Capítulo 1

Conceitos básicos e resultados auxiliares

Existem muitos exemplos práticos onde as equações diferenciais que descrevem os sistemas dinâmicos em estudo, apresentam um segundo membro descontínuo. Entre eles, temos exemplos de sistemas que vão desde modelos oscilatórios mecânicos e elétricos com atrito de Coulomb ou histerese, até problemas de controlo onde os controlos são descritos por funções descontínuas, ver por exemplo Filippov (1988); Marques (1993); Khalil (2002); Cortés (2008).

Nestes sistemas, a própria noção clássica de solução: função diferenciável que verifica o sistema de equações em todos os pontos de um dado intervalo de tempo, não pode ser aplicada, impondo a necessidade de se generalizar a teoria. Existem na literatura algumas propostas nesse sentido, ver por exemplo Hájek (1979), sendo que de entre elas, a generalização do conceito de solução proposta por Filippov em 1960, Filippov (1988), encontra mais aceitação e aplicabilidade.

Como vamos ver posteriormente neste capítulo, o método de Filippov reduz o estudo de equações diferenciais descontínuas ao estudo de inclusões diferenciais. Consequentemente, o trabalho apresentado será elaborado recorrendo à teoria existente sobre aplicações multívocas e inclusões diferenciais.

Neste capítulo descrevemos alguns resultados, ver por exemplo Filippov (1988); Smirnov (2002), de análise multívoca e inclusões diferenciais que serão importantes no desenvolvimento dos capítulos seguintes.

1.1 Conjuntos e aplicações multívocas

Denotaremos por \mathbb{R}_+ o conjunto de números reais não negativos, por \mathbb{R}^n o usual espaço n -dimensional de vetores reais, por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $|\cdot|$ o produto interno usual e a norma Euclidiana, respetivamente. Denotamos por B_n a bola fechada unitária em \mathbb{R}^n , i.e., $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$. Consideremos A e B dois subconjuntos de \mathbb{R}^n e λ uma constante. Podemos definir soma entre os dois conjuntos como sendo

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\},$$

e produto entre a constante e um conjunto da forma

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

Para um dado conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, $\text{int}A$, $\text{cl}A$ e $\text{co}A$ denotam, respetivamente, o interior, o fecho e o invólucro convexo de A .

A distância entre um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e um conjunto A é definida por:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|.$$

Sejam $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos. Vamos utilizar a notação

$$d_C(A_1, A_2) = \sup_{a_1 \in A_1} d(a_1, A_2).$$

A distância entre dois conjuntos definimos segundo Housdorff.

Definição 1.1: Sejam $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ dois conjuntos compactos. A distância de Housdorff entre A_1 e A_2 é definida

$$d_H(A_1, A_2) = \max\{d_C(A_1, A_2), d_C(A_2, A_1)\},$$

que também pode ser escrita da forma equivalente

$$d_H(A_1, A_2) = \min\{h \geq 0 \mid A_1 \subset A_2 + hB_n, A_2 \subset A_1 + hB_n\}. \quad \diamond$$

Duas funções que vão ser muito úteis nas demonstrações de alguns resultados apresentados posteriormente, são a função de Minkowski e a função de suporte de um conjunto. São definidas da seguinte forma (veja, por exemplo, Smirnov (2002)):

Definição 1.2: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo tal que $0 \in \text{int}A$. A função

$$\mu(x, A) = \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1}x \in A\},$$

é chamada de *função de Minkowski* do conjunto A . \(\diamond\)

Para um dado conjunto, a função de Minkowski é uma função convexa, Lipschitziana e positivamente homogénea.

Definição 1.3: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. A função

$$S(A, \psi) = \sup\{\langle a, \psi \rangle \mid a \in A\},$$

é chamada *função de suporte* do conjunto A . ◇

A função de suporte como função do conjunto verifica (veja, por exemplo, Moszynska (2005)):

$$S(\alpha A + \beta B, \psi) = \alpha S(A, \psi) + \beta S(B, \psi), \quad (1.1)$$

para quaisquer conjuntos convexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \geq 0$. Em particular, temos

$$S(\alpha A + x, \psi) = \alpha S(A, \psi) + \langle x, \psi \rangle,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$.

A proposição seguinte relaciona a distância de Hausdorff com a função de suporte (veja, por exemplo, Moszynska (2005)):

Proposição 1.1 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dois conjuntos compactos convexos. Então*

$$d_H(A, B) = \sup_{|\psi|=1} |S(A, \psi) - S(B, \psi)|.$$

No que segue, vamos trabalhar com aplicações multívocas $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n ($\mathcal{K}\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos compactos convexos de \mathbb{R}^n). Denotamos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todos os subconjuntos fechados de \mathbb{R}^n . O gráfico de uma aplicação multívoca é denotado por $\text{gr}F$. A bola unitária fechada no espaço das funções contínuas $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com norma uniforme, $C([0, T], \mathbb{R}^n)$, é denotada por \mathcal{B} . O conjunto das funções localmente integráveis $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ é denotado por $L_1^{\text{loc}}([0, \infty[, \mathbb{R}^n)$ e $L_1([0, \infty[, \mathbb{R}^n)$ denota o conjunto das funções $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ integráveis.

O integral da aplicação multívoca F é entendido no sentido de Lebesgue, também conhecido por Integral de Aumann, ou seja:

Definição 1.4: Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca, o integral de Lebesgue é definido por

$$\int_a^b F(t)dt = \left\{ \int_a^b f(t)dt \mid f(\cdot) \in L_1([a, b], \mathbb{R}^n), f(t) \in F(t), t \in [a, b] \right\} \quad (1.2) \quad \diamond$$

Em aplicações práticas, o cálculo do integral é efetuado recorrendo ao integral de Riemann para aplicações multívocas. Consideremos $S = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Seja $\delta(S) = \max_{0 \leq i \leq N} (t_{i+1} - t_i)$ o diâmetro da partição. Temos a seguinte definição:

Definição 1.5: Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathcal{KK}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca. O integral de Riemann de F , é definido como sendo

$$\int_a^b F(t) dt = \lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N F(\xi_i)(t_{i+1} - t_i),$$

onde $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$ e caso o limite, entendido no sentido da distância de Hausdorff exista. \diamond

Para algumas propriedades deste integral e em que condições temos igualdade das duas definições, ver, por exemplo, Polovinkin (1975).

Uma das utilidades da função de suporte é que esta permite transformar um integral de uma aplicação multívoca num integral de uma função escalar, através da seguinte igualdade, (ver, por exemplo, Castaing & Valadier (1977)):

$$S \left(\int_a^b F(s) ds, \psi \right) = \int_a^b S(F(s), \psi) ds,$$

permitindo deste modo calcular integrais de aplicações multívocas.

A seguinte propriedade é utilizada nos resultados apresentados posteriormente.

Proposição 1.2 *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{KK}(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação multívoca. Então, quaisquer que sejam as constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a < b$ e $c > 0$, a seguinte desigualdade é verificada:*

$$d_H \left(\int_a^b cF(s, x_1(s)) ds, \int_a^b cF(s, x_2(s)) ds \right) \leq c \int_a^b d_H(F(s, x_1(s)), F(s, x_2(s))) ds.$$

Demonstração: Escrevendo a distância de Hausdorff à custa das funções de suporte dos conjuntos, obtemos

$$d_H \left(\int_a^b cF(s, x_1(s)) ds, \int_a^b cF(s, x_2(s)) ds \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{|\psi|=1} \left| S \left(\int_a^b cF(s, x_1(s)) ds, \psi \right) - S \left(\int_a^b cF(s, x_2(s)) ds, \psi \right) \right| \\
&= \sup_{|\psi|=1} \left| c \int_a^b [S(F(s, x_1(s)), \psi) - S(F(s, x_2(s)), \psi)] ds \right| \\
&\leq c \int_a^b \sup_{|\psi|=1} |[S(F(s, x_1(s)), \psi) - S(F(s, x_2(s)), \psi)]| ds \\
&= c \int_a^b d_H(F(s, x_1(s)), F(s, x_2(s))) ds,
\end{aligned}$$

demonstrando o resultado. □

A seguinte caracterização de aplicações multívocas é utilizada frequentemente:

Definição 1.6: A aplicação multívoca $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ é chamada de Lipschitziana, se existe uma função integrável $k(\cdot)$ tal que para quaisquer t, x_1, x_2 temos

$$d_H(F(t, x_2), F(t, x_1)) \leq k(t)|x_2 - x_1|,$$

ou equivalentemente,

$$F(t, x_2) \subset F(t, x_1) + k(t)|x_2 - x_1|B_n. \quad (1.3)$$

◇

Outras caracterizações mais fracas, que são referidas posteriormente, são dadas pelas definições (ver, por exemplo, Donchev & Farkhi (1998)):

Definição 1.7: A aplicação multívoca $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ é chamada de Lipschitziana Unilateral Uniforme com constante λ (não necessariamente positiva) se e só se para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f_x \in F(t, x)$, $f_y \in F(t, y)$ e $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\langle x - y, f_x - f_y \rangle \leq \lambda|x - y|^2. \quad (1.4)$$

◇

Definição 1.8: A aplicação multívoca $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ é chamada de Lipschitziana Unilateral com constante λ (não necessariamente positiva) se e só se para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, $f_x \in F(t, x)$ e $t \in \mathbb{R}$, existe um $f_y \in F(t, y)$ que satisfaz

$$\langle x - y, f_x - f_y \rangle \leq \lambda|x - y|^2. \quad (1.5)$$

◇

1.2 Inclusões diferenciais

Recordemos a seguinte definição (ver, por exemplo, Kolmogorov & Fomin (1970)):

Definição 1.9: Uma função $x(\cdot)$, diz-se absolutamente contínua se existir uma função integrável no sentido de Lebesgue $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $x(t) = x(a) + \int_a^t v(s)ds$, $t \in [a, b]$. \diamond

Denotaremos por $AC([0, L], \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções absolutamente contínuas $x : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Um problema de Cauchy envolvendo inclusões diferenciais é um problema da forma

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, L], \quad (1.6)$$

onde as soluções vão ser funções absolutamente contínuas que verificam (1.6) em quase todos os pontos do intervalo $[0, L]$.

Neste trabalho, denotamos por $\mathcal{S}_{[0, L]}(F, x_0)$ o conjunto de soluções do problema anterior e por $\mathcal{A}(L)(F, x_0) = \{x(L) \mid x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, L]}(F, x_0)\}$ o conjunto atingível do mesmo. Se $C \subset \mathbb{R}^n$ for um conjunto, utilizamos a seguinte notação $\mathcal{S}_{[0, L]}(F, C) = \bigcup_{x_0 \in C} \mathcal{S}_{[0, L]}(F, x_0)$.

Um dos resultados mais importantes na teoria de inclusões diferenciais é o Teorema de Filippov. Este teorema tem muitas aplicações e, para além de ter como corolário a existência de soluções do problema (1.6) quando a aplicação F é Lipschitziana, é utilizado na demonstração de alguns dos resultados que vamos referir posteriormente.

Vejamos a seguinte definição:

Definição 1.10: A aplicação multívoca $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é chamada mensurável se para todo o conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^n$ temos que

$$\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \cap C \neq \emptyset\},$$

é mensurável no sentido de Lebesgue. \diamond

Consideremos $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca que satisfaz:

- (i) $F(t, \cdot)$ Lipschitziana com constante $k(t)$, para quase todo $t \in [0, L]$;

(ii) $F(\cdot, x)$ é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

então, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Seja $\delta \geq 0$ e $y : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função absolutamente contínua que satisfaz*

$$d(\dot{y}(t), F(t, y(t))) \leq \rho(t) \quad \text{a.e. } t \in [0, L],$$

onde $\rho(\cdot) \in L_1([0, L], \mathbb{R})$. Suponhamos que as condições (i)-(ii) são verificadas na região $\{(t, x) \mid t \in [0, L], |x - y(t)| \leq \delta\}$ e x_0 é tal que $|x_0 - y(0)| < \delta$. Então, existe uma solução $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, L]}(F, x_0)$ que satisfaz

$$|x(t) - y(t)| \leq \xi(t) \text{ e } |\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| \leq k(t)\xi(t) + \rho(t),$$

onde

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + \left| \int_0^t e^{m(t)-m(s)} \rho(s) ds \right|, \quad m(t) = \left| \int_0^t k(s) ds \right|.$$

Outro resultado importante, também da autoria de Filippov, é o seguinte:

Teorema 1.2 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função mensurável. Suponhamos que $U \subset \mathbb{R}^k$ é um conjunto compacto tal que $v(x) \in f(x, U)$ para quase todo x . Então, existe uma função mensurável $u : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ que verifica $v(x) = f(x, u(x))$.*

Este resultado mostra a equivalência entre o sistema de controle

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^k, \quad (1.7)$$

e a inclusão diferencial

$$\dot{x} \in F(x) \equiv f(x, U) = \bigcup_{u \in U} f(x, u). \quad (1.8)$$

1.3 Estabilidade

O estudo da estabilidade das soluções de (1.6) assume um papel fundamental em aplicações práticas. A teoria da estabilidade é uma ferramenta essencial no estudo qualitativo das soluções de equações diferenciais ordinárias e de inclusões diferenciais, ver por exemplo Khalil (2002); Smirnov (2002); Bacciotti & Rosier (2005).

Recordemos as seguintes definições de estabilidade, onde a origem é assumida como sendo uma posição de equilíbrio da inclusão

$$\dot{x} \in F(x), \quad (1.9)$$

ou seja, $0 \in F(0)$.

Definição 1.11: Dizemos que a posição de equilíbrio $x = 0$ da inclusão (1.9) é

- (i) estável se, dado um $\eta > 0$ qualquer, existe um $\delta(\eta) > 0$ tal que para qualquer $x_0 \in \delta B_n$, todas as soluções $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, \infty]}(F, x_0)$, com $x(0) = x_0$ verificam

$$x(t) \in \eta B_n \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

- (ii) assintoticamente estável, se é estável e atrativa, isto é, existe um $\delta_0 > 0$ tal que para todo $x_0 \in \delta_0 B_n$ temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \tag{1.10}$$

◇

Como podemos constatar nas definições anteriores, é exigido que todas as soluções da inclusão verifiquem as condições de estabilidade. Se esta condição for enfraquecida e se considerar que existe pelo menos uma solução a verificar as condições de estabilidade, passamos a ter estabilidade fraca, e a posição de equilíbrio será fracamente estável e fracamente assintoticamente estável respectivamente, ver, por exemplo, Smirnov (2002). No capítulo 4, abordamos exclusivamente estabilidade forte, deixando o estudo da estabilidade fraca para o capítulo 5. Como na maior parte das vezes, será evidente a que tipo de estabilidade nos referimos, só usaremos o adjetivo fraca quando houver risco de confusão.

Outra caracterização importante é a de estabilidade exponencial. Consideremos a inclusão diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x). \tag{1.11}$$

Assumindo que $0 \in F(0, t)$, para todo $t \geq 0$, temos as seguintes definições:

Definição 1.12: Dizemos que a posição de equilíbrio $x = 0$ da inclusão (1.11) é

- (i) fracamente assintoticamente estável, se dado um $\eta > 0$ qualquer, existe um $\delta(\eta) > 0$ tal que para qualquer $x_0 \in \delta B_n$, pelo menos uma solução $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, \infty]}(F, x_0)$, com $x(0) = x_0$, satisfaz $|x(t)| < \eta$ para todo $t \geq 0$, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

- (ii) fracamente exponencialmente estável, se existem constantes positivas c , γ , e δ tais que para qualquer $x_0 \in \delta B_n$ pelo menos uma trajetória $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, \infty]}(F, x_0)$ com $x(0) = x_0$ satisfaz

$$|x(t)| \leq c|x_0|e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0. \tag{1.12}$$

◇

Para equações diferenciais ordinárias, o estudo da estabilidade de sistemas não lineares pode ser estendido a sistemas que só apresentam estabilidade, não a todas, mas só relativamente a alguma parte das variáveis, ver por exemplo Vorotnikov (2003, 2005). Para estender algumas dessas ideias a inclusões diferenciais, vamos considerar aplicações multívocas da forma $F(x) = F^1(x^1, x^2) \times F^2(x^1, x^2) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ e o sistema de inclusões diferenciais

$$\dot{x}^1 \in \epsilon F^1(x^1, x^2), \quad (1.13)$$

$$\dot{x}^2 \in \epsilon F^2(x^1, x^2). \quad (1.14)$$

Assumindo que $x^1 = 0$ é uma posição de equilíbrio parcial do sistema de inclusões anterior, i.e. $0 \in F^1(0, x^2)$, temos as seguintes definições de estabilidade parcial:

Definição 1.13: A posição de equilíbrio parcial $x^1 = 0$ do sistema (1.13) e (1.14) é chamada de

(i) parcialmente σ -estável se, dado um $\eta > 0$, existe um $\mu(\eta) > 0$ e $\sigma > 0$ tal que todas as soluções $(x^1(\cdot), x^2(\cdot))$ de (1.13) e (1.14) com condições iniciais $(x^1(0), x^2(0)) \in \mu B_m \times \sigma B_p$ satisfazem $|x^1(t)| < \eta$ para todo $t \geq 0$.

(ii) parcialmente estável se na definição anterior $\sigma = \infty$.

(iii) parcialmente assintoticamente σ -estável (estável) se, para além de ser σ -estável (estável), existe um $\delta_0 > 0$ para o qual a igualdade

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^1(t) = 0$$

é verificada, sempre que $x^1(0) \in \delta_0 B_m$. ◇

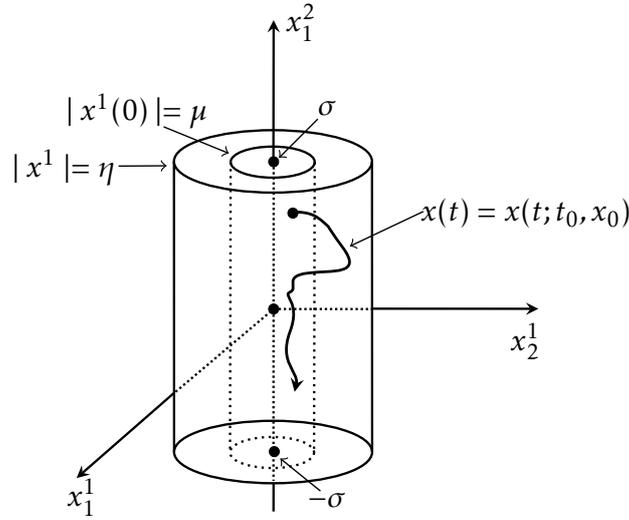


Figura 1.1: Interpretação geométrica da definição de posição de equilíbrio σ -estável: $x = (x_1^1, x_2^1, x_1^2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

1.4 Análise da estabilidade fraca através da primeira aproximação

Tal como acontece no estudo de sistemas de equações diferenciais ordinárias, a análise qualitativa de inclusões diferenciais pode ser simplificada recorrendo a métodos de primeira aproximação, linearizando o segundo membro em torno da origem. Nesta secção, apresentamos alguns resultados que serão utilizados no capítulo 5, no estudo da estabilidade fraca de inclusões diferenciais através do método de medianização.

Consideremos a inclusão diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (1.15)$$

onde a aplicação multívoca $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as seguintes condições:

- (C1) $0 \in F(t, 0), \forall t \geq 0$;
- (C2) a aplicação F é periódica em t com período $T > 0$, i.e., $F(t + T, x) = F(t, x)$ para todos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;
- (C3) a aplicação $F(\cdot, x)$ é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Existe uma função $b(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$ tal que $F(x, t) \subset b(t)B_n$ para todos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

(C4) a aplicação $F(t, \cdot)$ é Lipschitziana para todo $t \in [0, T]$, com constante $k(t)$, onde $k(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$.

Temos a seguinte definição:

Definição 1.14: Um processo convexo não autónomo é uma aplicação multívoca $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ que verifica:

- $A(t, \lambda x) = \lambda A(t, x)$, $x \in \text{dom}A(t, \cdot)$, $\lambda > 0$;
- $A(t, x_1) + A(t, x_2) \subset A(t, x_1 + x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \text{dom}A(t, \cdot)$.

para todo $t \geq 0$. ◇

Em análise multívoca, as aplicações análogas às aplicações lineares unívocas são processos convexos. Neste trabalho assumimos que os processos convexos considerados verificam $\text{dom}A(t, \cdot) = \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$.

Definição 1.15: A aplicação $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é uma primeira aproximação da aplicação $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, no ponto de equilíbrio $x = 0$, se $A(t, \cdot)$ é um processo convexo e se para todo $(x_0, v_0) \in \text{gr}A(t, \cdot)$ a seguinte igualdade é verificada:

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} d(hv_0, F(t, hx_0)) = 0,$$

para todo $t \geq 0$. ◇

Se uma primeira aproximação é dada, podemos considerar a seguinte inclusão diferencial:

$$\dot{x} \in A(t, x), \tag{1.16}$$

e estudar propriedades de estabilidade fraca da inclusão (1.15) através das propriedades da primeira aproximação.

Um resultado nesse sentido, que será usado posteriormente surgiu no trabalho de Smirnov (1995). Nele foi mostrado que sob as condições:

(C5) a aplicação $A(t, \cdot)$ é uma primeira aproximação da aplicação $\text{co}F(t, \cdot)$ em $x = 0$ para todos os valores de t ;

(C6) a aplicação $A(\cdot, x)$ é periódica em t com período $T > 0$, i.e, $A(t + T, x) = A(t, x)$ para todos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

(C7) a aplicação $A(\cdot, x)$ é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\text{dom}A(t, \cdot) = \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$,

a posição de equilíbrio $x = 0$ da inclusão diferencial (1.15) é fracamente assintoticamente estável, sempre que a posição de equilíbrio $x = 0$ da inclusão diferencial (1.16) é fracamente assintoticamente estável. A mesma demonstração leva ao seguinte teorema mais forte.

Teorema 1.3 *Se a posição de equilíbrio $x = 0$ da inclusão diferencial (1.16) é fracamente assintoticamente estável, então $x = 0$ vai ser uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável da inclusão diferencial (1.15).*

Alguns resultados sobre estabilidade assintótica fraca de inclusões diferenciais autónomas da forma

$$\dot{x} \in A(x), \quad (1.17)$$

onde $A(\cdot)$ é um processo convexo, são conhecidos. O seguinte resultado, que pode ser obtido do Teorema 9.1 de Smirnov (2002), vai ser importante.

