Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Dimensões afetivas na resolução de problemas de matemática no âmbito de uma competição inclusiva

Rosa Maria Borges de Melo Nogueira

Outubro de 2014

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Dimensões afetivas na resolução de problemas de matemática no âmbito de uma competição inclusiva

Rosa Maria Borges de Melo Nogueira

Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores

Orientadora: Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira

Outubro 2014

Este trabalho teve o apoio de fundos nacionais através da Fundação para a Ciência e Tecnologia (projeto Problem@Web com a referência PTDC/CPE-CED/101635/2008 e projeto PEst-C/MAT/UI0144/2013) e de fundos internacionais FEDER através do COMPETE.

Resumo

Este trabalho tem como foco um conjunto de dimensões afetivas relacionadas com a participação de crianças e jovens em duas competições matemáticas de resolução de problemas, apoiadas na web e de natureza inclusiva. Estas competições - SUB12 e SUB14 - destinam-se a alunos dos 5.º e 6.º anos de escolaridade e dos 7.º e 8.º anos de escolaridade, respetivamente. Em particular, procurei olhar para os padrões de comportamento reportados pelos participantes nas competições relativos à procura de ajuda para resolver os problemas propostos na fase de apuramento das competições, ao grau de apreciação por esses problemas e à dificuldade percecionada pelos participantes na sua resolução. O estudo seguiu uma metodologia quantitativa tendo os dados sido recolhidos através de um miniquestionário que acompanha o formulário de envio de resposta aos problemas propostos na fase de apuramento das competições. Os resultados mostram evidências do caráter desafiante dos problemas das competições, nomeadamente do seu grau de desafio moderado. A ajuda procurada foi sobretudo junto dos familiares dos participantes e dos respetivos professores. De um modo geral os participantes gostam de resolver os problemas ao longo da competição e percecionam-nos como sendo de dificuldade média. Foi possível encontrar algumas associações fortes entre as dimensões afetivas consideradas no estudo, por exemplo entre gosto e dificuldade percecionada, bem como entre gosto e necessidade de procurar ajuda. No entanto, identificaram-se algumas diferenças entre as duas ligas, SUB12 e SUB14. O estudo realizado levantou várias questões para investigação futura.

Palavras-chave: desafio moderado; resolução de problemas; procura de ajuda; gosto; dificuldade percecionada; competição inclusiva.

Abstract

This study focuses on a set of affective dimensions related to the participation of children and youngsters in two inclusive web-based mathematics problem solving competitions – SUB12 and SUB14 – addressing 5th/6th and 7th/8th graders, respectively. In particular, I looked for patterns concerning students' help seeking behavior to solve the problems posed throughout the qualifying phase of the competitions, their enjoyment of those problems, and the perceived difficulty of such problems. This study followed a quantitative methodological approach and data were collected through a mini-questionnaire which accompanied the response form at the competitions webpage for submitting the answers to the problems of the qualifying phase. The results provide evidence of the challenging character of the competition problems, namely their moderate challenge degree. When seeking help, participants turn mainly to family members and teachers; in general, they enjoy the problems and find them of low or average difficulty. Some strong associations were found, namely between enjoyment and perceived difficulty, as well as between enjoyment and no need to seek help. However, there were differences between SUB12 and SUB14. The study raised several questions for future research.

Keywords: moderate challenges; problem solving; help seeking; enjoyment; perceived difficulty; inclusive competitions.

Índice

Lista de figuras

I - Introdução

Matemática – não é só razão, é também coração.

> *-Bom dia. Porque apagaste, agora mesmo, o candeeiro?*
> *-São ordens, respondeu o acendedor. Bom dia.*
> *-Que ordens são?*
> *-Apagar o candeeiro. Boa noite.*
> *E tornou a acendê-lo.*
> *-Mas porque o acendeste outra vez?*
> *-São ordens, respondeu o acendedor.*
> *-Não percebo, confessou o principezinho.*
> *-Não tem nada que perceber, observou o acendedor. Ordens são ordens. Bom dia.*
> *E apagou o candeeiro.*
> *Pôs-se a enxugar a testa com um lenço aos quadrados vermelhos.*
> *-Tenho uma profissão terrível. Antigamente era aceitável. Apagava de manhã e acendia à noite. Tinha o resto do dia para descansar e o resto da noite para dormir...*
> *-E as ordens mudaram desde então?*
> *-As ordens não mudaram, disse o acendedor. Aí é que está o drama! O planeta gira, de ano para ano, cada vez mais depressa, e as ordens não mudaram! (Saint-Exupery, 1940, p. 50)*

Na esperança de que, um dia, não haja *acendedores de candeeiros*.

Estamos no século XXI. As sociedades confrontam-se com transformações aceleradas, desencadeadas, em grande medida, pelo desenvolvimento científico e tecnológico, pela globalização e pela sociedade de informação e comunicação. Estas rápidas mudanças impõem a necessidade e urgência de pensar o modo como a escola se pode preparar para responder eficientemente aos novos desafios. Isto reveste-se de particular importância no que diz respeito à educação matemática.

A competência em matemática foi identificada, a nível da União Europeia (UE), como uma das competências essenciais à realização pessoal, à cidadania ativa, à inclusão social e à empregabilidade na sociedade do conhecimento do século XXI. As preocupações suscitadas pelo fraco aproveitamento dos alunos, revelado pelos estudos internacionais, levaram à adoção, em 2009, de um valor de referência para as competências básicas na UE, o qual determina que “até 2020, a percentagem de alunos de 15 anos com fraco aproveitamento em leitura, matemática e ciências deverá ser inferior a 15%”[1].

Para a Unesco (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization), o desenvolvimento de políticas de educação científica visa sobretudo a inclusão social e a melhoria da qualidade da educação, de modo a contribuir para que crianças e jovens desenvolvam as capacidades, atitudes e valores que lhes permitam aprender e continuar aprendendo, compreender, questionar, interagir, tomar decisões e transformar o mundo em que vivem.

> Atualmente, a sociedade do conhecimento pode ser compreendida como a sociedade onde o conhecimento é o principal recurso para criação de riqueza, prosperidade e bem estar para a população, e este tem sido o eixo primordial das novas estratégias de crescimento e desenvolvimento sustentável que permitem melhorar a qualidade de vida da população. Aqui reside a importância dada à sociedade do conhecimento, que se caracteriza por um extraordinário desenvolvimento da ciência e da tecnologia sem precedentes na história e uma notável e constante produção e aplicação de conhecimentos, nos quais os recursos humanos e a qualificação passam a ser os mais decisivos para o desenvolvimento das sociedades, tendo adquirido uma importância central as estratégias educativas e a formação contínua. [2]

Tal como subjacente no excerto acima, acredito ser essencial e necessário que o cidadão comum possua uma competência matemática adequada por forma a ter oportunidade de se realizar, pessoal e profissionalmente, e participar total e conscientemente na sociedade moderna.

Em Portugal, muito há a fazer para que o sistema educativo básico cumpra a sua função por forma a poder afirmar-se que a educação (de qualidade) é para todos. De facto, ao ler:

> … A qualidade da educação no Vietname é considerada retrógrada e incapaz de suprir as necessidades da sociedade. A educação perdeu a confiança da sociedade. A qualidade dos graus académicos, mestrados ou doutoramentos está a ser posta em causa. Alguns governos locais recusam oficialmente o recrutamento de estudantes graduados por vários modos do sistema educacional incluindo os profissionalizados em serviço ou educação contínua. Um professor formador explicou por que razão os seus alunos não acreditavam

---

[1] Quadro Estratégico para a cooperação europeia no domínio da educação e da formação («EF 2020»), Conclusões do Conselho de maio de 2009, JO C 119, 28.5.2009.
[2] http://www.unescoportugal.mne.pt/pt/temas/ciencia-para-um-futuro-sustentavel.html

na função do sistema de ensino:

> ‘A pressão de conseguir bons resultados em educação é muito grande. Os professores são forçados a dar aos seus alunos boas notas para mostrar uma alta performance e atingir as metas pré-estabelecidas. O problema do falso ensino, falsa aprendizagem e falsos diplomas tornou-se mais e mais prevalente. Os estudantes não sabem o que fazer com o conhecimento adquirido nas escolas após a sua graduação.´... (Tran, 2013, p.130)[3]

Pensei: No Vietname ? Ou…….em Portugal?

Considero que a Democracia só poderá existir se existir uma educação científica e matemática de qualidade no ensino básico, integrada num sistema de ensino que genuinamente, com verdade, favoreça a mobilidade social. Uma educação matemática que permita que todos os jovens adquiram literacia matemática[4], ferramenta imprescindível para uma participação consciente, igual e plena na sociedade. Urge pôr os portugueses a pensar…e bem.

Depois de mais de 30 anos a tentar contagiar jovens com o gosto pela matemática, estou preocupada com o rumo do ensino da matemática em Portugal. Existem cada vez mais “acendedores de candeeiros” no seio das escolas. Professores que se demitem de pensar para se limitarem a obedecer. Alunos que não são ensinados nem a pensar...nem a obedecer. Aprendizagens impostas, com a autoridade da sanção em vez do respeito e gosto pelo saber. Tanta curiosidade e vontade de aprender e descobrir, inatas, que vejo esmorecer nos olhos de alunos com capacidades incríveis, que se vão deixando reduzir a futuros “acendedores de candeeiros” porque se veem obrigados a seguir orientações obsoletas, mas cómodas, porque pouco exigentes e falsamente recompensadoras. O ensino da matemática, por muito que alguns professores tentem, nos seus pequeninos círculos de influência, depende de muito mais que a vontade, o trabalho e o empenho de um único indivíduo. O mundo muda a cada instante. O papel do professor não pode resumir-se ao de transmissor de informação pois esse papel é, por exemplo, muito melhor desempenhado pelas novas tecnologias. A matemática deve ser ensinada como coisa viva, bela, fonte de emoções positivas. A escola, a sociedade em geral, tem de ser reeducada na forma como entende a matemática. Isto tem de acontecer nos dois sentidos, de dentro para fora da escola, e de fora para dentro. Esta preocupação impele-me a tentar contribuir na procura de caminhos que ajudem a encontrar respostas para os problemas da educação matemática. Assim, ao ser convidada para trabalhar no projeto Problem@Web, aceitei de imediato.

---

[3] Original research: Factors associated with low educational motivation among ethnic minority students in Vietnam, Ngoc Tien Tran

[4] Ver definição adotada neste trabalho de literacia matemática na página 16.

1. O projeto Problem@Web e o contexto do estudo

O projeto Problem@Web (Mathematical Problem Solving: Views on an interactive web-based competition) decorreu entre 12/2010 e 6/2014, com o financiamento da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, contrato n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008. As instituições envolvidas no projeto foram o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e a Universidade do Algarve. A equipa foi composta por Susana Carreira (investigadora responsável), Nélia Amado, Rosa Ferreira, Sandra Nobre, Hélia Jacinto, Nuno Amaral, Jaime Carvalho e Silva, Juan Rodriguez, Sílvia Reis e Isa Martins. Três dos elementos desta equipa são estudantes de doutoramento, presentemente na fase de conclusão do seu trabalho.

O projeto Problem@Web tem como objetivo geral estudar a resolução de problemas matemáticos num contexto que se estende para além da sala de aula. Está ancorado em competições matemáticas inclusivas que decorrem através da Internet (http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/), os Campeonatos de Matemática SUB12 e SUB14, promovidos pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

Os SUBs (acrónimo para os campeonatos SUB12 e SUB14) são campeonatos de resolução de problemas dirigidos a todos os alunos dos 5.º e 6.º anos de escolaridade, no caso do SUB12, e dos 7.º e 8.º anos de escolaridade, no caso do SUB14. Realizam-se nas regiões do Algarve e Alentejo e decorrem em duas fases distintas: a fase de apuramento, realizada à distância, e a fase final, de carácter presencial, realizada na Universidade do Algarve.

A fase de apuramento é constituída por dez jornadas e decorre suportada numa página web. Nesta fase, os alunos podem participar individualmente ou em equipas com um máximo de três elementos. Em cada jornada, é divulgado um problema.

Após a saída de cada problema, os participantes enviam as suas resoluções através do formulário disponibilizado nessa mesma página web ou por correio eletrónico (digitando a resolução diretamente no corpo da mensagem ou recorrendo a ficheiros anexos, de formatos variados como powerpoint, word, excel, paint), sabendo que uma das condições primordiais para a aceitação de uma resposta submetida é que seja apresentado e explicado o processo utilizado para obter a solução. Os alunos participantes, não só têm de resolver cada problema corretamente como têm de encontrar formas de exprimir o seu raciocínio e de tornar visíveis as suas estratégias, podendo socorrer-se de todas as ferramentas digitais que tiverem ao seu dispor e que acharem úteis para elaborar a resolução do problema. Os participantes dispõem de 15 dias para enviar a solução ao problema divulgado, Findo este prazo, é divulgado um novo problema.

É importante esclarecer que todas as participações são comentadas pelas equipas dos SUBs. Assim, a cada concorrente (ou grupo de concorrentes) que envia a resolução de um problema, é devolvida uma apreciação crítica personalizada quer a resolução esteja, ou não, correta. Ou seja, na fase de apuramento, todos os participantes recebem feedback às respostas enviadas, com sugestões para ultrapassar obstáculos ou reconhecendo a correção das respostas ou os progressos realizados. Se o problema está corretamente resolvido e é explicado o processo de resolução, é dado um elogio, por exemplo, "Parabéns pela tua resposta", "Gostámos muito do teu processo de resolução", "Contamos com a tua participação". Se a resposta está incompleta ou incorreta, a mensagem vai no sentido de oferecer uma pista ao participante para, pelos seus próprios meios, encontrar uma forma de chegar à solução. Por exemplo, pode destacar-se um dado do problema a que o participante não tenha dado atenção, colocar-se uma questão desafiadora ou que ajude o participante a dirigir a sua atenção para um aspeto particularmente relevante na sua resolução, encorajando sempre o participante a corrigir e reenviar a resposta correta.

De facto, os participantes podem submeter as suas respostas tantas vezes quantas quiserem durante o prazo de envio, 15 dias após a publicitação do respetivo problema. O feedback é sempre fornecido, independentemente do número de respostas, ao mesmo problema, enviadas. É, portanto, dada a oportunidade a cada participante de melhorar ou corrigir a sua resposta, dentro de um prazo permitido para a resolução de cada problema. Mais do que isso, os participantes sabem que é permitido solicitar ajuda e são encorajados a fazê-lo, quer seja aos seus familiares, professores e amigos ou mesmo à própria organização dos SUBs.

Se os participantes enviarem a resposta através do formulário disponível na página web, são obrigados ao preenchimento de um miniquestionário para conseguirem submeter a resposta. No entanto, a resposta ao miniquestionário não é obrigatória se os participantes usarem o correio eletrónico, em vez do formulário da página web, para submeterem as suas respostas. Neste caso, se usarem o correio eletrónico para enviar as resoluções dos problemas, é-lhes pedido que respondam às questões desse miniquestionário, o que nem sempre fazem. O miniquestionário é constituído por três questões de escolha múltipla, formuladas de modo muito direto, em que se pretende saber se os participantes recorreram a ajuda para resolver o problema em questão, e de quem receberam; se os participantes gostaram do problema que resolveram; e se os participantes acharam o problema difícil ou não. Como explico mais à frente neste trabalho, o miniquestionário foi a principal fonte de dados para o meu trabalho.

À final chegam todos os participantes que resolverem corretamente pelo menos oito dos dez problemas. A final tem que ser disputada individualmente e é um torneio presencial em que os participantes têm de resolver cinco problemas. A final conta ainda com a realização de um colóquio, seminário ou workshop dirigido aos acompanhantes, normalmente familiares e professores dos finalistas, em que se propõem e discutem aspetos relacionados com o campeonato, a resolução de problemas e o ensino da matemática, em geral. As atividades para acompanhantes decorrem durante os 90 minutos de duração da competição. Terminado o tempo permitido para a resolução individual dos problemas, em que os concorrentes apenas dispõem de lápis e papel (ou seja, ao contrário da fase de apuramento, não podem recorrer às tecnologias nem a nenhuma das fontes de ajuda disponíveis), a organização oferece um lanche a todos enquanto o júri corrige as provas e identifica os três vencedores de cada liga, SUB12 e SUB14. A final termina com a atribuição dos prémios aos vencedores.

São várias as características dos campeonatos SUB12 e SUB14. Numa publicação do projeto Problem@Web (Carreira, Amado, Tomás Ferreira, Carvalho e Silva, et al., 2012, p. 18), a equipa de investigação identifica algumas das mais relevantes. Estes campeonatos destacam-se por:

1. Ter por base problemas matemáticos que podem ser designados por problemas de palavras contextualizados, para os quais existem geralmente várias formas de resolução;
2. Valorizar a capacidade de comunicação, requerendo explicitamente a apresentação da estratégia e do processo usado para chegar à solução;
3. Conjeturar que os alunos têm o conhecimento matemático necessário para a resolução dos problemas propostos;
4. Ser independente do currículo, dado que os problemas não são concebidos para se encaixarem em tópicos curriculares específicos;
5. Ser próximo dos professores e das famílias na medida em que encoraja o seu apoio aos jovens participantes;
6. Oferecer feedback formativo e amigável, dando aos participantes oportunidades para melhorarem as suas respostas, sugerindo pistas, se necessário;
7. Aceitar todos os tipos de media para a obtenção e para o envio das resoluções (ferramentas digitais bem como digitalização de respostas feitas com papel e lápis);
8. Promover a persistência e o envolvimento das famílias (embora a comunicação por e-mail se dirija sempre aos próprios participantes);
9. Reconhecer publicamente algumas das resoluções expeditas, criativas, elegantes e interessantes, publicando-as na página Web;
10. Concentrar a parte competitiva na Final, promovendo a colaboração e a

partilha durante a fase de Apuramento (por exemplo, alguns professores discutem os problemas com os seus alunos nas aulas de Matemática ou de Estudo Acompanhado e ajudam-nos na utilização das tecnologias)

A estas características eu acrescentaria que os SUBs têm como objetivo primordial despertar o gosto e o interesse dos participantes pela matemática, promovendo a satisfação e o prazer na resolução de problemas de matemática moderadamente desafiantes – diminuindo a frustração, dando reforço positivo, encorajando a persistência.

2. Questões de investigação

O projeto Problem@Web estabeleceu três focos de investigação:

a) O pensamento e as estratégias de resolução de problemas matemáticos, os modos de representação e expressão do pensamento matemático e o uso de tecnologias digitais na atividade de resolução de problemas;
b) As atitudes e afetos relativos à matemática e à resolução de problemas matemáticos, tanto em contexto escolar como extraescolar, considerando alunos, pais e professores;
c) A criatividade manifestada na resolução de problemas matemáticos e a sua relação com o uso de tecnologias digitais.

É no segundo destes focos que a minha participação neste projeto se centra, sendo que o enfoque do meu contributo reside, essencialmente, no contexto extraescolar dos SUBs, focando-me na fase de apuramento. Assim, este estudo procura entender como se manifesta a procura de ajuda dos participantes numa competição matemática inclusiva e como se relaciona com o gosto pela resolução dos problemas e com a dificuldade sentida na resolução. Ou seja, procuro descrever e compreender os padrões de comportamento dos participantes nos SUBs (uma competição de resolução de problemas, de natureza inclusiva e baseada na Web), na sua fase de apuramento, no que toca à procura de ajuda para resolver os problemas propostos e aos graus de apreciação e dificuldade sentidas ao resolver os mesmos. Para isso, foram consideradas as seguintes questões de investigação:

(1) Que significância tem a ajuda prestada aos participantes durante a fase de apuramento?
(2) Que grau de apreciação manifestam os participantes em relação aos problemas propostos?
(3) Que grau de dificuldade sentem os participantes na resolução dos problemas propostos? e
(4) Que tendências se podem identificar combinando estas dimensões?

3. Estrutura do trabalho

Esta dissertação encontra-se organizada em cinco capítulos, seguidos das referências bibliográficas e dos anexos.

No capítulo I, Introdução, procuro descrever os motivos que me levaram a realizar este trabalho, o contexto em que decorreu o estudo, as questões de investigação que nortearam esta investigação e a organização do trabalho que aqui relato.

No capítulo II, Enquadramento Teórico, apresento a fundamentação teórica que sustentou o estudo. Este capítulo encontra-se dividido em três secções em que são abordados os temas da resolução de problemas, das competições matemáticas e das dimensões afetivas na resolução de problemas sobre as quais me debrucei neste trabalho. Assim, relativamente à resolução de problemas abordo as questões: o que é um problema; o que é a resolução de problemas; a resolução de problemas nos currícula portugueses; as recomendações curriculares internacionais acerca da resolução de problemas e a importância da resolução de problemas na educação matemática. No tema das competições matemáticas faço uma abordagem ao conhecimento atual relativamente a vários aspetos com elas relacionados, em particular no que toca à sua relação com a resolução de problemas e enquanto ambientes de aprendizagem. Apresento ainda exemplos de algumas competições matemáticas. Por último, abordo as dimensões afetivas na resolução de problemas sobre que me debrucei nesta investigação. Procuro esclarecer conceitos, introduzir temas e resultados de investigações anteriores que me pareceram úteis para permitir tratar as questões da investigação a que me propus.

No capítulo III, Metodologia, apresento a metodologia de investigação seguida neste trabalho. Em particular, procuro justificar as opções tomadas e descrevo os processos de recolha e de análise de dados.

No capítulo IV, Análise de Dados e Discussão de Resultados, analiso e interpreto, os dados recolhidos relativamente à procura de ajuda, ao grau de dificuldade percecionado e ao grau de apreciação, dos problemas da fase de apuramento do SUB12 e do SUB14 (edição de 2012/13), por parte dos seus participantes. Analiso também as associações que emergiram entre estas três dimensões afetivas na resolução de problemas.

Finalmente, no capítulo V, Conclusões, procuro encontrar explicações, conjeturar acerca e colocar questões sobre os resultados obtidos, respondendo, dentro do que foi possível fazer, às questões da investigação. Termino com uma breve reflexão que integra algumas sugestões para investigações futuras.

II - Enquadramento Teórico

1. Resolução de Problemas

"Nas sociedades modernas tudo na vida é resolução de problemas."(OCDE, 2014, p. 13)

Num excerto do primeiro prefácio da obra *How to solve it – A new aspect of mathematical method*, de George Polya, datado de 1944, pode ler-se:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema mas existe um grão de descoberta na solução de qualquer problema. O teu problema pode ser modesto; mas se desafia a tua curiosidade e traz ao de cima as tuas faculdades inventivas, e se tu o resolves pelos teus próprios meios, podes experienciar a tensão e gozar o triunfo da descoberta. Tais experiências numa idade suscetível podem criar um gosto pelo trabalho mental e deixar a sua impressão na mente e no caráter com a duração de uma vida. *(Polya, 1944,* retirado da Anchors Books edition,1957)

1.1 O que é um problema?

Uma revisão de literatura incidente no domínio da Resolução de Problemas permite rapidamente concluir que é necessário explicitar com clareza o significado de alguns conceitos chave como problema, resolução de problemas e outros. Törner, Schoenfeld, e Reiss (2007), no artigo *Problem solving around the world: Summing up the state of the art*, baseados em dados fornecidos por peritos em educação por todo o mundo a quem foi pedido que fizessem o estado da arte nos seus países, referem que "O próprio termo *problem solving* tem vários significados em diferentes países" e acrescentam " …o significado do termo mudou frequentemente e de forma dramática no mesmo país" (Törner, Schoenfeld & Reiss, 2007, p. 353). De facto, nem os vários atores no ensino da matemática, nem mesmo os investigadores na área da educação, utilizam termos como problema ou resolução de problemas com um significado único e universal. Muito do que se considera como sendo problema é muito superficial, consistindo em tarefas em que se usam métodos rotineiros de resolução previamente explicitados e posteriormente aplicados na resolução de questões esquematicamente iguais. Esta conceção, que eu considero errada, não é exclusiva do ensino português:

> O maior problema com a matemática escolar é que não existem problemas. Oh, eu sei o que passa por problemas nas aulas de matemática, esses 'exercícios' insípidos. 'Aqui está um tipo de problema. Aqui está como se resolve. Sim, vai sair no teste. Façam os exercícios ímpares do 1 ao 35 para trabalho de casa'. Que triste maneira de aprender matemática: ser um chimpanzé treinado. (Lockart, 2002, p. 9)

Schoenfeld (1992) apresenta duas definições de problema – um problema como alguma coisa que precisa de ser feita ou que requer uma atuação, e um problema como uma questão que causa perplexidade ou que levanta alguma dificuldade. Estas duas definições refletem dois extremos de um espectro de interpretações para o termo *problema*.

Por um lado, temos o uso tradicional da palavra problema, como é o caso das propostas apresentadas nos manuais escolares que se pretende sejam resolvidas a partir das técnicas acabadas de ser ensinadas e treinadas. Neste caso, como afirma Schoenfeld (1992), tais propostas não são problemas. Trata-se de exercícios, diria Ponte (2005): "A questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema (...) Os exercícios servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos. Servem essencialmente um propósito de consolidação de conhecimentos" (p. 4).

Por outro lado, as tarefas para as quais não é imediata uma estratégia ou uma técnica e que durante o processo de resolução permitem ao aluno passar por experiências matemáticas significativas, pressupondo um maior grau de dificuldade e de complexidade, essas sim, são consideradas verdadeiros problemas, de acordo com Schoenfeld (1992). Este autor clarifica e aprofunda a noção de problema dada por Polya segundo o qual um aluno está perante um problema quando procura "conscientemente uma certa ação apropriada que lhe permita encontrar um caminho ou transpor um obstáculo para alcançar um objetivo não atingível de maneira imediata" (Polya, 1967, p. VII).

Para percebermos melhor o que entendemos por problema neste trabalho, vamos um pouco a montante olhar para os vários tipos de tarefa matemática que podemos considerar. Ponte (2005) propõe-nos a distinção entre problemas, exercícios, investigações e tarefas de exploração. Se considerarmos que duas dimensões fundamentais das tarefas são o grau percecionado de dificuldade (por parte do aluno) da questão (dimensão desde há muito usada para graduar as questões que se propõem aos alunos, tanto na sala de aula como em momentos especiais de avaliação como testes e exames) e o grau de estrutura dessa mesma questão, poderemos distinguir os quatro tipos de tarefas mencionados atrás. Ponte (2005) considera ainda outras duas dimensões na sua análise das tarefas matemáticas: a duração (tarefas curtas, de duração média ou de duração prolongada no tempo) e o contexto (tarefas formuladas em contexto puramente matemático ou em contextos da realidade ou semi-realidade). Estas duas dimensões não se revelam particularmente importantes para o trabalho que foi realizado pelo que nos centramos apenas nas dimensões do grau de dificuldade e de estrutura de uma tarefa.

De acordo com Ponte (2005), consideramos o grau de dificuldade a variar entre o pólo *reduzido* e o pólo *elevado*, e o grau de estrutura a variar entre os pólos *aberto* e *fechado*. Uma tarefa será considerada fechada se, na sua formulação, for claramente dito o que é dado e o que é pedido, e será uma tarefa aberta se existir um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas. Nesta base, Ponte (2005) define *exercício* como uma tarefa fechada e de dificuldade reduzida, *problema* como uma tarefa também fechada mas com elevada dificuldade, *investigação* como uma tarefa aberta de elevada dificuldade e, por último, uma *exploração* como sendo uma tarefa aberta mas de dificuldade reduzida.

> É de notar que um problema comporta sempre um grau de dificuldade apreciável. No entanto, se o problema for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente (ou a nem lhe pegar). Se o problema for demasiado acessível, não será então um problema mas sim um exercício. (Ponte, 2005, p. 3)

Não é raro encontrar-se a ideia de que uma tarefa enunciada num contexto extra-matemático, com *contornos de uma história*, por exemplo, se constitui logo num problema. Mas Ponte chama a atenção de que,

> Não é pelo facto de uma questão ser ou não colocada num contexto extra-matemático que ela é um exercício ou um problema. A questão fundamental é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema. (Ponte, 2005, p. 4)

Por exemplo, a questão *Se sete gatos caçam sete ratos em sete minutos, (…) quantos gatos são precisos para caçar 70 ratos em 70 minutos?* (Crato, 2007, p. 22) é um problema, ou um exercício? Segundo o próprio autor, "... a resolução do enigma tanto pode ser de uma facilidade infantil como revelar-se de uma dificuldade desesperante" (Crato, 2007, p. 23). A resposta, segundo Ponte (2005) seria, portanto, que tanto pode ser considerado um exercício como um problema, dependendo do sujeito a quem é colocada a questão. De facto, classificar uma tarefa como problema ou exercício, por exemplo, não é fácil pois, apesar de serem ambas tarefas fechadas, a fronteira entre os graus de dificuldade reduzido e elevado é difícil de definir e depende do sujeito que procura resolver a tarefa proposta.

O caráter relativo do conceito de problema já desde os anos 80 era referido, por exemplo por Abrantes (1988), Lester (1980) e Moreira (1987). A noção de problema, porque depende dos conhecimentos anteriores dos alunos e também de causas de natureza educativa, como o interesse do aluno e as práticas de aprendizagem que ele experimentou, é uma noção relativa. Neste trabalho, e seguindo a perspetiva de Ponte (2005), iremos considerar um problema como sendo uma questão fechada que se propõe para ser resolvida a alguém que, a priori, desconhece qualquer processo imediato de resolução. Assim sendo, tendo em conta que se dirigem a alunos dos 7º e 8º anos de escolaridade e dos 5º e 6º anos de escolaridade, respetivamente (sem que os mais velhos sejam beneficiados na resolução por terem mais conhecimentos da matemática escolar), dois exemplos de problemas são apresentados nas figuras 1 e 2:

SUB14 - Problema 7
Pintores e mais pintores

A empresa "Pinta Bem" enviou 8 pintores para pintar um hotel. Sabe-se que esses 8 trabalhadores vão demorar 34 dias nessa obra. Se a eles se juntarem 24 outros pintores, 10 dias depois de o trabalho ter começado, quantos dias serão necessários para concluírem o trabalho?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 1 – Enunciado do 7º problema da edição do SUB14 de 2010/11.

SUB12-Problema 7
A entrega de cimento

Uma fábrica de cimento tem uma carga de 5 toneladas de cimento para levar a uma obra. O camião de transporte faz três viagens para entregar o cimento no estaleiro. Na primeira viagem, o camião carregado pesa 4100 kg. Na segunda viagem, o camião carregado pesa 3400 kg. Na terceira viagem, o camião carregado pesa 3800 kg.
Quanto pesa o camião de cimento vazio?

Figura 2 - Enunciado do 7º problema da edição do SUB12 de 2010/11.

A tarefa que apresento de seguida, na figura 3, é o último “problema” de uma ficha de avaliação sugerida pelos autores de um manual escolar (Neves & Silva, 2014) para utilização após a lecionação do capítulo *Funções, Sequências e Sucessões,* no oitavo ano de escolaridade.

7. Seja *f* a função definida por $f(x) = -x + 3$ de domínio $D_f = \{-1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\}$.

7.1. Completa a tabela seguinte para representar a função *f*.

x				
$f(x)$				

7.2. Indica o contradomínio da função.

7.3. Representa a função *f* por meio de um gráfico.

7.4. Escreve a expressão algébrica da função linear *g* que representa

Figura 3 - Exemplo de um problema retirado de um e-manual do 8ºano de escolaridade.

Um outro exemplo de exercício é a questão apresentada na figura 4 retirada do *Caderno de apoio às metas curriculares de matemática* (Bívar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013). Na verdade, esta tarefa trata-se de um exercício pois é suposto ser proposta aos alunos depois de se lhes terem sido apresentados os conceitos e os procedimentos envolvidos. Ou seja, esta tarefa pretende ser proposta aos alunos como mais uma aplicação de procedimentos que devem ser mecanizados e repetidos.

Observa o gráfico representado abaixo, relativo às faltas dos alunos de uma turma do 8.º ano durante o mês de setembro.

a. Determina os extremos e os quartis.
b. Constrói um diagrama de extremos e quartis.

Figura 4 - Exemplo de um problema, segundo as metas curriculares de matemática para o 8.º ano de escolaridade (Bívar et al., 2013, p. 91).

Curiosamente, este mesmo exemplo é fornecido pelos autores como sendo um exemplo de descritor relativo ao objetivo geral de aprendizagem *Resolver Problemas* (subdomínio - Diagramas de Extremos e Quartis, domínio - Organização e tratamento de dados). Deste modo, uma tarefa que consiste na aplicação de procedimentos mecanizados é apresentada pelos autores das metas curriculares (Bívar et al., 2013) e do atual programa de matemática do ensino básico (ME, 2013) como um problema!

1.2 O que é a resolução de problemas ?

Se atentarmos em conclusões recentes emanadas de organismos internacionais, poderemos talvez extrapolar o que é, ou deve ser, a resolução de problemas. Por exemplo, em 2009, no primeiro encontro sobre Educação Básica, o Grupo Internacional de Peritos em Políticas de Educação Científica e Matemática, criado pela UNESCO, concluiu que o domínio da numeracia e do cálculo básico, que constituíram, durante muito tempo, os rudimentos matemáticos básicos para participar na sociedade, já não eram suficientes. A Matemática está omnipresente no mundo atual, nomeadamente em toda a tecnologia que nos rodeia e nos processos de comunicação e intercâmbio. No entanto, não aparece de forma evidente, o que faz com que alguns não consigam ver a importância do desenvolvimento de uma cultura matemática para além de uma numeracia básica, de medições e cálculos. Hoje, a aquisição de *literacia matemática* excede, em muito, as necessidades tradicionalmente associadas a conhecimentos computacionais básicos.

O conhecimento tem sido, desde sempre, considerado um importante recurso para o progresso da sociedade (Fuller, 2001; OCDE, 2004). No entanto, o que caracteriza e diferencia a sociedade atual é a intensidade e a forma como este é criado, difundido e usado. A intensificação dos fluxos do conhecimento e da escala a que estes ocorrem veio alterar a natureza do desenvolvimento e da competitividade, agora diretamente relacionados com a capacidade para criar, difundir e aplicar conhecimento instantaneamente: "...as sociedades modernas e os postos de trabalho ... valorizam o sucesso, não pelo que as pessoas sabem, mas pelo que as pessoas conseguem fazer com o que sabem" (OCDE, 2014, p.37). Esta última afirmação tem implícita a resolução de problemas, o saber dar uso às capacidades e conhecimento adquiridos, na procura de soluções para situações problema, situações em que se coloca a necessidade de resolver problemas no sentido por mim já definido.

O PISA (Programme for International Student Assessment), um programa de avaliação internacional de estudantes, da responsabilidade da OCDE, que pretende avaliar o grau de aquisição de conhecimentos chave e competências essenciais para uma participação plena na sociedade moderna, por parte de jovens de 15 anos, no fim da escolaridade obrigatória, em dezenas de países (cerca de 70), tem como foco dessa avaliação as áreas da leitura, matemática, ciência e também da resolução de problemas. Em particular, pretende obter dados que forneçam informação acerca da capacidade de reprodução do conhecimento matemático adquirido e da extrapolação e aplicação desse conhecimento em situações novas e não familiares, por forma a fornecer uma base para a colaboração internacional na definição e implementação de metas na educação matemática, tendo em conta as competências julgadas relevantes para a vida adulta.

No volume V dos resultados do PISA 2012, da responsabilidade da OCDE (2014), pode ler-se "resolver problemas requer pensamento e aprendizagem em ação" (p. 26), seguido de uma citação de Raven (2000) em que este afirma que resolver problemas "envolve, no início e de uma maneira geral, palpites ou sensações/sensibilidades ..." (OCDE, 2014, p. 26). Logo de seguida é referida a definição, do PISA 2012, de competência de resolução de problemas como "a capacidade de um indivíduo em se envolver num processo cognitivo com o fim de compreender e resolver situações problema em que o método para obter uma solução não é óbvio. Capacidade que inclui a vontade de se empenhar na resolução da situação ..." (OCDE, 2014, p. 26) e o esclarecimento:

> Resolver problemas começa pelo reconhecimento da existência de uma situação problema, e pela confirmação e compreensão da natureza da situação. Requer que o resolvedor identifique a especificidade do problema (ou problemas) a resolver, planeie e execute o plano até encontrar uma solução, monitorize e avalie os progressos ao longo da atividade. (OCDE, 2014, p.30)

"A questão, o que é resolução de problemas, não pode ter uma resposta unânime; ela depende demasiado de interesses pessoais e filosofias" (Mamona-Downs & Downs, 2005, p.385). No entanto, porque pretendo ser tão clara quanto possível, por forma a minimizar os ruídos na mensagem que estou a tentar construir, vou tomar como definição de resolução de problemas, para este trabalho, o seguinte enunciado: dinâmica que envolve conhecimento já adquirido, processos e capacidades cognitivas e afetivas, e vontade de chegar a uma solução, permitindo adquirir e construir novos conhecimentos e capacidades, enquanto é posta em prática no intuito de resolver um problema (considerando como problema o definido para este trabalho).

Um outro conceito, que sinto necessidade de clarificar, porque muito usado nos documentos acima referidos, é o conceito de *literacia matemática* que uso de acordo com a definição apresentada, pelo PISA 2012, e nele considerada o foco principal:

> É a capacidade que os indivíduos têm para formularem, aplicarem e interpretarem a matemática em contextos variados. Implica raciocinar matematicamente e usar conceitos matemáticos, processos, factos e

> ferramentas para descrever, explicar e prever fenómenos. Contribui para que os indivíduos reconheçam o papel que a matemática desempenha no mundo e para que cidadãos empenhados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados. (ProJAVI, 2013, p.1)[5]

Ligada a esta noção de literacia matemática está a capacidade de colocar, formular, resolver e interpretar problemas que utilizam a matemática numa variedade de situações e de contextos. Ou seja, para que um cidadão possua literacia matemática tem, entre outras, de adquirir uma série de competências relacionadas com a resolução de problemas. Isso é claro, quando no relatório do PISA 2012, relacionado com a literacia matemática, é apresentado o esquema da figura 5. Nesta figura, o quadro maior mostra que a literacia matemática é avaliada no contexto de um desafio ou problema que emerge do mundo real; o quadro do meio sublinha a natureza do pensamento matemático e ação que pode ser usada para resolver o problema e o quadro menor descreve os processos que o resolvedor do problema usa para construir uma solução.

Figura 5 - Quadro concetual do PISA 2012 para a avaliação da Literacia Matemática (ProJAVI , 2013, p. 3).

Como já referi, embora muito usado no domínio da Educação Matemática, o conceito de *resolução de problemas* não tem, tal como o conceito de problema, um significado consensual. Como refere Schoenfeld (1996), se pedirmos a sete educadores matemáticos para definir resolução de problemas será muito provável obtermos, pelo menos, nove opiniões diferentes.

---

[5] Primeiro documento de um conjunto de publicações cuja finalidade é divulgar os resultados de Portugal no PISA 2012 da responsabilidade do ProJAVI (avaliação internacional de alunos), Ministério da educação, e OECD.

Já em 1989, Stanic e Kilpatrick notam que apesar de os problemas ocuparem um lugar central nos currículos escolares de matemática, o mesmo não acontecia com a resolução de problemas. Na opinião dos autores, terá sido a partir do momento em que os educadores matemáticos aceitaram a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merecia uma atenção especial, que a confusão começou. “O termo resolução de problemas tornou-se um ‘slogan’ que engloba diferentes perspectivas do que é a educação, a escolarização, a matemática e porque é que se ensina matemática em geral e resolução de problemas em particular (...) adquirindo múltiplos, e frequentemente contraditórios, significados ao longo dos anos” (Schoenfeld, 1992, p. 9).

Na sua revisão histórica sobre a resolução de problemas nos currículos escolares, Stanic e Kilpatrick (1989) identificaram três temas principais no que diz respeito ao uso da resolução de problemas. No primeiro tema, a que chamaram *resolução de problemas como contexto* (problem solving as context), os problemas seriam veículos ao serviço de outros objetivos: como justificação para o ensino da matemática; como motivação para a introdução de outros tópicos; como elemento lúdico ou de recreação; como meio de desenvolvimento de novas capacidades e como prática – nesta ótica, a resolução de problemas poderia facilmente degenerar na resolução de exercícios, de acordo com a definição que adotei neste trabalho.

Stanic e Kilpatrick (1989) chamaram ao segundo tema *resolução de problemas como capacidade* (problem solving as skill), ou seja, a resolução de problemas seria uma de entre várias capacidades que devem ser ensinadas na matemática escolar. A resolução de problemas não rotineiros seria caracterizada como uma capacidade de ordem superior, a ser adquirida depois da capacidade de resolução de exercícios que, por sua vez, seria adquirida depois de os alunos terem aprendido os conceitos e as capacidades matemáticas básicas (Schoenfeld, 1992).

