



FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

*Análise numérica de Algoritmos de Tratamento
de Imagens Científicas – Perigos e
Potencialidades*

Por

Inês Ferreira Figueiredo

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia da
Universidade do Porto para obtenção do grau de
Mestre

Porto, Julho 2012



FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

*Análise numérica de Algoritmos de Tratamento
de Imagens Científicas – Perigos e
Potencialidades*

Por

Inês Ferreira Figueiredo

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia da
Universidade do Porto para obtenção do grau de
Mestre

Orientadoras: Professora Filomena Dias d'Almeida

Professora Maria João Rodrigues

Porto, Julho 2012

"The future will depend on what we do in the present."

Mahatma Gandhi

Agradecimentos

A realização deste trabalho só foi possível graças à participação direta e indireta de um grande conjunto de pessoas. Como tal, quero deixar uma palavra de profundo agradecimento a todos eles.

Em particular, agradeço às minhas orientadoras, pela força e confiança que dedicaram à minha pessoa e ao meu trabalho e ainda, ao Doutor Duarte Pignatelli, que atenciosamente nos forneceu as imagens médicas sobre as quais trabalhei.

Um agradecimento muito especial, aos meus pais, que me permitiram chegar até aqui, contribuindo não só economicamente mas, acima tudo, afetivamente, incentivando o meu crescimento pessoal.

Aos meus amigos e de mais família, um muito obrigada pelo carinho e amizade.

E a todos aqueles que foram passando pela minha vida e de uma forma ou de outra foram tendo o seu papel nela, ajudando a tornar-me naquilo que sou hoje, um agradecimento sincero.

Resumo

Análise numérica de algoritmos de tratamento de imagens científicas – perigos e potencialidades

A reconstituição de imagens desfocadas é um problema de interesse para diversas áreas como, por exemplo, a Medicina, pelo que surge a necessidade de se estudarem modelos de desfocagem artificial de imagens.

Em processos de Reconstituição de Imagem, a Decomposição em Valores Singulares, SVD, é uma ferramenta que pode ser útil como ferramenta alternativa para resolução do modelo linear usado no tratamento de imagens desfocadas.

O uso da SVD truncada é importante no sentido de permitir reduzir a dimensão dos problemas e permitir também reconstituir a imagem com boa qualidade e em menos tempo quando as dimensões são grandes.

Palavras-chave: Desfocagem de Imagem, SVD, Reconstituição de Imagem, SVD truncada.

Abstract

Numerical analysis of algorithms for Treatment of Scientific Images – advantages and misunderstandings

Reconstitution of blurred images is an issue of concern for several areas such as the Medicine, so that there is a need to study models of artificial image blur.

In proceedings of Image Reconstruction, the Singular Value Decomposition, SVD can be a useful alternative tool for solving the linear model used in the treatment of blurred images.

The use of SVD truncated is important in order to reduce the dimension of problems and also allow reconstruct an image with good quality and in less time when the dimensions are large.

Keywords: Deblurring Process, SVD, Image Reconstitution, SVD truncated

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
Lista de Acrónimos	x
Capítulo 1. Introdução	1
1.1. Objetivo e Motivação.....	1
1.2. Estrutura do Relatório	3
Capítulo 2. Processo de Desfocagem e Reconstituição de uma Imagem	4
2.1. Descrição do Problema	4
2.2. Modelo Linear de Desfocagem de uma Imagem	5
2.3. O recurso à SVD para refocar	7
2.4. Exemplo	8
Capítulo 3. Aplicação a Imagens Científicas	10
3.1. Imagem “Joaninha”.....	10
3.2. Imagens médicas de mitocôndrias	20
3.2.1. Imagem de mitocôndrias de boa qualidade	21
<i>Principais Resultados</i>	22
<i>Resultados recorrendo à SVD truncada</i>	32
3.2.2. Imagem desfocada de mitocôndrias	33
Capítulo 4. Decomposição em Valores Singulares	35
4.1. Interpretação geométrica da SVD.....	36
4.2. Definição de SVD.....	36

4.3.	Decomposição em Valores Singulares Truncada	38
4.4.	Cálculo da Decomposição em Valores Singulares	39
4.4.1.	Cálculo da SVD a partir dos valores próprios	40
4.4.2.	Cálculo da SVD sem calcular A^*A e usando a Bidiagonalização de Golub Kahan	41
4.4.3.	Cálculo da SVD sem calcular A^*A e usando a Bidiagonalização de Lawson-Hanson-Chan	45
4.4.4.	Cálculo da SVD sem calcular A^*A e usando a Bidiagonalização em 3 passos	46
4.4.5.	Comparação entre os diferentes métodos de Bidiagonalização.....	46
4.5.	Aplicações da Decomposição em Valores Singulares	48
4.5.1.	Aplicações da SVD no tratamento de Imagem.....	48
Capítulo 5.	Conclusão e Trabalho Futuro	52
	Referências Bibliográficas	55
	Apêndice A – Programas e Scripts.....	56
	Apêndice B – Tabelas de Resultados	61
B-1.	Alguns dos resultados obtidos, aplicando Processo de Desfocagem e Recuperação da Imagem, para a imagem “Joaninha”	62
B-2.	Alguns dos resultados obtidos, aplicando Processo de Desfocagem e Recuperação da Imagem, para a imagem de mitocôndrias de melhor qualidade	66
B-3.	Resultados obtidos para a Imagem de mitocôndrias desfocada.....	72

Lista de Figuras

Figura 1 Imagem original antes de submetida a um processo de Desfocagem	8
Figura 2 Imagem desfocada e posteriormente recuperada utilizando um modelo linear .	8
Figura 3 Imagem convertida para níveis de cinzento, X (à esq.); Imagem desfocada, B, (PSF propriamente dita, raio 3 e dimensão da imagem) (ao centro); Imagem recuperada, $X_{\text{reconstruído}}$ (à dir.)	9
Figura 4 Imagem “Joaninha”, [500,500]	11
Figura 5 Gráfico da norma da diferença entre a imagem original e a recuperada, considerando ou não o valor do erro e usando ou não a SVD, para uma PSF de raio 2	13
Figura 6 Imagem original (à esq.), Imagem desfocada, B, usando PSF de dimensão [500x500], raio 2 e condições fronteira “periodic” (ao centro), Imagem recuperada (à dir.)	13
Figura 7 Imagem original (à esq); Imagem desfocada	13
Figura 8 Imagem recuperada a partir do uso da SVD truncada, $k = 400$, raio da PSF igual a 4	20
Figura 9 Imagem original das mitocôndrias, [350, 350]	21
Figura 10 Imagem original (à esq.) e Imagem recuperada após desfocagem usando uma PSF de raio 2 (à dir.).....	24
Figura 11 Imagem original (à esq.), Imagem recuperada após desfocagem com PSF de dimensão [350,350], Raio = 3 e condições fronteira “periodic”	24
Figura 12 Gráfico da norma da diferença entre a imagem original e a imagem recuperada, introduzindo ou não o erro e usando ou não o erro, a partir de uma PSF de raio = 3 e condições fronteira “periodic”	26
Figura 13 Imagem original (à esq.); Imagem recuperada sem a subtracção do parâmetro ruído invertido (valor do erro 1×10^{-6}), para uma PSF de raio 3 e dimensão [350, 350].	26

Figura 14 Resultados obtidos para a reconstituição da imagem usando uma PSF com diferentes valores de raio	27
Figura 15 Gráfico da norma da diferença entre a imagem original e a recuperada, após desfocagem com PSF de raio 175 e 180.....	28
Figura 16 Gráfico da diferença entre a imagem obtida e a original em função do valor erro contido no parâmetro ruído invertido, usando uma PSF de condição fronteira ‘zero’ e Raio = 2.....	30
Figura 17 Imagem reconstituída utilizando uma PSF =[350,350], Raio=2 e valores de erro de 1×10^{-2} , 1×10^{-5} , 1×10^{-6} , 1×10^{-10} , respectivamente.....	31
Figura 18 Imagem desfocada (a); Imagem reconstituída (PSF de raio 4 e erro 1×10^{-1}) (b); Imagem reconstituída (PSF de raio 4 e erro 1×10^{-5}) (c); Imagem reconstituída (PSF de raio 4 e erro 1×10^{-6}) (d) Imagem reconstituída (PSF de raio 4 e erro 1×10^{-10}) (e) Imagem Original (f).....	31
Figura 19 Imagem original (à esq.); Imagem recuperada recorrendo ao uso da SVD truncada, PSF de dimensão [6,6], Raio=3, Erro= 1×10^{-10} (à dir.)	33
Figura 20 Imagem desfocada, [500x500]	33
Figura 21 Imagem Reconstituída, com PSF de raio 3 e condições fronteira “periodic”	34
Figura 22 Imagem original (à esq.), Imagem reconstituída, a partir de um SVD truncada com $k=100$ (PSF de raio 3).....	34
Figura 23 Decomposição em Valores Singulares de uma matriz 2x2 [1]	36
Figura 24 Bidiagonalização da matriz A [2]	42
Figura 25 Redução da matriz à forma bidiagonal recorrendo a rotações de Givens [2]	44
Figura 26 Bidiagonalização LHC [2]	45
Figura 27 Bidiagonalização em 3 passos [2]	46
Figura 28 Gráfico de comparação entre os 3 processos de Bidiagonalização [2]	47

Lista de Tabelas

Tabela 1 Resultados obtidos utilizando uma PSF de raio igual a 3.....	14
Tabela 2 Resultados obtidos utilizando uma PSF de raio 3, recorrendo à SVD	15
Tabela 3 Resultados obtidos na reconstituição da imagem após uma desfocagem com uma PSF com condições fronteira “periodic”	17
Tabela 4 Resultados obtidos na reconstituição da imagem após uma desfocagem com uma PSF com condições fronteira “zero”.....	18
Tabela 5 Resultados obtidos para a reconstituição de imagens a partir da SVD truncada, utilizando diferentes valores de raio e diferente número de valores singulares	19
Tabela 6 Resultados obtidos a partir de uma desfocagem propriamente dita, com condições fronteira “periodic” e raio 2.....	23
Tabela 7 Resultados obtidos na recuperação da imagem, após desfocagem com uma PSF de raio 3, dimensão [350, 350] e condições fronteira “periodic”	25
Tabela 8 Resultados obtidos na reconstituição da imagem após uma desfocagem com uma PSF com condições fronteira “periodic”	29
Tabela 9. Comparação entre as diferentes formas de Bidiagonalização, relativamente aos custos do processo.....	47

Lista de Acrónimos

Ac – Matriz de desfocagem em coluna

Ar – Matriz de desfocagem em linha

Ar^T – Matriz de desfocagem em coluna transposta

B – Matriz da Imagem desfocada

S – Matriz de Valores Singulares

U – Matriz de vetores Singulares à esquerda

X – Matriz da Imagem Original

V – Matriz de vetores singulares à direita

Capítulo 1. Introdução

1.1. Objetivo e Motivação

Este relatório insere-se no âmbito do Mestrado em Engenharia Biomédica, e tem como objetivo analisar os perigos e potencialidades do uso de determinados algoritmos de tratamento de imagens, nomeadamente médicas.

Uma vez que a prática da Medicina envolve o diagnóstico e o tratamento de variadas patologias, é necessário recorreremos a todos os instrumentos e tecnologias ao nosso dispor de forma a colaborar com cada uma destas etapas. Assim, a ajuda que cada um e todos nós podemos dar para a melhoria das condições de vida do ser humano, deve ser um aspeto presente no nosso dia-a-dia.

Com este trabalho, procuramos fazer uma análise acerca de alguns procedimentos utilizados no tratamento de imagens, e perceber os riscos e benefícios que podem advir da sua utilização.

A Matemática, como ciência transversal, pode ter aplicações em diversas áreas e, como tal, é uma ferramenta que está na base de muitos tratamentos de imagem.

Por norma, quando realizamos um qualquer exame clínico é necessário armazenar a informação nele contida. A criação de bancos de dados é um importante mecanismo de armazenamento de informação, que permite aos profissionais de saúde comparar exames do mesmo paciente ao longo de determinados períodos de tempo.

A Telerradiologia, a Medicina Nuclear e exames como Tomografia Computorizada e a Ressonância Magnética requerem uma grande capacidade das tecnologias utilizadas para o processamento e armazenamento das imagens obtidas, o que gerou a necessidade de se procurarem formas de compactar a informação, de modo a acarretar um menor peso computacional.

Uma das possíveis soluções para redução do número de bits da imagem, mas procurando manter a informação relevante, está no recurso a mecanismos de compressão de imagem.

Um dos principais desafios da Imagiologia médica tem que ver, portanto, com a necessidade de equilibrar a quantidade de informação necessária disponível para permitir o acesso imediato e partilha com outras organizações de saúde, e a necessidade de armazenamento de informação a longo prazo (arquivamento), para cumprir os requisitos médico-legais, por exemplo.

Por outro lado, não existe só a necessidade de guardar a informação destes exames, mas também recuperá-la quando estes não apresentam a qualidade desejada, uma vez que estamos a falar de procedimentos que acarretam custos por vezes in comportáveis para muitos dos pacientes e cujo procedimento pode, por vezes, ser moroso para o paciente.

Os processos de desfocagem e recuperação de imagem são o principal objectivo desta tese.

O uso da Decomposição em Valores Singulares, nomeadamente, truncada é uma ferramenta matemática que pode ter interesse nessa área.

1.2. Estrutura do Relatório

No segundo capítulo deste trabalho, efetuamos uma abordagem aos métodos de desfocagem de uma imagem. Desta forma, podemos perceber a influência que determinados parâmetros têm na qualidade de uma imagem.

O terceiro capítulo é dedicado à descrição da aplicação deste método a imagens científicas, particularmente, de mitocôndrias, onde apresentaremos alguns dos resultados que fomos obtendo quando aplicamos estes métodos.

No capítulo seguinte, descreveremos o funcionamento da Decomposição em Valores Singulares, bem como as suas aplicações, sendo que também mencionaremos um variante desta técnica que consiste na redução do número de valores singulares considerados.

No quinto capítulo, faremos uma breve análise ao trabalho realizado, apresentando algumas conclusões e perspectivas de trabalho futuro.

Capítulo 2. Processo de Desfocagem e Reconstituição de uma Imagem

2.1. Descrição do Problema

A necessidade de recordar um momento leva-nos a recorrer, continuamente, ao uso de máquinas fotográficas, telemóveis e outras tecnologias que nos permitam adquirir imagens. No entanto, nem sempre a imagem que obtemos é aquela que desejaríamos.

Na prática, uma imagem pode sofrer uma desfocagem por diversos motivos. Um desajuste no alinhamento das lentes, uma alteração atmosférica, erros por parte do utilizador, através de movimentos involuntários, são alguns deles. Em microscopia confocal, por exemplo, pode ocorrer uma distorção no alinhamento da luz incidente, que leva à obtenção de uma imagem esbatida.

O passo inicial deste trabalho consistiu em tentar simular alguma destas situações. Como tal, submetemos uma fotografia a um processo artificial de desfocagem e posteriormente tentamos recuperá-la.

É importante realçar, que num processo artificial de desfocagem, torna-se mais fácil recuperar a imagem, uma vez que nós conhecemos a causa da desfocagem e temos a imagem original para medir a qualidade da reconstituição, o que infelizmente na prática não acontece.

Neste capítulo, pretendemos fazer uma abordagem aos processos de reconstituição de imagens.

2.2. Modelo Linear de Desfocagem de uma Imagem

De uma forma geral, num processo de desfocagem representa-se a imagem através de um modelo linear. A imagem é uma matriz X . Como sofreu desfocagens ou ficou afetada de erro com a digitalização, em vez de X temos efetivamente B , imagem desfocada.

Sejam as matrizes A_c e A_r a matriz de alteração das colunas da imagem e das linhas da imagem, respetivamente. Então a matriz desfocada é dada por [1]:

$$B = A_c X A_r^T \quad (1)$$

Alternativamente, este modelo permite escrever

$$X_{reconstruído} = A_c^{-1} B A_r^{-T} \quad (2)$$

Dado que a imagem armazenada também é afetada por ruído, tanto mais não seja devido à precisão máquina finita com que os *pixels* são representados na versão digital, é necessário acrescentar uma matriz ruído, E , ao modelo linear (1):

$$B = A_c X A_r^T + E \quad (3)$$

O que implica que

$$X_{reconstruído} = A_c^{-1}BA_r^{-T} - A_c^{-1}EA_r^{-T} \quad (4)$$

isto é, acrescenta-se um novo parâmetro ao nosso modelo $A_c^{-1}EA_r^{-T}$ a que chamamos ruído invertido.

Uma vez que a desfocagem de uma imagem pode ter diferentes causas é importante percebermos que cada imagem desfocada tem a sua própria história. Assim, é fácil de entender que a desfocagem é um processo complexo que requer um estudo cuidadoso e minucioso.

Atualmente existe um conjunto de modelos matemáticos que nos permitem representar vários tipos de desfocagem de uma imagem.

Consoante a situação que queremos simular, existe um conjunto de alternativas às quais podemos apelar. Segundo [1] podemos considerar uma desfocagem propriamente dita, ou seja, atribuímos à imagem uma distorção radial centrada num único ponto da imagem ou em vários pontos, uma desfocagem que simula a turbulência atmosférica ou a uma desfocagem horizontal (ou vertical) ao longo de uma linha.

Todos estes métodos têm como base a criação de uma matriz PSF, “*Point Spread Function*”, que não é mais do que uma função na qual está descrita a informação relativa ao processo de desfocagem. A PSF depois de criada é aplicada à imagem de forma a obtermos uma nova imagem, agora desfocada.

A criação da PSF é o que nos permite extrair as matrizes A_c e A_r , que caracterizam a forma da desfocagem, através de uma Decomposição de *Kronecker* [1, pág. 48].

Um outro aspeto a considerar é o tipo de condições fronteira que atribuímos à alteração da imagem.

Habitualmente consideram-se três tipos de condições fronteira, isto é, três tipos de parâmetros que nos permitem descrever o formato da periferia da desfocagem [1]. Em imagens provenientes de áreas como a astronomia, a condição fronteira mais comumente utilizada consiste em considerar que a periferia da imagem é toda ela sem informação (a

preto). Outro tipo de condição fronteira consiste em atribuir aos bordos da imagem um carácter periódico em que a informação da imagem se reproduz em diferentes direções.

E por último pode definir-se o exterior da imagem como sendo um espelho do seu interior, ou seja, a informação da imagem está replicada no seu exterior.

Depois de definirmos as condições fronteira também procedemos à determinação da dimensão da matriz PSF que traduz o raio de alcance da desfocagem.

A influência que a dimensão e o raio da PSF têm na desfocagem e posterior reconstituição da imagem será abordada mais à frente neste trabalho.

Nos casos em que as componentes vertical e horizontal de desfocagem podem ser separadas, a matriz PSF pode ser representada como um produto de Kronecker de duas matrizes A_c e A_r (já referidas) que dependem apenas do tipo de PSF escolhido e respectivos parâmetros (centro e raio) e do tipo de condições fronteira [1].

Outro dos aspetos que consideramos neste trabalho consistiu em sujeitar a imagem não só a uma desfocagem pela PSF, mas também, a diferentes valores de ruído e testar a capacidade do modelo em recuperar a imagem com a intervenção deste parâmetro.

