# Curvas
# Funções Vectoriais de Variável Real

**Slide 1**

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Versão 2



Maria Antónia Carravilla – FEUP

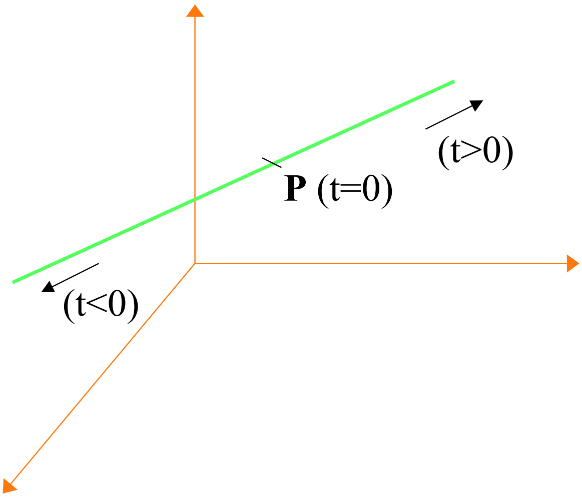
## Curvas - Funções Vectoriais de Variável Real

Exemplo

A recta que passa no ponto $P$ e que é paralela a um vector não nulo $A$ é o conjunto de valores que toma a função vectorial $X$ dada por.

**Slide 2**

$$X(t) = P + tA$$

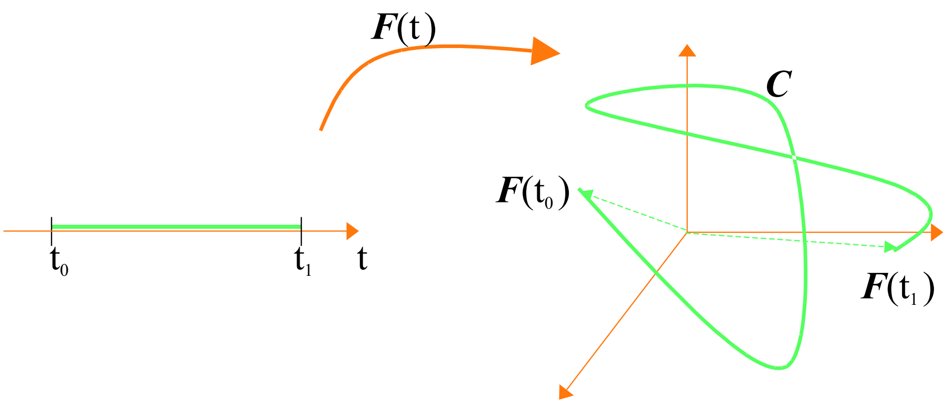



## Curvas - Parametrização de uma curva $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & \mathcal{I} & \rightarrow & \Re^n \\ & t & \rightsquigarrow & \mathcal{F}(t) = (F_1(t), \ldots, F_n(t)) \end{array} \quad , \mathcal{I} = [t_0, t_1] \text{ intervalo de } \Re$$

Onde: $\mathcal{F}$ é a parametrização de $\mathcal{C}$ e $t$ é o parâmetro

**Slide 3**



## Curvas - Parametrização - Exercícios

Identificar a curva parametrizada por:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{F}: & [0, 2\pi] & \rightarrow & \Re^2 \\ & t & \rightsquigarrow & \mathcal{F}(t) = (a\cos(t), a\sin(t)) \end{array}$$

**Slide 4** Identificar a curva parametrizada por:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{G}: & [0, \pi] & \rightarrow & \Re^2 \\ & t & \rightsquigarrow & \mathcal{G}(t) = (a\cos(2t), a\sin(2t)) \end{array}$$

## Curvas - Parametrização - Exercícios

Identificar a curva parametrizada por:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & t+1 \\ y(t) & = & 2t-5 \end{array} \quad t \in \Re$$

**Slide 5** Identificar a curva parametrizada por:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2t \\ y(t) & = & t^2 \end{array} \quad -1 \leq t \leq 1$$

## Curvas - Parametrização - Exercícios

Parametrizar o gráfico da função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

**Slide 6**

Parametrizar o segmento que une os pontos $A$ e $B$.

