



Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

CONTROLO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS DE ENGENHARIA CIVIL

Carlos Manuel Ramos Moutinho

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil

Agosto de 2007

À minha filha Helena

RESUMO

Muitas estruturas de Engenharia Civil têm problemas de vibrações excessivas originados pela actuação de diversas acções dinâmicas de carácter periódico ou transiente. É o caso de pontes pedonais solicitadas pelas acções resultantes das actividades dos peões, podendo conduzir à ocorrência de fenómenos de ressonância na direcção vertical ou horizontal, ou então de lajes de edifícios sujeitas a diferentes tipos de cargas móveis. É também o caso de pontes de grande vão ou edifícios altos solicitados pela acção do vento ou de pontes rodoviárias, ferroviárias ou de alta velocidade, excitadas pelas cargas dinâmicas provenientes do tráfego do material circulante.

Nestas situações, a implementação de sistemas de controlo de vibrações pode melhorar o desempenho estrutural, fazendo com que os níveis de vibração sejam reduzidos para limites aceitáveis estabelecidos para cada situação em concreto, impostos por normas ou critérios de segurança relativamente a estados limites últimos ou de utilização. Para o efeito, pode recorrer-se a diversas técnicas de controlo de vibrações de carácter passivo, activo, semi-activo ou híbrido. A escolha da técnica a adoptar em caso depende de vários factores, tais como a complexidade da estrutura e do sistema de controlo, a natureza das acções exteriores, a fiabilidade e robustez do sistema e o seu custo.

Neste contexto, este trabalho começa por sistematizar e descrever alguns sistemas de controlo que têm sido implementados em estruturas reais, e expor o conteúdo de algumas normas Portuguesas e estrangeiras que estabelecem critérios para a fixação de níveis máximos de vibração em estruturas do ponto de vista do seu bom funcionamento em serviço. Seguidamente, é feita uma abordagem ao estudo de sistemas de controlo clássicos e modernos, pouco divulgados no âmbito da Engenharia Civil, tendo como objectivo a obtenção de ferramentas de análise e dimensionamento de sistemas activos, as quais podem ser também particularizadas para o estudo de outro tipo de sistemas de controlo. Finalmente, é demonstrada a utilidade de sistemas de controlo mediante a sua implementação em modelos laboratoriais, assim como em estruturas reais, levando a que o trabalho realizado tenha uma importante componente de natureza experimental.

ABSTRACT

Many Civil Engineering structures have vibration problems due to several dynamic loads of harmonic or transient nature. This is the case of footbridges subjected to several forces induced by pedestrian activities, which can originate resonance phenomena in vertical or horizontal direction, or building floors excited by different moving loads. This is also the case of large span bridges or tall buildings subjected to wind loads or the case of highway, railway and high-speed railway bridges excited by the dynamic loads of the vehicles or trains.

In these situations, the implementation of vibration control systems can improve the structural performance by decreasing the vibration levels to acceptable limits established for each particular situation, which are imposed by some design codes or safety criteria related to serviceability or ultimate limit states. For this purpose, it is possible to use several passive, active, semi-active or hybrid vibration control techniques. The adequate solution for each case depends on several factors like the complexity of the structure and the control system, the nature of the external loads, reliability and cost.

In this context, the first objective of this work is to summarize and describe some control systems which have been implemented in real structures, as well as expose the contents of some Portuguese and international codes which define criteria to establish the maximum vibration levels in structures, from the point of view of its good performance on serviceability conditions. Next goal is to expose the study about classical and modern control systems, which is not very divulgated in Civil Engineering, aiming the achievement of analysis and design tools of active systems, which can also be used to study other kind of control schemes. Finally, the usefulness of control systems is demonstrated by several implementations in laboratorial models, as well as in real structures, which has introduced an important component of experimental nature in this work.

RÉSUMÉ

Beaucoup de structures de Génie Civil ont des problèmes de vibrations excessives avec origine dans l'action de diverses actions dynamiques de caractère périodique ou passager. C'est le cas de ponts de piétons soumises par des diverses actions liées aux activités des piétons, en pouvant de conduire à l'apparition de phénomènes de résonance dans la direction verticale ou horizontale, ou alors de plates de bâtiments sujets à des différents types de chargements mobiles. C'est aussi le cas des ponts de grand largeur ou des bâtiments hauts sujets à l'action du vent ou des ponts routiers, ferroviaires ou de haute vitesse, excités par les chargements dynamiques provenant du trafic du matériel circulant.

Dans ces situations, la implémentation de systèmes de contrôle de vibrations peut améliorer la performance structurelle, en faisant que les niveaux de vibrations soient réduits pour les limites acceptables établies pour chaque situation réelle, imposés par des normes ou des critères de sécurité à l'égard d'états limites ultimes ou d'utilisation. À cet effet, il peut se faire appel à des diverses techniques de contrôle de vibrations de caractère passif, actif, semi-actif ou hybride. Le choix de la technique à adopter en chaque cas dépend de plusieurs facteurs tels comme la complexité de la structure et du système de contrôle, la nature des actions extérieures, la fiabilité et la robustesse du système et son coût.