2.3. O recurso à SVD para refocar

Depois de desfocarmos a imagem, uma alternativa para a recuperação da imagem passa pelo uso da SVD.

No quarto capítulo, faremos uma análise mais aprofundada sobre esta técnica, no entanto, é de referir que esta técnica tem importantes aplicações não só na recuperação da imagem, mas também na otimização da duração do processo. Estudaremos ainda, o recurso à SVD truncada, que permite recuperar a imagem a partir de uma só parte da informação sobre a imagem.

O uso da SVD é mais um aspeto interessante de analisar, uma vez que se levantam questões sobre a sua eficácia. Maior rapidez, igual eficiência? O uso de menos informação, resulta em igualmente bons resultados? Estes serão algumas das dúvidas que discutiremos mais à frente.

2.4. Exemplo

Consideremos a seguinte imagem “Joaninha”:



Figura 1 Imagem original antes de submetida a um processo de Desfocagem

Em Tratamento de Imagem o processo torna-se mais simples se trabalharmos com imagens a níveis de cinzento. Depois disso, escolhemos um processo de desfocagem a aplicar à imagem. Neste exemplo, consideramos uma desfocagem propriamente dita.

Um aspeto importante que consideramos neste trabalho foi perceber que parâmetros podem aumentar ou diminuir a semelhança entre a imagem original e a recuperada. Vejamos o que foi acontecendo à imagem “Joaninha”.



Figura 2 Imagem desfocada e posteriormente recuperada utilizando um modelo linear

Depois da conversão para níveis de cinzento, como já referimos, criamos a PSF com uma dimensão igual à da imagem e um raio de desfocagem de, por exemplo, 3 unidades.

Atribuindo à imagem Condições Fronteira do tipo ‘zero’, fomos obtendo os seguintes resultados (figura 3):



Figura 3 Imagem convertida para níveis de cinzento, X (à esq.); Imagem desfocada, B , (PSF propriamente dita, raio 3 e dimensão da imagem) (ao centro); Imagem recuperada, $X_{reconstruído}$ (à dir.)

Visualmente, a recuperação da imagem parece excelente, e também o podemos comprovar numericamente. Para isso, recorreremos à norma euclidiana da diferença entre as matrizes das duas imagens, $\|X_{reconstruído} - X\|$.

No exemplo apresentado, o que fizemos foi gerar uma matriz aleatória, a qual multiplicamos por diferentes valores e somámo-la à imagem desfocada, B . Pelo que, passamos a ter uma nova matriz que, para além da desfocagem, sofreu uma alteração mínima provocada por causa desconhecida.

Mais à frente, veremos a forma como a subtração, ou não, deste parâmetro afeta a recuperação da imagem.

Quando tratamos imagens de grandes dimensões, os processos acabam sempre por se tornar ligeiramente morosos, pelo que existe uma necessidade de encontrar soluções que minimizem o custo do processo.

Capítulo 3. Aplicação a Imagens Científicas

A melhor forma de compreender uma metodologia é trabalhar sobre ela. Assim, neste capítulo apresentaremos alguns dos testes que fizemos sobre diferentes imagens científicas, cuja qualidade, no que diz respeito à nitidez e ao contraste, varia.

3.1. Imagem “Joaninha”

Numa primeira abordagem ao problema da desfocagem e reconstituição de uma imagem recorreremos à imagem “Joaninha”. De seguida, abordaremos o processo de forma mais aprofundada, apresentando alguns dos resultados dos testes que realizamos sobre esta mesma imagem. Pelo facto de a imagem apresentar um elevado peso computacional, fizemos um reajuste à sua dimensão, sendo que trabalhamos com uma imagem de 500 por 500 *pixels* (figura 4).



Figura 4 Imagem “Joaninha”, [500,500]

Como já referimos, o modelo de desfocagem e reconstituição de imagens é complexo, e como tal, surgiu a necessidade de estudar a forma como os diferentes parâmetros influenciam o processo. Assim, começamos por testar o modelo, variando a dimensão da PSF, o valor do raio, as condições fronteira e o valor escalar do erro contido no ruído invertido.

Começamos o processo por fixar o tipo de condição fronteira, variando alternadamente os outros parâmetros.

Dimensão da PSF constante

Numa primeira fase, desfocamos a imagem a partir de uma PSF com dimensão igual à da nossa imagem, 500 por 500 *pixels*, e condições fronteira do tipo “periodic”. Os parâmetros alternáveis foram o raio e o ruído invertido.

A recuperação da imagem consistiu em dois focos fundamentais: o uso do modelo linear $X_{reconstruido} = A_c^{-1} B A_r^{-T}$ e o mesmo modelo reajustado ao uso da SVD. Para cada um destes modelos, o que fizemos foi considerar a ausência ou presença do parâmetro ruído invertido e determinar a sua menor ou maior influência nos resultados, de acordo com o seu valor.

Mais à frente, apresentaremos alguns dos resultados obtidos com posterior análise dos mesmos.

Depois de realizarmos vários testes alternando apenas o raio e o valor do ruído invertido, o que fizemos foi considerar diferentes dimensões para a PSF, tendo sempre o cuidado de lhe atribuir uma dimensão duas vezes superior ao valor do raio no momento considerado.

E por fim, criamos um conjunto de testes para estes mesmos parâmetros, porém atribuindo à nossa PSF condições fronteira do tipo “zero”.

Ao longo de todos estes testes fomos considerando os tempos de duração de cada um dos processos, de forma a perceber se existem diferenças significativas entre os mesmos.

Um aspeto importante a considerar em todo o processo é o condicionamento de cada uma das matrizes, A_c e A_r , uma vez que é relevante perceber a influência que cada um destes parâmetros tem sobre esta característica da matriz.

A segunda fase de testes sobre esta imagem consistiu no uso da SVD truncada para reconstruir a imagem. Também para este processo recorremos a diferentes tipos de condições fronteira, valores de raio, ruído invertido e diferentes dimensões da PSF. A grande diferença relativamente a esta metodologia está no facto de nesta situação fazermos uma aproximação da matriz, recorrendo apenas a informação até k valores singulares (os maiores em módulo).

O conjunto de testes que executámos sobre as imagens foi vasto, pelo que surgiu a necessidade de criarmos algumas folhas de cálculo Excel para armazenarmos os resultados. Em seguida, apresentaremos algumas tabelas de resultados com as respetivas análises. O restante dos resultados poderá ser consultado nos anexos deste trabalho.

Na realização destes testes, o primeiro aspeto a observar foi a ineficácia do processo quando usamos os parâmetros condição fronteira do tipo “periodic” e raio igual a 2, uma vez que obtivemos diferenças entre as imagens, original e reconstruída (figura 5), da ordem dos 10^{15} e, portanto, não conseguimos reconstituir a imagem (figura 6).

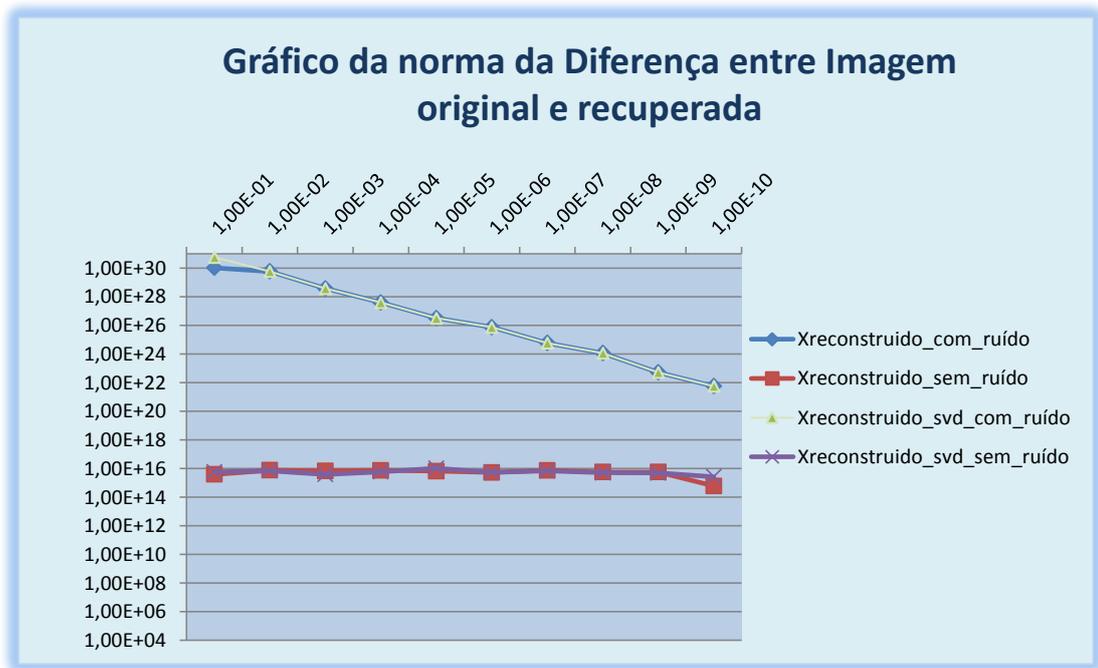


Figura 5 Gráfico da norma da diferença entre a imagem original e a recuperada, considerando ou não o valor do erro e usando ou não a SVD, para uma PSF de raio 2



Figura 6 Imagem original (à esq.), Imagem desfocada, B, usando PSF de dimensão [500x500], raio 2 e condições fronteira “periodic” (ao centro), Imagem recuperada (à dir.)

À medida que fomos progredindo no valor do raio obtivemos melhores resultados. Após vários testes, verificamos que os melhores resultados foram obtidos utilizando raio igual a 3 (tabela 1) e 4, uma vez que as diferenças, em norma, entre as imagens foram da ordem dos 10^{-10} . A partir deste valor as diferenças começam a aumentar ligeiramente.

Tabela 1 Resultados obtidos utilizando uma PSF de raio igual a 3

Ruído invertido (valor erro)	Recupera a imagem (Sem subtrair o ruído)?	Diferença com a original	Tempo (seg.)	Recupera a imagem (Subtraindo o ruído)?	Diferença com a original	Tempo (seg.)
1,00E-01	Não	1,497E+05	0,1248	Sim	7,52E-10	0,1404
1,00E-02	Não	1,033E+04	1,56E-01	Sim	4,42E-10	0,1872
1,00E-03	Não	3,432E+03	0,1248	Sim	2,67E-10	0,1248
1,00E-04	Não	3,172E+02	0,1872	Sim	6,98E-10	0,2028
1,00E-05	Não	12,884	0,1716	Sim	6,95E-10	0,1404
1,00E-06	Sim	2,331E+00	0,1248	Sim	4,75E-10	0,1872
1,00E-07	Sim	2,489E-01	0,1404	Sim	1,34E-10	0,1404
1,00E-08	Sim	1,630E-02	1,09E-01	Sim	4,67E-10	1,56E-01
1,00E-09	Sim	2,900E-03	0,1404	Sim	3,17E-10	0,1872
1,00E-10	Sim	1,805E-04	0,1248	Sim	2,89E-10	0,1872

Os resultados recorrendo ao uso da SVD assemelham-se aos obtidos a partir do modelo linear anterior, os tempos são ligeiramente diferentes (Tabela 2).

Tabela 2 Resultados obtidos utilizando uma PSF de raio 3, recorrendo à SVD

Ruído invertido (valor erro)	Recupera a imagem (Sem subtrair o ruído)?	Tempo (seg.)	Diferença com a original	Recupera a imagem (Subtraindo o ruído)	Diferença com a original	Tempo (seg.)
1,00E-01	Não	0,1248	1,497E+05	Sim	2,63E-10	0,2808
1,00E-02	Não	0,1248	1,033E+04	Sim	2,03E-10	0,2808
1,00E-03	Não	1,56E-01	3,432E+03	Sim	2,083E-10	0,3432
1,00E-04	Não	1,56E-01	3,172E+02	Sim	3,750E-10	0,3432
1,00E-05	Não	0,1404	12,884	Sim	4,172E-10	0,312
1,00E-06	Sim	0,1248	2,331E+00	Sim	4,39E-10	0,3744
1,00E-07	Sim	1,56E-01	2,489E-01	Sim	4,61E-10	0,2496
1,00E-08	Sim	0,1872	1,630E-02	Sim	5,23E-10	0,3432
1,00E-09	Sim	0,1248	2,900E-03	Sim	4,15E-10	0,2808
1,00E-10	Sim	0,1872	1,805E-04	Sim	2,09E-10	0,312

Com o aumento do valor do raio verifica-se um aumento da desfocagem e como tal, a imagem desfocada, B, torna-se cada mais irreconhecível pelo que se torna cada vez mais difícil recuperar a imagem com bons resultados. Por outro lado, o condicionamento das matrizes, A_c e A_r , também começa a aumentar até um ponto em que por volta do raio igual a 300, se obtêm resultados fracos, nomeadamente diferenças entre as imagens da ordem da unidade.

Na segunda fase do processo, alteramos as condições fronteira para “zero” e desde logo se verificaram resultados diferentes, nomeadamente para o raio igual a 2. Neste ensaio, conseguimos recuperar a imagem com uma norma da diferença de 10^{-7} quando subtraímos o ruído invertido, o que resulta numa melhoria dos resultados e portanto, num aspeto importante a realçar. Foi possível recuperar a imagem para valores de erro inferiores a 10^{-6} , o que novamente traduz uma melhoria significativa na qualidade dos resultados, mesmo sem subtrair o ruído invertido.

Para valores de raio igual a três, verificamos novamente uma melhoria dos resultados, sendo que obtivemos resultados da ordem dos 10^{-10} .

Tal como se verificou nos testes com PSF de condições fronteira “periodic”, também para valores de raio igual a 3 e 4 se obtiveram os melhores resultados dos ensaios, com norma da diferença da ordem de 10^{-10} e 10^{-9} .

A grande diferença entre os resultados utilizando diferentes condições fronteira centrou-se exclusivamente nos resultados obtidos para um raio igual a 2, uma vez que, de forma geral, os restantes dos resultados foram muito próximos.

Variando a dimensão da PSF

De seguida, aplicamos o mesmo género de testes à imagem variando, no entanto, a dimensão da PSF. Esta alteração não provocou grandes alterações na imagem recuperada, obtendo-se resultados próximos aos que já havíamos obtido acima. Variamos a PSF desde [5,5] até [300,300] sendo que se verificou o mesmo tipo de desenvolvimento, ou seja, à medida aumentamos o valor do raio para cada uma destas dimensões conseguimos recuperar a imagem, mas perdendo qualidade progressivamente, até se atingir um valor de raio que não permitiu recuperar a imagem (esse valor é aproximadamente metade da dimensão da imagem original).

Nas tabelas 3 e 4 podemos analisar alguns dos resultados obtidos na reconstituição da imagem após uma desfocagem variando a dimensão da PSF e atribuindo-lhe condições fronteira do tipo “periodic” e “zero”, respetivamente.

Tabela 3 Resultados obtidos na reconstituição da imagem após uma desfocagem com uma PSF com condições fronteira “periodic”

Dimensão da PSF	Valor do Raio	Norma da diferença entre as imagens (com o ruído 1×10^{-10})	Recupera a imagem?	Norma da diferença entre as imagens (subtraindo o ruído)	Recupera a imagem?
[5,5]	2	1.1925e+016	Não	1.8266e+016	Não
	3	1.2115e+023	Não	1.7824e+017	Não
[10,10]	2	9.1507e+021	Sim	1.0346e+016	Sim
	3	2.1919e-004	Sim	4.8303e-010	Sim
	5	3.0860e-006	Sim	9.3703e-012	Sim
	7	4.6916e-006	Sim	1.1150e-011	Sim
[20,20]	5	5.2290e-004	Sim	1.8986e-009	Sim
	10	3.9949e-005	Sim	1.3965e-010	Sim
	15	3.8084e+024	Sim	6.7496e+018	Sim
[50,50]	5	0.0013	Sim	1.4901e-009	Sim
	10	0.0070	Sim	9.9558e-009	Sim
	25	6.8691e-004	Sim	2.0486e-009	Sim
	40	0.0026	Sim	1.1028e-008	Sim
[400,400]	5	0.0012	Sim	1.6305e-009	Sim
	50	0.7486	Sim	2.4186e-006	Sim
	100	2.9277	Sim	8.5157e-006	Sim
	300	1.2417e+027	Sim	4.2094e+021	Sim

Tabela 4 Resultados obtidos na reconstituição da imagem após uma desfocagem com uma PSF com condições fronteira “zero”

Dimensão da PSF	Valor do Raio	Norma da diferença entre as imagens (com o ruído 1×10^{-10})	Recupera a imagem?	Norma da diferença entre as imagens (subtraindo o ruído)	Recupera a imagem?
[5,5]	2	0.5452	Sim	3.5793e-006	Sim
	3	3.1795e-005	Sim	4.8468e-011	Sim
	4	4.2645e-005	Sim	5.9674e-011	Sim
[10,10]	3	1.4199e-004	Sim	2.3059e-010	Sim
	5	425.8119	Não	6.5295e-004	Sim
	6	1.1833e+006	Não	0.6709	Sim
[50,50]	5	0.0056	Sim	5.5142e-009	Sim
	10	0.0050	Sim	1.2934e-008	Sim
	25	0.5944	Sim	1.5369e-006	Sim
[400,400]	3	1.7412e-004	Sim	3.5310e-010	Sim
	5	0.0053	Sim	5.0064e-009	Sim
	50	3.9805	Sim	3.2284e-005	Sim
	100	292.8004	Não	5.7565e-004	Sim
	300	2.5711e+028	Não	9.3155e+021	Sim

SVD truncada

Para a segunda fase do estudo, recorreu-se ao uso da SVD truncada para prevenir casos de grande dimensão que não possam ser resolvidos em tempo útil com o modelo linear inicial, que envolve sistemas com matrizes A_c e A_r de grande dimensão.

Nesta etapa do trabalho, seleccionamos diferentes valores de k , número de valores singulares utilizados, e a partir deles tentamos recuperar a imagem. Pelo facto de a imagem ter uma dimensão de 500 por 500 *pixels*, fizemos uma seleção de k valores inferiores a

500, uma vez que o objetivo é tentar recuperar a imagem recorrendo a menos informação. Assim, os valores de k escolhidos foram 150, 200, 250, 300, 350 e 400.

É natural que quanto mais informação utilizarmos, melhores serão os resultados logo, será expectável que os melhores resultados sejam obtidos utilizando 400 valores singulares, o que se comprovou nos testes realizados.

De entre os testes realizados, verificaram-se melhores resultados para um raio igual a 4 e recorrendo a uma PSF de dimensão igual à da imagem e condições fronteira “zero”. Para este ensaio, obtiveram-se os valores de condicionamento, das matrizes, mais baixos, da ordem dos 10^3 .

Tabela 5 Resultados obtidos para a reconstituição de imagens a partir da SVD truncada, utilizando diferentes valores de raio e diferente número de valores singulares

Valor Raio	Condicionamento de Ac e Ar	Valor k	Norma da diferença entre as imagens
3	2,39E+03	400	2,409
4	7,85E+03	400	1,822
5	1,04E+04	400	2,547
10	1,24E+04	400	3,442

A imagem obtida com melhor resultado é apresentada abaixo.



Figura 7 Imagem original (à esq.), Imagem reconstituída, recorrendo à SVD truncada, com $k = 400$, PSF [500,500] e raio = 4 (à dir.)