Parametrizar o segmento que une os pontos $A = (-2, -1)$ e $B = (3, 2)$.

## Curvas - Continuidade

**Slide 7**

$$\begin{array}{llll} \mathcal{F}: & \mathcal{I} & \longrightarrow & \Re^n \\ f_i: & \mathcal{I} & \longrightarrow & \Re \end{array} \quad \mathcal{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$$

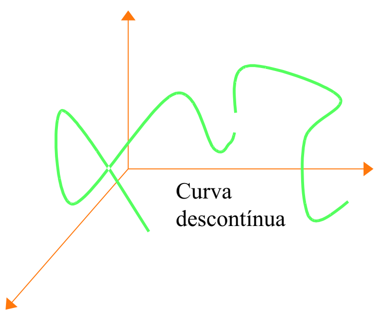
Curva contínua

$\iff$

$\mathcal{F}$ contínua

$\iff$

cada uma das funções componentes $f_i$ contínua



## Curvas - Derivabilidade

Slide 8

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & \mathcal{I} & \rightarrow & \Re^n \\ f_i: & \mathcal{I} & \rightarrow & \Re \end{array} \quad \mathcal{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$$

$$\text{Existir } \lim_{t \to t_0} \frac{\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(t_0)}{t - t_0} \iff \forall_i, \text{ existe } \lim_{t \to t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0}$$

$$\iff \text{todas as componentes} f_i : \mathcal{I} \rightarrow \Re \text{ são deriváveis em } t_0$$

$$\mathcal{F}'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), \ldots, f_n'(t_0))$$

A curva $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \Re^n$ diz-se derivável se existir $\mathcal{F}'(t)\ \forall_{t \in \mathcal{I}}$

A curva $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \Re^n$ diz-se derivável continuamente ou de classe $C^1$ se $\mathcal{F}' : \mathcal{I} \rightarrow \Re^n$ for contínua.

## Curvas - Regras de Cálculo

Slide 9

$$\text{Sejam } \begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & \mathcal{I} & \rightarrow & \Re^n \\ \mathcal{G}: & \mathcal{I} & \rightarrow & \Re^n \\ f: & \mathcal{I} & \rightarrow & \Re \end{array} \text{ deriváveis}$$

$$\text{então } \begin{array}{lcl} (\mathcal{F} + \mathcal{G})(t) & = & \mathcal{F}(t) + \mathcal{G}(t) \\ (f\mathcal{F})(t) & = & f(t)\mathcal{F}(t) \\ (\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})(t) & = & \mathcal{F}(t) \cdot \mathcal{G}(t) \end{array} \quad \text{são deriváveis, e}$$

$$\begin{array}{lcl} (\mathcal{F} + \mathcal{G})'(t) & = & \mathcal{F}'(t) + \mathcal{G}'(t) \\ (f\mathcal{F})'(t) & = & f'(t)\mathcal{F}(t) + f(t)\mathcal{F}'(t) \\ (\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})'(t) & = & \mathcal{F}'(t) \cdot \mathcal{G}(t) + \mathcal{F}(t) \cdot \mathcal{G}'(t) \end{array}$$

## Curvas - Exercício

Seja $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \Re^n$ derivável tal que $\| \mathcal{F}(t) \| \neq 0$.

Mostrar que a função:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{I} & \rightarrow & \Re \\ & t & \rightsquigarrow & f(t) = \| \mathcal{F}(t) \| \end{array}$$

**Slide 10**

é derivável e que:

$$\frac{d \| \mathcal{F}(t) \|}{dt} = \frac{\mathcal{F}(t) \cdot \mathcal{F}'(t)}{\| \mathcal{F}(t) \|}$$

## Curvas - Reparametrização

Os mais importantes conceitos geométricos relacionados com uma curva são os que se mantêm invariantes quando há uma alteração de parâmetro (reparametrização).