Dans ce contexte, ce travail a par premier objectif systématiser et décrire quelques systèmes de contrôle qui ont été implémentés dans des structures réelles, et exposer le contenu de quelques normes Portugaises et étrangères qui établissent des critères pour la fixation de niveaux limite de vibration dans des structures du point de vue de leur bon fonctionnement en service. Ensuite, il se prétend faire un abordage à l'étude des systèmes de contrôle classiques et modernes, peu divulgué aux Génie Civil, en ayant l'objectif de l'obtention d'outils d'analyse et de calculé des systèmes actifs, qui peuvent être utilisés aussi dans l'étude d'autre type de systèmes de contrôle. Finalement, il se prétend démontrer l'implémentation de systèmes de contrôle dans des modèles en laboratoire, ainsi que dans des structures réelles, ce qui fait intervenir dans ce travail une importante composante de nature expérimentale.

AGRADECIMENTOS

Quero manifestar o meu agradecimento a todas as pessoas que me ajudaram no desenvolvimento deste trabalho, tendo cada um em particular contribuído com o seu estímulo, dedicação e amizade. De entre todos, gostaria de manifestar a minha especial gratidão:

- Ao Professor Álvaro Cunha, pelo trabalho de orientação desta tese, pelo seu empenhamento e disponibilidade, pelos comentários sempre sábios e oportunos, pela correcção exímia dos textos e pelas facilidades e meios que colocou ao meu dispor no decorrer deste trabalho, em especial durante realização das experiências de controlo;

- À Professora Elsa Caetano, pela co-orientação deste trabalho, pela ajuda prestada na resolução de diversos problemas de natureza numérica e experimental, e pelos ensinamentos transmitidos e elementos facultados relativos à implementação do sistema de controlo de vibrações na ponte pedonal Pedro e Inês;

- Ao Professor Joaquim Mendes, pela ajuda na escolha de soluções de software, hardware e equipamentos, bem como pelo apoio prestado na sua utilização;

- Ao Professor Armindo Lage, pela ajuda preciosa na resolução de problemas do foro da electrotecnia durante o trabalho experimental;

- Aos Professores Martins de Carvalho, Lobo Pereira e Manuel Quintas, pelos ensinamentos e troca de impressões sobre alguns temas relacionados com o controlo de sistemas;

- Ao Engenheiro António Cardoso, pelo trabalho e ajuda prestados na implementação do sistema de monitorização de vibrações da ponte Pedro e Inês;

- À Tecnogial, na pessoa do Sr. Rui Almeida, pela competência demonstrada na execução dos modelos laboratoriais desenvolvidos;

- À minha esposa e restante família, pelo apoio, encorajamento e compreensão demonstrados ao longo destes últimos anos de intenso trabalho.

- À Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) no contexto do projecto de investigação “Controlo de Vibrações em Estruturas de Engenharia Civil” (POCTI/ECM/55310/2004), pelo apoio prestado na aquisição de equipamentos e na construção de modelos laboratoriais.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

- 1.1 Breve referência histórica
- 1.2 Problemas de vibrações em estruturas
- 1.3 Caracterização das técnicas de controlo
- 1.4 Enquadramento e objectivos do trabalho
- 1.5 Organização e descrição sumária da tese

CAPÍTULO 2 – ESTADO DA ARTE

- 2.1 Introdução
- 2.2 Avaliação dos níveis de vibração em estruturas
 - 2.2.1 Critérios de avaliação
 - 2.2.2 Critérios estruturais
 - 2.2.3 Critérios de conforto humano
 - 2.2.4 Recomendações relativas a algumas estruturas
 - 2.2.4.1 Lajes de edifícios
 - 2.2.4.2 Pontes pedonais
 - 2.2.4.3 Edifícios altos
- 2.3 Sistemas de controlo de vibrações na Engenharia Civil
 - 2.3.1 Classificação dos diferentes sistemas
 - 2.3.2 Sistemas passivos
 - 2.3.3 Sistemas activos
 - 2.3.4 Sistemas semi-activos
 - 2.3.5 Sistemas híbridos

CAPÍTULO 3 – MODELAÇÃO E ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS

- 3.1 Introdução
- 3.2 Elementos de cálculo matricial e análise modal
 - 3.2.1 Valores e vectores próprios
 - 3.2.2 Transformação matricial e diagonalização