Embora, à partida, a imagem recuperada possa parecer de boa qualidade, é necessário analisá-la cuidadosamente. Se observarmos a imagem num plano maior, podemos reparar em certos pormenores e perceber, portanto, que a recuperação não foi assim tão boa, nomeadamente nas zonas da periferia em que se nota um ligeiro esbatimento (figura 8).

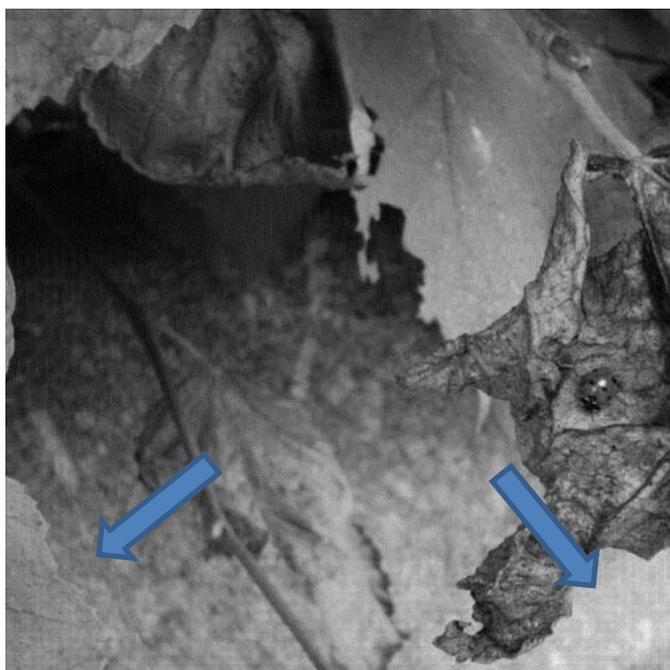


Figura 8 Imagem recuperada a partir do uso da SVD truncada, $k=400$, raio da PSF igual a 4

Para outros valores de raio e dimensões da PSF, os resultados foram similares, embora utilizando condições fronteira do tipo “periodic” se tenham obtido resultados ligeiramente inferiores.

3.2. Imagens médicas de mitocôndrias

As mitocôndrias são a principal fonte de energia das células. Estes organelos, produzem, a partir de um processo aeróbio, uma molécula chamada ATP (Trifosfato de Adenosina).

O domínio deste organelo no nosso organismo dá-se nas células musculares, cerebrais e células responsáveis pela produção de hormonas, uma vez que estas são as que necessitam de energia permanentemente.

A análise da estrutura destes organelos é muito importante no estudo de doenças e, portanto, é necessário ter ao nosso dispor fotografias, da mais elevada qualidade, para interpretar da melhor forma possível os problemas que afetam a mitocôndria.

Nem sempre, contudo, a imagem possui a qualidade que desejaríamos e essa situação impede a correta interpretação do problema. A solução nestes casos é repetir o procedimento porém, uma vez que este processo é invasivo, essa não será a melhor solução.

Assim, surge a utilidade de estudar alternativas que permitam corrigir a nitidez e o contraste da imagem. No que segue, aplicamos os algoritmos do capítulo 2 a imagens de mitocôndrias obtidas com o microscópio eletrônico, armazenadas como fotografias analógicas e depois digitalizadas para o nosso estudo.

No primeiro caso, usamos uma imagem boa para servir de referência, desfocamos e recuperamos como em 3.1. No segundo caso, usamos uma imagem desfocada e tentamos recuperar com a SVD truncada.

3.2.1. Imagem de mitocôndrias de boa qualidade

A primeira imagem da mitocôndria (figura 9), sobre a qual trabalhamos foi, juntamente com a outra que estudaremos, obtida a partir de um microscópio eletrônico.

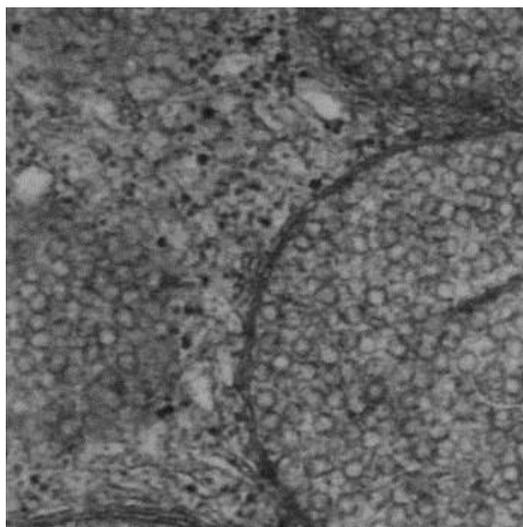


Figura 9 Imagem original das mitocôndrias, [350, 350]

Sobre esta primeira imagem aplicamos diversos testes variando os parâmetros que cada metodologia engloba.

Consideramos uma desfocagem propriamente dita sobre a qual aplicamos diferentes valores de raio e condições fronteira. Também adicionamos à imagem algum ruído aleatório de diferentes grandezas.

Principais Resultados

Nesta primeira tabela, apresentamos alguns dos resultados que obtivemos para esta imagem quando lhe aplicamos um processo de desfocagem.

Principais características:

- Imagem redimensionada para uma matriz quadrada de 350 por 350 *pixels*;
- Desfocagem propriamente dita;
- Dimensão da PSF igual à da imagem original;
- Raio variado entre 2 e 180;
- Ruído Invertido, introduzido a partir de uma matriz aleatória, de dimensão igual à da imagem, com valores de erro escalar que variam entre 1×10^{-1} e 1×10^{-10} ;
- Condições fronteira do tipo 'periodic'.

Uma vez que o valor do ruído varia dez vezes para cada valor de raio, é fácil percebermos a grande quantidade de resultados e imagens que obteremos. Começamos pelo uso do Modelo Linear sem recurso à SVD.

Para um Raio de dimensão 2, temos um Condicionamento de A_c igual a $2,28 \times 10^{16}$ e um Condicionamento de A_r igual a $8,16 \times 10^{15}$, valores bastantes elevados.

Sem introduzirmos o parâmetro erro invertido, a nossa imagem não recupera o aspecto original, apresentando um tempo de execução de aproximadamente 0,0624 segundos e uma diferença em relação à original da ordem dos $9,60 \times 10^{15}$.

Da mesma forma, quando introduzimos o ruído invertido à imagem, os resultados também não são satisfatórios, quer posteriormente subtraíamos esse valor à imagem ou não. Porque o condicionamento das matrizes A_c e A_r é demasiado elevado (Tabela 5).

Tabela 6 Resultados obtidos a partir de uma desfocagem propriamente dita, com condições fronteira “periodic” e raio 2

Ruído invertido (valor erro)	Recupera a imagem (Sem subtrair o ruído)?	Diferença com a original	Tempo (seg.)	Recupera a imagem (Subtraindo o ruído)?	Diferença com a original	Tempo (seg.)
1,00E-01	Não	5,67E+30	0.0624	Não	5,35E+16	0.0624
1,00E-02	Não	4,88E+29	0.0312	Não	1,28E+16	0.0312
1,00E-03	Não	6,98E+28	0.0624	Não	7,00E+15	0.0312
1,00E-04	Não	4,17E+27	0.0312	Não	8,06E+15	0.0624
1,00E-05	Não	4,66E+26	0.0468	Não	1,30E+16	0.0312
1,00E-06	Não	3,98E+25	0.0624	Não	1,43E+16	0.0468
1,00E-07	Não	5,02E+24	0.0624	Não	1,86E+16	0.0624
1,00E-08	Não	5,42E+23	0.0624	Não	8,74E+15	0.0624
1,00E-09	Não	7,53E+22	0.0312	Não	1,60E+16	0.0312
1,00E-10	Não	7,61E+21	0.0624	Não	1,58E+16	0.0312

Os resultados, quando aplicamos o processo de refocagem recorrendo à SVD, como seria de esperar, não diferem muito dos anteriores, sendo que a recuperação da imagem sem a introdução do parâmetro ruído invertido foi de $1,47E+16$, com um tempo de 0.0624 segundos (ver apêndice B).

Se analisarmos atentamente os resultados, podemos ver que à medida que diminuimos o valor do ruído invertido, a qualidade da imagem melhora ligeiramente, no entanto, os valores continuam muito discrepantes, o que não nos permite recuperar a imagem.

Como veremos mais à frente, sempre que aplicamos à imagem uma desfocagem com um raio de 2, os resultados são maus.

A imagem abaixo mostra um dos resultados obtidos quando recuperamos a imagem recorrendo a uma PSF da dimensão da imagem original com raio 2.

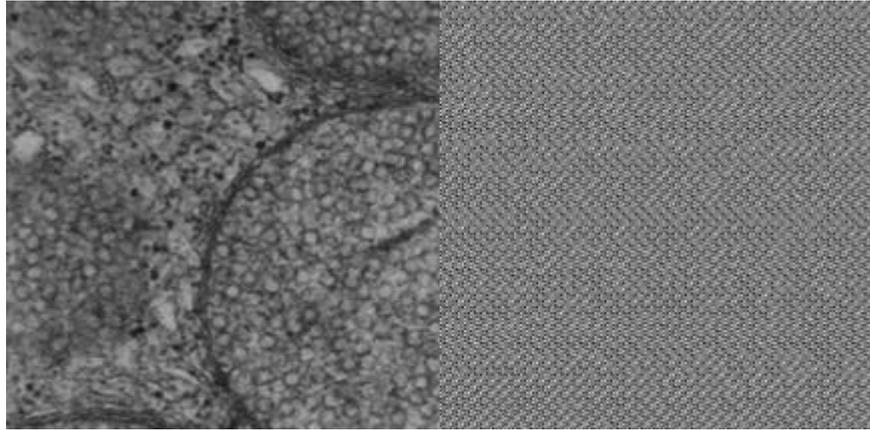


Figura 10 Imagem original (à esq.) e Imagem recuperada após desfocagem usando uma PSF de raio 2 (à dir.)

Quando realizamos o mesmo teste sobre a imagem recorrendo agora a um raio de dimensão 3, os resultados foram diferentes, melhorando significativamente (figura 11), uma vez que o condicionamento das matrizes diminuiu bastante, para aproximadamente 872 (Tabela 7).

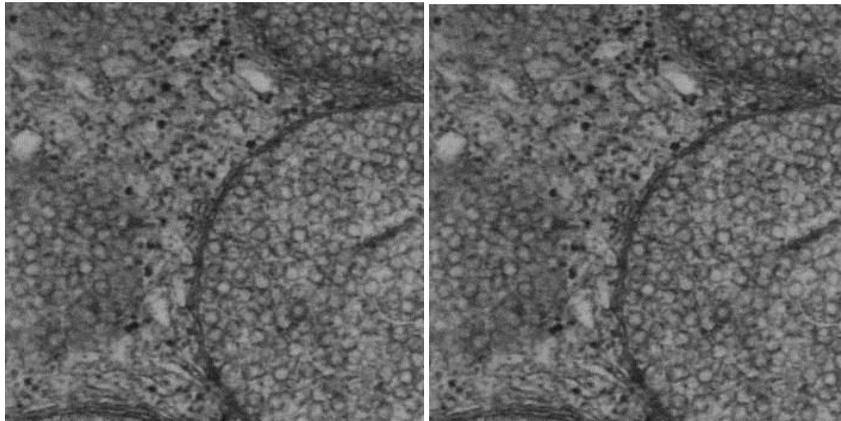


Figura 11 Imagem original (à esq.), Imagem recuperada após desfocagem com PSF de dimensão [350,350], Raio = 3 e condições fronteira “periodic”

Tabela 7 Resultados obtidos na recuperação da imagem, após desfocagem com uma PSF de raio 3, dimensão [350, 350] e condições fronteira “periodic”

Ruído invertido (valor erro)	Recupera a imagem (Sem subtrair o ruído)?	Diferença com a original	Tempo (seg.)	Recupera a imagem (Subtraindo o ruído)?	Diferença com a original	Tempo (seg.)
1,00E-01	Não	4.2990E+004	0.0624	Sim	1.4285E-010	0.0624
1,00E-02	Não	4.1185E+003	0.0312	Sim	1.2966E-010	0.0468
1,00E-03	Não	442.0884	0.0624	Sim	9.9397E-011	0.0312
1,00E-04	Não	47.6699	0.0156	Sim	1.0643E-010	0.0624
1,00E-05	Não	4.6360	0.0312	Sim	7.8978E-011	0.0624
1,00E-06	Sim	0.6008	0.0624	Sim	1.1651E-010	0.0312
1,00E-07	Sim	0.0419	0.0624	Sim	1.0354E-010	0.0624
1,00E-08	Sim	0.0036	0.0468	Sim	1.1807E-010	0.0624
1,00E-09	Sim	4.3222E-004	0.0624	Sim	7.1269E-011	0.0624
1,00E-10	Sim	3.6431E-005	0.0312	Sim	1.4653E-010	0.0468

Com este valor do raio sem considerar o ruído obtivemos uma diferença entre as imagens de $9,19E-11$ para o modelo linear e de $6,09E-11$ para o modelo linear recorrendo à SVD, ambos com um tempo de execução de 0,0624 segundos.

Sempre que somamos o ruído invertido, os resultados foram ligeiramente piores.

No gráfico seguinte, podemos analisar a influência que o ruído tem na recuperação da imagem, uma vez que, quando o introduzimos e não o retiramos posteriormente, os resultados sofrem graves perdas.

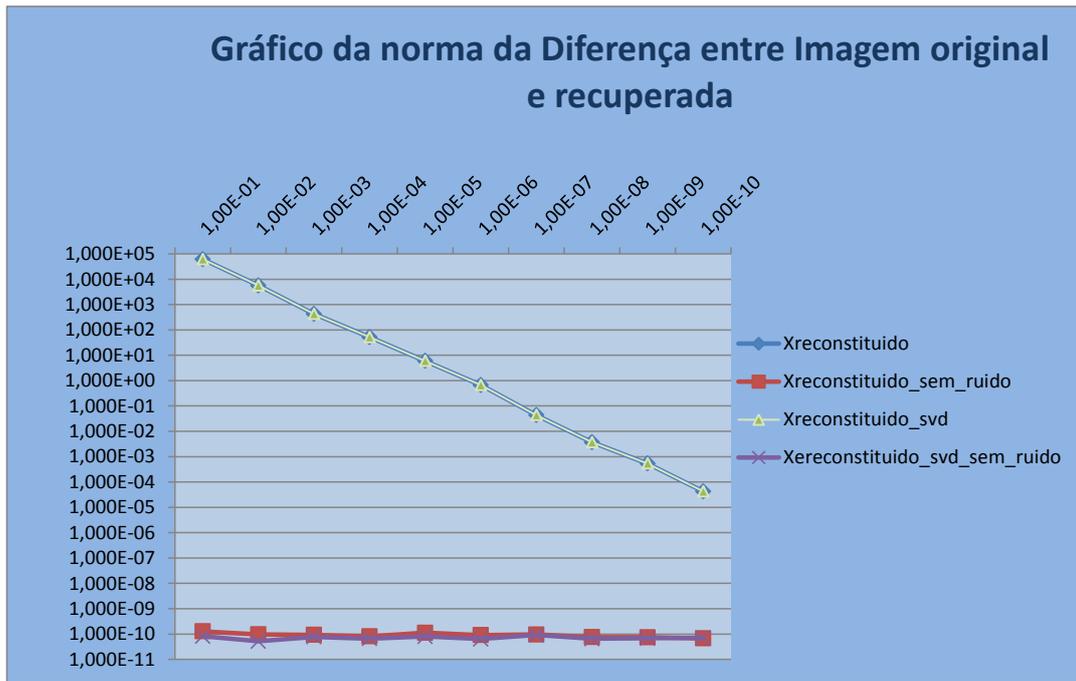


Figura 12 Gráfico da norma da diferença entre a imagem original e a imagem recuperada, introduzindo ou não o erro e usando ou não o erro, a partir de uma PSF de raio = 3 e condições fronteira “periodic”

Podemos verificar que com um valor do erro escalar inferior a 1×10^{-6} , a diferença entre as imagens não é visível, pelo que podemos assumir uma boa recuperação da imagem independentemente desse valor (figura 13)

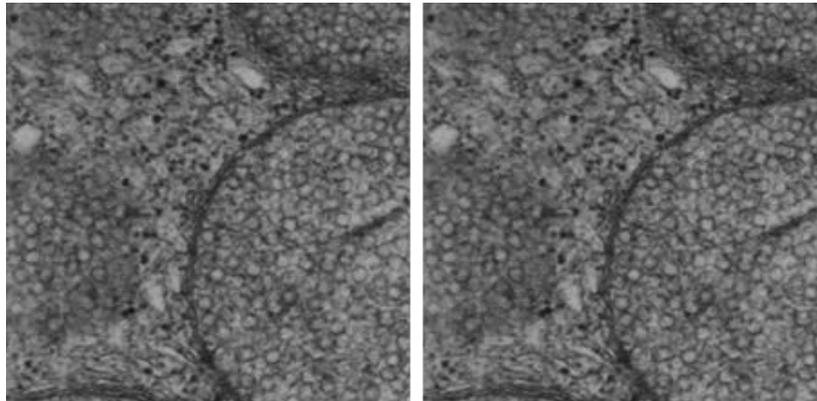


Figura 13 Imagem original (à esq.); Imagem recuperada sem a subtração do parâmetro ruído invertido (valor do erro 1×10^{-6}), para uma PSF de raio 3 e dimensão [350, 350]

O processo repetiu-se para valores de raio de 4, 5, 6, 7, 8, 10, 20, 50, 100, 175 e 180. O que se verificou ao longo destes testes foi uma ligeira perda de precisão à medida que aumentamos o valor do raio, que se pode medir com a norma da matriz diferença mas que

não vemos à vista desarmada. Outro aspeto a realçar tem que ver com o facto de se verificarem melhores resultados quando definimos um raio ímpar (figura 14).