Duas funções dizem-se equivalentes se se relacionam da seguinte forma:

$$\mathcal{G}(u) = \mathcal{F}(f(u))$$

**Slide 11**

e correspondem a representações paramétricas diferentes da mesma curva. A função $f(u)$ corresponde à alteração de parametrização.

## Curvas - Reparametrização

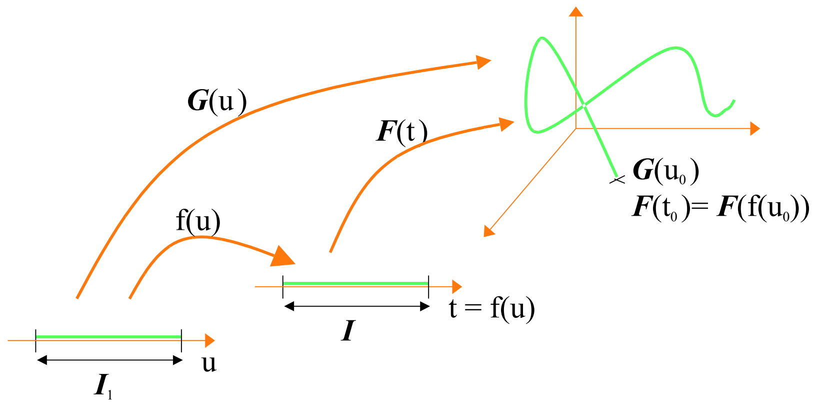
$$\text{Seja}\quad \begin{array}{rcl} \mathcal{F}:\mathcal{I} & \rightarrow & \Re^n \\ f:\mathcal{I}_1 & \rightarrow & \mathcal{I} \end{array} \quad \text{derivável.}$$

Considere-se $\mathcal{G}:\mathcal{I}_1 \rightarrow \Re^n$ $\mathcal{G} = \mathcal{F}\circ f$.

$\mathcal{G}$ designa-se por reparametrização da curva $\mathcal{F}$.

$\mathcal{G}$ é derivável e $\mathcal{G}'(u) = \mathcal{F}'(f(u))f'(u)$

**Slide 12**




## Curvas - Reparametrização - Exercício

Considere

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{F}(t) & = & (a\cos t, a\sin t) & 0 \le t \le 2\pi \\ f(u) & = & 2u & 0 \le u \le \pi \end{array}$$

**Slide 13**

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}\circ f$$

Determine $\mathcal{G}(u)$ e $\mathcal{G}'(u)$

## Curvas - Velocidade, Velocidade Escalar e Aceleração

Uma partícula move-se num espaço a 2 ou 3 dimensões de tal forma que a sua posição no instante $t$ relativamente a um determinado sistema de coordenadas é dada por $F(t)$.

Quando $t$ varia ao longo de um intervalo de tempo, o percurso da partícula é a imagem de $F$.

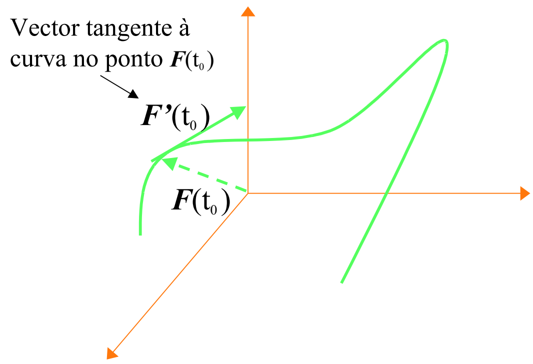
**Slide 14** Assim a função vectorial $F$ é um modelo matemático natural para descrever movimento.

Chama-se a $F$ a função posição do movimento.

Conceitos físicos tais como velocidade, velocidade escalar e aceleração podem ser definidos como derivadas da função posição.