3.2.3 Frequências naturais e modos de vibração de sistemas mecânicos

3.2.4 Condições de ortogonalidade

3.3 Transformada de Laplace

3.3.1 Introdução

3.3.2 Definição da Transformada de Laplace

3.3.3 Transformada de Laplace de algumas funções simples

3.3.4 Tabela de Transformadas de Laplace

3.3.5 Propriedades e teoremas da Transformada de Laplace

3.3.5.1 Linearidade da Transformada de Laplace

3.3.5.2 Teoremas da Translação no eixo s e no eixo t

3.3.5.3 Teorema do integral de convolução

3.3.5.4 Teoremas da derivação e integração

3.3.5.5 Teoremas do valor final e valor inicial

3.3.6 Transformada Inversa de Laplace

3.3.6.1 Definição

3.3.6.2 Método da expansão em frações parciais

3.3.6.3 Método do integral de convolução

3.4 Representação de sistemas dinâmicos

3.4.1 Representação sob forma de equações do movimento

3.4.1.1 Sistemas de 1 grau de liberdade

3.4.1.2 Sistemas de vários graus de liberdade

3.4.1.3 Decomposição modal

3.4.2 Representação sob forma de equações de entrada-saída

3.4.3 Representação sob forma de funções de transferência

3.4.4 Representação em espaço de estado

3.4.4.1 Formulação geral

3.4.4.2 Forma canónica controlável

3.4.4.3 Forma canónica observável

3.4.5 Equivalências entre representações de sistemas

3.4.5.1 Conversão de espaço de estado para funções de transferência

3.4.5.2 Conversão de funções de transferência para espaço de estado

3.4.6 Linearização de modelos não-lineares

3.5 Análise da resposta no domínio do tempo

3.5.1 Introdução

3.5.2 Utilização do método da Transformada de Laplace

3.5.3 Método da sobreposição modal

3.5.4 Solução da equação de estado

- 3.5.5 Caracterização qualitativa da resposta transiente
- 3.6 Análise da resposta no domínio da frequência
 - 3.6.1 Introdução
 - 3.6.2 Determinação da Função de Resposta em Frequência
 - 3.6.3 Diagrama de Bode
 - 3.6.4 Diagrama de Nyquist

CAPÍTULO 4 – MODELAÇÃO E ANÁLISE DE SISTEMAS DE CONTROLO

- 4.1 Introdução
- 4.2 Noções básicas
 - 4.2.1 Tipos de malha
 - 4.2.2 Tipos de realimentação
 - 4.2.3 Diagramas de blocos
 - 4.2.4 Função de transferência de um sistema em malha fechada
- 4.3 Controladores básicos
 - 4.3.1 Controlador proporcional
 - 4.3.2 Controlador derivativo
 - 4.3.3 Controlador integral
 - 4.3.4 Controlador Proporcional-Integral-Diferencial
 - 4.3.5 Sintonização de controladores PID
 - 4.3.5.1 Métodos de sintonização
 - 4.3.5.2 Primeiro método de Ziegler-Nichols
 - 4.3.5.3 Segundo método de Ziegler-Nichols
- 4.4 Método do lugar das raízes
 - 4.4.1 Introdução
 - 4.4.2 Diagrama do lugar das raízes
 - 4.4.2.1 Representação vectorial de números complexos
 - 4.4.2.2 Determinação dos pólos e zeros
 - 4.4.2.3 Definição do diagrama
 - 4.4.2.4 Propriedades do diagrama
 - 4.4.3 Aplicação a uma estrutura de vários graus de liberdade
 - 4.4.4 Dimensionamento de controladores
- 4.5 Controlo colocado e não-colocado
 - 4.5.1 Caracterização das funções de transferência
 - 4.5.2 Análise da estabilidade