Teorema 1.4 *Seja $x = 0$ uma posição de equilíbrio assintoticamente estável da inclusão diferencial (1.17). Então, existe um poliedro convexo \mathfrak{M} , com vértices $\{x_1, \dots, x_m\}$ e números $h > 0$ e $\delta \in]0, 1[$ tais que $0 \in \text{int}\mathfrak{M}$ e para todos $k = \overline{1, m}$ existe um vetor $v_k \in A(x_k)$ que satisfaz a inclusão*

$$x_k + hv_k \in (1 - \delta h)\mathfrak{M}.$$

1.5 Equações diferenciais com segundo membro descontínuo

Tal como referido anteriormente, quando consideramos um sistema de equações com segundo membro descontínuo, podemos recorrer à generalização do conceito de solução introduzida por Filippov a fim de estudar o mesmo. Neste trabalho iremos utilizar uma definição, ver por exemplo Smirnov (2002), que é ligeiramente diferente da introduzida originalmente por Filippov. Concretamente, a generalização que iremos utilizar consiste em substituir o sistema

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.18)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função descontínua limitada, por uma inclusão diferencial. Assim, as soluções do problema (1.18) são definidas como soluções da inclusão diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (1.19)$$

onde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ é a aplicação multívoca dada por:

$$F(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \text{cl co}\{f(t, x + \delta B_n)\}. \quad (1.20)$$

A aplicação multívoca (1.20) é semi-contínua superiormente, ou seja, verifica a seguinte definição:

Definição 1.16: A aplicação $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ diz-se semi-contínua superiormente se para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e cada $\eta > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$F(t, x) \subset F(t, x_0) + \eta B_n,$$

qualquer que seja $x \in x_0 + \delta B_n$. ◇

De facto, se a função f for localmente limitada, mensurável para qualquer par $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, então a aplicação multívoca F satisfaz as seguintes condições, (ver, por exemplo Bacciotti & Rosier (2005)):

- (H1) $F(t, x)$ é um subconjunto não vazio, compacto e convexo de \mathbb{R}^n , para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;
- (H2) a aplicação multívoca $F(t, \cdot)$ é semi-contínua superiormente para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (H3) a aplicação multívoca $F(\cdot, x)$ é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- (H4) a aplicação multívoca F é localmente limitada, i.e., para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existe $M > 0$ tal que $F(t, x) \subset MB_n$ para todo $(t, x) \in K$,

Com estas condições, a existência de soluções do problema (1.19) é garantida (ver, por exemplo o Teorema 4.7 de Smirnov (2002)).

As funções descontínuas mais simples que podem aparecer são funções contínuas por partes. Uma função $f(\cdot)$ é contínua por partes se existirem conjuntos abertos conexos $D_1, \dots, D_m \subset \mathbb{R}^n$, que verificam $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^m \text{cl}D_k$, tais que para todos $k = \overline{1 : m}$, a função $f(\cdot)$ é contínua em D_k . A condição de continuidade é violada num conjunto de medida zero, formado pela união das fronteiras dos conjuntos D_k .

A fim de ilustrar como podemos aplicar a construção (1.20) para definir soluções de (1.19) vamos considerar, sem perda de generalidade, que o segundo membro da equação diferencial é descontínuo numa dada superfície $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(t, x) = 0\}$, com $\phi(\cdot)$ diferenciável. A superfície D_0 divide o espaço \mathbb{R}^n em duas regiões,

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(t, x) > 0\} \text{ e } D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(t, x) < 0\},$$

de modo que $\mathbb{R}^n = D_0 \cup D_1 \cup D_2$. Neste caso a equação (1.18) pode ser escrita na forma

$$\dot{x} = f(t, x) = \begin{cases} f_1(t, x), & x \in D_1 \cup D_0 \\ f_2(t, x), & x \in D_2 \end{cases}, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.21)$$

Aplicando o procedimento (1.20), construímos a aplicação multívoca F e reescrevemos a equação anterior como uma inclusão diferencial:

$$\dot{x} \in F(t, x) = \begin{cases} f_1(t, x), & x \in D_1, \\ \text{clco}\{f_1(t, x), f_2(t, x)\}, & x \in D_0, \\ f_2(t, x), & x \in D_2 \end{cases}, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.22)$$

Tendo definido o conceito de solução e garantido a sua existência, interessa estudar o comportamento das mesmas, em particular quando estas atingem ou partem da superfície de descontinuidade. Tipicamente, três situações, ou combinações delas, podem ocorrer, (ver, por exemplo, as Secções 4 e 10 de Filippov (1988)). Sejam f_1^n e f_2^n as projeções dos vetores $f_1(t_1, x(t_1))$ e $f_2(t_1, x(t_1))$ no vetor da normal à superfície D_0 no ponto $x(t_1)$. Então temos:

- (a) A trajetória começa num ponto x_0 fora da superfície de descontinuidade, digamos D_2 e que atinge a mesma no instante t_1 . Se $f_1^n > 0$ e $f_2^n > 0$, quando a trajetória atinge a superfície D_0 , ela vai continuar para D_1 , ver figura (1.2)-(a). Qualquer solução de (1.22) que verifica a esta situação é única.
- (b) Suponhamos uma trajetória semelhante à anterior, mas agora, quando a mesma atinge a superfície D_0 , temos que $f_1^n < 0$ e $f_2^n > 0$. Neste caso, a trajetória não pode deixar a superfície de descontinuidade e terá que evoluir ao longo da mesma.

A este tipo de comportamento chamamos movimento deslizante atrativo. Durante o movimento deslizante, a trajetória irá permanecer em D_0 , obedecendo a equação

$$\dot{x} = f_0(t, x), \quad (1.23)$$

onde

$$f_0(t, x) = \alpha_0 f_1(t, x) + (1 - \alpha_0) f_2(t, x).$$

O valor de α_0 é escolhido de modo a que o vetor $f_0(t, x)$ seja tangente à superfície D_0 , ou seja,

$$\alpha_0 = \frac{\phi_t + \langle \nabla \phi, f_2 \rangle}{\langle \nabla \phi, f_2 - f_1 \rangle},$$

onde $\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ e $\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right)$ é o vetor gradiente.

Mais uma vez, uma solução com este tipo de comportamento existe e é única para valores crescentes de tempo.

- (c) Por fim, se $x_0 \in D_0$ e $f_1^n > 0$ e $f_2^n < 0$, vamos ter um movimento deslizante repulsivo, que leva a uma falha na unicidade, uma vez que a trajetória pode abandonar D_0 , prosseguindo tanto para D_1 que para D_2 .

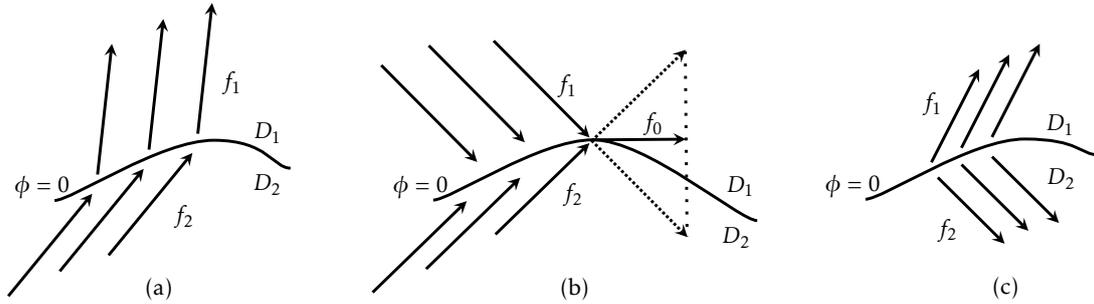


Figura 1.2: Ilustração de três comportamentos possíveis dos vetores $f(t, x)$.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1 (Paden & Sastry (1987)) Consideremos o seguinte problema

$$\dot{x} = -\epsilon \operatorname{sgn}(x), \quad x(0) = 1, \quad (1.24)$$

onde $\operatorname{sgn}(\cdot)$ é a função sinal definida como sendo

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Aplicando o procedimento de Filippov vamos obter a inclusão diferencial

$$\dot{x} \in -\epsilon \operatorname{Sgn}(x), \quad x(0) = 1, \quad (1.25)$$

onde $\operatorname{Sgn}(\cdot)$ é a versão multívoca da função sinal,

$$\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

A inclusão (1.25) tem uma solução dada por

$$x(t) = \begin{cases} -\epsilon t + 1, & 0 \leq t < \frac{1}{\epsilon}, \\ 0, & t \geq \frac{1}{\epsilon}. \end{cases} \quad (1.26) \quad \triangleleft$$

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 1.2 Consideremos o oscilador harmónico com atrito seco

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \gamma \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0,$$

equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - \gamma \operatorname{sgn}(x_2) \end{cases} \cdot \quad (1.27)$$

Aplicando o procedimento de Filippov obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \in x_2 \\ \dot{x}_2 \in -\omega^2 x_1 - \gamma \operatorname{Sgn}(x_2) \end{cases} \cdot \quad (1.28)$$

Para este sistema temos $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_2 = 0\}$. O vetor da normal à superfície de descontinuidade é dado por $\widehat{n} = (0, 1)$ e logo

$$f_1^n = -\omega^2 x_1 - \gamma \text{ e } f_2^n = -\omega^2 x_1 + \gamma.$$

Podemos ver que a condição de existência de um movimento deslizante atrativo em D_0 , $f_1^n < 0$ e $f_2^n > 0$, é verificada sempre que $x_1 \in \left[-\frac{\gamma}{\omega^2}, \frac{\gamma}{\omega^2}\right]$. Assim, fora dessa região as trajetórias são bem descritas pelas soluções do sistema (1.27). Quando atingem a superfície $x_2 = 0$ em $x_1 \in \left[-\frac{\gamma}{\omega^2}, \frac{\gamma}{\omega^2}\right]$, as trajetórias passam a ser descritas pela equação (1.23), com $f_0 = (0, 0)$. \triangleleft

Capítulo 2

Método de medianização

Neste capítulo, começamos por fazer uma breve descrição do método de medianização, assim como as principais motivações da sua utilização. Seguidamente, apresentamos uma revisão detalhada da literatura sobre algumas extensões do método a equações diferenciais com segundo membro descontínuo e a inclusões diferenciais.

2.1 Método de medianização

Consideremos o seguinte problema de Cauchy:

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

onde $\epsilon > 0$ é um pequeno parâmetro do problema, $x \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. O método de medianização consiste em substituir o sistema anterior pelo sistema:

$$\dot{\bar{x}} = \epsilon \bar{f}(\bar{x}), \quad \bar{x}(0) = x_0. \quad (2.2)$$

onde

$$\bar{f}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x) ds.$$

Uma vez que o sistema medianizado (2.2) é autónomo, é mais simples de estudar que o sistema original (2.1). Apesar de, nem sempre ser possível resolvê-lo explicitamente, regra geral é possível obter conclusões sobre o comportamento do primeiro sistema através da análise do sistema medianizado.

De facto, o estudo formal do método de medianização consiste, em primeira instância, na determinação de condições para as quais se garante que a diferença

entre as soluções dos dois sistemas se mantém tão pequena quanto se queira, para um determinado intervalo de tempo. O método pode ser também aplicado no estudo de propriedades qualitativas das soluções do problema original, inferindo as mesmas através do estudo do sistema medianizado.

Uma das primeiras justificações rigorosas da aplicação do método, apareceu nos trabalhos de Bogoliubov, Bogoliubov & Mitropolski (1961), sendo atualmente conhecido como primeiro Teorema de Bogoliubov. Posteriormente, o seu trabalho foi desenvolvido e estendido por muitos outros autores, formando hoje uma teoria sólida e com muitas aplicações, veja, por exemplo, Sanders & Verhulst (1985); Khalil (2002) e Burd (2007).

O Primeiro Teorema de Bogoliubov demonstra exatamente que as soluções, dos dois problemas descritos anteriormente, se encontram suficientemente próximas num grande intervalo de tempo, para um ϵ suficientemente pequeno. Isto é, sobre algumas condições que serão analisadas posteriormente, é mostrado que para todo $L > 0$ e $\eta > 0$, existe um ϵ_0 tal que, qualquer que seja o $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, a solução $x(\cdot)$ do problema (2.1) e a solução $\bar{x}(\cdot)$ do problema (2.2) verificam

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \eta, \text{ para } t \in [0, L/\epsilon].$$

Após a validação do método de medianização, surgem algumas questões importantes sobre o alcance da sua utilização. Em particular, é de central importância perceber em que condições podemos estender o resultado anterior, de forma a garantir a proximidade das soluções do sistema original e o medianizado, num intervalo de tempo infinito.

Outra questão que surge naturalmente é saber em que condições, confirmadas propriedades das soluções do sistema medianizado, as mesmas podem ser inferidas sobre as soluções do problema original. Para equações diferenciais existem alguns resultados nesse sentido. Nomeadamente, o Teorema de Samoilenko-Stanzhitskii, que enfraquece as condições do Teorema de Eckhaus/Sanchez-Palencia, mostra que se o sistema medianizado tiver uma posição de equilíbrio assintoticamente estável, então é possível concluir que as soluções do sistema original se mantêm limitadas numa vizinhança da origem, para num intervalo infinito e um ϵ suficientemente pequeno. Outras generalizações foram também obtidas através do Teorema de Banfi/Filatov, ver por exemplo Sanders & Verhulst (1985); Samoilenko & Stanzhitskii (2006); Burd (2007).

O método de medianização pode também ser utilizado para estudar estabilidade exponencial de uma posição de equilíbrio do sistema (2.1). De facto, sob algumas condições, a estabilidade exponencial da posição de equilíbrio do sistema medianizado implica estabilidade exponencial da posição de equilíbrio do sistema original (ver, por exemplo, Aeyels & Peuteman (1999); Khalil (2002)). Se o sistema tiver uma estrutura especial, como homogeneidade, resultados

equivalentes ao anterior podem ser obtidos considerando estabilidade assimp-tótica, M'Closkey (1997).

2.2 Método de medianização em equações diferenciais com segundo membro descontínuo

As demonstrações usuais do primeiro Teorema de Bogolyobov baseiam-se em um de dois métodos:

- Utilização de uma mudança de variável que permite excluir, em primeira aproximação em ϵ , a variável tempo t do segundo membro do sistema (2.1);
- Cálculo direto da distância entre as soluções do problema original e medianizado.

Concretamente, no primeiro método de prova, desenvolvido originalmente por Bogoliobov, é mostrado que após uma mudança de variável, $x = y + \epsilon u(t, y, \epsilon)$, o sistema (2.1) pode ser transformado em

$$\dot{y} = \epsilon \bar{f}(y) + \epsilon^2 q(t, y, \epsilon). \quad (2.3)$$

Assim, o sistema original, pode ser entendido como uma perturbação do sistema (2.2), levando a uma interpretação do método de medianização como um problema de perturbação. Neste contexto, podem ser utilizados resultados da Teoria de Perturbações, de forma a mostrar a validade do teorema, ver por exemplo Bogoliubov & Mitropolski (1961); Hale (1969); Murdock (1991); Khalil (2002).

A utilização desta abordagem tem a vantagem de conseguir importar alguns métodos da Teoria de Perturbações, em particular métodos de análise qualitativa, aplicando os mesmos, a problemas de medianização, Khapaev (1992); Burd (2007). No entanto, é usualmente assumido que a função f , assim como as suas derivadas parciais até à segunda ordem, são contínuas e limitadas num dado domínio, tornando a utilização deste método mais difícil de generalizar a outros enquadramentos.

Por outro lado, na abordagem à prova do Teorema de Bogoliubov, que utiliza o cálculo direto da distância entre as soluções do problema original e medianizado, podem ser utilizadas uma de duas estratégias. Uma, aplica o facto da proximidade das soluções do problema (2.2) às soluções do problema (2.1) ser uma consequência direta da dependência continua das soluções da equação

$$\dot{x} = g(t, x, \lambda)$$

no parâmetro λ ; onde $x \in \mathbb{R}^n$, $g(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, Krasnosel'skii & Krein (1955).

A outra, estabelece a proximidade das soluções, construindo primeiro duas quase-soluções aos problemas (2.1) e (2.2),

$$y(t) = x_0 + \epsilon \int_0^t f(s, \bar{x}(s)) ds, \quad \bar{y}(t) = x_0 + \epsilon \int_0^t \bar{f}(x(s)) ds,$$

e utiliza a desigualdade de Gronwall para obter a estimativa da distância.

Ambas as técnicas não requerem condições tão fortes de diferenciabilidade, impondo apenas que as funções envolvidas sejam limitadas e satisfaçam a condição de Lipschitz, ver por exemplo Sanders & Verhulst (1985).

Apesar da teoria por detrás do método de medianização ser bastante frutífera, existem muitas aplicações práticas onde os problemas são descritos por sistemas para os quais as condições do Teorema de Bogoliubov não se verificam, impossibilitando a justificação rigorosa da aplicação do método de medianização. Um exemplo disso são sistemas modelados por equações diferenciais com segundo membro descontínuo.

Um dos primeiros trabalhos a estender o método de medianização a sistemas com segundo membro descontínuo foi apresentado por Matveev et al. (1978), no qual a validade do Teorema de Bogoliubov foi demonstrada para sistemas descontínuos que verifiquem as seguintes condições, para um dado domínio $Q = \{(t, x) \mid t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$:

- (I) O limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s, x) ds = \bar{f}(x)$ existe no domínio D , uniformemente em x ;
- (II) A função $f(t, x)$ é mensurável em t para todo $x \in D$ e existe uma constante $M > 0$ para a qual $f(t, x) \subset MB_n$ para todo $(t, x) \in Q$ $M > 0$;
- (III) A função $\bar{f}(x)$ tem apenas um número finito de superfícies de descontinuidade $\phi_i = \{x : \phi_i(x) = 0\}$, $i = \overline{1, k}$ em D , e cada $\phi_i(x)$ é continuamente diferenciável numa vizinhança de ϕ_i . A região D é dividida por ϕ_i em regiões D_j , $j = \overline{1, N}$.
- (IV) Qualquer que seja $\eta > 0$, existe um $\epsilon_1(\eta)$ tal que, se $0 < \epsilon < \epsilon_1(\eta)$ e $t \in [0, \infty[$, em cada região D_j , excluindo uma η -vizinhança, $V_\eta(\phi_i)$, das superfícies definidas por ϕ_i , existe uma função não decrescente $\psi(\cdot)$, que verifica $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(\alpha) = 0$, tal que

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq \psi(|x_2 - x_1|),$$

para $x_1, x_2 \in D_j \setminus \bigcup_i V_\eta(\phi_i)$ arbitrários;

- (V) Existe uma solução contínua $\bar{x}(t)$ de (2.2), em $[0, L]$, que tem no máximo um número finito de intersecções com as superfícies ϕ_i , nos pontos (t_l, x_l) , $x_l = \bar{x}(t_l)$, $l = 1, \dots, m$;
- (VI) Numa ρ -vizinhança dos pontos de intersecção $\bar{x}(t_i)$ da trajetória $\bar{x}(t)$ com as superfícies ϕ_i , as seguintes desigualdades são verificadas:

$$\langle f(t, x), \nabla \phi_i(x) \rangle \geq \beta > 0,$$

ou

$$\langle f(t, x), \nabla \phi_i(x) \rangle \leq -\beta < 0,$$

para quase todo t .

Estas condições, permitem justificar a aplicação do método a sistemas cujo segundo membro do sistema medianizado é descontínuo. Para além disso, as trajetórias do sistema medianizado não apresentam nenhum tipo de deslizamento nas superfícies de descontinuidade, condição (VI). É de notar também que a condição (V) não é de fácil verificação.

Seguidamente, em Plakhtienko (1985), foi mostrado um resultado semelhante, mas com condições mais fáceis de verificar em exemplos práticos. Mantendo a primeira condição, foi imposto que:

- (II) A função $f(t, x)$ é absolutamente integrável em t para todo $x \in D$ e existe uma única solução do sistema (2.1), limitada num intervalo arbitrário, mas finito, de tempo;
- (III) A função $f_1(t, x) = f(t, x) - \bar{f}(x)$ tem apenas um número finito de superfícies de descontinuidade $\phi_i = \{x : \phi_i(x) = 0\}$, $i = \overline{1, k}$ em D . Nos pontos que não pertencem a essas superfícies, a função $f_1(t, \cdot)$ verifica a condição de Lipschitz.
- (IV) A função $\bar{f}(\cdot)$ verifica a condição de Lipschitz.

- (V) A condição

$$\langle f(t, x), \nabla \phi_i(x) \rangle = \lambda_i \neq 0 \quad (i = \overline{1, N}),$$

é verificada.

- (VI) Para todo $x_0 \in D' \subset D$ e $t \geq 0$, a solução de (2.2), assim como uma ρ -vizinhança da mesma, pertencem ao domínio D .

Sobre estas condições, Plakhtienko justificou a aplicação do método de medianização a sistemas oscilatórios da forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon h(t, x, \dot{x}),$$

onde a função descontínua h assumia uma forma específica. Resultados semelhantes foram obtidos, mais recentemente, por Fidlin (2002, 2005) para sistemas periódicos muito particulares. Referimos também os seguintes trabalhos que são citados na bibliografia: Samoilenko (1963); Akilov (1971); Filatov (1974); Klimchuk (1990); Plotnikov & Zverkova (1993) e Plotnikov et al. (1994).

Em todos os trabalhos citados, as condições impostas impossibilitam a aplicação do método de medianização a sistemas descontínuos cujas trajetórias apresentem movimento deslizante, deixando assim em aberto o problema da justificação da aplicação do método a sistemas mais gerais.

2.3 Método de medianização em inclusões diferenciais

Como vimos na Secção 1.5, para estudar o problema (2.1) com segundo membro descontínuo temos que reescrever o mesmo na linguagem de inclusões diferenciais. Nesse sentido, nesta secção descrevemos os trabalhos existentes sobre o método de medianização para inclusões diferenciais, começando pelos resultados mais antigos obtidos para inclusões Lipschitzianas e acabamos com os trabalhos mais recentes onde são apresentadas extensões do Teorema de Bogoliubov para inclusões semi-contínuas superiormente.

Escrevendo o problema anterior na linguagem de inclusões diferenciais, vamos ter:

$$\dot{x} \in \epsilon F(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (2.4)$$

onde ϵ é um pequeno parâmetro e $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{KK}(\mathbb{R})$ é uma aplicação multívoca. A inclusão medianizada vai ser

$$\dot{\bar{x}} \in \epsilon \bar{F}(\bar{x}), \quad \bar{x}(0) = x_0, \quad (2.5)$$

com

$$\bar{F}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds, \quad (2.6)$$

sendo a convergência entendida no sentido da distância de Hausdorff:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} d_H \left(\bar{F}(x), \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds \right) = 0.$$

Quando a aplicação multívoca envolvida na inclusão diferencial é Lipschitziana, o problema foi resolvido por Plotnikov (1979 a) para o caso periódico, e Plotnikov (1979 b) para o caso geral. Neste último trabalho, Plotnikov demonstrou a estimativa,

$$d_H(\mathcal{A}(t)(\epsilon F, x_0), \mathcal{A}(t)(\epsilon \bar{F}, x_0)) < \eta, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0(\eta), \quad t \in [0, L/\epsilon] \quad (2.7)$$

impondo as seguintes condições:

- (I) A aplicação $F(t, x)$ é contínua, limitada e satisfaz a condição Lipschitz em x com uma constante λ , i.e.

$$F(t, x) \subset MB_n, \quad d_H(F(t, x_2), F(t, x_1)) \leq \lambda |x_2 - x_1|;$$

- (II) O limite (2.6) existe no domínio D , uniformemente em x ;

- (III) Para todo $x_0 \in D' \subset D$ e $t \geq 0$, as soluções de (2.5), assim como uma ρ -vizinhança das mesmas, pertencem ao domínio D .