Por último, o terceiro tema identificado por Stanic e Kilpatrick (1989) foi denominado pelos autores como *resolução de problemas como arte* (problem solving as art). A perspetiva deste tema contrasta com as dos anteriores, pois a resolução de verdadeiros problemas – isto é, tarefas fechadas para as quais não se dispõe de um procedimento rápido para chegar à solução – “que causam perplexidade constitui o verdadeiro coração da matemática, senão a própria matemática” (Schoenfeld, 1992, p. 14).

Os vários significados associados à expressão *resolução de problemas* refletem as várias visões acerca da matemática e do seu ensino. Schoenfeld (1992), ao distinguir três conceções diferentes de *resolução de problemas* – 1) ato de resolver problemas como meio facilitador de aquisição de outros objetivos curriculares; 2) um objetivo, entre muitos, em si mesmo do processo de ensino, uma competência ou pedaço de conhecimento que vale a pena ensinar por si próprio; e 3) uma forma de arte, o que a matemática é em última instância – vai ao encontro das perspetivas mais comuns sobre resolução de problemas que encontramos na literatura: ver a resolução de problemas como um processo, um objetivo educacional, ou uma abordagem de ensino.

No entanto, existe também controvérsia sobre se a resolução de problemas é um *fim*, o resultado do ensino, um *meio* através do qual os conceitos matemáticos, processos e procedimentos são apreendidos, ou um *instrumento* com o qual se verificam, afinam ou consolidam aprendizagens conceptuais. Isto é, deverão os professores optar por ensinar para a resolução de problemas em si (teaching *for* problem solving), um fim; ensinar através da resolução de problemas (teaching *via,* or *through,* problem solving), um meio; ou utilizar a resolução de problemas como mais um instrumento (teaching *with* problem solving)? Qual, ou quais das três abordagens do ensino da resolução de problemas referidas por Schroeder e Lester (1989) – teaching *with, for,* and *via* problem solving - devem ser centrais no ensino da matemática?

Chapman (1999) identifica duas abordagens primordiais no ensino da Matemática: *Basic-skill Approach,* (abordagem pelas competências básicas) e *Meaning Approach* (abordagem pelo significado), e duas formas distintas para o ensino da resolução de problemas: o ensino *para* resolver problemas ou o ensino *através* da resolução de problemas.

No ensino através da resolução de problemas existe uma clara incompatibilidade com a abordagem *Basic-skill Approach,* uma vez que não se pretende uma experiência de aprendizagem que passe pela resolução repetitiva de tarefas. Quando se fala de ensinar através da resolução de problemas, admite-se que um problema ou uma situação nova serve para introduzir conceitos, investigar relações matemáticas, conetar novos conhecimentos com conhecimentos anteriores ou aprofundar ideias matemáticas. Será através destas experiências e processos que os estudantes adquirem as competências básicas e terão oportunidades para desenvolver capacidades de nível mais elevado, enquanto atribuem significado aos conceitos e aos procedimentos com que trabalham (Chapman, 1999).

Ora, com base no meu conhecimento tácito, não sendo a matemática escolar, em Portugal, pródiga no fornecimento de experiências deste tipo, aos alunos, é muito bom saber que competições como as do SUB12 e SUB14 proporcionam (infelizmente a um não muito grande número de alunos do ensino básico, em termos relativos), a possibilidade de aprender através da resolução de problemas. Não tendo a intenção de ensinar, têm a intenção de despertar nos participantes a noção de que ao resolver problemas aprendem, recordam, relacionam e conectam aprendizagens, e ensinam que errando se aprende, que é legítimo pedir ajuda quando a intenção é evoluir. Ou seja, podem funcionar como uma preparação, associada a emoções positivas, para futuras formas de ensino da matemática mais adequadas ao alucinante ritmo evolutivo da ciência e das novas tecnologias, em que o ensino através da resolução de problemas seja percecionado pelos alunos como uma agradável forma de eles próprios construírem o seu saber matemático, de fazer matemática e adquirirem a, tão essencial, literacia matemática. Tendo isto em consideração, na tentativa de tornar mais clara a importância de todas estas perspetivas sobre a resolução de problemas, vou referir mais algumas opiniões de autores que se debruçaram sobre estas questões.

Nunokawa (2005), por exemplo, considera a resolução de problemas matemáticos como "um processo de pensamento no qual o resolvedor tenta compreender uma situação problemática usando o conhecimento matemático que possui, e procura obter nova informação acerca da situação até resolver a tensão ou ambiguidade existente" (Nunokawa, 2010, p. 223; ver também Nunokawa, 2005; Lester & Kehle, 2003). O autor refere quatro tipos de abordagem da resolução de problemas no ensino da matemática.

No primeiro tipo de abordagem à resolução de problemas, a ênfase está na aplicação do conhecimento matemático que os alunos possuem, ou seja, corresponde a 'teaching *for* problem solving'. O segundo tipo coloca a ênfase na compreensão do contexto matemático do problema. "... o que é importante neste tipo [de abordagem] é que os alunos aprofundem a compreensão das situações que estão a explorar usando o seu conhecimento matemático" (Xenofontos, 2009, p. 2524; ver também Nunokawa, 2005). Nota-se aqui uma relação com "teaching *with* problem solving".

O terceiro tipo de abordagem à resolução de problemas proposto por Nunokawa (2010) enfatiza novos métodos matemáticos ou ideias que surjam ao tentar lidar com a situação problema, isto é, usar os problemas como instrumento no ensino da matemática. Nesta situação o professor deveria selecionar situações problemáticas apropriadas, que gerassem abordagens, por parte dos alunos, suscetíveis de propiciar formulações facilitadoras da introdução de novos conhecimentos matemáticos, pelo que se encontra aqui uma relação com "teaching *via* problem solving". Por último, o quarto tipo de abordagem proposto está centrado no ensino e uso dos próprios processos de resolução, ou seja, "teaching *about* problem solving". O que se pretende é que os alunos adquiram "a sabedoria para lidar com situações problemáticas, a gestão dos seus processos de resolução, e comunicar o seu pensamento" (Xenofontos, 2009, p. 2525; ver também Nunokawa, 2005).

Segundo a perspetiva de Lesh e Zawojewski (2007, citados em Cai & Lester, 2010), ensinar primeiro os conceitos e os procedimentos, depois propor problemas simples desenhados para praticar os conteúdos aprendidos (ou seja, exercícios), a seguir ensinar a resolução de problemas como um conjunto de estratégias e, por fim, se houver tempo, colocar aos alunos problemas de aplicação que requerem a matemática anteriormente aprendida, embora seja uma abordagem comum não é suportada pela investigação. De facto, “nos últimos 30 anos têm surgido evidências de que esta abordagem não melhora a resolução de problemas dos alunos ao ponto de não estar a decorrer nenhuma investigação com esta abordagem de intervenção educacional” (Cai & Lester, 2010, pp. 2-3; ver também Begle, 1973; Charles & Silver, 1988; Lester, 1980; Schoenfeld, 1979).

De facto, parece ser quase consensual, no campo da investigação em educação matemática, que o uso da resolução de problemas como um tópico que se acrescenta depois de ensinados os conceitos, os procedimentos e as estratégias não é de nenhuma forma suficiente para que os alunos se tornem bons resolvedores de problemas.

Cai e Lester (2010) sugerem como alternativa fazer da resolução de problemas parte integrante do ensino da matemática, isto é, “teaching *through* problem solving” os autores reforçam esta ideia referindo a visão segundo a qual existe uma conexão simbiótica entre a resolução de problemas e a aprendizagem de conceitos: “Os estudantes aprendem e compreendem matemática através da resolução de problemas matematicamente ricos e a resolução de problemas desenvolve-se através da aprendizagem e compreensão de conceitos e procedimentos” (Cai & Lester, 2010, p. 3). Assim, referindo-se a variados trabalhos de investigação ao longo do tempo, Cai e Lester (2010) argumentam que

> Empiricamente, ensinar matemática através da resolução de problemas ajuda os alunos a ir além da aquisição isolada de ideias direcionando-os para um sistema de conhecimento cada vez mais conexo e complexo (...) O poder da resolução de problemas é o de que obter uma boa e correta solução requer dos alunos um afinamento, uma combinação e uma modificação do conhecimento já aprendido. (Cai & Lester, 2010, p. 3)

A resolução de problemas é, portanto, um conceito multidimensional, sendo vista, sobretudo, “como um objetivo, um processo, uma competência básica, uma forma de inquirição, pensamento matemático, ou uma abordagem de ensino” (Chapman, 1997, citada em Xenofontos, 2009, p. 2523). No entanto, as perspetivas mais utilizadas, “mais importantes são as que veem a resolução de problemas como um processo, um objetivo educacional e uma abordagem de ensino” (Xenofontos, 2009, p. 2523).

É inegável que as abordagens ao ensino condicionam a aprendizagem dos alunos, o que aprendem e como aprendem. A própria OCDE, num documento publicado pela Agência de Execução relativa à Educação, ao Audiovisual e à Cultura (EACEA P9 Eurydice) em 2011, refere isso mesmo:

> As abordagens e os métodos utilizados no ensino da matemática nas escolas podem ter um impacto considerável sobre o quanto os alunos aprendem na aula,

> bem como sobre a qualidade dessa aprendizagem. Métodos pedagógicos adequados são suscetíveis de melhorar o seu nível de compreensão e de os ajudar a dominar as regras e os processos matemáticos. Os métodos utilizados influenciam igualmente a forma como se empenham e desfrutam da aprendizagem o que, por sua vez, nela se reflete indiretamente em termos quantitativos e qualitativos. (Rede Eurydice, 2011, p. 55)

Neste documento, é referida a existência de diversos estudos que se debruçaram sobre os métodos mais eficazes para o ensino da matemática. Entre eles é referido o *Mathematics Matters*, realizado em Inglaterra pelo Centro Nacional de Excelência no Ensino da Matemática (National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics - NCETM). Este estudo, com a duração de um ano, foi realizado com o intuito de identificar as características do ensino eficaz da disciplina de matemática. No entanto, concluiu-se não ser possível identificar um método de ensino único que se possa considerar melhor. Os informantes principais deste estudo, cerca de 150 educadores matemáticos de todos os níveis de ensino até ao secundário e ainda da formação de adultos e de professores, forneceram os dados que conduziram à conclusão de que "os tipos de aprendizagem seguintes são particularmente úteis: facilidade em recordar factos e exercer competências; compreensão conceptual e interpretação tendo em vista as representações; estratégias de investigação e de resolução de problemas; reconhecimento da importância da matemática na sociedade" (Rede Eurydice, 2011, p. 55). É ainda referido que os participantes nesta investigação,

> (...) acabaram por chegar a acordo quanto à existência de diversos métodos adequados à aquisição desses diferentes tipos de aprendizagem, incluindo, a título de exemplo, a utilização de questões com um grau de dificuldade superior que incentivem o raciocínio em vez da 'resposta imediata' e desenvolvam a linguagem matemática através da atividade de comunicação. (Swan, Lacey e Mann, 2008, citados em Rede Eurydice, 2011, p. 55)

Hiebert e Grouws (2009, citados em Rede Eurydice, 2011) sustentam que "cada um dos métodos não é, por si só, eficaz ou ineficaz. Todos os métodos de ensino são 'eficazes para alguma coisa" (p. 56). Esta afirmação parece-me evidenciar um forte apelo ao não radicalismo relativamente às escolhas que por vezes são feitas relativamente aos métodos usados ou recomendados para o ensino da matemática, radicalismo com que eu também discordo. No fundo, estes autores defendem um "equilíbrio ponderado entre as (…) abordagens pedagógicas, dando-se maior ênfase aos aspetos relacionados com a compreensão conceptual" (Hiebert & Grows, 2009, citados em Rede Eurydice, 2011, p. 56). Mais pormenorizadamente,

> (...) diversas abordagens pedagógicas contribuem para desenvolver a compreensão conceptual em matemática e a ‘eficácia das competências’. Mais precisamente, quando se trata do desenvolvimento da compreensão conceptual, os dois elementos importantes do ensino são: os ‘debates em torno da matemática, incluindo a análise das relações entre as suas várias áreas, a investigação das razões que levam a que os diferentes procedimentos funcionem como funcionam e a análise das diferenças entre as diversas abordagens; e fazer com que os alunos se deparem com problemas matemáticos abertos e complexos. (Hiebert & Grouws, 2009, citados em Rede Eurydice, 2011, p. 56)

Mesmo considerando que o SUB12 e o SUB14 são importantes enquanto iniciadores de comportamentos facilitadores da implementação de um ensino da matemática através da resolução de problemas, considero ser mais importante, no âmbito deste estudo, aprofundar um pouco mais o conhecimento acerca da resolução de problemas enquanto processo. De facto, as competições SUB12 e SUB14 são contextos onde a resolução de problemas é encarada como um processo. E, assim, é nesta perspetiva que vou agora passar a olhar para a resolução de problemas.

O projeto Problem@Web e, portanto, este trabalho enfatiza a dimensão de processo da resolução de problemas. Assim, faz sentido discutir alguns modelos de resolução de problemas que perspetivam esta atividade como um processo e a referência a Polya (1945) é incontornável neste campo.

Polya (1945) sugeriu quatro fases para o processo de resolução de problemas: compreender o problema, idealizar um plano, executar o plano, e *olhar para trás*, isto é, olhar para o que foi feito e ver se faz sentido no contexto do problema que se pretende resolver. Olhar para trás é talvez, na minha opinião, a fase mais importante da resolução de problemas pois proporciona oportunidades de aprendizagem únicas. Ao verificar o resultado e os argumentos, ao procurar verificar se o resultado é único e interpretá-lo, ao usar outro método, ao reinterpretar o problema e até, por vezes, ao colocar novos problemas, o aluno está a fazer matemática e a construir saber. Olhar para trás pode obrigar a recomeçar com um outro olhar, com um outro plano, com uma outra execução. “Os modelos estilo Polya são muitas vezes mal interpretados como aplicações lineares de uma série de passos, tanto por causa da forma como são apresentados em numerosos manuais (Wilson et al., 1993) como porque assim são entendidos por muitos professores (Kelly, 2006)” (Xenofontos, 2009, p. 2524). No entanto, não há uma linearidade rígida no modelo de Polya, uma vez que, por exemplo, a segunda e terceira fases estão bastante interligadas e as quatro fases não são necessariamente disjuntas, já que cada uma delas ajuda a realizar as outras (Jacinto & Carreira, 2012).

Outros modelos para o processo de resolução de problemas têm sido avançados por vários investigadores tais como: 1) a estratégia de três passos proposta por Schoenfeld (1985, citado em Jacinto, 2008): "analisar, explorar e verificar" (Marcou & Lerman, 2006, p. 139); 2) o modelo proposto por Lester, Garofalo e Kroll (1989, citados em De Corte, 2000) que estabelece os processos cognitivos na resolução de problemas de "orientação, organização, execução e verificação" (Marcou & Lerman, 2006, p. 139); e 3) o modelo de cinco etapas de aprendizagem autorregulada proposto por Verschaffel (1999, citado em Jacinto, 2008): "construir uma representação mental do problema, decidir como resolver o problema, efetuar os cálculos necessários, interpretar os resultados e formular uma resposta e avaliar a solução" (Marcou & Lerman, 2006, p. 139).

Uma análise a estes quatro modelos referidos, tendo por foco os processos neles incluídos, permite concluir que, ao nível da estrutura e organização dos processos, as diferenças limitam-se à extensão e refinamento de cada fase. As principais diferenças entre estes modelos residem nas bases teóricas e motivações que os sustentam, sendo que o modelo apresentado por Polya pode entender-se como o que melhor descreve as ideias fundamentais de todos os outros. Nenhum destes modelos pode considerar-se como sendo o melhor para garantir o sucesso na resolução de um problema, mas todos assentam na "interiorização e utilização de estratégias gerais de resolução de problemas - as conhecidas heurísticas" (Menina & Carreira, 2009, p. 264). Neste sentido, Mayer (1983, citado em Poggioli, 2001) identifica quatro componentes de um problema, desde o estado inicial até à solução (que ele considera integrada no estado final). Essas componentes são: 1) as *metas*, o que pretendemos alcançar; 2) os *dados*, a informação disponível, o que sabemos e podemos usar como ponto de partida; 3) as *restrições*, isto é, por exemplo, os fatores que limitam o caminho para chegar à solução, as relações que existem entre os dados, os pressupostos matemáticos, as hipóteses, as condições que são expressas matematicamente; e 4) os *métodos*, as múltiplas formas de resolver um problema como as formulações matemáticas, os instrumentos matemáticos, as regras, os modos de representação (gráficos, tabelas, diagramas em árvore, esquemas geométricos, etc.), as analogias com outros problemas ou situações.

As ideias de Mayer (1983, citado em Poggioli, 2001) acabam também por estar contempladas no modelo de Polya, sobretudo quando olhamos para cada fase proposta por este e lhe associamos algumas heurísticas.

> Uma heurística é um método ou processo criado com o objetivo de encontrar soluções para um problema. É um procedimento simplificador (embora não

simplista) que, em face de questões difíceis envolve a substituição destas por outras de resolução mais fácil a fim de encontrar respostas viáveis, ainda que imperfeitas.[6]

Na sua obra *How to Solve it* - Um novo aspeto do método matemático, George Polya (1957) refere-se à matemática como tendo duas faces, a da ciência rigorosa de Euclides e outra coisa. Segundo Polya, estas duas faces surgem ao estudar métodos para resolver problemas e são, de um lado, a ciência dedutiva e sistemática, à maneira de Euclides; do outro, a matemática que aparece ao fazer-se, uma ciência indutiva e experimental. (Polya, 1957) Nesta mesma obra, numa espécie de resposta à pergunta “Como posso resolver um problema matemático?”, Polya apresenta a heurística que ficou para sempre associada ao seu nome.

1ª Fase – Compreensão do problema

- Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?
- Faça uma figura. Escolha uma notação adequada.
- Separe as várias partes da condição. É possível anotá-las?

2ª Fase – Estabelecimento de um plano

- Já viu o problema anteriormente? Ou já viu o mesmo problema apresentado de forma ligeiramente diferente? Conhece um problema relacionado com o problema proposto? Conhece um teorema que lhe pode ser útil?
- Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
- Aí tem um problema relacionado com o problema proposto e que foi resolvido anteriormente. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Será necessário introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?
- É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.
- Se não conseguir resolver o problema proposto, procure resolver, primeiro, algum problema com ele relacionado. Consegue imaginar um problema relacionado com o problema original e que seja mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? Consegue resolver parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condição, ponha a outra de lado; até que ponto fica, assim, determinada a incógnita? Como pode esta última variar? É possível extrair alguma coisa útil dos dados? Consegue pensar noutros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível mudar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de forma que a relação entre eles seja mais imediata?

---

[6] (http://pt.wikipedia.org/wiki/Heur%C3%ADstica)

- Utilizou todos os dados? Utilizou a condição na sua totalidade? Tomou em consideração todas as noções essenciais implicadas no problema?

3ª Fase – Execução do plano

- Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. Consegue ver, com clareza que o passo está correto? Consegue demonstrar que ele está correto?

4ª Fase – Verificação

- É possível verificar o resultado? É possível verificar o raciocínio? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? Consegue vê-lo, num relance? É possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema? (Ferreira, 2007, p. 28)

Para Schoenfeld (2010) há quatro categorias de conhecimento que determinam a qualidade e o sucesso na resolução de problemas: 1) a base de conhecimento; 2) as estratégias de resolução de problemas (heurísticas); 3) o controlo (a monitorização e autorregulação ou metacognição); e 4) as crenças (perceção que o indivíduo tem da matemática, dele próprio, do contexto). Nas competições SUB12 e SUB14, sobretudo durante a fase de apuramento, todas estas categorias podem ser desenvolvidas. As três primeiras dependem da vontade dos alunos e do acolhimento que fazem a todas as condições de trabalho que o contexto das competições lhes oferecem: tempo, possibilidade de ajuda, feedback orientador e incentivador. A forma de participação, online, a partir de casa ou da escola, com possibilidade de utilização de recursos vários e de acordo com as preferências do participante, em grupo ou individualmente, com ajuda de familiares ou amigos, ou o próprio professor, a inexistência de julgamentos baseados no desempenho, etc. originam bem-estar e apoiam crenças positivas, afastando todos os preconceitos inibidores do prazer de resolver problemas.

As competições SUB12 e SUB14, ao enfatizarem a resolução de problemas como um processo (mas também como um objetivo, perspetiva que é mais visível a priori pelos participantes), funcionam como uma pequena estufa onde se cultivam plantinhas de curiosidade, gosto e persistência pelo trabalho matemático. As plantinhas sentem-se protegidas, amparadas, incentivadas, sem julgamentos nem penalizações, livres para crescer mais fortes e conscientes do seu poder de melhorar as suas próprias capacidades matemáticas, em particular de resolução de problemas de matemática. Estufas como esta são absolutamente essenciais uma vez que as escolas são por vezes campos áridos onde os agricultores têm restrições várias que os impedem de proporcionar este tipo de ambiente. Alguns desses impedimentos têm origem nas diretrizes dos programas e currículos emanados do poder político, como veremos de seguida.

1.3 A resolução de problemas nos currícula portugueses

Em 1980, na *Agenda for Action - Recommendations for School Mathematics of the 1980s*, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1980) recomenda "A resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar nos anos 80" (p.1) e acrescenta uma lista de ações a desenvolver para o prosseguimento desta intenção:

> - O currículo de matemática deve ser organizado à volta da resolução de problemas (…)
> - A definição e linguagem da resolução de problemas em matemática deve ser desenvolvida e expandida por forma a incluir uma grande variedade de estratégias, processos, e modos de apresentação que permitam acompanhar todo o potencial das aplicações matemáticas (…)
> - Os professores de matemática devem criar ambientes de sala de aula nos quais a resolução de problemas possa desenvolver-se (…)
> - Devem ser desenvolvidos materiais curriculares para ensinar resolução de problemas, para todos os níveis de ensino (…)
> - Os programas de matemática (…) devem envolver os alunos na resolução de problemas apresentando aplicações em todos os níveis.
> - Investigadores e fundações devem dar prioridade (…) às investigações sobre a natureza da resolução de problemas e formas efetivas de desenvolver os resolvedores de problemas. (NCTM, 1980, pp. 1-5)

Estas ações acabam por espelhar a forma múltipla como o NCTM perspetivava a resolução de problemas no currículo, abraçando as três perspetivas que referi atrás: a resolução de problemas como um processo, um objetivo e uma abordagem.

Na minha perspetiva, estas recomendações são tão relevantes e apropriadas hoje, em Portugal, como o eram em 1980. Aliás, em 2007, Schoenfeld entendia que estas recomendações continuavam válidas nos EUA.

Desde o princípio dos anos 80 do século passado que a necessidade de renovação do ensino da matemática em Portugal se fazia sentir. Em Portugal, tal como aconteceu noutros países, à constatação de que

> O ensino da Matemática no Curso Secundário atingiu nos últimos anos uma situação crítica. É generalizado o não-cumprimento dos programas. São patentes a elevada taxa de reprovações, o desinteresse geral dos alunos e as graves deficiências em conhecimentos com que estes saem da Escola. A origem

> de tão grande insucesso nesta disciplina é motivo da mais funda preocupação para muitos professores (SPM citada em Matos, 2008, p. 2)

junta-se a crítica aos programas do ensino secundário. Em particular, estas críticas assentavam no facto de os programas terem sofrido muitas alterações no sentido de "tornar a disciplina mais hermética, mais formalizada, com maior carga de simbolismo, com uma linguagem mais complicada e mais desligada da realidade e das aplicações" (SPM citada em Matos, 2008, p. 2). A crítica é feita ao ensino secundário, mas o mesmo se passava no ensino básico, o que se refletia de forma evidente no ensino secundário. No entanto, por não existir avaliação externa ao nível do ensino básico, a evidência do insucesso na matemática, neste nível, era de certa forma ignorada, ou desculpada, sobretudo com o argumento da dificuldade de adaptação à massificação do ensino. Mais tarde, viriam a ser implementadas as provas de aferição no final de ciclo e, posteriormente, os exames de matemática no 9.º ano de escolaridade.

Neste cenário, a proposta de adoção da resolução de problemas como eixo organizador do currículo de matemática foi considerada um contributo importante (Matos, 2008, p. 1). De facto, uma das respostas a este estado de coisas veio da discussão promovida num seminário em Vila Nova de Milfontes, acerca da renovação do currículo de Matemática, em 1988, onde foi defendido que a resolução de problemas não deveria ser uma atividade para realizar em paralelo ao ensino curricular da Matemática: "A resolução de problemas - tradução de problem solving - deverá constituir o tipo privilegiado das atividades em Matemática" (APM, 1988, p. 44). Indo mais longe, o documento que emanou deste seminário propunha que o professor, na sua prática pedagógica, ensinasse as ideias e conceitos matemáticos, usando como ponto de partida situações problemáticas. Ou seja, já em 1988, se considerava que não bastava apresentar os problemas como forma de aplicar os conhecimentos de Matemática, mas que estes deveriam servir como meio para motivar os alunos e para fazer surgir e explorar conceitos matemáticos. Neste contexto, o papel do professor adquire uma nova dimensão: "O professor deixará de ter meramente o papel de fornecedor da informação para passar a ser também um organizador das atividades, um facilitador da aprendizagem, um dinamizador do trabalho, um companheiro da descoberta". (APM, 1988, p. 58). Ou seja, a resolução de problemas passa a ser encarada como um processo importante, um objetivo e como uma abordagem de ensino.

No entanto, esta visão não fica bem clara no *Programa de Matemática do ensino básico,* que é publicado em 1991 (DGEBS, 1991). A resolução de problemas aparece como um objetivo geral e uma capacidade a adquirir: "...consideram-se finalidades da disciplina de Matemática no ensino básico: (...) desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como a memória, o rigor, o espírito crítico e criatividade...” (DGEBS, 1991, p. 175), mas também como um processo.

Desenvolver a capacidade de resolver problemas

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões,...)
- Procurar, selecionar e interpretar informação relativa ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução.
- Interpretar e criticar resultados dentro do contexto da situação. (DGEBS, 1991, p. 176)

Mais tarde, o *Currículo Nacional do Ensino Básico* (CNEB) (DEB, 2001) acrescentou uma noção central ao programa de matemática de 1991, a noção de competência matemática. O CNEB explicita que a competência matemática compreende o desenvolvimento integrado de conhecimentos, capacidades e atitudes e, entre as diversas capacidades matemáticas, encontra-se a resolução de problemas, que é também encarada como um contexto universal de aprendizagem que deve ser naturalmente integrado nas diversas atividades da aula.

No entanto, e de acordo com a visão internacional “Resolver problemas não é apenas um objetivo da aprendizagem matemática, mas também um importante meio de a fazer (…)” (NCTM, 2000, p. 4). Na verdade, a mudança de perspetiva e o retomar de vitalidade desta temática da resolução de problemas viria a sentir-se na centralidade que ocupou no *novo* Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) com uma força mais genuína, porque mais clara, profunda e abrangente. Na introdução deste programa afirma-se que, ao constituir um reajustamento do programa datado do início dos anos noventa, foram introduzidas “mudanças significativas em alguns aspetos” (ME, 2007, p. 1). Mudanças como, por exemplo: formulações completamente novas das finalidades e objetivos gerais que procuram melhorar a clareza e o conteúdo do que é proposto como principais metas, e o facto de o programa assumir a necessidade de se indicarem, para além dos temas matemáticos, três capacidades transversais a toda a aprendizagem da matemática – a *resolução de problemas*, o *raciocínio matemático* e a *comunicação matemática* que, acrescenta, devem merecer uma atenção permanente. E, apesar de destacar apenas três grandes capacidades transversais, esclarece que:

> Os objetivos gerais (…) procuram tornar mais explícito o que se espera da aprendizagem dos alunos, valorizando as dimensões dessa aprendizagem relacionadas com a representação, comunicação e raciocínio em Matemática, a resolução de problemas e as conexões matemáticas, e a compreensão e

> disposição para usar e apreciar a Matemática em contextos diversos. (ME, 2007, p. 4)

Nas orientações deste programa, é possível observar que a resolução de problemas assume as três funções distintas, mas complementares, que temos vindo a referir neste trabalh. Surge como um processo a desenvolver ao longo dos vários temas, nas diversas recomendações, especificações de objetivos e notas, salientando a utilização de conhecimentos e de conceitos matemáticos na resolução de problemas, por exemplo “compreender relações entre elementos de um triângulo e usá-las na resolução de problemas” (ME, 2007, p. 38). O programa aconselha ainda que, “Neste processo [de resolução de problemas], os alunos devem compreender que um problema matemático, frequentemente, pode ser resolvido através de diferentes estratégias e dar atenção à análise retrospetiva da sua resolução e apreciação das soluções que obtêm” (ME, 2007, p. 6). Explicitando um pouco mais, o programa recomenda que

> [Os alunos] devem ser capazes de: compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas; apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam; monitorizar o seu trabalho e refletir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes; formular problemas. (ME, 2007, p. 5)

Nesta base, é promovido o ensino da resolução de problemas, isto é, os alunos devem saber resolver um problema de matemática, por si só (Schroeder & Lester, 1989), A resolução de problemas surge como objetivo geral do ensino da Matemática ao longo dos três ciclos do Ensino Básico: “Os alunos devem ser capazes de resolver problemas (...)” (ME, 2007, p. 5). Mas surge também como uma abordagem de ensino: “A resolução de problemas (...) constitui uma atividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos” (ME, 2007, p. 8), enfatizando-se um ensino através da resolução de problemas (Schroeder & Lester, 1989).

Na verdade, o programa (ME, 2007) valoriza as perspetivas do ensino *através* e *da* resolução de problemas, indo além do ensino *com* resolução de problemas (Schroeder & Lester, 1989), vendo a resolução de problemas essencialmente como um processo e uma abordagem de ensino:

> Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e promover o raciocínio e a comunicação matemáticos (...) constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as atividades a realizar em aula. Isso significa que o professor deve proporcionar situações frequentes em que os alunos possam

> resolver problemas, analisar e refletir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas. (ME, 2007, p. 9)

A reter deste programa, entre outros aspetos já destacados fica a clara mensagem de que "A ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas, mas sim na utilização da matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar..." (ME, 2007, p. 58).

Mais recentemente, no *Programa de Matemática e Metas Curriculares para o Ensino Básico*, de 2013 (MEC, 2013), a visão sobre o papel da resolução de problemas no currículo é notoriamente distinta. A ênfase está agora no rigor, no formalismo, no treino. A criatividade é esquecida. Efetivamente, logo no primeiro parágrafo da introdução está bem claro o que se pretende: "melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem, através de uma cultura de rigor e de excelência desde o Ensino Básico" (MEC, 2013, p. 1). No fim da introdução, depois de se recordar que o programa e as metas curriculares são "de utilização obrigatória pelas escolas e professores" (p.1), esclarece-se que o objetivo central do ensino, a *compreensão,* "resulta da ampliação contínua e gradual de uma complexa rede de regras, procedimentos, factos, conceitos e relações ..." (MEC, 2013, p. 1).

O programa destaca como as "três grandes finalidades para o Ensino da Matemática: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade" (MEC, 2013, p. 2). Ao esclarecer cada uma delas, considera como base essencial para a estruturação do pensamento aquilo que designa por "gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo" (MEC, 2013, p. 2), isto é, "a apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa" (MEC, 2013, p. 2). Mais do que isso, o programa refere que o trabalho com esta *gramática* é fundamental na estruturação do pensamento pois "contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis. Contribui ainda para melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral" (MEC, 2013, p. 2).

Ao ler isto o que me ocorreu de imediato foi, qual filme de ficção científica, um mundo de humanos robotizados, onde a instalação de um chip seria suficiente para dotar os indivíduos de todas as capacidades matemáticas, de rigor e raciocínio dedutivo. De facto, ao esclarecer as finalidades relativas à análise do mundo natural e à interpretação da sociedade, não se percebe, para além da afirmação da indispensabilidade da matemática, de que forma a aprendizagem da matemática nos moldes propostos (e obrigatórios) contribui para as atingir efetivamente. Talvez por isso tenha surgido a necessidade de os autores do programa terem acrescentado que "Estas finalidades só podem ser atingidas se os alunos forem apreendendo adequadamente os métodos próprios da Matemática" (MEC, 2013, p. 2).

O programa refere ainda que

> O gosto pela Matemática e pela redescoberta das relações e dos factos matemáticos – que muitas vezes é apresentada como uma finalidade isolada – constitui um propósito que pode e deve ser alcançado através do progresso da compreensão matemática e da resolução de problemas. (MEC, 2013, p. 2)

No entanto, tal como já referi numa secção anterior deste trabalho, a noção de problema presente no programa de 2013 (MEC, 2013) parece não ser muito consensual com o sentido que esta tarefa tem tanto no programa de 2007 (ME; 2007) como no trabalho que desenvolvi e no projeto Problem@Web. Na aceção de Ponte (2005), a noção de problema que surge no programa de 2013 (MEC, 2013) diz mais respeito a exercícios do que propriamente a problemas.

Mais ainda, a perspetiva suportada pelo programa atual (MEC, 2013) acerca do papel da resolução de problemas no currículo da matemática escolar, ao nível do Ensino Básico, fica-se apenas na visão da resolução de problemas como um processo, que deve ser treinado ao longo dos vários ciclos de escolaridade:

> A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. (MEC, 2013, p. 5)

Embora possa ser discutível que o programa atual (MEC, 2013) preconize a resolução de problemas como um objetivo (que, a ser considerado, na minha opinião, é visto de modo muito redutor), a resolução de problemas como uma abordagem de ensino é afastada por completo das recomendações específicas para o trabalho em sala de aula.

Ao ler as linhas fundamentais do programa de 2013 (MEC, 2013), afigurasse-me que a *nova* visão da matemática e do seu ensino é afinal *velha* porque muito semelhante à existente anteriormente aos anos 80, como se pode constatar ao ler:

> Embora a linguagem matemática seja baseada em regras que têm de ser aprendidas, a bem da motivação, é importante que os alunos sejam capazes de ir além dessas regras de modo a serem capazes de se exprimirem na linguagem da matemática. Esta transformação sugere mudanças tanto no conteúdo curricular, como na abordagem de ensino. Envolve um esforço renovado em nos focarmos em: procurar soluções, não apenas memorizar procedimentos;

> explorar padrões, não apenas memorizar fórmulas; e formular conjeturas, não apenas resolver exercícios. (…) os alunos terão [assim] oportunidade de estudar matemática como uma disciplina dinâmica, exploratória, que evolui, em vez de um conjunto fechado de leis a ser memorizadas, rígido e absoluto. (National Research Council, 1989, p. 84)

Deste modo, em 2013, o poder político ordena ao professor de matemática do ensino básico que construa o seu trabalho segundo uma visão do ensino da matemática anterior a 1984, o que em nada contribui para, entre muitíssimos outros aspetos, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas matemáticos e para uma aprendizagem mais significativa desta ciência.

1.4 Recomendações curriculares internacionais acerca da resolução de problemas

Em pleno século XXI, o *Programa de Matemática e Metas Curriculares para o Ensino Básico* de 2013 (MEC, 2013) ignora por completo a conhecida afirmação *A matemática é a arte de resolver problemas* atribuída a Polya. Ao desprezar a conceção de resolução de problemas como uma abordagem de ensino, em particular, ao não considerar a possibilidade de um ensino da Matemática através da resolução de problemas, os autores do programa português de matemática para o Ensino Básico fazem-no distanciar-se do de países como os Estados Unidos da América e Singapura, onde a capacidade de formular, representar e resolver problemas tem um papel central na aprendizagem da matemática e a resolução (e formulação) de problemas é considerada um objetivo fundamental.

O NCTM (2000) identifica a resolução de problemas como um dos cinco processos matemáticos fundamentais na aprendizagem matemática, juntamente com o raciocínio e prova, a comunicação, as conexões, e as representações. Em 2014, esta organização publica o *Principles to actions* (NCTM, 2014), que dedica a maior secção ao Ensino e Aprendizagem, o primeiro princípio orientador, e onde é afirmado que “temos de mudar uma série de realidades improdutivas e problemáticas que existem em demasiadas salas de aula” (NCTM, 2014, p.2). E indica algumas dessas realidades das quais saliento duas: o foco exagerado nos procedimentos (da aprendizagem) sem nenhuma ligação ao significado, compreensão, ou aplicações que requerem esses procedimentos; e o peso excessivo colocado nos resultados da avaliação relativamente às questões com ênfase nas capacidades procedimentais e na memorização de factos em detrimento da atenção à resolução de problemas e raciocínio, considerada manifestamente insuficiente. No intuito de melhorar o ensino-aprendizagem da matemática, o NCTM (2014) descreve e ilustra “oito práticas de ensino da matemática que a investigação considera necessário serem componentes consistentes de qualquer aula de matemática" (p. 3). Uma dessas práticas refere a implementação e promoção do raciocínio e resolução de problemas, esclarecendo que "o ensino efetivo da matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovam raciocínio matemático e resolução de problemas e que permitam múltiplas abordagens e estratégias de solução variadas" (NCTM, 2014, p. 3).

No programa de estudos de matemática do Ministério da Educação de Singapura (MES), publicado em 2012 e implementado em 2013, fica claro que a educação matemática neste país tem como objetivos abrangentes criar condições para que os alunos "adquiram e apliquem conceitos e capacidades matemáticos; desenvolvam capacidades cognitivas e metacognitivas através de uma abordagem matemática à resolução de problemas; e desenvolvam atitudes positivas face à matemática" (MES, 2012, p. 7). Neste programa de Singapura, o objetivo comum a todos os níveis de ensino, do primeiro ao décimo segundo ano de escolaridade, é "desenvolver o pensamento, o raciocínio, a comunicação, a capacidade de aplicar conceitos e procedimentos e a metacognição através de uma abordagem matemática à resolução de problemas" (MES, 2012, p. 8), recomendando uma abordagem de ensino precisamente através da resolução de problemas. Além disso, é de salientar a estrutura em que assenta o processo de ensino-aprendizagem da matemática, ilustrado na figura 6.Esta estrutura vigora desde 1990 e tem-se sempre mostrado relevante.

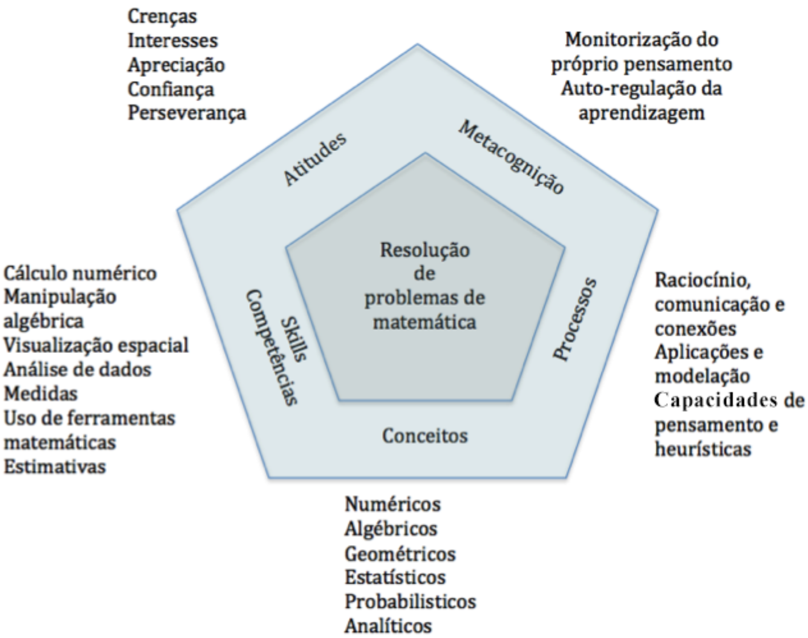


Figura 6 - Estrutura da matemática (enquanto disciplina do currículo) (MES, 2012, p. 14).

A estrutura seguida pelo MES traz consigo uma importante mensagem para os professores, uma indicação clara de como se pretende que seja o ambiente de sala de aula e a perspetiva de ensino-aprendizagem da matemática a adotar:

> As cinco componentes da estrutura matemática são parte integrante da aprendizagem matemática e resolução de problemas. A estrutura visa ajudar os professores a focarem-se nestas componentes na sua prática letiva por forma a promover um ambiente de aprendizagem mais envolvente, centrado no aluno e tecnologicamente capaz, bem como uma maior diversidade e criatividade na aprendizagem (MES, 2012, p. 17).

Também na China a atividade de resolução de problemas na sala de aula é considerada de extrema importância para o desenvolvimento de um pensamento matemático flexível e independente; além disso, tal como nos EUA, a resolução de problemas é pivot no desenvolvimento do pensamento e raciocínio dos alunos (Cai & Nie, 2007, citados em Xenofontos, 2009). A resolução de problemas é vista como um conjunto de competências que os alunos devem adquirir.