4.6 Método da alocação de pólos

4.6.1 Introdução

4.6.2 O problema da alocação de pólos

4.6.3 Noção de controlabilidade

4.6.4 Noção de observabilidade

4.6.5 Controlo por alocação de pólos

4.6.5.1 Determinação da matriz de ganho

4.6.5.2 Recurso ao modelo na forma canónica controlável

4.6.5.3 Utilização da fórmula de Ackermann

4.6.6 Dimensionamento de observadores de estado

4.6.6.1 Aspectos gerais

4.6.6.2 Formulação do problema

4.6.6.3 Métodos para a determinação da matriz de ganho

4.6.7 Implementação de controladores e observadores de estado

4.7 Sistemas de controlo digitais

4.7.1 Introdução

4.7.2 Modelação do processo de digitalização

4.7.3 Transformada z

4.7.4 Análise da estabilidade

4.7.5 Análise da resposta transiente

4.7.6 Transformações bilineares

CAPÍTULO 5 - IMPLEMENTAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLO EM MODELOS LABORATORIAIS

5.1 Introdução

5.2 Controlo de uma plataforma vibratória

5.2.1 Descrição do problema

5.2.2 Objectivos

5.2.3 Descrição do modelo e equipamentos utilizados

5.2.4 Descrição do software desenvolvido

5.2.5 Dimensionamento dos controladores

5.2.6 Verificação experimental da eficácia do sistema de controlo

5.3 Controlo de vibrações num pórtico de 1 piso

5.3.1 Objectivos

5.3.2 Sistema passivo composto por um TMD

- 5.3.2.1 Sintonização do dispositivo para cargas harmónicas
 - 5.3.2.2 Avaliação do desempenho no caso de acções sísmicas
 - 5.3.3 Sistema activo composto por um AMD
 - 5.3.3.1 Descrição do dispositivo de controlo
 - 5.3.3.2 Implementação do sistema activo
 - 5.3.3.3 Desempenho para acções impulsivas
 - 5.3.3.4 Ensaio com acções harmónicas
 - 5.3.3.5 Avaliação da eficácia para acções sísmicas
 - 5.3.4 Apreciação global dos resultados
- 5.4 Implementação de um AMD num pórtico de 3 pisos
 - 5.4.1 Objectivos
 - 5.4.2 Descrição do modelo laboratorial e equipamentos utilizados
 - 5.4.3 Identificação dos parâmetros dinâmicos do sistema
 - 5.4.4 Desenvolvimento do modelo numérico
 - 5.4.5 Estudo do sistema de controlo
 - 5.4.5.1 Análise da estabilidade
 - 5.4.5.2 Diagrama do lugar das raízes
 - 5.4.6 Análise dos resultados experimentais
- 5.5 Implementação de uma diagonal activa num pórtico de 3 pisos
 - 5.5.1 Motivação e objectivos da experiência
 - 5.5.2 Descrição do sistema de actuação e instrumentação utilizada
 - 5.5.3 Identificação dos parâmetros dinâmicos do sistema
 - 5.5.4 Caracterização do modelo numérico
 - 5.5.5 Estudo do sistema de controlo
 - 5.5.5.1 Controlabilidade e observabilidade
 - 5.5.5.2 Definição dos objectivos do controlo
 - 5.5.5.3 Determinação da matriz de ganho
 - 5.5.6 Resultados experimentais
 - 5.5.7 Comentários finais
- 5.6 Implementação de um pêndulo invertido
 - 5.6.1 Motivação da experiência
 - 5.6.2 Equações do movimento
 - 5.6.3 Linearização das equações do movimento
 - 5.6.4 Modelo em espaço de estado
 - 5.6.5 Dimensionamento do controlador
 - 5.6.6 Descrição da experiência laboratorial
 - 5.6.7 Análise do desempenho sistema de controlo

CAPÍTULO 6 - IMPLEMENTAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLO EM ESTRUTURAS REAIS

6.1 Introdução

6.2 Implementação de um AMD numa ponte pedonal flexível

6.2.1 Descrição geral da estrutura

6.2.2 Identificação dos parâmetros modais

6.2.3 Estudo do sistema de controlo activo

6.2.3.1 Número e posicionamento de sensores e actuadores

6.2.3.2 Estratégia de controlo

6.2.4 Avaliação da eficiência esperada utilizando o AMD existente na FEUP

6.2.4.1 Descrição do esquema de controlo

6.2.4.2 Caracterização do AMD

6.2.4.3 Análise do sistema através método do lugar das raízes

6.2.5 Implementação do sistema de controlo

6.2.5.1 Descrição dos equipamentos e instrumentação

6.2.5.2 Descrição dos testes realizados

6.2.6 Conclusões e comentários finais

6.3 Implementação de um sistema de controlo e monitorização das vibrações na ponte pedonal

Pedro e Inês

6.3.1 Enquadramento e objectivos

6.3.2 Breve descrição da ponte

6.3.3 Caracterização experimental dos parâmetros modais

6.3.3.1 Ensaios realizados

6.3.3.2 Frequências naturais e modos de vibração

6.3.3.3 Coeficientes de amortecimento

6.3.4 Resposta transversal à acção dos peões

6.3.5 Sistema de controlo de vibrações

6.3.5.1 Dimensionamento dos TMDs

6.3.5.2 Funcionamento dos TMDs no controlo das vibrações laterais

6.3.6 Implementação de um sistema de monitorização de vibrações

6.3.6.1 Descrição da instrumentação utilizada

6.3.6.2 Arquitectura do sistema de monitorização

6.3.6.3 Análise automática de dados e visualização resultados

6.3.7 Conclusões e comentários finais

CAPÍTULO 7 – CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Apreciação global do trabalho

7.2 Conclusões

7.2.1 Estratégias de controlo

7.2.2 Sistemas de actuação

7.2.3 Adequabilidade dos sistemas activos

7.3 Perspectivas de desenvolvimentos futuros

ANEXOS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 BREVE REFERÊNCIA HISTÓRICA

Embora só no último século se tenha assistido a uma generalização da utilização de técnicas de controlo em sistemas dinâmicos, a tentativa de reduzir vibrações excessivas em estruturas remonta a tempos mais antigos, onde se conhecem algumas aplicações de carácter passivo com o objectivo de solucionar problemas de funcionamento estrutural ou de melhorar a resistência de construções aos sismos. Um dos casos porventura mais observados, e que ainda hoje continua a ser frequentemente utilizado, tem a ver com a atenuação de vibrações através da introdução de elementos que aumentem a rigidez das estruturas. Este procedimento, que pode ser encarado como uma simples operação de reforço, não é nada mais que um processo de controlo através da introdução de elementos de rigidez passiva, provocando uma alteração da dinâmica do sistema e, conseqüentemente, da sua resposta a acções exteriores. Também no passado se registaram soluções de controlo um pouco mais sofisticadas, como por exemplo, a utilização de uma camada arenosa sob a fundação de determinadas construções, na tentativa de criar algum isolamento de base à componente sísmica horizontal [52].