Posteriormente, este resultado foi generalizado por Vasil'ev (1983) a aplicações $F(t, x)$ mensuráveis em t e verificando uma condição de Lipschitz mais geral:

$$d_H(F(t, x_2), F(t, x_1)) \leq \lambda(t) |x_2 - x_1|,$$

para $x_1, x_2 \in D$ arbitrários, onde $\int_{t_1}^{t_2} \lambda(s) ds \leq \lambda(t_2 - t_1)$ para cada $[t_1, t_2] \subset [0, +\infty[$, sendo λ uma constante.

Estes resultados basilares foram estendidos em várias direções. No artigo de Klimchuk (1989), foi apresentada uma generalização do resultado de Plotnikov, em que foram consideradas aplicações multívocas $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ periódicas não limitadas. Em Plotnikov (1980) foi considerado um esquema de medianização parcial, extendendo os primeiros resultados de Plotnikov ao mesmo. De facto, o método de medianização em inclusões diferenciais sofreu um grande desenvolvimento com os trabalhos de Plotnikov e da sua escola. Para uma revisão recente destes trabalhos ver Klymchuk et al. (2011). Referimos também os seguintes livros que são frequentemente citados na bibliografia: Plotnikov (1992, 1999).

O método de medianização para inclusões diferenciais foi também utilizado noutros contextos. Nomeadamente, foi aplicado em inclusões diferenciais impulsivas, Klymchuk et al. (2011); Perestyuk et al. (2011) e inclusões diferenciais com perturbações, Khapaev & Filatov (1988); Grammel (1996, 2003). Foi também aplicado a fim de estudar propriedades de estabilidade em vários tipos de

sistemas: Grammel & Maizurna (2004) consideraram sistemas com ruído e em Grammel (2008), o método foi aplicado a sistemas com perturbações singulares.

Nos trabalhos de Filatov & Khapaev (1990a,b); Filatov (1994) o método de medianização foi estendido a sistemas com variáveis lentas e rápidas cuja dinâmica é descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in \epsilon F(t, x, y, \epsilon), & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &\in G(t, x, y, \epsilon), & y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde, tal como anteriormente, ϵ é um pequeno parâmetro do problema. Nestes trabalhos, foi introduzido um processo de medianização mais geral que o anterior, permitindo incluir os casos em que o limite (2.6) não existe. De facto, a aplicação multívoca medianizada foi definida como sendo a aplicação $\bar{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{KK}(\mathbb{R}^n)$ que verifica a seguinte condição: para todo $\eta > 0$ existe um $T(\eta) > 0$, tal que para todos $(x_0, y_0) \in D$, $t \geq 0$, todas as soluções $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, \infty]}(\bar{G}, (x_0, y_0))$ e qualquer $T \geq T(\eta)$, temos

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(s, x_0, \bar{y}(s), 0) ds \subset \bar{F}(x_0) + \eta B_n.$$

Utilizando algumas destas ideias, Plotnikov (1996 i) obteve uma extensão dos seus primeiros resultados, alargando a sua aplicabilidade aos casos onde se verifica inexistência do limite (2.6). Em concreto, assumindo que existem as aplicações multívocas $\bar{F}_+, \bar{F}_- : D \rightarrow \mathcal{KK}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} d_C \left(\bar{F}_-(x), \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds \right) = 0, \quad (2.9)$$

e

$$\lim_{T \rightarrow \infty} d_C \left(\frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds, \bar{F}_+(x) \right) = 0, \quad (2.10)$$

ou seja, existem aplicações $\bar{F}_+(\cdot)$ e $\bar{F}_-(\cdot)$ tais que, qualquer que seja $\eta > 0$ temos

$$\begin{aligned} \bar{F}_-(x) &\subset \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds + \eta B_n, \\ \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds &\subset \bar{F}_+(x) + \eta B_n, \end{aligned} \quad (2.11)$$

podemos associar a inclusão (2.4) às inclusões seguintes

$$\dot{\bar{x}}_- \in \epsilon \bar{F}_-(\bar{x}_-), \quad \bar{x}_-(0) = x_0, \quad (2.12)$$

$$\dot{\bar{x}}_+ \in \epsilon \bar{F}_+(\bar{x}_+), \quad \bar{x}_+(0) = x_0. \quad (2.13)$$

Impondo as seguintes condições:

- (I) A aplicação $F(t, x)$ é mensurável em t , contínua em x e existem funções integráveis $M(\cdot)$ e $\lambda(\cdot)$ e constantes M e λ tais que

$$F(t, x) \subset M(t)B_n, \quad d_H(F(t, x_2), F(t, x_1)) \leq \lambda(t)|x_2 - x_1|,$$

e, para qualquer segmento finito $[t_1, t_2] \subset [0, +\infty[$, as desigualdades

$$\int_{t_1}^{t_2} M(s)ds \leq M(t_2 - t_1), \quad \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s)ds \leq \lambda(t_2 - t_1),$$

são verificadas;

- (II) As aplicações $\bar{F}_+(x)$ e $\bar{F}_-(x)$ são compactas convexas, satisfazem a condição de Lipschitz em x com constante λ_0 e limitadas pela constante M , a condição (2.11) é satisfeita uniformemente em $x \in D$;
- (III) Para todo $x_0 \in D' \subset D$, as soluções de (2.12) e (2.13), assim como uma ρ -vizinhança das mesmas, pertencem ao domínio D .

Plotnikov obteve as seguintes estimativas

$$\mathcal{A}(t)(\epsilon \bar{F}_-, x_0) \subset \mathcal{A}(t)(\epsilon F, x_0) + \eta B_n,$$

e

$$\mathcal{A}(t)(\epsilon F, x_0) \subset \mathcal{A}(t)(\epsilon \bar{F}_+, x_0) + \eta B_n,$$

para os conjuntos atingíveis das inclusões em questão, quando $t \in [0, L/\epsilon]$.

Na grande parte dos resultados anteriores, a sua demonstração assenta essencialmente na utilização do Teorema de Filippov, Teorema 1.1, e consequentemente é utilizado o facto das aplicações multívocas serem Lipschitzianas. Em alguns trabalhos, esta condição foi enfraquecida permitindo considerar classes mais amplas de inclusões. Em Plotnikova (2005) e Lakrib (2009) foram mostradas versões do Primeiro Teorema de Bogoliubov para aplicações multívocas contínuas. Resultados semelhantes foram também obtidos em Klimov (2008); Klimov & Ukhalov (2009), impondo uma condição de continuidade unilateral na aplicação multívoca da inclusão (2.4).

No trabalho de Donchev & Farkhi (1998), foi apresentada uma variante do Teorema de Filippov para inclusões diferenciais com segundo membro que verificam a condição de Lipschitz Unilateral, Definição 1.8. Esta classe de aplicações multívocas é menos restritiva que a classe de aplicações Lipschitzianas, contendo mesmo algumas aplicações descontínuas. Com este resultado, foi possível aplicar as técnicas de demonstração usadas anteriormente, para o caso Lipschitziano, obtendo justificações do método de medianização para sistemas da forma (2.4), Sokolovskaya (2004), e sistemas da forma (2.8), Filatov (2008), com segundo membro verificando a condição de Lipschitz Unilateral. Sob a mesma condição, outras extensões do método foram obtidas para outros contextos nos trabalhos de Donchev & Slavov (1999); Donchev et al. (2004); Donchev & Grammel (2005) e Donchev (2006).

Versões do Primeiro Teorema de Bogoliubov para inclusões com segundo membro semi-contínuo superiormente, foram obtidas em Plotnikov (1996 ii). O teorema apresentado garante apenas uma estimativa unilateral para a proximidade das soluções dos dois problemas (2.4) e (2.5):

$$\mathcal{S}_{[0,L/\epsilon]}(\epsilon F, x_0) \subset \mathcal{S}_{[0,L/\epsilon]}(\epsilon \bar{F}, x_0) + \eta B_n, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0(\eta). \quad (2.14)$$

Esta estimativa foi obtida sob as seguintes condições:

- (I) A aplicação $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{KK}(\mathbb{R}^n)$ é semi-contínua superiormente em relação a x , 2π -periódica e mensurável em relação a t , uniformemente limitada por uma função integrável $M(t)$ que verifica

$$\int_{t_1}^{t_2} M(s) ds \leq M(t_2 - t_1)$$

para qualquer $t_2 > t_1 \geq 0$;

- (II) A aplicação $\bar{F}(x)$ verifica a condição de Lipschitz com constante λ ;
- (III) Para todo $x_0 \in D' \subset D$, as soluções de (2.5), assim como uma ρ -vizinhança das mesmas, pertencem ao domínio D .

Apesar de considerar aplicações semi-contínuas superiormente, a forte imposição da verificação da condição de Lipschitz pela aplicação medianizada, reduz a aplicabilidade do resultado a inclusões e equações com segundo membro descontínuo. Por conseguinte, no mesmo trabalho, Plotnikov (1996 ii), foram considerados inclusões descontínuas numa dada superfície $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) = 0\}$, $\phi(\cdot)$ diferenciável, da forma particular

$$F(t, x) = \begin{cases} F_1(t, x), & x \in D_1 \\ F_2(t, x), & x \in D_2 \end{cases}, \quad (2.15)$$

onde as aplicações F_i , $i = 1, 2$ satisfazem a condição de Lipschitz e

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) > 0\} \text{ e } D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) < 0\}.$$

Impondo as condições seguintes

- (I) As aplicações $F_i(t, x)$, $i = 1, 2$ são contínuas, 2π periódicas em t , uniformemente limitadas e verificam a condição de Lipschitz com constante λ ;
- (II) Para todo $x_0 \in D' \subset D$, as soluções de (2.5), assim como uma ρ -vizinhança, pertencem ao domínio D ;
- (III) As soluções $\bar{x}(t)$ que tem no máximo um número finito de intersecções com a superfícies D_0 ;
- (IV) Numa ρ -vizinhança dos pontos de intersecção $\bar{x}(t_i)$ da trajetória $\bar{x}(t)$ com as superfícies D_0 , as seguintes desigualdades são verificadas:

$$\min_{z \in F(t, x)} \langle z, \nabla \phi(x) \rangle \geq \beta > 0,$$

ou

$$\max_{z \in F(t, x)} \langle z, \nabla \phi(x) \rangle \leq -\beta < 0,$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$;

foi obtida uma estimativa semelhante a (2.7) para este tipo de sistemas. Resultados equivalentes foram igualmente obtidos para sistemas descontínuos por partes para os quais a superfície de descontinuidade $\phi(t, x)$ apresenta também uma dependência no tempo.

As condições impostas, principalmente a (III) e (IV), são de muito difícil verificação e raramente se encontram, em aplicações práticas, sistemas que admitem a sua confirmação. Estas imposições restritivas levam a que se procure novas abordagens para estender o Primeiro Teorema de Bogoliubov a sistemas descontínuos. Apresentamos alguns desses resultados no próximo capítulo.

Capítulo 3

Extensões do Método de Medianização

Neste capítulo, discutimos a generalização do método de medianização a inclusões diferenciais, apresentando extensões do primeiro Teorema de Bogoliubov aos casos de aplicações multívocas Lipschitzianas e semi-contínuas superiormente.

3.1 Aplicações multívocas lipschitzianas

Tal como no capítulo anterior, vamos considerar as seguintes inclusões diferenciais:

$$\dot{x} \in \epsilon F(t, x), \quad (3.1)$$

$$\dot{\bar{x}} \in \epsilon \bar{F}(\bar{x}), \quad (3.2)$$

onde a inclusão medianizada obedece à Definição 3.1.

Definição 3.1: Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca Lipschitziana. A aplicação medianizada $\bar{F}(\cdot)$ é definida por

$$\bar{F}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds, \quad (3.3)$$

onde a convergência é entendida no sentido da distância de Hausdorff. \diamond

De notar que, se a aplicação $F(\cdot, x)$ for periódica, considerando sem perda de generalidade que tem um período 2π , podemos escolher $T = 2k\pi + \tau$, com $\tau \in [0, 2\pi]$, obtendo da definição anterior que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T F(t, x) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k\pi \left(1 + \frac{\tau}{2k\pi}\right)} \int_0^{2k\pi + \tau} F(t, x) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2k\pi} F(t, x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t, x) dt. \end{aligned}$$

Nos resultados que serão apresentados seguidamente, vamos assumir que a aplicação multívoca do segundo membro da inclusão (3.1) verifica as seguintes condições:

(L0) $F(\cdot, x)$ é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(L1) Existe uma função não negativa $b(\cdot) \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty[, \mathbb{R})$ tal que $F(t, x) \subset b(t)B_n$ para todo $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$;

(L2) Existe o limite

$$b = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) dt;$$

(L3) A aplicação $F(t, \cdot)$ verifica a condição de Lipschitz, i.e.

$$d_H(F(t, x_2), F(t, x_1)) \leq \lambda(t) |x_2 - x_1|,$$

onde $\lambda(\cdot) \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty[, \mathbb{R})$ é uma função não negativa;

(L4) O limite

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(t) dt,$$

existe.

De fato, em vez das condições (L2) e (L4), podemos utilizar as seguintes:

(L2') Existe uma constante $b > 0$ para a qual a desigualdade

$$\int_{t_1}^{t_2} b(s) ds \leq b(t_2 - t_1),$$

é verificada para qualquer segmento finito $[t_1, t_2]$;

(L4') Existe uma constante $\lambda > 0$ para a qual a desigualdade

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(s) ds \leq \lambda(t_2 - t_1),$$

é verificada para qualquer segmento finito $[t_1, t_2]$.

Notemos que as condições (L2) e (L4) não estão incluídas nas condições (L2') e (L4'), utilizadas nos resultados referidos no capítulo anterior, como se ilustra no seguinte exemplo.

Exemplo 3.1 Consideremos a função $f(t) = \sqrt{\frac{t}{|t-1|}}$. Podemos ver que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds = 1,$$

mas que

$$\sup_{t_2 > t_1} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(s) ds = +\infty.$$

Logo $f(\cdot)$ verifica as condições (L2) e (L4) anteriores mas não verifica a condição de existência de uma constante f_0 tal que $\int_{t_1}^{t_2} f(s) ds \leq f_0(t_2 - t_1)$ para qualquer intervalo finito $[t_1, t_2]$. \triangleleft

No que segue, vamos fazer todas as demonstrações considerando satisfeitas as condições (L2) e (L4). No entanto, para as condições (L2') e (L4') as demonstrações seriam essencialmente as mesmas. As seguintes propriedades que passam da aplicação original para a medianizada serão úteis futuramente.

Proposição 3.1 *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca que satisfaz as condições (L1) - (L4). Então, se o limite (3.3) existir uniformemente em x , a função multívoca $\bar{F}(\cdot)$ é limitada com a constante b e verifica a condição de Lipschitz com a constante λ , i.e.,*

$$\bar{F}(x) \subset bB_n, \quad d_H(\bar{F}(x_2), \bar{F}(x_1)) \leq \lambda|x_2 - x_1|.$$

Demonstração: A primeira afirmação segue de

$$\bar{F}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt \subset \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T b(t) dt \right) B_n = bB_n.$$

Para mostrarmos a segunda afirmação, consideramos a distância de Hausdorff dos conjuntos

$$d_H(\bar{F}(x_2), \bar{F}(x_1)) = \lim_{T \rightarrow \infty} d_H \left(\frac{1}{T} \int_0^T F(s, x_2) ds, \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x_1) ds \right).$$

Pela Proposição 1.2 e pela condição de Lipschitz da aplicação F , temos que a distância anterior não supera

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d_H(F(s, x_2), F(s, x_1)) ds \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(s) |x_2 - x_1| ds = \lambda |x_2 - x_1|$$

mostrando o resultado. □

Antes de apresentar e provar os resultados principais deste capítulo vamos necessitar de alguns resultados auxiliares.

Lema 3.1 *Se $f(\cdot) \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty[, \mathbb{R})$ e o limite*

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

existe, então para todos os $t_1 < t_2$ a igualdade

$$\bar{f} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\epsilon}{t_2 - t_1} \int_{t_1/\epsilon}^{t_2/\epsilon} f(t) dt$$

é verificada.

Para demonstrar a proximidade das soluções da inclusão original e da medianizada, vamos necessitar do seguinte lema:

Lema 3.2 *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca que verifica as condições (L0)-(L4). Então, se o limite (3.3) existir, temos que para todo $\eta > 0$ e todos τ_1, τ_2 , com $\tau_2 > \tau_1$, existe um $\epsilon_0(\eta) > 0$ tal que para todo $\epsilon \in [0; \epsilon_0(\eta)[$ temos*

$$d_H \left(\bar{F}(x), \frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1/\epsilon}^{\tau_2/\epsilon} F(t, x) dt \right) < \eta.$$

Demonstração: Para simplificar, vamos introduzir a seguinte notação:

$$I(t_1, t_2, x) = \int_{t_1}^{t_2} F(s, x) ds.$$

É fácil de verificar que a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{\epsilon}{\tau_2} I\left(0, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x\right) = \frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x\right) + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \frac{\epsilon}{\tau_1} I\left(0, \frac{\tau_1}{\epsilon}, x\right)$$

Considerando as funções de suporte dos conjuntos anteriores, obtemos

$$\frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2} I\left(0, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x\right), \psi\right) = S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x\right), \psi\right) + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} S\left(\frac{\epsilon}{\tau_1} I\left(0, \frac{\tau_1}{\epsilon}, x\right), \psi\right),$$

para $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$. Reorganizando os termos

$$S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x\right), \psi\right) = \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2} I\left(0, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x\right), \psi\right) - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} S\left(\frac{\epsilon}{\tau_1} I\left(0, \frac{\tau_1}{\epsilon}, x\right), \psi\right).$$

Agora, podemos observar que:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2} I\left(0, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x\right), \psi\right) = S(\bar{F}(x), \psi), \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} S\left(\frac{\epsilon}{\tau_1} I\left(0, \frac{\tau_1}{\epsilon}, x\right), \psi\right) = S(\bar{F}(x), \psi),$$

e por conseguinte, temos

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x\right), \psi\right) = S(\bar{F}(x), \psi). \quad \square$$

Restringindo o domínio da aplicação $F(t, \cdot)$ a $D \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, podemos garantir o seguinte resultado:

Lema 3.3 *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca definida em $Q = \{(t, x) \mid t \geq 0, x \in D \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)\}$, que verifica as condições (L0)-(L4). Então, se o limite (3.3) existir, temos que para todos τ_1, τ_2 , com $\tau_2 > \tau_1$, o limite*

$$\bar{F}(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1/\epsilon}^{\tau_2/\epsilon} F(t, x) dt,$$

existe uniformemente em x .

Demonstração: Suponhamos o contrário. Então, existem um número $\mu > 0$ e uma sucessão de pontos $x_n \in D$ convergente para x_0 para a qual temos

$$\limsup_{\epsilon \downarrow 0} \left| S(\bar{F}(x_n), \psi) - S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x_n\right), \psi\right) \right| \geq \mu > 0.$$

Introduzindo as funções $S(\bar{F}(x_0), \psi)$ e $S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x_0\right), \psi\right)$, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{|\psi|=1} \left| S(\bar{F}(x_n), \psi) - S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x_n\right), \psi\right) \right| \\ \leq \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{|\psi|=1} \left| S(\bar{F}(x_n), \psi) - S(\bar{F}(x_0), \psi) \right| \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$+ \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{|\psi|=1} \left| S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x_n\right), \psi\right) - S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x_0\right), \psi\right) \right| \quad (3.5)$$

$$+ \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{|\psi|=1} \left| S(\bar{F}(x_0), \psi) - S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x_0\right), \psi\right) \right|. \quad (3.6)$$

Da condição de Lipschitz e das expressões (3.4) e (3.5), vemos que o segundo membro da desigualdade anterior não supera

$$\begin{aligned} \lambda |x_n - x_0| + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1/\epsilon}^{\tau_2/\epsilon} \lambda(s) |x_n - x_0| ds \\ + \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{|\psi|=1} \left| S(\bar{F}(x_0), \psi) - S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x_0\right), \psi\right) \right|, \end{aligned}$$

que por sua vez não supera

$$2\lambda |x_n - x_0| + \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{|\psi|=1} \left| S(\bar{F}(x_0), \psi) - S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x_0\right), \psi\right) \right| \quad (3.7)$$

onde λ é a constante de Lipschitz da aplicação $\bar{F}(\cdot)$. Como $x_n \rightarrow x_0$ com $n \rightarrow \infty$ e pelo Lema 3.2, obtemos uma contradição. Portanto

$$\limsup_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{x \in D} \sup_{|\psi|=1} \left| S(\bar{F}(x), \psi) - S\left(\frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} I\left(\frac{\tau_1}{\epsilon}, \frac{\tau_2}{\epsilon}, x\right), \psi\right) \right| = 0.$$

Escrevendo a igualdade usando a distância de Hausdorff, obtemos

$$\limsup_{\epsilon \downarrow 0} \sup_{x \in D} d_H \left(\bar{F}(x), \frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1/\epsilon}^{\tau_2/\epsilon} F(t, x) dt \right) = 0 \quad \square$$

Como iremos ver mais à frente, quando abordarmos inclusões semi-contínuas superiormente, apenas vai ser possível estabelecer uma estimativa unilateral para a distância entre os conjuntos de soluções dos problemas (3.1) e (3.2). Nesse sentido, não necessitaremos da existência do limite da definição da inclusão medianizada (3.3) e este pode ser substituído pelo limite superior de

Kuratowski, ver por exemplo Salinetti & Wets (1979). Assim, introduzimos a seguinte definição.

Definição 3.2: Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca que verifica as condições (L0)-(L4). A aplicação medianizada $\bar{F}(\cdot)$ é definida por

$$\bar{F}(x) = \limsup_{\theta \uparrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\theta)T} \int_{\theta T}^T F(t, x) dt. \quad (3.8)$$

O lim sup representa o limite superior de Kuratowski, i.e., o conjunto dos pontos limite. \diamond

Quando o limite (3.3) existe, esta definição é equivalente à anterior, como demonstrado na seguinte proposição:

Proposição 3.2 *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca que verifica as condições (L0)-(L4). Se o limite*

$$\bar{\bar{F}}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt$$

existir, então:

$$\bar{\bar{F}}(x) = \bar{F}(x). \quad (3.9)$$

Demonstração: Seja θ_i uma sucessão de pontos tais que $\theta_i \uparrow 1$. Consideremos a igualdade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\theta_i)T} \int_0^T F(t, x) dt \\ &= \frac{\theta_i}{(1-\theta_i)\theta_i T} \int_0^{\theta_i T} F(t, x) dt + \frac{1}{(1-\theta_i)T} \int_{\theta_i T}^T F(t, x) dt. \end{aligned}$$

Considerando as funções de suporte dos conjuntos anteriores e reorganizando os termos obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\theta_i)T} \int_{\theta_i T}^T S(F(t, x), \psi) dt \\ &= \frac{1}{(1-\theta_i)T} \int_0^T S(F(t, x), \psi) dt - \frac{\theta_i}{(1-\theta_i)\theta_i T} \int_0^{\theta_i T} S(F(t, x), \psi) dt, \end{aligned}$$

que é verificada para qualquer $\psi \in \mathbb{R}^n$. Passando ao limite, quando $\theta_i \uparrow 1$ e $T \rightarrow \infty$, a igualdade anterior, obtemos

$$S(\bar{F}(x), \psi) = \lim_{\theta_i \uparrow 1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\theta_i)T} \int_{\theta_i T}^T S(F(t, x), \psi) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\theta_i \uparrow 1} \left(\frac{1}{(1-\theta_i)} S(\bar{F}(x), \psi) - \frac{\theta_i}{(1-\theta_i)} S(\bar{F}(x), \psi) \right) \\
&= \lim_{\theta_i \uparrow 1} S(\bar{F}(x), \psi).
\end{aligned}$$

Daqui, temos (3.9) e mostramos o resultado. \square

A inclusão (3.8) permite uma estimativa unilateral mesmo quando o limite (3.3) não existe, como é ilustrado com o seguinte exemplo.