Por muito que, em Portugal, se continue a resistir à importância da resolução de problemas no ensino da matemática, é no mínimo conveniente tomar consciência do que se passa no resto do mundo. Deve ter-se em conta o que comprovadamente surtiu efeito positivo noutros sistemas de ensino no que respeita ao ensino de matemática. Por exemplo, não ignorar que os estudantes de Xangai (China), Singapura e Hong Kong obtiveram as melhores classificações, tanto em 2009 como em 2013, nas três categorias do estudo internacional PISA (Matemática, Leitura e Ciência). Na revista Time, em 2010, podia ler-se:

A China bate a Finlândia com as melhores classificações em educação[7]

> (…) há outra área na qual os chineses estão subitamente a emergir como potência mundial: educação.(…) a OCDE tentou explicar a razão pela qual Xangai e Hong Kong apresentam níveis de desempenho escolar tão elevados. De entre as lições a aprender está a de que as autoridades de ambas as cidades abandonaram o seu foco de educar uma pequena elite e, em vez disso, trabalharam para construir um sistema mais inclusivo. Também aumentaram de forma significativa o ordenado e a formação dos professores, reduzindo a ênfase na aprendizagem rotineira [“rote learning”[8] no original] e focando as atividades na sala de aula na resolução de problemas (...) Em Xangai, agora uma pioneira na reforma educacional, ‘houve uma enorme mudança na pedagogia’, afirmou a

[7] http://content.time.com/time/world/article/0,8599,2035586,00.html
[8] Rote learning – processo de aprendizagem por repetição com mais ênfase na memorização que na compreensão (process of learning sth by repeating it until you remember it rather than by understanding the meaning of it (Oxford advanced learner’s dictionary))

> OCDE. E referiu que um novo slogan usado nas salas de aula atualmente é: ‘Para cada pergunta deve existir mais do que uma única resposta.’(Gumbel, 2010, s/p)

Apesar de o facto de os programas nestes países com melhor desempenho em testes internacionais – que medem a literacia na matemática, ciência e leitura, não se focando em conteúdos curriculares mas valorizando aprendizagens para a vida – serem guiados por uma perspetiva que enfatiza a resolução de problemas como processo, objetivo e abordagem de ensino, temos também de ter em conta os aspetos sociais e culturais destas nações, em que a cultura de responsabilização dos alunos e a valorização da escola e da aprendizagem são certamente fatores que contribuem para resultados tão positivos como os que têm sido atingidos.

1.5 A importância da resolução de problemas na educação matemática

Começo por recordar uma afirmação de Polya com que estou plenamente de acordo, e que de certa forma tem implícita a importância, também, da resolução de problemas.

> Tendo experienciado o prazer na matemática ele não o esquecerá facilmente e, então, existirá uma grande probabilidade de que a matemática se torne algo para ele: um hobby, ou uma ferramenta para a sua profissão, ou a sua profissão, ou uma grande ambição. (Polya, 1957, p. vi)

“Os melhores educadores sempre tentaram encorajar o desenvolvimento das capacidades necessárias para executar tarefas não rotineiras, isto é, ensinar para a vida, não para a escola (OCDE, 2014, p. 28). Neste sentido, tanto este trabalho como o projeto Problem@Web consideram a resolução de problemas como algo que se deve aprender e como um processo através do qual se aprende. A perspetiva adotada é que a resolução de problemas assenta no desenvolvimento de atitudes e capacidades e no apreço pela matemática.

A sociedade atual evolui, em todas as áreas, a um ritmo tão acelerado que torna imperativa uma evolução a nível educacional por forma a capacitar todos os cidadãos a dela fazerem parte. É urgente que também a escola passe a mensagem de que “adaptar, aprender, atrever a tentar coisas novas e estar sempre pronto para aprender com os erros são chaves de resiliência e sucesso num mundo imprevisível (…) [e que] são cada vez mais procuradas capacidades complexas de resolução de problemas em profissões emergentes, marcadamente técnicas, que exigem capacidades elevadas de gestão” (OCDE, 2014, p. 13).

De acordo com Levy (2010), uma característica atual dos mercados de trabalho é que a tecnologia consegue mudar a natureza do trabalho mais depressa do que as pessoas conseguem mudar as suas competências. O autor afirma ainda que apesar de não sabermos tudo sobre as futuras ocupações, sabemos alguma coisa sobre as competências que serão necessárias para as exercer. E, Levy (2010) argumenta que um lugar de trabalho rico em tecnologia requer capacidades fundamentais tais como, numeracia, literacia e capacidade de leitura, uma avançada capacidade de resolução de problemas (a que chamou *expert thinking*) e uma avançada capacidade de comunicação (a que chamou *complex communication*).

Na perspetiva de Autor, Levy e Murnane (2003, citados em OCDE, 2014), os requisitos necessários no mundo do trabalho podem classificar-se em cinco categorias principais. As duas primeiras, que designam por *routine skills*, correspondem às tarefas que requerem repetição metódica de um procedimento rígido, isto é, tarefas em que as máquinas e computadores facilmente substituem os seres humanos. Podem ser cognitivas ou manuais. As *non-routine skills* correspondem às tarefas que requerem um conhecimento tácito e apenas podem ser descritas de forma imperfeita por um conjunto de regras. Nestas podemos distinguir entre competências manuais e competências abstratas. As manuais correspondem a tarefas difíceis de automatizar, mas do ponto de vista humano, são simples de executar e requerem apenas habilidades primárias que a larga maioria dos seres humanos possui (por exemplo, preparar uma refeição). As abstratas baseiam-se no processamento de informação e requerem competências de resolução de problemas, intuição, persuasão e criatividade. De entre as competências abstratas, os autores distinguem as analíticas das interpessoais. As primeiras correspondem a tarefas interpessoais (tais como gerir equipas, persuadir potenciais compradores) que requerem comunicação interpessoal complexa. As analíticas correspondem a tarefas que requerem a transformação de dados e de informação. Neste contexto, Autor, Levy e Murnane (2003) (citados em OCDE, 2014) consideram que a competência de resolver problemas é uma componente essencial das competências necessárias para executar tarefas interpessoais e analíticas não rotineiras. Isto porque, nas tarefas abstratas não rotineiras, “os trabalhadores precisam de pensar como atacar uma situação, monitorizar sistematicamente o efeito das suas ações e ajustar ao feedback” (OCDE, 2014, pp. 27-28). É para executar estas tarefas não rotineiras abstratas que o *expert thinking* e a *complex communication* são absolutamente essenciais.

As tarefas cognitivas rotineiras, por serem tarefas mentais fáceis de descrever por regras dedutivas ou indutivas, ou seja, ao poderem ser executadas seguindo um conjunto de regras, podem facilmente ser computorizadas. As tarefas manuais rotineiras, físicas, mas que também podem ser facilmente descritas usando regras dedutivas ou indutivas, isto é, descritas em termos de um conjunto de movimentos precisos e repetitivos, também são boas candidatas à computorização. Disto resulta que serão tarefas tendencionalmente atribuídas a máquinas, dispensando a intervenção humana (Levy, 2010).

Já as tarefas manuais não rotineiras não serão tão facilmente entregues a computadores uma vez que são tarefas físicas de difícil descrição com um conjunto de regras do tipo *Se-Então-Executa* e requerem, por exemplo, reconhecimento ótico, um controle fino de músculos, procedimentos que, para já, não é fácil programar para serem executados por computadores. As tarefas que requerem *expert thinking*, tais como resolver problemas (para os quais não há soluções baseadas em regras), têm de ser executadas por humanos, pelo menos enquanto os computadores não os puderem substituir, uma vez que são já auxiliares quase indispensáveis. Do mesmo modo, as tarefas em que a interação entre humanos é imprescindível e para as quais a *complex communication* é essencial, dificilmente serão executadas por computadores (Levy, 2010).

A figura 7 ilustra as tendências observadas nas tarefas profissionais rotineiras e não rotineiras, nos EUA, desde a década de 60 do século passado. Podemos verificar que as tarefas que requerem *expert thinking* e *complex communication* cresceram muito até 2002, no entanto, atualmente, esse aumento deve ser ainda muito maior. Por seu turno, "as tarefas rotineiras, sobretudo as cognitivas por serem facilmente programáveis, tiveram um declínio abrupto" (Levy, 2010, p. 10).

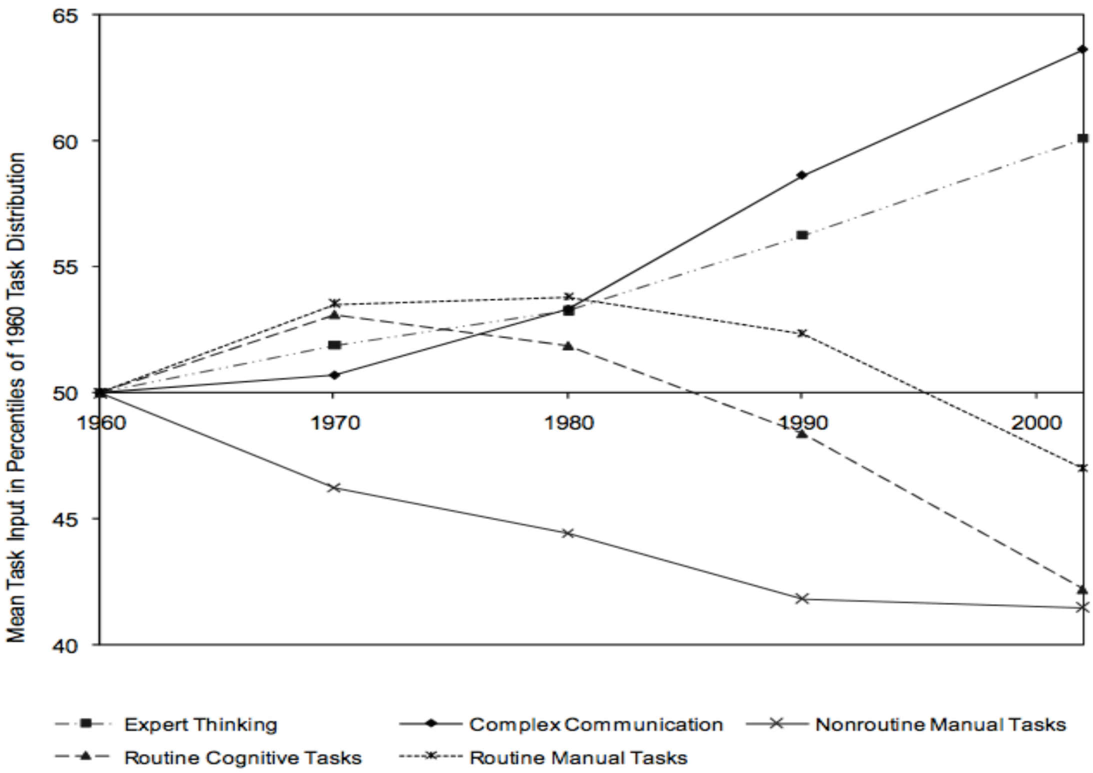


Figura 7 – Tendências na prevalência de tarefas rotineiras e não rotineiras nas ocupações nos EUA, de 1960 a 2002 (Autor, Levy & Murnane, 2003, p. 1296).

A visão acerca da necessidade de aquisição de competências ligadas à resolução de problemas por parte da OCDE vem corroborar a necessidade sentida, já em 1989, pelo National Research Council (NRC):

> Prevê-se que a força de trabalho do futuro tenha de lidar com as complexidades do local de trabalho através do trabalho em equipa, do raciocínio lógico, e do uso de capacidades de resolução de problemas. Fraco aproveitamento a matemática não deve representar a norma para a maioria dos alunos das escolas americanas. (Croom, 1997, p. 2)

De acordo com o NRC (1989, citado em Schoenfeld, 1992), a matemática "é um tema vivo que procura compreender os padrões que se encontram tanto no mundo à nossa volta como na mente dentro de nós" (p. 4). Por conseguinte, é necessário que o ensino da matemática se foque na procura de soluções, ou seja, na resolução de problemas, na exploração de padrões, na formulação de conjeturas, na vivência da matemática e não numa matemática *morta*, em que apenas se memorizam procedimentos, fórmulas e se resolvem exercícios. É necessário que os estudantes tenham oportunidade de estudar matemática como uma disciplina exploratória, dinâmica, que evolui, em vez de rígida, absoluta, fechada num conjunto de leis a serem memorizadas.

"Numa sociedade em que o conteúdo do conhecimento aplicável muda rapidamente, os teóricos educacionais, investigadores e atores da educação procuram qualquer coisa estável na mente que ajude a uma fácil adaptação ao longo da vida" (Adey, Csepó, Demetriou, Hautamaki & Shayer, 2007, p. 75): "É perfeitamente claro que apenas transmitir o conhecimento central das disciplinas científicas - por muito atualizado que seja – nos conteúdos escolares tradicionais não resolve o problema" (Adey et al., 2007, p. 75). Em novas ideias, como por exemplo *learning to learn* (Hautamaki et al., 2002, citados em Adey et al., 2007), na procura de novos caminhos, na definição de objetivos para a educação, o objetivo de melhorar as capacidades gerais é frequentemente abordado. No entanto, por falta de uma estrutura teórica adequada e falta de conhecimento científico que o sustente esse objetivo não foi ainda completamente atingido (Adey et al., 2007).

Um dos entraves é o facto de, por variadas razões, o conceito de capacidade geral ou inteligência ser evitado aquando da discussão destas questões relacionadas com a educação. O termo inteligência pode assumir significados diversos consoante a área de especialização em que está a ser utilizado e, particularmente na educação, parece ter caído em descrédito. Substituí-lo por capacidade geral, capacidade mental geral ou capacidade cognitiva geral, é comum na literatura e aparentemente aceitável para muitos educadores.

De todas as possíveis características da inteligência, Adey et al. (2007) apontam três que consideram importantes: 1) a sua componente geral que opera transversalmente em todos os contextos e domínios; 2) a sua plasticidade, ou responsabilidade no aumento, ou aceleração, em resposta a influências ambientais apropriadas; e 3) que esta plasticidade vai tão longe como o próprio cérebro (Adey et al., 2007, p. 92). Adey et al. (2007) argumentam ainda que:

> (...) enquanto os educadores virem a inteligência como algo fixo, que pré-determina a capacidade dos alunos de processar todo o tipo de informação e, portanto, como uma força oculta que incapacita (mina) os seus esforços, é natural que a considerem e a tratem com grande desconfiança. Mas, logo que aceitem o facto de que o funcionamento do processador geral intelectual na mente pode ser melhorado pela educação, então a construção da inteligência torna-se mais aceitável que no passado. (Adey et al., 2007, p. 92)

Na perspetiva destes autores, confirmadas as características referidas, hoje os educadores têm nas suas mãos o controle da capacidade de aprender dos seus alunos, o poder de aumentar a sua capacidade cognitiva geral e, portanto, aumentar a sua performance académica, como consequência (Adey et al., 2007).

> Todos os professores sabem que capacidades baseadas em regras são relativamente simples de ensinar e testar. O problema é que estas capacidades, que podem ser codificadas, também são executadas por computadores. Pela sua natureza, *complex communications* e *expert thinking* não podem ser reduzidas a regras e, portanto, são relativamente difíceis de ensinar e avaliar. No que diz respeito ao *expert thinking* comecemos pelo facto de todos concordarem que as crianças precisam de 'capacidades de resolução de problemas'. Na prática, no entanto, essas capacidades têm sido interpretadas como soluções baseadas em regras tais como as regras da álgebra. As regras da álgebra são muito importantes, mas são apenas o segundo passo do processo de resolução de problemas. O primeiro passo - o passo que os computadores não são capazes de executar - envolve analisar o conjunto confuso de factos de um problema do mundo real para determinar o conjunto de regras algébricas a aplicar, ou seja, o *expert thinking*. (Levy, 2010, p. 8) Por outras palavras, as ferramentas de diagnóstico podem resolver problemas 'conhecidos', mas resolver problemas novos' continua a ser algo para os humanos fazerem. (Levy, 2010, p. 7)

De acordo com esta forma de sentir o mundo e a educação matemática percebe-se o, ainda atual, enfoque na resolução de problemas. A importância da resolução de problemas na educação matemática é, desde há muito, reconhecida. No entanto, essa importância nem sempre é tida em conta no terreno, nas escolas, nas políticas de educação, na atuação dos professores, na sociedade em geral. A investigação sobre resolução de problemas ainda tem muito a oferecer, por exemplo, à prática pedagógica (e não me refiro apenas às escolas). É preciso compreender muito melhor de que forma as várias abordagens possíveis da resolução de problemas matemáticos podem contribuir para o fim das dificuldades que os alunos têm em adquirir literacia matemática, em adquirir *expert thinking* e mesmo *complex communication.*

2. Competições matemáticas

2.1 Aprendizagem para além da sala de aula

Vários autores como English, Lesh, e Fennewald (2008) salientam que o conhecimento sobre a atividade de resolução de problemas que ocorre fora da sala de aula é extremamente insuficiente, pelo que alertam para a urgência em se "perceber por que motivo os alunos têm dificuldades em aplicar conceitos e capacidades matemáticas (presumivelmente aprendidas na Escola) fora da sala de aula – ou em outras áreas disciplinares" (p. 5). Hodiernamente é amplamente reconhecido que "a sala de aula é apenas um dos locais onde a educação habita" (Kenderov, Rejali, Bussi, Pandelieva, Richter, Maschietto, Kadijevich, & Taylor, 2009, p. 53).

> A escola e, em particular a sala de aula, foi durante décadas o principal espaço de aprendizagem. Hoje, a Internet, a comunicação à distância, os media e os cada vez mais abundantes recursos digitais e multimédia constituem fatores responsáveis pela atenção acrescida ao conhecimento obtido fora da sala de aula. Atualmente é possível aceder à informação e ao conhecimento em qualquer momento e em qualquer local. Esta é uma circunstância importante pela qual a investigação em educação matemática começou a mostrar maior consciência da relevância dos espaços de aprendizagem 'para além da sala de aula'. (Kenderov et al., 2009, citados em Amado & Carreira, 2013, p. 529)

Estudos internacionais revelam que os alunos também aprendem matemática fora da sala de aula, designadamente em atividades extracurriculares, clubes de matemática, feiras de ciências, semanas da matemática, escolas de verão, em sítios da Internet e em competições matemáticas. Além disso, estas atividades em ambiente extra sala de aula parecem exercer um efeito positivo nas atitudes dos alunos face à matemática, aumentando o valor atribuído a esta disciplina, desenvolvendo a autoconfiança. Por outro lado, parece ter igualmente reflexos positivos na sociedade em geral, na medida em que tende a envolver as famílias e os professores na promoção do interesse pela matemática. (Carreira, Amado, Tomás Ferreira, Jacinto, Nobre & Amaral, 2013)

Por exemplo, Simpkins e colaboradores (2006) oferecem importantes resultados sobre a influência da participação das crianças em atividades extracurriculares, nas áreas de matemática e ciências, sobre as suas escolhas futuras. De facto, essa participação contribui significativamente para a boa autoestima e o desenvolvimento do autoconceito dos jovens e para uma maior valorização destas disciplinas no seu percurso académico. Os investigadores concluem que uma estratégia para fomentar as futuras escolhas académicas dos jovens em matemática e ciências consiste em incentivar o envolvimento precoce das crianças em atividades de matemática e ciências para além da escola. A participação dos alunos, sobretudo os mais novos, em competições matemáticas influencia positivamente a sua motivação para aprender matemática (Freiman & Vézina, 2006).

Isto vem ao encontro da pretensão exposta no relatório da EACEA, Agência de Execução relativa à Educação, ao Audiovisual e à Cultura: *O ensino da matemática na Europa: Desafios comuns e políticas nacionais* (Rede Eurydice, 2011). De facto, no preâmbulo deste relatório, afirma-se*:*

> A competência em matemática foi identificada, a nível da União Europeia, como uma das competências essenciais à realização pessoal, à cidadania ativa, à inclusão social e à empregabilidade na sociedade do conhecimento do século XXI. (...) Muitos países europeus confrontam-se com uma diminuição do número de alunos de matemática, ciências e tecnologia, (...) É necessário resolvermos este problema com urgência, uma vez que a falta de especialistas em matemática e domínios afins pode afetar a competitividade das nossas economias e os esforços para superar a crise económica e financeira. (p. 3)

Por outro lado, a natureza desafiante e competitiva de atividades de enriquecimento curricular parece estar associada ao desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas dos alunos e a sentimentos positivos relativos à matemática. Freiman e Applebaum (2011) argumentam que as competições matemáticas apresentam bastantes vantagens relacionadas com fatores afetivos, como satisfação, sentido de eficácia, gosto e interesse pela matemática; e Robertson (2007) reporta que o sucesso em competições matemáticas, e o sucesso em atividades matemáticas em geral, parece estar ligado ao amor e interesse pela sua aprendizagem.

> Competir é essencial e intrínseco à vida. Todos os dias, seres vivos na natureza e em especial os seres humanos, enquanto agentes económicos na sociedade, competem por recursos, por melhores condições de vida e maior eficácia. O desejo de competir para vencer um desafio está profundamente enraizado na natureza humana e tem sido usado ao longo dos tempos para ajudar e incentivar

a aquisição de competências e performances cada vez melhores, em múltiplas atividades (Kenderov, 2006, p. 1583).

Apesar de as competições matemáticas existirem há bastante tempo, não é fácil identificar quando, de facto, começaram nem porquê. No entanto, um dos registos mais antigos deste tipo de atividade diz respeito a uma competição matemática com 70 participantes realizada numa escola primária de Bucareste, Roménia, em 1885 (Freiman & Applebaum, 2011).

Poderão ter acontecido outras competições, em outros lugares, tanto antes como depois desta. No entanto, a competição Eötvös, iniciada na Hungria, em 1894, é considerada a percussora das competições matemáticas contemporâneas para estudantes, “as primeiras Olimpíadas matemáticas do mundo” (Koichu & Andzans, 2009, citados em Stockton, 2012, p. 39). Esta competição, desenhada para alunos a concluir o ensino secundário, consistia em três questões baseadas na matemática curricular do secundário que deveriam ser resolvidas individualmente (sem qualquer interação com outros estudantes ou professores), e visavam testar competências na resolução de problemas e criatividade matemática mais do que testar o conhecimento factual memorizado. Como explicou um dos vencedores desta competição, “os problemas são selecionados de tal forma que praticamente nada, salvo o nosso próprio cérebro, nos pode ajudar. (...) o prémio não se destina ao bom aluno, destina-se ao futuro matemático criativo” (Wieschenberg, 1984, citado em Stockton, 2012, p. 39)[9]. A competição Eötvös, atualmente denominada Kürschák, foi criada com a pretensão de cumprir dois objetivos – identificar estudantes matematicamente talentosos e estimular um processo de ensino-aprendizagem da matemática mais criativo (Reiman, 1997, citado em Stockton, 2012).

Também no ano de 1894 surge a famosa revista de matemática *KöMal*, fundada por Dániel Arany, um professor de liceu em Györ, Hungria. Esta revista, essencial na preparação de estudantes para as competições matemáticas, dedicava um terço de cada edição à colocação de problemas matemáticos que propunha aos leitores para resolver e à divulgação das resoluções dos problemas de edições anteriores que os mesmos leitores eram solicitados a enviar. Por ano, a revista publicava cerca de 120 a 150 problemas e rececionava à volta de 2500 a 3000 soluções (Kenderov, 2009). As melhores resoluções, presumivelmente no que respeita à criatividade e pensamento matemático, a avaliar pelo que se pretendia testar na competição Eötvös, e os nomes dos respetivos autores eram publicados nas edições seguintes e “muitos deles viriam a tornar-se cientistas mundialmente famosos” (Kenderov, 2009, p. 15). Por esta altura, em setembro de 1895, num país vizinho da Hungria, a Roménia, era publicada a primeira edição da Gazeta Matematică. Este jornal mensal, muito importante para os matemáticos romenos, organizou uma competição para

[9] Afirmação de Rado, um dos vencedores da competição Eötvös citado em Wieschenberg, 1984.

alunos das escolas cujo formato terá evoluído e, eventualmente, dado origem às Olimpíadas nacionais da Matemática na Roménia (Kenderov, 2009).

Nas décadas seguintes vários países começaram a organizar competições matemáticas e, em 1934, na cidade de Leninegrado da antiga União Soviética (atualmente S. Petersburgo), realizou-se uma Olimpíada Matemática. Em 1956, no *Quarto Congresso de Matemáticos* romenos, a ideia de organizar uma competição internacional de Matemática tomou forma. As primeiras Olimpíadas Internacionais da Matemática (OIM) aconteceram em 1959, na Roménia, e tiveram participantes de sete países: Bulgária, Checoslováquia, Hungria, República Democrática da Alemanha, Roménia, Polónia e União Soviética. As segundas olimpíadas foram também organizadas pela Roménia, em 1960. Desde então, todos os anos, as OIM têm lugar num país diferente, exceto no ano de 1980 em que não se realizaram. Ao longo dos anos, o número de participantes cresceu imenso. Hoje, mais de 100 países participam nas OIM.

Para além das OIM, durante o último século, surgiu uma grande variedade de competições por todo o mundo, o que leva Kenderov (2009) a afirmar que "não será exagero dizer que o incremento e desenvolvimento das competições matemáticas está entre os fenómenos característicos do século XX" (p. 16). Hoje existe um grande número de redes de competições, desde as regionais às internacionais, muitas delas associadas a grandes e famosas competições como as OIM, *Le Kangourou Sans Frontiéres*, a *Australian Mathematics Competition*, o *International Mathematics Tournament of Towns*, as *Ibero-American Mathematics Olympiads*, as *Asian-Pacific Mathematics Olympiads* e muitas outras (Kenderov, 2006).

Estas redes de competições matemáticas, com elementos comuns, mesmo em termos dos seus colaboradores que, por vezes, pertencem a mais do que uma rede, tiveram como consequência natural o surgimento, em 1984, da *World Federation of National Mathematics Competitions* (WFNMC, Federação Mundial das Competições Matemáticas Nacionais). A WFNMC é uma organização filiada na *International Commission for Mathematical Instruction* – ICMI (Comissão Internacional para a Instrução em Matemática). O objetivo desta federação é "reunir todos os que se interessam pela realização de competições matemáticas nacionais e outras atividades relacionadas, no sentido de desenvolver e estimular a aprendizagem da matemática".[10]

Segundo a WFNMC (2002), as várias competições de matemática têm um efeito positivo, direta ou indiretamente, no ensino e aprendizagem da matemática e atraem os estudantes para o seu estudo. Em particular, no *Policy Statment on Competitions and Mathematics Education*, em 2002, a WFNMC sublinha algumas características das competições que

[10] http://www.wfnmc.org/about.html.

influenciam o ensino e aprendizagem da matemática e das quais refiro aqui apenas três por, de certa forma, estarem relacionadas com este trabalho.

As competições partilham uma característica importante referida pela WFNMC (2002), e que é a independência da administração, no sentido em que, não fazem parte de nenhum processo de avaliação, por exemplo, associado à progressão nos estudos ou ingresso em níveis de ensino superiores. As competições dão aos estudantes a possibilidade de descobrirem os seus talentos matemáticos sem nenhuma pressão, uma vez que não envolvem nenhum tipo de risco, além de testarem diretamente conhecimentos e capacidades matemáticas e a capacidade para lidar com situações ligadas à vida real, inesperadas e desafiantes. As competições constituem, muitas vezes, as únicas oportunidades que alguns alunos têm de experenciar a matemática como excitante, surpreendente, elegante e bela, o que não acontece, em muitos casos, na que lhes é apresentada na escola. Deste modo, as competições podem constituir um fator decisivo em futuras escolhas, por exemplo, na escolha da matemática como profissão (WFNMC, 2002).

Existem duas classes de competições, as competições inclusivas e as competições exclusivas, ambas com uma substancialmente crescente popularidade nas últimas décadas (WFMNC, 2002). As competições inclusivas destinam-se a todo o tipo de alunos e dão a cada estudante a oportunidade de resolver problemas, muitas vezes intrigantes, em contextos que lhe são familiares. Estas competições não assentam, geralmente, num programa determinado, apesar de serem frequentemente analisadas por professores experientes para assegurar que as competências matemáticas envolvidas estão, virtualmente, ao alcance de todos os estudantes a que se destinam nos países ou regiões em que têm lugar. As competições de escolha múltipla como as que existem na Austrália, Europa (Canguru e UK Challenges) e América do Norte (Canadá e EUA), bem como as primeiras eliminatórias das olimpíadas nacionais que se realizam em alguns países são exemplos de competições inclusivas (WFNMC, 2002).

Por seu turno, a competições exclusivas destinam-se a estudantes com talento e, mais uma vez, assentam num programa que raramente é formal. No entanto, as provas realizadas em anos anteriores e outros materiais podem ser facilmente consultados e servir de orientação aos novos participantes e aos professores que os ajudam a preparar (em Portugal, por exemplo, existe o programa Delfos da Universidade de Coimbra, que dá formação aos potenciais futuros participantes das IMO). Sendo a Matemática um tema tão extenso, esta preparação proporciona um imenso material de natureza desafiante que estimula e possibilita aos estudantes que se envolvem nestas competições um aprofundamento dos seus conhecimentos e um maior domínio da Matemática, o que lhes permite amadurecer intelectualmente e ficar melhor preparados para futuros estudos e carreiras. Como exemplos de competições exclusivas, temos as Olimpíadas de Matemática, Nacionais e Internacionais e The American Regions Mathematics League (WFMNC, 2002).

Uma competição exclusiva é percecionada como uma forte ferramenta identificadora de capacidades matemáticas excecionais assim como um meio de as fomentar. Uma competição inclusiva não tem esse propósito, antes pretende aumentar a consciência da importância da matemática por parte da sociedade em geral e, dos alunos em particular, fornecendo recreação e divertimento através de problemas matemáticos (Kenderov et al., 2009). Vou debruçar-me um pouco mais em pormenor sobre este tipo de competições, uma vez que este trabalho se baseia em dados recolhidos numa delas.

> Desde há várias décadas que os contextos exteriores à sala de aula começaram a ganhar relevância. Em 1987, a UNESCO publica um livro totalmente dedicado às atividades exteriores à sala de aula, mostrando a importância destas no sucesso escolar dos alunos. Em 2008, o 16th ICMI Study é igualmente dedicado a atividades e recursos para o enriquecimento da aprendizagem da matemática, designadamente tecnológicos, em ambientes que se prolongam para além da sala de aula. (Pires & Amado, 2013, pp. 473-474)

Entre as múltiplas atividades que decorrem fora da sala de aula encontram-se as competições matemáticas que, como já vimos, envolvem milhões de estudantes, professores, investigadores, matemáticos, autoridades educativas, editores e pais. Todos os anos são organizadas centenas de competições matemáticas, e/ou eventos similares a nível regional, nacional ou internacional. A cooperação internacional e a investigação neste campo terão sido o fermento de um *boom* no surgimento e desenvolvimento de competições matemáticas no século XX, sobretudo de competições inclusivas. Como referem Amado e Carreira (2013),

> (…) O objetivo primordial [das competições inclusivas é] (…) despertar o gosto e o interesse dos participantes pela matemática. Estas competições envolvem um número muito elevado de alunos devido ao facto das atividades propostas serem de um nível mais acessível, estimando-se que milhões de alunos pelo mundo estejam envolvidos em competições desta natureza. (pp. 530-531)

De facto, em 1950, a Associação Matemática Americana defendeu, pela primeira vez, uma competição nacional aberta e acessível a todos, com problemas de escolha múltipla. Passado algum tempo, em 1963, a Universidade de Waterloo, seguiu-lhe o exemplo com uma competição canadiana do mesmo tipo. A seguir foi Camberra, na Austrália, em 1976. Aqui, a competição foi tão popular que se transformou numa competição nacional, a AMC (Australian Mathematics Competition) e hoje envolve cerca de meio milhão de participantes (mais do que a competição matemática canadiana). Por sua vez, nos anos 90, surgiu a competição europeia o *Kangourou des Mathématiques*, que teve como modelo a AMC e que, em 2005, envolveu 3,5 milhões de estudantes de vários países. E, até na Hungria, famosa pela sua tradição na produção de talento matemático através de programas extracurriculares, como acampamentos e competições exclusivas, se verificou o aparecimento de novas competições que refletem uma possível mudança no foco e propósito das mesmas, longe da estrita procura de talentos, próximo de uma abordagem mais inclusiva e enriquecedora (Stockton, 2012).

Já no século XXI, em 2004, teve início uma competição nacional no Brasil denominada Olimpíada Matemática para estudantes da escola pública que, em 2006, teve o impressionante número de 12 milhões de participantes. Este tão elevado número de participantes é apenas possível em competições que tendem a aproximar-se de atividades de enriquecimento educacional, que, em muitos casos, decorrem através da Internet e são dirigidas a alunos com diversos graus de aptidão para a resolução de problemas e diversos níveis de desempenho escolar em matemática (Stockton, 2012; Freiman & Applebaum, 2011), ou seja, são competições com características inclusivas. De facto, tal número de participantes seria impossível de atingir em competições exclusivas, de caráter seletivo, com elevado grau de dificuldade, que se destinam apenas a alunos especialmente talentosos para a matemática, e que, muitas vezes têm o objetivo de detetar novos talentos nesta área. As competições inclusivas, porque abarcam uma população estudantil muito maior e diversa, justificam o esforço que está a ser feito para investigar temas com elas relacionados. Estudos diversos têm demonstrado o valor e o interesse das competições matemáticas inclusivas (Grugnetti & Jaquet, 2005):

> Estudos nacionais e internacionais (Kenderov et al, 2009; Wedege & Skott, 2007, Jacinto & Carreira, 2011) permitem afirmar que este tipo atividades realizadas para além da sala de aula tem resultados importantes para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, da capacidade de comunicação matemática, da ligação afetiva dos jovens e das famílias com a matemática, da utilização pertinente e interessante das tecnologias digitais como ferramentas para lidar com a matemática. (Amado & Carreira, 2013, p. 530)

Ao pensar em definir as características das competições matemáticas inclusivas ocorreu-me que talvez não seja adequado catalogar as competições desta forma. Na grande diversidade de competições matemáticas existem as que são marcadamente inclusivas, as que têm algumas características de inclusão e as que, sem dúvida alguma, são exclusivas. O melhor será, talvez, identificar algumas características de inclusão presentes nas competições.

Assim, sem pretensão de ser exaustiva, vou referir algumas das características que, eu considero, conferem um caráter de inclusão a uma competição. A primeira, que decorre do próprio termo *inclusiva*, é que a competição tem de ser dirigida a todos os alunos independentemente do seu desempenho escolar. A segunda tem a ver com o propósito da competição: o seu objetivo primordial tem de ser o de despertar o gosto e o interesse dos participantes pela matemática. A terceira tem a ver com a existência de algo que, à partida, promova um sentimento de acessibilidade no aluno com desempenho escolar mais fraco e que, por outro lado, não desmotive o aluno com melhor desempenho escolar (por exemplo, condições para que possa existir colaboração e partilha, entre os participantes, ou com outros). Devem ser dadas oportunidades de evolução aos participantes, seja com a possibilidade de melhoria das respostas após feedback, seja por poderem participar em grupo, seja pela possibilidade de ter alguma ajuda (na fase inicial, por exemplo, da competição). Têm de existir condições para que todos os alunos sintam que podem participar em igualdade de circunstâncias.

Neste pressuposto, numa competição com caráter inclusivo é necessário que os problemas sejam adequados a todos os níveis de ensino a que se destina essa competição, para que não haja a possibilidade de uns alunos serem mais beneficiados do que outros. As competições têm de privilegiar um ambiente social que promova sentimentos de satisfação, gozo e autoconfiança, bem como de apreciação pela matemática (Schweinle, Turner & Meyer,2006), desencorajando a comparação social e realçando o valor e importância das tarefas desafiantes (Schweinle, Berg & Sorensen, 2013). Além de que, como argumentam Freiman e Vézina (2006), de uma maneira geral "estas novas formas de competições matemáticas, incluindo as virtuais e on-line, bem como os materiais atraentes envolvidos e criados como suplementos e recursos, são a marca de parcerias valiosas entre escolas, universidades e famílias" (Tomás Ferreira, Carreira, & Amado, 2014b, p. 3).

Dito isto, não restam dúvidas acerca do caráter inclusivo dos campeonatos a que este trabalho se refere. Tal como já referi, é aceite a participação de todo e qualquer aluno das escolas das regiões do Algarve e Alentejo, desde que esteja a frequentar os 5º ou 6º anos de escolaridade, no caso do SUB12, ou os 7º ou 8º anos no caso do SUB14. Todos são convidados a participar, independentemente do nível de performance na matemática escolar e todos têm, à partida, condições para ter sucesso na competição. O seu objetivo primordial é o de despertar o gosto e o interesse dos participantes pela matemática. Nessa medida, os SUBs procuram ser "contextos onde a matemática é apresentada como desafiante, entusiasmante, acessível, social e emocionalmente envolvente, e próxima da vida quotidiana dos alunos" (Carreira, Tomás Ferreira & Amado, 2013a, p. 544). Estas características estão patentes, por exemplo, nos problemas das figuras 8 e 9.

Problema 10: Pequeno almoço no hotel
20 de maio

No hotel Pacífico estiveram 63 pessoas no buffet do pequeno almoço. Ao todo, houve 37 pessoas que se serviram de sumo e 52 pessoas que se serviram de café. Sabendo que apenas 6 pessoas não beberam sumo nem café porque preferiam chá, quantas pessoas beberam sumo e também café?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 8 – Último problema proposto na fase de apuramento do SUB12 em 2012/13.

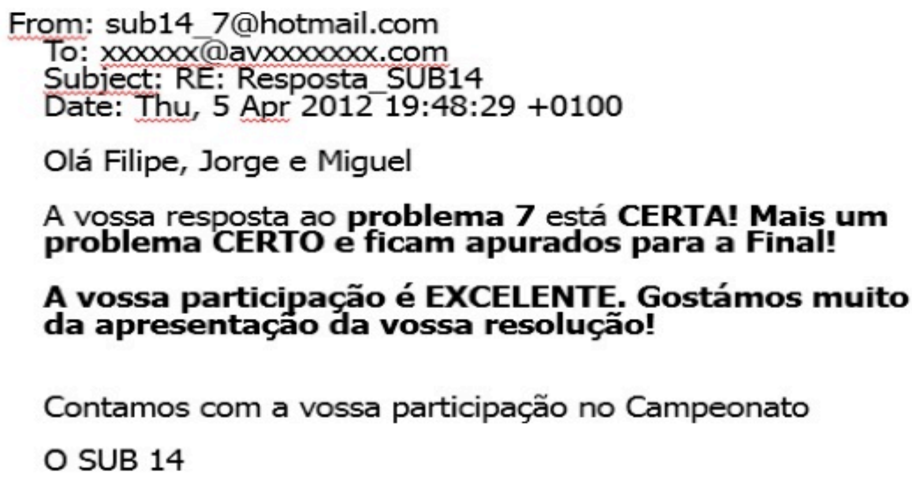
Prob: Hambúrgueres com vários molhos
20 de maio

Um restaurante de hambúrgueres vendeu 363 hambúrgueres durante o fim de semana. Os clientes do restaurante podem pedir no máximo 3 molhos no seu hambúrguer: maionese, mostarda e ketchup. Dos hambúrgueres vendidos, 92 tinham apenas maionese e 94 tinham maionese e mais um ou dois molhos. Houve 82 hambúrgueres que levaram mostarda e mais um ou dois molhos mas 58 tinham apenas ketchup e mostarda. Foram vendidos 63 hambúrgueres que só tinham mostarda e 17 que tinham apenas mostarda e maionese. Não houve nenhum hambúrguer vendido sem molho.
Quantos dos hambúrgueres vendidos tinham apenas ketchup?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 9 – Último problema proposto na fase de apuramento do SUB14 em 2012/13.

Nestas competições uma das características, sem dúvida inclusiva, é a componente afetiva que passa pela valorização das capacidades individuais, pela importância do encorajamento e do estímulo, pelo reforço positivo, encorajando a persistência e diminuindo a frustração. Esta característica está bem patente no feedback que todos os participantes recebem, quer as respostas enviadas estejam corretas ou não. Recebem os parabéns e elogios pelo trabalho, persistência e, por vezes, originalidade, no primeiro caso (ver figura 10).



From: sub14_7@hotmail.com
To: xxxxxx@avxxxxxxx.com
Subject: RE: Resposta_SUB14
Date: Thu, 5 Apr 2012 19:48:29 +0100

Olá Filipe, Jorge e Miguel

A vossa resposta ao **problema 7** está **CERTA! Mais um problema CERTO e ficam apurados para a Final!**

A vossa participação é EXCELENTE. Gostámos muito da apresentação da vossa resolução!

Contamos com a vossa participação no Campeonato

O SUB 14

Figura 10 - Exemplo de feedback dado pela organização dos SUBs.