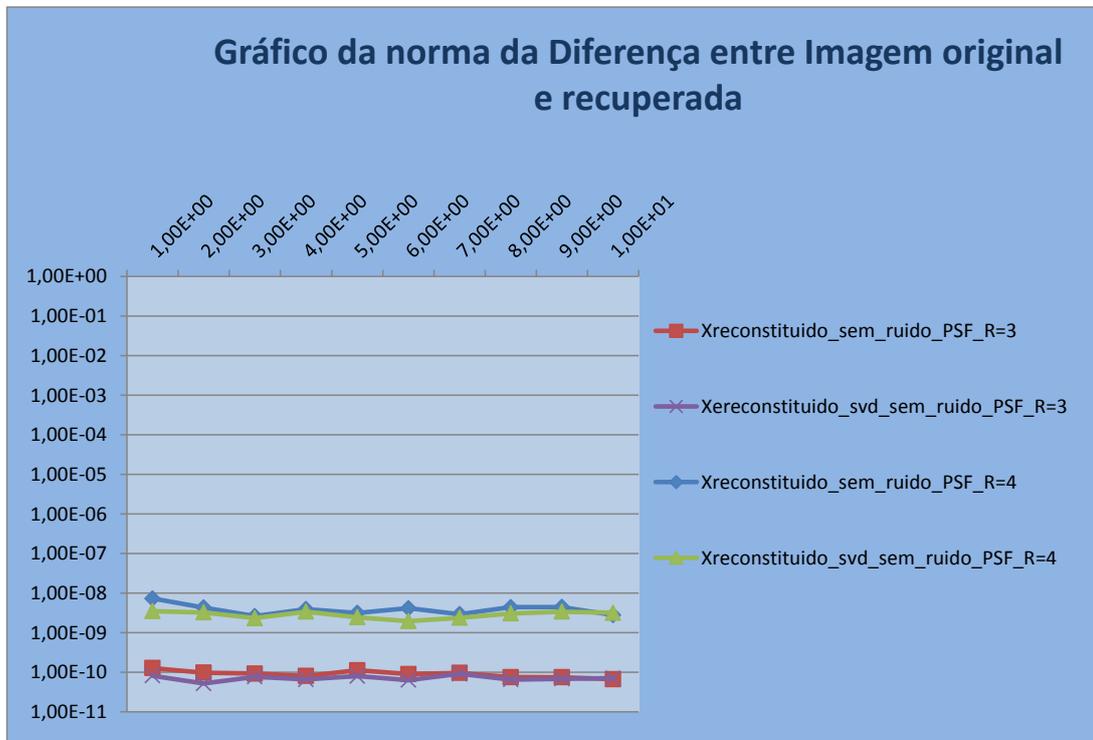


Figura 14 Resultados obtidos para a reconstituição da imagem usando uma PSF com diferentes valores de raio

A diferença de resultados quando utilizamos um raio igual a 175 e um raio igual a 180 é bastante significativa, uma vez que quando utilizamos o raio 180 já atingimos um valor superior a metade da dimensão da imagem e portanto, obtemos resultados cada vez menos satisfatórios até um ponto em que a imagem já não pode ser recuperada (figura 15).

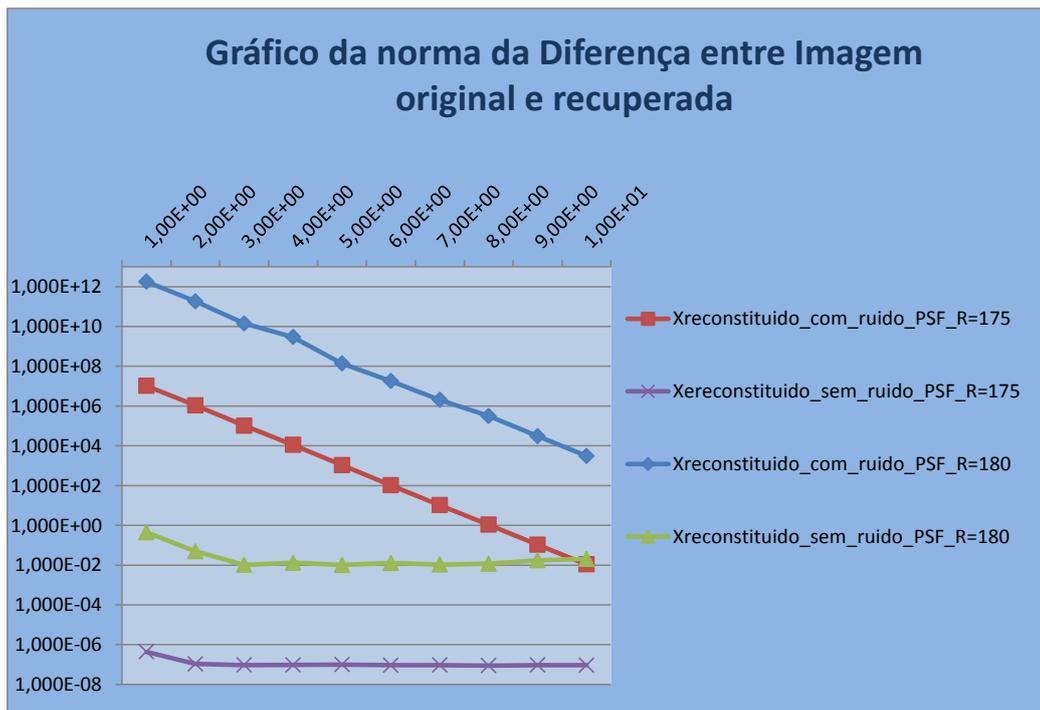


Figura 15 Gráfico da norma da diferença entre a imagem original e a recuperada, após desfocagem com PSF de raio 175 e 180

PSF de dimensão variável

De seguida, aplicamos à imagem uma PSF de dimensão variável, ou seja, atribuímos diferentes dimensões para a PSF e sobre cada uma delas aplicamos diferentes valores de raio.

Nesta etapa, verificamos novamente a inviabilidade do processo para um raio igual a 2, independentemente da dimensão da PSF.

Por exemplo, para uma dimensão da PSF de 5 por 5 *pixels* os resultados obtidos não permitiram recuperar a imagem, o que já seria de esperar pelo facto de o único valor possível de raio para esta dimensão de PSF ser igual a 2 e como já vimos este valor não funciona no processo.

Por outro lado, quando definimos uma PSF de 10 por 10 *pixels* os resultados melhoraram substancialmente.

Para um raio igual a 3, obtivemos resultados da ordem dos 10^{-11} e novamente, verificamos que a partir de um determinado valor de erro, nomeadamente 1×10^{-6} , conseguimos recuperar a imagem ainda que sem a subtrair esse valor ao resultado da imagem.

Continuamos os testes para dimensões de PSF de 20 por 20, 50 por 50, 100 por 100 e 300 por 300 *pixels*, variando o raio para cada uma (tabela).

Tabela 8 Resultados obtidos na reconstituição da imagem após uma desfocagem com uma PSF com condições fronteira “periodic”

Dimensão da PSF	Valor do Raio	Norma da diferença entre as imagens (com o ruído 1×10^{-10})	Recupera a imagem?	Norma da diferença entre as imagens (subtraindo o ruído)	Recupera a imagem?
[5,5]	2	2.1906e+021	Não	4.5337e+015	Não
	3	1.7755e+022	Não	2.0260e+016	Não
[10,10]	3	5.7550e-005	Sim	8.6987e-011	Sim
	4	0.0012	Sim	3.2255e-009	Sim
	5	3.6794e-006	Sim	7.9255e-012	Sim
[20,20]	3	5.1022e-005	Sim	6.2544e-011	Sim
	5	3.8777e-005	Sim	5.3112e-011	Sim
	10	2.2346e-005	Sim	4.5657e-011	Sim
[50,50]		4.7528e-005	Sim	7.4723e-011	Sim
	5	3.7291e-005	Sim	5.5490e-011	Sim
	10	0.0098	Sim	1.5982e-008	Sim
	25	6.9866e-004	Sim	1.9603e-009	Sim
[300,300]	3	7.6576e-005	Sim	9.3832e-011	Sim
	5	4.4346e-005	Sim	5.3672e-011	Sim
	50	0.1083	Sim	3.4155e-007	Sim
	100	0.3974	Sim	1.2600e-006	Sim
	150	0.7522	Sim	2.0534e-006	Sim

De uma forma geral, a prestação dos modelos foi semelhante aos resultados obtidos utilizando a PSF de dimensão [350,350], mantendo-se a tendência de resultados ligeiramente mais próximos do desejado quando recorremos a raios de dimensão ímpar e

verificando-se uma involução dos resultados quando o valor do raio atinge valores superiores a metade da dimensão da PSF.

Condições fronteira “zero”

Depois de realizarmos os diferentes testes mantendo como condição fronteira ‘periodic’ realizamos novos testes mudando esse parâmetro para ‘zero’.

A aplicação do modelo com esta nova condição fronteira resultou em algumas alterações nos resultados.

O primeiro aspecto a realçar deveu-se ao facto de conseguirmos resultados positivos usando um raio igual a 2, através de uma forte diminuição do condicionamento das matrizes A_c e A_r , que passou a valer aproximadamente 566.

Alcançámos uma correta reconstituição da imagem subtraindo o ruído invertido. Contudo, se o valor do erro que utilizamos no ruído for muito pequeno é possível recuperar a imagem com uma aproximação à imagem original de até 0,0659 mesmo sem subtrair o ruído invertido (Figura 16).

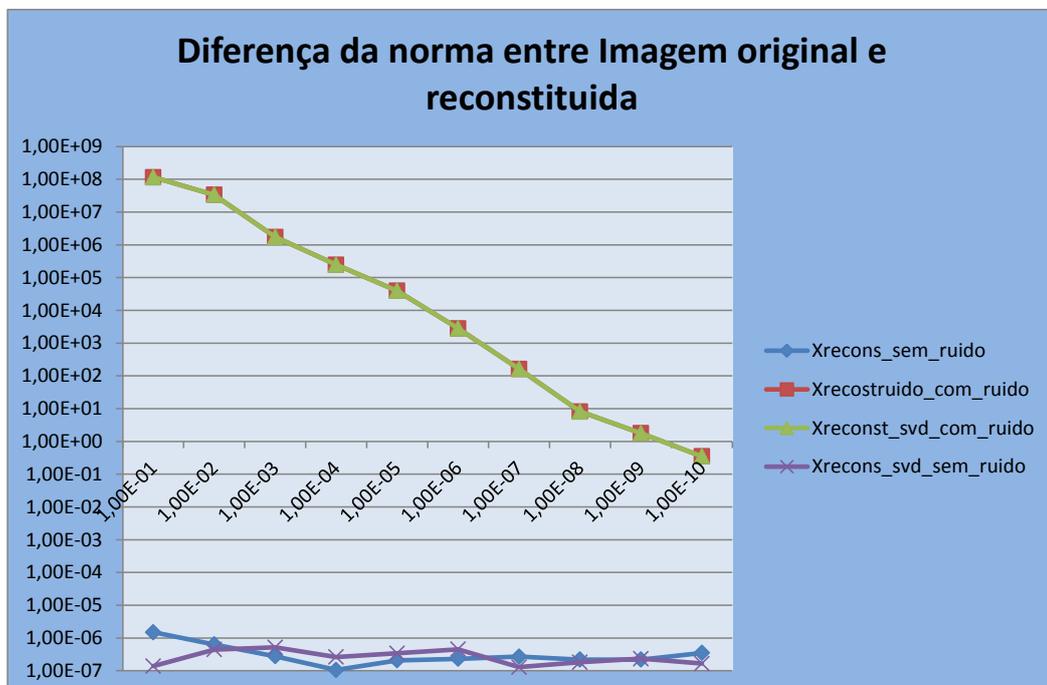


Figura 16 Gráfico da norma da diferença entre a imagem obtida e a original em função do valor erro contido no parâmetro ruído invertido, usando uma PSF de condição fronteira ‘zero’ e Raio = 2.

Outro aspeto que podemos observar de diferente nesta fase do trabalho refere-se à forma como a evolução da recuperação da imagem foi feita. Visualmente podemos observar um melhoramento da imagem do exterior para o interior, isto é, à medida que o valor do erro diminui, a imagem melhora de qualidade da periferia para o centro (Figura 17).



Figura 17 Imagem reconstituída utilizando uma PSF $=[350,350]$, Raio=2 e valores de erro de 1×10^{-2} , 1×10^{-5} , 1×10^{-6} , 1×10^{-10} , respectivamente.

Os resultados permitiram uma aproximação à imagem original da ordem dos 10^{-7} .

Para valores de raio superiores, nomeadamente, raio igual a 4 a imagem é reconstituída com uma precisão e uma rapidez maiores (figura 18).

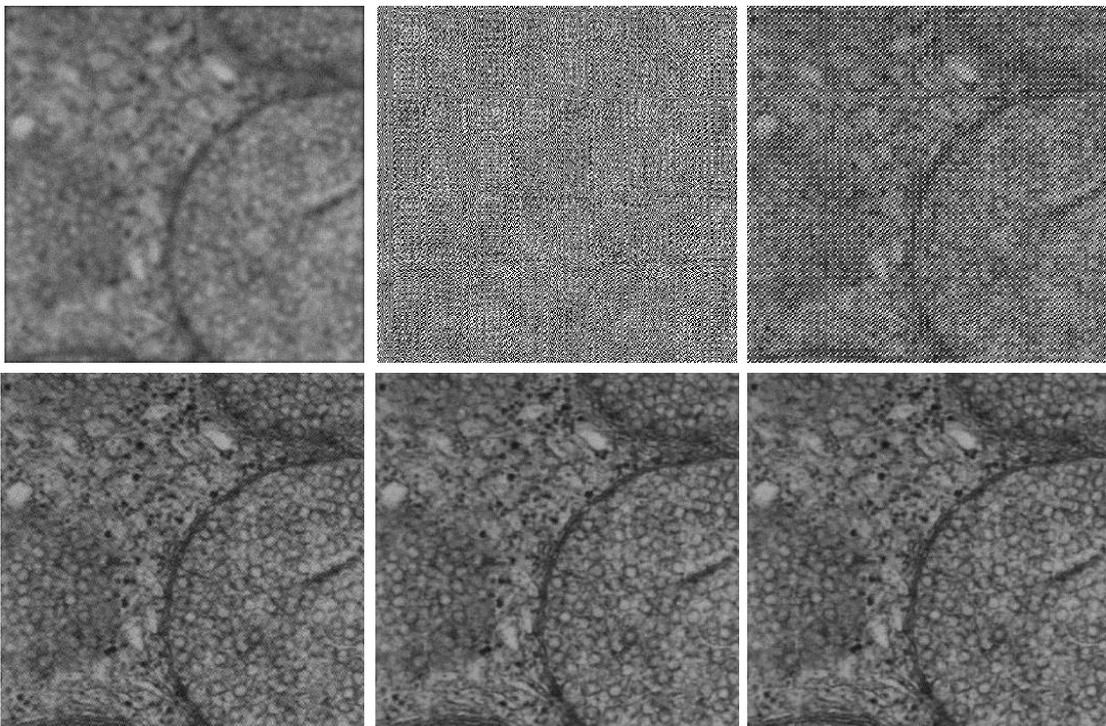


Figura 18 Imagem desfocada (a); Imagem reconstituída (PSF de raio 4 e erro 1×10^{-1}) (b); Imagem reconstituída (PSF de raio 4 e erro 1×10^{-5}) (c); Imagem reconstituída (PSF de raio 4 e erro 1×10^{-6}) (d) Imagem reconstituída (PSF de raio 4 e erro 1×10^{-10}) (e) Imagem Original (f)

Comparativamente com a experiência anterior, obtivemos com este modelo resultados ligeiramente inferiores uma vez que as melhores aproximações foram da ordem dos 10^{-9} ao passo que, anteriormente conseguimos resultados na ordem dos 10^{-11} , o que poderá traduzir uma melhor caracterização da imagem com as particularidades do primeiro modelo.

O uso da PSF de dimensões variáveis, por outro lado, também produziu bons resultados, tendo-se obtido melhores aproximações, da ordem dos 10^{-11} , para dimensões, designadamente de [10,10], [20,20], [50,50] e [75,75].

No que diz respeito ao tempo de cálculo, o modelo linear simples e o modelo linear adaptado ao uso da SVD funcionam de forma análoga, porque neste caso as dimensões são pequenas.

Resultados recorrendo à SVD truncada

O uso da SVD truncada requer que tenhamos muito cuidado na análise dos seus resultados.

Nesta fase do trabalho, começamos por definir alguns valores de k, número de valores singulares a usar.

Neste exemplo, o objetivo desta variante da SVD é tentar realizar o processo utilizando menos informação e como tal otimizar a sua rapidez definindo valores de k inferiores à dimensão da nossa imagem.

Começamos por definir a condição fronteira e variamos os outros parâmetros da PSF.

Os resultados do uso desta técnica foram inferiores em norma aos obtidos nos parágrafos anteriores embora em alguns casos até se tenha considerado, à vista, que houve uma melhoria no contraste da imagem.

Na Figura 19, podemos observar o resultado da reconstituição da imagem recorrendo ao uso da SVD truncada, com raio 3, dimensão da PSF [6,6] e $k=100$.

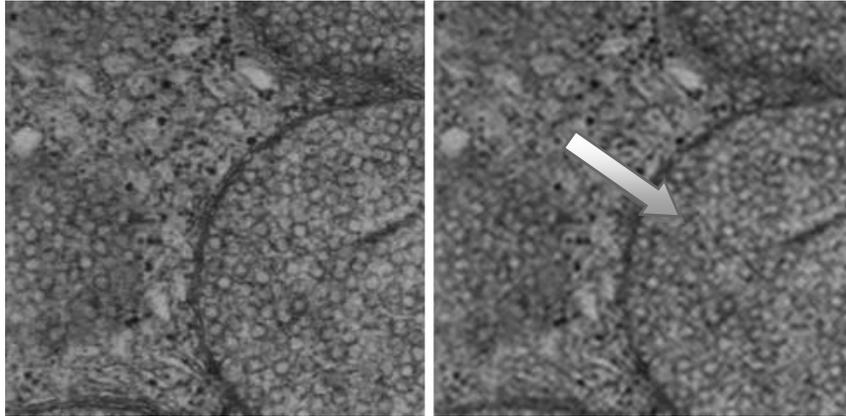


Figura 19 Imagem original (à esq.); Imagem recuperada recorrendo ao uso da SVD truncada, PSF de dimensão [6,6], Raio=3, Erro= 1×10^{-10} (à dir.)

A diferença entre as duas imagens foi de aproximadamente 1,7. A opinião de um especialista é que este é um bom resultado.

3.2.2. Imagem desfocada de mitocôndrias

Vamos agora considerar uma imagem (figura 21) que à partida já estava desfocada, e ver se o processo anterior permite melhorar a qualidade da imagem.

Neste caso, a nossa imagem já pode ser considerada a matriz B, referida no capítulo 2. Como já vimos, é necessário estarmos na posse das matrizes Ac e Ar para reconstruirmos a imagem, o que nesta situação não acontece.

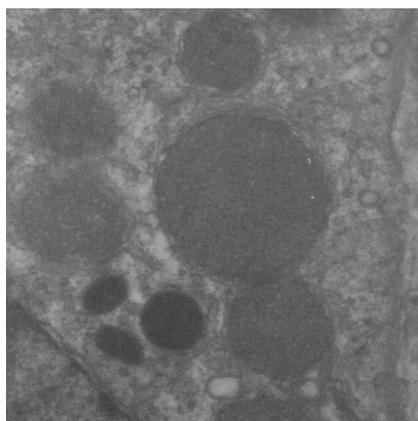


Figura 20 Imagem desfocada, [500x500]

Uma das abordagens que experimentamos foi considerar diferentes PSF's e tentar selecionar as matrizes, A_c e A_r , que melhor traduzem a desfocagem à qual a imagem esteve sujeita.

Não foi possível com esse processo melhorar a imagem, sob qualquer conjunto de parâmetros considerado (figura 21), mas tentando a mesma abordagem com a SVD truncada os resultados melhoraram mas, ainda assim, não foram muito satisfatórios, uma vez que de um ponto de vista médico, a reconstituição é muito artificial, apresentando um aspecto que não é habitual nem usável no meio clínico (figura 22).

Os melhores resultados para esta imagem, partindo da SVD truncada, foram obtidos utilizando raios de pequenas dimensões.