Os sistemas de controlo realimentados, que estão na origem do funcionamento de sistemas activos e semi-activos actuais, têm igualmente implementações que remontam a mais de dois mil anos. É o caso do primeiro relógio de água desenvolvido pelo Grego Ktesibios em Alexandria no Egipto, no terceiro século A.C. [96]. O funcionamento deste relógio baseia-se na utilização de dois reservatórios de água, sendo que, num primeiro reservatório procura-se manter um determinado nível de água, fazendo com que, através de um tubo instalado na sua base, seja conduzido um determinado caudal para um segundo reservatório fechado. Ora, estando a água sensivelmente ao mesmo nível no primeiro reservatório, as perturbações superficiais no líquido não afectam a quantidade do caudal que sai pela base, podendo garantir-se com elevado rigor, que o caudal emitido é constante. Como consequência, garante-se que a velocidade de subida do nível de água no segundo reservatório é também constante, possibilitando a medição rigorosa do tempo decorrido por observação da cota do líquido. Na admissão de água no primeiro reservatório de forma a manter permanentemente o seu nível, Ktesibios utilizou um dispositivo semelhante a um descarregador de bóia cujo princípio de funcionamento assenta na monitorização contínua da cota do líquido, constituindo-se assim um sistema de malha fechada.

Apesar de terem existido um conjunto de contribuições anteriores, só em 1868 J. C. Maxwell formulou matematicamente o problema de controlo, sendo capaz de explicar a origem da instabilidade num sistema realimentado [96]. Mas foi no século passado que a teoria do controlo de sistemas sofreu uma clara evolução, impulsionada pela revolução industrial, pela necessidade de comunicações durante as duas grandes guerras mundiais e, posteriormente, pela época da exploração espacial. Devido às contribuições de H.S. Black, H. Nyquist e H. W. Bode nos anos 20 e 30 do século passado, foi possível estabelecer técnicas de análise de sistemas no domínio da frequência que ainda hoje são ensinadas no contexto dos sistemas lineares do tipo SISO (Single-Input/Single-Output). Durante a segunda metade desse século, com o surgimento do computador digital e com necessidade de resolver problemas de

controlo associados às viagens espaciais, verificou-se um grande desenvolvimento de técnicas vocacionadas para sistemas multivariáveis (MIMO) tais como o controlo óptimo e controlo robusto.

Na Engenharia Civil, só a partir da década de 70, é que se começaram a desenvolver e implementar dispositivos específicos de sistemas de controlo integrados em estruturas de edifícios. Nessa altura, surgiram as primeiras aplicações de controlo passivo utilizando diversos tipos de amortecedores adaptados a pórticos de edifícios, com o objectivo de melhorar o processo de dissipação da energia induzida pela ocorrência de sismos [114]. De facto, estes aparelhos funcionam como elementos dissipadores locais, aliviando as secções dos elementos estruturais que tradicionalmente desempenhavam isoladamente essa função através da exploração da sua resistência e ductilidade. Nesse mesmo período, os sistemas de isolamento de base tiveram também grande desenvolvimento, constituindo uma alternativa relativamente aos sistemas de dissipação de energia referidos anteriormente, particularmente na sua aplicação a novas construções. Actualmente são um dos sistemas mais interessantes de protecção sísmica de estruturas, com inúmeras aplicações por todo o mundo.

Apesar da teoria que estabelece o funcionamento dos amortecedores de massas passivas sintonizadas (TMDs) ter sido exposta no ano de 1928 por Ormondroyd e Den Hartog [102], só a partir do ano de 1973 é que começaram a surgir aplicações relevantes nas estruturas de Engenharia Civil, com a utilização de um dispositivo deste género na torre de televisão CN Tower em Toronto com 553m de altura [38]. Estes aparelhos, hoje em dia bastante divulgados, revelam ser uma boa solução para problemas no domínio da Engenharia do Vento e noutras áreas que envolvam vibrações harmónicas das estruturas, com especial ênfase para o caso de pontes de peões e lajes de edifícios, onde se têm registado aplicações de grande interesse [6, 93]. Os amortecedores de líquido sintonizado (TLDs), cujo princípio de funcionamento é semelhante aos TMDs, começaram a ter também algumas aplicações em estruturas a partir de 1987, data em que se instalaram 25 destas unidades na torre do aeroporto de Nagasaki no Japão. Os TLDs são particularmente interessantes para o controlo de vibrações de baixa frequência, tipicamente inferiores a 1Hz.

A utilização de sistemas activos e semi-activos em estruturas é ainda mais recente, tendo-se verificado a primeira implementação de um sistema activo composto por actuadores de massa activa no edifício Kyobashi Center no ano de 1989, e um sistema semi-activo composto por diagonais de rigidez variável (AVS) no Kajima Technical Research Institute em 1990, ambos localizados em Tóquio [116]. Desde então, tem-se registado uma crescente utilização destas técnicas para reduzir as vibrações produzidas pelos sismos e vento em estruturas, estimando-se que, até meados da actual década, só no Japão tenham sido instalados mais de 50 sistemas deste género em edifícios [57]. Hoje em dia, assiste-se a um interesse generalizado no desenvolvimento de estratégias e dispositivos de controlo que utilizem estas técnicas, com especial atenção para o uso de sistemas semi-activos, pelas vantagens que apresentam relativamente às outras soluções.