Os participantes reconhecem o papel do feedback no reforço positivo, no encorajamento da persistência e na diminuição da frustração:

> Quando está correto sinto que fiz um bom trabalho, fico contente, se estiver errado fico a pensar o que é que está errado, depois vejo a minha resposta, mandam sempre a resposta e tento ver o que é que falta (…) Quando resolvia um problema de uma forma melhor: recebia uma mensagem diferente que me fazia ficar com um sorriso. Se errava, as mensagens incentivavam-me a continuar. Motivavam-me bastante. (Amado et al., 2014, s/p)

Mas também os pais dos participantes valorizam o reconhecimento do sucesso dos seus educandos na competição: “quando as respostas estavam certas eram motivadoras, e ‘parabéns e continua’, ‘fantástico!’, ‘o próximo vai ser ainda melhor’, portanto, tudo corria muito bem” (Amado, Carreira, Castela & Tomás Ferreira, 2014, s/p).

Quando as respostas enviadas não estão corretas ou estão incompletas (sobretudo quando a explicitação do processo de resolução não está conseguida), os participantes recebem sugestões para ultrapassar obstáculos ou efetuar correções, podendo voltar a submeter as suas respostas tantas vezes quantas quiserem durante o prazo permitido. Também neste caso os pais dos participantes reconhecem a importância do feedback como elemento motivador e fator de inclusão:

> (…) mas quando não estavam [corretas ou incompletas] também não era um problema, a mobilização acontecia também, nas entrelinhas vinham as pistas, nunca as respostas (…) uma vez em que a M muito triste chegou ao pé de mim e disse: 'Mamã eu errei no problema', e eu achei: 'Pronto, acabou… deixa lá!', tínhamos visto as regras, havia hipótese de falhar duas vezes ou qualquer coisa, 'Pronto, deixa lá.'… 'Não, não… mas dão-me ainda oportunidade porque está dentro do prazo.', então até quando fui ver a mensagem fiquei comovida com o carinho com que a mobilizavam a continuar e lhe davam pistas, sem dar a solução, o que me pareceu muito inteligente da forma como estava feito, davam-lhe pistas, motivavam-na a não desistir e ela não desistiu e acertou… (Amado et al., 2014, s/p)

Outra característica inclusiva dos SUBs tem a ver com o facto de os problemas serem pensados para dar aos alunos a possibilidade de usar diferentes abordagens (papel e lápis, recurso às TIC, uso de materiais concretos, etc.), diversas estratégias (tentativa e erro, procedimentos algébricos ou numéricos, propriedades geométricas, etc.) e várias representações (figuras, tabelas, diagramas, linguagem simbólica e natural, resultados obtidos com o computador, etc.), permitindo assim o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, em sentido amplo. Aos alunos é dada plena liberdade relativamente ao modo de apresentar as suas soluções (escritas à mão e digitalizadas, usando o computador – com ou sem a ajuda de software específico –, recorrendo a imagens, etc.) (Amado & Carreira, 2013; Carreira et al., 2013a).

As competições SUB12 e SUB14 promovem a colaboração e a partilha durante a fase de apuramento concentrando a parte competitiva apenas na fase final. De facto, para além de poderem participar em grupo, a família, amigos e professores também são vistos como parceiros na participação durante a fase de apuramento, uma vez que o seu envolvimento e ajuda são explicitamente estimulados (Amado & Carreira, 2013). Por exemplo, a mãe de um participante revela como proporcionava ajuda ao filho na sua participação na fase de apuramento dos SUBs e que critérios pautavam a sua atuação:

> Nós tentávamos também (…) achávamos que era esse o nosso papel, discutir, conversar mas não dar a solução, permitir que chegasse lá. Aconteceu até às vezes acharmos que ela não estava a justificar bem a resposta mas obrigamo-la a lidar com a resposta da Universidade, 'Tu tens de tentar melhor', 'Tens de tentar…', e isso foi bom, eu acho que foi muito, muito construtivo, fiquei muito impressionada com essa postura (...) que é mobilizadora, é mobilizadora não só

> para eles, para os miúdos naturalmente, que depois em jeito de desafio 'Como não expliquei bem, espera lá a ver se eu agora explico ou não explico', e também para as famílias, também achei fantástico, sim. (Amado et al., 2014, s/p)

Os SUBs não são as únicas competições inclusivas existentes em Portugal ou em que o nosso país participa. Na secção que se segue, assumidamente informativa, refiro algumas competições existentes na atualidade, destacando as de natureza inclusiva, porque é o tipo de competições em que se baseia este trabalho, mas não me cingindo a tal.

2.2 Exemplos de competições matemáticas

Como afirma Miguel de Guzmán, o ensino inicial da matemática baseia-se incorretamente em algoritmos rotineiros o que torna quase impossível a identificação de aptidões adequadas à matemática, que ele designa por capacidades de ordem superior (Silva, 1999). É que, embora haja alunos que são bons a resolver exercícios, que acompanham as aulas com facilidade, que é um prazer ter nas aulas pois fazem tudo quanto lhes é proposto, também é frequente que os especialmente dotados para a matemática não encaixem neste *clichet* (Silva, 1999).

Em Portugal a única iniciativa, a nível nacional, que tem vindo consistentemente a popularizar a matemática e a servir, de alguma forma, para identificar talentos em matemática tem sido a iniciativa da SPM denominada *Olimpíadas Portuguesas de Matemática*. E estas competições, por serem exclusivas, não permitem um escrutínio total de capacidades excecionais, mesmo porque só alguns alunos com determinadas características de ordem social, financeira, geográfica e não só, é que conseguem aceder aos programas existentes de preparação para as mesmas. No entanto, outras competições a nível nacional têm surgido nos últimos anos como, por exemplo, o Equamat e o matUTAD.

O matUTAD[11] é um jogo de computador, pela internet, desenvolvido para os 7º, 8º e 9º anos de escolaridade constituído por perguntas do tipo verdadeiro/falso relacionadas com os conteúdos do programa de matemática. O matUTAD em forma de treino pode ser jogado individualmente, mas nas competições é jogado aos pares e os alunos têm direito a usar papel de rascunho e máquina de calcular (não gráfica). O projeto iniciado em 2003 e em fase de desenvolvimento, da responsabilidade do departamento de matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), inclui uma competição matemática a que todas as escolas podem aderir.

O EQUAmat é uma competição de matemática para o 3.º ciclo do ensino básico, também baseada nos conteúdos previstos, para cada um dos anos de escolaridade, pelo programa

[11] matutad.utad.pt

de matemática. Esta competição é uma parte das Competições Nacionais de Ciência (CNC) promovidas pela Universidade de Aveiro (UA) e parte integrante do projeto PmatE[12]. Tem duas versões, uma que é em rede e cuja final se realiza também em rede, via internet, e uma outra que sendo preparada com provas de treino efetuadas online, tem uma final presencial na UA. Por escola podem participar, no máximo, 15 equipas de 2 elementos.

É difícil definir o que é um jovem matematicamente talentoso, é difícil elaborar instrumentos de deteção de talentos mas, sem fornecer aos jovens a possibilidade de se revelarem, colocando-os em ambientes motivadores para a atividade matemática, tal tarefa é impossível. A diversidade de abordagens dos diferentes países para promover a matemática junto dos jovens, fomentar a literacia matemática e incentivar os que demonstram um gosto e vontade de desenvolver as suas capacidades matemáticas além do essencial, é muita e inclui uma variedade de competições matemáticas. Desta grande diversidade vou referir com mais pormenor algumas, porque se me apresentam com características marcadamente inclusivas, e referir apenas a existência de outras que, por serem exclusivas, não terão tanto a ver com este trabalho.

2.2.1 Le Kangourou Sans Frontiéres[13]

Uma das primeiras competições inclusivas a atingir proporções fabulosas em termos de número de participantes, por todo o mundo, foi o *Canguru sem fronteiras*. Surgiu no início dos anos 80 pela mão de Peter O'Holloran, professor de matemática em Sydney. Este novo tipo de Concurso Nacional em escolas australianas, um questionário de escolha múltipla, foi um enorme sucesso na Austrália. Em 1991, dois professores franceses (André Deledicq e Jean Pierre Boudine) decidiram iniciar a competição em França com o nome Canguru (Kangourou), para prestar homenagem aos seus amigos australianos. Em 1993 mais sete países decidiram adotar o concurso e, em 1994, em Estrasburgo, no Conselho Europeu, a Assembleia Geral dos representantes de 10 países europeus (Espanha, França, Grã-Bretanha, Hungria, Itália, Moldávia, Polónia, Rússia e Eslovénia) decidiu a criação da associação *Canguru Matemático sem Fronteiras*.

Atualmente, a associação conta com representantes de 47 países e mais de 6 milhões de participantes em todo o mundo. O seu objetivo é promover a divulgação da matemática elementar por todos os meios ao seu alcance e, em particular, pela organização anual do concurso *Canguru Matemático sem Fronteiras*, que tem lugar no mesmo dia em todos os países participantes. Em Portugal, que nele participa desde 2005, a organização deste concurso está a cargo do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e

[12] http://pmate.ua.pt.
[13] www.mathkang.org

Tecnologia da Universidade de Coimbra com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática. Com base no que me foi possível apurar, é a única competição internacional inclusiva, de matemática, em que Portugal participa.

O *Canguru Matemático* contribui para a popularização e promoção da matemática nos jovens e pretende atrair o máximo número possível de alunos, sem selecionar nem comparar os resultados com os diversos países, aceitando a participação de todos os alunos sem seleção prévia. Os objetivos concretos do *Canguru Matemático* são vários: 1) estimular o gosto e o estudo pela Matemática; 2) atrair os alunos que têm receio da disciplina de Matemática, permitindo que estes descubram o lado lúdico da disciplina; 3) tentar que os alunos se divirtam a resolver questões matemáticas e percebam que conseguir resolver os problemas propostos é uma conquista pessoal muito recompensadora; e 4) aumentar todos os anos o número de participantes no concurso a nível nacional e tentar atingir as cotas de participação de outros países.

O concurso *Canguru Matemático* é composto por um único teste: não há seleção, não há ronda preliminar, nem ronda final. Acontece no mesmo dia e à mesma hora em todos os países e consiste num teste de escolha múltipla com 15, 24 ou 30 questões de dificuldade crescente. Para cada questão são dadas cinco possibilidades de resposta. Por cada resposta errada são penalizados em ¼ da pontuação da questão.

Existem oito níveis neste campeonato: Mini-escolar nível I com 15 questões (alunos do 2.º ano de escolaridade); para o Mini-escolar nível II (3.º ano de escolaridade), Mini-escolar nível III (4.º ano de escolaridade) e Escolar (5.º e 6.º anos de escolaridade) são 24 questões; para Benjamim (7.º e 8.º anos de escolaridade), Cadete (9.º ano de escolaridade), Júnior (10.º e 11.º anos de escolaridade) e Estudante (12.º ano de escolaridade) são 30 questões. No entanto, os alunos também podem ser distribuídos por nível de acordo com a idade ou opções escolares (ensino vocacional, ensino científico,...). Portugal participou em 2013 com mais de 87 mil participantes.[14]

2.2.2 *Gordiusz e Zrínyi*[15]

As competições *Gordiusz* e *Zrínyi*, na Hungria, ao contrário das tradicionais competições húngaras que requerem respostas escritas e demonstrações pormenorizadas, têm um formato de escolha múltipla. Ambas as competições são realizadas em várias rondas culminando com uma final. A *Gordiusz* dirige-se a alunos dos 9.º ao 10.º ano de escolaridade, enquanto que a *Zrínyi* é dirigida aos alunos dos 3.º ao 8.º ano de

[14] http://www.mat.uc.pt/canguru/

[15] Mategye Foundation. (2010). Gordiusz Matematika Tesztverseny (Gordiusz Mathematics Competition) http://www.mategye.hu/?pid=zrinyi_gordiusz/versenykiiras_gordiusz

escolaridade. Na competição *Gordiusz*, os alunos têm de responder a trinta questões de escolha múltipla em 90 minutos, o mesmo acontecendo aos alunos dos 7.º e 8.º anos, na *Zrínyi*. Já, nesta última, os alunos dos 3.º e 4.º anos têm de responder a 25 questões em 60 minutos e os dos 5.º e 6.º anos, a 25 questões em 75 minutos. Em ambas as competições existe uma penalização para a *adivinhação*, uma vez que uma resposta correta vale 4 pontos, uma questão não respondida 0 pontos e uma incorreta faz perder 1 ponto. Estas competições, que têm uma natureza exclusiva, apesar da crescente popularidade e da facilidade de administrar e pontuar, continuam a não ser muito bem vistas pelos educadores matemáticos na Hungria que questionam a validade da utilização de escolha múltipla para identificar talento matemático (Stockton, 2012).

Como atualmente existem demasiadas competições regionais para enumerar e descrever, vou cingir-me à descrição de duas novas competições em Budapeste que exemplificam a nova abordagem às competições na Hungria, a *Matemática sem fronteiras* e a *Kavics Kup*a. São ambas competições de equipas, nascidas em França e Itália, respetivamente, e introduzidas na Hungria por professores que contactaram com a realidade daqueles países e levaram para a Hungria a ideia de um novo estilo de competição matemática (Stockton, 2012).

2.2.3 Matemática sem fronteiras

A competição *Matemática sem fronteiras*, iniciada em 1989, realiza-se atualmente em 46 países por todo o mundo, tendo sido introduzida na Hungria em 1994. Tem como foco promover a matemática como algo divertido, interessante e acessível e é uma competição de equipas, turmas inteiras do 9.º ano de escolaridade. É, assim, um modelo completamente diferente do tradicional modelo de competição húngara, que visa resultados individuais no intuito de descobrir talentos. A prova tem a duração de 90 minutos e consiste na resolução de 13 problemas. São os alunos que têm a responsabilidade de se organizar (escolher um porta-voz, decidir a forma de dividirem o trabalho, por exemplo). A prova é realizada no mesmo dia, à mesma hora em todos os países participantes e inclui um problema que é colocado numa língua diferente da nacional (em cada país) e cuja resposta tem também de ser submetida nessa língua estrangeira. Segundo Stockton (2012), e de acordo com um dos organizadores da competição, “os alunos veem estas características como excitantes e motivadoras, deixando-lhes a impressão da natureza da matemática como uma área que ultrapassa barreiras linguísticas e culturais” (p. 44). É de salientar que as turmas especiais, de alunos com talento matemático excecional, que existem na Hungria, não podem participar nesta competição. Na figura 11 encontra-se um exemplo de um problema colocado aos participantes do *Matemática sem fronteiras* no ano de 2009.

1. Peter has to read a book during his holidays. He calculates that he must read 30 pages a day to succeed. The first days of holidays, he doesn't respect the rhythm: he reads 15 pages a day. Anyway Peter thinks that he can keep this rhythm until he reaches half of the book, if he reads 45 pages of the second half every day. What do you think of the way he reasons? Explain. (Matematika Határok Nélkül, February 2009)

Figura 11 – Exemplo de problema proposto na competição Matemática sem fronteiras (Stockton, 2012, p. 44).

2.2.4 Kavics Kupa[16]

A competição *Kavics Kupa* é também uma competição de equipas, iniciada em Itália e realizada pela primeira vez na Hungria em 2005. As equipas são formadas pelos próprios alunos e têm de incluir 7 alunos: pelo menos dois rapazes e duas raparigas; não mais de três alunos de turmas de matemática especiais (constituídas por alunos considerados excecionalmente talentosos no que respeita à matemática) e pelo menos um aluno de cada nível de ensino desde o 9.º ano de escolaridade até ao 12.º ano. Há poucos anos, iniciou-se a *Pequena Kavics Kupa*, competição dirigida a alunos dos 7.º e 8.º anos de escolaridade e, portanto, no patamar do SUB14. Nesta competição, as equipas tentam resolver 20 questões em 90 minutos e chegar a uma solução numérica de valor entre 0000 e 9999, para cada uma. Isto é, ao contrário da maioria das competições, esta não requer provas detalhadas mas apenas um único valor numérico (Pataki, 2009, citado por Stockton, 2012). Este formato permite que os alunos submetam soluções enquanto decorre a prova e tenham a possibilidade de, no caso de uma primeira resposta errada, submeter uma nova resposta ficando sujeitos a uma pequena penalização. Os temas abordados nesta competição são: teoria de números, álgebra, geometria e puzzles de lógica. Na figura 12 apresento algumas das questões da prova de 2009, onde fica visível a variabilidade nas pontuações, isto é, as questões não valem todas o mesmo.

[16] http://kemia.fazekas.hu/?page_id=65

6.) The sum of three numbers is 0, their product is different from zero and the sum of their cubes is equal to the sum of their fifth powers. Find the one hundredth multiple of the sum of their squares. **(45 points)**

8.) For given integers n and k denote the multiple of k closest to n by $(n)_k$. Solving

the simultaneous system $(4x)_5 + 7y = 15$, $(2y)_5 - (3y)_7 = 74$ on the set of integers write, as your answer, the difference $x - y$. **(30 points)**

13.) 7 dwarfs are guarding the treasure in the cellar of a castle. There are 12 doors of the treasury with 12 distinct locks on each door, making hence 144 distinct locks altogether. Each dwarf is holding some keys and the distribution of the keys secures that any three of the dwarfs are able to open all the doors. At least how many keys are distributed among the guards, altogether? **(25 points)**

15.) The lengths of the sides of the triangle ABC are whole numbers, and it is also given that $A\angle = 2B\angle$ and $C\angle$ is obtuse. Find the smallest possible value of the triangle's perimeter. **(45 points)**

Figura 12 - Algumas questões da competição Kavics Kupa de 2009 (Stockton, 2012, pp. 45-46).

2.2.5 Australian Mathematics Competition[17]

Como se pode ler no sítio da internet da Australian Mathematics Trust, em 2014, centenas de milhar de alunos na Austrália e por todo o mundo participaram na 37ª edição da competição Australian Mathematics Competition (AMC). Trata-se de uma competição com 30 problemas que pretendem ser divertidos, muitos deles assentes em situações que mostram a relevância da matemática no dia-a-dia dos alunos. Esta competição, introduzida na Austrália em 1978, tornou-se o maior evento singular do calendário escolar australiano permitindo que alunos de mais de 40 países pelo mundo fora participem na resolução das mesmas tarefas, no mesmo dia. A AMC é uma competição para todo o tipo de alunos. Os alunos do 3.º ao 6.º ano de escolaridade têm de resolver 30 problemas em 60 minutos, os alunos desde o 7.ºano até ao 12.º ano de escolaridade têm 30 problemas para resolver em 75 minutos. Os primeiros problemas são bastante fáceis para que todos os alunos sejam capazes de os tentar resolver, mas depois são progressivamente mais difíceis até que os últimos sejam desafiantes mesmo para os alunos mais dotados. No entanto, todos os alunos conseguem progredir na prova e encontrar um ponto de desafio. Há cinco provas diferentes: Primária media (3.º e 4.º anos de escolaridade), Primária superior (5.º e 6.º anos), Júnior (7.º e 8.ºanos), Intermédio (9.º e 10.º anos) e Sénior (11.º e12.º anos). A competição tem como objetivos principais: 1) salientar a importância da matemática como disciplina curricular; 2)

[17] http://www.amt.edu.au

dar aos alunos a oportunidade de descobrir talento matemático; e 3) proporcionar recursos para a sala de aula e discussão geral. Na figura 13 deixo um exemplo de uma questão colocada na categoria Júnior.

> My cat gets on the roof of our house by jumping first to the fence, then on to the water tank, then on to the roof of the shed, then on to the pergola and finally on the roof. However, coming down, she can omit as many of the intermediate steps as she wishes. How many routes can my cat take coming down? *(2000 Australian Mathematics Competition, Junior question 29)*

Figura 13 – Exemplo de problema colocado aos participantes na categoria Júnior da competição AMC em 2000.[18]

2.2.6 Rally matemático transalpino[19]

Tudo começou em 1992 com uma proposta de confrontação de problemas matemáticos por turmas dos 3.º, 4.º e 5.º anos de escolaridade, numa revista suíça para professores de matemática. O projeto desenvolveu-se, estendeu-se a mais escolas suíças, depois italianas e por fim turmas da Bélgica, França, Israel e Luxemburgo.

O *Rally matemático transalpino* (RMT) é um confronto entre turmas no domínio da resolução de problemas de matemática. As turmas participantes são turmas desde o 3.º ano ao 10.º ano de escolaridade, abarcando alunos entre os 8 e os 15 anos de idade. O RMT propõe aos alunos várias atividades: 1) fazer matemática resolvendo problemas; 2) aprender as regras elementares do debate científico discutindo e defendendo as diversas soluções propostas; 3) desenvolver as suas capacidades; e 4) trabalhar em equipa com responsabilidade e confrontar com outros alunos de outras turmas.

Há oito categorias e, portanto, oito provas. Cada prova é constituída por 5 a 7 problemas que têm de ser resolvidos em 50 minutos. Muitos problemas são comuns a várias categorias. Nesta competição, uma turma inteira tem de produzir uma única solução para cada um dos problemas da prova respetiva, bem como descrever o raciocínio utilizado para chegar à solução. As soluções são avaliadas tendo em conta o rigor do raciocínio e procedimentos e a clareza das explicações fornecidas. Os problemas são selecionados, em número e em grau de dificuldade, por forma a que a tarefa total seja demasiado para um só

[18] http://www.amt.edu.au/mathematics/
[19] http://www.math-armt.org/index.php# ou recentemente, http://www.armtint.org

aluno, por muito rápido que seja, e também que cada aluno, seja qual for o seu nível, encontre forma de participar, pois torna-se necessário que os alunos se organizem em grupos para trabalhar. Durante a competição, o professor da turma não está presente (com exceção da prova de ensaio) para que a responsabilidade de encontrar as soluções seja exclusiva da turma, sendo substituído por um outro professor vigilante.

A RMT é organizada em quatro etapas: uma prova de ensaio, em novembro ou dezembro, da responsabilidade do professor da turma que escolhe os problemas (das edições precedentes); uma primeira prova, em janeiro ou fevereiro; uma segunda prova, em março ou abril; e uma final, em maio ou junho, agrupando as turmas de uma mesma região com melhores pontuações obtidas nas primeira e segunda provas (em geral 10% a 20% do total de turmas participantes por categoria).

8. L'ANNIVERSAIRE (Cat 5, 6, 7)

C'est l'anniversaire d'Anita.

Son amie Berthe lui apporte un gâteau au chocolat. Sur ce gâteau, elle a placé 7 bougies qui indiquent l'âge d'Anita : des rouges et des vertes. Chaque bougie rouge vaut dix ans et chaque bougie verte vaut un an.

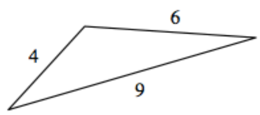
Son ami Charles lui apporte une tarte aux fraises sur laquelle il a placé 8 bougies qui indiquent aussi l'âge d'Anita : des bleues et des vertes. Chaque bougie bleue vaut douze ans et chaque bougie verte vaut un an.

Quel est l'âge d'Anita ?

Expliquez comment vous avez trouvé son âge.

14. BATONNETS ET TRIANGLES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Georges a trouvé dans une boîte six bâtonnets dont les longueurs sont : 4 cm, 5 cm, 6 cm, 9 cm, 10 cm et 11 cm.
Il en choisit trois pour former un triangle.
Voici par exemple le triangle construit avec les trois bâtonnets de 4 cm, 6 cm et 9 cm de longueur :



Après avoir construit un triangle, Georges remet les trois bâtonnets dans la boîte et recommence.

Combien de triangles différents Georges pourra-t-il construire avec ses six bâtonnets ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses et décrivez-les.

Figura 14 – Exemplos de problemas propostos aos participantes na categoria 7 da competição RMT em 2013[20]

Aos professores, associados a todas as etapas na medida da sua disponibilidade, a RMT permite: observar os alunos (os seus, na prova de ensaio; os dos outros nas provas seguintes) em atividade de resolução de problemas; avaliar as produções dos seus próprios alunos e as suas capacidades de organização, de discussão das soluções e de as explorar ulteriormente na sala de aula; introduzir elementos de renovação no seu ensino pela troca de experiências com outros colegas e pela introdução de problemas estimulantes; fazer

[20] http://www.rmt-sr.ch/rallye/ARCHIVES/RMT21-ana1.pdf

parte da equipa de animadores e participar na preparação, discussão e escolha dos problemas, à sua avaliação em comum e à análise das soluções. De uma maneira geral, para o ensino da matemática e investigação em didática, o RMT constitui uma fonte muito rica de resultados, de observações e análises. A título de exemplo, apresento, na figura 14, três problemas propostos em 2013 aos alunos de 7.º ano. Como se pode observar, o problema 8 foi proposto aos alunos dos 5.º, 6.º e 7.º anos de escolaridade e o 14 aos alunos dos 7.º, 8.º, 9.º e 10.º anos.

Com o propósito de melhor explicar a estrutura de cada prova do campeonato RMT, incluo a figura 15 onde se pode observar, para cada problema da primeira prova do vigésimo primeiro concurso RMT, a que categoria foi proposto, quais os temas matemáticos nele abordados e, até, de que país ou região é originário.

21^{e} RMT **ÉPREUVE I** janvier - février 2013 ©ARMT 2013 1

Les problèmes de l'épreuve I du 21 RMT

	Titre	**Catégories**	Ar	Alg	GeoLo/Co*		**Origine**
1.	**Gourmandises**	3 4	x		x		GP
2.	**Bien cachés**	3 4			x		BB
3.	**Pyramides de briques (I)**	3 4 5	x				RZ
4.	**Le sentier dans le parc**	3 4 5	x				GE
5.	**Vacances d'hiver**	3 4 5				x	SI
6.	**Dîner aux chandelles (I)**	4 5 6	x				SI
7.	**Parties de billes**	5 6	x				fj
8.	**L'anniversaire**	5 6 7	x				fj
9.	**Une excursion à la mer**	5 6 7	x	x			UD
10.	**Éclairs au chocolat**	6 7 8	x	x			SI
11.	**Des triangles, oui, mais combien?**	6 7 8			x	x	BB
12.	**Pyramides de briques (II)**	6 7 8 9 10	x	x			RZ
13.	**Le parterre de tulipes**	7 8 9 10	x				LO
14.	**Bâtonnets et triangles**	7 8 9 10		x		x	PU
15.	**Date de naissance**	8 9 10	x	x			LU

Figura 15 – Problemas da prova I do $21^{\text{ésimo}}$ RMT[21]

2.2.7 *Schweitzer*[22]

A competição *Miklós Schweitzer* destina-se a estudantes da pré-graduação (licenciatura), e foi iniciada em 1949 em memória de um jovem matemático húngaro morto durante o cerco a

[21] http://www.rmt-sr.ch/rallye/ARCHIVES/RMT21-ana1.pdf
[22] http://www.bolyai.hu/schweitzer_en.htm

Budapeste na segunda Guerra Mundial. “Esta competição consiste num conjunto de dez questões que cobrem os temas clássicos do currículo pré-universitário: análise, álgebra, combinatória, teoria de números, teoria de conjuntos, teoria de probabilidades, topologia e outros. Estas questões têm de ser respondidas num período de dez dias, durante o qual os participantes podem consultar livros ou notas” (Stockton, 2012, pp. 41-42). Na figura 16, apresento um exemplo de um problema desta competição que permite constatar (tanto pela forma, como pelo conteúdo) o elevado nível dos alunos a que se dirige.

7. Let H be an arbitrary subgroup of the diffeomorphism group $\mathsf{Diff}^\infty(M)$ of a differentiable manifold M. We say that a $\mathcal{C}^\infty$ vector field X is *weakly tangent* to the group H, if there exists a positive integer k and a $\mathcal{C}^\infty$-differentiable map $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[^k \times M \to M$ such that

(i) for fixed $t_1, \dots, t_k$ the map

$$\varphi_{t_1,\dots,t_k} : x \in M \mapsto \varphi(t_1, \dots, t_k, x)$$

is a diffeomorphism of M, and $\varphi_{t_1,\dots,t_k} \in H$;

(ii) $\varphi_{t_1,\dots,t_k} \in H = \mathsf{Id}$ whenever $t_j = 0$ for some $1 \le j \le k$;

(iii) for any $\mathcal{C}^\infty$-function $f : M \to \mathbb{R}$

$$Xf = \left.\frac{\partial^k (f \circ \varphi_{t_1,\dots,t_k})}{\partial t_1 \dots \partial t_k}\right|_{(t_1,\dots,t_k)=(0,\dots,0)} .$$

Prove, that the commutators of $\mathcal{C}^\infty$ vector fields that are weakly tangent to $H \subset \mathsf{Diff}^\infty(M)$ are also weakly tangent to H.

Figura 16 - Exemplo de questão da competição *Schweitzer* de 2009 (Stockton, 2012, p. 42).

2.2.8 Asian Pacific Mathematics Olympiad

Com início em 1989, a Asian Pacific Mathematics Olympiad (APMO) inclui entre os seus objetivos: 1) a descoberta, o encorajamento e o desafio de alunos matematicamente dotados da orla do Pacífico; 2) o favorecimento de relações internacionais amigáveis e de cooperação entre estudantes e professores na região da orla do Pacífico; 3) a criação de oportunidades de troca de informação sobre currículos e práticas na região do Pacífico; e 4) o encorajamento e suporte do envolvimento com as atividades do tipo olimpíadas dos países participantes das APMO e outros países da região do Pacífico. A competição APMO, de natureza exclusiva, consiste numa prova escrita com cinco questões de dificuldade variada, a cada uma das quais é atribuída uma pontuação maxima de sete pontos. Os participantes têm de ser jovens com idade inferior a 20 anos e ainda sem terem ingressado formalmente na universidade (ou instituição pós-secundário equivalente).

Em Portugal, a participação em competições exclusivas, para além das OIM, resume-se a competições que, de certa forma, gravitam em torno desta pela sua natureza, por exemplo as Olimpíadas Ibero-Americanas de Matemática. Na preparação dos alunos para as olimpíadas, sobretudo as que extravasam o país, o Projeto Delfos[23], sedeado na Universidade de Coimbra, tem tido um papel essencial. De facto, o projeto nasceu em 2001 especificamente para preparar equipas para as OIM, mas acabou por alargar os seus objetivos iniciais. Hoje em dia, como se pode ler na respetiva página web, "o Delfos é uma escola dedicada aos estudantes do ensino não superior com excecional aptidão e gosto pela Matemática; uma escola que funciona de modo informal, movida pelo gosto na resolução de questões complexas e interessantes, visando explorar as competências dos jovens até aos limites naturais de cada um". O projeto Delfos propõe-se ainda, nas palavras da sua equipa coordenadora, "colmatar deficiências detetadas no ensino da matemática, adotando uma metodologia baseada na resolução de problemas", o que não deixa de ser curioso pois sendo um projeto claramente dirigido a uma elite reduzida em número, reconhece que a escola não proporciona aos alunos ambientes de aprendizagem em que a resolução de problemas está no eixo central da atividade matemática dos alunos. Recentemente, o projeto Delfos alargou a sua população alvo, abrindo as portas a alunos a partir do 5.º ano de escolaridade, com o projeto Delfos Júnior.

3. Dimensões afetivas na resolução de problemas: tão importantes e tão esquecidas

Desde a década de 70 do século XX que os investigadores em educação matemática discutem aspetos relacionados com os afetos. No entanto, tradicionalmente, a investigação sobre a aprendizagem matemática e resolução de problemas realça a cognição, dando menos atenção aos afetos ou às interações cognitivo-afetivas. Além disso, apesar de serem um foco de crescente interesse na investigação em educação matemática, os afetos têm geralmente sido vistos como exteriores ao pensamento matemático, não uma parte desse pensamento (Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006).

Na realidade, ao longo da história, o raciocínio (aspeto cognitivo) parecia requerer a supressão, ou o controlo, da emoção (aspeto afetivo) (Walkerdine, 1988, citado em Zan et al., 2006). De facto, a matemática parecia ser normalmente entendida como *puramente racional*, sem qualquer interferência emocional, contrariamente ao que se passa com disciplinas da área das humanidades ou das artes, como a música, por exemplo. Na verdade, os professores tentam motivar os alunos, ou seja, tentam apresentar a matemática

[23] http://www.uc.pt/fctuc/dmat/delfos

por forma a despertar nos alunos emoções e sentimentos positivos, agradáveis, que incentivem a sua participação efetiva na sua própria aprendizagem. Mas, sob o ponto de vista do cidadão comum, aprender matemática é visto como algo essencialmente cognitivo. (DeBellis & Goldin, 2006)

A falta de atenção relativamente aos afetos, no que respeita à investigação em educação matemática, poderá também estar associada à dificuldade metodológica em desenhar e levar a cabo estudos empíricos acerca de fatores afetivos que sejam credíveis aos olhos mais céticos. Estas barreiras podem ser causadas, pelo menos em parte, pela grande dificuldade em estabelecer uma linguagem comum e precisa para descrever os afetos (nas várias áreas onde os afetos são importantes, por exemplo, na psicologia, na neurociência e na educação matemática) e uma estrutura teórica que permita o seu estudo sistemático. O termo *afetos* é, muitas vezes, usado, mesmo na área da educação matemática, com significados diversos. (DeBellis & Goldin, 2006)

No final do século XX, "os investigadores em educação matemática passaram a tratar cada vez mais seriamente o domínio afetivo, enquanto os cientistas cognitivos (...) têm sublinhado a importância de teorias que relacionam cognição, emoção e motivação" (DeBellis & Goldin, 2006, p. 131; ver também McLeod & Adams, 1994; Dai & Sternberg, 2004).

A ideia de que afetos e cognição são conceitos que se podem facilmente separar, porque completamente distintos, tendo apenas algumas relações de causa/efeito entre eles, foi desde há algum tempo abandonada. Desenvolvimentos teóricos recentes dão conta de que os afetos são cada vez mais entendidos como fazendo parte integrante do pensamento: "Os afetos influenciam o pensamento, da mesma forma que o pensamento influencia os afetos. Os dois interagem" (Walshaw & Brown, 2012[24], p. 186). Ainley (2006) já vinha reforçando esta ideia:

> Os afetos são centrais na compreensão do caráter de experiências educativas, tal como o são a motivação e a cognição. Além disso, os processos afetivos, motivacionais e cognitivos, embora possam ser separados conceptual e empiricamente, são interdependentes nas experiências que os alunos vivenciam. (p. 391)

Convém referir também a dimensão social dos afetos: "Longe de estar localizado no interior do cérebro, o afeto está muito disperso; envolve os indivíduos e as suas relações dentro e com o mundo" (Walshaw & Brown, 2012, p. 187). Segundo Walshaw e Brown (2012), a ênfase pode ser colocada na organização social da experiência cognitiva e afetiva, e a experiência afetiva será então composta por processos cognitivos, fisiológicos e motivacionais que interagem de forma dinâmica; por outro lado, as emoções podem ser

[24] http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9370-x#page-1

concebidas como partes constituintes do pensamento (Walshaw & Brown, 2012, p. 187). Em qualquer das perspetivas, no entanto, as emoções são "a fairly high-level component of the mechanisms of life regulation" (Walshaw & Brown, 2012, p. 187). Assim, em qualquer contexto de aprendizagem, e o da resolução de problemas não é exceção, o desempenho deve ser visto à luz de uma forte ligação entre afetos e cognição.

3.1 Problemas matemáticos de desafio moderado

Um desafio é "uma questão que é colocada no intuito deliberado de persuadir o recetor a tentar uma resolução" (Barbeau, 2009, p. 5). Tal como no caso dos problemas, uma tarefa poderá ser um desafio para uma pessoa mas ser algo trivial para outra – tudo dependerá dos conhecimentos e experiência dessa pessoa. Por outro lado, também pode acontecer que um desafio não seja apropriado, no sentido de ser demasiado complexo para o recetor, ao ponto de este nem sequer o compreender por falta de conhecimento, ou não possuir as ferramentas necessárias para lidar com a situação. Assim, neste trabalho, vamos considerar um bom desafio o que Barbeau (2009) considera: "Um bom desafio é um desafio para o qual a pessoa possui o conhecimento matemático ou capacidade lógica necessária, mas necessita de um caminho não padronizado ou inovador" (p. 5). O que significa que

> (…) um desafio é bom quando um indivíduo possui um reportório matemático suficiente para o resolver mas requer que o aborde de uma forma inovadora. Estas características levam à sensação de estar intelectualmente ativo e à emoção de descobrir novas abordagens, tal como os matemáticos profissionais fazem, o que pode estimular sentimentos de prazer e satisfação (Jones & Simons, 1999, 2000). (Carreira et al., 2013a, p. 545).

A própria noção de desafio reflete como os afetos devem estar integrados nos aspetos cognitivos que lhe estão inerentes (Tomás Ferreira, Carreira & Amado, 2014b):

> A predisposição para resolver uma tarefa parece diminuir em duas situações: quando as expectativas de um indivíduo acerca da probabilidade de sucesso são muito elevadas (a tarefa é demasiado fácil) ou quando são muito baixas (a tarefa é demasiado difícil). A partir de estudos realizados em contextos académicos, Turner e Meyer (2004) revelam que, em média, os alunos indicam uma maior preferência por situações com alguma dificuldade, acompanhadas por um certo sentimento de medo ou desconforto associado à possibilidade de errar. As situações desafiantes em que a taxa esperada de sucesso ronda os 77% são as prediletas dos alunos (Turner e Meyer, 2004). (Tomás Ferreira, Carreira & Amado, 2014b, p. 11)

Neste trabalho, e no contexto do projeto Problem@Web, assumi que um problema matemático é considerado desafiante quando encerra um forte apelo afetivo por acicatar a curiosidade, a imaginação, o engenho e criatividade e, portanto, ser um problema interessante e divertido embora não necessariamente facil de trabalhar ou resolver (Freiman, Kadijevich, Kuntz, Pozdnyakov, & Stedøy, 2009; Carreira et al., 2013b).

Um problema matemático é desafiante quando tem um grau de dificuldade quanto baste, não sendo demasiado difícil, porque se torna desmotivante para os alunos, nem muito fácil para despertar curiosidade para a resolução e imaginação de um eventual plano de resolução. Os alunos, ao depararem-se com um problema e ao não o conseguirem resolver, nem conseguirem visualizar um plano possível para a resolução, sentem-se com baixa autoestima e desmotivam, desistindo de o resolver. Além disso, é importante que o problema seja adequado ao aluno (Carreira et al., 2013a).

Atualmente, dois temas centrais na educação matemática são a resolução de problemas e a inclusão. No entanto, criar contextos de aprendizagem que usam como importante fator motivacional, para todos os alunos, o desafio, é uma tarefa que está longe de ser fácil. Mais do que isso, criar desafios, em particular problemas matemáticos desafiantes, para um grande número de indivíduos, mesmo que estes possuam um idêntico nível de conhecimento, é bastante complexo.

No intuito de conciliar os problemas matemáticos desafiantes e a inclusão por forma a ajudar nestas questões, nasce a noção de desafio moderado. Na realidade, a investigação tem sustentado a necessidade de equilíbrio no grau de desafio dos problemas colocados aos alunos (Schweinle et al., 2006) e a ideia de desafio moderado tem ganho cada vez mais relevância (Turner & Meyer, 2004; Carreira et al., 2013b).

Os problemas matemáticos desafiantes com grau de desafio moderado (ou, de modo mais simples, os desafios (matemáticos) moderados) serão aqueles que, como qualquer desafio, exigem esforço para elaborar uma resolução e atingir a solução; contudo, a sua complexidade não é exagerada e, por isso, quem os enfrenta sente que a sua resolução está ao seu alcance. Os desafios matemáticos moderados parecem ser aqueles que melhor conseguem levar os alunos a tentar explicar as suas estratégias, a avaliar possíveis abordagens e a apreciar várias formas de resolução (Carreira et al., 2013a). Numa palavra, uma característica marcante de um desafio matemático moderado é persuadir a pessoa a tentar (Turner & Meyer, 2004).

Nas competições SUB12 e SUB 14, os problemas propostos pretendem ter um grau de desafio moderado pois a ideia é que sejam acessíveis a todos os alunos, uma vez que não são construídos para testar o currículo, admitem um vasto uso de estratégias e representações possíveis e, além do mais, os alunos têm a possibilidade de pedir ajuda. De uma maneira geral são considerados pelos participantes nem muito fáceis, nem muito difíceis (Amado et al., 2014).

> O uso de desafios moderados pode ser bastante potenciado em contextos cujas características são valorizadoras do desafio *per se*. Uma delas é a perceção da procura de ajuda como algo legítimo; outra está associada ao requisito de explicar o processo de resolução do desafio e de o submeter a apreciação (Schweinle et al., 2006). Estes dois aspetos estão claramente presentes no SUB12 [e SUB14] – não só a procura de ajuda é explicitamente encorajada nas regras de participação na competição como a explicitação e explicação do processo de resolução são ambas requeridas. (Carreira et al., 2013a, p. 546)

Os desafios moderados, mesmo tendo em conta o seu carácter relativo, “favorecem o desenvolvimento de afetos positivos” (Carreira, Amado et al., 2013, p. 60).