Exemplo 3.2 Consideremos a seguinte inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in \epsilon F(t) = \epsilon \sin(\log(t+1)).$$

Uma vez que

$$\int_0^T \sin(\log(1+s)) ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+T)(\sin(\log(1+T)) - \cos(\log(1+T))),$$

o limite $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s) ds$ não existe. No entanto,

$$\begin{aligned}
\bar{F} &\equiv \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\log(1+s)) ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\sin(\log(1+T)) - \cos(\log(1+T))) \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{2}} \cos(\pi/4 + \log(1+T)) \\
&= [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}],
\end{aligned}$$

e obtemos a aplicação medianizada. \triangleleft

Por conveniência, vamos considerar o tempo lento $\tau = \epsilon t \in [0, L]$ e definir as aplicações multívocas

$$G_\epsilon(\tau, y) \equiv F(\tau/\epsilon, y) \text{ e } G_0(y) \equiv \bar{F}(y),$$

onde a aplicação medianizada é entendida no sentido da Definição 3.2.

Temos o seguinte lema:

Lema 3.4 *Qualquer que seja o $\eta > 0$, existe um $\epsilon_b > 0$ para o qual todas as soluções $y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, L]}(G_\epsilon, C)$ satisfazem a condição de Lipschitz $|y(\tau_2) - y(\tau_1)| \leq (b + \eta)|\tau_2 - \tau_1|$, $\tau_1, \tau_2 \in [0, L]$, sempre que $\epsilon \in]0, \epsilon_b[$.*

Demonstração: Uma vez que $\dot{y} \in F(\tau/\epsilon, y) \subset b(\tau/\epsilon)B_n$, temos que

$$\begin{aligned} |y(\tau_2) - y(\tau_1)| &\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} b\left(\frac{\tau}{\epsilon}\right) d\tau = \epsilon \int_{\tau_1/\epsilon}^{\tau_2/\epsilon} b(s) ds \\ &= (\tau_2 - \tau_1) \frac{\epsilon}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1/\epsilon}^{\tau_2/\epsilon} b(s) ds. \end{aligned}$$

Usando a condição (L2) e aplicando o Lema 3.1, obtemos o resultado. \square

Vejamos agora o primeiro resultado principal deste capítulo

Teorema 3.1 *Seja $G_\epsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{KK}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca que satisfaz as condições (L1) - (L4). Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $L > 0$.*

Então, para qualquer $\eta > 0$ existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ e para cada solução $y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_\epsilon, C)$ existe uma solução $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C)$ que satisfaz :

$$|y(\tau) - \bar{y}(\tau)| < \eta, \quad 0 \leq \tau \leq L. \quad (3.10)$$

Se o limite (3.3) existir uniformemente em x , então para cada solução $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C)$ existe uma solução $y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_\epsilon, C)$ que satisfaz :

$$|\bar{y}(\tau) - y(\tau)| < \eta, \quad 0 \leq \tau \leq L. \quad (3.11)$$

Demonstração: Começemos por mostrar a inclusão $\mathcal{S}_{[0,L]}(G_\epsilon, C) \subset \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C) + \eta\mathcal{B}$. Vamos supor que existe um $\eta > 0$, uma sucessão $\epsilon_i \downarrow 0$, e soluções $y_i(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_{\epsilon_i}, C)$ tais que $y_i(\cdot) \notin \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C) + \eta\mathcal{B}$. Consideremos dois pontos τ_1 e τ_2 , com $\tau_1 < \tau_2$. Do Lema 3.4 sabemos que $|y_i(\tau_2) - y_i(\tau_1)| \leq (b + \eta)|\tau_2 - \tau_1|$. Pelo Teorema de Arzela-Ascoli, vemos que, sem perda de generalidade, a sucessão $y_i(\cdot)$ converge uniformemente para uma função contínua $y(\cdot)$.

Passando ao limite quando i tende para infinito, vemos que $y(\cdot)$ satisfaz a condição de Lipschitz. Logo, $\dot{y}(\tau)$ existe para quase todo $\tau \in [0, L]$.

Seja τ_0 um ponto para o qual a derivada $\dot{y}(\tau_0)$ exista. Consideremos uma sucessão $\tau_j \downarrow \tau_0$. Uma vez que F é Lipschitziana, vamos obter

$$\begin{aligned} y_i(\tau_j) - y_i(\tau_0) &\in \int_{\tau_0}^{\tau_j} F\left(\frac{s}{\epsilon_i}, y_i(s)\right) ds \\ &\subset \int_{\tau_0}^{\tau_j} \left[F\left(\frac{s}{\epsilon_i}, y(\tau_0)\right) + \lambda\left(\frac{s}{\epsilon_i}\right) |y_i(s) - y(\tau_0)| B_n \right] ds \\ &\subset \int_{\tau_0}^{\tau_j} F\left(\frac{s}{\epsilon_i}, y(\tau_0)\right) ds + \left[\int_{\tau_0}^{\tau_j} \lambda\left(\frac{s}{\epsilon_i}\right) (|y_i(s) - y_i(\tau_0)| + |y_i(\tau_0) - y(\tau_0)|) ds \right] B_n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Notar que

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau_0}^{\tau_j} \lambda\left(\frac{s}{\epsilon_i}\right) (|y_i(s) - y_i(\tau_0)| + |y_i(\tau_0) - y(\tau_0)|) ds \\
& \leq [(\tau_j - \tau_0)(b + \eta) + |y_i(\tau_0) - y(\tau_0)|] \int_{\tau_0}^{\tau_j} \lambda\left(\frac{s}{\epsilon_i}\right) ds \\
& = (\tau_j - \tau_0)[(\tau_j - \tau_0)(b + \eta) + |y_i(\tau_0) - y(\tau_0)|] \frac{\epsilon_i}{\tau_j - \tau_0} \int_{\tau_0/\epsilon_i}^{\tau_j/\epsilon_i} \lambda(t) dt.
\end{aligned}$$

Seja $\tilde{\eta} > 0$. Se i e j forem suficientemente grandes e aplicando o Lema 3.1, temos que

$$\begin{aligned}
& [(\tau_j - \tau_0)(b + \eta) + |y_i(\tau_0) - y(\tau_0)|] \frac{\epsilon_i}{\tau_j - \tau_0} \int_{\tau_0/\epsilon_i}^{\tau_j/\epsilon_i} \lambda(t) dt \\
& \leq [(\tau_j - \tau_0)(b + \eta) + |y_i(\tau_0) - y(\tau_0)|] (\lambda + \eta) < \tilde{\eta}.
\end{aligned}$$

Logo, de (3.12) obtemos

$$\frac{y_i(\tau_j) - y_i(\tau_0)}{\tau_j - \tau_0} \in \frac{\epsilon_i}{\tau_j - \tau_0} \int_{\tau_0/\epsilon_i}^{\tau_j/\epsilon_i} F(t, y(\tau_0)) dt + \tilde{\eta} B_n.$$

Da inclusão anterior obtemos,

$$\frac{y(\tau_j) - y(\tau_0)}{\tau_j - \tau_0} \in \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \tau_0/\tau_j)T} \int_{(\tau_0/\tau_j)T}^T F(t, y(\tau_0)) dt + \tilde{\eta} B$$

Passando ao limite quando $\tau_j \downarrow \tau_0$, temos que

$$\dot{y}(\tau_0) \in \bar{F}(y(\tau_0)) + \tilde{\eta} B_n.$$

Uma vez que $\tilde{\eta}$ é arbitrário temos que $y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C)$. Isto implica que $y_i(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C) + \eta \mathcal{B}$ sempre que i é suficientemente grande. Obtemos uma contradição e a inclusão está demonstrada.

Seja $\tilde{\eta} > 0$ e

$$\eta = \int_0^L \tilde{\eta} e^{m(L)-m(s)} ds, \text{ com } m(t) = \int_0^t \lambda(\tau/\epsilon) d\tau.$$

Mostramos agora que a inclusão $\mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C) \subset \mathcal{S}_{[0,L]}(G_\epsilon, C) + \eta \mathcal{B}$ é verificada, sempre que ϵ for suficientemente pequeno.

Seja $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C)$ e τ_0 um ponto tal que a derivada $\dot{\bar{y}}(\tau_0)$ exista. Consideremos uma sucessão de pontos $\tau_j > \tau_0$ convergente para τ_0 e uma sucessão $\epsilon_i \downarrow 0$.

Temos que

$$\begin{aligned}\bar{y}(\tau_j) - \bar{y}(\tau_0) &\in \int_{\tau_0}^{\tau_j} \bar{F}(\bar{y}(s)) ds \\ &\subset \int_{\tau_0}^{\tau_j} \bar{F}(\bar{y}(\tau_0)) ds + \int_{\tau_0}^{\tau_j} \lambda |\bar{y}(s) - \bar{y}(\tau_0)| ds,\end{aligned}\quad (3.13)$$

uma vez que \bar{F} é Lipschitziana. Do primeiro integral, aplicando o Lema 3.2, podemos obter a estimativa

$$\begin{aligned}\int_{\tau_0}^{\tau_j} \bar{F}(\bar{y}(\tau_0)) ds &= (\tau_j - \tau_0) \bar{F}(\bar{y}(\tau_0)) \\ &\subset (\tau_j - \tau_0) \left[\frac{\epsilon}{\tau_j - \tau_0} \int_{\tau_0/\epsilon}^{\tau_j/\epsilon} F(t, \bar{y}(\tau_0)) dt + \tilde{\eta} B_n \right] \\ &= (\tau_j - \tau_0) \left[\frac{1}{\tau_j - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_j} F\left(\frac{s}{\epsilon}, \bar{y}(\tau_0)\right) ds + \tilde{\eta} B_n \right],\end{aligned}\quad (3.14)$$

quando ϵ for suficientemente pequeno. Para o segundo termo obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\tau_0}^{\tau_j} \lambda |\bar{y}(s) - \bar{y}(\tau_0)| ds &\leq \lambda b \int_{\tau_0}^{\tau_j} (\tau_j - \tau_0) ds \\ &\leq \lambda b (\tau_j - \tau_0)^2,\end{aligned}\quad (3.15)$$

uma vez que, considerando $s \in [\tau_0, \tau_j]$, temos $|\bar{y}(s) - \bar{y}(\tau_0)| \leq b(\tau_j - \tau_0)$.

Destas estimativas, obtemos que

$$\frac{\bar{y}(\tau_j) - \bar{y}(\tau_0)}{\tau_j - \tau_0} \in \frac{1}{\tau_j - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_j} F\left(\frac{s}{\epsilon}, \bar{y}(\tau_0)\right) dt + (\tilde{\eta} + \lambda b(\tau_j - \tau_0)) B_n.$$

Passando ao limite quando $\tau_j \downarrow \tau_0$ temos que

$$\dot{\bar{y}}(\tau_0) \in G_\epsilon(\tau_0, \bar{y}(\tau_0)) + \tilde{\eta} B_n.$$

Aplicando o Teorema de Filippov, Teorema 1.1, podemos concluir que

$$\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_\epsilon, C) + \eta \mathcal{B} \quad \square$$

Como ficou claro na demonstração do resultado, na primeira afirmação do teorema, a estimativa (3.10) obtida não depende das constantes de Lipschitz das aplicações envolvidas. Este facto vai ser de crucial importância aquando da generalização do Teorema de Bogoliubov a aplicações semi-contínuas superiormente.

3.2 Teorema de aproximação

A ferramenta principal para demonstrar a extensão do Teorema de Bogoliubov a inclusões diferenciais com segundo membro semi-contínuo superiormente é o seguinte teorema de aproximação, que é uma generalização do Teorema de Haddad, Haddad (1981). Consideramos agora a aplicação multívoca $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ que verifica as seguintes condições:

- (H1) $\text{clco}F(t, x) = F(t, x)$, para todos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;
- (H2) a aplicação multívoca $F(t, \cdot)$ é semi-contínua superiormente;
- (H3) para qualquer x existe uma seleção mensurável de $F(t, x)$, isto é, existe $f(t, x) \in F(t, x)$ tal que $t \rightarrow f(t, x)$ é mensurável para todo x ;
- (H4) existe uma função não negativa $b(\cdot) \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty[, \mathbb{R})$ tal que $F(t, x) \subset b(t)B_n$ para todo $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$;
- (H5) existe o limite

$$b = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(t) dt;$$

Nestas condições, temos o teorema:

Teorema 3.2 *Seja $F : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca que satisfaz as condições (H1) - (H4). Então, existe uma sucessão de aplicações multívocas localmente Lipschitzianas $F_k : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $k = 0, 1, \dots$, mensuráveis em t e que satisfazem as seguintes condições:*

1. *para qualquer $k \geq 0$, $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ a inclusão $F_{k+1}(t, x) \subset F_k(t, x) \subset b(t)B_n$ é satisfeita;*
2. *a inclusão $\mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(F) \subset \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(F_k)$, $k \geq 0$, é verificada;*
3. *para qualquer par (t, x) e $\epsilon > 0$ existe um inteiro positivo $M_{t,x,\epsilon}$ tal que $F_m(t, x) \subset F(t, x) + \epsilon B_n$ para todo $m > M_{t,x,\epsilon}$;*
4. *Se a sucessão de soluções $x_k(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(F_k)$ converge uniformemente para uma função $x(\cdot)$, então a inclusão $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(F)$ é verificada.*

Demonstração: Consideremos o seguinte conjunto de pontos

$$P = \left\{ \left(\frac{\rho}{\sqrt{n}} r_1, \dots, \frac{\rho}{\sqrt{n}} r_n \right) \mid r_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = \overline{1, n} \right\}.$$

onde $\rho > 0$. Vamos denotar os elementos de P por x_r^0 , onde $r \in \mathbb{Z}^n$ é um vetor com componentes inteiras. Claramente que $\{(x_r^0 + \rho \text{int} B_n)\}_{r \in \mathbb{Z}^n}$ é uma cobertura localmente finita de \mathbb{R}^n . Definimos a aplicação multívoca $G_r^0(t) = \text{co}F(t, x_r^0 + 2\rho B_n)$.

Seja V_r^0 o conjunto de todas as seleções integráveis de $G_r^0(t)$. Pelas condições (H3) e (H4) este conjunto não é vazio. Seja $\{v_{r,j}^0(\cdot)\}_{j=1}^\infty \subset V_r^0$ um subconjunto denso no sentido da norma L_1 . Fixemos $\Phi_r^0(t) = \text{cl co}\{v_{r,j}^0(t) \mid j = \overline{1, \infty}\}$. A aplicação multívoca $\Phi_r^0(\cdot)$ é mensurável. Notar que a função $v(\cdot) \in L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ que satisfaz a inclusão $v(t) \in G_r^0(t)$ também satisfaz a inclusão $v(t) \in \Phi_r^0(t)$. De facto, suponhamos que a sucessão $v_{r,j_l}^0(\cdot)$, satisfazendo $v_{r,j_l}^0(t) \in \Phi_r^0(t)$, converge para $v(\cdot)$, em $L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, quando $l \rightarrow \infty$. Sem perda de generalidade $v_{r,j_l}^0(t) \rightarrow v(t)$ para quase todos $t \in [t_0, t_1]$. Uma vez que $\Phi_r^0(t)$ é um conjunto fechado, temos que $v(t) \in \Phi_r^0(t)$.

Seja $\{p_r^0(\cdot)\}_{r \in \mathbb{Z}^n}$ um partição da unidade subordinada à cobertura $\{x_r^0 + \rho \text{int} B_n\}_{r \in \mathbb{Z}^n}$. Consideremos a aplicação multívoca

$$F_0(t, x) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} p_r^0(x) \Phi_r^0(t).$$

Esta aplicação multívoca tem imagens convexas fechadas, é mensurável em t e é Lipschitziana em x .

Para definir a aplicação multívoca $F_1(t, x)$ repetimos o procedimento anterior com $\rho/3$ em vez de ρ . Como resultado, obtemos uma cobertura aberta localmente finita $\{x_r^1 + \rho/3 \text{int} B_n\}_{r \in \mathbb{Z}^n}$ de \mathbb{R}^n , uma partição da unidade correspondente $\{p_r^1(\cdot)\}_{r \in \mathbb{Z}^n}$, aplicações multívocas $\{\Phi_r^1(\cdot)\}_{r \in \mathbb{Z}^n}$, e a aplicação multívoca

$$F_1(t, x) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} p_r^1(x) \Phi_r^1(t).$$

Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos os conjuntos

$$I_0^x = \{r \in \mathbb{Z}^n \mid x \in x_r^0 + \rho \text{int} B_n\}$$

e

$$I_1^x = \{r \in \mathbb{Z}^n \mid x \in x_r^1 + \frac{1}{3}\rho \text{int} B_n\}$$

Vamos mostrar que $x_{r_1}^1 + (2/3)\rho \text{int} B_n \subset x_{r_0}^0 + 2\rho \text{int} B_n$, sempre que $r_0 \in I_0^x$ e $r_1 \in I_1^x$. De facto, seja $y \in x_{r_1}^1 + (2/3)\rho \text{int} B_n$, então temos que

$$|y - x_{r_0}^0| \leq |y - x_{r_1}^1| + |x_{r_1}^1 - x| + |x - x_{r_0}^0| \leq \frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\rho + \rho = 2\rho,$$

isto é, $G_{r_1}^1(t) \subset G_{r_0}^0(t)$ e, conseqüentemente, $\Phi_{r_1}^1(t) \subset \Phi_{r_0}^0(t)$. Para todo $r_1 \in I_1^x$ temos que

$$\Phi_{r_1}^1(t) \subset \sum_{r \in I_0^x} p_r^0(x) \Phi_r^0(t) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} p_r^0(x) \Phi_r^0(t) = F_0(t, x),$$

e, logo,

$$F_1(t, x) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} p_r^1(x) \Phi_r^1(t) = \sum_{r \in I_1^x} p_r^1(x) \Phi_r^1(t) \subset F_0(t, x).$$

Consideremos a sucessão $\rho_k = (1/3)^k \rho$. A aplicação multívoca F_0 corresponde a $\rho_0 = \rho$ e F_1 a $\rho_1 = \rho/3$. Por indução, podemos definir uma sucessão de aplicações multívocas F_k Lipschitzianas em x , mensuráveis em t , e tais que $F_{k+1}(t, x) \subset F_k(t, x)$ para todos $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$.

Para demonstrar a inclusão $\mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(F) \subset \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(F_k)$, $k \geq 0$, consideremos a solução $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(F)$ e o conjunto aberto $x^{-1}(x_r^k + \rho_k \text{int} B_n) = A_r^k \subset [t_0, t_1]$, $r \in \mathbb{Z}^n$. Se $t \in A_r^k$, então temos que $\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \subset \text{cl co} F(t, x_r^k + 2\rho_k \text{int} B_n)$. Consideremos

$$w(t) = \begin{cases} f(t, x_r^k), & t \notin A_r^k, \\ \dot{x}(t), & t \in A_r^k, \end{cases}$$

onde f é uma função satisfazendo a condição (H3). Uma vez que $w(t) \in G_r^k(t)$, temos que $w(t) \in \Phi_r^k(t)$ para quase todo $t \in [t_0, t_1]$. Conseqüentemente $\dot{x}(t) \in \Phi_r^k(t)$ para quase todo $t \in A_r^k$. É claro que $t \in A_r^k$ se e só se $x(t) \in x_r^k + \rho_k \text{int} B_n$ ou, equivalentemente, $p_r^k(x(t)) > 0$. Consideremos o conjunto de pontos t tais que para qualquer $r \in I_k^t = \{r \in \mathbb{Z}^n \mid p_r^k(x(t)) > 0\}$, a inclusão $\dot{x}(t) \in \Phi_r^k(t)$ é satisfeita. A medida deste conjunto é dada por $t_1 - t_0$. Temos que

$$\dot{x}(t) = \sum_{r \in I_k^t} p_r^k(x(t)) \dot{x}(t) \in \sum_{r \in I_k^t} p_r^k(x(t)) \Phi_r^k(t) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} p_r^k(x(t)) \Phi_r^k(t) = F_k(t, x).$$

A segunda afirmação do teorema está mostrada.

Mostramos agora a terceira condição. Seja $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$. Mostraremos que existe $M_{t, x, \epsilon}$ tal que $F_m(t, x) \subset F(t, x) + \epsilon B_n$ sempre $m > M_{t, x, \epsilon}$. Uma vez que a aplicação $x \rightarrow F(t, x)$ é semi-continua superiormente, existe um $\eta > 0$ tal que $F(t, y) \subset F(t, x) + \epsilon B_n$ sempre que $y \in x + \eta B_n$. Consideremos M tal que $\rho_m \leq \eta/3$ para todo $m > M$. Seja $r \in I_m^x = \{r \in \mathbb{Z}^n \mid x \in x_r^m + \rho_m \text{int} B_n\}$ e $y \in x_r^m + 2\rho_m \text{int} B_n$. Se $m > M$, então temos que

$$|y - x| \leq |y - x_r^m| + |x_r^m - x| \leq 2\rho_m + \rho_m = 3\rho_m < \eta.$$

Logo $F(t, y) \subset F(t, x) + \epsilon B_n$ sempre que $y \in x_r^m + 2\rho_m \text{int} B_n$. Conseqüentemente $G_r^m(t) \subset F(t, x) + \epsilon B_n$ para todo $r \in I_m^x$. Uma vez que $F(t, x)$ é um conjunto convexo, temos que

$$F_m(t, x) \subset \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} p_r^m(x) G_r^m(t) \subset F(t, x) + \epsilon B_n.$$

A terceira afirmação do teorema está demonstrada.

Seja $x_k(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(F_k)$ uma sucessão uniformemente convergente para $x(\cdot)$. Por construção de $F_k(t, x)$ e pela condição (H4) temos que $|\dot{x}_k(t)| \leq b(t)$. Pelo Teorema de Dunford-Pettis, sem perda de generalidade, a sucessão $\dot{x}_k(\cdot)$ converge na topologia fraca do espaço $L_1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ para a função $v(\cdot)$.