## Curvas - Velocidade, Velocidade Escalar e Aceleração

Seja $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \Re^n$ uma curva contínua e $t \in \mathcal{I}$




Vector velocidade da curva $\mathcal{F}$ no instante $t_0$:

**Slide 15**

$$\mathcal{F}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(t_0)}{t - t_0} \in \Re^n$$

Velocidade escalar da curva $\mathcal{F}$ no instante $t_0$: $\| \mathcal{F}'(t_0) \| = v(t_0) \in \Re$

Vector aceleração da curva $\mathcal{F}$ no instante $t_0$: $\mathcal{F}''(t_0) \in \Re^n$

## Curvas - Velocidade, Velocidade Escalar e Aceleração - Exercícios

Determinar a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração da curva no instante $t = 0$:

**Slide 16**

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & [0, 2\pi] & \rightarrow & \Re^2 \\ & t & \rightsquigarrow & \mathcal{F}(t) = (a\cos(t), a\sin(t)) \end{array}$$

Determinar a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração da curva no instante $t = 0$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{G}: & [0, \pi] & \rightarrow & \Re^2 \\ & t & \rightsquigarrow & \mathcal{G}(t) = (a\cos(2t), a\sin(2t)) \end{array}$$

## Movimento linear

Considere-se um movimento que tem o vector posição:

$$\mathcal{G}(t) = P + f(t)A$$

onde $A$ e $P$ são vectores fixos e $A \neq 0$. Trata-se do movimento ao longo de uma recta que passa por $P$ com direcção $A$. Neste caso a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração são dadas por:

**Slide 17**

$$\mathcal{G}'(t) = f'(t)A$$

$$v(t) = \parallel \mathcal{G}'(t) \parallel = |f'(t)| \parallel A \parallel$$

$$\mathcal{G}''(t) = f''(t)A$$

se $f'(t)$ e $f''(t) \neq 0$ então o vector aceleração é paralelo ao vector velocidade.

## Movimento circular

Considere-se um movimento que tem o vector posição:

$$\mathcal{G}(t) = a\cos(\omega t)(i) + a\sin(\omega t)(j)$$

onde $a$ tem um valor fixo. Trata-se do movimento ao longo de um círculo de raio $a$, centrado na origem. Neste caso a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração são dadas por:

**Slide 18**

$$\mathcal{G}'(t) = -a\omega\sin(\omega t)(i) + a\omega\cos(\omega t)(j)$$

$$v(t) = a\omega$$

$$\mathcal{G}''(t) = -a\omega^2\cos(\omega t)(i) - a\omega^2\sin(\omega t)(j) = -\omega^2\mathcal{G}(t)$$

O vector aceleração tem sempre uma direcção oposta à do vector posição e perpendicular à velocidade.

## Curvas - vector aceleração

No movimento linear, o vector aceleração é paralelo ao vector velocidade, no movimento circular, o vector aceleração é perpendicular à velocidade.

Para um movimento genérico, o vector aceleração é a soma de dois vectores perpendiculares, um paralelo e outro perpendicular à velocidade.

**Slide 19**

## Curvas - Vector Tangente Unitário

Considere-se $\mathcal{F} : \mathcal{I} \longrightarrow \Re^n$ de classe $C^2$

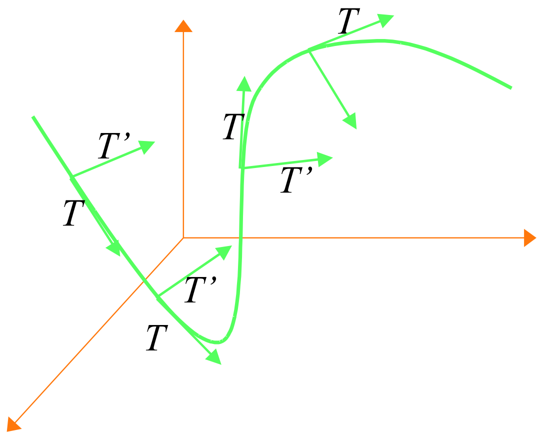
Para os valores de $t$ para os quais $\| \mathcal{F}'(t) \| \neq 0$