> Porém, outras condições devem gravitar em torno dos desafios moderados, entre as quais um ambiente social que promova sentimentos de satisfação e autoconfiança, bem como de apreço pela matemática (Schweinle, Turner, & Meyer, 2006), desencorajando a comparação social e realçando o valor e importância das tarefas desafiantes (Schweinle, Berg, & Sorenson, 2013). (Carreira, Amado et al., 2013, pp. 60-61)

Como foi já referido em trabalhos anteriores:

> Parece existir uma relação bastante interativa entre afetos positivos, desafio e valor atribuído à matemática (em particular, às tarefas matemáticas). Simultaneamente, encontramos dois tipos de ameaça, que os alunos identificam sobre a sua capacidade: a dificuldade da tarefa e a necessidade de procurar ajuda. (Carreira et al., 2013a, p. 549)

No intuito de tentar compreender e interpretar melhor o papel de alguns fatores afetivos na resolução de problemas, no contexto de uma competição matemática inclusiva como os SUBs, pesquisei trabalhos de investigação em educação matemática, bem como apresentações de trabalhos em áreas diferentes como a psicologia e a neurociência. Nas secções que se seguem, abordo, de forma resumida, alguns conceitos que se mostraram úteis na minha tentativa de melhor compreender estes fenómenos das ligações, por vezes intrincadas, entre cognição e afetos. Em particular, depois de tecer algumas considerações sobre os domínios afetivos que mais frequentemente surgem na literatura, detenho-me sobre a temática das emoções, procura de ajuda e dificuldade percecionada na resolução de tarefas matemáticas, sobretudo na resolução de problemas.

3.2 Afetos e resolução de problemas

Em 1989, McLeod e Adams dão um importante contributo para a área de investigação sobre os afetos com o seu trabalho *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Esta publicação representa um ponto de viragem na investigação sobre os afetos em educação matemática. Aceitando como válida a teoria das emoções desenvolvida pelo psicólogo George Mandler (1975), os fatores emocionais passaram a ser constantemente invocados para interpretar os comportamentos dos estudantes na resolução de problemas matemáticos. E, dada a importância da resolução de problemas na atividade matemática, esta mudança sublinha a importância dos afetos na educação matemática em geral.

As ideias de McLeod e Adams (1989) saíram reforçadas quando, em 1996, num contexto de investigação em neurociências, Damásio destaca a relação entre cognição, metacognição e afetos. Também Zan, Brown, Evans e Hannula (2006) consideram que um dos problemas mais relevantes na investigação sobre os afetos em matemática reside em compreender a relação entre os afetos e a cognição. Porém, o que são os afetos, cognição, emoções, sentimentos, metacognição? Os conceitos variam consoante a perspetiva, seja a da psicologia, a da neurociência, ou outra. Por exemplo, o gosto (ou satisfação) não é consensualmente visto como uma emoção. De acordo com McLeod (1992), gostar da resolução de problemas é uma atitude enquanto que sentir gosto por resolver um problema (não trivial) é uma emoção.

Um primeiro modelo para a capacidade de resolução de problemas baseia-se num conjunto de sistemas internos de representação (Goldin, 1998, citado em DeBellis & Goldin, 2006), um dos quais é o sistema afetivo. "Estes sistemas de representação são muito complexos e desenvolvem-se nos indivíduos, por etapas, ao longo do tempo" (DeBellis & Goldin, 2006, p. 132). DeBellis e Goldin (2006) veem o afeto humano como um sistema de representação que troca informação com os sistemas cognitivos, e consideram que o conceito central da sua teoria é o que eles designam por *meta-afetos.* Este conceito estaria para os afetos como a metacognição está para a cognição, além de ser um poderoso transformador dos sentimentos emocionais individuais. Além disto, estes autores consideram o conceito de *intimidade matemática,* referente ao envolvimento emocional profundo e vulnerável que um indivíduo pode ter com a matemática, e o conceito de *integridade matemática* referente ao compromisso individual, fundamental, à verdade matemática, procura da compreensão matemática, ou o caráter moral que guia o estudo matemático. Na perspetiva de DeBellis e Goldin (2006) estes conceitos, tomados em conjunto, influenciam a natureza da aprendizagem e a profundidade do conhecimento adquirido.

"McLeod e os seus colaboradores dividiram o domínio afetivo em três subdomínios: emoções, atitudes, e crenças [*beliefs*]" (DeBellis & Goldin, 2006, p. 135). DeBellis e Goldin

(2006) acrescentaram a estes um quarto subdomínio, os valores/moral/ética, criando um modelo tetraédrico (figura 17) cujas componentes a seguir procuro esclarecer.

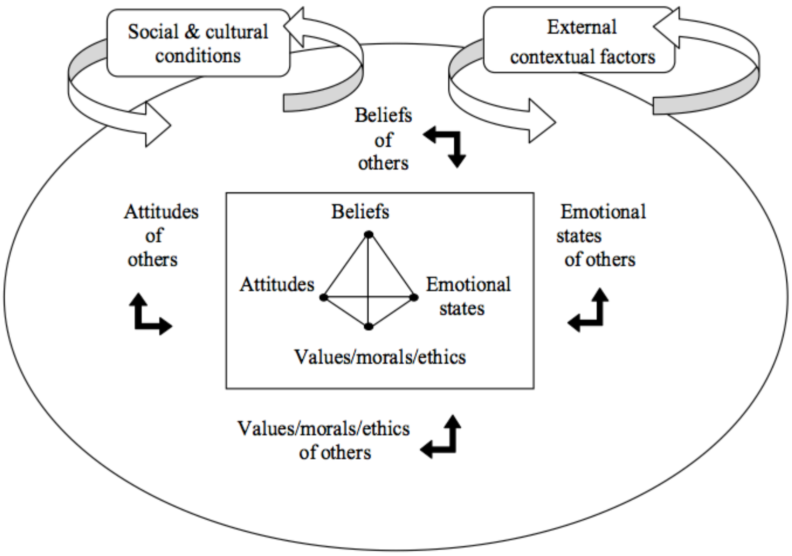


Figura 17 - Modelo tetraédrico que descreve os domínios dos afetos (DeBellis & Goldin, 2006, p. 135).

As *emoções* descrevem rápidas mudanças de sentimentos experienciados conscientemente ou ocorrendo pré-conscientemente ou inconscientemente, durante uma atividade matemática (ou de outra natureza). As emoções variam do suave ao intenso e emergem de um contexto particular.

As *atitudes* descrevem orientação ou predisposição para certas emoções em contextos particulares, por exemplo, contextos matemáticos, o que difere da conceção comum de atitudes como predisposição para certos padrões de comportamento. As atitudes são moderadamente estáveis e envolvem um equilíbrio na interação entre afetos e cognição.

As *crenças* estão relacionadas com uma espécie de verdade externa ou validação de sistemas cognitivos. São frequentemente muito estáveis, muito cognitivas e muito estruturadas, intimamente misturadas com os afetos que contribuem para a sua estabilidade.

Os *valores* (éticos e morais) relacionados com as verdades pessoais ou compromissos partilhados pelos indivíduos, ajudam a motivar escolhas a longo prazo e prioridades a curto prazo. Também podem ser muito estruturados, constituindo sistemas de valores (DeBellis & Goldin, 2006, p. 135, ênfase no original).

Reportando-nos à figura 17, podemos considerar que cada vértice do tetraedro interage, de forma dinâmica, com os outros vértices. Portanto, "os nossos estados emocionais influenciam e são influenciados pelas atitudes, pelas crenças e pelos valores" (DeBellis & Goldin, 2006, p. 136). Por outro lado,

> cada vértice interage com a correspondente componente do domínio afetivo de outros indivíduos.(...) cada afeto individual é profundamente influenciado pelos sistemas correspondentes das subculturas (matemática e educacional) em que o indivíduo está inserido. Portanto, as emoções, atitudes, crenças e valores dos alunos (estudantes) não só interagem de imediato com as dos professores ou outros estudantes (em situações particulares), como interagem ao longo do tempo com expectativas emocionais normativas, atitudes, crenças e valores partilhados e sustentados, por exemplo, pelos seus pares, autoridades escolares, e muitos outros elementos pertencentes ao vasto conjunto de indivíduos que gravitam na esfera sócio-educacional do aluno. (DeBellis & Goldin, 2006, p. 136)

3.3 Emoções

Apesar das diferentes formas de estudar e definir emoções, existe consenso acerca de alguns aspetos deste conceito: existem conexões entre emoções e objetivos pessoais no sentido referido por Hannula, que "codificam informação acerca dos progressos em relação aos objetivos e possíveis bloqueios, bem como sugerem estratégias para ultrapassar obstáculos" (Hannula, 2006, p. 219); as emoções envolvem reações fisiológicas; "as emoções afetam o processo cognitivo de várias formas, elas regulam a atenção e ativam as tendências da ação" (Zan, Brown, Evans, & Hannula, 2006, p. 6); e as emoções desempenham um papel importante no enfrentar de situações complexas ou difíceis, bem como na adaptação a novas situações (Hannula, 2002).

Hannula (2002, 2006) salienta mais algumas características básicas das emoções:

> As emoções têm três formas mutuamente independentes de se revelarem: despertam respostas homeostáticas adaptativas (libertando adrenalina no sangue, por exemplo), manifestam-se pelas expressões (e.g. sorrindo), e experienciam-se de forma subjetiva (e.g. sentindo tristeza). (Hannula, 2002, p. 28)

Damásio (2001) acrescenta mais algumas ideias sobre a noção de emoção. Uma emoção, "seja ela felicidade ou tristeza, embaraço ou orgulho, é uma coleção padronizada de respostas químicas e neurológicas que é produzida pelo cérebro quando deteta a presença de um estímulo emocionalmente competente – um objeto ou uma situação” (p. 781). O autor afirma ainda que “Emoção e sentimentos estão intimamente relacionados mas são fenómenos distintos…” (Damásio, 2001, p. 781). Mais ainda, o neurocientista considera que “os sentimentos são as representações mentais das mudanças psicológicas que caracterizam as emoções” (Damásio, 2001, p. 781), são consequência direta das emoções. E, ao contrário das emoções, que considera serem “cientificamente públicas, os sentimentos são privados, embora não mais subjetivos do que qualquer outro aspeto da mente” (Damásio, 2001, p. 781). E, esclarece,

> as emoções fornecem uma resposta imediata a certos desafios e oportunidades que um organismo enfrenta, os sentimentos dessas emoções fornecem-lhe um alerta mental. Os sentimentos amplificam o impacto de uma dada situação, melhoram a qualidade da aprendizagem, e aumentam a probabilidade de que situações comparáveis sejam antecipadas. (Damásio, 2001, p. 781)

Ao resolver problemas, as pessoas vivenciam emoções intensas que podem ser de frustração ou satisfação, por exemplo. Apesar de as emoções serem uma constante nas experiências humanas, elas são observáveis apenas quando são intensas. As emoções estão sujeitas a mudança e um fator importante de mudança é a análise cognitiva, que pode ser inconsciente, da situação relativamente aos objetivos pessoais (Hannula, 2002). Neste sentido, “emoções relacionadas com objetivos cognitivos, chamam-se *emoções cognitivas*” (Hannula, 2002, p. 28, ênfase no original). De uma forma geral, os alunos têm consciência das suas emoções e são capazes de identificar as suas reações típicas em diferentes situações:

> Enquanto um aluno está empenhado numa atividade matemática, existe uma avaliação inconsciente e contínua da situação relativamente aos objetivos pessoais. Esta avaliação traduz-se numa emoção: progredir na direção dos objetivos induz emoções positivas enquanto que obstáculos que bloqueiem o progresso podem induzir irritação, medo, tristeza ou outras emoções desagradáveis. (Hannula, 2002, p. 29)

Segundo Goetz, Frenzel, Hall, e Pekrun (2008), “As emoções positivas têm um papel de eixo estruturante em cenários educacionais” (p. 10). Mas, as emoções que se encontram com mais frequência no contexto da aprendizagem matemática são gosto, ansiedade, irritação, e aborrecimento (Frenzel, Pekrun, & Goetz, 2006).

> *Emoção académica* é o termo usado para descrever as emoções dos alunos durante o processo de aprendizagem, durante a consecução dos seus objetivos educacionais, e durante o ensino em sala de aula (Pekrun, Goetz, Titz, & Perry, 2002). As emoções que os alunos experimentam em contextos académicos

> afetam a sua motivação, persistência, e empenho no trabalho. Em última instância, condicionam o seu aproveitamento escolar (...) as suas escolhas de percursos académicos e de carreiras. (Goldberg, 2012, p. 3)

As emoções académicas podem ser classificadas de acordo com a sua valência (como positivas ou negativas) e com a ativação (maior ou menor, consoante varia entre ativante e desativante) (Kleine, Goetz, Pekrun, & Hall, 2005). Entre as emoções positivas temos o gosto, o brio (ou orgulho) e a esperança, que são vistas como ativantes, e também temos o alívio e o relaxamento, vistos como emoções desativantes. Entre as emoções negativas temos a ansiedade, a irritação e a vergonha que são vistas como ativantes e o aborrecimento e o desalento (falta de esperança) vistos como desativantes. Como forma de apresentação resumida desta ideia apresento uma tabela que pretende reproduzir o modelo de Pekrun (1992) para a classificação das emoções académicas (figura 18).

	Valência	
Ativação	**Positiva**	**Negativa**
Ativante	Gosto Orgulho Esperança	Ansiedade Irritação Vergonha/Culpa
Desativante	Alívio	Aborrecimento
	Relaxamento	Desespero

Figura 18 – Classificação das emoções académicas segundo Pekrun (1992) (Kleine et al., 2005, p. 221).

Neste modelo, "as emoções académicas discretas são assumidas como tendo efeitos específicos na aprendizagem e aproveitamento escolar com base na classificação que lhes é atribuída neste esquema concetual" (Kleine et al., 2005, p. 221).

No entanto, Kleine et al. (2005) alertam para que não podemos assumir que as emoções positivas têm um efeito positivo na aprendizagem e que as emoções negativas têm um efeito negativo. A corroborar esta afirmação, estarão, talvez, algumas afirmações que encontrei ao debruçar-me sobre o conceito de meta-afeto. Os meta-afetos são os afetos acerca dos afetos, afetos relacionados e incluídos na cognição acerca dos afetos, e a monitorização individual dos afetos pela cognição (o pensamento acerca da direção dos próprios sentimentos) e/ou além dos afetos (DeBellis & Goldin, 2006). DeBellis e Goldin (2006) consideraram mesmo a hipótese de os meta-afetos serem o aspeto mais importante dos afetos. Segundo estes mesmos autores, o meta-afeto é a vertente do afeto que permite às pessoas, nas circunstâncias adequadas, experimentar o medo como aprazível, ou distinguir sentimentos e emoções vividos por outros, ao ler livros ou visionar filmes, dos seus próprios sentimentos na vida real. "Os meta-afetos ajudam a orientar a experiência de emoções hipotéticas enquanto estas são usadas para ganhos cognitivos" (DeBellis & Goldin, 2006, p. 136). E explicam:

> O medo ocorre frequentemente em contextos matemáticos, por exemplo quando se enfrenta um problema matemático, um tópico matemático particular, ou um exame escolar. (...) Os meta-afetos associados ao medo relacionado com a matemática, isto é, a estrutura dos sentimentos acerca do medo, não são, de uma maneira geral, agradáveis. (DeBellis & Goldin, 2006, p. 136)

No entanto, se considerarmos que os meta-afetos podem ascender em muitos níveis e que essa estrutura é poderosa e estável,

> então podemos sentir *culpa* pela *irritação* provocada pela *dor* da rejeição percecionada, e causada pelo insucesso académico, por parte de alguém que *amamos* (pai, mãe, familiar). Na base, talvez esteja o amor, mas os meta-afetos negativos transformam-no em algo doloroso, e a irritação e culpa contribuem para uma estrutura duradoira embora disfuncional. (DeBellis & Goldin, 2006, p. 136, ênfase no original)

Ou seja, se pensarmos um pouco, os meta-afetos sugerem-nos que "os mais importantes objetivos afetivos em matemática não são eliminar a frustração, remover o medo e a ansiedade, ou fazer da atividade matemática algo consistentemente fácil e divertido" (DeBellis & Goldin, 2006, p. 136). Em vez disso, talvez fosse melhor desenvolver meta-afetos onde os sentimentos e emoções "*acerca* das emoções associadas com impasse ou dificuldade são *produtivas* para a aprendizagem e realização" pessoal (DeBellis & Goldin, 2006, p. 137, ênfase no original).

> A cognição desempenha um papel importante nestes meta-afetos. Assim como o conhecimento de que a corrida de um *roller coaster* é realmente segura pode tornar o medo agradável, a exploração matemática num ambiente onde o aluno sabe que cometer erros é seguro pode transformar emoções negativas em emoções positivas. (...) Por exemplo, a frustração pode e deve indicar que um problema matemático, não sendo trivial, é interessante. Deve incluir a antecipação de uma possível ilação e compreensão de algo novo, ou o atingir de um objetivo difícil. E assim, a própria frustração seria experienciada como interessante, curiosa, até eufórica. Um ambiente de aprendizagem que dá apoio, dá uma sensação de segurança a quem está confuso, sem saber como resolver uma questão. E então a frustração associada a meta-afetos produtivos sugere que o problema é digno de ser resolvido, motivando a exploração em vez da desistência. (DeBellis & Goldin, 2006, p. 137)

A noção de desafio fornece um exemplo desta complicada relação entre afetos e cognição. Arrisco a afirmar que um problema, não sendo trivial, pode provocar um certo receio de insucesso e até de frustração. No entanto, esse poderá ser um dos motores da curiosidade e da vontade de superar um obstáculo, que impele o indivíduo a enfrentar o desafio. Sobretudo quando o ambiente em que a ação se desenrola é propiciador de apoio, ajuda e segurança sem qualquer tipo de recriminação ou julgamento negativo, isto é, capaz de potenciar ação produtiva a partir de emoções negativas. Ou seja, emoções negativas em *dose pequena* podem ser, talvez, tão ativantes quanto as positivas ativantes.

A noção de desafio não é uma noção linear, nem simples, uma vez que inclui um forte apelo cognitivo (resolver uma tarefa) e um envolvimento afetivo e emocional (ter vontade de resolver, sentir-se atraído e entusiasmado pelo envolvimento no processo de descoberta de uma resposta que não é óbvia) (Carreira et al., 2013). Portanto parece, mais uma vez, possível inferir que desafios moderados e ambientes encorajadores e motivantes estimulam a vontade de tentar resolver os desafios. Isto é, parece que o *segredo* está em provocar emoções negativas mas ativantes em *pequena dose* e emoções positivas ativantes quanto baste.

Segundo Kenderov, competições matemáticas, sobretudo as de natureza inclusiva, fornecem um contexto privilegiado para a resolução de desafios moderados, num contexto fora da sala de aula (Kenderov et al., 2009). Freiman e Applebaum (2011) argumentam que as vantagens das competições matemáticas estão fortemente relacionadas com fatores afetivos como satisfação, sentido de eficácia, gosto e interesse pela matemática, e capacidades de trabalho cooperativo. Eu acrescentaria que a natureza inclusiva dessas competições matemáticas deve ter implícita a utilização de desafios moderados, por forma a provocar doses ligeiras de emoções negativas (como ansiedade, frustração, incómodo e irritação por não conseguir resolver de imediato) tal como parece acontecer nas competições que fornecem os dados para este trabalho.

Recordando uma afirmação contida numa das citações acima: “a exploração matemática num ambiente onde o aluno sabe que cometer erros é seguro pode transformar emoções negativas em emoções positivas” (DeBellis & Goldin, 2006, p. 137), é pertinente pensar em quais serão esses ambientes. Por certo que um ambiente como o das competições SUB12 e SUB14, onde a procura de ajuda é legítima e incentivada, é um desses ambientes. Assim, vou procurar expor um pouco do que se conhece sobre a procura de ajuda em ambientes de aprendizagem.

3.4 Procurar ou evitar ajuda?

Historicamente, a investigação sobre a procura de ajuda é relativamente recente. A investigação neste tema de forma sistemática e teoricamente orientada emergiu nos anos 80 do século passado Inicialmente, a procura de ajuda era vista de uma forma algo negativa, antiética aos olhos do espírito característico americano, individualista, e que via a procura de ajuda como uma forma passiva de dependência. Procurava-se compreender a razão pela qual os indivíduos não procuravam ajuda (Butler, 2006; Karabenick & Newman, 2009, citados em Zusho & Barnett, 2011).

> Esta linha de investigação sugeriu que devem existir custos psicológicos na procura de ajuda. Primeiro porque, por procurar ajuda, corre-se o risco de ser visto pelos outros como necessitado. Segundo, o ato de procurar ajuda pode ser entendido como uma admissão pública de incapacidade. Assim, a ameaça percecionada à autoestima foi identificada como sendo o primeiro motivo pelo qual não se procurava ajuda (Karabenick & Knapp, 1991). Karabenick (2006) refere que estas conotações sociais da procura de ajuda distinguem esta forma de comportamento regulador de alguns dos aspetos mais cognitivos e metacognitivos da autorregulação. (Zusho & Barnett, 2011, p. 153)

Zusho e Barnett (2011) chamam a atenção que, segundo Ryan e Pintrich (1997), por influência do trabalho inovador de Nelson-Le Gall (1981, 1985), "grande parte da investigação contemporânea sobre a procura de ajuda baseia-se na assunção de que investigar as razões pelas quais um indivíduo procura ajuda pode ser tão importante como explorar as razões pelas quais evita procurar ajuda" (p. 153). E, ao referirem que a investigação sobre a origem, ou razões, da procura de ajuda é "complexa e multifacetada" (Zusho e Barnett, 2011, p. 153), dão como exemplo o facto de se partir do princípio que essas razões são *instrumentais* (tais como querer aprender e compreender a, e com, a tarefa), ou de *expediente* (uma forma rápida e fácil de concluir a tarefa sem grande esforço) (Nelson-Le Gall, 1981, 1985, citado em Zusho & Barnett, 2011).

A procura de ajuda, vista como uma estratégia de autorregulação, desempenha um papel importante no processo de aprendizagem e a investigação neste campo tem procurado compreender quando, por que razões e a quem os alunos pedem ajuda, quando se deparam com dificuldades académicas (Zusho & Barnett, 2011). Roussel, Elliot e Feltman (2010) afirmam que, com base na estrutura da autorregulação da aprendizagem, a procura de ajuda é considerada uma estratégia de adaptação que as pessoas podem usar quando se deparam com problemas muito difíceis para resolver por elas próprias.

Segundo White e Bembenutty (2013), de acordo com Schunk e Usher (2013), a autorregulação da aprendizagem é o processo utilizado pelos aprendizes que "sistematicamente organizam e dirigem os seus pensamentos, sentimentos e ações"[25], no intuito de atingir um objetivo de aprendizagem. Nesta perspetiva, parece-me que a procura de ajuda apropriada, quando necessária, pode ser entendida como indicadora de vontade de aprender, empenho, motivação e, assim, ser vista como legítima e com valor positivo. Ou seja, na minha opinião, quando as razões são instrumentais, o processo metacognitivo da procura de ajuda implica estar consciente da existência de um problema, obstáculo ou dificuldade, reconhecendo a necessidade de ajuda, ponderando os prós e os contras de procurar ajuda versus evitar a ajuda, selecionando a fonte de ajuda de entre as disponíveis, e obtendo a ajuda requerida (Karabenick, 2011).

Karabenick e Knapp (1991) concluíram que aprendizes que procuram ajuda, desvalorizando o facto de isso constituir uma ameaça à sua auto-estima, são tendencialmente mais bem sucedidos e mais adaptáveis ao seu ambiente do que os que evitam pedir ajuda (White & Bembenutty, 2013). Zusho e Barnet (2011) sugerem a existência de um elo relativamente forte entre as expectativas de, e confiança no, sucesso académico, e os padrões de procura de ajuda e o ato de evitar a ajuda.

A autoeficácia académica está relacionada com a confiança que os alunos têm em si próprios para cumprir uma dada tarefa académica (Bandura, 1986, citado em Ryan & Shin, 2011) e está diretamente associada ao desempenho académico. Alunos com baixa autoeficácia têm tendência para sentir que os outros veem a sua necessidade de ajuda como um sinal de incapacidade, incompetência para cumprir a tarefa; assim, tendem a evitar procurar ajuda. Neste caso, evitar a procura de ajuda é consequência de uma perceção de ameaça à sua autoeficácia (Ryan & Shin, 2011; Zusho & Barnett, 2011). Pelo contrário, quando perante um insucesso ou dificuldade no cumprimento duma tarefa, os alunos com elevada autoeficácia não ficam preocupados com o que os outros possam pensar deles, nomeadamente que são incompetentes para resolver a tarefa, tendem a, de uma forma ativa, procurar ajuda. A noção de autoeficácia académica ajudou os investigadores a melhor compreender por que razão os alunos que mais parecem precisar de ajuda são os que menos a procuram (Ryan & Shin, 2011).

Assim sendo, a necessidade de reverter a situação, isto é, levar os alunos com menor aproveitamento escolar, que não se mostram tão inclinados a pedir ajuda, a percecionarem-na da mesma forma que os que têm melhor aproveitamento, e que a reconhecem como uma mais valia, é urgente. Para que se não acentue ainda mais a diferença entre os dois grupos, distintos ao nível de performance académica e da performance na vida, com possíveis consequências nos seus futuros académicos e profissionais, é necessário estudar os fatores que influenciam e condicionam os padrões de comportamento na procura de ajuda e usar

[25] http://sgo.sagepub.com/content/3/2/2158244013484916

esse conhecimento com a intenção de tornar mais acessível e eficaz a aquisição de literacia matemática.

Parece-me, portanto, que ao considerar a procura de ajuda como uma importante estratégia de autorregulação, que está associada à motivação e sucesso (académico, por exemplo) num empreendimento, ela propiciará um comportamento de busca de informação por forma a permitir adaptação e aquisição de conhecimento e capacidades necessárias à realização da empresa. Uma ferramenta que, numa sociedade em que a partilha de informação pode ser simples e rápida, não se pode desvalorizar.

Existem outros fatores que influenciam os padrões de comportamento da procura de ajuda ou fuga à procura de ajuda, por exemplo, os objetivos que se pretende alcançar, e as características dos contextos em que a necessidade de ajuda se sente. Ou seja, quando o objetivo tem como foco o desenvolvimento de competências (como a competência na resolução de problemas) existe uma tendência para interpretar a procura de ajuda como uma estratégia legítima e boa para melhorar a compreensão e as capacidades necessárias. Se, no entanto, o objetivo é demonstrar competência, o mais comum é percecionar a procura de ajuda como um sinal de fraqueza, de incapacidade e, portanto a tendência é evitá-la (Zusho & Barnet, 2011).

Por outro lado, dependendo dos contextos, a procura de ajuda ocorre mais ou menos facilmente. Segundo Karabenick (2011), a procura de ajuda ocorre com maior probabilidade em contextos onde o foco está na aprendizagem e compreensão mais do que na comparação de capacidades interpessoais. Mais ainda, a procura de ajuda ocorre mais facilmente em ambientes de aprendizagem atenciosos, onde existe apoio, e de natureza exploratória, ou seja, ambientes como o da fase de apuramento dos SUB12 e SUB14, em que os dados deste trabalho foram recolhidos. Nestes "ambientes, pode aumentar a preferência dos alunos por resolver sozinhos, e a procura de ajuda torna-se próxima de procurar pistas em vez de respostas" (Carreira et al., 2013a, p. 547; ver também Zusho & Barnet, 2011), ou seja, toma um caráter adaptativo (Newman, 2000).

Neste trabalho, considero duas vertentes relativas à procura de ajuda, a existência ou não de pedidos de ajuda, e a indicação das fontes dessa ajuda. Tendo em atenção que, no contexto da fase de apuramento, se incentivou a procura de ajuda, podemos talvez considerar que quando esta não existiu terá sido por um de dois motivos: não foi necessária ou houve uma evasão à mesma. De notar que todos os participantes podiam pedir ajuda, quando mais não fosse à organização da competição. Poderá também considerar-se que a razão da procura de ajuda, neste contexto, é instrumental, pois os participantes pretendem que a ajuda lhes permita aprender e compreender melhor o problema para o qual a solicitam. "A procura de ajuda considera-se *adaptativa* (e, portanto, instrumental) quando a ajuda pedida se limita à assistência necessária para resolver um problema independentemente” (Roussel, Elliot & Feltman, 2011, p. 394).

O uso das tecnologias da informação e comunicação tem sido referido como um fator que favorece comportamentos adaptativos na procura de ajuda sobretudo quando a aprendizagem e a compreensão são mais importantes que a comparação social ou o medo de insucesso (Karabenick, 2011). No que concerne ao SUB12 e ao SUB14, convém recordar que estas competições, para além de se processarem via internet na fase de apuramento, também permitem o uso de tecnologias, nomeadamente as tecnologias digitais que hoje em dia existem na maioria das casas e cujo uso é estimulado, tanto para pensar nos problemas como para elaborar as respostas aos mesmos. Além disso, é usando estas tecnologias da informação e comunicação que a comunicação digital (via e-mail) entre os participantes e a organização se faz, o que torna possível o importantíssimo feedback que caracteriza estas competições e que constitui, na realidade da maior parte dos casos, uma ajuda que é sempre fornecida aos participantes. Quer estes a solicitem, quer não, o feedback é dado sempre e a ajuda é dada sempre que necessário, seja, ou não, pedida pelos participantes.

3.5 Dificuldades percecionadas na resolução de problemas

O modo como os mais novos percecionam a dificuldade na realização das tarefas evolui com o seu desenvolvimento cognitivo e social. “As crianças mais novas definem ‘dificuldade’ como uma propriedade endémica à tarefa (…), as mais velhas projetam no termo uma maior complexidade, enfatizando o quão prontamente a tarefa é realizada pelos outros” (Schweinle et al., 2013, p. 1). Com a idade, há a tendência de associar maior dificuldade da tarefa a um maior esforço e a um menor número de indivíduos que a consegue resolver. Isto é, passa a existir “uma comparação social inerente à perceção de dificuldade” (Schweinle et al., 2013, p. 3).

Li e Belkin (2008) definem a dificuldade numa tarefa como sendo uma perceção subjetiva, no entendimento dos resolvedores de tarefas. Neste trabalho vou referir-me ao termo *dificuldade* como sendo a complexidade percecionada de uma tarefa do ponto de vista de quem a resolve, ou tenta resolver.

Embora as ideias de desafio e dificuldade tenham pontos em comum (por exemplo, tanto as tarefas desafiantes como as difíceis requerem esforço, uma espécie de luta, e implicam um certo nível de complexidade), elas são distintas. Schweinle et al. (2013) argumentam que “enquanto às tarefas desafiantes são dados valor e importância, estes atributos não estão necessariamente presentes nas tarefas difíceis” (p. 3); e acrescentam que “os desafios são suscetíveis de encorajar orientações motivacionais positivas" (p. 5), ao passo que tal já não acontece com as tarefas difíceis. Assim, nem todas as tarefas difíceis são suficientemente desafiadoras para quem as enfrenta e o sucesso nos desafios "não é determinado pela comparação com terceiros" (p. 5).

> Quando os alunos veem o seu próprio sucesso em comparação com o de outrém, tendem a envolver-se apenas em tarefas para as quais se sentem confiantes. Para estes, os desafios podem ser 'tanto oportunidades para melhorar o seu desempenho como ameaças, pois podem conduzir ao fracasso' (Schweinle et al., 2013, p. 4). Porém, quando os alunos veem o seu sucesso como reflexo do desenvolvimento dos seus conhecimentos ou capacidades, tendem a ver os desafios como oportunidades para promover esse desenvolvimento. (Carreira et al., 2013a, p. 548)

A investigação educacional tem identificado dois tipos de objetivos de realização: o de conhecimento profundo ou maestria, e o de execução/cumprimento da tarefa (Luo, Paris, Hogan, & Luo, 2011). Quando os alunos se propõem atingir um objetivo de *maestria*, procuram melhorar o seu conhecimento e competências – "os objetivos de *maestria* são guiados pela motivação da realização" (Luo et al., 2011, p. 166). Estes alunos percecionam o seu sucesso como o resultado do desenvolvimento do seu conhecimento e competências e tendem a ver os desafios como oportunidades promotoras desse desenvolvimento. Competem com eles próprios tentando superar-se. Quando pretendem atingir objetivos de *execução*, os alunos esforçam-se por ser melhores executantes que outros. Ou seja, o seu sucesso depende do sucesso dos outros e pode ser associado à possibilidade ameaçadora de desaire/fiasco perante tarefas desafiadoras.

Nas competições SUB12 e SUB14, promovem-se objetivos movidos pela motivação de sucesso na resolução de problemas, contrariando o medo do insucesso. Em particular, na fase de apuramento, o relativamente extenso período de tempo (quinze dias) permitido entre a divulgação do problema e a data limite da entrega da resposta definitiva dá ensejo a que os participantes possam pensar calmamente nos problemas e chegar a uma resposta. E, muito importante, o feedback regular fornecido a toda e qualquer resposta contribui para diminuir, ou até inibir, um possível sentimento de incapacidade ou incompetência na resolução de problemas, auxiliando à perceção de que as dificuldades e os erros podem ser oportunidades de aprendizagem e evolução. Devo referir também que, tratando-se de competições inclusivas, abarcando uma população heterogénea, os problemas propostos são desafiantes – e de desafio moderado, na ótica de Turner e Meyer (2004) – mas não são selecionados como tarefas difíceis, apenas intrigantes por forma a espicaçar um envolvimento entusiasta e dar a sensação de que apesar de tarefas exigentes, nada triviais, são resolúveis.

A importância das dimensões afetivas nas competições matemáticas parece-me inquestionável, aliás como em qualquer ambiente de aprendizagem e experiências cognitivas. O campo é muito vasto e demasiado labiríntico tanto nos conceitos a abordar, como nos processos e instrumentos a utilizar, para que uma investigação produza resultados perentórios, claros, ou generalizáveis. No entanto, creio ser hoje claro que é um campo em que urge procurar soluções para alguns problemas da educação matemática dos jovens e crianças.

III - Metodologia

Neste trabalho, abordo três dimensões afetivas manifestadas pelos participantes na edição do SUB12 e SUB14 de 2012/13, durante as respetivas fases de apuramento. Em particular, debruço-me sobre a procura de ajuda para resolver os problemas propostos, e o grau de apreciação (gosto) e grau de dificuldade sentidos na resolução desses problemas.

O trabalho adotou uma metodologia quantitativa de investigação, seguindo uma abordagem exploratória (uma vez que não existiam registos sobre esta temática no âmbito do projeto Problem@Web nem, pelo que me foi possível conhecer, a nível nacional) e descritiva. A investigação quantitativa descritiva tem por objetivo obter uma imagem da situação que espelhe a realidade no seu estado atual. Consiste na identificação empírica de atributos de um fenómeno particular, ou na procura de formas de correlacionar várias características importantes de um fenómeno (Creswell, 2002; Newby, 2010, citados em Carreira et al., 2013).

Os dados para este trabalho provêm das respostas dos participantes a um mini-questionário, constituído por três questões de escolha múltipla. Este miniquestionário encontra-se no formulário disponibilizado na página Web dos SUBs para submeter as respostas a cada problema. As questões são diretas e os participantes apenas podem escolher uma das opções apresentadas para cada questão (ver figura 19):

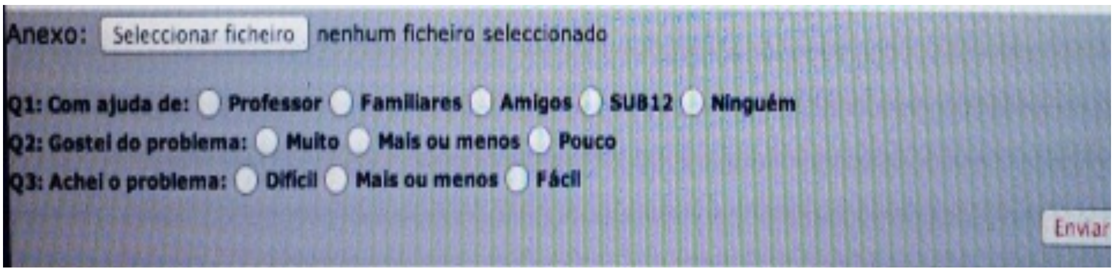


Figura 19 – Imagem do miniquestionário disponibilizado no formulário de resposta da página Web dos SUBs.

A resposta ao miniquestionário é obrigatória quando a resolução do problema é enviada através do formulário online, para todas as respostas, a todos os problemas. Ou seja, os participantes podem enviar mais do que uma resolução a cada problema, beneficiando do feedback que lhes é sempre fornecido. Mas de cada vez que enviam uma resolução, têm de responder ao miniquestionário. Apesar de ter consciência que nem sempre as respostas ao miniquestionário se mantinham quando mais do que uma versão da resolução existia, para este trabalho, apenas considerei a resposta ao miniquestionário relativa à última resolução submetida, independentemente de, durante o vaivém do processo de feedback, ter havido, ou não, alterações nas respostas ao miniquestionário.

Os participantes não eram obrigados a submeter as suas respostas usando o formulário disponibilizado na página web dos campeonatos. Em alternativa, podiam enviar as suas respostas diretamente para o endereço eletrónico do SUB12 ou do SUB14, conforme o caso. Quanto tal acontecia, a resposta ao miniquestionário era apenas solicitada pela organização dos SUBs e, na maioria das vezes, o pedido não era atendido.

Na edição de 2012/13, o número de participantes que respondeu ao miniquestionário é ligeiramente inferior a 50% do total de participantes em cada ronda das competições e corresponde sensivelmente ao número de participantes que usaram o formulário online para submeter as suas resoluções. Embora sem uma análise exaustiva, a equipa do projeto Problem@Web tem a clara perceção que esta tendência também se verificou nas edições anteriores dos campeonatos. É também importante referir que, à medida que a competição se desenrola, o número de participantes diminui, seja porque são eliminados (à terceira resposta errada, ou não suficientemente explicada, os participantes são eliminados), seja porque desistem da competição. Logo, também o número de respostas ao miniquestionário diminui. Na figura 20 indico o número de respostas ao miniquestionário recebidas, por problema proposto (que denoto por P1, P2, … P10), durante a fase de apuramento da edição de 2012/13, do SUB12 e do SUB14.

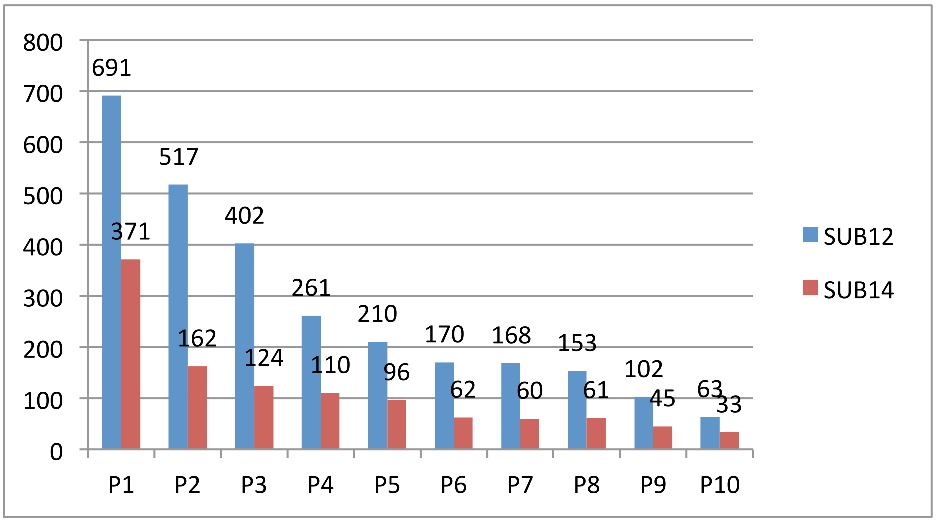


Figura 20 - Número de participantes que respondeu ao miniquestionário, por problema, durante a fase de apuramento da edição de 2012/13.

O número total de respostas ao miniquestionário obtidas dos participantes no SUB12, distribuídas pelos dez problemas, foi de 2737 e, no SUB14 foi de 1124. E, como se pode verificar pela leitura do gráfico da figura 20, a quantidade de respostas ao miniquestionário, por problema, não é uniforme; varia, diminuindo, o que se compreende uma vez que também o número de participantes foi diminuindo gradualmente ao longo da competição.