Pelo Teorema de Mazur, existe uma sucessão de combinações convexas $\sum_{k=l}^L \lambda_k \dot{x}(\cdot)$ convergente para $v(\cdot)$ na norma L_1 . Sem perda de generalidade a sucessão converge para $v(\cdot)$ para quase todos $t \in [t_0, t_1]$. Fixemos t tal que $\sum_{k=l}^L \lambda_k \dot{x}(t) \rightarrow v(t)$, as $l \rightarrow \infty$. Podemos ver que a igualdade $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(s) ds$ é verificada. Seja $\epsilon > 0$. Vai existir um m tal que $F_m(t, x(t)) \subset F(t, x(t)) + \epsilon B_n$. Consideremos $l > m$ tal que $\dot{x}(t) \in \sum_{k=l}^L \lambda_k \dot{x}_k(t) + \epsilon B_n$ and $F_m(t, x_k(t)) \subset F_m(t, x(t)) + \epsilon B_n$ sempre que $k > l$. Temos que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in \sum_{k=l}^L \lambda_k \dot{x}_k(t) + \epsilon B_n \subset \sum_{k=l}^L \lambda_k F_k(t, x_k(t)) + \epsilon B_n \\ &\subset \sum_{k=l}^L \lambda_k F_m(t, x_k(t)) + \epsilon B_n \subset \sum_{k=l}^L \lambda_k F_m(t, x(t)) + 2\epsilon B_n \\ &\subset F(t, x(t)) + 3\epsilon B_n. \end{aligned}$$

Uma vez que $\epsilon > 0$ é arbitrário e o conjunto $F(t, x(t))$ é fechado, vamos obter $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$, isto é, $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[t_0, t_1]}(F)$. \square

3.3 Aplicações multívocas semi-contínuas superiormente

Como vimos na primeira secção, para inclusões Lipschitzianas a estimativa

$$d_H(\mathcal{S}_{[0, L/\epsilon]}(\epsilon \bar{F}, \bar{x}_0), \mathcal{S}_{[0, L/\epsilon]}(\epsilon F, x_0)) \leq \eta, \quad 0 < \epsilon < \epsilon(\eta) \quad (3.16)$$

é verificada. No entanto, se o problema derivar de uma equação diferencial com segundo membro descontínuo, a aplicação multívoca F obtida pela regularização de Filippov não é Lipschitziana e a estimativa anterior, no geral, deixa de ser válida.

Esta situação ocorre mesmo para sistemas simples, como por exemplo, sistemas que apresentam movimentos deslizantes numa superfície de descontinuidade. Vejamos o seguinte exemplo ilustrativo da situação:

Exemplo 3.3 Consideremos o problema de Cauchy

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(t, (x_1, x_2)) = \begin{cases} v_+(t), & x_2 > 0, \\ v_-(t), & x_2 < 0, \end{cases}$$

com

$$v_+(t) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos t)\right), -\cos\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos t)\right) \right)$$

e

$$v_-(t) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos t)\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}(1 + \cos t)\right) \right).$$

Uma vez que $x \rightarrow f(\cdot, x)$ é descontínua nos pontos $x = (x_1, 0)$, aplicamos a definição de Filippov, e obtemos a seguinte inclusão diferencial:

$$\dot{x} \in \epsilon F(t, x), \quad x(0) = x_0 \tag{3.17}$$

onde a aplicação multívoca $F(t, x)$ é definida por

$$F(t, x) = \begin{cases} f(t, x) & , x_2 \neq 0, \\ I(t) & , x_2 = 0, \end{cases}$$

com $I(t) = \text{cl co}\{v_+(t), v_-(t)\}$. Este segmento intersecta a linha de descontinuidade $x_2 = 0$. O ponto de interseção é o vetor de velocidade ao longo da linha $x_2 = 0$,

$$\begin{aligned} f^0(t) &= I \cap \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}, \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sec\left(\frac{\pi}{4} \cos t\right), 0 \right) \right\}. \end{aligned}$$

O problema (3.17) tem uma única solução que verifica a equação

$$\dot{x} = \epsilon \begin{cases} f(t, x) & , x_2 \neq 0, \\ f^0(t) & , x_2 = 0, \end{cases}.$$

Calculando a aplicação medianizada

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \bar{f}(x) & , x_2 \neq 0, \\ \bar{I} & , x_2 = 0, \end{cases},$$

podemos observar que

$$\bar{I} = \bar{F}((x_1, 0)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, (x_1, 0)) dt \supset ([\alpha, \beta], 0) \ni f^0(t)$$

onde α and β são dados por

$$\alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \min \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} (1 + \cos t) \right), \sin \left(\frac{\pi}{4} (1 + \cos t) \right) \right\} dt$$

e

$$\beta = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \max \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} (1 + \cos t) \right), \sin \left(\frac{\pi}{4} (1 + \cos t) \right) \right\} dt.$$

Logo, temos que

$$\bar{F}(x) \supset \begin{cases} \bar{f}(x) & , x_2 \neq 0, \\ [\alpha, \beta] & , x_2 = 0, \end{cases}$$

onde $\alpha < \beta$. Assim, vemos que a inclusão diferencial (3.17) tem uma única solução $x(t)$ pertencente à linha de descontinuidade e satisfazendo a condição inicial igual a zero, enquanto que a inclusão medianizada tem uma família de soluções. \triangleleft

Este exemplo ilustra que, no caso geral, quando lidamos com aplicações descontínuas, apenas podemos garantir a estimativa unilateral

$$\mathcal{S}_{[0, L/\epsilon]}(\epsilon F, x_0) \subset \mathcal{S}_{[0, L/\epsilon]}(\epsilon \bar{F}, \bar{x}_0) + \eta \mathcal{B}, \quad 0 < \epsilon < \epsilon_0(\eta). \quad (3.18)$$

Como vimos no Capítulo 2, alguns resultados já foram obtidos por Plotnikov, Plotnikov (1996 ii), para o método de medianização em inclusões e equações diferenciais com segundo membro descontínuo, embora as condições impostas sejam muito restritivas para serem aplicadas na prática. Para contornar esta situação, vamos começar por redefinir a aplicação medianizada.

Definição 3.3: Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca. Definimos

$$I(t_1, t_2, x, \delta) = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \mid v(\cdot) \in L_1^{\text{loc}}([0, \infty[, \mathbb{R}^n), v(t) \in F(t, x + \delta B_n) \right\}.$$

Vamos denotar por $\bar{F}^\delta(x)$ o invólucro convexo da aplicação

$$\bar{\Phi}^\delta(x) = \limsup_{\theta \uparrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \theta)T} I(\theta T, T, x, \delta), \quad (3.19)$$

e definir a aplicação medianizada por

$$\bar{F}(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bar{F}^\delta(x). \quad (3.20)$$

◇

De notar que sobre a condição de Lipschitz, a aplicação obtida através da definição anterior coincide com a definição clássica, como é demonstrado na seguinte proposição:

Proposição 3.3 *Seja $F(t, \cdot)$ uma aplicação multívoca que verifica a condição de Lipschitz com uma constante λ , então*

$$\bar{F}(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bar{F}^\delta(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt,$$

se o limite existir.

Demonstração: Suponhamos que

$$\bar{\bar{F}}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, x) dt$$

existe. Neste caso temos

$$I(\theta T, T, x, 0) \subset I(\theta T, T, x, \delta) \subset I(\theta T, T, x, 0) + \lambda \delta (1 - \theta) T B_n,$$

onde λ é a constante de Lipschitz da aplicação $F(t, \cdot)$. Da inclusão anterior podemos obter

$$\limsup_{\theta \uparrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \theta)T} \int_{\theta T}^T F(t, x) dt \subset \bar{\Phi}^\delta(x) \quad (3.21)$$

e

$$\bar{\Phi}^\delta(x) \subset \limsup_{\theta \uparrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(1 - \theta)T} \int_{\theta T}^T F(t, x) dt + \lambda \delta B_n \right) \quad (3.22)$$

Da Proposição 3.2 sabemos que

$$\limsup_{\theta \uparrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \theta)T} \int_{\theta T}^T F(t, x) dt = \bar{\bar{F}}(x).$$

Juntando esta igualdade com (3.21) e (3.22), temos que $\bar{\bar{F}}(x) \subset \bar{\Phi}^\delta(x) \subset \bar{\bar{F}}(x) + \lambda \delta B_n$. Isto implica a igualdade $\bar{F}(x) = \bar{\bar{F}}(x)$. □

Mostremos também que a aplicação \bar{F} não pode ser substituída pela aplicação $\bar{\Phi}^0$, se quisermos garantir a existência de soluções da inclusão diferencial medianizada.

Exemplo 3.4 Consideremos a aplicação $F : [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t, x) = \begin{cases} \{1\}, & x \in]-\infty, -2/(t+1)[, \\ \{-1 - (t+1)x\}, & x \in [-2/(t+1), 1/(t+1)], \\ \{-2\}, & x \in]1/(t+1), \infty[. \end{cases}$$

Aplicando a definição 3.3, obtemos

$$\bar{\Phi}^0(x) = \begin{cases} \{1\}, & x < 0, \\ \{-1\}, & x = 0, \\ \{-2\}, & x > 0. \end{cases}$$

O problema de Cauchy $\dot{x} \in \bar{\Phi}^0(x)$, $x(0) = 0$, não tem solução. A aplicação

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} \{1\}, & x < 0, \\ [-2, 1], & x = 0, \\ \{-2\}, & x > 0, \end{cases}$$

tem imagens convexas e o problema de Cauchy $\dot{x} \in \bar{F}(x)$, $x(0) = 0$, tem uma solução. \triangleleft

Vamos agora estender o primeiro Teorema de Bogoliubov a inclusões com a segundo membro semi-contínuo superiormente.

Teorema 3.3 *Seja $L > 0$, $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca que satisfaz as condições (H1) - (H5). Então, para qualquer $\eta > 0$ existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ e qualquer solução $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, L/\epsilon]}(\epsilon F, C)$, existe uma solução $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, L/\epsilon]}(\epsilon \bar{F}, C)$ que satisfaz*

$$|x(t) - \bar{x}(t)| < \eta, \quad t \in [0, L/\epsilon].$$

A ideia base da demonstração desta generalização do primeiro Teorema de Bogoliubov para inclusões semi-continuas superiormente, consiste na utilização do teorema de aproximação da secção anterior. Concretamente, aplicando o Teorema 3.2, podemos construir uma sucessão de aplicações multívocas F_k que se aproximam da aplicação multívoca F e satisfazem a condição de Lipschitz. De facto, recorrendo a esse resultado, vamos criar uma aproximação do conjunto das soluções da inclusão não autónoma, por uma sucessão decrescente de conjuntos de soluções de inclusões diferenciais Lipschitzianas para as quais podemos aplicar a primeira parte do Teorema 3.1. Começemos por demonstrar o seguinte lema.

Lema 3.5 Se a sucessão de soluções $x_k(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(\bar{F}_k, C)$, converge uniformemente para $x(\cdot)$, então a inclusão $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(\bar{F}, C)$ é verificada.

Demonstração: Seja $\delta > 0$. Podemos ver que $\bar{F}_k(x) \subset \bar{F}^\delta(x)$, para todo $k > K(x, \delta)$. Argumentando como na última parte da demonstração do Teorema 3.2, vemos que, dado $\eta > 0$, para quase todo t existem números inteiros positivos k_1 e k_2 , e números não negativos l_k tais que $\sum_k l_k = 1$ e a inclusão seguinte é verificada:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in \sum_{k=k_1}^{k_2} l_k \dot{x}_k(t) + \eta B_n \subset \sum_{k=k_1}^{k_2} l_k \bar{F}_k(x_k(t)) + \eta B_n \\ &\subset \sum_{k=k_1}^{k_2} l_k \bar{F}_{k_1}(x_k(t)) + \eta B_n \subset \sum_{k=k_1}^{k_2} l_k \bar{F}^\delta(x(t)) + \eta B_n \\ &= \bar{F}^\delta(x(t)) + \eta B_n. \end{aligned}$$

Uma vez que $\eta > 0$ é arbitrário, temos que $\dot{x}(t) \in \bar{F}^\delta(x(t))$ para todo $\delta > 0$. Como consequência $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(\bar{F}, C)$. \square

Recordemos as notações para as seguintes aplicações multívocas introduzidas anteriormente

$$G_\epsilon(\tau, y) \equiv F(\tau/\epsilon, y) \text{ e } G_0(y) \equiv \bar{F}(y).$$

onde $\tau = \epsilon t$. De um modo semelhante definimos as seguintes aplicações multívocas associadas às aplicações Lipschitzianas F^k e \bar{F}^k :

$$G_\epsilon^k(\tau, y) \equiv F^k(\tau/\epsilon, y) \text{ e } G_0^k(y) \equiv \bar{F}^k(y).$$

Estamos agora prontos para demonstrar o Teorema 3.3.

Demonstração (Teorema 3.3): Suponhamos que existem um $\eta > 0$, uma sucessão $\epsilon_j \downarrow 0$, e soluções $y_{\epsilon_j}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_{\epsilon_j}, C)$ que satisfazem $y_{\epsilon_j}(\cdot) \notin \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C) + 2\eta\mathcal{B}$. Uma vez que

$$\mathcal{S}_{[0,L]}(G_{\epsilon_j}, C) \subset \mathcal{S}_{[0,L]}(G_{\epsilon_j}^k, C),$$

temos que $y_{\epsilon_j}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_{\epsilon_j}^k, C)$. Do Teorema 3.1 podemos ver que para qualquer k existe um j_k tal que

$$y_{\epsilon_{j_k}}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0^k, C) + \eta\mathcal{B}.$$

Logo, as funções $y_{\epsilon_{j_k}}(\cdot)$ podem ser representadas na forma $y_{\epsilon_{j_k}}(\cdot) = z_{\epsilon_{j_k}}(\cdot) + \xi_{j_k}(\cdot)$, onde $z_{\epsilon_{j_k}}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0^k, C)$ e $\xi_{j_k}(\cdot) \in \eta\mathcal{B}$. Pelo Teorema de Arzela-Ascoli, sem

perda de generalidade, as sucessões $y_{\epsilon_{j_k}}(\cdot)$ e $z_{\epsilon_{j_k}}(\cdot)$ convergem uniformemente para as funções $y(\cdot)$ e $z(\cdot)$, respetivamente. Isto implica que a sucessão $\xi_{j_k}(\cdot)$ converge uniformemente para uma função $\xi(\cdot) \in \eta\mathcal{B}$. Pelo Lema 3.5 temos que

$$z(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C),$$

e portanto temos

$$y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C) + \eta\mathcal{B}.$$

Logo, $y_{\epsilon_{j_k}}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,L]}(G_0, C) + 2\eta\mathcal{B}$ sempre que k é suficientemente grande. Esta contradição demonstra o teorema. \square

Vejamos um exemplo simples de aplicação do método de medianização.

Exemplo 3.5 Consideremos o seguinte problema

$$\dot{x} = \epsilon(e^{-x^2} \sin(t) - \text{sgn}(x)), \quad x(0) = 1, \quad (3.23)$$

Aplicando o procedimento de Filippov temos a inclusão diferencial

$$\dot{x} \in \epsilon(e^{-x^2} \sin(t) - \text{Sgn}(x)), \quad x(0) = 1. \quad (3.24)$$

Medianizando o segundo membro da inclusão anterior obtemos:

$$\bar{F}(x) = -\epsilon \text{Sgn}(x).$$

Por conseguinte, a inclusão medianizada é dada por:

$$\dot{\bar{x}} \in -\epsilon \text{Sgn}(\bar{x}), \quad \bar{x}(0) = 1. \quad (3.25)$$

Esta inclusão é igual à tratada no exemplo 1.1 e portanto podemos determinar a solução do problema medianizado na sua forma fechada. Pelo Teorema 3.3 sabemos que, para quaisquer η e L positivos, existe um ϵ_0 para o qual a distância entre as soluções dos dois problemas se mantêm inferior a η para todo $t \in [0, L/\epsilon]$ e $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$. \triangleleft

Capítulo 4

Estabilidade

Como vimos nos capítulos anteriores, o primeiro Teorema de Bogoliubov valida a aplicação do método de medianização, permitindo obter uma estimativa para a proximidade das soluções das inclusões

$$\dot{x} \in \epsilon F(t, x), \quad (4.1)$$

e

$$\dot{\bar{x}} \in \epsilon \bar{F}(\bar{x}), \quad (4.2)$$

no intervalo de tempo da forma $[0, L/\epsilon]$, para um dado L e um ϵ suficientemente pequeno.

Em muitos problemas práticos, garantida a estimativa anterior, surge a questão de saber sob que condições e que propriedades das soluções da inclusão medianizada (4.2) podem ser passadas às soluções da inclusão original (4.1). Em particular, o método de medianização é muito utilizado na análise da estabilidade de sistemas não autónomos, uma vez que o seu estudo em sistemas autónomos é bastante mais simples que a análise de estabilidade em sistemas não autónomos. Um dos resultados que justifica esta abordagem em equações diferenciais é o Teorema de Samoilenko-Stanzhitskii.

Neste capítulo vamos estender o Teorema de Samoilenko-Stanzhitskii a inclusões diferenciais, e mostrar que, quando uma posição de equilíbrio da inclusão medianizada é assintoticamente estável, então as trajetórias da inclusão original mantêm-se numa vizinhança da origem e a estimativa de proximidade das soluções dos dois problemas, obtida pelo Teorema de Bogoliubov, pode ser prolongada ao intervalo de tempo $[0, +\infty[$.

Estes resultados serão posteriormente estendidos a inclusões com posições de equilíbrio parcialmente estáveis na Secção 4.2.

4.1 Estabilidade

Vamos começar esta secção com um exemplo ilustrativo de que, só com conhecimento da estabilidade do sistema medianizado, nada pode ser inferido sobre o comportamento do sistema original.

Exemplo 4.1 (Calvet (1987)) Consideremos seguinte sistema, que pode ser interpretado como um oscilador harmónico forçado em ressonância:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \epsilon x_2, \\ \dot{x}_2 = -\epsilon x_1 + \epsilon \sin(\epsilon t), \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $\epsilon > 0$ é uma constante.

Aplicando o método de medianização ao sistema anterior vamos obter a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \epsilon \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = -\epsilon \bar{x}_1. \end{cases}$$

Como podemos ver, a origem é uma posição de equilíbrio estável do sistema medianizado. De facto o sistema medianizado tem, qualquer que seja a posição inicial, soluções periódicas limitadas, contrastando com as soluções do sistema original que são ilimitadas. \triangleleft

Como podemos constatar no exemplo, a estimativa dada pelo Teorema de Bogoliubov pode falhar no intervalo $[0, +\infty[$. Este mostra, também que, só a estabilidade da inclusão medianizada, nada garante sobre a estabilidade da inclusão original. De facto, necessitamos de uma característica mais forte, estabilidade assintótica do sistema medianizado, de forma a garantir que as soluções da inclusão não medianizada são limitadas e obter estimativas para a proximidade das soluções, válidas para todo o intervalo temporal $[0, +\infty[$.

Como referido anteriormente, para equações diferenciais esse resultado, na sua forma mais geral, é dado pelo Teorema de Samoilenko-Stanzhitskii. Para além de inferir que as soluções da estabilidade da inclusão diferencial original se mantêm numa vizinhança da origem, o resultado garante também que o método de medianização é válido para um intervalo de tempo infinito, ou seja, garante que podemos também estender a proximidade das soluções de (4.1) e (4.2) ao intervalo $[0, +\infty[$.

Para generalizar o resultado de Samoilenko & Stanzhitskii (2006) para inclusões diferenciais necessitamos do seguinte lema, que é uma consequência do Lema 1 da Secção 15 de Filippov (1988).

Assumindo que $\bar{y} = 0$ é uma posição de equilíbrio assintoticamente estável da inclusão medianizada $\dot{\bar{y}} \in G_0(\bar{y})$, temos o seguinte resultado

Lema 4.1 Para qualquer $\eta > 0$ existem $\delta \in]0, \eta[$ e $T > 0$ tais que, todas as soluções $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(G_0, \delta B_n)$ satisfazem as inclusões $\bar{y}(\cdot) \in (\eta/2)\mathcal{B}$ e $\bar{y}(T) \in (\delta/2)B_n$.

Demonstração: Seja $\eta > 0$. A primeira inclusão segue da definição de posição de equilíbrio assintoticamente estável, Definição 1.11. Mostramos agora que existe um $\delta > 0$ e um $T > 0$ tais que $\bar{y}(T) \in (\delta/2)B_n$ para qualquer solução $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(G_0, \delta B_n)$. Suponhamos o contrário, ou seja, vamos assumir que para todo o $\delta \in]0, \eta[$, existem uma sucessão de pontos $t_k \rightarrow \infty$ e uma sucessão de soluções $\bar{y}_k(\cdot)$ tais que $\bar{y}_k(0) \in \delta B_n$ e

$$|\bar{y}_k(t_k, \bar{y}_k(0))| > \frac{\delta}{2},$$

para $k = 1, 2, \dots$. Uma vez que estamos a assumir que $\bar{y} = 0$ é uma posição de equilíbrio assintoticamente estável, pela Definição 1.11 existe um $\mu = \mu(\delta/2)$ tal que, para todas as soluções que satisfazem $\bar{y}(0) \in \mu B_m$ temos

$$\bar{y}(t, \bar{y}(0)) \in \frac{\delta}{2}B_m, \text{ para } t \in [0, \infty[, \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}(t) = 0. \quad (4.4)$$

Isto implica que para todas as soluções $\bar{y}_k(\cdot)$ a desigualdade

$$|\bar{y}_k(t, \bar{y}_k(0))| \geq \mu, \text{ } t \in [0, t_k], \text{ } k = 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

é verificada. De facto, se existisse um $t' \in [0, t_k]$ para o qual $|\bar{y}_k(t', \bar{y}_k(0))| < \mu$, então a solução $z(t) = y_k(t + t')$ satisfaria a condição $|z(0)| < \mu$ e $z(t_k - t') > \delta/2$, contrariando a escolha de μ . Consideremos o intervalo $[0, t_1]$. Pelas condições (H4) e (H5) temos que $G_0 \subset bB_n$ implicando que $|\dot{\bar{y}}_k(t)| < b$ e $|\bar{y}_k(t)| < \delta + bt_1$ para todo $t \in [0, t_1]$. Logo, a sucessão de soluções $\bar{y}_k(t)$ é limitada e podemos aplicar o teorema de Arzela-Ascoli. Assim, da sucessão de soluções $\bar{y}_k(\cdot)$ escolhemos uma sub-sucessão uniformemente convergente no intervalo $[0, t_1]$. Desta, podemos escolher outra sub-sucessão que, por sua vez, é convergente em $[0, t_2]$, e assim por diante. A solução limite verifica

$$|\bar{y}(t, \bar{y}(0))| \geq \mu, \text{ para } t \in [0, \infty[.$$

Isto contradiz (4.4) e mostra que existe um $T > 0$ para o qual a inclusão $\bar{y}(T) \in (\delta/2)B_n$ é verificada sempre que $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(G_0, \delta B_n)$. \square

Juntando o primeiro teorema de Bogoliubov, Teorema 3.3, e o lema anterior, podemos demonstrar uma versão multívoca do Teorema de Samoilenko-Stanzhit-skii,

Teorema 4.1 Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca que verifica as condições (H1) - (H5). Seja $\bar{y} = 0$ uma posição de equilíbrio assintoticamente estável da inclusão diferencial $\dot{\bar{y}} \in G_0(\bar{y})$. Então, para qualquer $\eta > 0$ existem um $\epsilon_0 > 0$ e um $\delta > 0$ tais que $\mathcal{S}_{[0, \infty[}(G_\epsilon, \delta B_n) \subset \eta\mathcal{B}$, sempre que $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$.