**Slide 20**

**Vector tangente unitário:**

$$\mathcal{T}(t) = \frac{\mathcal{F}'(t)}{\| \mathcal{F}'(t) \|} \quad (\| \mathcal{T}(t) \| = 1)$$

$$\mathcal{T}'(t) \cdot \mathcal{T}(t) = 0 \ \forall_t$$




## Curvas - Vector Normal Principal

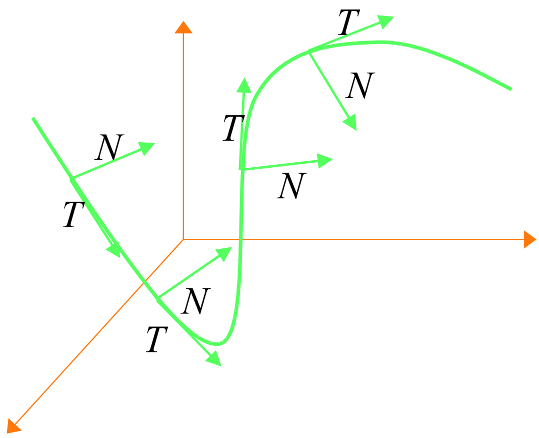
Considere-se $\mathcal{F} : \mathcal{I} \longrightarrow \Re^n$ de classe $C^2$

Para os valores de $t$ para os quais $\| \mathcal{F}'(t) \| \neq 0$ e $\| \mathcal{T}'(t) \| \neq 0$

**Slide 21**

**Vector normal principal:** :

$$\mathcal{N}(t) = \frac{\mathcal{T}'(t)}{\| \mathcal{T}'(t) \|} \quad \| \mathcal{N}(t) \| = 1$$



## Curvas - Plano Osculador

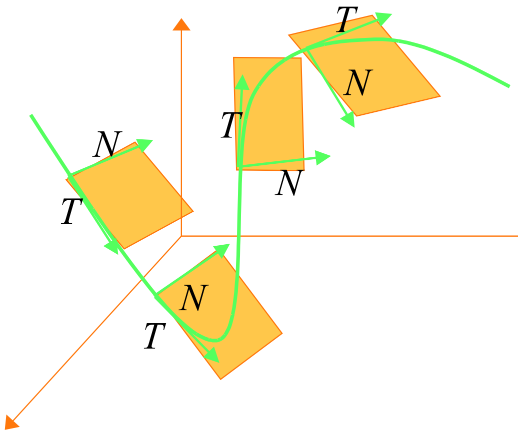
Considere-se $\mathcal{F} : \mathcal{I} \rightarrow \Re^n$ de classe $C^2$

Para os valores de $t$ para os quais $\| \mathcal{F}'(t) \| \neq 0$ e $\| \mathcal{T}'(t) \| \neq 0$

**Slide 22**

**Plano osculador: Plano determinado pelos vectores**

$\mathcal{T}(t)$ e $\mathcal{N}(t)$




## Curvas - vector aceleração

Para um movimento genérico, o vector aceleração é a soma de dois vectores perpendiculares, um paralelo e outro perpendicular à velocidade.

$$\mathcal{F}''(t) = v'(t)\mathcal{T}(t) + v(t)\mathcal{T}'(t)$$

e se $\mathcal{T}'(t) \neq \mathcal{O}$

**Slide 23**

$$\mathcal{F}''(t) = \| \mathcal{F}'(t) \|' \mathcal{T}(t) + \| \mathcal{F}'(t) \| \| \mathcal{T}'(t) \| \mathcal{N}(t)$$

O vector aceleração está sempre sobre o plano oscular.

$\mathcal{T}(t)$, vector tangente unitário – componente tangencial da aceleração (uma alteração na velocidade escalar implica uma alteração de $\| \mathcal{F}'(t) \|' \mathcal{T}(t)$);

$\mathcal{N}(t)$, vector normal principal – componente normal da aceleração (uma alteração na direcção do movimento implica uma alteração de
$\| \mathcal{F}'(t) \| \| \mathcal{T}'(t) \| \mathcal{N}(t)$).