A análise de dados é marcadamente descritiva, baseada no número de respostas e nas frequências relativas de cada opção do miniquestionário, em cada problema. Ao olhar para os valores das frequências de uma série de problemas, o objetivo é obter uma imagem global a partir da qual se possam desenhar tendências nas dimensões afetivas do envolvimento dos jovens participantes no SUB12 e SUB14, na resolução de problemas moderadamente desafiantes, e tentar responder às questões de investigação colocadas. Assim, procurei encontrar padrões que, de alguma forma, pudessem ajudar a compreender a significância da procura de ajuda, e o nível de gosto e grau de dificuldade percecionada que foram reportados pelos participantes para cada problema. Procurei também possíveis associações entre estas dimensões afetivas da participação nos SUBs. Houve ainda a intenção de procurar descortinar possíveis ligações/comparações entre as duas ligas, SUB12 e SUB14, que indiciassem alguma pertinência.

A análise de dados é feita recorrendo ao uso do Excel para apresentação e resumo de informação sob a forma de tabelas e gráficos e depois complementada pelo cálculo de coeficientes de correlação entre os conjuntos de dados. Os dados brutos (frequências absolutas) foram inicialmente introduzidos em duas folhas de Excel (uma para o SUB12, outra para o SUB14) que foram posteriormente integradas e relacionadas para que se fizessem comparações.

No capítulo que se segue, apresentarei os dados de modo integrado (isto é, não irei analisar os dados do SUB12 separadamente dos dados do SUB14) para evitar muitas repetições e um elencar muito alongado de gráficos e tabelas. Sempre que se mostrar pertinente a comparação entre as duas ligas, SUB12 e SUB14, ela é feita de modo explícito.

IV - Análise e discussão de resultados

Este capítulo de análise de dados encontra-se estruturado de acordo com as questões de investigação que guiaram este estudo. Assim, cada secção é dedicada a cada uma das dimensões afetivas que foram objeto de escrutínio, procurando identificar padrões na procura de ajuda, por parte dos participantes, para a resolução dos problemas propostos na fase de apuramento do SUB12 e SUB14, e conhecer o grau de gosto/apreciação que os participantes nutriram pelos problemas que resolveram bem como o grau de dificuldade que sentiram nessa mesma resolução. Por fim, procurei identificar possíveis associações entre estas dimensões afetivas na resolução de problemas que tivessem alguma significância. Ao longo deste capítulo, são feitas várias referências a problemas particulares tanto do SUB12 e SUB14. Todos estes problemas se encontram nos anexos a este trabalho.

1. Padrões de procura de ajuda

Dentre as questões do miniquestionário que fornecem os dados empíricos para este trabalho, a primeira procura saber se os participantes procuraram ajuda de alguém para resolver os problemas e, nesse caso, de quem receberam ajuda dentre as várias fontes disponíveis (e que correspondiam às opções fornecidas no miniquestionário): professores, familiares, amigos, SUB12 (ou SUB14) e ninguém. Nas competições SUB12 e SUB14, o nível de competência na resolução de problemas dos participantes é muito variado, o que está de acordo com o caráter inclusivo destas competições. Dados recolhidos pela equipa do projeto Problem@Web (Amado et al., 2014) relativamente ao perfil académico dos participantes nas duas competições indicam que 25% dos alunos participantes nestas competições têm fraco aproveitamento escolar a matemática, enquanto os restantes 75% apresentam um aproveitamento médio ou elevado.

Os primeiros indicadores reportados pelos participantes relativamente à procura de ajuda estão quantitativamente expressos, para cada um dos dez problemas da fase de apuramento de cada uma das ligas, SUB12 e SUB14, na figura 21.

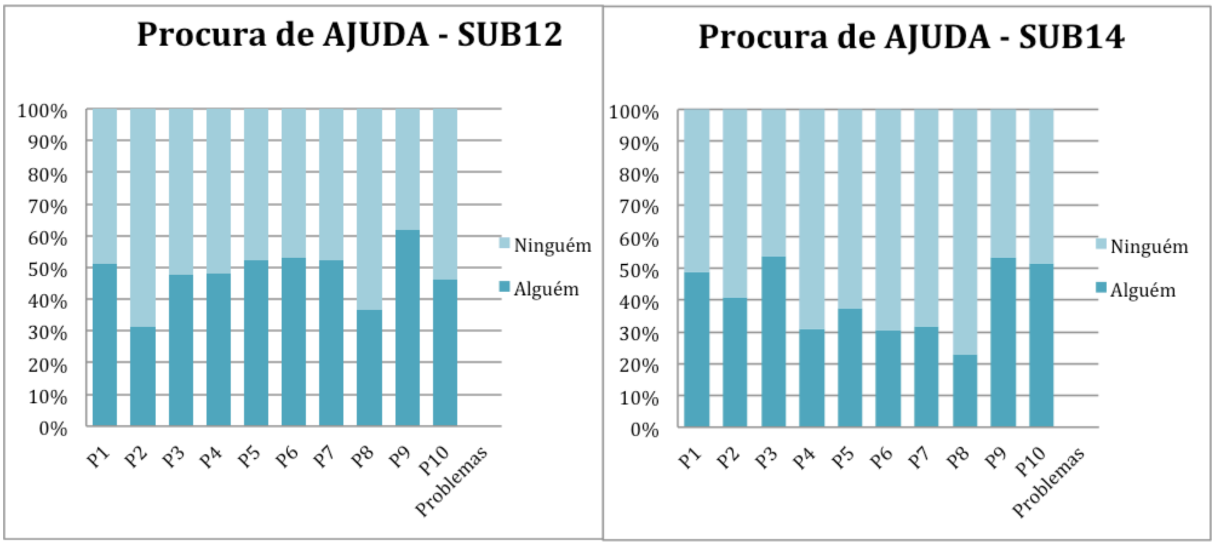


Figura 21 - Ajuda reportada pelos participantes no SUB12 e SUB14.

Como é possível verificar, a procura de ajuda foi relativamente elevada em todos os problemas, tanto no SUB12 como no SUB14. No caso do SUB12, (alunos dos 5.º e 6.º anos), a procura de ajuda foi reportada por mais de 46% dos participantes que responderam ao miniquestionário, em todos os problemas exceto nos problemas 2 e 8 – para os quais apenas 31,3% e 36,6% dos participantes, respetivamente, afirmaram ter procurado ajuda. Quanto ao SUB14 (alunos dos 7.º e 8.º anos), o padrão de procura de ajuda revela uma menor prevalência da necessidade de, ou predisposição para, procurar ajuda, uma vez que menos de 40% dos participantes, em metade dos problemas (problemas 4, 5, 6, 7 e 8), reporta ter procurado ajuda.

No conjunto dos dez problemas da fase de apuramento, a percentagem total de participantes que reportam ter pedido ajuda é de cerca de 46,5% no SUB12, enquanto no SUB14 é de 42,5%. Apesar de expressiva em ambos os casos, a procura de ajuda reportada denota uma maior tendência dos participantes mais novos, do SUB12, a procurar ajuda para resolver os problemas propostos do que os seus colegas mais velhos do SUB14 (figura 22). Isto pode indicar que, com o avançar da idade, os participantes tendem a procurar menos ajuda (o que não significa que não sintam necessidade de a procurar). É de salientar, no entanto, que, sendo a procura de ajuda explicitamente estimulada e encorajada pela comissão organizadora dos SUBs, através, por exemplo, do regulamento que se encontra na página web dos campeonatos, não são de estranhar os números relativamente elevados de procura de ajuda. Estes resultados vêm ao encontro do caráter inclusivo e formativo destas competições, sobretudo da sua fase de apuramento.

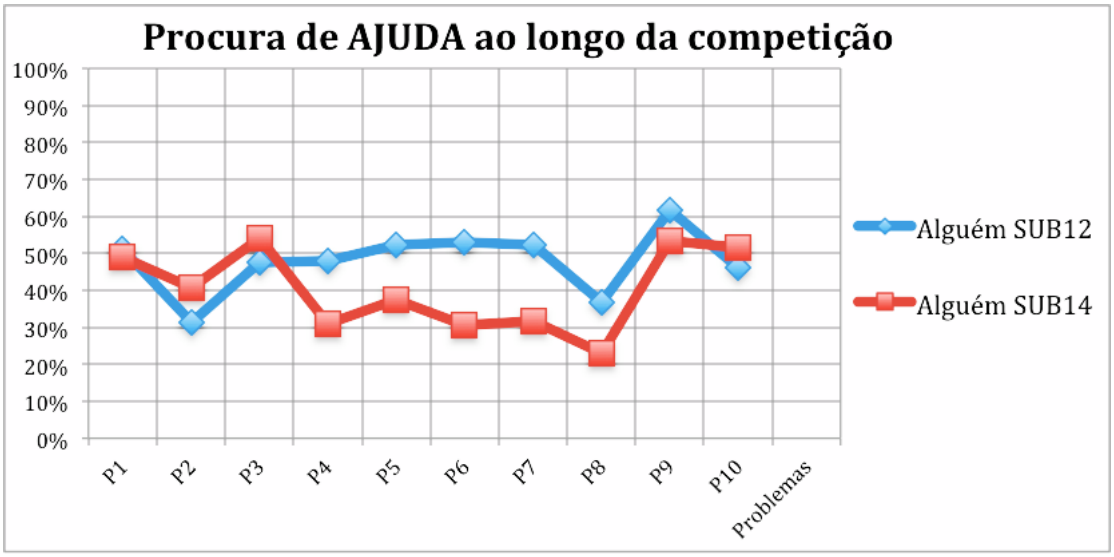


Figura 22 – Ajuda reportada pelos participantes no SUB12 e SUB14 (visão global).

Da análise da figura 22, sobressaem alguns problemas pelo elevado número de participantes que afirmam ter procurado ajuda para os resolver. São estes o problema 9 do SUB12 e os problemas 3 e 9 e 10 do SUB14. Outros problemas sobressaem pela relativamente reduzida ajuda reportada. Neste caso podemos referir os problemas 2 e 8 do SUB12, e o problema 8 do SUB14.

O problema 9 do SUB12 envolve encontrar padrões numa disposição em colunas de números ímpares; o problema 3 do SUB14 apresenta um contexto geométrico mas é, na realidade, um problema de números correspondentes a vértices de vários triângulos que é necessário imaginar; o problema 9 do SUB14 envolve frações, percentagens, margens de lucro numa situação de saldos. À exceção deste último problema, cujo conteúdo matemático é um dos que frequentemente é reconhecido por se destacar como sendo um domínio em que as dificuldades de aprendizagem evidenciadas por muitos alunos são maiores, não era previsível que as situações contidas nos restantes problemas suscitassem uma particular necessidade de procura de ajuda. Poder-se-á perguntar se a necessidade de ajuda não terá resultado do facto de os problemas numéricos terem um enunciado curto e preciso enquanto a sua resolução se apresentou inesperadamente mais inacessível e demorada. De facto, em ambos os problemas era crucial explorar e considerar mais do que padrões numéricos: processos de contagem e combinações eram também bastante importantes. Tal poderá explicar, talvez, uma possível sensação de grande complexidade nestes problemas, de certa forma disfarçada pela sua aparência simples. Relativamente ao problema 10 do SUB14, o facto de ser o último problema da fase de apuramento pode ter pesado bastante na decisão de procurar ajuda. Quase com um pé na final, os participantes não quereriam desperdiçar a oportunidade de poder *jogar pelo seguro*.

Olhando agora, com alguma atenção, para a prevalência das várias fontes de ajuda (figura 23) em ambas as competições, SUB12 e SUB14, verificamos que, em mais de metade dos casos, os participantes afirmaram não ter tido ajuda.

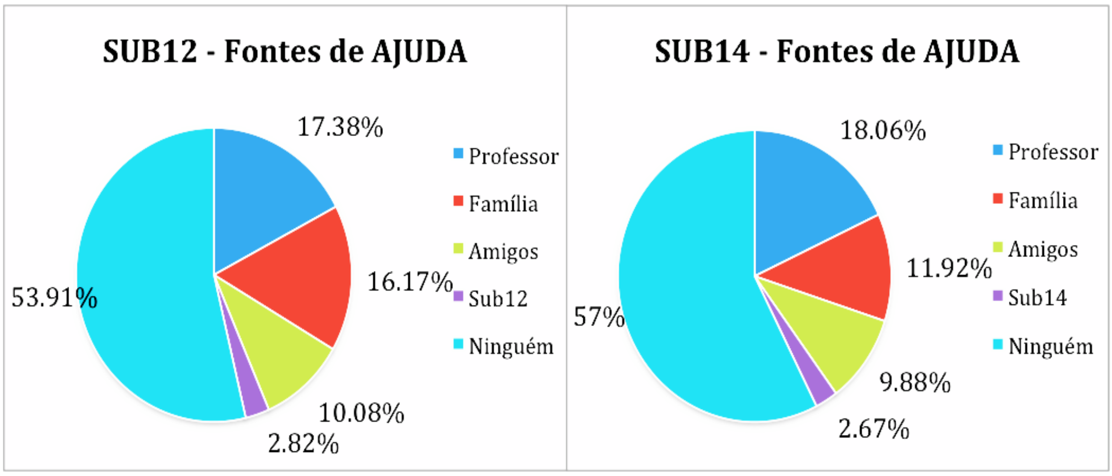


Figura 23 – Fontes de ajuda no SUB12 e no SUB14.

As duas maiores fontes de ajuda são a família e os professores. No entanto, a ajuda de familiares não é tão expressiva no SUB14 como é no SUB12. É preciso ter em conta que um mesmo professor pode ser fonte de ajuda para um grande número de participantes. A equipa do projeto Problem@Web sabe que vários professores se disponibilizam, seja em sala de aula ou noutros espaços de trabalho na escola, a ajudar os seus alunos a participar nas competições, ao longo de toda a fase de apuramento. Por isso, a ajuda de alguns professores pode abarcar muitos participantes.

A terceira fonte de ajuda é constituída pelos amigos, apesar de ter menor expressão em ambas as ligas, especialmente no SUB12. Os colegas de escola dos participantes podem ser vistos como incluídos neste grupo de amigos que proporcionam ajuda aos participantes para resolver os problemas – por exemplo, se os problemas são resolvidos no contexto escolar (como a equipa do projeto tem conhecimento) ou mesmo se os problemas são resolvidos em pequenos grupos (tal como é permitido pelo regulamento das competições).

A fonte de ajuda menos indicada pelos participantes, tanto no SUB12 como no SUB14, diz precisamente respeito à equipa organizadora das competições com que contactam por e-mail. O valor da procura de ajuda junto dos SUBs é ligeiramente inferior a 3%. No entanto, todos os participantes que enviam inicialmente uma resposta errada ou incompleta recebem feedback da organização para que reformulem a sua resposta. Este feedback pode, eventualmente, ser fundamental para a consecução correta da tarefa e, no entanto, não ser reconhecido como ajuda. Tudo indica que assim é, uma vez que existe uma discrepância entre a percentagem de participantes que reportam ter tido ajuda do SUB12 ou do SUB14 e a percentagem de casos que efetivamente teve sucesso após receber feedback da organização.

Na realidade, poucos são os casos em que os participantes tomam a iniciativa de se dirigir diretamente à organização (através de e-mail) e pedir ajuda, pedindo, por exemplo, uma pista para iniciar para iniciar o processo de resolução. Nestes casos, os participantes reconhecem ter tido ajuda do SUB12 ou do SUB14, o que coloca algumas questões: Será que os participantes tendem a reconhecer ter recebido ajuda apenas quando a solicitam explicitamente? Como será que percecionam a ajuda efetivamente dada pela organização ao fornecer feedback? Uma vez que, em geral, os participantes não percecionam o feedback que sistematicamente lhes é fornecido como ajuda, será que o percecionam como uma espécie de avaliação, um juízo de valor acerca da sua capacidade na resolução do problema? Ou será que é o facto de ser a única entidade, das várias fontes de ajuda disponíveis, com a qual a comunicação é feita à distância e, portanto, é vista como uma entidade *invisível*, não referenciável como ajuda (mesmo constando das possibilidades no miniquestionário)?

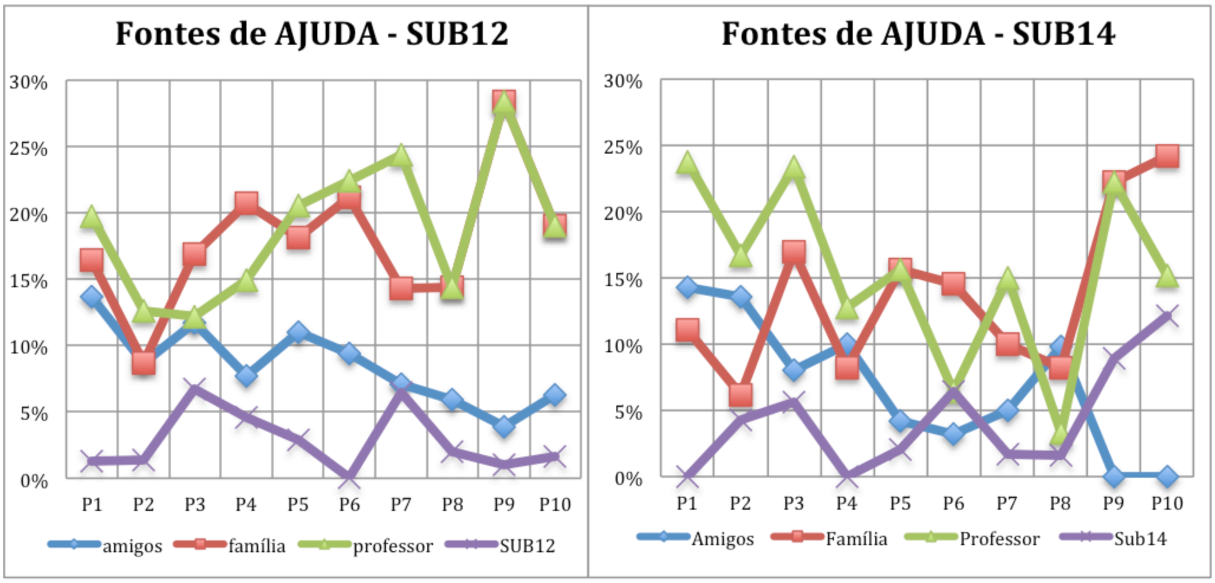


Figura 24 – Tendências de procura de ajuda em cada problema e ao longo da fase de apuramento do SUB12 e do SUB14.

Existem também algumas diferenças nas tendências de procura de ajuda quando olhamos para um problema de cada vez e ao longo da fase de apuramento da competição. Por exemplo, como se pode observar na figura 24, é notória a diferença nas duas ligas ao longo do tempo de duração da fase de apuramento no que respeita às fontes de ajuda mais solicitadas. Com efeito, enquanto no SUB12 a preferência pela ajuda da família e do professor é quase sempre crescente e bastante superior à de outras fontes, logo a partir do segundo problema, no SUB14 isto não se verifica, havendo ora um afastamento, ora uma aproximação dos valores de ajuda dados pelos dois grupos, neste caso menos distintos, de fontes de ajuda (SUB e amigos versus família e professor).

Dentro da mesma liga, no SUB12 por exemplo, e atendendo ao que se passa problema a problema, verifica-se que a ajuda reportada da família excedeu a dos professores em dois problemas, o 3 e o 4, e igualou-a nos problemas 8, 9 e 10. No SUB14 excedeu em três problemas, 6, 8 e 10, e igualou em dois, o 5 e o 9. Nos restantes cinco problemas, ou seja em metade dos problemas da competição, a maior ajuda foi sempre dada pelos professores. Olhando para a ordem dos problemas 1, 2, 3, 4 e 7 do SUB14, que são aqueles em que a ajuda mais reportada foi a do professor, ocorre-me que uma das razões para esse facto pode ter sido, no caso dos quatro primeiros, precisamente essa, a ordem. De facto, sendo os campeonatos publicitados e encorajados pelos professores, parece-me natural que os participantes a eles recorram em primeira instância. O problema 7, no entanto, escapa a esta regra. Ao olhar com mais atenção para o seu enunciado, verifico que é um problema de números, cuja roupagem de vida real não disfarça o seu contexto puramente matemático. É, assim, possível que este facto tenha direcionado os participantes a procurar ajuda junto de quem eles consideram ser o *expert* na matéria.

No caso do SUB12, cujos participantes são mais jovens e ainda muito chegados à família, presumo que a razão apontada para os primeiros problemas do SUB14 se mantenha, só que durante muito menos tempo, uma vez que só nos dois primeiros problemas é que a ajuda dos professores foi maior, voltando a ser a fonte primordial de ajuda no problema 5. O problema 5 é um problema de geometria que, até pela linguagem deverá ter feito crer aos participantes que a ajuda familiar, salvo em casos de pais com mais formação, por exemplo, não serviria de muito. O problema 5 é, na minha opinião, um problema de contexto matemático. Portanto, o mais natural seria pedir ajuda ao professor. No caso do problema 6, a ajuda do professor é apenas ligeiramente superior à da família mas, no caso do problema 7, a diferença é notória. Neste problema, poder-se-á conjeturar que mesmo que a ajuda tenha sido solicitada à família, esta possa não ter efetivamente ajudado remetendo essa responsabilidade para o professor.

Curiosamente, no problema 8, do SUB14, a ajuda mais vezes reportada foi a dos amigos (caso único em ambas as ligas), e o professor foi uma fonte menor (quase residual) de ajuda. Porém, nos problemas 9 e 10 da mesma liga, os amigos não foram reportados como fonte de ajuda e todos os outros tipos de ajuda dispararam, sobretudo no problema 9 em que a ajuda da família foi a segunda mais elevada em percentagem, e a do professor a terceira mais elevada de toda a fase de apuramento. Os dados recolhidos para este trabalho não permitem, contudo, avançar com uma hipótese explicativa para este fenómeno algo surpreendente.

2. Grau de apreciação dos problemas

A segunda pergunta do miniquestionário que forneceu os dados empíricos para este trabalho procura saber o grau de gosto que os participantes sentiram acerca de cada um dos problemas da fase de apuramento. As hipóteses disponíveis de resposta abarcavam desde gostar muito do problema, a gostar mais ou menos do problema, até gostar pouco do problema.

De uma forma global, no que diz respeito ao grau de apreciação dos problemas, a leitura dos dados disponíveis é que os participantes manifestam, em geral, gostar (uma emoção positiva) dos problemas matemáticos desafiantes propostos pelas duas ligas dos SUBs. Observando a figura 25 pode verificar-se que as diferenças entre o SUB12 e o SUB14 são, essencialmente, no número relativamente maior de participantes no SUB12 (54%) a afirmar que gostaram muito dos problemas em comparação com o número de participantes no SUB14 (47%). Inversamente, o número de participantes no SUB12 que reportou ter gostado mais ou menos dos problemas (40%) e ligeiramente menor que o número de participantes no SUB14 que optou por esta resposta ao mini-questionário (44%). Expressiva é a reduzida percentagem, em ambas as ligas, de participantes que reportaram uma emoção menos positiva em relação aos problemas, apesar desta ser cerca de 3% (mais precisamente 3,35%) superior no SUB14.

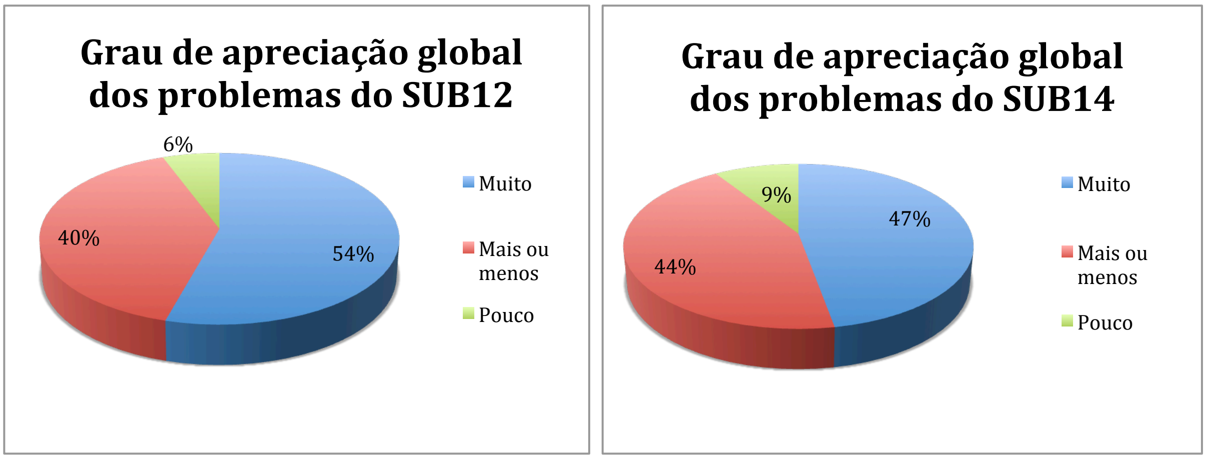


Figura 25 – Grau de apreciação global dos problemas do SUB12 e do SUB14.

Olhando ao que se passa em cada um dos problemas, e em cada uma das ligas, (figura 26), facilmente se dá conta de irregularidades ao longo da fase de apuramento relativamente a alguns problemas. No SUB12, por exemplo, os problemas 2 e 8 destacam-se (logo seguidos do problema 1), tanto por serem referidos por uma grande percentagem de participantes (superior à dos restantes problemas) que afirmam deles terem gostado muito, como por terem sido dos menos apontados como gostando pouco. Creio ser legítimo afirmar que terão sido os problemas mais apreciados pelos participantes do SUB12. Curiosamente, estes dois problemas são também os que foram reportados como aqueles em que os participantes menos necessitaram de ajuda (figura 22).

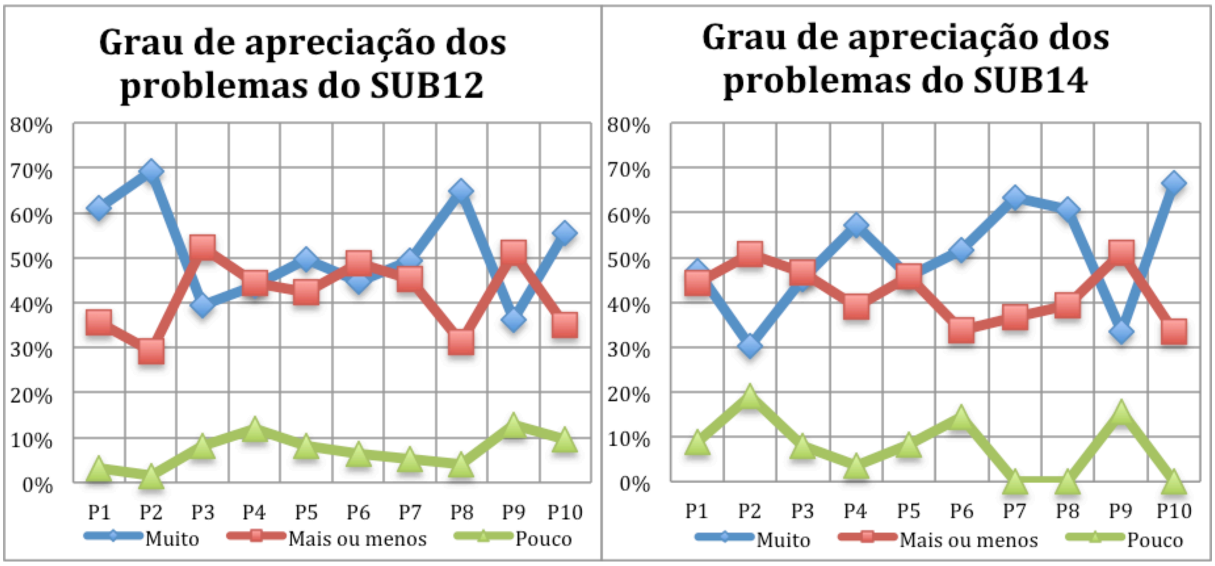


Figura 26 – Grau de apreciação de cada problema do SUB12 e do SUB14, ao longo da fase de apuramento.

Por forma a procurar uma possível explicação para estes factos, procurei analisar melhor os enunciados de ambos os problemas (2 e 8 do SUB12) que identifiquei como uma espécie de *outsiders. Outsiders* no bom sentido, porque provocadores de emoções positivas, numa muito ténue regularidade de apreciação dos problemas propostos com emoções que alternam entre o *gosto muito* e o *gosto mais ou menos.*

É de salientar que ambos os problemas não requerem o uso de algoritmos ou regras utilizadas habitualmente nas aulas de matemática. O problema 2, um problema de contagens (ou combinatória) que é facilmente resolúvel por indicação de todas as possibilidades, desde que bem interpretado, ocupa o primeiro lugar no *ranking* dos *gosto muito*.

O problema 8, que ocupa o segundo lugar no *ranking* referido, além de se referir a um contexto agradável aos olhos dos participantes do SUB12 (compras, brinquedos, gelados), também não tem dados numéricos e assemelha-se a uma charada, um jogo que apetece jogar (é um problema a que frequentemente chamamos de raciocínio condicional), que é facilmente discutível tanto com amigos como familiares e até professores, e que também é possível resolver experimentando possíveis soluções. Assim, estas características destes problemas em particular, que se afastam bastante dos problemas que os participantes encontram em contexto escolar e também que não requerem a mobilização de conceitos ou procedimentos abordados na matemática escolar, podem explicar o elevado gosto que suscitaram junto dos participantes no SUB12.

Se atentarmos no gráfico relativo ao SUB14 da figura 26, verificamos que os problemas mais apreciados foram o 10, logo seguido do 7 e do 8, este último, presumivelmente, por razões idênticas às apontadas no caso dos mais apreciados no SUB12, como por exemplo o facto de não requerer o uso de algoritmos ou regras utilizadas habitualmente nas aulas de matemática Mais uma vez, dois dos problemas mais apreciados, o 10 e o 8, são do tipo que os alunos não identificam tanto como sendo *matemático*. Nestes problemas, os alunos não precisam das ferramentas habitualmente usadas nas aulas de matemática.

No entanto, enquanto que o problema 8 foi aquele em que reportaram menos necessidade de ajuda, o problema 10 foi um dos três problemas em que a ajuda foi mais solicitada (mais de 50% de participantes afirmaram ter pedido ajuda em cada um desses três problemas). Este problema 10 foi resolvido apenas pelos participantes que não desistiram até ao final da fase de apuramento e que conseguiram resolver todos os outros problemas anteriores com sucesso, exceto, no máximo, dois. Será que o que pesou na emoção positiva exteriorizada no final pela declaração de *gostei muito* foi exatamente o facto de, a julgar pelo elevado nível de procura de ajuda, ter o grau certo de desafio, uma vez que os alunos que chegaram até este ponto, à final da fase de apuramento, são por certo persistentes e apreciadores de desafios. Será que o contexto, aparentemente cativante, também teve influência?

Olhando novamente para a figura 26, em busca dos problemas menos apreciados ou, mais claramente, dos problemas que os participantes afirmaram menos gostar, creio que as conclusões são relativamente evidentes. No caso do SUB12 parece-me serem os problemas 4 e 9, enquanto no SUB14, parece-me que são os problemas 2 e 9. Em ambas as situações, SUB12 e SUB14, estes são os problemas em que cumulativamente é reportada mais vezes a emoção *gosto pouco* e menos vezes *gosto muito*.

No caso dos problemas do SUB12, verifica-se que a maior necessidade de ajuda foi coincidentemente sentida num dos problemas menos apreciados, o 9. Já o 4 não sobressai no que se refere à ajuda pedida, relativamente à maioria dos problemas. No caso do SUB14, o problema 9 é o segundo com maior percentagem de pedidos de ajuda reportados, enquanto que o 2 ocupa o quinto lugar numa mesma escala decrescente de pedidos de ajuda. Parece, pois, que gostar de um problema não depende de não sentir necessidade de pedir ajuda e, portanto, gostar (muito) de um problema pode depender apenas do problema em si.

É de referir ainda que a percentagem de participantes que reportou ter gostado *pouco* dos problemas propostos, em cada etapa da fase de apuramento, é sempre inferior a 13% no SUB12 e a 20% no SUB14. Estes dados são assim consistentes com uma menor apreciação global dos problemas propostos no SUB14 comparativamente com os propostos no SUB12.

3. Grau de dificuldade percecionada

Por fim, a última pergunta do miniquestionário que forneceu os dados empíricos para este trabalho procura saber o grau de dificuldade que os participantes sentiram na resolução de cada um dos problemas da fase de apuramento. As hipóteses disponíveis de resposta abarcavam desde ter achado o problema difícil, a mais ou menos, até o ter encontrado fácil.

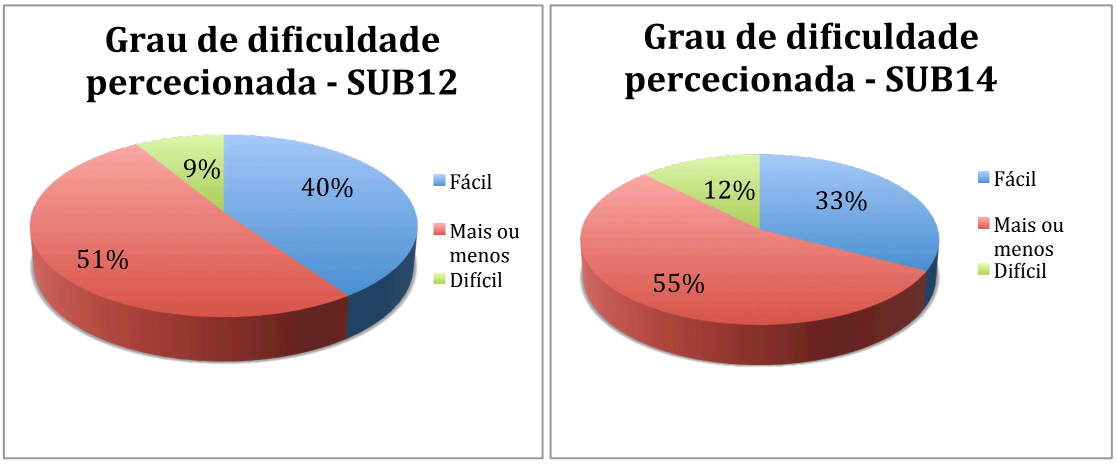
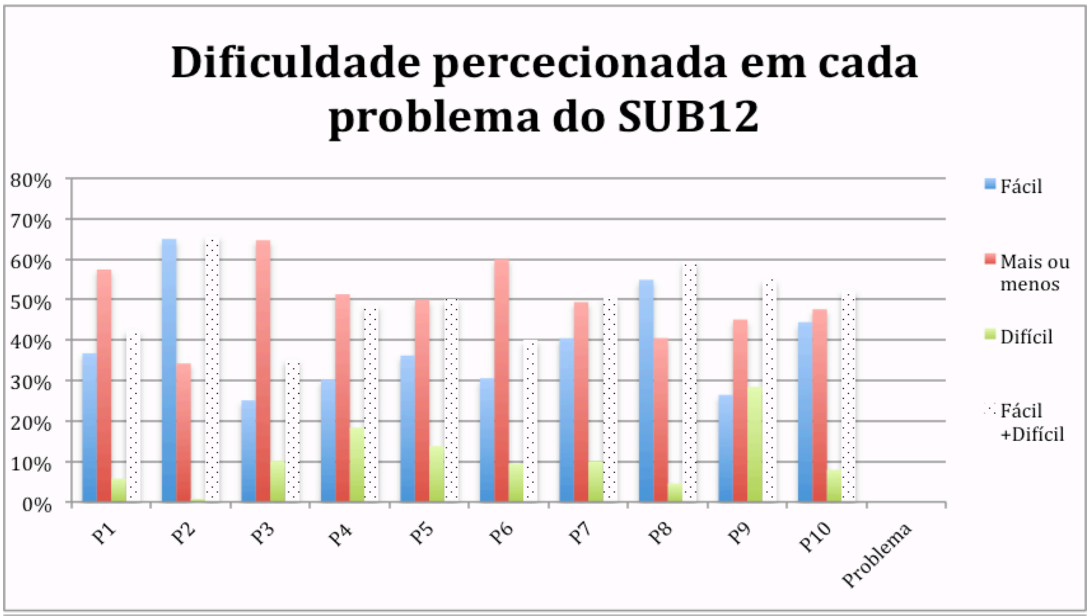


Figura 27 – Grau global de dificuldade percecionada pelos participantes no SUB12 e no SUB14.

Na figura 27, podemos observar uma representação gráfica do grau global de dificuldade percecionada pelos participantes na resolução dos problemas propostos na fase de apuramento do SUB12 e do SUB14. Globalmente, pode concluir-se que os problemas foram percecionados maioritariamente como de dificuldade moderada (mais ou menos). Os que assim não foram considerados foram sentidos sobretudo como fáceis (40,52% no SUB12 e 32,74% no SUB14). E os percecionados como difíceis reduziram-se a percentagens de 8,65% no SUB12 e 12,46% no SUB14. Estes dados estão, portanto, de acordo com o que inicialmente a organização das competições se propunha, isto é, propor problemas matemáticos moderadamente desafiantes, uma vez que a dificuldade moderada que se pretendia é reconhecida pelos próprios participantes. No entanto, é bem visível uma diferença entre as duas ligas pois, de uma forma geral, a percentagem de problemas percecionados como difíceis e de média dificuldade é superior, em aproximadamente 3% e 4%, respetivamente, quando passamos do SUB12 para o SUB14.

Na figura 28, é possível observar o grau de dificuldade percecionado problema a problema, em cada uma das categorias. As colunas identificadas com a legenda *Fácil+Difícil* pretendem facilitar a minha perceção do real grau de dificuldade moderada eventualmente apontado em cada problema (uma vez que pretendo *medir* o grau de dificuldade de um problema, usando uma emoção registada no final da sua resolução, por cada um dos participantes de uma competição inclusiva).



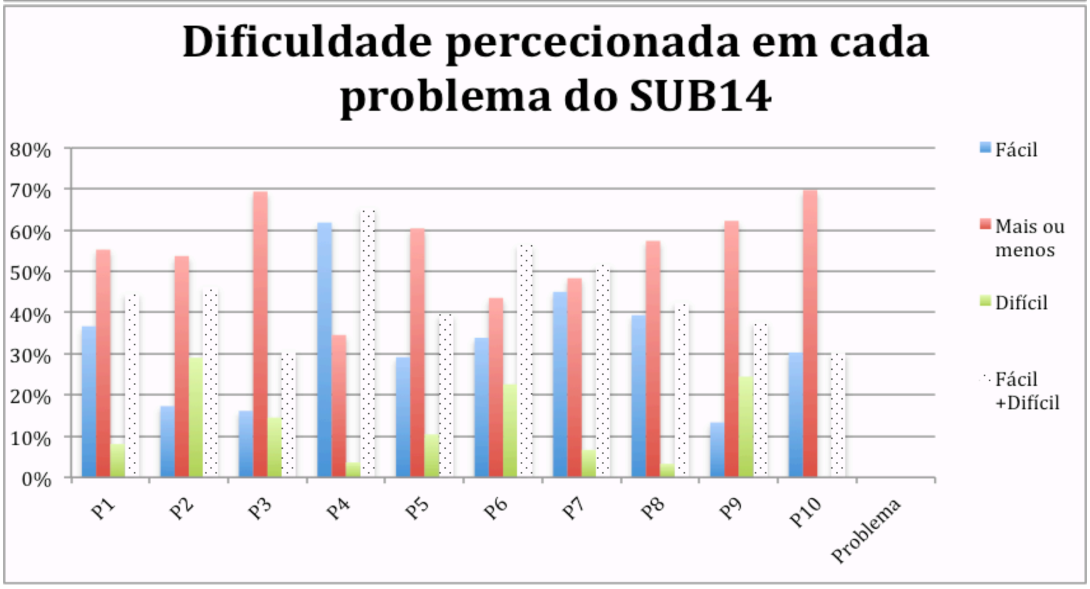


Figura 28 – Dificuldade percecionada em cada problema do SUB12 e do SUB14.

Estas leituras (tal como as leituras que foram feitas nas secções anteriores, sobretudo no que respeita ao gosto pelos problemas) têm de ser feitas com muito cuidado e tendo presente que, dizendo respeito a emoções, afetos, à partida, intensos, podem representar ou refletir respostas fugazes. Por exemplo, sentir um problema como sendo *mais ou* menos difícil, pode significar que "*era difícil mas se consegui chegar a uma solução é porque não era tão difícil assim*", ou "*era fácil, mas se só cheguei à resposta correta depois de várias tentativas, é porque não era tão fácil assim*", e algumas outras variantes intermédias. Ou seja, as respostas *fácil* e *difícil* refletem uma emoção clara, enquanto a resposta *mais ou menos* pode refletir um gradiente relativamente difuso do grau de dificuldade sentido.

Um bom exemplo desta complicada tarefa de leitura e interpretação é a do problema 6 do SUB14. Com efeito, ocupa o terceiro lugar, por ordem decrescente, na categoria de mais *difícil* e o quarto lugar na de mais *fácil*, em dez problemas. Se considerarmos a percentagem de respondentes ao miniquestionário que o consideraram *mais ou menos* relativamente ao grau de dificuldade, verificamos que a percentagem dos que o classificam como *difícil* ou *fácil* é bastante superior, pondo em causa o grau moderado de dificuldade do problema, na minha perspetiva.