1.2 PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS

Os problemas de vibrações em estruturas podem ser agrupados em dois domínios distintos, nomeadamente, os problemas de vibrações que podem afectar a integridade estrutural e os problemas relacionados com o nível de conforto proporcionado aos seus utilizadores.

No primeiro caso, o que está em causa é o Estado Limite Último de resistência das estruturas, inserindo-se nele a generalidade dos problemas da Engenharia Sísmica. De facto, acções exteriores adversas como esta podem induzir danos estruturais significativos ou, em última análise, levar as estruturas ao colapso. Naturalmente que esta é a área que mais preocupa a comunidade científica, devido ao impacto social e económico resultante dos efeitos catastróficos dos sismos. Por esta razão, é neste domínio que se tem assistido ao maior número de aplicações de técnicas de controlo no sentido de melhorar o processo de dissipação de energia ou de criar um sistema de isolamento sísmico.

A segunda classe de problemas está relacionada com o cumprimento do Estado Limite de Utilização das estruturas no que diz respeito à satisfação de limites impostos para vibrações excessivas. Ao contrário da situação anterior, o que está em causa não é a integridade estrutural, mas o bom funcionamento em serviço, incluindo-se nesta área a generalidade dos problemas da engenharia do vento, assim como os problemas relacionados com fenómenos de ressonância em estruturas sujeitas à acção de cargas móveis.

De facto, o efeito da acção dinâmica das rajadas de vento sobre as fachadas de edifícios altos pode causar amplitudes de vibração perceptíveis aos ocupantes, especialmente na ocorrência de fenómenos de ressonância associados ao baixo conteúdo espectral da acção [6]. No caso de estruturas esbeltas, tais como torres e chaminés, a acção do vento pode ainda originar outro tipo de fenómenos, como por exemplo a ocorrência de libertação de vórtices (“vortex-shedding”), verificando-se que, se a frequência de formação destes coincidir com uma das frequências naturais da estrutura, podem originar-se níveis de vibração elevados na direcção transversal à acção directa do vento [20]. Se, por outro lado, a estrutura apresentar modos de vibração de torção acoplados a modos de flexão, como sucede em algumas estruturas de geometria laminar como tabuleiros de pontes ou certas coberturas, a acção do vento pode também despoletar um fenómeno conhecido por “flutter”, situação de instabilidade caracterizada pelo anulamento do amortecimento global, em consequência do efeito aeroelástico resultante da interacção entre a estrutura e o escoamento do ar.

A excitação do vento pode ainda afectar elementos estruturais, como tirantes de pontes suspensas ou pontes atirantadas. Além do efeito de rajada e da possibilidade de ocorrência de ressonâncias originada pela libertação de vórtices, estes elementos podem também ser excitados pelo efeito de galope, susceptível de ocorrer em tirantes com determinados tipos de secções transversais, ou pelo efeito de interferência de esteira associado à proximidade de tirantes ou de tirantes com outros elementos estruturais [24]. Além disso, os tirantes de pontes podem experimentar níveis de vibração elevados sob a acção combinada do vento e chuva em determinadas circunstâncias desfavoráveis. Tipicamente, estas vibrações ocorrem para velocidades moderadas do vento (entre 8 a 15 m/s) para uma direcção incidente

que faz um ângulo entre 20 a 60 graus com o plano do cabo, com o vento a actuar na direcção do sentido descendente destes elementos [74]. Os níveis de vibração são por vezes extremamente elevados, atingindo amplitudes de 0,25m a 1m, o que pode levar à ocorrência de choques violentos entre cabos adjacentes.

Relativamente à possibilidade de ocorrência de vibrações excessivas em estruturas solicitadas por cargas móveis, começa-se por referir o caso de pontes rodoviárias e ferroviárias sujeitas à acção das cargas dinâmicas associadas à passagem dos veículos ou material circulante. No caso das pontes rodoviárias, a rugosidade apresentada pelo pavimento é muitas vezes a fonte principal de indução de vibrações na estrutura, originando fenómenos de interacção dinâmica ponte-veículos, decorrentes da proximidade entre as frequências naturais dos veículos e frequências naturais da ponte [27]. Nas pontes ferroviárias, podem ocorrer vibrações de natureza semelhante. Porém, no caso de pontes para tráfego de alta velocidade, podem ocorrer fenómenos de ressonância particularmente significativos, motivados pela frequência de excitação originada pela passagem sucessiva dos rodados de comboios muito longos nas várias secções da estrutura. Efectivamente, a acção dos rodados sobre a ponte pode ser caracterizada pela aplicação de funções de carga com uma frequência que depende da velocidade do comboio e da distância entre os seus eixos. Ora, para comboios longos, essa acção prolonga-se por um período de tempo suficiente para induzir níveis elevados de vibração caso a frequência de passagem dos rodados coincida com uma das frequências naturais da estrutura. Além destes problemas, o tráfego ferroviário pode ainda causar níveis de vibração excessivos em construções localizadas próximas da via, afectadas pela propagação das vibrações através do solo.