## Curvas - Inversão do sentido do percurso

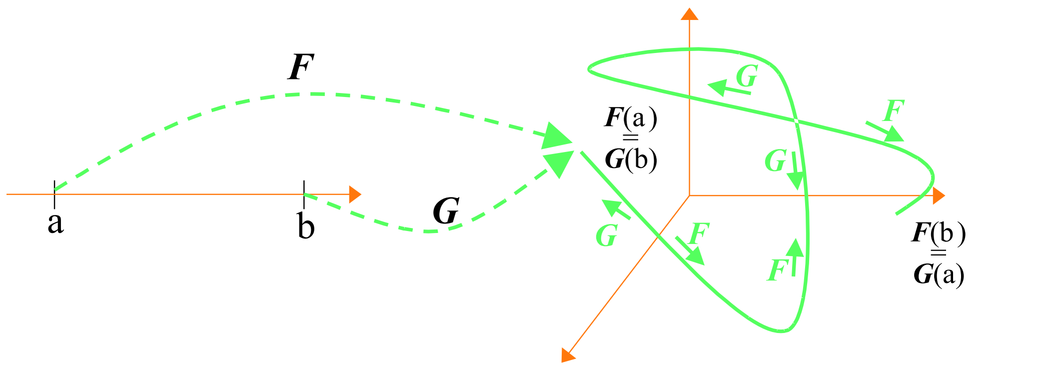
**Slide 24**

Exemplo:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t) &= (a\cos t, a\sin t) & 0 \le t \le 2\pi \\ \mathcal{G}(t) &= (a\cos(2\pi - t), a\sin(2\pi - t)) & 0 \le t \le 2\pi\end{aligned}$$

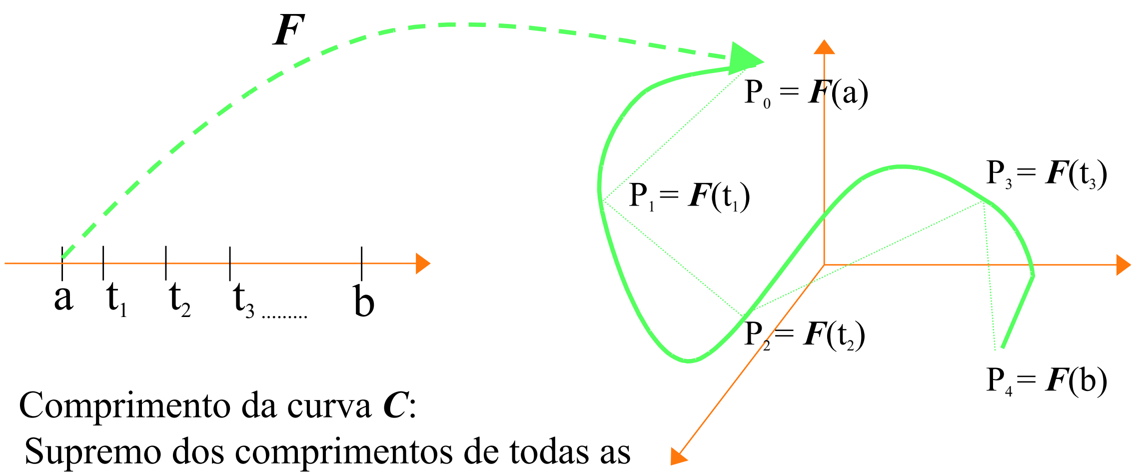
Genericamente:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}: [a,b] &\rightarrow \Re^n \\ t &\rightsquigarrow \mathcal{F}(t)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathcal{G}: [a,b] &\rightarrow \Re^n \\ t &\rightsquigarrow \mathcal{G}(t) = \mathcal{F}(a+b-t)\end{aligned}$$




## Curvas - Comprimento de Arco

**Slide 25**




Comprimento da curva ***C***:
Supremo dos comprimentos de todas as linhas poligonais inscritas em ***C***