Demonstração: Seja $\eta > 0$. Aplicando o Lema 4.1 podemos encontrar um $\delta \in]0, \eta[$ e um $T > 0$ que verificam as conclusões do mesmo. Do Teorema 3.3, podemos ver que existe um ϵ_0 tal que para qualquer solução $y(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(G_\epsilon, \delta B_n)$, com $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, existe uma solução $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(G_0, \delta B_n)$ que satisfaz a inclusão $y(\cdot) \in \bar{y}(\cdot) + (\delta/2)\mathcal{B}$.

Uma vez que $\bar{y}(\cdot) \in (\eta/2)\mathcal{B}$ e $\bar{y}(T) \in (\delta/2)B_n$, temos que $y(\cdot) \in (\eta/2 + \delta/2)\mathcal{B} \subset \eta\mathcal{B}$ e $y(T) \in \delta B_n$. Aplicando esta construção aos intervalos $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, etc., obtemos o resultado. \square

Para ilustrar o Teorema 4.1 consideremos o seguinte exemplo

Exemplo 4.2 Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos a função

$$f_0(x) = \begin{cases} (1, -1), & x_1 > 0, x_2 > 0, \\ (-1, 1/2), & x_1 > 0, x_2 < 0, \\ (-1, 1), & x_1 < 0, x_2 < 0, \\ (1, -1/2), & x_1 < 0, x_2 > 0, \end{cases}$$

e definimos a aplicação multívoca $F_0(x) = \bigcap_{\delta > 0} \text{cl co } f_0(x + \delta B_2)$ e $F(t, x) = F_0(x) + \{(\sin t, \cos t)\}$. Podemos ver que $\bar{F}(x) = F_0(x)$ e $0 \in \bar{F}(0)$. A posição de equilíbrio da inclusão medianizada é assintoticamente estável. Logo, as soluções da inclusão diferencial $\dot{x} \in \epsilon F(t, x)$ são limitadas para todo $t \geq 0$, sempre que $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. \triangleleft

4.2 Estabilidade Parcial

Como referido no Capítulo 1, existem sistemas, nos quais é importante estudar a estabilidade, não em relação a todas as variáveis, mas só apenas a alguma parte das mesmas. Estes sistemas surgem em muitos contextos práticos, desde problemas de controlo, onde se pretende controlar unicamente parte das variáveis, até no estudo da dinâmica de sistemas mecânicos, ver por exemplo Vorotnikov (2003, 2005). Em particular, no estudo de oscilações não lineares, Bogoliubov & Mitropolski (1961); Nayfeh (1995), a maioria das considerações baseadas no método de medianização, começam por aplicar o método de variação de constantes à equação

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon g(t, x, \dot{x}). \quad (4.6)$$

Quando $\epsilon = 0$ obtemos a solução $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$. Para $\epsilon \neq 0$, efetuamos uma mudança de coordenadas, conhecida como o método de Van der Pol (Nayfeh,

1995, Cap.5), alterando as variáveis x e \dot{x} para A e θ , onde

$$\begin{aligned}x(t) &= A(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)), \\ \dot{x}(t) &= -A(t) \sin(\omega_0 t + \theta(t)).\end{aligned}$$

Reescrevendo as equações, obtemos o seguinte sistema na forma estandardizada:

$$\begin{cases} \dot{A} &= -\epsilon f_1(t, A, \theta) \\ \dot{\theta} &= -\epsilon f_2(t, A, \theta) \end{cases} \quad (4.7)$$

Em muitos problemas, o sistema (4.7) apresenta apenas um ponto de equilíbrio parcial para a amplitude A , ou seja

$$f_1(t, 0, \theta) = 0,$$

nada se pode concluir sobre a evolução do ângulo de fase θ .

Motivados por estes exemplos, nesta secção estudamos o problema de estabilidade parcial, ao qual estendemos o Teorema de Samoilenko-Stanzhitskii. Os resultados são posteriormente ilustrados com um exemplo.

Consideremos a aplicação multívoca da forma $F = F^1 \times F^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, em que F^1 satisfaz as condições (H1)-(H5). Ao sistema de inclusões diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &\in \epsilon F^1(t, x^1, x^2), \\ \dot{x}^2 &\in \epsilon F^2(t, x^1, x^2),\end{aligned} \quad (4.8)$$

vamos associar o sistema medianizado

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}^1 &\in \epsilon \bar{F}^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2), \\ \dot{\bar{x}}^2 &\in \epsilon \bar{F}^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2),\end{aligned} \quad (4.9)$$

onde as aplicações medianizadas são entendidas no sentido da Definição 3.3.

Vamos mostrar que a solução $x(\cdot) = (x^1(\cdot), x^2(\cdot)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ do sistema de inclusões diferenciais (4.8) tem a componente $x^1(\cdot)$ próxima de zero, desde que $0 \in \bar{F}^1(0, \bar{x}^2)$ seja uma posição de equilíbrio parcialmente assintoticamente σ -estável do sistema de inclusões diferenciais medianizadas (4.9).

À semelhança do que foi feito anteriormente, definimos as aplicações

$$G_\epsilon^1(\tau, y^1, y^2) \times G_\epsilon^2(\tau, y^1, y^2) = F^1(\tau/\epsilon, y^1, y^2) \times F^2(\tau/\epsilon, y^1, y^2)$$

e

$$G_0^1(y^1, y^2) \times G_0^2(y^1, y^2) = \bar{F}^1(y^1, y^2) \times \bar{F}^2(y^1, y^2).$$

O seguinte resultado, que tal como o Lema 4.1, garante que para inclusões autónomas, estabilidade parcial assintoticamente σ -estável implica estabilidade parcial uniforme assintoticamente σ -estável.

Lema 4.2 *Seja $\bar{y}^1 = 0$ uma posição de equilíbrio parcialmente assintoticamente σ -estável do sistema de inclusões*

$$\begin{aligned}\dot{\bar{y}}^1 &\in G_0^1(\bar{y}^1, \bar{y}^2), \\ \dot{\bar{y}}^2 &\in G_0^2(\bar{y}^1, \bar{y}^2).\end{aligned}$$

Assuma-se que existem um $\rho_0 > 0$, um $\sigma > 0$ e uma função contínua $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tais que para todo $(\bar{y}^1(0), \bar{y}^2(0)) \in \rho_0 B_m \times \sigma B_p$ a inclusão $\bar{y}^2(t) \in \rho(|\bar{y}^2(0)|) B_p$ é verificada. Então, para qualquer $\eta > 0$ existem um $\delta \in]0, \eta[$ e $T > 0$ tais que todas as soluções $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(G_0, \delta B_m \times \sigma B_p)$ satisfazem as inclusões $\bar{y}^1(\cdot) \in (\eta/2) B_m$ e $\bar{y}^1(T) \in (\delta/2) B_m$.

Demonstração: Seja $\eta > 0$. A primeira inclusão segue da definição de posição de equilíbrio parcialmente assintoticamente σ -estável, Definição 1.13, (i) e (iii), escolhendo $\delta \leq \min\{\mu(\eta/2), \delta_0\}$. Vamos agora mostrar que a segunda inclusão é verdadeira, ou seja, que existem um $\delta > 0$ e um $T > 0$ tais que $\bar{y}^1(T) \in (\delta/2) B_m$ para qualquer solução $\bar{y}(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0, T]}(G_0, \delta B_m \times \sigma B_p)$. Suponhamos o contrário, ou seja, vamos assumir que para todo o $0 < \delta < \eta$, existem uma sucessão de pontos $t_k \rightarrow \infty$ e uma sucessão de soluções $(\bar{y}_k^1(t), \bar{y}_k^2(t))$ tais que $\bar{y}_k^1(0) \in \delta B_m$ e $\bar{y}_k^2(0) \in \sigma B_p$, que verificam

$$|\bar{y}_k^1(t_k, \bar{y}_k^1(0), \bar{y}_k^2(0))| > \frac{\delta}{2},$$

para $k = 1, 2, \dots$. Uma vez que estamos a assumir que $\bar{y}^1 = 0$ é uma posição de equilíbrio parcialmente assintoticamente σ -estável, pela Definição 1.13-(iii) existe um $\mu(\delta/2)$ tal que, para todas as soluções que satisfazem $\bar{y}^1(0) \in \mu B_m$ e $\bar{y}^2(0) \in \sigma B_p$ temos

$$\bar{y}^1(t, \bar{y}^1(0), \bar{y}^2(0)) \in \frac{\delta}{2} B_m, \text{ para } t \in [0, \infty[, \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}^1(t) = 0. \quad (4.10)$$

Isto implica que para todas as soluções $\bar{y}_k^1(\cdot)$ a desigualdade

$$|\bar{y}_k^1(t, \bar{y}_k^1(0), \bar{y}_k^2(0))| \geq \mu(\delta/2), \text{ } t \in [0, t_k], \text{ } k = 1, 2, \dots, \quad (4.11)$$

é verificada. De facto, se existisse um $t' \in [0, t_k]$ para o qual $|\bar{y}_k^1(t', \bar{y}_k^1(0), \bar{y}_k^2(0))| < \mu$, então a solução $z^1(t) = \bar{y}_k^1(t + t')$ satisfaria as condições $|z^1(0)| < \mu$ e $z^1(t_k - t') > \delta/2$, contrariando a escolha de μ . Consideremos o intervalo $[0, t_1]$. Como $\bar{y}_k^2(0) \in \sigma B_p$ e $G_0^1 \subset bB_n$, a sucessão de soluções $(\bar{y}_k^1(t), \bar{y}_k^2(t))$ é limitada em $[0, t_1]$ e podemos aplicar o teorema de Arzela-Ascoli. Assim, da sucessão de soluções $\bar{y}_k^1(\cdot)$ escolhemos uma sub-sucessão uniformemente convergente no intervalo $[0, t_1]$. Desta, podemos escolher outra sub-sucessão que, por sua vez, é convergente em $[0, t_2]$, e assim por diante. A solução limite verifica

$$|\bar{y}^1(t, \bar{y}^1(0), \bar{y}^2(0))| \geq \mu, \text{ para } t \in [0, \infty[.$$

Isto contradiz (4.10) e mostra que existe um $T > 0$ para o qual a inclusão $\bar{y}^1(T) \in (\delta/2)B_m$ é verificada sempre que $(\bar{y}^1(\cdot), \bar{y}^2(\cdot)) \in \mathcal{S}_{[0,T]}(G_0, \delta B_m \times \sigma B_p)$, demonstrando o lema. \square

Agora, estamos em condições para demonstrar o teorema de Samoilenko-Stanzhiskii para posições de equilíbrio parcial de inclusões diferenciais.

Teorema 4.2 *Seja $F = F^1 \times F^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca, na qual a aplicação F^1 satisfaz as condições (H1) - (H5). Assuma que as condições do Lema 4.2 são verificadas. Então, para todo o $\eta > 0$ existem um $\epsilon_0 > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\mathcal{S}_{[0,\infty]}(G_\epsilon^1, \delta B_m) \subset \eta B_m$, sempre que $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$.*

Demonstração: Seja $\eta > 0$. Aplicando o Lema 4.2, podemos construir respectivamente $\delta > 0$ e $T > 0$. Aplicando o Teorema 3.3, vemos que existe um ϵ_0 tal que para qualquer solução $y(\cdot) = (y^1(\cdot), y^2(\cdot)) \in \mathcal{S}_{[0,T]}(G_\epsilon, \delta B_m \times \sigma B_p)$, $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$, existe uma solução $\bar{y}^1(\cdot) \in \mathcal{S}_{[0,T]}(G_0^1, \delta B_m)$ que satisfaz a inclusão $y^1(\cdot) \in \bar{y}^1(\cdot) + (\delta/2)B_m$. Agora, uma vez que $\bar{y}^1(\cdot) \in (\eta/2)B_m$ e $\bar{y}^1(T) \in (\delta/2)B_m$, temos que $y^1(\cdot) \in (\eta/2 + \delta/2)B_m \subset \eta B_m$ e $y^1(T) \in \delta B_m$. Aplicando esta construção aos intervalos $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$, etc., obtemos o resultado. \square

Exemplo 4.3 consideremos a inclusão diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & \in & \epsilon(-\text{Sgn}(x_1) + 2\cos(x_2)\sin(t)) \\ \dot{x}_2 & = & \epsilon(1 + 2\sin(x_1)\cos(t)) \end{cases} \quad (4.12)$$

A inclusão medianizada é:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 & \in & -\epsilon\text{Sgn}(\bar{x}_1) \\ \dot{\bar{x}}_2 & = & \epsilon \end{cases} \quad (4.13)$$

Como podemos constatar, $\bar{x}_1 = 0$ é uma posição de equilíbrio parcialmente assintoticamente σ -estável da inclusão (4.13). Logo, pelo Teorema 4.2, existe um ϵ_0 para o qual a primeira componente das soluções da inclusão (4.12) se mantêm numa η -vizinhança de $x_1 = 0$, para todo $t \geq 0$ e $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$. \triangleleft

Capítulo 5

Estabilidade Fraca

Neste capítulo iremos aplicar o método de medianização ao estudo da estabilidade fraca recorrendo ao Teorema 4.1 do último capítulo.

Consideremos a inclusão diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x). \quad (5.1)$$

Suponhamos que $0 \in F(0, t)$, para todo $t \geq 0$.

O estudo da estabilidade fraca é motivado pela análise de sistemas de controlo. Nomeadamente, considerando o sistema de controlo

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U,$$

e verificando-se que $f(t, 0, u_0) = 0$ para algum $u_0 \in U$, torna-se importante saber se existe algum controlo que mantenha o sistema numa vizinhança do ponto de equilíbrio. Nesse sentido, iniciamos a primeira secção com a apresentação de alguns resultados sobre estabilidade exponencial fraca de sistemas de controlo lineares periódicos e ilustramos a sua aplicabilidade com um exemplo prático de controlo do movimento orbital de satélites em formação. Na segunda secção mostramos que a estabilidade exponencial fraca da posição de equilíbrio de uma inclusão diferencial periódica Lipschitziana pode ser inferida da estabilidade exponencial fraca da medianização da sua primeira aproximação. Por fim, na terceira secção, aplicamos o resultado anterior a inclusões diferenciais geradas por sistemas de controlo. Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados em Gama & Smirnov (2012 a,b).

5.1 Estabilidade exponencial fraca de sistemas de controlo lineares

No estudo de problemas de controlo, é possível escrever os sistemas de controlo na linguagem das inclusões diferenciais. Por exemplo, pelo Teorema 1.2, o sistema de controlo linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)u(t), \quad (5.2)$$

é equivalente à inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + K(t), \quad (5.3)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $K(t) = \{v = b(t)u \mid u \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{R}^n$ (os pressupostos técnicos sobre A , $b(\cdot)$, $u(\cdot)$ e $K(\cdot)$ são referidos mais à frente). Com esta abordagem, muitas propriedades dos sistemas de controlo tornam-se mais intuitivas de estudar.

Consideremos o seguinte sistema de controlo

$$\dot{X}(t) = AX(t) + b(t/\epsilon, t)u(t/\epsilon), \quad (5.4)$$

onde $\epsilon > 0$ é um pequeno parâmetro, A é uma matriz $n \times n$, $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua limitada, e $u(t/\epsilon)$ é um controlo sujeito à restrição $u(t/\epsilon) \in \mathbb{R}_+$. Como podemos observar, o sistema (5.4) tem uma escala de tempo rápido e uma escala de tempo lento. Seja $\tau = t/\epsilon$ e $x(\tau) = X(\epsilon\tau)$. Então (5.4) assume a forma

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \epsilon \frac{dX(\epsilon\tau)}{dt} = \epsilon(Ax(\tau) + b(\tau, \epsilon\tau)u(\tau)). \quad (5.5)$$

É de notar que, embora se verifique um abuso de notação com a utilização para o tempo rápido da mesma letra τ utilizada previamente para representar o tempo lento, a notação agora introduzida será mantida ao longo deste capítulo.

Seja K um cone convexo fechado, satisfazendo

$$K \subset \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau, \epsilon\tau)u(\tau)d\tau \mid u(\tau) \geq 0, u(\cdot) \in L_\infty([0, \infty[, \mathbb{R}) \right\}.$$

Consideremos o sistema de controlo medianizado associado

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \epsilon(A\bar{x} + \bar{v}), \quad \bar{v} \in K. \quad (5.6)$$

Seja $\bar{x} = 0$ uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável do sistema (5.6). Pelo Teorema 1.4, existe um poliedro \mathfrak{M} , com vértices $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$,

para o qual temos que $0 \in \mathfrak{M}$ e números $h > 0$ e $\delta \in [0, 1[$ tais que para todo k , vai existir um vetor $\bar{v}_k \in K$, que satisfaz

$$\bar{x}_k + h\epsilon(A\bar{x}_k + \bar{v}_k) \in (1 - \delta h)\mathfrak{M}.$$

Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Vamos construir as aplicações multívocas

$$\Theta(\bar{x}) = \left\{ (\theta_1, \dots, \theta_m) \mid \sum_{k=1}^m \theta_k \bar{x}_k = \bar{x}, \sum_{k=1}^m \theta_k = \mu(\bar{x}), \theta_k \geq 0 \right\},$$

e

$$\bar{U}(\bar{x}) = \left\{ \bar{v} = \sum_{k=1}^m \theta_k \bar{v}_k \mid (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta(\bar{x}) \right\}, \quad (5.7)$$

onde $\mu(\cdot)$ é a função de Minkowski do poliedro \mathfrak{M} . Para demonstrar os resultados principais que vamos apresentar neste capítulo, vamos necessitar do seguinte lema:

Lema 5.1 *A aplicação multívoca $\bar{U}(\cdot)$ tem imagens compactas convexas e o seu gráfico é fechado.*

Demonstração: Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$. Da homogeneidade da função de Minkowski temos

$$\alpha\Theta(\bar{x}) = \Theta(\alpha\bar{x}), \quad (5.8)$$

i.e., $\bar{U}(\cdot)$ é positivamente homogênea. Se $\bar{v}^1, \bar{v}^2 \in \bar{U}(\bar{x})$ e $\lambda \in [0, 1]$, então temos que

$$\lambda\bar{v}^1 + (1 - \lambda)\bar{v}^2 = \sum_{k=1}^m (\lambda\theta_k^1 + (1 - \lambda)\theta_k^2)\bar{v}_k,$$

onde θ_k^j verifica $\sum_{k=1}^m \theta_k^j \bar{x}_k = \bar{x}$, $\sum_{k=1}^m \theta_k^j = \mu(\bar{x})$ e $\theta_k^j \geq 0$, $j = 1, 2$. Uma vez que

$$\begin{aligned} \lambda\theta_k^1 + (1 - \lambda)\theta_k^2 &\geq 0, \quad \lambda \in [0, 1], \\ \sum_{k=1}^m (\lambda\theta_k^1 + (1 - \lambda)\theta_k^2)\bar{x}_k &= \lambda\bar{x} + (1 - \lambda)\bar{x} = \bar{x}, \\ \sum_{k=1}^m (\lambda\theta_k^1 + (1 - \lambda)\theta_k^2) &= \lambda\mu(\bar{x}) + (1 - \lambda)\mu(\bar{x}) = \mu(\bar{x}), \end{aligned}$$

temos $\lambda\bar{v}^1 + (1 - \lambda)\bar{v}^2 \in \bar{U}(\bar{x})$, sempre que $\lambda \in [0, 1]$, i.e. a aplicação multívoca tem imagens convexas.

Se $\bar{v}^i \in \bar{U}(\bar{x}^i)$, $\sum_{k=1}^m \theta_k^i \bar{x}_k = \bar{x}^i$, $\sum_{k=1}^m \theta_k^i = \mu(\bar{x}^i)$, $\theta_k^i \geq 0$, e $\bar{x}^i \rightarrow \bar{x}$, $\bar{v}^i \rightarrow \bar{v}$ para $i \rightarrow \infty$, então, sem perda de generalidade, $\theta_k^i \rightarrow \theta_k$. Uma vez que $\mu(\cdot)$ é Lipschitziana, passando ao limite quando $i \rightarrow \infty$, vemos que

$$\sum_{k=1}^m \theta_k \bar{x}_k = \bar{x}, \quad \sum_{k=1}^m \theta_k = \mu(\bar{x}), \quad \theta_k \geq 0.$$

Logo, o gráfico de $\bar{U}(\cdot)$ é fechado. Uma vez que $\bar{U}(\cdot)$ é uma aplicação limitada, isto significa que $\bar{U}(\cdot)$ é semi-contínua superiormente. \square

Assumindo que a origem é uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável do sistema (5.6), podemos mostrar a estabilidade exponencial fraca do sistema (5.5).