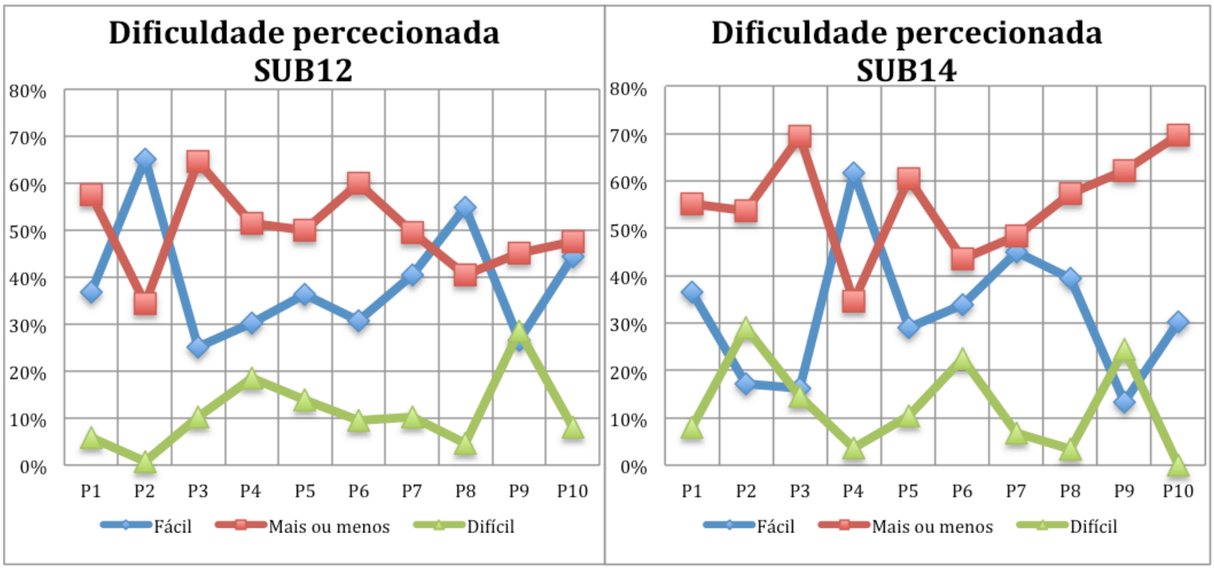


Figura 29 - Grau de dificuldade percecionado por problema ao longo da fase de apuramento.

Observando a figura 29, verificamos que no SUB12 se destacam dois problemas, o 2 e o 8, por terem sido considerados fáceis por um número relativamente elevado de participantes. O problema 2 envolve raciocínio combinatório e contagens. O problema 8 envolve raciocínio condicional. Ao comparar com a procura de ajuda, verifica-se que são também estes os problemas para os quais a procura de ajuda foi menor. E, no que respeita ao grau de apreciação, o problema 2 ocupa o primeiro lugar no *ranking* dos mais apreciados, logo seguido do problema 8 que ocupa a segunda posição. De facto, 68,7% dos participantes, no caso do problema 2, e 63,4%, no caso do problema 8, reportaram não ter tido qualquer tipo de ajuda para resolver estes dois problemas. E 69,2%, no caso do problema 2, e 64,7%, no caso do problema 8, (isto é, percentagens muito próximas das referidas relativamente à não existência de ajuda) reportaram ter gostado *muito* destes dois problemas. Estes resultados indiciam que poderá existir alguma associação, eventualmente significativa, entre achar um problema fácil e não precisar de ajuda para o solucionar, bem como gostar muito de um problema e achá-lo fácil.

No que respeita ao SUB14, o problema 4, que envolve a noção de média, apresenta a percentagem mais elevada de reportes de facilidade. No entanto, neste caso não se pode estabelecer um paralelismo idêntico com os resultados obtidos para a procura de ajuda, pois não foi este o problema para o qual os participantes reportaram menos procura de ajuda, mas sim o problema 8 (a percentagem de participantes que reportaram não ter tido ajuda para resolver o problema 4 foi de 69,1% e o problema 8 foi resolvido sem ajuda por 77% dos participantes).

O problema reportado como o mais *difícil* no SUB12 foi o problema 9 (28,4% dos respondentes), logo seguido do problema 4 com 18,4% dos respondentes ao miniquestionário a considerarem-no difícil. Este último, o problema 4, exige raciocínio, persistência e talvez, um pouco mais de trabalho que os restantes caso não seja identificada nenhuma regularidade numérica que facilite a resolução. Poderá ser esta mais forte acumulação de capacidades necessárias o motivo para uma maior sensação de complexidade.

Ligando estes resultados à procura de ajuda verificamos um paralelismo, que não surpreende, relativamente ao problema 9. Este problema do SUB12 foi efetivamente o problema que suscitou maior procura de ajuda, mas o mesmo não acontece com o problema 4. De facto, cinco dos dez problemas da fase de apuramento apresentam valores de procura de ajuda superiores ao do problema 4.

No que respeita ao SUB14, o problema 2, que pedia aos participantes que encontrassem o número possível de trajetos entre dois pontos numa grelha, e o problema 9 foram os mais difíceis: 29% e 24,4% dos participantes que responderam ao miniquestionário consideraram os problemas 2 e 9, respetivamente, difíceis. E, de modo semelhante ao que aconteceu no SUB12, o problema 9 do SUB14 foi o que teve mais participantes a sentir necessidade de procurar ajuda. No entanto, o problema 2 apresentou um número de participantes a declararem ter pedido ajuda para o resolver próximo do número médio tendo em conta todos os problemas do SUB14. Ou seja, este problema destacou-se pela dificuldade relativa, mas quanto à ajuda não sobressaiu.

Como se pode constatar a partir da observação dos gráficos da figura 29, a dificuldade percecionada pelos participantes relativamente aos problemas das duas competições apresenta algumas diferenças. Enquanto que os problemas que os participantes no SUB14 menos gostaram são precisamente os que também reportaram como sendo particularmente difíceis, o mesmo não aconteceu no SUB12. O problema 3, um dos que os participantes no SUB12 afirmaram gostar menos não foi reportado como particularmente difícil, foi considerado como tendo um grau médio de dificuldade (54,7% dos participantes classificaram-no como *mais ou menos*). Assim, para estes participantes, um problema ser difícil não implicará necessariamente que se gosta menos dele.

O problema 9 do SUB12 merece uma referência especial pois foi o que despoletou o valor relativo mais elevado de pedidos de ajuda, o que os participantes consideraram particularmente difícil, e aquele cuja percentagem de apreciações *gosto pouco* foi mais elevada. A complexidade deste problema pode estar associada a um menor grau de apreciação, nos dois sentidos. Por um lado, esta maior dificuldade, na perspetiva dos participantes, eventualmente por se dever um grau mais elevado de desafio, pode ter despoletado emoções menos positivas, nomeadamente diminuindo o sentimento de gosto. Por outro lado, a menor apreciação, eventualmente por motivos vários como a forma ou o conteúdo, por exemplo, pode ter despoletado uma perceção de maior dificuldade do problema. Curiosamente, no problema 9, do SUB14, os participantes também reportaram o valor mais elevado de procura de ajuda, e simultaneamente o segundo valor mais baixo do seu grau de apreciação (segunda maior percentagem de respondentes ao miniquestionário a escolher *gostei pouco*) e o segundo mais elevado na dificuldade. No entanto, não é neste problema do SUB14 tão evidente a relação entre estas três variáveis como no caso do SUB12.

4. Associações entre as dimensões afetivas

Ao cruzar os dados obtidos acerca das três dimensões afetivas consideradas neste trabalho (procura de ajuda na resolução dos problemas, gosto pelos problemas resolvidos e grau de dificuldade percecionada na resolução desses problemas), em todos os problemas ao longo da fase de apuramento do SUB12 e do SUB14, foi possível identificar algumas tendências, algumas similitudes e também diferenças entre as duas ligas. Por exemplo, no SUB12 e sem surpresa, verifica-se uma forte correlação positiva (figura 30) entre percecionar um problema como *difícil* e sentir a necessidade de *procurar ajuda* (ρ=0,78).

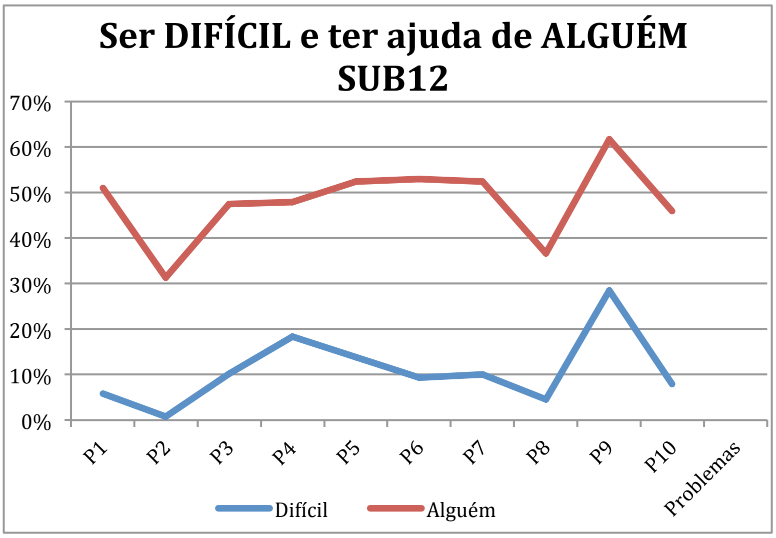


Figura 30 – Correlação entre *ser difícil* e ter a *ajuda de alguém* no SUB12.

De forma semelhante, existe uma correlação negativa (figura 31), também significativa e até mais forte que a anterior, entre percecionar um problema como *fácil* e a *procura de ajuda* (ρ= - 0,85).

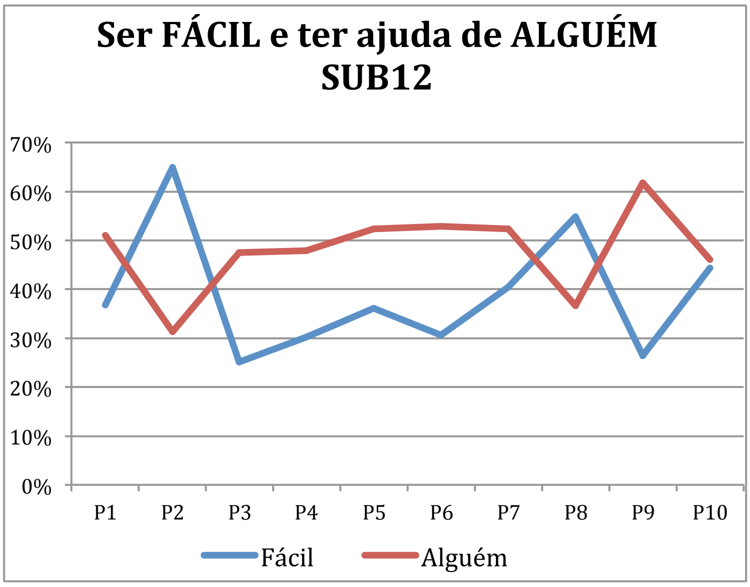


Figura 31 – Correlação entre *ser fácil* e ter a *ajuda de alguém* no SUB12.

No entanto, no SUB14, não se encontram correlações tão fortes. De facto, analogamente ao que acontece no SUB12, percecionar um problema como *fácil* e *procurar ajuda* também estão negativamente correlacionados (figura 32), mas com uma força diferente e menor do que no SUB12, uma vez que, neste caso, a correlação é de ρ= - 0,66.

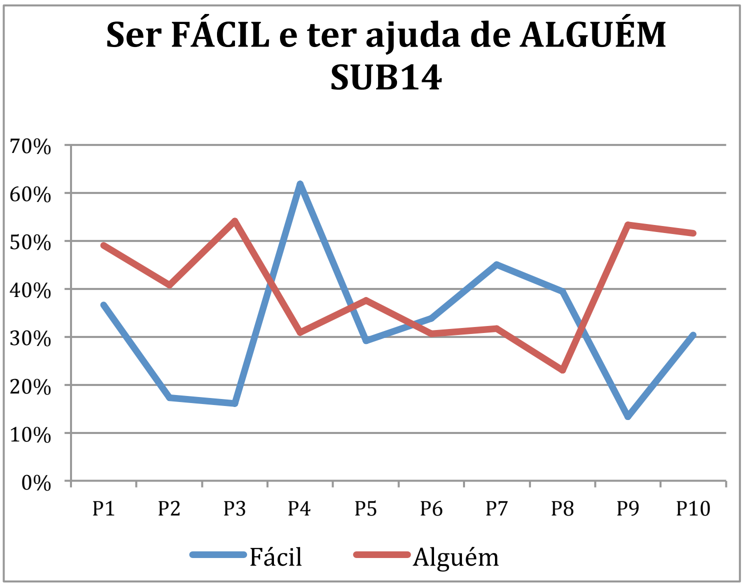


Figura 32 – Correlação entre ser fácil e ter a ajuda de alguém no SUB14.

Mas a diferença mais notória entre as duas ligas está relacionada com ter *ajuda de alguém* e a perceção de que o problema é *difícil* pois, neste caso, nem se pode considerar que haja correlação uma vez que ρ=0,21 (figura 33).

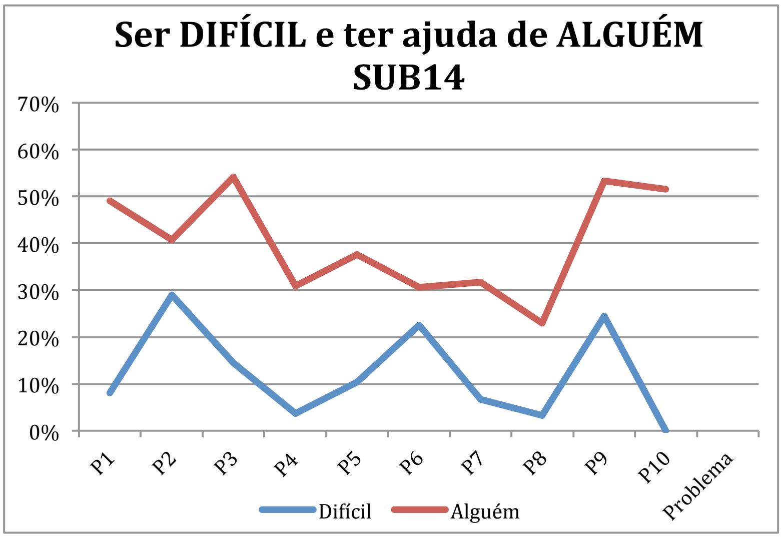


Figura 33 – Correlação entre *ser difícil* e ter *ajuda de alguém* no SUB14.

Portanto, pedir ajuda quando se perceciona um problema como difícil, parece ser bastante natural e bem aceite pelos participantes mais novos, os do SUB12. Já os mais velhos, os do SUB14, parecem ter-se mostrado mais reticentes nos seus pedidos de ajuda e nem sempre consideraram pedir ajuda mesmo que o problema fosse percecionado como difícil.

Os dados recolhidos sugerem ainda que, no SUB12, existe uma forte correlação positiva (ρ=0,91) entre *gostar muito* de um problema e percecioná-lo como *fácil* (figura 34). Mais ainda, entre *gostar pouco* de um problema e considerá-lo *difícil* também existe uma correlação positiva, embora não tão forte (ρ=0,88) (figura 35).

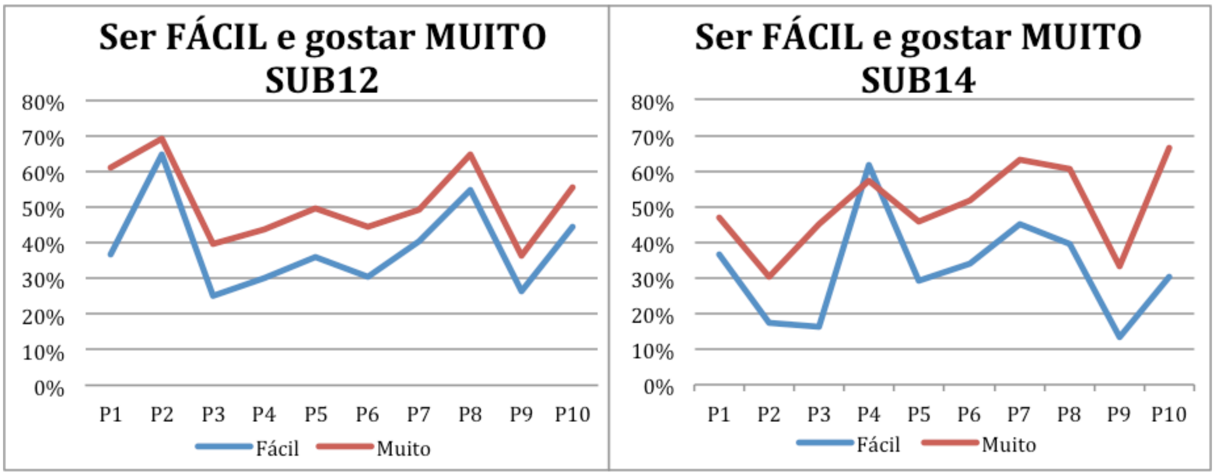


Figura 34 – Correlações entre *ser fácil* e *gostar muito* no SUB12 e no SUB14.

Esta última relação, entre encontrar um problema *difícil* e *gostar pouco*, é ainda mais forte para os participantes no SUB14 (ρ=0,95) (figura 35), sugerindo que, para as crianças mais velhas, a perceção de dificuldade de um problema se associa de forma mais imediata com menor gosto por esse problema. Mas, por outro lado, para as crianças mais velhas, gostar mais de um problema não acompanha a perceção de maior facilidade do problema, uma vez que essa relação é mais fraca para os participantes no SUB14 como é percetível por observação do gráfico do lado direito da figura 34 e pelo coeficiente de correlação (ρ=0,69).

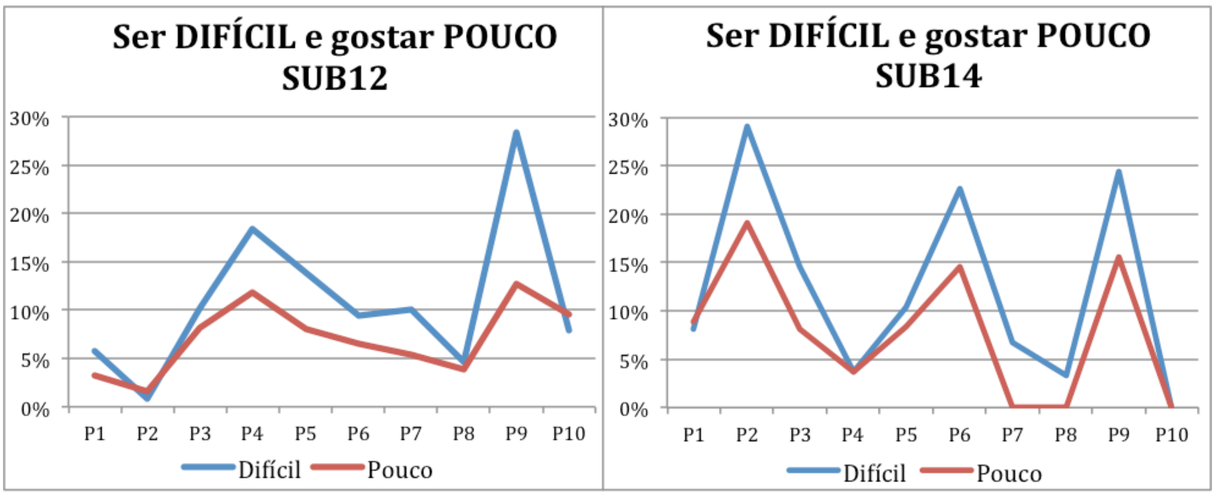


Figura 35 – Correlações entre *ser difícil* e *gostar pouco* no SUB12 e no SUB14.

Ao que parece, não é por o problema ser mais fácil que as crianças mais velhas gostam mais dele, uma vez, que a correlação é moderada. A razão poderá estar no facto de alguns participantes não gostarem de problemas fáceis por não serem suficientemente desafiadores. Tais problemas podem não os motivar para a sua resolução, eventualmente por os considerarem de certa forma enfadonhos, sem grande interesse. De forma análoga, gostar muito de um problema, no SUB14, também não significa que o tenha percecionado como fácil.

Quando consideramos um gosto moderado nos problemas, encontramos mais diferenças entre as duas ligas. Os participantes no SUB12 que percecionam os problemas como tendo dificuldade média, parecem tender a gostar moderadamente deles: o coeficiente de correlação entre estas duas dimensões é ρ=0,67 (figura 36). Os do SUB14 não manifestam uma relação semelhante, pois o coeficiente de correlação entre gostar mais ou menos e percecionar o grau de dificuldade da mesma forma é de apenas ρ=0,30, ou seja, não existe nenhuma associação significativa entre gostar mais ou menos de um problema e achá-lo medianamente difícil (ou fácil). Estes resultados parecem sugerir que o gosto por um problema tende a estar menos associado à facilidade com que se resolve conforme a idade dos participantes aumenta.

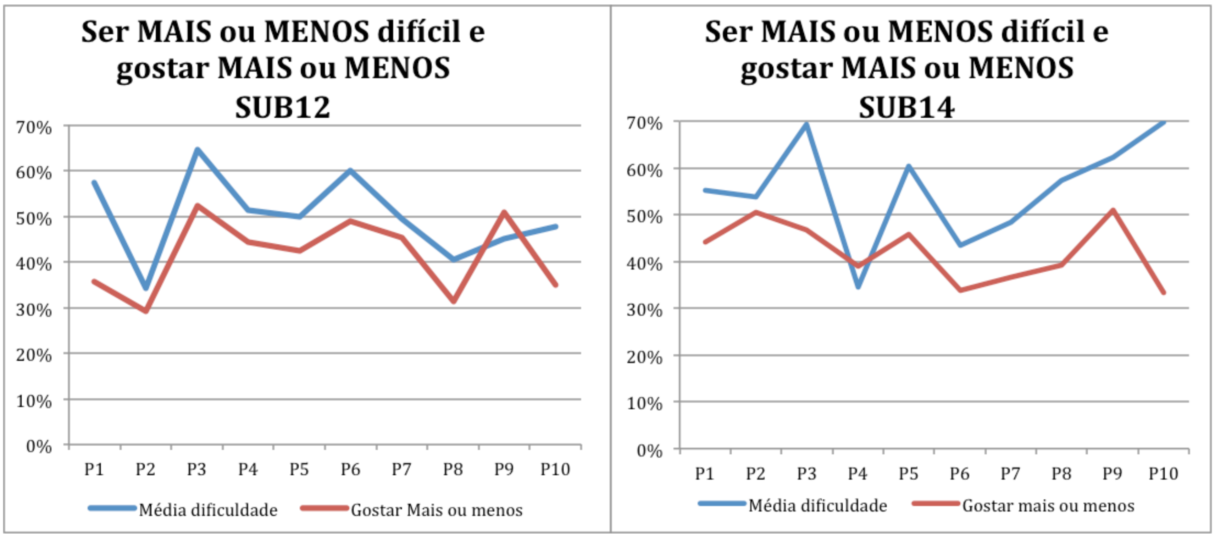


Figura 36 – Correlações entre *ser mais ou menos difícil* e *gostar mais ou menos* no SUB12 e no SUB14.

No SUB12, gostar muito de um problema está positivamente correlacionado com não sentir necessidade de pedir ajuda (ρ=70,9) como se pode observar no gráfico da esquerda da figura 37. As crianças mais novas tendem, portanto, a gostar de um problema que são capazes de resolver sozinhas, sem ajuda. Como mostra o gráfico da direita da mesma figura, isto acontece sobretudo a partir do problema cinco, ou seja, na última metade da fase de apuramento. Pode conjeturar-se se esta tendência não estará associada com um crescente desenvolvimento do sentido de autoeficácia na resolução de problemas que os participantes que se vão mantendo em competição vão adquirindo.

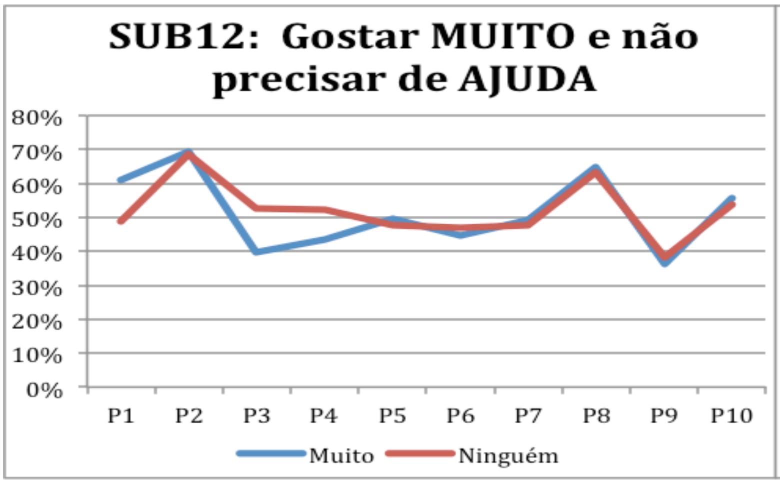


Figura 37 - Correlação entre *gostar muito* de um problema e *não precisar de ajuda* no SUB12.

No SUB14, no entanto, não se encontra uma correlação similar entre *gostar muito* e *não precisar de ajuda*, mas sim uma associação muito mais fraca, como se pode inferir por observação da figura 38 (ρ=0,41).

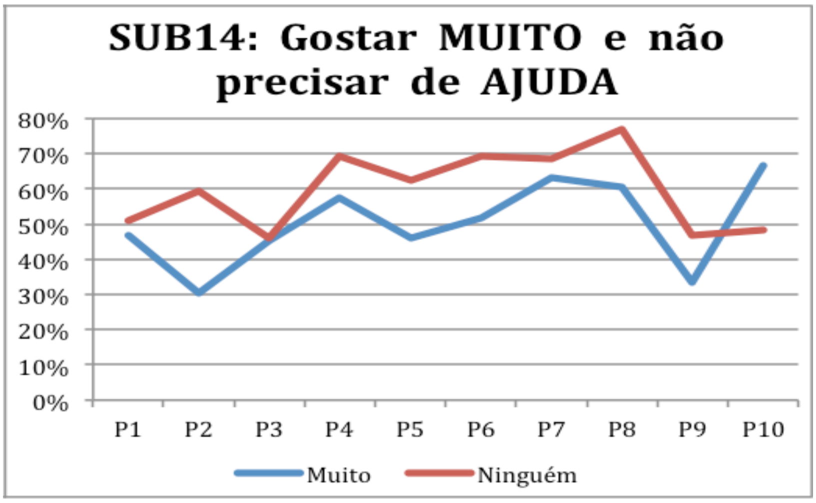


Figura 38 – Correlação entre *gostar muito* e *não precisar de ajuda* no SUB14.

Gostar mais ou menos, ou pouco, isto é gostar moderadamente e procurar ajuda de alguém tem uma correlação relativamente razoável uma vez que o coeficiente é de 0,79 no SUB12, enquanto que no SUB 14 tal não se verifica pois, neste caso o coeficiente é de apenas 0,41 (figura 39). Ou seja, também com estes resultados podemos conjeturar que nas crianças mais novas o grau de apreciação está mais associado à procura de ajuda do que nas crianças mais velhas.

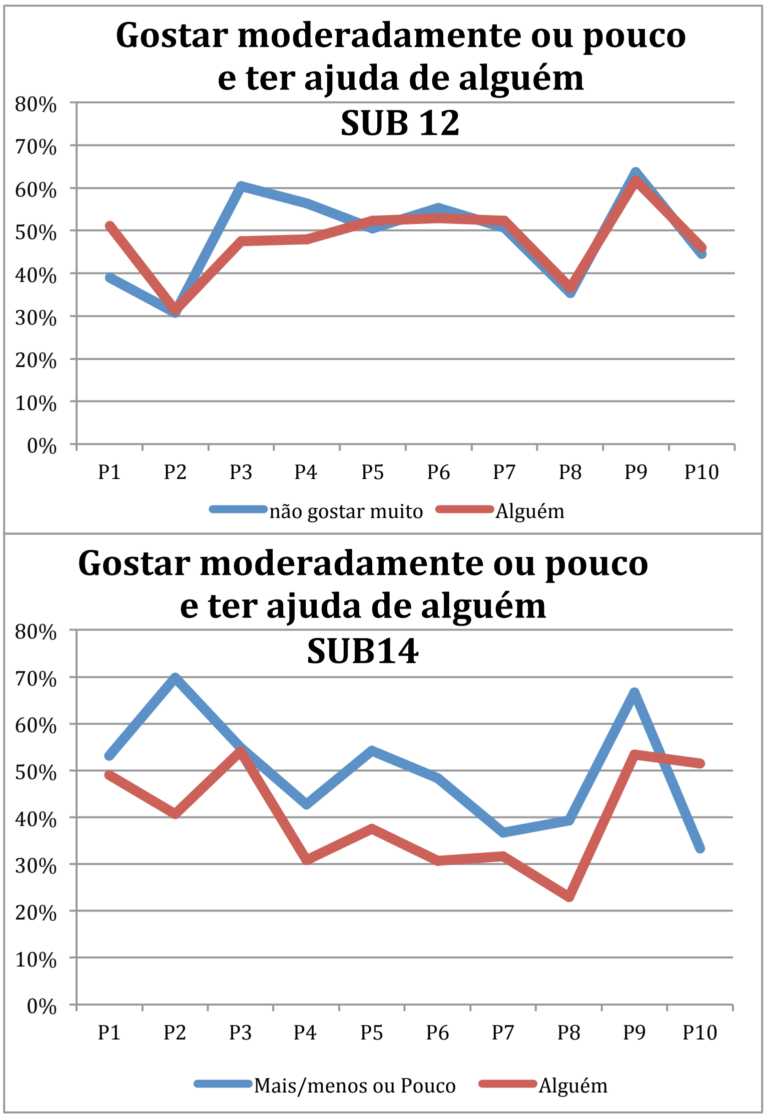


Figura 39 – Correlação entre gostar moderadamente e ter ajuda de alguém no SUB12 e no SUB14.

As fracas correlações entre o grau de apreciação e a dificuldade percecionada, no SUB14, sugerem que, com o aumento da idade dos participantes, sentir necessidade de pedir ajuda para resolver um problema não influencia tanto o grau de apreciação desse mesmo problema. Assim como a dificuldade percecionada não parece depender do grau de apreciação de um problema.

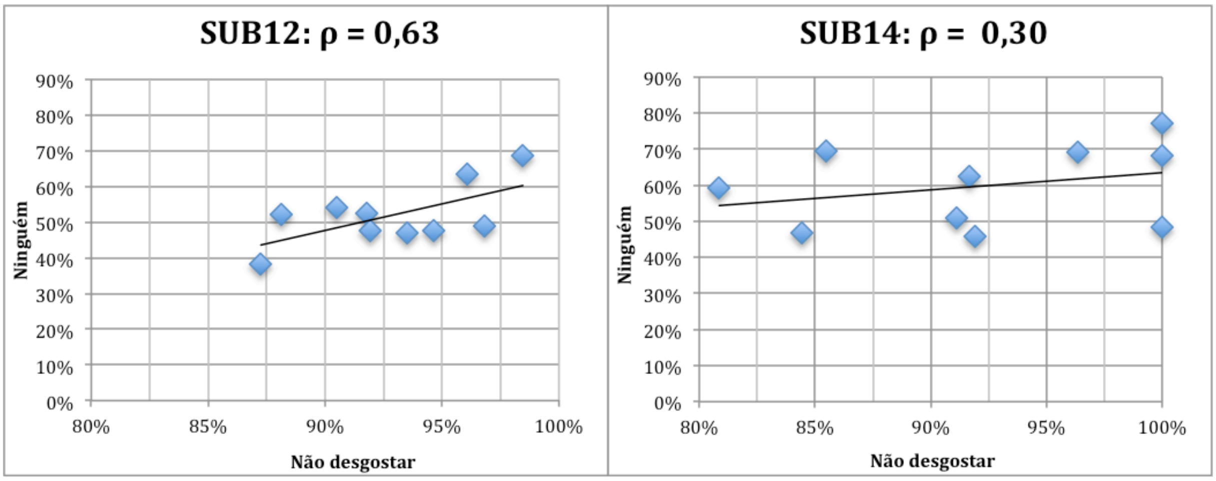


Figura 40 - Correlação entre não desgostar do problema e não pedir ajuda no SUB12 e no SUB14.

Olhando para os gráficos da figura 40, na procura de correlações entre não desgostar de um problema, ou seja, gostar muito ou gostar mais ou menos, e não procurar ajuda, uma vez mais confirmo que as crianças mais novas mostram uma mais forte tendência na correlação entre a procura de ajuda e o grau de apreciação de um problema matemático moderadamente desafiante e num contexto de uma competição inclusiva.

V - Conclusões e Implicações

Este trabalho desenvolveu-se no âmbito do projeto Problem@Web, versando sobre a linha de investigação do projeto relacionada com os afetos e a resolução de problemas de matemática. O campo empírico do projeto, e deste trabalho também, foi constituído por uma competição de resolução de problemas, de natureza inclusiva, com duas ligas conforme os alunos a que se destinavam, SUB12 e SUB14.

Seguindo uma abordagem quantitativa, com base nos dados recolhidos através de um miniquestionário que acompanhava o formulário de resposta aos problemas propostos, quinzenalmente, durante a fase de apuramento da competição, este trabalho debruçou-se sobre algumas dimensões afetivas reportadas pelos participantes nessa fase da competição: a procura de ajuda junto das fontes disponíveis (professores, familiares, amigos, SUB12/SUB14 ou ninguém), o gosto pelos problemas propostos e a dificuldade sentida na resolução de cada um desses problemas. Em particular, foram colocadas as seguintes questões de investigação: 1) Que significância tem a ajuda prestada aos participantes durante a fase de apuramento? 2) Que grau de apreciação manifestam os participantes em relação aos problemas propostos? 3) Que grau de dificuldade sentem os participantes na resolução dos problemas propostos? e 4) Que tendências se podem identificar combinando estas dimensões?

A análise de resultados permitiu identificar alguns padrões de comportamento dos participantes no SUB12 e SUB14, acerca de cada uma das dimensões afetivas consideradas. Além disso, permitiu também identificar semelhanças e diferenças entre as duas ligas e avançar com possíveis hipóteses explicativas para essas diferenças. No entanto, foram várias as questões que foram levantadas, algumas delas apontando direções futuras de investigação.

Tal como a investigação sugere, a procura de ajuda tem bastante importância em qualquer contexto de aprendizagem, sendo ainda mais relevante num contexto de uma competição matemática inclusiva (Karabenick, 2011; Zusho & Barnet, 2011). No caso do SUB12 e do SUB14, os participantes são explicitamente encorajados pela organização a procurar ajuda quando enfrentam obstáculos ao resolver os desafios propostos. Os dados recolhidos, depois de analisados, indicam que, efetivamente, os participantes se sentem à vontade para procurar ajuda para resolver os problemas, uma vez que o fazem em número bastante significativo e recorrendo a várias fontes, ao longo da fase de apuramento. A ajuda fornecida contribui para o sucesso dos participantes ao longo desta fase da competição, ajudando-os a sentir-se capazes de resolver os problemas, o que influencia positivamente no sentido de uma participação, na competição, mais numerosa e mais diversa.

Duas das fontes de ajuda, os professores e os familiares, destacam-se em ambas as ligas por serem muito mais requisitadas que as outras fontes disponíveis, o que indicia um grande envolvimento familiar, bem como a presença da competição no ambiente escolar. Esta constatação vem reforçar e alargar resultados encontrados anteriormente (Carreira, Amado, Tomás Ferreira et al., 2012; Carreira et al., 2013). No entanto, seria importante perceber no futuro, que ajuda concreta estas duas fontes em particular oferecem aos participantes: como se envolvem as famílias na resolução de problemas dos SUBs? O que caracteriza a ajuda prestada pelas famílias? E pelos professores? Em que contextos os professores ajudam os seus alunos a participar na competição? Como é que o fazem? E que partido tiram eles, eventualmente, dos problemas dos SUBs para a sala de aula?

É bem evidente a diferente significância da ajuda da família no SUB12 e no SUB14. No SUB14, os níveis de procura de ajuda junto da família são bastante inferiores aos do SUB12, o mesmo acontecendo com os níveis de procura de ajuda junto dos professores. Surgem, naturalmente, as questões: O que é que motivará estas diferenças, isto é, o que levará os participantes mais velhos a não procurar tanta ajuda junto da família em comparação com os seus colegas mais jovens? O que levará os participantes mais velhos a não procurar tanta ajuda junto dos seus professores em comparação com os seus colegas mais jovens? Alguns problemas, tanto no SUB12 como no SUB14, evidenciaram uma procura de ajuda significativa junto das famílias ou junto dos professores. Os contextos desses problemas podem estar na origem de uma procura de ajuda mais centrada numa ou noutra destas duas fontes disponíveis. Haverá algum padrão no tipo de problemas, ou nos seus contextos, mais propensos a pedidos de ajuda às famílias? Haverá algum padrão no tipo de problemas, ou nos seus contextos, mais propensos a pedidos de ajuda aos professores?

A diferença entre o envolvimento da família e o do professor na ajuda fornecida aos participantes na competição tem ainda um detalhe que, na realidade, a tornará, com certeza, maior. De facto, um mesmo professor está, por certo, relacionado com um relativamente grande número de participantes e, portanto, será um indivíduo a ajudar vários participantes. Por seu turno, o rácio das famílias para cada participante é normalmente de um para um, embora vários elementos da família possam ser simultaneamente fonte de ajuda. Portanto, em termos de quantidade de indivíduos envolvidos na ajuda, a família é seguramente a ajuda mais numerosa apesar de, em percentagem, os pedidos de ajuda ao professor excederem esta, em média, em 1,1% no SUB12 e em 1,7% no SUB14.

A ajuda dos amigos é, em termos relativos, considerável. De facto, chega até a acontecer um caso, no SUB14, em que a ajuda mais reportada para a resolução do problema em causa foi dos amigos. Neste grupo dos amigos, incluir-se-ão, naturalmente, os colegas de turma – por exemplo, quando os participantes competem em pequenos grupos (dentro ou fora da sala de aula) ou quando os problemas são resolvidos em contextos fora da sala de aula (clubes de matemática, sala de estudo, por exemplo), como a equipa do projeto Problem@Web tem conhecimento (Amado et al., 2014). Deste modo, a expressividade da ajuda prestada pelos amigos vem reforçar a ideia do extravasamento da competição para o ambiente escolar, dentro e fora da sala de aula

Ao debruçar-me sobre os valores reportados de ajuda fornecida pela organização da competição, SUB12 ou SUB14 conforme o caso, em relação às outras fontes de ajuda disponíveis, é inegável o seu carácter residual. Na verdade, o caso da ajuda dos SUBs reveste-se de uma leitura complexa.

Com efeito, a perceção da ajuda por parte dos SUBs, seja em que liga for, causa alguma perplexidade uma vez que a discrepância entre os valores reportados de ajuda oferecida pelos SUBs e os que efetivamente aconteceram por via do *feedback* fornecido a toda e qualquer resposta enviada (independentemente da sua correção ou completude) é notória (apesar de não ter sido ainda possível quantificá-la). Tal como sugerido em investigações anteriores (Carreira et al., 2013a), esta discrepância poderá ser devida a um entendimento, por parte dos participantes, de que a ajuda dada pela organização é percecionada como tal apenas quando solicitada pelos próprios participantes. Os participantes parecem, assim, evidenciar um comportamento consentâneo com uma procura de ajuda adaptativa, isto é, uma procura de ajuda apropriada (apenas) quando necessária (Newman, 2000; Ryan & Shin, 2011).

Como o *feedback* surge sempre como uma resposta à resolução enviada pelo participante, ele poderá ser visto mais como uma avaliação do que como uma ajuda. Isto é, o *feedback* poderá ser percecionado como tendo um carácter avaliativo em vez de um carácter formativo. Por outro lado, a comunicação entre os participantes e a comissão organizadora faz-se a distância e com uma entidade não completamente identificável (anónima, poder-se-ia dizer), ao contrário do que acontece com as outras três fontes de ajuda disponíveis. Assim, este poderá também ser um fator com forte influência na ausência de perceção do *feedback* como uma forma de ajuda oferecida pela organização, isto é, na ausência de perceção da organização como uma fonte de ajuda. Uma abordagem qualitativa será certamente muito útil para a compreensão futura deste fenómeno.