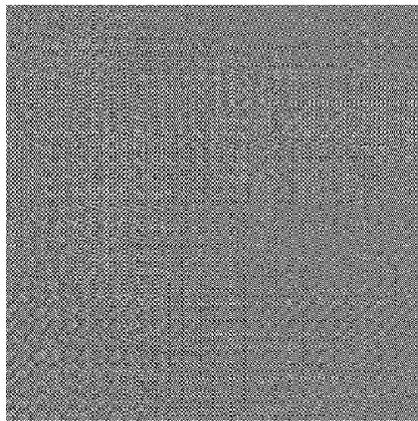


Figura 21 Imagem Reconstituída, com PSF de raio 3 e condições fronteira “periodic”

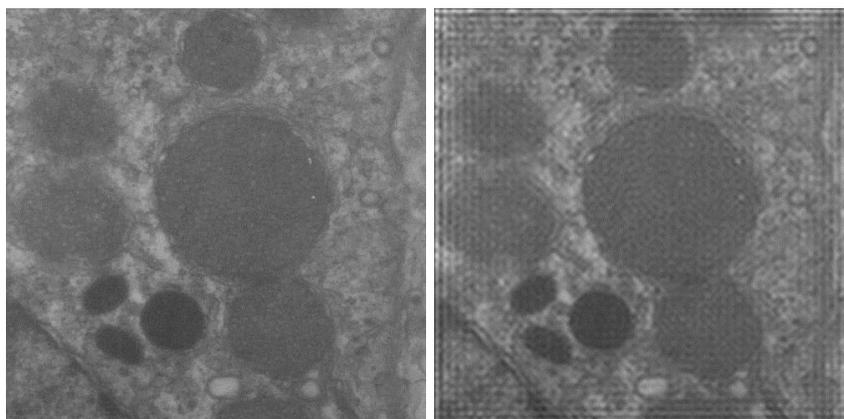


Figura 22 Imagem original (à esq.), Imagem reconstituída, a partir de um SVD truncada com $k=100$ (PSF de raio 3)

Capítulo 4. Decomposição em Valores Singulares

Como referimos anteriormente, o uso da SVD será abordado de forma mais detalhada neste capítulo.

Antes de enquadrarmos esta técnica naquele que é o nosso objecto de estudo é importante compreendermos não só a sua aplicabilidade mas também o seu funcionamento.

A decomposição em valores singulares é uma ferramenta da Álgebra Linear que consiste na factorização de uma matriz em três outras matrizes, uma das quais diagonal.

Para melhor compreendermos o funcionamento da SVD é importante começarmos por estudar o seu enquadramento geométrico pelo que, o faremos em seguida.

4.1. Interpretação geométrica da SVD

Embora a Decomposição em Valores Singulares se aplique a matrizes reais e complexas, a sua interpretação geométrica é melhor compreendida se apenas considerarmos o domínio real.

Consideremos como [2] uma esfera de raio unitário. A sua imagem, por uma transformação de uma qualquer matriz $m \times n$ é uma hiperelipse.

No domínio \mathbb{R}^m , uma hiperelipse pode ser descrita como uma superfície obtida por um alongamento de uma esfera de raio unitário, em determinadas direções ortogonais.

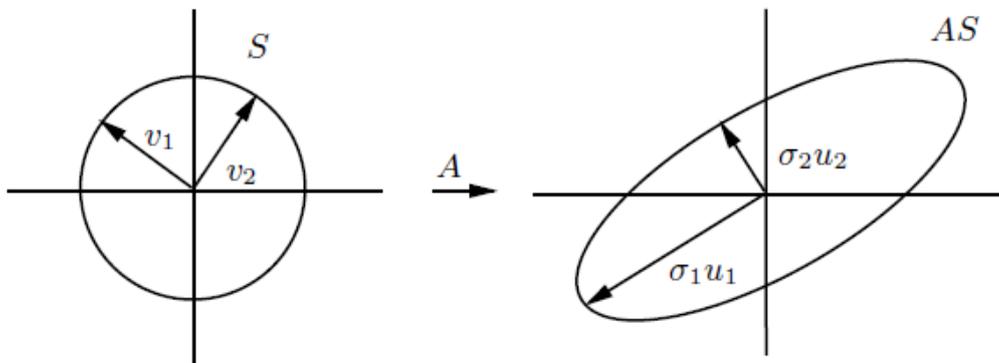


Figura 23 Decomposição em Valores Singulares de uma matriz 2x2 [1]

Os vetores $\{\sigma_i u_i\}$ são os semieixos principais da hiperelipse, com comprimentos $\sigma_1, \dots, \sigma_m$.

A esfera de raio unitário, usualmente definida como a esfera euclidiana no espaço n , ou seja, a esfera de norma 2, é representada por S . Assim, a hiperelipse AS resulta da imagem de S sob a transformação A (figura 23).

4.2. Definição de SVD

Seja A uma matriz real $m \times n$ (vamos supor que $m \geq n$ por uma questão de descrição mais simples) então existem 2 matrizes, U (matriz real $m \times m$) e V (matriz real $n \times n$), ortogonais ($U^T U = I_{m \times m}$ e $V^T V = I_{n \times n}$) tais que:

$$U^T AV = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (5)$$

Onde os σ_i são iguais ou maiores que zero e a matriz diagonal é de dimensão $m \times n$.

Os valores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ chamam-se valores singulares de A e costumam estar ordenados de forma decrescente $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ [2].

As colunas de U são os vetores singulares à esquerda e as colunas de V são os vetores singulares à direita de A.

Chama-se decomposição SVD de A à igualdade $A = U\Sigma V^*$, onde Σ é uma matriz diagonal com valores singulares iguais a $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

A partir de (5) vem

$$AV = U \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (6)$$

A relação entre os vetores singulares à direita e à esquerda pode ser descrita da seguinte forma:

$$Av_j = \sigma_j u_j, \quad 1 \leq j \leq n \quad (7)$$

Ou seja,

$$A = U\Sigma V^* \quad (8)$$

Sendo,

$$U \in \mathbb{C}^{m \times m} \text{ e unitária}$$

$$V \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ e unitária}$$

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ e diagonal}$$

A Demonstração da existência e unicidade subjacente à Decomposição em Valores Singulares pode ser encontrado em [2, capítulo 4].

Pode ainda descrever-se esta relação como uma equação matricial, a qual se denomina por Decomposição em Valores Singulares Reduzida:

Se em (8) considerarmos apenas as n primeiras colunas de U , formando a matriz \hat{U} , $m \times n$, vem

$$AV = \hat{U}\hat{\Sigma} \quad (9)$$

(mxm)(nxn) (mxn)(nxn)

Esta expressão pode ainda ser estruturada da seguinte forma:

$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^* \quad (10)$$

Embora esta forma simplificada da SVD tenha a sua utilidade, a verdade é que o recurso à sua forma completa ainda é muito importante.

As colunas de \hat{U} têm n vetores ortonormais de dimensão m num subespaço \mathbb{C}^m . A menos que $m = n$, os vetores não formam uma base de \mathbb{C}^m e, por conseguinte \hat{U} também não é uma matriz quadrada. No entanto, se acrescentarmos $m - n$ colunas ortonormais, então é possível converter \hat{U} numa matriz quadrada unitária. Se for feito um ajuste em \hat{U} , então também é necessário realizar um ajuste em $\hat{\Sigma}$ [2].

Uma das utilidades da decomposição em valores singulares é que revela a característica da matriz A : o número de elementos não nulos, r , de Σ é a característica da matriz. Esta característica é o número de linhas ou colunas da matriz linearmente independentes [3].

Outra utilidade da SVD refere-se ao cálculo da norma de uma matriz, cujo valor é dado pelo maior destes valores singulares [3].

4.3. Decomposição em Valores Singulares Truncada

O uso da SVD na sua forma completa será porventura a forma mais correta de proceder à reconstituição de uma imagem contudo, é possível recorrer a uma truncatura dos valores singulares e obter uma imagem relativamente próxima da original.

Numa primeira abordagem, a ideia de utilizar apenas parte da informação de uma matriz pode suscitar algumas dúvidas quanto à qualidade do resultado, ou seja, se nós, por exemplo, comprimirmos uma imagem não guardando a totalidade dos seus valores

singulares, esperamos que quando a formos analisar novamente, ela não terá a qualidade inicial.

A resposta a esta dúvida prende-se com um aspeto muito importante de uma matriz, a sua característica, cujo cálculo nos permite saber o número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz.

Uma imagem cuja informação foi truncada pode permanecer inalterada se nós considerarmos toda a informação relativa à sua característica. Como seria previsível, se nós realizarmos uma truncatura mais pequena, a nossa imagem perde detalhes. Senão vejamos.

Se tivermos uma matriz X , de dimensão N ($m \times n$), nós podemos definir um k , menor que a característica de matriz X , cuja reconstituição da imagem a partir de $X_{\text{reconst}} = A^{-1}b$, seja dada por [1]:

$$X_k = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \equiv A_k b$$

Sendo,

$$A_k = [v_1 \dots v_i] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \dots & \\ & & \sigma_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1^T \\ \dots \\ u_k^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T$$

Mais à frente neste trabalho, veremos algumas aplicações desta técnica.

4.4. Cálculo da Decomposição em Valores Singulares

Inicialmente, a SVD não era muito utilizada por problemas de precisão.

Os valores singulares estão relacionados com os valores próprios da matriz A^*A (sendo A de dimensão $m \times n$, com $m > n$).

Quando se aplica a SVD a A^*A (ou AA^* , se fosse $n > m$) existe sempre uma grande perda da precisão na determinação dos valores singulares mais pequenos [3].

O primeiro algoritmo, considerado estável, para o cálculo da SVD, foi desenvolvido por *Golub* e *Kahan*. Ambos sugeriram a redução da matriz à forma bidiagonal, com uma transformação *Householder* baseada no método de *Lanczos*, como o passo inicial do cálculo da SVD.

Neste método, os valores e os vetores singulares podem ser calculados como valores próprios e vetores próprios de uma determinada matriz tridiagonal, segundo um método baseado numa sequência de *Sturm*.

Golub e Reinsch sugeriram ainda uma adaptação do método de Factorização QR para o cálculo da matriz bidiagonal, ao invés da tridiagonal dada pelo método de Lanczos [3]. Embora existam outros algoritmos esta adaptação continua a ser, ainda hoje, a mais utilizada.

4.4.1. Cálculo da SVD a partir dos valores próprios

A SVD de uma matriz pode ser calculada a partir da Decomposição em Valores Próprios de uma matriz simétrica correspondente A^*A . Para entender este processo comecemos por considerar o seguinte teorema [3, capítulo 6]:

Teorema. Os valores singulares não-nulos de uma matriz A são as raízes quadradas dos valores próprios não-nulos de A^*A (ou AA^*).

Demonstração. Temos que

$$A^*A = (U\Sigma V^*)^*(U\Sigma V^*) = V\Sigma^*VU^*U\Sigma V^* = V\Sigma^2V^*$$

Então A^*A é semelhante a Σ^2 , e portanto possuem os mesmos n valores próprios. Sendo assim, é compreensível que os valores próprios da matriz diagonal Σ^2 sejam $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2$ com $n-r$ valores próprios nulos adicionais quando $n > r$ [2].

Considere-se agora uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m \geq n$, sendo a sua Decomposição em Valores Singulares dada por $A = U\Sigma V^*$. Sabe-se que $A^*A = V\Sigma^2V^*$. A SVD de A pode ser calculada partindo dos pressupostos do teorema anterior, ou seja (cf [2]):

1. Determina-se $C = A^*A$.
2. Recorrendo ao algoritmo QR, calculam-se os vetores próprios de C , que arrumamos nas colunas da matriz V e os valores próprios de C que arrumamos na diagonal de Λ , ou seja, $C = V\Lambda V^*$.
3. Considera-se Σ como sendo uma matriz, $m \times n$, que contém as raízes quadradas dos elementos de Λ .
4. Resolve-se o sistema $\Sigma^*U^* = V^*A^*$, equivalente a $U\Sigma = AV$, para obter U .

Apesar de se recorrer frequentemente a este tipo de algoritmo, a verdade é que este método acarreta um problema no que se refere à estabilidade, uma vez que a transformação de um problema de SVD num problema de Decomposição em Valores próprios faz com que a sensibilidade a perturbações aumente significativamente [4] [5].

4.4.2. Cálculo da SVD sem calcular A^*A e usando a Bidiagonalização de Golub Kahan

Uma forma alternativa de reduzir a SVD a um problema de Valores Próprios de uma matriz quadrada consiste em substituímos A por uma matriz quadrada com ela relacionada de maior dimensão.

Considere-se (segundo a referência 2) H uma matriz Hermítica (no caso de matrizes reais H será simétrica) de dimensão $2m \times 2m$, dada por:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Sendo, $A = U\Sigma V^* \Rightarrow AV = U\Sigma$ e $A^*U = V\Sigma^* = V\Sigma$. Estas igualdades podem ser rearranjadas para substituir em (11):

$$\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & V \\ U & -U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{bmatrix} \quad (12)$$

Esta igualdade corresponde justamente à Decomposição em Valores Próprios de H . Os valores singulares de A representam os valores absolutos dos valores próprios de H . Os vetores singulares de A podem ser obtidos a partir dos vetores próprios de H .

Vamos agora resolver o problema de valores próprios de (12) começando por o transformar num problema equivalente em que a matriz H é substituída por uma bidiagonal. A segunda etapa deste método consiste na aplicação do algoritmo QR. Em seguida, será explicada com maior detalhe cada uma das etapas.

Nesta opção 3.2 vamos fazer a bidiagonalização com o algoritmo descrito por Golub e Kahan [2].

4.4.2.1. 1ª etapa - Bidiagonalização

A decomposição SVD envolve o cálculo das matrizes U e V, tais que U^*AV é uma matriz bidiagonal.

O método conhecido como a Bidiagonalização de Golub-Kahan utiliza reflectores de Householder, à direita e à esquerda alternadamente. Cada reflector à esquerda, coloca a zeros uma coluna abaixo da diagonal, e cada reflector à direita coloca a zeros os elementos da linha à direita da supradiagonal correspondente [2].

O processo é exemplificado no esquema seguinte.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} & \xrightarrow{U_1^T} & \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \mathbf{0} & \times & \times & \times \end{bmatrix} & \xrightarrow{V_1} & \begin{bmatrix} \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \times & \times \end{bmatrix} \\
 A & & U_1^T A & & U_1^T AV_1 \\
 & & & & \\
 & & \xrightarrow{U_2^T} & & \xrightarrow{V_2} \\
 & & \begin{bmatrix} \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \times & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times \end{bmatrix} \\
 & & U_2^T U_1^T AV_1 & & U_2^T U_1^T AV_1 V_2 \\
 & & & & \\
 & & \xrightarrow{U_3^T} & & \xrightarrow{U_4^T} \\
 & & \begin{bmatrix} \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \times & \times & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \times & \times & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \times \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
 & & U_3^T U_2^T U_1^T AV_1 V_2 & & U_4^T U_3^T U_2^T U_1^T AV_1 V_2
 \end{array}$$

Figura 24 Bidiagonalização da matriz A [2]

A matriz U que procuramos é o produto dos reflectores U_i acima definidos, $U = U_1, \dots, U_n$. De modo análogo, temos que $V = V_1, \dots, V_{n-2}$.

É de realçar que o custo do algoritmo é dado por $4mn^2 - \frac{4}{3}n^3$ flops.

4.4.2.2. 2ª Fase - método QR

Considere-se B (ver [6]) a matriz bidiagonal obtida do passo anterior, retirando-se os elementos nulos, de forma que $U_B^* A V_B = [B, 0]^*$.

O problema da decomposição de A fica agora reduzido a uma Decomposição em Valores Singulares de B. Define-se d_1, d_2, \dots, d_n e f_1, f_2, \dots, f_{n-1} como sendo os elementos da diagonal e da supradiagonal de B, respectivamente. A aplicação ímplicita do algoritmo QR à matriz tridiagonal, $T = B^* B$, é apresentada em seguida.

O método QR para calcular os valores próprios de uma matriz B consiste em fazer uma factorização QR dessa matriz $T = Q_0 R_0$ e em seguida criar uma matriz semelhante $T_1 = R_0 Q_0$, que por sua vez será factorizada em QR, $T_1 = Q_1 R_1$ e assim sucessivamente até T_i convergir para uma matriz triangular cujos valores diagonais são os que pretendemos.

A convergência é acelerada se forem feitas translações de origem e, para manter a aritmética real, convém fazer as translações duplas e implícitas. Para isso, o primeiro passo consiste em calcular os valores próprios de:

$$T(n-1:n, n-1:n) = \begin{bmatrix} d_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 & d_{n-1} f_{n-1} \\ d_{n-1} f_{n-1} & d_n^2 + f_{n-1}^2 \end{bmatrix}$$

A formação explícita da matriz $T = B^T B$ não garante a estabilidade do processo. Assim, surge uma alternativa que consiste em aplicar as rotações de Givens directamente em B. O resultado desta alternativa é apresentado em seguida, conforme [6].

$$B G_1 = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ + & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}.$$

Note-se que, se não fosse pelo sinal +, a matriz seria bidiagonal. No entanto, para a reduzirmos a essa forma, basta determinarmos as rotações de Givens $U_1, V_2, U_2, \dots, V_{n-1}, U_{n-1}$. Todo o processo é seguidamente esquematizado [6].

$$\begin{array}{ccccccc}
B & \xrightarrow{G_1} & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ + & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} & \xrightarrow{U_1^*} & \begin{bmatrix} \times & \times & + & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} & \xrightarrow{V_2} & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & + & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \\
& & BG_1 & & U_1^* BG_1 & & U_1^* BG_1 V_2 \\
& \xrightarrow{U_2^*} & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & + \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} & \xrightarrow{V_3} & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & + & \times \end{bmatrix} & \xrightarrow{U_3^*} & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \\
& & U_2^* U_1^* BG_1 V_2 & & U_2^* U_1^* BG_1 V_2 V_3 & & U_3^* U_2^* U_1^* BG_1 V_2 V_3
\end{array}$$

Figura 25 Redução da matriz à forma bidiagonal recorrendo a rotações de Givens [2]

Uma condição essencial para que se possa aplicar este método pressupõe que a matriz tridiagonal seja irreduzível. Quando aparece um elemento nulo na subdiagonal, o problema original fica dividido em dois outros sub-problemas, que envolvem as matrizes B_1 e B_2 , de dimensão menor [6].

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} k \\ n - k \\ k \quad n - k \end{array}$$

Se $d_k = 0$ para algum $k < n$, coloca-se o elemento f_k a zero, através das rotações de Givens. Na figura seguinte, apresenta-se uma esquematização do processo, com rotações no plano das linhas (2,3), (2,4) e (2,5) [6].

$$\begin{array}{ccc}
B = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} & \xrightarrow{G(2,3,\theta_1)} & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \\
& \xrightarrow{G(2,4,\theta_2)} & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix} & \xrightarrow{G(2,5,\theta_3)} & \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}
\end{array}$$

Deste modo, os casos em que $f_k = 0$ ou $d_k = 0$, para um qualquer k , são facilmente tratados [6].

4.4.3. Cálculo da SVD sem calcular A^*A e usando a Bidiagonalização de Lawson-Hanson-Chan

Uma outra alternativa para o processo consiste em utilizar a Bidiagonalização Lawson-Hanson-Chan (ou LHC) que pressupõe o uso da factorização QR de A , $A=QR$, onde Q , $m \times m$, é uma matriz ortogonal (se a fosse complexa seria uma matriz unitária) e R , $m \times n$, é uma matriz triangular no sentido de que todos os elementos abaixo da diagonal são nulos. Seguidamente recorre-se à bidiagonalização de R .