Teorema 5.1 *Seja $\bar{x} = 0$ uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável do sistema (5.6). Então, existe um $\epsilon_0 > 0$ para o qual $x = 0$ é uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável do sistema (5.5), para todo $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.4, existe um poliedro $\mathfrak{M} = \text{co}\{\bar{x}_k\}$ e números $h > 0$ e $\delta \in [0, 1[$ tais que para todo k , vai existir um vetor $\bar{v}_k \in K$, que satisfaz

$$\bar{x}_k + h\epsilon(A\bar{x}_k + \bar{v}_k) \in (1 - \delta h)\mathfrak{M}.$$

Para um $\gamma > 0$ suficientemente pequeno temos que

$$\bar{x}_k + h\epsilon(A\bar{x}_k + \bar{v}_k + \gamma x_k) \in \left(1 - \frac{\delta h}{2}\right)\mathfrak{M}.$$

para todo o $k = \overline{1, m}$. Consideremos a inclusão diferencial

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} \in \epsilon(A\bar{z} + \gamma\bar{z} + \bar{U}(\bar{z})), \quad (5.9)$$

onde a aplicação multívoca $\bar{U}(\cdot)$ é definida pela igualdade (5.7). Seja $\bar{z}(\cdot)$ uma solução da inclusão (5.9). A função $\mu(\bar{z}(\tau))$ é absolutamente contínua. Seja τ um ponto para o qual as derivadas

$$\frac{d\mu(\bar{z}(\tau))}{d\tau} \quad \text{e} \quad \frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} \in \epsilon(A\bar{z}(\tau) + \gamma\bar{z}(\tau) + \bar{U}(\bar{z}(\tau))),$$

existem. Então, existe um $\bar{v}(\tau) \in \bar{U}(\bar{z}(\tau))$ para o qual temos

$$\frac{d\bar{z}(\tau)}{d\tau} = \epsilon(A\bar{z}(\tau) + \gamma\bar{z}(\tau) + \bar{v}(\tau)). \quad (5.10)$$

Para além disso, temos que

$$\bar{z}(\tau) + h\epsilon(A\bar{z}(\tau) + \gamma\bar{z}(\tau) + \bar{v}(\tau)) = \bar{z}(\tau) + h\epsilon\left(A\bar{z}(\tau) + \gamma\bar{z}(\tau) + \sum_{k=1}^m \theta_k \bar{v}_k\right),$$

onde $(\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta(\bar{z}(\tau))$. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} & \bar{z}(\tau) + h\epsilon(A\bar{z}(\tau) + \gamma\bar{z}(\tau) + \bar{v}(\tau)) = \\ & = \sum_{k=1}^m \theta_k (\bar{x}_k + h\epsilon(A\bar{x}_k + \gamma\bar{x}_k + \bar{v}_k)) \in \left(1 - \frac{\delta h}{2}\right) \mu(\bar{x}(\tau)) \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Da última igualdade temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \mu(\bar{z}(\tau)) & \leq \frac{\mu(\bar{z}(\tau) + h\epsilon(A\bar{z}(\tau) + \gamma\bar{z}(\tau) + \bar{v}(\tau)) - \mu(\bar{z}(\tau))}{h} \\ & \leq \frac{(1 - \frac{\delta h}{2}) \mu(\bar{x}(\tau)) - \mu(\bar{x}(\tau))}{h} \\ & = -\frac{\delta}{2} \mu(\bar{z}(\tau)). \end{aligned}$$

Logo obtemos

$$\mu(\bar{z}(\tau)) \leq \mu(\bar{z}(0)) e^{-\frac{\delta \tau}{2}}.$$

Isto implica que $\bar{z} = 0$ é uma posição de equilíbrio assintoticamente estável da inclusão (5.9). Consideremos a inclusão diferencial

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} \in \epsilon(Az(\tau) + \gamma z(\tau) + W(z(\tau), \tau)), \quad (5.11)$$

onde

$$W(z, \tau) = \left\{ w = \sum_{k=1}^m \theta_k b(\tau, \epsilon\tau) u_k(\tau) \mid (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta(z) \right\},$$

e a função $u_k(\cdot) \in L_\infty([0, \infty[, \mathbb{R}_+)$, $k = \overline{1, m}$, satisfaz

$$\bar{v}_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau, \epsilon\tau) u_k(\tau) d\tau.$$

Tal como no Lema 5.1, podemos mostrar que o conjunto $W(z, \tau)$ é compacto e convexo para todos (z, τ) e a aplicação multívoca $W(\cdot, \tau)$ é semi-contínua superiormente. De facto, temos que as condições do Teorema 4.1 são satisfeitas e logo, existe um número $\epsilon_0 > 0$ tal que as soluções da inclusão (5.11) são limitadas sempre que $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$.

Seja $z(\cdot)$ uma solução da inclusão (5.11). Consideremos $z(\tau) = e^{\gamma\epsilon\tau} x(\tau)$. Então, vamos obter

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = \gamma\epsilon e^{\gamma\epsilon\tau} x(\tau) + e^{\gamma\epsilon\tau} \frac{dx(\tau)}{d\tau}.$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = \epsilon \left(Az + \gamma z(\tau) + \sum_{k=1}^m \theta_k(\tau) b(\tau, \epsilon\tau) u_k(\tau) \right),$$

onde $(\theta_1(\tau), \dots, \theta_m(\tau)) \in \Theta(z(\tau))$. Logo, vamos obter

$$\begin{aligned} \frac{dx(\tau)}{d\tau} &= \epsilon \left(Ax(\tau) + \sum_{k=1}^m e^{-\epsilon\gamma\tau} \theta_k(\tau) b(\tau, \epsilon\tau) u_k(\tau) \right) \\ &= \epsilon \left(Ax(\tau) + \sum_{k=1}^m \tilde{\theta}_k(\tau) b(\tau, \epsilon\tau) u_k(\tau) \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde $(\tilde{\theta}_1(\tau), \dots, \tilde{\theta}_m(\tau)) \in \Theta(x(\tau))$.

Uma vez que as soluções da inclusão (5.11) são limitadas, i.e. existe um $c > 0$ para o qual temos que $|z(\tau)| \leq c|z(0)|$ para todo $\tau \geq 0$, as soluções da equação (5.12) satisfazem a desigualdade

$$|x(\tau)| \leq c|x(0)|e^{-\gamma\epsilon\tau}.$$

Logo, $x = 0$ é uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável da inclusão

$$\frac{dx}{d\tau} \in \epsilon(Ax + b(\tau, \epsilon\tau)\mathbb{R}_+). \quad (5.13)$$

□

Seguidamente apresentamos o segundo resultado desta secção. Consideremos o sistema

$$\dot{X}(t) = AX(t) + a(t) + b(t/\epsilon, t)u(t/\epsilon), \quad (5.14)$$

onde $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua limitada, i.e. satisfaz a condição $|a(t)| \leq a$ para todo $t \geq 0$. Utilizando o resultado anterior, podemos mostrar que existe um controlo admissível que leva o sistema (5.14) do estado X_0 para uma δ -vizinhança do estado X_1 , qualquer que seja o par $(X_0, X_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.2 *Seja $X = 0$ uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável do sistema (5.4) e seja $\delta > 0$. Se $|e^{\pm At}| \leq Q(1 + t^p)$, com $Q > 0$ e $p \geq 1$, então existem um $\epsilon_0 > 0$ e um $T > 0$, tais que para qualquer par $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$ vai existir uma trajetória $X(\cdot)$ de (5.14) satisfazendo*

$$X(0) = X_0 \text{ e } X(T) \in X_1 + \delta B_n,$$

sempre que $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$.

Demonstração: Consideremos o par $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. Seja

$$\tilde{X}_0 = X_0 - e^{-AT} X_1 + \int_0^T e^{-As} a(s) ds.$$

Uma vez que $|e^{\pm At}| \leq Q(1 + t^p)$, com $p \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} |\tilde{X}_0| &\leq |X_0| + Q(1 + T^p)|X_1| + aQ \int_0^T (1 + s^p) ds \\ &= |X_0| + Q(1 + T^p)|X_1| + aQ \left(T + \frac{T^{p+1}}{p+1} \right). \end{aligned}$$

Seja

$$\phi(T) \equiv |X_0| + Q(1 + T^p)|X_1| + aQ \left(T + \frac{T^{p+1}}{p+1} \right).$$

Uma vez que a origem é uma posição de equilíbrio exponencialmente estável do sistema (5.4), vemos que existe um controle $\hat{u}(\cdot) \geq 0$ para o qual a trajetória correspondente do sistema (5.4) com posição inicial \tilde{X}_0 satisfaz a desigualdade

$$|\hat{X}(T)| \leq ce^{-\gamma T} \phi(T) < \delta,$$

sempre que T é suficientemente grande. Logo, temos que

$$e^{AT} \left(X_0 - e^{-AT} X_1 + \int_0^T e^{-As} a(s) ds \right) + \int_0^T e^{A(T-s)} b(s/\epsilon, s) \hat{u}(s) ds \in \delta B_n.$$

Desta última inclusão segue que

$$e^{AT} X_0 + \int_0^T e^{A(T-s)} (a(s) + b(s/\epsilon, s) \hat{u}(s)) ds \in X_1 + \delta B_n$$

e o teorema está demonstrado □

Seguidamente, aplicamos os resultados anteriores a um problema de controlo de movimento de uma formação de satélites.

Exemplo 5.1 Consideremos a modificação das equações de Hill-Clohessy-Wiltshire introduzidas em Schweighart & Sedwick (2002), para contemplar o efeito

do harmónico J_2 no movimento relativo de dois satélites com órbitas quase circulares:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2nc\dot{z} &= u(t)e_x(t), \\ \ddot{y} + q^2y &= 2lq \cos(qt + \phi) + u(t)e_y(t), \\ \ddot{z} - 2nc\dot{x} - (5c^2 - 2)n^2z &= u(t)e_z(t).\end{aligned}$$

A linearização é feita em relação à órbita circular de referência com movimento médio n . Consideramos que x , y e z são as coordenadas do satélite secundário (controlável) relativas ao referencial orbital $Oxyz$, onde O é o centro de massa do satélite principal (passivo). Os eixos são escolhidos do seguinte modo: Oz indica a direção radial do centro da Terra ao centro de massa do satélite principal, Ox está direcionado ao longo da velocidade do ponto O , e y é normal ao plano orbital. Os coeficientes c , q , l e ϕ são constantes do problema (ver Schweighart & Sedwick (2002) para uma descrição detalhada dos mesmos). A direção da força (controlo) $u(t)$ é definida pela função vetorial

$$e(t) = (e_x(t), e_y(t), e_z(t))'.$$

Em Guerman et al. (2012), os autores consideraram o movimento de dois satélites em formação. Foi assumido que o satélite principal tem um movimento passivo, enquanto o satélite secundário apresenta uma distribuição de massa com simetria esférica, está rotacionalmente estabilizado, e está equipado com um propulsor orientado ao longo do eixo de rotação. Aqui, vamos assumir que o propulsor está orientado ortogonalmente ao eixo de rotação. Seja Λ o ângulo entre o eixo de rotação e o vetor que está apontado na direção do equinócio de Verão, e ϕ a inclinação, relativamente ao equador terrestre, do plano contendo estes vetores. Então, no referencial inercial centrado no centro Terra o eixo de rotação tem componentes $(\cos \Lambda, \sin \Lambda \cos \phi, \sin \Lambda \sin \phi)^T$. No referencial $Oxyz$ as mesmas expressões tomam a forma

$$s_x(t) = \sigma_z \sin \theta(t) - \sigma_x \cos \theta(t),$$

$$s_y = -\sigma_y,$$

$$s_z(t) = -\sigma_x \sin \theta(t) - \sigma_z \cos \theta(t).$$

Aqui, o vetor $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ define a direção do eixo de rotação do nodo ascendente da órbita através da inclinação i e da ascensão reta Ω :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \cos \Omega \cos i \sin \Lambda \cos \phi - \sin \Omega \cos i \cos \Lambda + \sin i \sin \Lambda \sin \phi, \\ \sigma_y &= -\cos \Omega \sin i \sin \Lambda \cos \phi + \sin \Omega \sin i \cos \Lambda + \cos i \sin \Lambda \sin \phi, \\ \sigma_z &= \cos \Omega \cos \Lambda + \sin \Omega \sin \Lambda \cos \phi.\end{aligned}$$

Seja $\theta(t) = nct$. Vamos assumir que as condições $\sigma_x^2 + \sigma_z^2 \neq 0$ e $\sigma_y \neq 0$ são satisfeitas. O propulsor está orientado ao longo da direção

$$\begin{aligned} e_x(t) &= Q_1(t)s_z(t)\cos(t/\epsilon) + Q_2(t)s_x(t)s_y\sin(t/\epsilon), \\ e_y(t) &= -Q_2(t)(s_x^2(t) + s_z^2(t))\sin(t/\epsilon), \\ e_z(t) &= -Q_1(t)s_x(t)\cos(t/\epsilon) + Q_2(t)s_y s_z(t)\sin(t/\epsilon), \end{aligned}$$

onde ϵ é um pequeno parâmetro,

$$Q_1(t) = \frac{1}{\sqrt{s_x^2(t) + s_z^2(t)}},$$

e

$$Q_2(t) = \frac{1}{\sqrt{s_x^2(t)s_y^2 + (s_x^2(t) + s_z^2(t))^2 + s_y^2 s_z^2(t)}}.$$

Introduzindo as notações

$$\begin{aligned} H &= (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})', \\ a(t) &= (0, 0, 0, 0, 2lq \cos(qt + \phi), 0)', \\ b(t) &= (0, 0, 0, e_x(t), e_y(t), e_z(t))' \end{aligned}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2nc \\ 0 & -q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (5c^2 - 2)n^2 & 2nc & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtemos o sistema

$$\dot{H}(t) = AH(t) + a(t) + b(t/\epsilon, t)u(t/\epsilon),$$

i.e., o sistema (5.14). Introduzindo o tempo rápido $\tau = t/\epsilon$, obtemos o sistema

$$\frac{d\eta(\tau)}{d\tau} = \epsilon(A\eta(\tau) + a(\epsilon\tau) + b(\epsilon\tau, \tau)u(\tau)), \quad u(\tau) \geq 0,$$

onde $\eta(\tau) = H(\epsilon\tau)$. O sistema medianizado é dado por

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\tau} = \epsilon(A\bar{\eta} + \bar{v}), \quad \bar{v} \in K. \quad (5.15)$$

A estrutura do cone K é descrita no seguinte resultado.

Teorema 5.3 Se $\sigma_x^2 + \sigma_z^2 \neq 0$ e $\sigma_y \neq 0$, então $K = (0, 0, 0) \times \mathbb{R}^3$.

Demonstração: Consideremos o controlo

$$u_1(\tau) = \begin{cases} 1 & , \tau \in (\delta, \delta + \eta) + 2\pi k \\ 0 & , \tau \notin (\delta, \delta + \eta) + 2\pi k \end{cases}$$

Medianizando temos que

$$\begin{aligned} (\bar{e}_x^1, \bar{e}_y^1, \bar{e}_z^1)' &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (e_x(\tau), e_y(\tau), e_z(\tau))' u_1(\tau) d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\lfloor T/2\pi \rfloor + 1} \int_{\delta}^{\delta + \eta} (e_x(\tau), e_y(\tau), e_z(\tau))' d\tau. \end{aligned} \quad (5.16)$$

A fim de simplificar a exposição dos resultados, vamos apresentar o calculo do integral de cada componente do vetor (5.16) separadamente. Seja

$$\bar{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}}$$

e

$$\bar{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_z^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)}}.$$

Para a primeira componente obtemos

$$\begin{aligned} I_x^1 &\equiv \int_{\delta}^{\delta + \eta} e_x(\tau) d\tau = \frac{\bar{Q}_1}{(-1 + \epsilon^2 nc^2)} ((\cos(\epsilon(\delta + \eta)nc)(\epsilon\sigma_x nc \cos(\delta + \eta) + \sigma_z \sin(\delta + \eta)) \\ &\quad - \sin(\delta)(\sigma_z \cos(\delta\epsilon nc) + \sigma_x \sin(\delta\epsilon nc)) \\ &\quad + \epsilon nc \cos(\delta)(-\sigma_x \cos(\delta\epsilon nc) + \sigma_z \sin(\delta\epsilon nc)) \\ &\quad + (-\epsilon\sigma_z nc \cos(\delta + \eta) + \sigma_x \sin(\delta + \eta)) \sin(\epsilon(\delta + \eta)nc)) \\ &\quad + \frac{\bar{Q}_2}{(-1 + \epsilon^2 nc^2)} \sigma_y (-\cos(\epsilon(\delta + \eta)nc)(\sigma_x \cos(\delta + \eta) + \epsilon\sigma_z nc \sin(\delta + \eta)) \\ &\quad + \epsilon nc \sin(\delta)(\sigma_z \cos(\delta\epsilon nc) + \sigma_x \sin(\delta\epsilon nc)) \\ &\quad + \cos(\delta)(\sigma_x \cos(\delta\epsilon nc) - \sigma_z \sin(\delta\epsilon nc)) \\ &\quad + (\sigma_z \cos(\delta + \eta) - \epsilon\sigma_x nc \sin(\delta + \eta)) \sin(\epsilon(\delta + \eta)nc)) \end{aligned}$$

Desenvolvendo em série em torno de $\eta = 0$ e desprezando os termos de ordem superior a η temos que

$$I_x^1 = -\bar{Q}_1 \cos(\delta)(\sigma_z \cos(\delta \epsilon n c) + \sigma_x \sin(\delta \epsilon n c)) \\ + \bar{Q}_2 \sin(\delta) \sigma_y (\sigma_x \cos(\delta \epsilon n c) - \sigma_z \sin(\delta \epsilon)) \eta + O(\eta^2).$$

Logo, vamos obter

$$\frac{1}{T} \int_0^T e_x(\tau) u_1(\tau) d\tau = \frac{1}{T} (\lfloor T/2\pi \rfloor + 1) (-\bar{Q}_1 \cos(\delta)(\sigma_z \cos(\delta \epsilon n c) + \sigma_x \sin(\delta \epsilon n c)) \\ + \bar{Q}_2 \sin(\delta) \sigma_y (\sigma_x \cos(\delta \epsilon n c) - \sigma_z \sin(\delta \epsilon)) \eta + O(\eta^2)).$$

Tomando o limite quando $T \rightarrow \infty$ obtemos que

$$\bar{e}_x^1 = \frac{\eta}{2\pi} (-\bar{Q}_1 \cos(\delta)(\sigma_z \cos(\delta \epsilon n c) + \sigma_x \sin(\delta \epsilon n c)) \\ + \bar{Q}_2 \sin(\delta) \sigma_y (\sigma_x \cos(\delta \epsilon n c) - \sigma_z \sin(\delta \epsilon))) + O(\eta^2).$$

Procedendo de modo equivalente para as outras duas componentes do vetor 5.16 vamos obter

$$\bar{e}_y^1 = \frac{\eta}{2\pi} (-\bar{Q}_2 (\sigma_x^2 + \sigma_z^2) \sin(\delta)) + O(\eta^2)$$

e

$$\bar{e}_z^1 = \frac{\eta}{2\pi} (\bar{Q}_1 \cos(\delta)(\sigma_x \cos(\delta \epsilon n c) - \sigma_z \sin(\delta \epsilon n c)) \\ + \bar{Q}_2 \sin(\delta) \sigma_y (\sigma_z \cos(\delta \epsilon n c) + \sigma_x \sin(\delta \epsilon))) + O(\eta^2).$$

Considerando os controlos

$$u_2(\tau) = \begin{cases} 1 & , \tau \in (\delta + 2\pi/3, \delta + 2\pi/3 + \eta) + 2\pi k \\ 0 & , \tau \notin (\delta + 2\pi/3, \delta + 2\pi/3 + \eta) + 2\pi k \end{cases} ,$$

e

$$u_3(\tau) = \begin{cases} 1 & , \tau \in (\delta + 4\pi/3, \delta + 4\pi/3 + \eta) + 2\pi k \\ 0 & , \tau \notin (\delta + 4\pi/3, \delta + 4\pi/3 + \eta) + 2\pi k \end{cases} ,$$

repetimos os cálculos anteriores e obtemos o vetor medianizado para cada um dos controlos, \bar{e}^2 e \bar{e}^3 respetivamente.

Os três vetores obtidos são linearmente independentes e por conseguinte, qualquer que seja o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ existe uma combinação linear dos controlos $u_i(\cdot)$, $i = \overline{1, 3}$, tal que v pode ser descrito por uma combinação linear dos vetores \bar{e}^i , $i = \overline{1, 3}$ e portanto temos que $K = (0, 0, 0) \times \mathbb{R}^3$. \square

Do Teorema 5.3 podemos ver que o sistema medianizado (5.15) é controlável. Logo é fracamente exponencialmente estável. Para além disso, temos que $|e^{\pm At}| \leq Q(1+t)$, para um $Q > 0$. Logo, o Teorema 5.2 pode ser aplicado, o que garante a existência de uma trajetória relativa quase-fechada para a formação dos satélites. \triangleleft

5.2 Estabilidade exponencial fraca para inclusões diferenciais

Nesta secção, mostramos que a estabilidade exponencial fraca da posição de equilíbrio da inclusão diferencial

$$\dot{x} \in \epsilon F(t, x), \quad (5.17)$$

pode ser inferida da estabilidade exponencial fraca da medianização da sua primeira aproximação.

A abordagem adotada difere da clássica, Bogoliubov & Mitropolski (1961); Burd (2007), onde as propriedades de estabilidade do sistema original são obtidas recorrendo à análise da primeira aproximação do sistema medianizado. A medianização da primeira aproximação permite obter condições suficientes de estabilidade exponencial facilmente verificáveis.

Vamos assumir que a aplicação multívoca $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as condições (C1)-(C4) introduzidas na Secção 1.4, isto é:

- (C1) $0 \in F(t, 0), \forall t \geq 0$;
- (C2) a aplicação F é periódica em t com período $T > 0$, i.e., $F(t+T, x) = F(t, x)$ para todos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;
- (C3) a aplicação $F(\cdot, x)$ é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Existe uma função $b(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$ tal que $F(x, t) \subset b(t)B_n$ para todos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;
- (C4) a aplicação $F(t, \cdot)$ é Lipschitziana para todo $t \in [0, T]$, com constante $k(t)$, onde $k(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$.

Seja $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação multívoca satisfazendo as condições (C5)-(C7), introduzidas na secção 1.4, isto é:

- (C5) a aplicação $A(t, \cdot)$ é uma primeira aproximação da aplicação $\text{co}F(t, \cdot)$ em $x = 0$ para todos os valores de t ;

(C6) a aplicação $A(\cdot, x)$ é periódica em t com período $T > 0$, i.e, $A(t + T, x) = A(t, x)$ para todos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$;

(C7) a aplicação $A(\cdot, x)$ é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\text{dom}A(t, \cdot) = \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$,

Definimos o processo convexo medianizado como sendo

$$\bar{A}(\bar{x}) := \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T a(s, \bar{x}) ds \mid a(s, \bar{x}) \in A(s, \bar{x}), a(\cdot, \bar{x}) \in L_1([0, T], \mathbb{R}^n) \right\},$$

e consideramos a inclusão diferencial medianizada associada

$$\dot{\bar{x}} \in \epsilon \bar{A}(\bar{x}), \quad (5.18)$$

Recorrendo aos resultados apresentados na Secção 1.4, estamos em condições de enunciar o resultado principal desta secção.