## Curvas - Comprimento de Arco

Seja $\mathcal{F} : [a, b] \to \Re^n$ de classe $C^1$

O comprimento total da curva percorrida entre $t = a$ e $t = b$ é:

**Slide 26**

$$L = \int_a^b v(t)dt = \int_a^b \parallel \mathcal{F}'(t) \parallel dt$$

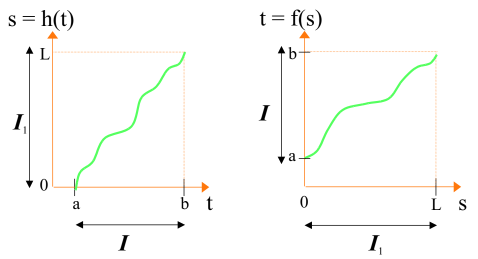
## Curvas - Parametrização pelo Comprimento de Arco

Comprimento da curva percorrida entre $a$ e $t$: $s = h(t) = \int_a^t v(u)du$

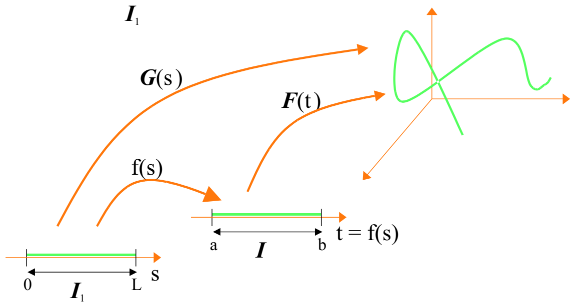
Como $v(t)$ é contínua, $h'(t) = v(t)$ (velocidade escalar: distância percorrida por unidade de tempo)

Como $v(t) = \parallel \mathcal{F}'(t) \parallel > 0 \Rightarrow s' = h'(t) = v(t) > 0 \Rightarrow s = h(t)$ é estritamente crescente.

**Slide 27**




$\mathcal{G}(s) = \mathcal{F} \circ f(s)$ é a parametrização da curva pelo comprimento de arco



## Curvas - Curvatura

A curvatura de uma curva $\mathcal{K}$ é a medida da variação de $\mathcal{T}$ por unidade de comprimento de arco $ds$.

$$\mathcal{K} = \left\| \frac{d\mathcal{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathcal{T}}{dt}\frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathcal{T}}{dt} \right\| \frac{1}{s'(t)} = \left\| \frac{d\mathcal{T}}{dt} \right\| \frac{1}{v(t)}$$

**Slide 28** O raio de curvatura é o inverso da curvatura:

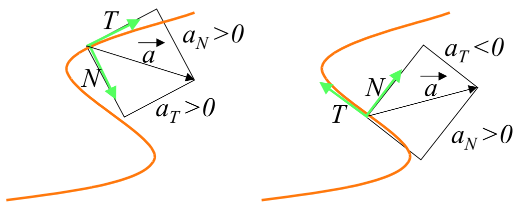
$$\rho = \frac{1}{\mathcal{K}}$$

## Curvas - Aceleração

$$\begin{array}{llcll} \text{Seja} & \mathcal{F}: & \mathcal{I} & \rightarrow & \Re^n \\ \text{Seja} & \|\mathcal{F}'(t)\| & \neq & 0 & \\ \text{e} & \mathcal{F}'(t) & & & \text{derivável} \end{array}$$

**Slide 29**

$$\begin{array}{rll} \text{Vector velocidade} = & \mathcal{F}'(t) & \\ \text{Vector aceleração} = & \mathcal{F}''(t) & = a_T\mathcal{T}(t) + a_N\mathcal{N}(t) \\ \text{aceleração tangencial} = & a_T & = v'(t) \\ \text{aceleração centrípeta ou normal} = & a_N & = \frac{v^2(t)}{\rho} \end{array}$$



## Curvas - Aceleração - Exercício

Considere a curva $C : 2y = x^2$, $x \geq 0$.

Obtenha uma parametrização para a curva e calcule as componentes tangencial e normal da aceleração no instante $t = 1$.

**Slide 30**