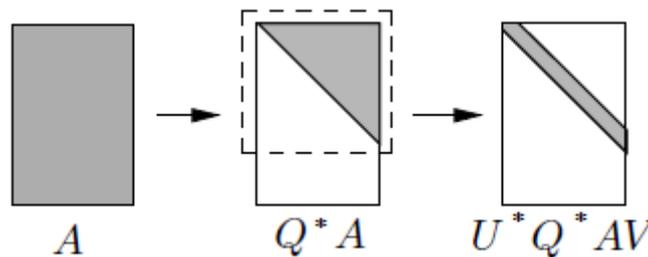


Figura 26 Bidiagonalização LHC [2]

O custo da factorização QR é de $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$ flops e a bidiagonalização de Golub-Kahan requer $4nn^2 - \frac{4}{3}n^3 = \frac{8}{3}n^3$ flops. Assim, o custo geral do processo é de $2mn^2 + 2n^3$ flops [2].

A LHC só é um processo vantajoso quando requer $4nn^2 - \frac{4}{3}n^3 > 2mn^2 + 2n^3$, ou seja para $m > \frac{5}{3}n$ [2].

4.4.3.1. 2ª Fase - método QR

Uma vez que a segunda fase do processo de Decomposição em Valores Singulares é comum para todos os métodos realizados a partir a Bidiagonalização da matriz, também nesta variante recorreremos ao método QR como segunda fase do processo.

4.4.4. Cálculo da SVD sem calcular A^*A e usando a Bidiagonalização em 3 passos

É possível utilizar ainda um terceiro processo de Bidiagonalização. Este processo generaliza a ideia do LHC, mas possui um menor custo para qualquer $m > n$, e é chamado de Bidiagonalização em 3 passos (ver figura 27).

O primeiro passo deste processo consiste em aplicar a Bidiagonalização de Golub-Kahan. Posteriormente é aplicado o LHC. Considera-se $r = (m - k)/(n - k)$, como sendo a razão entre o número de linhas não-diagonalizáveis e o número de colunas do passo k . Em cada iteração, é calculado o r e quando $r = 2$ utiliza-se o LHC. Deste modo, o custo do processo é dado por $4mn^2 - \frac{4}{3}n^3 - \frac{2}{3}(m - n)^3$. Não sendo uma diferença avassaladora ainda assim, é considerável para $n < m < 2n$ [2].

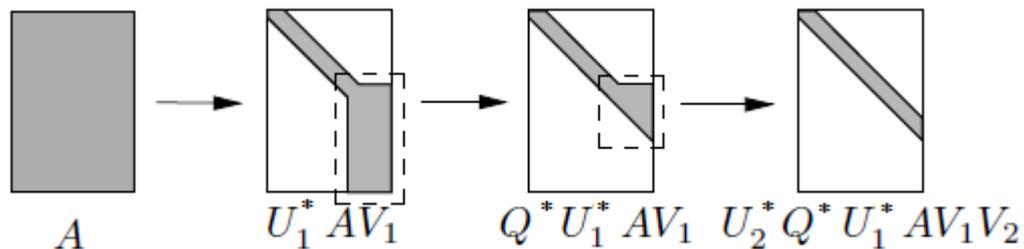


Figura 27 Bidiagonalização em 3 passos [2]

4.4.4.1. 2ª Fase - método QR

Também neste método, a segunda fase do processo é feita recorrendo ao método QR.

4.4.5. Comparação entre os diferentes métodos de Bidiagonalização

Os 3 métodos acima referidos para a redução da matriz A à sua forma Bidiagonal apresentam diferentes custos. Em seguida é apresentado um quadro síntese para esse mesmo custo.

Tabela 9. Comparação entre as diferentes formas de Bidiagonalização, relativamente aos custos do processo

Método de Bidiagonalização	Custo (número de operações requerido)
Golub-Kahan	$\approx 4mn^2 - 4/3n^3$
LHC	$\approx 2mn^2 + 2n^3$
3 Passos	$\approx 4mn^2 - 4/3n^3 - 2/3(m-n)^3$

No gráfico seguinte é apresentada a relação entre os diferentes métodos.

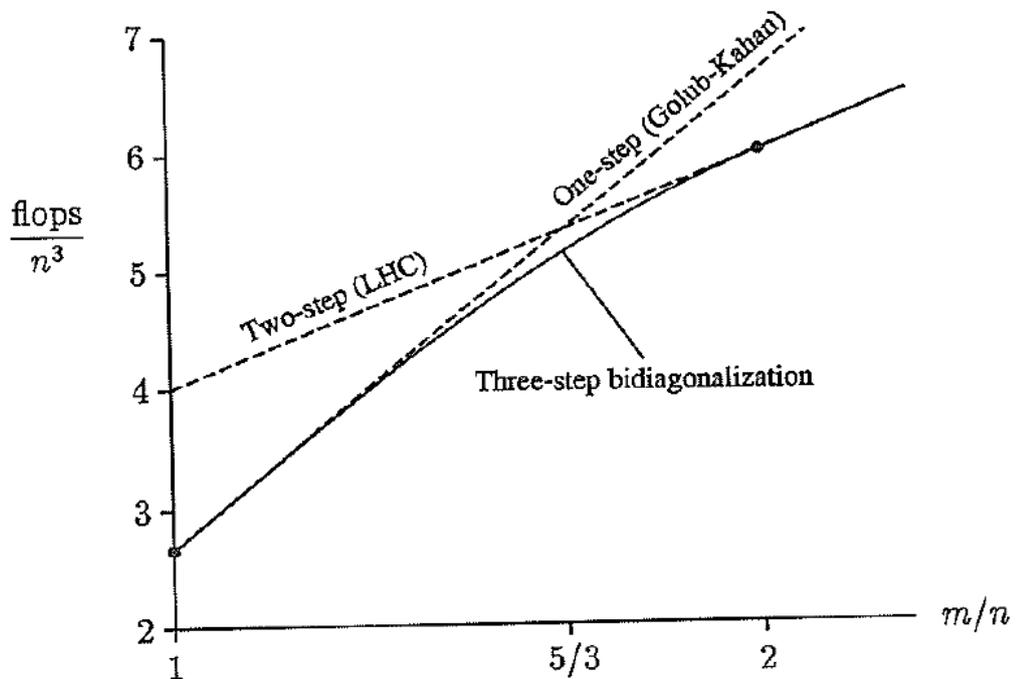


Figura 28 Gráfico de comparação entre os 3 processos de Bidiagonalização [2]

O gráfico apresentado permite-nos observar a evolução das diferentes variantes de Bidiagonalização, uma vez que, pelas suas especificidades, cada um dos métodos apresenta comportamentos mais efetivos em determinado tipo de matrizes.

Pelo que podemos analisar, o método de Bidiagonalização em três passos traduz uma melhoria significativa para matrizes em que $n < m < 2n$, sendo que para os intervalos imediatamente antes e depois, existe um equilíbrio de performance entre este método e os de Golub-Kahan e LHC, respetivamente.

4.5. Aplicações da Decomposição em Valores Singulares

A Decomposição em Valores Singulares é a base dos mais precisos métodos para a resolução dos mais variados problemas. De entre estes, destacam-se os que envolvam problemas de mínimos quadrados, determinação da característica da matriz, do espaço- - imagem ($\mathcal{R}(\cdot)$) e do espaço nulo ($\mathcal{N}(\cdot)$), para além dos problemas que envolvam normas euclidianas ($\|\cdot\|$) [3].

Outras aplicações da SVD ressaltam do facto de esta técnica permitir o cálculo da pseudoinversa das matrizes, necessária em problemas de sistemas lineares e ainda pelo facto de permitir a obtenção das componentes principais das matrizes (PCA).

A decomposição em valores singulares tem sido, ainda, muito aplicada como forma de minimizar erros computacionais em matrizes de grande dimensão.

A área dos sistemas multivariáveis utiliza, recorrentemente, a SVD, uma vez que é necessário calcular a matriz inversa da função de transferência. [3]

4.5.1. Aplicações da SVD no tratamento de Imagem

Uma vez que os dados relativos à imagem digital estão descritos na forma matricial, existe um grande número de metodologias matemáticas que podem ser muito úteis no que toca à análise e manipulação destas imagens, inclusivamente a Decomposição em Valores Singulares.

A SVD tem especial destaque em técnicas de recuperação de imagem, filtragem de ruído, Reconhecimento de padrões e compressão de imagens [7].

4.5.1.1. A SVD em Compressão de Imagem

A compressão de imagem procura fazer a representação de uma imagem utilizando, contudo, um menor volume de informação, ou seja, existe uma remoção da informação redundante.

Os mecanismos de compressão de imagem baseiam-se em três tipos de redundância [8]:

1) Codificação - a redundância é introduzida pela forma como a imagem está representada;

2) inter-*pixel* – a imagem apresenta repetição de padrões de *pixels*

3) psico-visual – a imagem possui informação cuja relevância visual não é significativa.

Uma das propriedades da SVD consiste no facto de a característica de uma matriz A ser igual ao número de valores singulares não-nulos dessa matriz.

De uma forma geral, com à medida que se progride no valor do índice u em Σ , os valores singulares vão sendo mais pequenos. Esta propriedade da SVD é muito útil, uma vez que permite a redução de ruído e a compressão dos dados da matriz, através da eliminação dos valores singulares menores ou dos valores da característica mais elevados [8].

A Decomposição em Valores Singulares da imagem, não se traduz numa compressão real da imagem mas permite escolher a parte da matriz A mais importante para a representação. Os primeiros valores singulares traduzem uma grande quantidade de informação acerca da imagem. Desta forma, com um número reduzido de valores singulares, é possível representar uma imagem com muito poucas diferenças, relativamente à original [9].

Um aplicação da SVD para a compressão de imagem é dada em [8]. Para a avaliação da performance da SVD aplicada às imagens, o autor determinou uma medida da qualidade da imagem resultante e um fator de compressão.

A compressão e conseqente restauro da imagem foram feitos utilizando diferentes quantidades de valores singulares, por exemplo, 10, 20 e 40.

Os resultados permitiram ao autor constatar que o melhor quociente de compressão é obtido quando se recorre a um menor número de valores singulares, o que faz sentido, visto que quanto menos informação se guarda menor é o espaço necessário.

A medida do erro que permite avaliar a qualidade do restauro da imagem teve uma evolução inversamente proporcional ao quociente de compressão uma vez que a imagem foi melhor restaurada quanto maior o número de valores singulares utilizados.

No artigo, considerou-se que com 25 valores singulares, o restauro da imagem já permitia uma qualidade visual suficientemente boa para se perceber o conteúdo da imagem.

Como vantagens e desvantagens da aplicação da SVD para a compressão de imagem, o autor salientou o facto de a ser um método robusto, de fácil aplicação que funciona bastantes bem em ambientes mais condicionados.

4.5.1.2. *SVD em Reconhecimento facial*

O rosto humano, pela multiplicidade de expressões que apresenta, é e continuará a ser um dos grandes desafios dos artistas [10].

Nos últimos tempos, o estudo do rosto tem vindo a despertar o interesse dos mais diversos investigadores [8].

A compressão, a representação e o reconhecimento facial são as vertentes mais exploradas pelas áreas da visão computacional, redes neuronais e reconhecimento de padrões [8].

O Reconhecimento facial envolve um conjunto diversificado de aplicações, entre elas: controlo de acesso baseado no reconhecimento facial, interacção Homem-Máquina, Protecção de informação e reforço da lei (através da identificação de suspeitos) [10].

Um dos problemas que qualquer sistema de reconhecimento facial enfrenta deve-se ao facto de a mesma face poder ser apresentada segundo imagens que variam no tamanho, posição, orientação, condições de luminosidade e na própria expressão facial. Daí que a comparação entre imagens de uma mesma pessoa se possa tornar bastante difícil. [8]

O foco de trabalho do Reconhecimento facial tem incidido na identificação de características individuais. Olhos, nariz, boca, o contorno da cabeça e as dimensões e relações entre estas variáveis têm sido muito estudados.

Segundo [8] a aplicação da SVD resulta no tratamento de um conjunto de rostos conhecidos. Os rostos são tratados como vetores de um subespaço, denominado “face space”, gerado por um conjunto de “basefaces”.

A SVD funciona de forma semelhante à Análise das Componentes Principais (PCA), ou seja, o reconhecimento é feito através da projecção de uma imagem no espaço do rosto, posteriormente faz-se a classificação do rosto, comparando as suas coordenadas

(localização) no espaço da cara com as coordenadas (posições) dos rostos conhecidos. A utilização da SVD, no entanto, traduz melhores resultados uma vez que apresenta melhores propriedades numéricas.

Na continuação do seu estudo da SVD, o autor de [8] também procedeu à utilização desta técnica para o Reconhecimento facial.

Neste trabalho, começa por redefinir-se a matriz A como um conjunto de rostos para treino. Cada imagem individual tem dimensão $m \times n = M \text{ pixels}$ e é representada por um vetor coluna f_i . Um conjunto de treino S com N imagens de rostos singulares é representado pelo conjunto de vetores f_i . A média das imagens do conjunto, subtraídas ao conjunto de imagens originais permite obter uma nova matriz $M \times N$. Esta nova matriz é a matriz A .

Se os vetores $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ formarem bases ortonormais para o contradomínio de A , este designa-se por subespaço de face.

De seguida, considerou-se uma matriz X composta pelos vetores posição das imagens f no subespaço face. Esta matriz resulta de uma projeção de $(f - \bar{f})$ para o conjunto da matriz u_i . O vetor de coordenadas permitiu ao autor determinar quais as imagens de treino que melhor definem a face f , através do cálculo de uma distância mínima, ϵ_i , que é comparada com um valor de *Threshold* previamente estabelecido. Consoante essa distância seja menor ou maior do que o *threshold*, f é considerado como um rosto ou não rosto (desconhecido), respetivamente.

Para o teste do método considerou-se um conjunto de treino de dimensões $M = 92 \times 112 = 10304$ e um total de 20 pessoas, cuja imagem do rosto foi adquirida segundo uma visão frontal, com a cabeça inclinada e com diferentes expressões.

Relativamente a esta aplicação, o autor considerou que na maioria das aplicações um número de ‘base-faces’ menor do que a característica da matriz é suficiente para a identificação, o que permite reduzir consideravelmente a quantidade de processamento requerida.

Os resultados permitiram destacar uma importante utilidade dos vetores singulares na reconstrução da imagem original.

Capítulo 5. Conclusão e Trabalho

Futuro

Ao longo deste trabalho foi possível compreender alguns dos conceitos inerentes ao estudo dos processos de desfocagem e reconstituição de uma imagem e, como tal, compreender a necessidade de possuir informação sobre a causa da desfocagem.

Artificialmente é possível desfocarmos e reconstituirmos uma imagem com um elevado grau precisão, uma vez que podemos determinar as matrizes A_c e A_r , responsáveis pela desfocagem.

Existem diferentes metodologias que nos permitem desfocar uma imagem, pelo que é possível tentar simular algumas das desfocagens mais comuns na aquisição de imagens, por exemplo, deslocamentos seguindo uma linha, turbulência atmosférica, desfocagem devida ao sistema de entes da máquina fotográfica, ou outro aparelho de aquisição de

imagem, que aqui chamamos desfocagem propriamente dita e foi a que usamos mais e ocorre quando utilizamos o microscópio eletrônico.

O processo de desfocagem engloba um conjunto de variáveis que são definidas de acordo com a situação que queremos simular e que requerem algum conhecimento especializado do modo como as imagens foram adquiridas.

Relativamente a algumas imagens médicas de mitocôndrias conseguimos melhorar imagens desfocadas e determinar alguns valores aconselháveis para o raio da matriz da PSF (Point Source Function) que traduz o processo de desfocagem bem como dimensões desta mesma matriz que permitem uma reconstituição ótima da imagem. Determinamos também valores do raio que não vale a pena tentar usar porque dão sistematicamente maus resultados.

O uso da SVD truncada como ferramenta alternativa para resolução do modelo linear usado no tratamento de imagens desfocadas é importante no sentido de permitir reduzir a dimensão dos problemas e permite também reconstituir a imagem com boa qualidade e em menos tempo quando as dimensões são grandes, no entanto em alguns casos não foi possível recuperar uma boa imagem e o uso da SVD truncada embora tenha produzido uma imagem reconstruída onde nos parecia ver melhor que na imagem original os organelos, quando analisadas por um especialista foram reprovadas e consideradas artificiais.

Previamente tinha sido feito um estudo aprofundado da SVD (Singular Value Decomposition) que permitiu concluir que a SVD feita a partir de duas fases, Bidiagonalização e método QR, é uma forma mais eficiente de proceder à determinação dos valores singulares de uma matriz, do que, como se considera por vezes, o uso de formas simplicistas para o cálculo dos valores singulares. É o caso da decomposição em valores próprios, de $A^T A$, que provoca uma grande variação na estabilidade dos resultados, uma vez que quando estamos perante matrizes cujos valores singulares são muito pequenos ou próximos, esta técnica sofre uma grande perda de precisão.

Este trabalho permitiu-nos perceber que o processo de Desfocagem e Reconstituição de uma Imagem é um tema com muito interesse e utilidade em diferentes áreas e muito vasto, mas que por isso mesmo ainda necessita de muita investigação e trabalho.

Como trabalho futuro vamos criar novas “functions”, ligadas à construção das matrizes A_r e A_c , de alteração das linhas e colunas da imagem verdadeira para representar

a desfocada, no modelo linear, tendo em conta o seu número de condicionamento, de forma a controlarmos melhor o processo de desfocagem e reconstituição.

Prevemos ainda o tratamento de outras imagens científicas que possam ter sofrido desfocagens por deslocamento do aparelho de aquisição das mesmas segundo uma linha, horizontal, vertical ou outra.

Referências Bibliográficas

- [1] Hansen, C., Nagy, J. G., O’Leary, D. P.: Deblurring Images: Matrices, Spectra and Filtering, Siam, 2006
- [2] Trefethen, L. N., Bau III, D.: Numerical Linear Algebra, Siam, 1997
- [3] Björck, Å.: Numerical Methods For Least Squares Problems, Siam, 1996
- [4] Stewart, G. W., Matrix Algorithms, Vol. II: Eigensystems, Siam, 2001
- [5] Figueiredo, Inês F., Monografia: Técnicas de Cálculo da Decomposição em Valores singulares SVD, 2011
- [6] Golub, G H., Van Loan, C. F., Matrix Computations, 3ª Edição, Siam, 1996
- [7] N. Muller, L. M., B. M. Herbst.: Singular value decomposition, eigenfaces, and 3D reconstructions, SIAM Review, 46, p. 518-545, 2004.
- [8] Ashin, R., Morimoto, A., Nagase, M., Vaillancourt, R., Image Compression with Multiresolution Singular Value Decomposition and other methods, Mathematical and Computer Modelling 41 (2005) 773-779, disponível online em <http://www.sciencedirect.com/>.
- [9] Cao, Lijie, Singular Value Decomposition Applied To digital Image Processing, Division of Computing Studies, 85212, Arizona State University Polytechnic Campus, Arizona
- [10] Lu, Jiwen, Zhao, Yongwei, Dominant value decomposition representation for face recognition, (2009), disponível online em www.elsevier.com/locate/sigpro

Apêndice A – Programas e Scripts

A componente experimental deste trabalho foi toda ela realizada recorrendo ao *software* MatLab® versão 2009.