De uma maneira geral, os participantes reportam ter gostado dos problemas desafiantes propostos na fase de apuramento da competição. No entanto, é na liga SUB12 que essa apreciação global positiva é mais acentuada, uma vez que, em valores percentuais, mais participantes no SUB12 manifestaram ter *gostado muito* dos problemas e menos participantes no SUB12 reportaram ter *gostado pouco* dos problemas do que os seus colegas do SUB14. Estes resultados poderão indiciar um esmorecer de entusiasmo pelos problemas destas competições, com o aumento da idade, algo que também se reflete no número de participantes no SUB12 a ser tipicamente mais do dobro do número de participantes no SUB14 (Carreira, et al., 2012). Apenas uma investigação mais aprofundada, de natureza qualitativa, poderá fazer emergir dados que ajudem a compreender este fenómeno.

Os participantes na competição consideram os problemas da fase de apuramento, globalmente, de dificuldade média ou mesmo fáceis. Além disso, como já vimos, o grau de apreciação dos problemas é usualmente elevado, o que, mesmo tendo em conta o natural decréscimo de participantes na competição ao longo do tempo (decréscimo esse devido a eliminação ou desgaste, embora outros fatores, eventualmente até nem relacionados com os próprios participantes, possam estar em jogo), indicia entusiasmo pela competição. Não será, então, desadequado concluir que, tal como é intenção da equipa organizadora das competições, os problemas da fase de apuramento são, em geral, problemas matemáticos desafiantes com grau de desafio moderado (Amado et al., 2014; Turner & Meyer, 2004).

Os dados recolhidos confirmam, de uma maneira geral, a conexão entre a natureza inclusiva da competição, o carácter de desafio moderado dos problemas propostos na fase de apuramento e a existência de afetos positivos em torno da resolução destes problemas (Freiman & Vézina, 2006). Além disso, também corroboram o cumprimento de uma das pretensões do SUB12 e do SUB14, a de serem consistentes com práticas que promovem o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas (Schweinle et al., 2006, 2013).

Em termos relativos, há mais participantes no SUB14 a considerar os problemas como difíceis do que do SUB12. No entanto, em ambas as ligas, destacam-se alguns problemas por terem sido percecionados como particularmente difíceis. São estes os problemas 4 e 9 do SUB12, e 2 e 9 do SUB14. Estes problemas foram também os menos apreciados. No entanto, apenas os problemas 9 de ambas as ligas se destacam, também, por terem sido aqueles em que a ajuda mais foi utilizada. Por estes motivos, estes problemas merecem um olhar mais aprofundado na expectativa de encontrar, ou não, similitudes no conteúdo, no tema, nos requisitos necessários para os resolver, na estratégia a ser utilizada, ou outras.

Ambos os problemas do SUB12 (4 e 9) são problemas de números e em ambos a procura de regularidades em disposições particulares desses números é essencial, embora essa disposição dependa de posições sequenciais de diferente natureza. No problema 4, os participantes poderão partir das regras de um jogo para estabelecer a sequencialidade dos números e depois encontrar regularidades, ou ter um enorme trabalho a simular todos os passos do jogo. No problema 9, essa sequencialidade é fornecida e é imediatamente visualizável, mas também exige a procura de regularidades e, sendo que envolve um número da ordem dos milhares, não será tão apetecível a sua simulação.

Em ambos os problemas existe a necessidade de encontrar regularidades em sequências de números. Residirá neste facto a perceção de dificuldade dos problemas? Será esta dificuldade o principal motivo do menor grau de apreciação que os participantes nutriram por estes problemas? Ou será que o facto de se tratar de problemas mais *matemáticos* (porque a referência a feijões, no problema 4, não consegue disfarçar muito bem a pseudo-ligação com a realidade) do que associados a situações da realidade dos participantes os torna menos interessantes e à partida menos apetecíveis para resolver, isto é, menos desafiantes?

Convém relembrar que o problema 9 foi o problema do SUB12 em que a percentagem de ajuda reportada teve o maior valor. A ajuda reportada foi repartida sobretudo pela família e professor, em igual valor percentual, o que pode significar que a dificuldade do problema foi talvez o principal motivo da menor apreciação.

No caso dos problemas 2 e 9 do SUB14 a situação é bem distinta, uma vez que estes dois problemas são muito diferentes sob muitos pontos de vista. De facto, o problema 2, geométrico, mas que também exige contagem exaustiva de diferentes possibilidades, ou a descoberta de regularidades que permitam um cálculo matemático mais rápido e simples, é um caso curioso. Este problema foi identificado como o mais difícil e o menos apreciado; no entanto, a ajuda reportada para este problema não foi particularmente elevada. Já o problema 9 envolve frações, percentagens, margens de lucro num contexto de saldos. À exceção deste último, cujo conteúdo matemático é um dos que, de uma maneira geral, oferece algumas dificuldades a muitos alunos no contexto da matemática escolar, não era expectável que as situações contidas nos restantes problemas suscitassem tantas emoções negativas.

Todas estas reflexões acerca destes quatro problemas fazem com que eu levante mais algumas questões: Será que a necessidade de ajuda resultou da roupagem geométrica dada a problemas de números? Será que a simplicidade e precisão dos enunciados induziu uma expectativa de facilidade que se gorou no processo de resolução e acabou por provocar insegurança? Será que o facto de, em particular nos problemas 4 e 9, para além de haver necessidade de considerar e explorar padrões numéricos ser também necessário usar processos de contagem e combinações tornou efetivamente os problemas difíceis? Será que o grau de desafio destes problemas que causaram mais dificuldades aos participantes, fosse no SUB12 ou no SUB14, foi demasiado elevado, levando eventualmente ao desinteresse? Só uma abordagem qualitativa poderá ajudar a iluminar estas questões.

Uma característica comum a ambas as ligas é o facto de os dados obtidos mostrarem claramente uma associação entre um *elevado* grau de *dificuldade* e um *baixo* nível de *apreciação* na resolução de um problema. Contudo, não gostar de um problema parece estar mais fortemente relacionado com achá-lo difícil no caso do SUB14, do que no SUB12. Ao mesmo tempo, *gostar muito* de um problema parece estar definitivamente associado a achá-lo de *fácil* resolução, sobretudo no que aos participantes no SUB12 diz respeito, não sendo, esta associação tão forte no SUB14. Efetivamente, no caso do SUB14, é importante realçar o facto de nem sempre a uma maior facilidade corresponder um maior gosto na resolução de um problema.

Estas constatações induzem a conjetura de que outros fatores, para além do grau de dificuldade, contribuem para este aspeto emocional da resolução de problemas. A idade dos participantes poderá ser um fator importante nestas diferenças. A maior maturidade dos participantes no SUB14, bem como a sua maior experiência nestas competições, podem explicar a menor associação de dificuldade com baixa apreciação dos problemas. Em particular, a experiência adquirida em participações anteriores poderá tê-los ajudado a percecionar o gosto pela resolução de um problema para além da menor ou maior facilidade em o resolver, isto é, sentir o gosto por um maior desafio.

Os resultados parecem ainda sugerir que os participantes no SUB14 têm uma maior preferência por desafios moderados que os participantes no SUB12. Aparentemente, percecionar um problema como difícil provoca um decréscimo no gosto por esse problema, no caso dos participantes no SUB14, embora, para estes jovens, um aumento no gosto sentido por um problema não pareça ter uma grande relação com uma maior facilidade na sua resolução. Assim, o *gosto* aparenta ser uma dimensão afetiva bem complexa, dependendo, também, da perceção que os participantes têm do valor e interesse do problema. Como Schweinle et al. (2013) sugeriram, se os problemas não forem percecionados como interessantes aos olhos dos participantes, eles podem não os ver como desafios.

A elevada correlação entre *gostar muito* de um problema e achá-lo *fácil* poderá estar relacionada com a ligação do gosto ao sucesso na resolução do problema, ou seja, os participantes podem confundir gostar de um problema com o ser capaz de o resolver, chegar a uma solução. Esta confusão, a existir, pode provocar um ruído impercetível no significado dos dados recolhidos e levar a conclusões menos corretas. Uma abordagem qualitativa futura a estes aspetos poderá ajudar a compreendê-los melhor. É possível encontrar mais algumas fortes associações entre as dimensões afetivas relacionadas com a participação nas competições SUB12 e SUB14 consideradas neste estudo. Por exemplo, percecionar um problema como *fácil* está negativamente correlacionado com *procurar ajuda* para o resolver e esta relação é muito mais forte no SUB12 do que no SUB14. Por outro lado, percecionar um problema como *difícil* está positivamente correlacionado com *procurar ajuda* para o resolver, apenas na liga dos mais novos, o SUB12. Portanto, o grau de dificuldade parece influenciar de forma preponderante o grau de procura de ajuda no SUB12.

No caso do SUB14, não existe correlação entre os valores reportados de perceção de dificuldade e de procura de ajuda. Ou seja, para os participantes no SUB14, a procura de ajuda não pode ser explicada pelo maior grau de dificuldade sentida na resolução dos problemas. Olhando para as correlações entre os vários graus de gosto pelos problemas e o ter ou não havido ajuda para os resolver, também não se encontram valores dignos de registo que permitam inferir a existência de alguma correlação. Qual terá sido, no caso do SUB14, o principal fator responsável pelos variados níveis de procura de ajuda?

Se tivermos em conta as fontes de ajuda mais reportadas, nomeadamente o professor, é possível considerar que os participantes no SUB14 tenham pedido ajuda aos seus professores por razões não relacionadas com a dificuldade sentida, mas, por exemplo, para se assegurarem de que a sua resposta ao problema estava correta (antes de a enviar para a organização), ou para terem a oportunidade de discutir o problema em sala de aula. Em qualquer dos casos, pedir ajuda não parece estar associado a um sentimento de diminuição da sensação de autoeficácia, mesmo quando o desafio é considerado mais difícil e, em especial, no SUB12.

Entre os participantes no SUB12 é clara a associação entre o grau de *apreciação* e o de *procura de ajuda*, uma vez que é exatamente nos problemas que são reportados como tendo despoletado um menor gosto, ou em alguns considerados de gosto não assinalável (nem pela positiva, nem pela negativa) que os níveis de ajuda são maiores. No SUB14 passa-se uma situação contrária: *gostar muito* de um problema não está associado a *não pedir ajuda*. Estes dados parecem indicar que, tal como acontece com a dificuldade percecionada e o nível de apreciação dos problemas, à medida que os participantes crescem em idade, a necessidade de pedir ajuda deixa de afetar tanto o nível de apreciação do problema em questão, efeito de um amadurecimento e/ou da experiência acumulada em edições anteriores da competição.

Os participantes tinham sempre a possibilidade de enviar várias respostas para o mesmo problema (várias versões) desde que durante o prazo permitido de envio. No entanto, das várias respostas possíveis ao miniquestionário relativas a um mesmo problema, para este trabalho, apenas foi considerada a resposta constante da última versão submetida. Ou seja, neste estudo foi considerada como uma única resposta ao miniquestionário, por problema e por participante, a última resposta assinalada. Ora, com a intenção de fornecer um *feedback* formativo e encorajador a respostas incorretas ou incompletas, era também, de certa forma, fornecida uma informação avaliativa, uma vez que era dada informação sobre a correção ou incorreção da resposta e sobre se a explicação dada, na resposta submetida, estava completa e bem feita, ou não.

Esta interação com a organização, o tempo que medeia entre a primeira e a última resposta submetida, a qualidade da ajuda que é dada, ou não, o número de tentativas para conseguir uma resposta correta dentro do prazo estipulado e outros possíveis fatores que não foram tidos em conta por este estudo, poderão ter influenciado o modo como os participantes percecionaram o grau de dificuldade, e mesmo de apreciação, de cada problema. Mais do que isso, esses graus podem ter variado, ao longo do tempo, entre a primeira resposta submetida e a última. Seria importante, numa futura investigação, atender à evolução das respostas ao miniquestionário em relação com o *feedback* fornecido, compreender o papel da qualidade desse *feedback* na apreciação que os participantes fazem dos problemas e no seu desempenho ao longo da competição, por exemplo.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)...*Educação e matemática, 8*, 7-10.

Adey, P., Csapó, B., Demetriou, A., Hautamäki, J., & Shayer, M. (2007). Can we be intelligent about intelligence? Why education needs the concept of plastic general ability. *Educational Research Review, 2*(2), 75-97.

Amado, N., Carreira, S., Castela, E., & Tomás Ferreira, R. A. (2014). The affective relationship of youngsters and parents with mathematics and problem solving in inclusive mathematical competitions. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.) *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving* (pp. 19-21). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Amado, N., & Carreira, S. (2013). O contributo da participação numa competição matemática para a aprendizagem de um aluno com necessidades especiais: O caso de Rui. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu (Eds.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 529-542). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho e APM.

Ainley, M. (2006). Connecting with learning: Motivation, affect and cognition in interest processes. *Educational Psychology Review*, *18*(4), 391- 405.

APM. (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Autor, D. H., Levy, F. & Murnane, R. J. (2003). The skill content of recent technological change: An empirical exploration. *The Quarterly Journal of Economics, 118*(4), 1279-1333.

Barbeau, E. (2009). Introduction. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom. The 16th ICMI Study* (pp. 1-9). New York, NY: Springer.

Bívar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Metas curriculares do ensino básico – Matemática: Caderno de apoio – 3.º ciclo*. Lisboa: MEC.

Borralho, A. (1991). Resolução de Problemas – metacognição: um possível modelo. In P. Abrantes & A. Silva (Orgs.), *Atas do Profmat90* (Vol II, pp. 165-174). Lisboa: APM.

Cai, J. & Lester, F. (2010). Why Is Teaching With Problem Solving Important to Student Learning? Acedido em http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_and_Advocacy/Research/Clips_and_Briefs/Research_brief_14_-_Problem_Solving.pdf

Carreira, S., Amado, N., Tomás Ferreira, R. A., Silva, J. C., Rodriguez, J., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S., & Mestre, R. (2012). *Um olhar sobre uma competição matemática na Web: Os SUBs.* Faro: Universidade do Algarve – Projeto Problem@Web.

Carreira, S., Amado, N., Tomás Ferreira, R. A., Jacinto, H., Nobre, S., Amaral, N. (2013). O Projeto Problem@Web: perspetivas de investigação em resolução de problemas. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu (Eds.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 50-71). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho e APM.

Carreira, S., Tomás Ferreira, R. A., & Amado, N. (2013a). Fatores afetivos na resolução de problemas matemáticos desafiantes no contexto de uma competição inclusiva baseada na web. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu (Eds.), *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 543-560). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho e APM.

Carreira, S., Tomás Ferreira, R. A., & Amado, N. (2013b). Young students solving challenging mathematical problems in an inclusive competition: Enjoyment vis-à-vis help-seeking. In B. Ubuz, Ç. Hasser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1289-1298). Middle East Technical University: Ankara, Turkey.

Chapman, O. (1999). Problem Solving in Mathematics: Approaches to Classroom Practice. *Atas do ProfMat 99* (p. 39-49). Lisboa: APM.

Crato, N. (2007). *Passeio aleatório – Pela ciência do dia-a-dia*. Lisboa: Gradiva

Croom, L. (1997). Mathematics for all students: Access, excellence, and equity. In J. Trentacosta (Ed.), *Multicultural and gender equity in the classroom: The gift of diversity* (1997 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 1-9). Reston, VA: NCTM.

Damásio, A. R. (2001). Fundamental feelings. *Nature, 413*, 781. Macmillan Magazines

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Ministério da Educação. Lisboa.

DeBellis, V. A., & Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 131-147.

De Corte, E., (2000). High-powered learning communities: A European Perspective. Keynote address apresentada na *First Conference of the Economic and Social Research Council's Research Programme on Teaching and Learning* (pp. 1-26). Leicester, UK.

DGEBS (1991). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC

English, L. D., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, Mexico. Acedido em http://eprints.qut.edu.au/28450/1/c28450.pdf

Ferreira, P. (2007). *A opção dos alunos pelas tecnologias: Um olhar sobre a utilização do Sketchpad na resolução de problemas*. Acedido em https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/325/1/ Tese%20Mestrado.pdf

Freiman, V., & Applebaum, M. (2011). Online Mathematical Competition: Using virtual marathon to challenge promising students and to develop their persistence. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11*(1), 55–66.

Freiman, V., & Vézina, N. (2006). Challenging Virtual Mathematical Environments: The Case of the CAMI Project. Pre-conference paper of the *Study Conference for ICMI Study 16 – Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom* [Acedido em http://www.amt.edu.au/icmis16pcanfreiman.pdf].

Frenzel, A. C., Pekrun, R., & Goetz, T. (2006). Perceived learning environment and students' emotional experiences: A multilevel analysis of mathematics classrooms. *Learning and Instruction, 17*, 478-493.

Goetz, T., Frenzel, A. C., Hall, N. C., & Pekrun, R. (2008). Antecedents of academic emotions: Testing the internal/external frame of reference model for academic enjoyment. *Contemporary Educational Psychology, 33*, 9-33.

Goldberg, D. (2012). *The importance of understanding the academic emotions of high school students at-risk for academic failure*. Dissertação de Mestrado, McGill University, Canadá.

Grugnetti, L., & Jaquet, F. (2005). A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 373-384.

Hannula, M. (2002). Attitudes towards mathematics: Emotions, expectations, and values. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 25-46.

Hannula, M. (2006). Affect in mathematical thinking and learning: Towards integration of emotion, motivation, and cognition. In J. Maasz & W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 209-232). Rotterdam: Sense Publishers.

Jacinto, H. (2008). *A Internet e a Actividade Matemática no Caso do Sub14.* Dissertação de Mestrado (não publicada), Universidade Católica Portuguesa, Lisboa.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2012). Problem solving in and beyond the classroom: perspectives and products from participants in a web- based mathematical competition. *Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (ICME 12). Seul, Coreia do Sul.

Karabenick, S. A., & Knapp, J. R. (1991). Relationship of academic help-seeking to the use of learning strategies and other achievement behavior in college students. *Journal of Educational Psychology, 83, 221-230.*

Karabenick, S. A. (2011). Classroom and technology-supported help seeking: The need for converging research paradigms. *Learning and Instruction* 21, 290-296.

Kenderov, P. (2006). Competitions and mathematics education. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 1583-1598). Madrid, Spain: European Mathematical Society.

Kenderov, P. (2009). A short history of the World Federation of National Mathematics Competition. *Mathematics Competitions*, 22(2), 14-31.

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Tayor, P. (2009). Challenges beyond the classroom – Sources and organizational issues. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom. The 16th ICMI Study* (pp. 53-96). New York, NY: Springer.

Kleine, M., Goetz, T., Pekrun, R., & Hall, N. (2005). The structure of students' emotions experienced during a mathematical achievement test. *ZDM, 37*(3), 221-225.

Lester, F. K., (1980). Research on mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286−323). Reston, VA: NCTM.

Lester, F. K., Garofalo, J., & Kroll, D. (1989). *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes.* Final report to the National Science Foundation of NSF project MDR 85-50346. Acedido em http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED314255.pdf

Levy, F. (2010). *How technology changes demands for human skills*. OCDE Education Working Paper No. 45. Acedido em http://www.oecd.org/edu/skills-beyond-school/45052661.pdf

Li, Y., & Belkin, N.J. (2008). A faceted approach to conceptualizing tasks in information seeking. *Information Processing and Management: An International Journal, 44*, 1822-1837.

Lockhart, P. (2002). *A mathematician's lament.* Acedido em https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament

Luo, W., Paris, S. G., Hogan, D. & Luo, Z. (2011). Do performance goals promote learning? A pattern analysis of Singapore student's achievement goals. *Contemporary Educational Psychology, 36*(2), 165-176.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 385–401

Marcou, A., & Lerman, S. (2006). Towards the development of a self-regulated mathematical problema solving model. *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 137-144). Praga, República Checa: PME.

Matos, J. M. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Badajoz: APM.

McLeod, D. & Adams, V. M. (1989). (Eds.). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. New York, NY: Springer.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics education, teaching and learning* (pp. 575-596). Macmillan, NY.

Menina, F. & Carreira, S. (2009*).* Dificuldades dos alunos na resolução de problemas em matemática – Pontas de um iceberg. In J. A Fernandes, M. H. Martinho & F. Viseu (Orgs.), *Atas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 263-277). Braga: Centro de Investigação em Educação.

Ministério da Educação (ME). (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2013). *Programa de matemática e metas curriculares para o ensino básico*. Lisboa: MEC.

Ministério da Educação de Singapura (MES). (2012). *O- & N(A)-Level Mathematics Teaching and Learning Syllabus.* Acedido em http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/ordinary-and-normal-academic-level-maths-2013.pdf

Moreira, L. (1987). A resolução de problemas como elemento integrador das áreas do primeiro ciclo. *Educação e Matemática,1*, 10-12.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics for the 1980s.* Reston, VA: NCTM. Acedido em http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=17278

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Acedido em http://www.nctm.org/PrinciplestoActions/

National Research Council (1989). *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*. Washington, D.C.: National Research Council. Acedido em http://www.nap.edu/openbook.php?isbn=0309039770

Neves, M. A. F., & Silva, A. P. (2014). *Matemática 8 – Guia do professor*. Porto: Porto editora

Newman, R. S. (2000). Social influences on the development of children's adaptive help seeking: the role of parents, teachers, and peers. *Developmental Review, 20*(3), 350-404.

Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 325-340.

Nunokawa, K. (2010). Proof, Mathematical Problem-Solving, and Explanation in Mathematics Teaching. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 223-236). New York: Springer

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) (2004). *Problem solving for tomorrow's world – First measures of cross-curricular competencies from PISA 2003.* Acedido em http://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/34009000.pdf

OECD (2013), *PISA 2012 Results: What students know and can do – Student performance in Mathematics, Reading and Science* (Volume I), PISA, OECD publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264201118-en

OECD (2014), *PISA 2012 Results: Creative problem solving - Students' skills in tackling real-life problems* (Volume V), PISA, OECD publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264208070-en

Pekrun, R., Goetz, T., Titz, W., & Perry, R. (2002). Academic emotions in students' self-regulated learning and achievement: A program of qualitative and quantitative research. *Educational Psychologist 37*(2), 91-106.

Pires, M. V., & Amado, N. (2013). Materiais didáticos e recursos no ensino e aprendizagem da matemática. In J. A. Fernandes, M. H. Martinho, J. Tinoco & F. Viseu (Eds.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 472-478). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho e APM.

Poggioli, L. (2001). *Estratégias de resolución de problemas. Serie Enseñhando a aprender*. Caracas: Polar. Acedido em http://spratfau.files.wordpress.com/2011/09/biblio_estrategias-de-resolucic3b3n-de-problemas.pdf

Polya, G. (1957), *How to solve it – A new aspect of mathematical method*. Second edition. New York: Doubleday Anchor Books

Polya, G. (1967). *La Découverte des Mathématiques.* Paris: Dunod

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM. Acedido em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf

Rede Eurydice (2011). *O ensino da matemática na Europa: Desafios comuns e políticas nacionais*. Agência de Execução relativa à Educação, ao Audiovisual e à Cultura. Acedido em http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice

Robertson, I. (2007). Factors influencing vocational teacher's use of online functionalities in Australia. *Australasian Journal of Educational Technology, 23*(3), 371-389.

Roussel, P., Elliot, A. J., & Feltman, R. (2011). The influence of achievement goals and social goals on help-seeking from peers in an academic context. *Learning and Instruction, 21*, 394-402.

Ryan, A. M., & Shin, H. (2011). Help-seeking tendencies during early adolescence: An examination of motivational correlates and consequences for achievement. *Learning and Instruction, 21*, 247-256.

Saint-Exupéry, A. (1940). *O principezinho (Le petit prince).* Lisboa: Editorial Aster.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação *acerca* da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Schoenfeld, A. H. (2010). *An introductory taste of…How we think – A theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* Acedido em http://vocserve.berkeley.edu/faculty/ ahschoenfeld/How_We_Think_Front.pdf

Schroeder, T. L., & Lester, F. K., Jr. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 31–42). Reston, VA: NCTM.

Schweinle, A., Meyer, D., & Turner, J. (2006). Striking the right balance: Students' motivation and affect in elementary mathematics. *Journal of Educational Research*, *99*(5), 271-293.

Schweinle, A., Berg, P. J., & Sorenson, A. R. (2013). Preadolescent perceptions of challenging and difficult course activities and their motivational distinctions. *Educational Psychologist.* (Publicado online: Maio, 2013). DOI:10.1080/01443410.2013.785049.

Silva, J. C. (1999). *Detecção e acompanhamento de talentos precoces em Matemática* (comunicação apresentada no encontro "A Matemática e o Ensino", Lisboa, 19 e 20 Abril 1999). Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Stockton, J. C. (2012). Mathematical competitions in Hungary: Promoting a tradition of excellence & creativity. *The Mathematics Enthusiast, 9*(1-2), 37-58.

Tomás Ferreira, R. A., Carreira, S., & Amado, N. (2014a). Affective issues in solving challenging mathematical problems within an inclusive competition. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in Mathematical Problem Solving* (pp. 275-287). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Tomás Ferreira, R. A., Carreira, S., & Amado, N. (2014b). *Affective dimensions in solving challenging mathematical problems within an inclusive competition* (Keynote address na Problem@Web International Conference: Technology, Creativity and Affect in Mathematical Problem Solving).

Torner, G., Schoenfeld, A. H., & Reiss, K. M. (2007). Problem solving around the world: Summing up the state of the art. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39*, 353.

Tran, N. T. (2013). Factors associated with low educational motivation among ethnic minority students in Vietnam. *Ritsumeikan Journal of Asia Pacific Studies, 32*, 124. Acedido em http://www.apu.ac.jp/rcaps/uploads/fckeditor/publications/journal/Volume32_op.pdf

Turner, J., & Meyer, D. (2004). A classroom perspective on the principle of moderate challenge in mathematics. *Journal of Educational Research*, *97*(6), 311-318.

Walshaw, M., & Brown, T. (2012). Affective productions of mathematical experience. *Educational Studies in Mathematics, 80*(1-2), 185-199.

White, M. C., & Bembenutty, H. (2013). *Not all avoidance help seekers are created equal: Individual differences in adaptive and executive help seeking*. DOI: 10.1177/2158244013484916.

World Federation of National Mathematics Competitions (WFNMC) (2002). *Policy Statement on Competitions and Mathematics Education: Definition of scope of competition activities.* Acedido em http://www.wfnmc.org/policy2002.html

Xenofontos, C. (2009). International comparative research on mathematical problem solving: Suggestions for new research directions. In V. Durand-Guerrier, S. Saury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME6* (pp. 2523-2532). Lyon, France: Institut National de Rechèrche Pédagogique.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 113-121.

Zusho, A., & Barnett, P. (2011). Personal and contextual determinants of ethnically diverse female high school students' patterns of academic help seeking and help avoidance in English and mathematics. *Contemporary Educational Psychology, 36*(2), 152-164.

Websites consultados

http://www.cwsei.ubc.ca/Files/Schoenfeld_talk_Apr-10.pdf

http://www.projavi.mec.pt/np4/%7B$clientServletPath%7D/?newsId=64&fileName=PISA2012_PrimeirosResultados_PORTUGAL.pdf

http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/ordinary-and-normal-academic-level-maths-2013.pdf

http://www.wfnmc.org

http://www.ncetm.org.uk

http://content.time.com/time/world/article/0,8599,2035586,00.html

http://www.unescoportugal.mne.pt/pt/temas/ciencia-para-um-futuro-sustentavel.html

http://www.wfnmc.org/about.html

http://www.mathkang.org

http://www.mat.uc.pt/canguru/

http://www.mategye.hu/?pid=zrinyi_gordiusz/versenykiiras_gordiusz

http://kemia.fazekas.hu/?page_id=65

http://www.amt.edu.au

http://www.elsevier.com

http://www.amt.edu.au/mathematics/

http://www.math-armt.org/index.php# ou recentemente, http://www.armtint.org

http://www.rmt-sr.ch/rallye/ARCHIVES/RMT21-ana1.pdf

http://www.bolyai.hu/schweitzer_en.htm

http://www.uc.pt/fctuc/dmat/delfos

http://link.springer.com/article/10.1007/s10649-011-9370-x#page-1

http://sgo.sagepub.com/content/3/2/2158244013484916

Anexos

SUB12

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 1: Deliciosos!

Na pastelaria Três Doces pode comprar-se por 10 € uma variedade de bolos deliciosos:

- uma torta de framboesa e dois bolos de chocolate;
- dois bolos de morango e um bolo de chocolate;
- duas tortas de framboesa e dois bolos de morango;
- um bolo de chocolate e três tortas de framboesa.

Qual é o preço de cada uma das delícias?

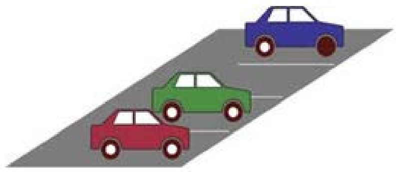
Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB12
Sítio: http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas
E-mail: sub12_5@hotmail.com (5º ano)
sub12_6@hotmail.com (6º ano)

SUB12

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 2: O parque de estacionamento



À entrada da escola há um parque de estacionamento com 4 lugares que estão reservados para o Diretor da escola e para três dos professores. O Diretor tem prioridade de escolha do lugar e escolhe sempre o da ponta direita ou o da ponta esquerda. O Diretor tem um Opel e os carros dos três professores são: um Audi, um Fiat e um Toyota.

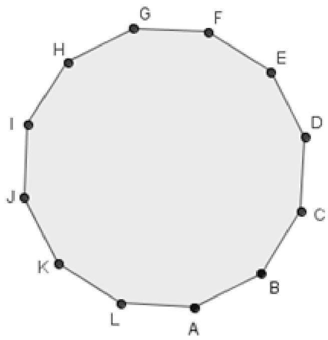
De quantas maneiras diferentes podem então ser arrumados os 4 carros que têm direito a estacionar no parque?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB12 Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 3: Quantos retângulos?

Quantos retângulos consegues construir dentro do polígono da figura, unindo vértices?



Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 4: Jogar a feijões

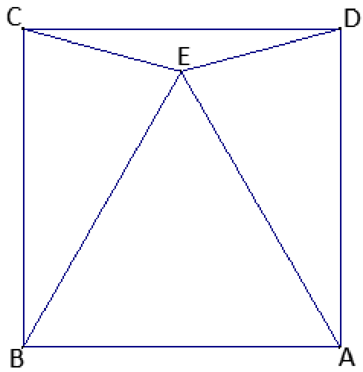
Um jogo a feijões é jogado da forma que a seguir se indica.

Em cada jogada, o jogador que tiver mais feijões dá 1 feijão a cada um dos restantes jogadores e coloca mais 1 no meio da mesa. O jogo termina logo que um dos jogadores fique sem feijões.

O André, o Bruno e o Celso estão a jogar e têm 35, 33 e 28 feijões, respetivamente. Quantas jogadas irão ser feitas até o jogo terminar?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 5: É quanto basta…



Na figura, ABCD é um quadrado e ABE é um triângulo equilátero.

Estas informações são tudo o que precisas para encontrar a medida do ângulo $C\widehat{E}D$. Qual é essa medida?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB12

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 6: Misturas de café com leite

Duas cafeteiras iguais estão cheias de café com leite.

Na cafeteira azul, há 3/5 de leite e o resto é café.

Na cafeteira castanha, há 3/4 de leite e o resto é café.

Da cafeteira azul, gastou-se metade do café com leite que lá estava. Voltou a encher-se esta cafeteira, usando o café com leite que estava na cafeteira castanha. Depois disto, que percentagem de café passou a existir na cafeteira azul?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB12
Sítio: http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas
E-mail: sub12_5@hotmail.com (5º ano)
sub12_6@hotmail.com (6º ano)

SUB12

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 7: Fechado a cadeado

Numa gaveta temos 20 cadeados e 20 chaves. Cada chave abre um e um só cadeado mas não sabemos que chave corresponde a cada cadeado. Para associar cada chave ao cadeado que lhe corresponde teremos de proceder por tentativas. Suponhamos então que uma tentativa significa experimentar uma chave num cadeado.

Na pior das hipóteses, qual é o mínimo de tentativas que teremos de fazer para associar cada chave ao respetivo cadeado?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 8: Às compras no sábado

A Dona Guida levou os seus quatro filhos às compras num sábado à tarde e prometeu-lhes um brinquedo, um gelado e uma bebida se eles se portassem bem. Determina o nome de cada uma das crianças, o gelado que pediu, a bebida que tomou e o brinquedo que escolheu.

1. A Ana pediu um gelado de caramelo e não escolheu um sumo de laranja.
2. A Sofia recebeu um jogo de dominó e não pediu um ice tea.
3. O rapaz que recebeu um carro de corridas pediu um gelado de morango.
4. Uma das raparigas teve uma boneca, um dos rapazes comeu gelado de chocolate, um dos rapazes chama-se Carlos e uma das raparigas bebeu coca-cola.
5. O rapaz que recebeu um baralho de cartas quis beber uma garrafa de água e não comeu um gelado de baunilha.
6. A criança que bebeu ice tea não pediu uma boneca.
7. O Leonel não quis água.

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB12

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 9: Colunas de números ímpares

		13				45
		15				47
	5	17	25		37	49
	7	19	27		39	51
1	9	21	29	33	41	53
3	11	23	31	35	43	55

A Maria começou a escrever os números ímpares em colunas de 2, 4 e 6 quadrículas, de forma sequencial, como se mostra na figura.

Em que tipo de coluna (de 2, 4 ou 6) e em que posição (a contar do topo da coluna) irá ela escrever o número 2013?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 10: Pequeno almoço no hotel

No hotel Pacífico estiveram 63 pessoas no buffet do pequeno almoço.

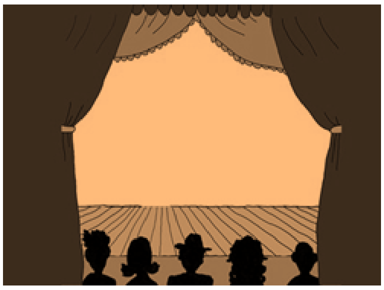
Ao todo, houve 37 pessoas que se serviram de sumo e 52 pessoas que se serviram de café. Sabendo que apenas 6 pessoas não beberam sumo nem café porque preferiam chá, quantas pessoas beberam sumo e também café?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB14

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 1: Natal na Sociedade Recreativa



No Salão da Sociedade Recreativa foi organizado um espetáculo de Natal. Depois de terminada a festa, os jovens voluntários tiveram a tarefa de arrumar as cadeiras da plateia.

Quando as empilharam em pilhas de 11, sobrou 1 cadeira.

Quando as empilharam em pilhas de 12, sobraram 6 cadeiras.

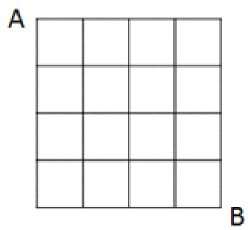
Quando as empilharam em pilhas de 13, sobraram 12 cadeiras.

O número de cadeiras era superior a 800 mas não chegava a 1000.

Quantas cadeiras havia para arrumar no final do espetáculo?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 2: Passear sobre uma grelha



Imagina que precisas de te deslocar do canto superior esquerdo da grelha (A) até ao canto inferior direito (B). Para o fazeres só podes percorrer os lados dos quadrados unitários em duas direções: para baixo e para a direita.

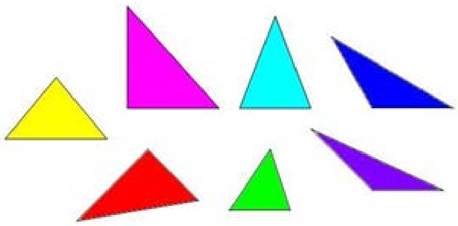
Na grelha de 4 por 4, quantos caminhos podes escolher para ires de A até B?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB14

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 3: Pontos e triângulos



O Luís marcou 10 pontos de modo que não ficassem três sobre uma mesma reta. Em seguida numerou-os de um a 10. Quantos triângulos existem com vértices nesses pontos, em que a soma dos números é ímpar?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB14

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 4: Qual foi a nota do teste?

O Eduardo e o Jaime fizeram 4 testes de Matemática no período passado, que foram classificados de 0 a 100 pontos.

As médias das classificações que eles obtiveram nos 4 testes foram iguais.

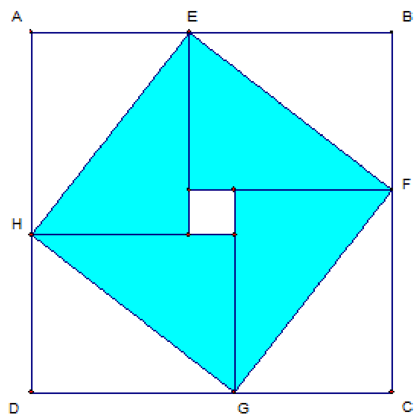
O Jaime teve mais 10 pontos no 1.º teste do que o Eduardo e teve menos 15 pontos do que o Eduardo no 2.º teste. No 3.º teste, as classificações de ambos foram iguais. No 4.º teste o Jaime teve 70 pontos.

Qual foi a classificação do Eduardo no 4º teste?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB14
Sítio: http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas
E-mail: sub14_7@hotmail.com (7º ano)
sub14_8@hotmail.com (8º ano)

Problema 5: Descobre a medida!



Na figura dada, ABCD é um quadrado com 10 cm de lado.

Sabe-se que $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{GC} = \overline{HD}$ e que a região pintada de azul tem uma área de 32 cm^2, sendo formada por quatro triângulos retângulos.

Quanto mede $\overline{AE}$?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 6: Congresso de professores

Num congresso de professores de Matemática estiveram presentes 270 participantes. Todas as conferências decorreram em três anfiteatros: A, B e C.

Durante a manhã, os participantes distribuíram-se pelos três anfiteatros de acordo com os assuntos que lhes interessavam.

Na parte da tarde, metade das pessoas que estiveram de manhã no anfiteatro A passaram para o B. Um quarto das pessoas que estiveram de manhã no anfiteatro B passaram para o C. Um terço das pessoas que estiveram de manhã no anfiteatro C passaram para o A.

Apesar das mudanças, o número de pessoas que esteve em cada anfiteatro não se alterou da manhã para a tarde.

Quantos participantes estiveram em cada um dos anfiteatros?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Problema 7: Quantas páginas leu a Joana?

A Joana estava a ler um livro de aventuras e no final disse aos seus amigos:

- O livro que acabei de ler tinha tantas páginas que a soma dos dígitos de todos os números das páginas é 1198!

Quantas páginas tinha o livro que a Joana leu?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB14

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 8: Antes e depois da dieta

Cinco amigas decidiram que era hora de perderam peso e de voltarem ao seu peso ideal. Então decidiram todas começar a fazer dieta e um programa de exercício físico com grande sucesso. Uns meses mais tarde, cada uma das amigas tinha atingido a sua meta que era perder entre 6 e 10 quilos! Determina o nome completo de cada amiga e os seus pesos antes e depois da dieta e da ginástica.

1. A Sara, cujo apelido não é Almeida, perdeu mais peso do que a Natália.
2. A Paula passou do peso de 58 quilos para o peso final de 50 quilos.
3. A outra mulher que perdeu 8 quilos foi a Sra. Martins cujo peso final foi de 52 quilos.
4. A Sra. Cardoso, cujo primeiro nome não é Paula, terminou a sua perda de peso com 66 quilos.
5. A mulher que perdeu menos peso começou com 61 quilos.
6. A Sra. Veiga perdeu 10 quilos.
7. A Mariana começou com o maior peso, que era 75 quilos, mas não terminou com o maior peso final.
8. Sara terminou a sua perda de peso com 52 quilos.
9. A Clarisse Nunes não foi a que terminou com o peso de 65 quilos.

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB14

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 9: Um azar na loja das T-shirts

Um comerciante comprou um lote de T-shirts turísticas para vender na sua loja de souvenirs. No primeiro mês conseguiu vender 1/3 das T-shirts com um lucro de 10%, pelo valor de 660 euros. Por azar, teve depois uma inundação na loja e 1/4 das restantes T-shirts ficaram um pouco danificadas. Essas, decidiu vendê-las por metade do preço de compra.

Se o comerciante quiser recuperar o valor que pagou pelo total das T-shirts, que margem de lucro deverá incluir no preço das T-shirts que não foram atingidas pela inundação?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

SUB14

Edição 2012/2013
Campeonato de Resolução de Problemas de Matemática

Problema 10: Hambúrgueres com vários molhos

Um restaurante de hambúrgueres vendeu 363 hambúrgueres durante o fim de semana. Os clientes do restaurante podem pedir no máximo 3 molhos no seu hambúrguer: maionese, mostarda e ketchup. Dos hambúrgueres vendidos, 92 tinham apenas maionese e 94 tinham maionese e mais um ou dois molhos. Houve 82 hambúrgueres que levaram mostarda e mais um ou dois molhos mas 58 tinham apenas ketchup e mostarda. Foram vendidos 63 hambúrgueres que só tinham mostarda e 17 que tinham apenas mostarda e maionese. Não houve nenhum hambúrguer vendido sem molho.

Quantos dos hambúrgueres vendidos tinham apenas ketchup?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.