As estruturas que servem de apoio às mais diversas actividades humanas podem também experimentar níveis de vibração elevados, caso a frequência da passada, ou algum seu harmónico ou sub-harmónico, coincida com uma das frequências naturais do sistema em análise [6]. É o caso de lajes de edifícios ou de pontes pedonais sujeitas à acção do andar, da corrida ou do salto rítmico. No caso de lajes de salões de festas, de recintos desportivos ou de bancadas de estádios, existe a probabilidade de ocorrência de vibrações excessivas não só pela possibilidade de ocorrência de fenómenos de ressonância, mas também pelas acções dinâmicas intensas e sincronizadas que normalmente caracterizam as actividades nelas desenvolvidas.

No caso de pontes pedonais, além das vibrações verticais que podem ser originadas pela passagem de peões, existe ainda a possibilidade de ocorrerem vibrações laterais excessivas se a estrutura exibir uma frequência natural transversal próxima de 1Hz, podendo despoletar-se um fenómeno conhecido como “lock-in” [35]. Este fenómeno é motivado pela tendência que os peões têm em sincronizar-se com movimentos laterais da ponte a partir do momento em que estes começam a ser perceptíveis, procurando por este meio obter maior conforto, ou, em casos mais extremos, alcançar o próprio equilíbrio. O problema é que, como o movimento dos peões está em fase com as vibrações laterais da ponte, estes acabam por contribuir para a amplificação da resposta da estrutura em vez de a amortecerem, gerando-se assim uma situação de instabilidade.

1.3 CARACTERIZAÇÃO DAS TÉCNICAS DE CONTROLO

Já foi referido que o controlo de vibrações pode ser feito através de técnicas de controlo passivo, activo e semi-activo. Poderá ainda ser utilizada a técnica de controlo híbrido, que resulta de uma combinação adequada destas técnicas, sendo vulgar a combinação de controlo activo ou semi-activo com controlo passivo.

As técnicas de controlo passivo baseiam-se na utilização de dispositivos que não necessitam de qualquer fonte de energia exterior para exercerem a acção de controlo, sendo as que mais têm sido implementadas na Engenharia Civil, com particular ênfase na área da Engenharia Sísmica. De facto, grande parte dos dispositivos passivos estão preparados para lidar com forças de elevada amplitude e possuem elevada capacidade de dissipação da energia. Além disso, comparativamente com outras técnicas, são uma solução mais interessante em termos de fiabilidade, custo e manutenção. Por estas razões, na implementação de um sistema de controlo de vibrações deve-se sempre ponderar inicialmente a utilização de um sistema passivo e, só no caso deste não ser suficientemente eficaz, avançar para outras técnicas mais sofisticadas. Como principal desvantagem, os sistemas passivos demonstram ser relativamente menos eficientes que os sistemas activos ou semi-activos, particularmente nas situações em que se exige alguma adaptabilidade da acção de controlo em função da resposta estrutural.

As técnicas de controlo activo, por seu turno, são as que potencialmente conseguem alcançar níveis de eficácia mais elevados, devido à possibilidade de permanentemente poderem aplicar à estrutura as forças de controlo necessárias, tendo em vista um determinado objectivo a atingir. No entanto, apresentam alguns inconvenientes, nomeadamente, o elevado custo directo e em manutenção, a dificuldade que por vezes têm em aplicar forças à estrutura numa determinada gama de frequências e amplitudes, e também a possibilidade destes sistemas em determinadas circunstâncias poderem ser fálveis. De facto, a elevada quantidade de energia requerida para alimentar os actuadores pode provocar falhas nos sistemas de alimentação e, por outro lado, a ocorrência de acções exteriores bastante adversas, como por exemplo os sismos, pode originar falhas gerais de energia tornando os sistemas de controlo activo totalmente inoperantes. Por esta razão, nas situações práticas em que o sistema de controlo é essencial para garantir a segurança da estrutura, procura-se uma solução de controlo híbrido combinando o desempenho de um sistema activo com a fiabilidade de um sistema passivo, de tal forma que, se o sistema activo falhar, se garanta pelo menos o funcionamento do sistema passivo.

Para ultrapassar os problemas de alimentação dos sistemas activos e os problemas de eficácia que os sistemas passivos por vezes apresentam, tem-se dado ênfase ultimamente ao desenvolvimento de sistemas semi-activos [115], os quais podem ser encarados como sendo uma solução intermédia entre as duas técnicas anteriores. De facto, utilizando sistemas de controlo semi-activo é possível resolver o problema da alimentação da energia, conseguindo-se por este meio aplicar forças de grande amplitude através da modificação activa da rigidez ou amortecimento de elementos estrategicamente localizados na estrutura, bastando para isso recorrer a uma pequena quantidade de energia. Para se ter uma ideia da amplitude de

força que é possível atingir com estes sistemas, refira-se que actualmente existem dispositivos de controlo semi-activo que podem aplicar uma força de amortecimento de 100 toneladas com apenas 70 watts de energia, a potência eléctrica de uma simples lâmpada doméstica [71]. Além destas vantagens, a generalidade dos sistemas semi-activos pode funcionar prolongadamente apenas com a utilização de pilhas ou baterias eléctricas. Embora esta técnica possa ser utilizada em diversos domínios da Engenharia Civil, a grande maioria das aplicações tem-se centrado nos problemas de Engenharia Sísmica, tendo-se registando ultimamente algumas aplicações em outros domínios como por exemplo no controlo de vibrações em tirantes de pontes [24].