Os códigos apresentados foram elaborados com recurso à referência [1].

A-1. Implementação de um processo de Desfocagem e posterior Recuperação da Imagem

```
%% Ler imagem

I=imread('mitocBem1quarto.JPG');
X=rgb2gray(I);
X=im2double(X);
figure (1), imshow(X), title ('imagem original preto-branco')
[m,n]=size(X);

%% construir a PSF

for R=3:150; % raio da psf

    for dim1=350; % dimensão da psf

        dim=[dim1,dim1];
        [PSF, center] = psfDefocus(dim, R); % tipo de desfocagem

        P=zeros(m,n);
        P(1:dim1, 1:dim1)=PSF;
        BC='periodic'; % tipo de condição fronteira

        % Decomposição de Kronecker para obtenção das matrizes Ac e Ar
        [Ar, Ac] = kronDecomp(P, center, BC);

        % Determinação do condicionamento de Ac e Ar
        cond(Ar)
        cond(Ac)

        % criação da matriz desfocada
        Be= Ac*X*Ar';
        figure (2), imshow(Be), title ('imagem desfocada sem adição ruido')

        % recuperar a imagem sem adição ruido
        t=cputime();

        Xreconstruido= Ac\Be/Ar';

        tempo=cputime()-t

        figure (3), imshow(Xreconstruido), title ('imagem desfocada sem adição
        ruido')
```

```

% introdução do parâmetro ruído invertido
for nk=1:10; % valor erro

noise=1*10^(-nk)
E=noise*rand(m,n);

B=Be+ E; % imagem desfocada com adição de ruído

figure (4), imshow(B), title ('imagem desfocada + ruído')

t=cputime();

Xreconstruido_com_ruído= Ac\B/Ar'; % imagem recuperada sem a subtração do
ruído

tempo=cputime()-t

figure (5), imshow(Xreconstruido_com_ruído), title ('imagem recuperada
sem adição ruído')

t=cputime();

einv=Ac\E/Ar';

% recuperar a imagem com adição de ruído

Xreconstruido_sem_ruído=Xreconstruido_com_ruído-einv;

tempo=cputime()-t

figure (6), imshow(Xreconstruido_sem_ruído), title ('imagem recuperada
com adição ruído')

% recorrendo à svd
[Uc Sc Vc]=svd(Ac);
val_sing=diag(Sc);
[Ur Sr Vr]=svd(Ar);
val_singr=diag(Sr);

S1=diag(Sc)*diag(Sr)';

t=cputime();

% imagem recuperada, recorrendo à SVD, sem adição e sem subtração erro

Xreconstruido_svd =Vc*((Uc'*Be*Ur)./S1)*Vr';

tempo_svd=cputime()-t

figure (7), imshow(Xreconstruido_svd), title ('imagem recuperada sem
adição ruído')

t=cputime();

% imagem recuperada, recorrendo à SVD, sem subtração erro

```

```

Xreconstruido_com_ruido_svd =Vc*((Uc'*B*Ur)./S1)*Vr';

tempo_svd=cputime()-t

figure(8), imshow(Xreconstruido_com_ruido_svd), title('imagem
recuperada sem adiçao ruido e sem subtraçao')

t=cputime();

Xreconstruido_sem_ruido_svd =Vc*((Uc'*B*Ur)./S1)*Vr'-
Vc*((Uc'*E*Ur)./S1)*Vr';

tempo_svd=cputime()-t
figure(9), imshow(Xreconstruido_sem_ruido_svd), title('imagem
recuperada com adiçao ruido')

display('norma X- Xreconstruido')
norm(X- Xreconstruido)
display('norma X- Xreconstruido_com_ruido')
norm(X- Xreconstruido_com_ruido)
display('norma X- Xreconstruido_sem_ruido')
norm(X- Xreconstruido_sem_ruido)
display('norma X- Xreconstruido_svd ')
norm(X- Xreconstruido_svd)
display('norma X- Xreconstruido_sem_ruido_svd ')
norm(X- Xreconstruido_sem_ruido_svd)
display('norma X- Xreconstruido_com_ruido_svd ')
norm(X- Xreconstruido_com_ruido_svd)

    pause
end

    end
end

```

A-2. Para a reconstrução das imagens recorrendo à SVD truncada foi usado o seguinte script (com a devida atualização dos parâmetros) :

```

%% ler imagem

I=imread('mitocBem1quarto.JPG');
X=rgb2gray(I);
X=im2double(X);
X=X(1:350, 1:350);

%% Construir PSF

[m,n]=size(X);

```

```

for R=3;
    for dim1=6;

dim=[dim1,dim1];

[PSF, center] = psfDefocus(dim, R);

P=zeros(m,n); P(1:dim1, 1:dim1)=PSF;

BC='periodic';
[Ar, Ac] = kronDecomp(P, center, BC);

Be= Ac*X*Ar';

[Uc Sc Vc]=svd(Ac);
val_sing=diag(Sc);
[Ur Sr Vr]=svd(Ar);
val_singr=diag(Sr);

for k=100;
for nk=1:10;

noise=1*10^(-nk)
E=noise*rand(m,n);

S=diag(Sc(1:k, 1:k))*diag(Sr(1:k, 1:k))';

B=Be+ E;

Xk=Vc(1:m, 1:k)*((Uc(1:m, 1:k)'*B*Ur(1:n, 1:k))./S)*Vr(1:n, 1:k)'-Vc(1:m,
1:k)*((Uc(1:m, 1:k)'*E*Ur(1:n, 1:k))./S)*Vr(1:n, 1:k)';

imagesc(Xk); axis image; colormap(gray)
pause

norm(X-Xk)
end
end
end
end
end

```

Apêndice B – Tabelas de Resultados

B-1. Alguns dos resultados obtidos, aplicando Processo de Desfocagem e Recuperação da Imagem, para a imagem “Joaninha”

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst	Tempo(s)	Xreconst_com_ruido	Tempo(s)	Xreconst_sem_ruido	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xreconst	Xreconst_com_ruido	Xreconst_sem_ruido
DIM da Imagem	2	1,94E+05	1,94E+05	1,00E-01	Sim	1,87E-01	Não	1,56E-01	Sim	1,40E-01	2,79E-06	6,96E+08	3,06E-05
original [500,500]				1,00E-02	\	\	Não	1,56E-01	Sim	1,56E-01	\	4,29E+07	3,31E-06
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	1,25E-01	Sim	1,56E-01	\	3,77E+06	9,04E-07
zero'				1,00E-04	\	\	Não	1,56E-01	Sim	1,56E-01	\	1,31E+06	1,63E-06
				1,00E-05	\	\	Não	1,56E-01	Sim	1,56E-01	\	4,53E+04	8,22E-07
				1,00E-06	\	\	Não	0,1248	Sim	1,56E-01	\	1,03E+04	8,88E-07
				1,00E-07	\	\	Não	0,1248	Sim	1,56E-01	\	7,85E+02	2,16E-06
				1,00E-08	\	\	Não	1,56E-01	Sim	0,1248	\	2,90E+01	8,90E-07
				1,00E-09	\	\	Não	1,56E-01	Sim	1,56E-01	\	4,56E+00	1,56E-06
				1,00E-10	\	\	Não	0,1248	Sim	0,1248	\	6,56E-01	7,68E-07

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst_svd	Tempo(s)	Xrecons_svd_com_ruido	Tempo(s)	Xrecons_svd_sem_ruid	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
DIM da Imagem	2	1,94E+05	1,94E+05	1,00E-01	Sim	1,72E-01	Não	1,40E-01	Sim	0,312	4,35E-07	6,96E+08	2,94E-06
original [500,500]				1,00E-02	\	\	Não	0,156	Sim	0,2808	\	4,29E+07	1,07E-06
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0,1248	Sim	0,3744	\	3,77E+06	7,20E-07
zero'				1,00E-04	\	\	Não	0,1248	Sim	0,2808	\	1,31E+06	1,63E-06
				1,00E-05	\	\	Não	0,1248	Sim	0,2808	\	4,53E+04	4,19E-07
				1,00E-06	\	\	Não	0,2808	Sim	0,2808	\	1,03E+04	1,54E-06
				1,00E-07	\	\	Não	1,56E-01	Sim	0,2964	\	7,85E+02	3,84E-07
				1,00E-08	\	\	Não	1,56E-01	Sim	0,3432	\	2,90E+01	4,04E-07
				1,00E-09	\	\	Não	1,56E-01	Sim	0,2808	\	4,56E+00	2,09E-06
				1,00E-10	\	\	Não	0,1248	Sim	0,312	\	6,56E-01	2,05E-06

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst (recupera?)		Xreconst_com_ruido (recupera?)		Xreconst_sem_ruido (recupera?)		diferença norma (X-				
					Tempo(s)		Tempo(s)		Tempo(s)		Xreconst	Xreconst_com_ruido	Xreconst_sem_ruido		
DIM da Imagem	3	2,390E+03	2,390E+03	1,00E-01	Sim	1,56E-01	Não		0,1248	Sim	0,1404	3,14E-10	1,497E+05	7,52E-10	
original [500,500]				1,00E-02	\	\	Não		1,56E-01	Sim	0,1872	\		1,033E+04	4,42E-10
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não		0,1248	Sim	0,1248	\		3,432E+03	2,67E-10
zero'				1,00E-04	\	\	Não		0,1872	Sim	0,2028	\		3,172E+02	6,98E-10
				1,00E-05	\	\	Não		0,1716	Sim	0,1404	\		12,884	6,95E-10
				1,00E-06	\	\	Sim		0,1248	Sim	0,1872	\		2,331E+00	4,75E-10
				1,00E-07	\	\	Sim		0,1404	Sim	0,1404	\		2,489E-01	1,34E-10
				1,00E-08	\	\	Sim		1,09E-01	Sim	1,56E-01	\		1,630E-02	4,67E-10
				1,00E-09	\	\	Sim		0,1404	Sim	0,1872	\		2,900E-03	3,17E-10
				1,00E-10	\	\	Sim		0,1248	Sim	0,1872	\		1,805E-04	2,89E-10

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst_svd (recupera?)		Xreconst_svd_com_ruido (recupera?)		Xreconst_svd_sem_ruido (recupera?)		diferença norma (X-				
					Tempo(s)		Tempo(s)		Tempo(s)		Xreconst_svd	Xreconst_svd_com_ruido	Xreconst_svd_sem_ruido		
DIM da Imagem	3	2,390E+03	2,390E+03	1,00E-01	Sim	1,56E-01	Não		0,1248	Sim	0,2808	4,21E-10	1,497E+05	2,63E-10	
original [500,500]				1,00E-02	\	\	Não		0,1248	Sim	0,2808	\		1,033E+04	2,03E-10
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não		1,56E-01	Sim	0,3432	\		3,432E+03	2,083E-10
zero'				1,00E-04	\	\	Não		1,56E-01	Sim	0,3432	\		3,172E+02	3,750E-10
				1,00E-05	\	\	Não		0,1404	Sim	0,312	\		12,884	4,172E-10
				1,00E-06	\	\	Sim		0,1248	Sim	0,3744	\		2,331E+00	4,39E-10
				1,00E-07	\	\	Sim		1,56E-01	Sim	0,2496	\		2,489E-01	4,61E-10
				1,00E-08	\	\	Sim		0,1872	Sim	0,3432	\		1,630E-02	5,23E-10
				1,00E-09	\	\	Sim		0,1248	Sim	0,2808	\		2,900E-03	4,15E-10
				1,00E-10	\	\	Sim		0,1872	Sim	0,312	\		1,805E-04	2,09E-10

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst (recupera?)		Xreconst_com_ruido (recupera?)		Xreconst_sem_ruido (recupera?)		diferença norma (X-				
					Tempo(s)		Tempo(s)		Tempo(s)		Xreconst	Xreconst_com_ruido	Xreconst_sem_ruido		
DIM da Imagem	5	1,04E+04	1,04E+04	1,00E-01	Sim	1,56E-01	Não		0,1404	Sim	1,56E-01	7,30E-09	5,81E+06	1,71E-08	
original [500,500]				1,00E-02	\	\	Não		1,56E-01	Sim	1,56E-01	\		1,75E+04	5,35E-09
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não		1,56E-01	Sim	0,1872	\		2,78E+04	4,62E-09
zero'				1,00E-04	\	\	Não		1,56E-01	Sim	1,56E-01	\		2,74E+03	5,46E-09
				1,00E-05	\	\	Não		0,156	Sim	0,156	\		572,678	7,06E-09
				1,00E-06	\	\	Não		0,1404	Sim	0,156	\		16,437	5,39E-09
				1,00E-07	\	\	Sim		0,1872	Sim	0,1872	\		4,209	1,04E-08
				1,00E-08	\	\	Sim		0,156	Sim	0,156	\		0,2353	8,96E-09
				1,00E-09	\	\	Sim		0,1248	Sim	0,156	\		0,0327	6,36E-09
				1,00E-10	\	\	Sim		0,156	Sim	0,156	\		0,0039	3,28E-09

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst_svd	Tempo(s)	Xrecons_svd_com_ruido	Tempo(s)	Xrecons_svd_sem_ruid	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
Dimensão Imagem	5	1,04E+04	1,04E+04	1,00E-01	Sim	0,1248	Não	0,156	Sim	0,4212	6,27E-09	5,81E+06	7,35E-09
Original [500,500]				1,00E-02	\	\	Não	0,1248	Sim	0,2808	\	1,75E+04	9,09E-09
Condições Fronteira: zero'				1,00E-03	\	\	Não	0,1872	Sim	0,3432	\	2,78E+04	6,97E-09
				1,00E-04	\	\	Não	0,1248	Sim	0,2964	\	2,74E+03	5,32E-09
				1,00E-05	\	\	Não	0,1872	Sim	0,312	\	572,678	6,995E-09
				1,00E-06	\	\	Não	0,156	Sim	0,3432	\	16,437	2,691E-09
				1,00E-07	\	\	Sim	0,1872	Sim	0,2808	\	4,209	5,402E-09
				1,00E-08	\	\	Sim	0,1248	Sim	0,3432	\	0,2353	4,78E-09
				1,00E-09	\	\	Sim	0,1248	Sim	0,312	\	0,0327	3,17E-09
				1,00E-10	\	\	Sim	0,156	Sim	0,2808	\	0,0039	5,78E-09

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst	Tempo(s)	Xreconst_com_ruido	Tempo(s)	Xreconst_sem_ruido	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xreconst	Xreconst_com_ruido	Xreconst_sem_ruido
Dimensão Imagem	10	1,242E+04	1,242E+04	1,00E-01	Sim	0,156	Não	0,1248	Sim	0,156	7,25E-09	5,00E+06	3,70E-09
Original [500,500]				1,00E-02	\	\	Não	1,72E-01	Sim	2,18E-01	\	6,34E+05	1,19E-08
Condições Fronteira: zero'				1,00E-03	\	\	Não	1,72E-01	Sim	0,156	\	6,011E+04	2,29E-08
				1,00E-04	\	\	Não	2,03E-01	Sim	0,156	\	9,817E+03	8,95E-09
				1,00E-05	\	\	Sim	2,03E-01	Sim	0,156	\	1,090E+03	1,31E-08
				1,00E-06	\	\	Sim	1,72E-01	Sim	0,156	\	85,335	2,60E-08
				1,00E-07	\	\	Sim	1,72E-01	Sim	0,156	\	3,480E+00	1,10E-08
				1,00E-08	\	\	Sim	1,72E-01	Sim	0,156	\	0,4218	9,08E-09
				1,00E-09	\	\	Sim	0,1872	Sim	0,156	\	3,81E-02	2,14E-08
				1,00E-10	\	\	Sim	2,03E-01	Sim	0,1872	\	3,30E-03	2,17E-08

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst_svd	Tempo(s)	Xrecons_svd_com_ruido	Tempo(s)	Xrecons_svd_sem_ruid	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
Dimensão Imagem	10	1,242E+04	1,242E+04	1,00E-01	Sim	0,1248	Não	0,156	Sim	0,5928	6,87E-09	5,00E+06	8,68E-09
Original [500,500]				1,00E-02	\	\	Não	0,156	Sim	0,312	\	6,34E+05	6,18E-09
Condições Fronteira: zero'				1,00E-03	\	\	Não	0,156	Sim	0,2808	\	6,011E+04	8,729E-09
				1,00E-04	\	\	Não	0,156	Sim	0,3432	\	9,817E+03	1,219E-08
				1,00E-05	\	\	Sim	0,156	Sim	0,4056	\	1,090E+03	1,099E-08
				1,00E-06	\	\	Sim	0,156	Sim	0,2808	\	85,335	7,75E-09
				1,00E-07	\	\	Sim	2,18E-01	Sim	0,312	\	3,480E+00	1,01E-08
				1,00E-08	\	\	Sim	1,72E-01	Sim	0,312	\	0,4218	8,28E-09
				1,00E-09	\	\	Sim	0,156	Sim	0,2496	\	3,81E-02	1,46E-08
				1,00E-10	\	\	Sim	0,1248	Sim	0,2496	\	3,30E-03	1,15E-08

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst	Xreconst_com_ruido	Xreconst_sem_ruido	diferença norma (X-					
					(recupera?)	Tempo(s)	(recupera?)	Tempo(s)	(recupera?)	Tempo(s)	Xreconst	Xreconst_com_ruido	Xreconst_sem_ruido
[500,500]	2	1,08E+16	1,66E+16	1,00E-01	Não	0,1248	Não	0,156	Não	0,156	6,01E+15	1,03E+30	3,85E+15
				1,00E-02	\	\	Não	0,156	Não	0,1872	\	5,85E+29	7,50E+15
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0,156	Não	0,156	\	3,77E+28	6,74E+15
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	1,40E-01	Não	0,1716	\	3,87E+27	7,36E+15
				1,00E-05	\	\	Não	0,156	Não	0,1872	\	3,20E+26	6,59E+15
				1,00E-06	\	\	Não	0,1872	Não	0,1872	\	7,36E+25	5,24E+15
				1,00E-07	\	\	Não	0,1248	Não	1,40E-01	\	5,85E+24	7,36E+15
				1,00E-08	\	\	Não	2,50E-01	Não	0,1716	\	1,14E+24	5,62E+15
				1,00E-09	\	\	Não	0,1716	Não	0,1716	\	5,17E+22	5,67E+15
				1,00E-10	\	\	Não	2,03E-01	Não	0,1716	\	5,60E+21	6,06E+14

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	reconst_sv	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido	diferença norma (X-					
					recupera?	Tempo(s)	(recupera?)	Tempo(s)	(recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
[500,500]	2	1,08E+16	1,66E+16	1,00E-01	Não	0,1248	Não	0,1716	Não	0,2496	1,08E+16	5,74E+30	5,71E+15
				1,00E-02	\	\	Não	0,1248	Não	0,3744	\	5,85E+29	6,88E+15
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0,156	Não	0,2964	\	3,77E+28	3,88E+15
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0,156	Não	0,3432	\	3,87E+27	5,82E+15
				1,00E-05	\	\	Não	0,1872	Não	0,2496	\	3,20E+26	1,03E+16
				1,00E-06	\	\	Não	0,1872	Não	0,312	\	7,36E+25	5,37E+15
				1,00E-07	\	\	Não	0,1248	Não	0,3588	\	5,85E+24	6,76E+15
				1,00E-08	\	\	Não	0,1872	Não	0,3276	\	1,14E+24	5,02E+15
				1,00E-09	\	\	Não	0,156	Não	0,3276	\	5,17E+22	4,91E+15
				1,00E-10	\	\	Não	0,1872	Não	0,2964	\	5,60E+21	2,64E+15