Teorema 5.4 *Seja $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ um processo convexo não autónomo satisfazendo as condições (C5) - (C7). Suponhamos que $\bar{x} = 0$ é uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável da inclusão (5.18). Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a origem é uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável da inclusão diferencial (5.17).*

Demonstração: Pelo Teorema 1.4, existe um poliedro $\mathfrak{M} = \text{co}\{\bar{x}_k\}$ e números $h > 0$ e $\delta \in [0, 1[$ tais que para todo o k , existe um vetor $\bar{v}_k \in \bar{A}(\bar{x}_k)$, que satisfaz

$$\bar{x}_k + h\epsilon \bar{v}_k \in (1 - \delta h)\mathfrak{M}.$$

Se $\gamma > 0$ for suficientemente pequeno, temos que

$$\bar{x}_k + h\epsilon(\bar{v}_k + \gamma \bar{x}_k) \in \left(1 - \frac{\delta h}{2}\right)\mathfrak{M}.$$

para todo o $k = \overline{1, m}$. Consideremos a inclusão diferencial

$$\frac{d\bar{z}}{dt} \in \epsilon(\bar{U}(\bar{z}) + \gamma \bar{z}), \quad (5.19)$$

onde a aplicação multívoca $\bar{U}(\cdot)$ foi definida através da igualdade (5.7). Seja $\bar{z}(\cdot)$ uma solução da inclusão (5.19). A função $\mu(\bar{z}(t))$ é absolutamente contínua. Seja t um ponto para o qual as derivadas

$$\frac{d\mu(\bar{z}(t))}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{d\bar{z}(t)}{dt} \in \epsilon(\bar{U}(\bar{z}) + \gamma \bar{z}),$$

existem. Então, vai existir uma função $\bar{v}(t) \in \bar{U}(\bar{z}(t))$ tal que

$$\frac{d\bar{z}(t)}{dt} = \epsilon(\bar{v}(t) + \gamma \bar{z}(t)). \quad (5.20)$$

Para além disso, temos que

$$\bar{z}(t) + h\epsilon(\bar{v}(t) + \gamma\bar{z}(t)) = \bar{z}(t) + h\epsilon\left(\sum_{k=1}^m \theta_k \bar{v}_k + \gamma\bar{z}(t)\right),$$

onde $(\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta(\bar{z}(t))$. Logo, vamos obter que

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) + h\epsilon(\bar{v}(t) + \gamma\bar{z}(t)) &= \\ &= \sum_{k=1}^m \theta_k (\bar{x}_k + h\epsilon(\bar{v}_k + \gamma\bar{x}_k)) \in \left(1 - \frac{\delta h}{2}\right) \mu(\bar{z}(t)) \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Do resultado anterior obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mu(\bar{z}(t)) &\leq \frac{\mu(\bar{z}(t) + h\epsilon(\bar{v}(t) + \gamma\bar{z}(t))) - \mu(\bar{z}(t))}{h} \\ &\leq \frac{(1 - \frac{\delta h}{2})\mu(\bar{z}(t)) - \mu(\bar{z}(t))}{h} \\ &= -\frac{\delta}{2} \mu(\bar{z}(t)). \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\mu(\bar{z}(t)) \leq \mu(\bar{z}(0)) e^{-\frac{\delta t}{2}}.$$

Esta desigualdade implica que $\bar{z} = 0$ é uma posição de equilíbrio fracamente assintoticamente estável da inclusão diferencial (5.19). Consideremos a inclusão diferencial

$$\frac{dz(t)}{dt} \in \epsilon(W(t, z(t)) + \gamma z(t)), \quad (5.21)$$

onde

$$W(t, z) = \left\{ w = \sum_{k=1}^m \theta_k a_k(t, \bar{x}_k) \mid (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta(z) \right\},$$

e a função $a_k(t, \bar{x}_k) \in A(t, \bar{x}_k)$, $k = \overline{1, m}$, satisfaz

$$\bar{v}_k = \frac{1}{T} \int_0^T a_k(t, \bar{x}_k) dt.$$

Tal como no Lema 5.1, podemos mostrar que o conjunto $W(t, z)$ é compacto e convexo para todos (t, z) e que a aplicação multívoca $W(t, \cdot)$ é semi-continua superiormente. Para além disso, as condições de aplicabilidade do Teorema 4.1 são verificadas. Assim, existe um número $\epsilon_0 > 0$ para o qual as soluções da inclusão (5.21) são limitadas, sempre que $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ e as condições iniciais são próximas de zero. De facto, pela homogeneidade do segundo membro da inclusão (5.21) podemos ver que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|z(t)| \leq c|z(0)|, \quad t \geq 0. \quad (5.22)$$

Seja $z(\cdot)$ uma solução da inclusão (5.21). Consideremos $z(t) = e^{\gamma \epsilon t} x(t)$. Então, vamos obter que

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma \epsilon e^{\gamma \epsilon t} x(t) + e^{\gamma \epsilon t} \frac{dx(t)}{dt}.$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{dz(t)}{dt} = \epsilon \left(\sum_{k=1}^m \theta_k(t) a_k(t, \bar{x}_k) + \gamma z(t) \right),$$

onde $(\theta_1(t), \dots, \theta_m(t)) \in \Theta(z(t))$. De (5.8), temos que

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \epsilon \sum_{k=1}^m e^{-\epsilon \gamma t} \theta_k(t) a_k(t, \bar{x}_k) \\ &= \epsilon \sum_{k=1}^m \tilde{\theta}_k(t) a_k(t, \bar{x}_k), \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde $(\tilde{\theta}_1(t), \dots, \tilde{\theta}_m(t)) \in \Theta(x(t))$. De (5.22), podemos observar que as soluções da equação (5.23) satisfazem a desigualdade

$$|x(t)| \leq \tilde{c} |x(0)| e^{-\gamma \epsilon t},$$

i.e., $x = 0$ é uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente fraca da inclusão diferencial

$$\dot{x} \in \epsilon A(t, x).$$

Agora, aplicando o Teorema 1.3 obtemos o resultado. □

É de notar que a necessidade de ϵ ter que ser suficientemente pequeno é essencial, como se ilustra com o seguinte exemplo.

Exemplo 5.2 (adaptado de Yamamoto (2004)) Consideremos o sistema

$$\dot{x} = \epsilon A(t)x, \quad (5.24)$$

onde a matriz é dada por

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma \cos(\omega t) + \delta \sin(\omega t) & \beta + \delta \cos(\omega t) - \gamma \sin(\omega t) \\ -\beta + \delta \cos(\omega t) - \gamma \sin(\omega t) & \alpha - \gamma \cos(\omega t) - \delta \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e ω são parâmetros reais.

Calculando a matriz medianizada obtemos

$$\bar{A} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} A(s) ds = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Logo, $\bar{x} = 0$ é uma posição de equilíbrio exponencialmente estável do sistema

$$\dot{\bar{x}} = \epsilon \bar{A} \bar{x},$$

sempre que $\alpha < 0$ e, pelo Teorema 5.4, sabemos que para um ϵ suficientemente pequeno temos que $x = 0$ também vai ser uma posição de equilíbrio exponencialmente estável de (5.24). Aplicando o resultado de Yamamoto (2004), sabemos que a matriz de transição do sistema (5.24) pode ser escrita na forma

$$\Phi(t) = e^{A_1 t} e^{A_2 t},$$

onde as matrizes A_1 e A_2 são dadas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega}{2} \\ -\frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} (\alpha + \gamma)\epsilon & (\beta + \delta)\epsilon - \frac{\omega}{2} \\ (-\beta + \delta)\epsilon + \frac{\omega}{2} & (\alpha - \gamma)\epsilon \end{pmatrix}.$$

A estabilidade do sistema (5.24) é completamente determinada pelos valores próprios da matriz A_2 . Concretamente, a posição de equilíbrio $x = 0$ é exponencialmente estável sempre que a parte real dos valores próprios de A_2 for negativa. Os valores próprios de A_2 são dados por

$$\alpha\epsilon \pm \frac{1}{2} \sqrt{4(-\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)\epsilon^2 + 4\beta\epsilon\omega - \omega^2} < 0.$$

Assim, vemos que para $\alpha < 0$ é sempre possível escolher um ϵ suficientemente pequeno, para o qual a parte real dos valores próprios é negativa. Para ϵ grande o sistema não é estável, apesar do sistema medianizado o ser. \triangleleft

5.3 Inclusões diferenciais geradas por sistemas de controlo

O resultado obtido na secção anterior pode ser aplicado a inclusões diferenciais geradas por sistemas de controlo. Consideremos o seguinte sistema de controlo

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x, u), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (5.25)$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função que satisfaz as seguintes condições:

- (M1) Existe um controlo periódico $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow U$, $u_0(\cdot) \in L_\infty([0, \infty[, \mathbb{R})$, com período T tal que $f(t, 0, u_0(t)) = 0$ para todo t ;
- (M2) A funções f é periódica em t com período $T > 0$, i.e., $f(t+T, x, u) = f(t, x, u)$ para todo $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U$;

- (M3) A função f é contínua em (x, u) , mensurável em t para todo $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times U$, e $f(t, x, u) \in b(t)B_n$ for all $(t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U$, onde $b(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$;
- (M4) A função f é diferenciável com respeito a x e $|\nabla_x f(t, x, u)| \leq k(t)$ para todos $(t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U$, onde $k(\cdot) \in L_1([0, T], \mathbb{R})$;
- (M5) O conjunto $f(t, x, U)$ é compacto para todos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Pelo Teorema 1.2, podemos associar o sistema de controlo (5.25) à inclusão diferencial

$$\dot{x} \in \epsilon F(t, x) \equiv \epsilon f(t, x, U) = \bigcup_{u \in U} \epsilon f(t, x, u). \quad (5.26)$$

É possível demonstrar que a aplicação multívoca $A(t, x) = C(t)x + K(t)$, com $C(t) = \nabla_x f(t, 0, u_0)$ e $K(t) = \text{cl} \bigcup_{\alpha > 0} \alpha \text{co} f(t, 0, U)$, é uma primeira aproximação de $\text{co} F(t, x)$, ver (Smirnov, 2002, Proposition 2.8).

Sejam $\bar{C} = \frac{1}{T} \int_0^T C(s)x ds$ e

$$\bar{K} = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds \mid u(s) \in K(t), u(t) \in L_1([0, T], \mathbb{R}^n) \right\}.$$

Consideremos a primeira aproximação medianizada de (5.26)

$$\dot{\bar{x}} \in \epsilon(\bar{C}\bar{x} + \bar{K}). \quad (5.27)$$

Do Teorema 5.4, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.5 *Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz as condições (M1) - (M5). suponhamos que $\bar{x} = 0$ é uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável da inclusão diferencial (5.27). Então, para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a origem é uma posição de equilíbrio fracamente exponencialmente estável da inclusão diferencial (5.26).*

Terminamos a secção com um exemplo ilustrativo da aplicação do teorema anterior.

Exemplo 5.3 Consideremos o seguinte sistema de controlo

$$\ddot{x} = -\sin(x) + u \sin\left(\frac{t}{\epsilon}\right),$$

onde $\epsilon > 0$ é um pequeno parâmetro e u é um controlo sujeito à restrição $u \geq 0$. Reescrevendo a equação na forma de sistema, obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -\sin(x) + u \sin\left(\frac{t}{\epsilon}\right). \end{cases} \quad (5.28)$$

Sejam $\tau = t/\epsilon$, $y(\tau) = x(\epsilon\tau)$ e $w(\tau) = v(\epsilon\tau)$. Então, o sistema (5.28) assume a forma

$$\begin{cases} dy/d\tau = \epsilon w, \\ dw/d\tau = -\epsilon \sin(y) + \epsilon u \sin(\tau), \end{cases}$$

Depois de efetuada a linearização na posição de equilíbrio $(y, w) = (0, 0)$, obtemos

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} = \epsilon \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u} \sin(\tau) \end{pmatrix} \right], \quad \tilde{u} \geq 0.$$

Obviamente

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u} \sin(\tau) d\tau \mid \tilde{u} \geq 0, \tilde{u}(\cdot) \in L_1([0, 2\pi], \mathbb{R}) \right\} = \mathbb{R}.$$

Logo, a inclusão medianizada é

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in \epsilon \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{R} \end{pmatrix} \right]. \quad (5.29)$$

A inclusão anterior é fracamente exponencialmente estável. Pelo Teorema 5.4, concluímos que a origem é uma posição de equilíbrio do sistema de controlo (5.28) é fracamente exponencialmente estável. \triangleleft

Referências

- D. Aeyels & J. Peuteman, *On exponential stability of nonlinear time-varying differential equations*, *Automatica*, vol. 35, pp. 1091-1100, 1999.
- U. A. Akilov, *The averaging principle for systems of differential equations with a discontinuous right-hand side*, *Voprosy Vychisl. Prikl. Mat.*, No. 6, pp 3-10, 1971 (em Russo).
- A. Bacciotti & L. Rosier, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory-2nd Edition*, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* - vol 267, Springer, 2005.
- N. N. Bogoliubov & Y. A. Mitropolski, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Gordon and Breach, 1961.
- H. Calvet, *Perturbation Results on the Long Run Behavior of Nonlinear Dynamical Systems*. *Contemporary Mathematics*, Vol. 58, Part III, pp. 1-9, 1987.
- C. Castaing & M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, *Lect. Notes in Math.*, n. 580, Springer-Verlag, 1977.
- J. Cortés, *Discontinuous dynamical systems - a tutorial on solutions, nonsmooth analysis, and stability*, *IEEE Control Systems Magazine* 28 (3), pp. 36-73, 2008.
- T. Donchev & E. Farkhi, *Stability and Euler Approximation of One-sided Lipschitz Differential Inclusions*, *SIAM J. Control Optim.* 36, pp. 780-796, 1998.
- T. Donchev & I. Slavov, *Averaging Method for One-sided Lipschitz Differential Inclusions with Generalized Solutions*, *SIAM J. CONTROL OPTIM.*, Vol. 37, No. 5, pp. 1600-1613, 1999.
- T. Donchev, M. Kamenskii & M. Quincampoix, *Averaging of Perturbed One Sided Lipschitz Differential Inclusions*, *Journal for Analysis and its Applications*, Volume 23, No. 4, pp 1-10, 2004.
- T. Donchev & G. Grammel, *Averaging of functional differential inclusions in Banach spaces*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 311, pp. 402-416, 2005.

- T. Donchev, *Averaging of evolution inclusions in Banach spaces*, Applied Analysis and Differential Equations Proceedings, pp 69-78, 2006.
- A. N. Filatov, *Asymptotic Methods in the Theory of Differential and Integro-Differential Equations* Fan, Tashkent, 1974.
- O. P. Filatov & M. M. Khapaev, *Averaging of differential inclusions with "fast" and "slow" variables*, Mathematical Notes, Volume 47, Number 6, pp. 596-601, 1990.
- O. P. Filatov & M. M. Khapaev, *Mutual ϵ -approximation of solutions of a system of differential inclusions and of the averaged inclusion*, Mathematical Notes, Volume 47, Number 5, pp. 509-515, 1990.
- O. P. Filatov, *Averaging of a system of differential inclusions*, Computational Mathematics and Modeling, Volume 5, Number 1, pp. 10-17, 1994.
- O. P. Filatov, *Averaging of a system of differential inclusions with Slow and Fast Variables*, Differential Equations, Volume 44, Number 3, pp. 349-363, 2008.
- A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Mathematics and Its Applications, Vol. 18 - Kluwer Academic Publishers, 1988.
- A. Fidlin, *On the Asymptotic Analysis of Discontinuous Systems*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Volume 82, Issue 2, pp. 75-88, 2002.
- A. Fidlin, *Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering*, Springer, 2005.
- R. Gama, A. Guerman & G. Smirnov, *On the asymptotic stability of discontinuous systems analysed via the averaging method*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 74, Issue 4, 15 February, pp. 1513-1522, 2011.
- R. Gama & G. Smirnov, *Partial Stability of Discontinuous Systems via Averaging Method*, ICNAAM 2010: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2010, AIP Conf. Proc., September 30, Volume 1281, pp. 481-484, 2010.
- R. Gama & G. Smirnov, *Exponential Stability via Averaging Method and Applications*, In Proceedings of the 1st IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems - DyCoSS12, March, 2012, Porto, Portugal (to appear).
- R. Gama & G. Smirnov, *Weak Exponential Stability for Time-Periodic Differential Inclusions via First Approximation Averaging*, Set-Valued and Variational Analysis, 2012, DOI: 10.1007/s11228-012-0216-1
- G. Grammel, *Singularly perturbed differential inclusions: An averaging approach*, Set-Valued Analysis, Volume 4, Number 4, pp. 361-374, 1996.

- G. Grammel, *Averaging of multivalued differential equations*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Issue 25, pp. 1615-1622, 2003.
- G. Grammel & I. Maizurna, *A sufficient condition for the uniform exponential stability of time-varying systems with noise*, Nonlinear Analysis, Volume 56, Issue 7, pp. 951-960, 2004.
- G. Grammel, *Robustness of exponential stability to singular perturbations and delays*, Systems & Control Letters Volume 57, Issue 6, pp. 505-510, 2008.
- A. D. Guerman, M. Yu. Ovchinnikov, V. I. Pen'kov et V. A. Sarychev. *Non-resonant motions of a satellite with hysteresis rods under conditions of gravity orientation*. Mechanics of Solids, Vol. 24, pp 1 - 11, 1989.
- A. Guerman, M. Ovchinnikov, G. Smirnov et S. Trofimov, *Closed relative trajectories for formation flying with single-input control*, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2012, Article ID 967248, 20 pages, 2012.
- G. Haddad *Topological properties of the set of solutions for functional differential inclusions*. Nonlinear Analysis, Vol. 5, pp 1349-1366, 1981.
- O. Hájek, *Discontinuous Differential Equations I,II* J. Differential Equations, no. 32 , pp. 149-170, pp. 171-185, 1979.
- J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Dover Books on Mathematics, 2009.
- H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, third ed. - 2002.
- M. M. Khapaev & O. P. Filatov, *Stability of differential inclusions with multivalued perturbations*, Mathematical Notes, Volume 43, Number 3, pp. 199-204, 1988.
- M. M. Khapaev, *Averaging in Stability Theory: A Study of Resonance Multi-Frequency Systems*, Mathematics and its Applications, Springer, 1992.
- S. Klimchuk, *Averaging of differential inclusions with unbounded right-hand side*. Ukrainian Mathematical Journal, V.42 (3), pp. 389-391 (em Russo), tradução em Inglês: *Averaging of differential relations of belongingness with unbounded right-hand sides*, Ukrainian Mathematical Journal, pp.343-345, 2005.
- S. Klimchuk, *Averaging of equations in the case of sliding on infinite interval*. Proceedings of the Ukrainian Conference on Discontinuous Dynamic Systems, Kiev, USSR, 1990 (em Russo).
- S. Klymchuk, A. Plotnikov & N. Skripnik, *Overview of V.A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions*, Volume 241, Issue 22, 15 November 2012, pp. 1932-1947, 2011.

- V. S. Klimov, *Averaging of differential inclusions*, Differential Equations, Volume 44, Number 12, pp 1673-1681, 2008.
- V. S. Klimov & A. Yu. Ukhalov, *The Averaging Method and the Asymptotic Behavior of Solutions to Differential Inclusions*, Russian Mathematics, Vol. 53, No. 8, pp. 20-28, 2009.
- A. Kolmogorov & S. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications Inc., 1970.
- M. A. Krasnosel'skii & S. G. Krein, *On the principle of averaging in nonlinear mechanics*, Uspehi Mat. Nauk (N.S.), Vol. 10, Number 3 (65), pp. 147-152, 1955 (em Russo).
- M. Lakrib, *An averaging theorem for ordinary differential inclusions*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin Vol. 16, pp 13-29, 2009.
- M. D. Marques, *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems: Shocks and dry friction*, volume 9 of Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser, 1993.
- N. M. Matveev, S. L. Nosov & A. N. Pokrovskii, *Averaging-principle question*, Differential Equations, Number 14, pp. 261-263, 1978.
- R. M'Closkey, *An averaging theorem for time-periodic degree zero homogeneous differential equations*, Systems & Control Letters, Volume 32 Issue 3, Nov. 17, 1997.
- M. Moszynska, *Selected Topics in Convex Geometry*, Birkhäuser Boston, 2005.
- J. Murdock, *Perturbations Theory And Methods*, John Wiley & Sons, 1991.
- A. H. Nayfeh, *Nonlinear Oscillations*, Wiley Classics Library, 1995.
- A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, Wiley Classics Library, 2000.
- B. Paden & S. S. Sastry, *A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 34, no. 1, pp. 73-82, 1987.
- N. Perestyuk et al., *Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-Hand Sides with Discontinuities*, De Gruyter, 2011.
- N. P. Plakhtienko, *Investigation by the averaging method of the motion of bodies under the action of discontinuous forces*, International Applied Mechanics, Volume 21, Number 8, pp. 798-804, 1985.
- E. S. Polovinkin, *Riemannian integral of set-valued function*, Lecture Notes in Computer Science, Volume 27, pp. 405-410, 1975.

- V. Plotnikov, *Averaging of differential inclusions*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 31, Number 5, September, 1979.
- V. Plotnikov, *Averaging method for differential inclusions and its application to optimal control problems*, Differential Equations, Vol. 15, pp 1013-1018, 1979.
- V. Plotnikov, *Partial averaging of differential inclusions*, Mathematical Notes, Volume 27, Number 6, pp. 456-459, 1980.
- V. Plotnikov, *Averaging Method in Control Problems*, Libid, Kiev, 1992 (em Russo).
- V. Plotnikov & T. S. Zverkova, *Method of partial averaging in the systems of standard form with discontinuous right-hand sides*, Ukrainian Mathematical Journal, Volume 45, Number 1, pp. 156-159, 1993.
- V. Plotnikov, T. Zverkova & O. Slobodyanyuk, *Averaging of aperiodic problems of control over fracture surfaces*, Ukrainian Mathematical Journal, Volume 46, Number 10, pp., 1534-1539, 1994.
Volume 45, Number 1, pp. 156-159, 1993.
- V. Plotnikov & V. M. Savchenko, *On averaging of differential inclusions in the case where average of the right-hand side does not exist*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 48, Number 11, pp 1779-1784, 1996.
- V. A. Plotnikov, *Asymptotic methods in the theory of differential equations with discontinuous and multi-valued right-hand sides*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 80, Number 1, pp 1605-1616, 1996.
- V. . Plotnikov, A. Plotnikov & A. Vityuk, *Differential Equations with Multivalued Right-Hand Side. Asymptotic Methods*, Astro Print, Odessa, 1999 (em Russo).
- N. V. Plotnikova, *The Krasnosel'skii-Krein theorem for differential inclusions*, Differential Equations, Vol. 41, Number 7, pp 1049-1053, 2005.
- J. Sanders & F. Verhulst F., *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Appl. Math. Sci. 59, Springer, 1985.
- G. Salinetti & R. J.B. Wets, *On the Convergence of Sequences of Convex Sets in Finite Dimensions*, SIAM Review, Vol. 21, No. 1, pp. 18-33, 1979.
- A. M. Samoilenko, *The foundation of the averaging principle for differential equations with a discontinuous right-hand side*, Approximate Methods for Solving Differential Equations, Izd. Akad. Nauk UkrSSR, Kiev, pp. 90-95, 1963.
- A. M. Samoilenko & A. N. Stanzhitskii, *On the averaging of differential equations on an infinite interval*, Differential Equations, Vol. 42, Number 4, pp 476-482, 2006.

- S. Schweighart & R. Sedwick, *High-Fidelity Linearized J_2 Model for Satellite Formation Flight*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.25, No 6, pp. 1073-1080, 2002.
- G. V. Smirnov, *Weak asymptotic stability at first approximation for periodic differential inclusions*, Nonlinear Differential Equations and Applications Volume 2, Number 4, pp. 445-461, 1995
- G. V. Smirnov, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, AMS Graduate Studies in Mathematics, Vol 41, 2002.
- E. Sokolovskaya, *Generalization of the Krylov-Bogolyubov averaging principle for differential inclusions with non-Lipschitz right-hand side*, Vest. University of Samara, Ser. Natural Sciences, Second Spec. Vol., pp 36-51, 2004 (em Russo).
- A. B. Vasil'ev, *Continuous dependence of the solutions of differential inclusions on the parameter*, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 35, Number 5, pp 520-524, 1983.
- V. Burd, *Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval*, Chapman and Hall, 2007.
- V. I. Vorotnikov, *Partial-Equilibrium Positions of Nonlinear Dynamic Systems: Their Stability and Stability with Respect to Some of Variables*, Doklady Physics - Springer Volume 48, Number 3 / March, pp 151-155, 2003.
- V. I. Vorotnikov, *Partial stability and control: The state-of-the-art and development prospects*, Automation and Remote Control, Volume 66, Number 4, pp 511-561, 2005
- M. Yamamoto, *On the homogeneous linear systems of differential equations with variable coefficients*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume 53, Number 1, pp. 17-20, 1977.