B-2. Alguns dos resultados obtidos, aplicando Processo de Desfocagem e Recuperação da Imagem, para a imagem de mitocôndrias de melhor qualidade

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst	Tempo(s)	Xrecons_com_ruido	Tempo(s)	Xrecons_sem_ruido	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xreconst	Xrecons_com_ruido	Xrecons_sem_ruido
DIM da Imagem original	2	2,28E+16	8,16E+15	1,00E-01	Não	0.0624	Não	0.0624	Não	0.0624	9,60E+15	5,67E+30	5,35E+16
				1,00E-02	\	\	Não	0.0312	Não	0.0312	\	4,88E+29	1,28E+16
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0624	Não	0.0312	\	6,98E+28	7,00E+15
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0312	Não	0.0624	\	4,17E+27	8,06E+15
				1,00E-05	\	\	Não	0.0468	Não	0.0312	\	4,66E+26	1,30E+16
				1,00E-06	\	\	Não	0.0624	Não	0.0468	\	3,98E+25	1,43E+16
				1,00E-07	\	\	Não	0.0624	Não	0.0624	\	5,02E+24	1,86E+16
				1,00E-08	\	\	Não	0.0624	Não	0.0624	\	5,42E+23	8,74E+15
				1,00E-09	\	\	Não	0.0312	Não	0.0312	\	7,53E+22	1,60E+16
				1,00E-10	\	\	Não	0.0624	Não	0.0312	\	7,61E+21	1,58E+16

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xrecons_svd	Tempo(s)	Xrecons_svd_com_ruido	Tempo(s)	Xrecons_svd_sem_ruido	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
DIM da Imagem original	2	2,28E+16	8,16E+15	1,00E-01	Não	0.0624	Não	0.0624	Não	0.1248	1,47E+16	6,97E+30	1,35E+16
				1,00E-02	\	\	Não	0.0312	Não	0.0936	\	6,47E+29	1,36E+16
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0624	Não	0.0936	\	8,26E+28	1,51E+16
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0312	Não	0.0936	\	5,82E+27	1,35E+16
				1,00E-05	\	\	Não	0.0468	Não	0.1248	\	5,26E+26	1,15E+16
				1,00E-06	\	\	Não	0.0624	Não	0.1248	\	4,27E+25	1,32E+16
				1,00E-07	\	\	Não	0.0312	Não	0.0936	\	5,61E+24	1,92E+16
				1,00E-08	\	\	Não	0.0624	Não	0.0936	\	7,42E+23	1,27E+16
				1,00E-09	\	\	Não	0.0624	Não	0.1404	\	8,60E+22	1,73E+16
				1,00E-10	\	\	Não	0.0624	Não	0.1248	\	9,73E+21	1,47E+16

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst	Tempo(s)	Xrecons_com_ruido	Tempo(s)	Xrecons_sem_ruido	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xreconst	Xrecons_com_ruido	Xrecons_sem_ruido
DIM da Imagem original	3	872,247	872,247	1,00E-01	Sim	0.0624	Não	0.0312	Sim	0.0624	9,19E-11	6,184E+04	1,28E-10
				1,00E-02	\	\	Não	0.0624	Sim	0.0312	\	5,679E+03	9,78E-11
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0468	Sim	0.0624	\	4,297E+02	9,27E-11
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0624	Sim	0.0312	\	5,222E+01	8,07E-11
				1,00E-05	\	\	Não	0.0624	Sim	0.0624	\	5,973	1,13E-10
				1,00E-06	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0312	\	6,762E-01	9,06E-11
				1,00E-07	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0624	\	4,350E-02	9,63E-11
				1,00E-08	\	\	Sim	0.0468	Sim	0.0312	\	3,700E-03	7,54E-11
				1,00E-09	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0312	\	5,373E-04	7,48E-11
				1,00E-10	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0624	\	4,292E-05	6,73E-11

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xrecons_svd	Tempo(s)	Xrecons_svd_com_ruido	Tempo(s)	Xrecons_svd_sem_ruido	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
DIM da Imagem original	3	872,247	872,247	1,00E-01	Sim	0.0312	Não	0.0624	Não	0.0936	6,09E-11	6,184E+04	8,23E-11
				1,00E-02	\	\	Não	0.0624	Não	0.1092	\	5,679E+03	5,21E-11
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0312	Não	0.0936	\	4,297E+02	7,702E-11
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0624	Não	0.0936	\	5,222E+01	6,589E-11
				1,00E-05	\	\	Não	0.0624	Não	0.1248	\	5,973	8,028E-11
				1,00E-06	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0936	\	6,762E-01	6,38E-11
				1,00E-07	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0936	\	4,350E-02	9,16E-11
				1,00E-08	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.1248	\	3,700E-03	6,54E-11
				1,00E-09	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.1248	\	5,373E-04	6,85E-11
				1,00E-10	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0936	\	4,292E-05	7,13E-11

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst	Tempo(s)	Xrecons_com_ruido	Tempo(s)	Xrecons_sem_ruido	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xreconst	Xrecons_com_ruido	Xrecons_sem_ruido
DIM da Imagem original	5	566,106	566,106	1,00E-01	Sim	0.0624	Não	0.0624	Sim	0.0624	1,03E-10	3,19E+04	1,55E-10
				1,00E-02	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0624	\	3,19E+03	1,01E-10
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0624	Sim	0.0312	\	324,513	1,08E-10
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0624	\	30,412	1,07E-10
				1,00E-05	\	\	Sim	0.0312	Sim	0.0312	\	3,366	8,87E-11
				1,00E-06	\	\	Sim	0.0468	Sim	0.0624	\	0.3673	6,94E-11
				1,00E-07	\	\	Sim	0.0312	Sim	0.0624	\	0.0341	8,53E-11
				1,00E-08	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0624	\	0.0034	9,96E-11
				1,00E-09	\	\	Sim	0.0312	Sim	0.0312	\	4,04E-04	9,29E-11
				1,00E-10	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0624	\	3,50E-05	1,17E-10

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xrecons_svd (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_svd_com_ruido (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_svd_sem_ruido (recupera?)	Tempo(s)	diferença norma (X-		
											Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
DIM da Imagem original	5	566,106	566,106	1,00E-01	Sim	0.0624	Não	0.0624	Não	0.0936	4,21E-11	3,19E+04	5,93E-11
				1,00E-02	\	\	Não	0.0624	Não	0.1248	\	3,19E+03	4,52E-11
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0468	Não	0.0936	\	324,513	4,275E-11
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0312	Não	0.0936	\	30,412	4,978E-11
				1,00E-05	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0936	\	3,366	4,844E-11
				1,00E-06	\	\	Sim	0.0780	Sim	0.0936	\	0.3673	5,07E-11
				1,00E-07	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.1248	\	0.0341	5,40E-11
				1,00E-08	\	\	Sim	0.0312	Sim	0.1248	\	0.0034	4,68E-11
				1,00E-09	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.1248	\	4,04E-04	5,47E-11
				1,00E-10	\	\	Sim	0.0312	Sim	0.0936	\	3,50E-05	4,59E-11

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_com_ruido (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_sem_ruido (recupera?)	Tempo(s)	diferença norma (X-		
											Xreconst	Xrecons_com_ruido	Xrecons_sem_ruido
DIM da Imagem original	10	1,43E+04	1,43E+04	1,00E-01	Sim	0.0624	Não	0.0468	Sim	0.0624	2,77E-08	7,35E+06	4,18E-08
				1,00E-02	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0312	\	1,37E+06	1,81E-08
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0624	Sim	0.0312	\	5,06E+04	3,55E-08
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0624	\	1,83E+04	2,70E-08
				1,00E-05	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0624	\	1,865E+03	4,14E-08
				1,00E-06	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0780	\	94,517	3,55E-08
				1,00E-07	\	\	Não	0.0468	Sim	0.0624	\	13,296	1,71E-08
				1,00E-08	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0624	\	1,0715	4,16E-08
				1,00E-09	\	\	Sim	0.0312	Sim	0.0312	\	0.1548	2,97E-08
				1,00E-10	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0624	\	0.0049	2,57E-08

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xrecons_svd (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_svd_com_ruido (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_svd_sem_ruido (recupera?)	Tempo(s)	diferença norma (X-		
											Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
DIM da Imagem original	10	1,43E+04	1,43E+04	1,00E-01	Sim	0.0624	Não	0.0624	Não	0.1248	1,13E-08	7,35E+06	2,15E-08
				1,00E-02	\	\	Não	0.0624	Não	0.0936	\	1,37E+06	1,27E-08
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0312	Não	0.0936	\	5,06E+04	1,29E-08
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0624	Não	0.0936	\	1,83E+04	2,17E-08
				1,00E-05	\	\	Não	0.0624	Não	0.1560	\	1,865E+03	1,462E-08
				1,00E-06	\	\	Não	0.0624	Não	0.1404	\	94,517	1,096E-08
				1,00E-07	\	\	Não	0.0624	Não	0.0936	\	13,296	1,653E-08
				1,00E-08	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.1248	\	1,0715	1,95E-08
				1,00E-09	\	\	Sim	0.0936	Sim	0.1560	\	0.1548	7,12E-09
				1,00E-10	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.1248	\	0.0049	1,23E-08

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_com_ruido (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_sem_ruido (recupera?)	Tempo(s)	diferença norma (X-		
											Xreconst	Xrecons_com_ruido	Xrecons_sem_ruido
DIM da Imagem original	175	6,37E+03	6,37E+03	1,00E-01	Sim	0.0624	Não	0.0624	Sim	0.0624	9,00E-08	1,033E+07	4,36E-07
				1,00E-02	\	\	Não	0.0624	Sim	0.0624	\	1,07E+06	1,08E-07
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0468	Sim	0.0624	\	1,03E+05	9,36E-08
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0624	Sim	0.0624	\	1,12E+04	9,57E-08
				1,00E-05	\	\	Não	0.0468	Sim	0.0624	\	1,07E+03	9,95E-08
				1,00E-06	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0624	\	1,02E+02	9,27E-08
				1,00E-07	\	\	Não	0.0780	Sim	0.0624	\	10,348	9,45E-08
				1,00E-08	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0624	\	1,0672	8,91E-08
				1,00E-09	\	\	Sim	0.0312	Sim	0.0624	\	0.1070	9,38E-08
				1,00E-10	\	\	Sim	0.0624	Sim	0.0624	\	0.0109	9,29E-08

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xrecons_svd (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_svd_com_ruido (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_svd_sem_ruido (recupera?)	Tempo(s)	diferença norma (X-		
											Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
DIM da Imagem original	175	6,37E+03	6,37E+03	1,00E-01	Sim	0.0624	Não	0.0312	Não	0.0936	3,25E-08	1,033E+07	3,40E-08
				1,00E-02	\	\	Não	0.0624	Não	0.1560	\	1,07E+06	3,26E-08
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0624	Não	0.0936	\	1,03E+05	3,20E-08
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0312	Não	0.1248	\	1,12E+04	3,35E-08
				1,00E-05	\	\	Não	0.0624	Não	0.0936	\	1,07E+03	3,30E-08
				1,00E-06	\	\	Não	0.0624	Não	0.0936	\	1,02E+02	3,17E-08
				1,00E-07	\	\	Não	0.0624	Não	0.1248	\	10,348	3,18E-08
				1,00E-08	\	\	Sim	0.0312	Sim	0.1248	\	1,0672	3,22E-08
				1,00E-09	\	\	Sim	0.0312	Sim	0.1248	\	0.1070	3,19E-08
				1,00E-10	\	\	Sim	0.0936	Sim	0.0936	\	0.0109	3,15E-08

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xreconst (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_com_ruido (recupera?)	Tempo(s)	Xrecons_sem_ruido (recupera?)	Tempo(s)	diferença norma (X-		
											Xreconst	Xrecons_com_ruido	Xrecons_sem_ruido
DIM da Imagem original	180	6,35E+06	6,35E+06	1,00E-01	Sim	0.0468	Não	0.0312	Sim	0.0624	0.0086	1,782E+12	0.4429
				1,00E-02	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0468	\	1,83E+11	0.0494
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0624	Sim	0.0624	\	1,42E+10	0.0102
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0624	Sim	0.0312	\	2,91E+09	0.0132
				1,00E-05	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0624	\	1,37E+08	0.0101
				1,00E-06	\	\	Não	0.0468	Sim	0.0312	\	1,80E+07	0.0128
				1,00E-07	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0312	\	2,038E+06	0.0106
				1,00E-08	\	\	Não	0.0312	Sim	0.0624	\	3,1577E+05	0.0117
				1,00E-09	\	\	Não	0.0468	Sim	0.0624	\	3,05E+04	0.0174
				1,00E-10	\	\	Não	0.0468	Sim	0.0624	\	3,10E+03	0.0206

Dimensão PSF	Raio	Cond Ar	Cond Ac	Erro	Xrecons_svd	Tempo(s)	Xrecons_svd_com_ruido	Tempo(s)	Xrecons_svd_sem_ruido	Tempo(s)	diferença norma (X-		
					(recupera?)		(recupera?)		(recupera?)		Xrecons_svd	Xrecons_svd_com_ruido	Xrecons_svd_sem_ruido
DIM da Imagem original	180	6,35E+06	6,35E+06	1,00E-01	Sim	0.0312	Não	0.0312	Não	0.0936	0.0080	1,782E+12	0.0097
				1,00E-02	\	\	Não	0.0312	Não	0.1092	\	1,83E+11	0.0077
Condições Fronteira:				1,00E-03	\	\	Não	0.0624	Não	0.1248	\	1,42E+10	0.0075
Periodic'				1,00E-04	\	\	Não	0.0312	Não	0.0936	\	2,91E+09	0.0068
				1,00E-05	\	\	Não	0.0312	Não	0.0936	\	1,37E+08	0.0072
				1,00E-06	\	\	Não	0.0312	Não	0.0936	\	1,80E+07	0.0070
				1,00E-07	\	\	Não	0.0624	Não	0.1248	\	2,038E+06	0.0059
				1,00E-08	\	\	Não	0.0780	Não	0.1248	\	3,1577E+05	0.0071
				1,00E-09	\	\	Não	0.0468	Não	0.0936	\	3,05E+04	0.0069
				1,00E-10	\	\	Não	0.0624	Não	0.1248	\	3,10E+03	0.0063

Recuperação da Imagem recorrendo à SVD truncada

Imagem Original:	Raio	Dimensao PSF	intervalo k	Melhor aproximação k	dif original	intervalo k	Melhor aproximação k	dif	intervalo k	Melhor aprox	dif
[350,350]	3	[6,6]	[1,100]	≈100	≈1.7	[101,200]	≈200	≈1.5	[201,300]	≈300	≈1.2
		[8,8]	[1,100]	≈100	≈2	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
		[20,20]	[1,100]	≈100	≈1.99	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
		[100,100]	[1,100]	≈100	≈1.99	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
		[200,200]	[1,100]	≈100	≈2	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
		[350,350]	[1,100]	≈100	≈3	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
	4	[8,8]	[1,100]	≈100	≈3	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
		[10,10]	[1,100]	≈100	≈3	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
		[20,20]	[1,100]	≈100	≈3	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
		[100,100]	[1,100]	≈100	≈3	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
		[350,350]	[1,100]	≈100	≈3	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈1.5
	5	[10,10]	[1,100]	≈100	≈3	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈2.5
		[12,12]	[1,100]	≈100	≈4	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈2.5
		[50,50]	[1,100]	≈100	≈4	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈2.5
		[100,100]	[1,100]	≈100	≈4	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈2.5
		[350,350]	[1,100]	≈100	≈4	[101,200]	≈200	≈2	[201,300]	≈300	≈2.5
	6	[12,12]	[1,100]	≈100	≈4	[101,200]	≈200	≈3	[201,300]	≈300	≈2.4
		[50,50]	[1,100]	≈100	≈4	[101,200]	≈200	≈3	[201,300]	≈300	≈2.4
		[100,100]	[1,100]	≈100	≈4	[101,200]	≈200	≈3	[201,300]	≈300	≈2.4
		[350,350]	[1,100]	≈100	≈4	[101,200]	≈200	≈3	[201,300]	≈300	≈2.4
	7	[14,14]	[1,100]	≈100	≈3.8	[101,200]	≈200	≈3	[201,300]	≈300	≈2.5
		[50,50]	[1,100]	≈100	≈3.7	[101,200]	≈200	≈3	[201,300]	≈300	≈2.5
		[100,100]	[1,100]	≈100	≈3.7	[101,200]	≈200	≈3	[201,300]	≈300	≈2.5
		[350,350]	[1,100]	≈100	≈3.7	[101,200]	≈200	≈3	[201,300]	≈300	≈2.5

B-3. Resultados obtidos para a Imagem de mitocôndrias desfocada

Dimensão Imagem	Raio	Dimensao	intervalo k	Melhor aprox k	dif	Raio	Dimensao	intervalo k	Melhor aprox k	dif
Original [500,500]	3	[6,6]	[1,500]	≈100	≈10	4	[8,8]	[1,500]	≈100	≈10
		[7,7]	[1,500]	≈100	≈10		[9,9]	[1,500]	≈100	≈10
		[8,8]	[1,500]	≈100	≈10		[10,10]	[1,500]	≈100	≈10
		[9,9]	[1,500]	≈100	≈10		[12,12]	[1,500]	≈80	≈11
		[10,10]	[1,500]	≈100	≈10		[15,15]	[1,500]	≈85	≈11
		[12,12]	[1,500]	≈100	≈10		[20,20]	[1,500]	≈86	≈11
		[15,15]	[1,500]	≈100	≈10		[50,50]	[1,500]	≈86	≈11
		[20,20]	[1,500]	≈100	≈10		[100,100]	[1,500]	≈86	≈11
		[50,50]	[1,500]	≈100	≈10		[200,200]	[1,500]	≈90	≈11
		[100,100]	[1,500]	≈100	≈10		[500,500]	[1,500]	≈90	≈11
		[200,200]	[1,500]	≈100	≈10					
		[500,500]	[1,500]	≈100	≈10					

Dimensão Imagem	Raio	Dimensao	intervalo k	Melhor aprox k	dif	Raio	Dimensao	intervalo k	Melhor aprox k	dif
Original [500,500]	5	[10,10]	[1,500]	≈70	≈13	6	[12,12]	[1,500]	≈65	≈14
		[12,12]	[1,500]	≈70	≈13		[15,15]	[1,100]	≈60	≈14
		[15,15]	[1,500]	≈65	≈13		[20,20]	[1,100]	≈60	≈14
		[20,20]	[1,500]	≈65	≈13		[50,50]	[1,100]	≈60	≈14
		[50,50]	[1,500]	≈65	≈13		[100,100]	[1,100]	≈60	≈14
		[100,100]	[1,500]	≈65	≈13		[200,200]	[1,100]	≈58	≈14
		[200,200]	[1,500]	≈65	≈13		[500,500]	[1,100]	≈58	≈14
		[500,500]	[1,500]	≈65	≈13					