1.4 ENQUADRAMENTO E OBJECTIVOS DO TRABALHO

Sendo a área do controlo de vibrações em estruturas um assunto de grande interesse, que tem suscitado um elevado número de projectos de investigação e aplicações por todo o mundo, este trabalho surge como uma continuidade da tese de Mestrado anteriormente realizada no âmbito do controlo passivo e activo de vibrações em pontes de pedonais [84]. Além disso, tendo-se posteriormente desenvolvido um conjunto de implementações reais de sistemas de controlo, nesta dissertação procura-se expor o resultado de algum do trabalho experimental e de investigação neste domínio, levado a efeito nos últimos anos no âmbito das actividades do Laboratório de Vibrações e Monitorização de Estruturas (VIBEST) da FEUP.

Como se sabe, o tema do controlo de vibrações em estruturas é um assunto muito vasto, sendo impossível abordá-lo detalhadamente nas suas diferentes vertentes num único trabalho como este. Por isso, houve necessidade de seleccionar alguns temas de estudo em detrimento de outros que naturalmente suscitam grande interesse. Neste caso, optou-se por seguir uma linha de investigação privilegiando o estudo de sistemas activos, sem contudo menosprezar outros sistemas de controlo. De facto, o controlo activo de estruturas pode ser encarado como uma abordagem geral dos sistemas de controlo, na medida em que qualquer outro sistema pode ser dele idealizado ou deduzido. Isto é, o efeito exercido sobre a estrutura por qualquer sistema passivo ou semi-activo pode ser compreendido como o efeito da aplicação de forças activas equivalentes. Por exemplo, a introdução de um amortecedor viscoso linear numa estrutura pode ser equiparado à aplicação de uma força activa cuja lei de controlo produz, em cada instante de tempo, uma força actuante proporcional à velocidade do ponto de ligação do dito amortecedor. De forma análoga, o efeito de um actuador semi-activo, tal como um amortecedor magnetoreológico, pode ser reproduzido pela introdução de forças activas equivalentes à variação da viscosidade do líquido ditada pela lei de controlo utilizada. A abordagem aos sistemas activos, além de poder ser considerada uma abordagem generalista dos sistemas de controlo, tem como base uma componente matemática extremamente interessante, cuja compreensão permite ter uma visão mais alargada sobre o que são os sistemas de controlo e quais as suas potencialidades, quer sejam activos, passivos ou semi-activos.

Neste contexto, este trabalho caracteriza-se por duas linhas principais de orientação, reflectindo os objectivos a atingir, nomeadamente, uma vertente dirigida para a exposição teórica de assuntos relacionados com a área do controlo de vibrações e uma componente experimental ligada à implementação de sistemas de controlo em modelos físicos laboratoriais e em estruturas reais. Relativamente à primeira componente da investigação, procurou-se fazer uma abordagem aos problemas do controlo numa perspectiva dirigida para as estruturas de Engenharia Civil. De facto, o tema do controlo de sistemas está tradicionalmente ligado a outros domínios da Engenharia, como por exemplo, à Engenharia Aeronáutica, Mecânica ou Electrotécnica, de tal forma que a literatura clássica existente apresenta o tema do controlo dirigido com algum grau de especificidade a essas áreas. É recorrente observar nos livros de controlo exemplos com circuitos eléctricos, esquemas de máquinas, telescópios ou servomotores hidráulicos, e poucas referências a sistemas mecânicos com o nível de complexidade que os problemas de vibrações em estruturas apresentam. Além disso, as referências a estes sistemas limitam-se frequentemente à análise de osciladores de 1 grau de liberdade, constituindo uma abordagem demasiado simplista, principalmente tendo em conta que muitos dos problemas envolvem a dinâmica de vários modos de vibração.

À partida, o estudo do controlo de vibrações de uma estrutura pode ser feito como se de um sistema dinâmico qualquer se tratasse, bastando para isso deduzir as equações do movimento que a caracteriza e, a partir delas, resolver o problema matemático em causa. Porém, os sistemas de Engenharia Civil apresentam algumas características que os distinguem da grande parte dos sistemas associados às áreas referidas anteriormente e, como tal, devem ter um tratamento específico de acordo com os objectivos que normalmente se procuram atingir. Uma dessas características tem a ver com o facto de que, em princípio, todos os sistemas estruturais são estáveis, ou seja, só necessitam do controlo para melhorar o seu desempenho, ou então, em situações extremas em que a integridade estrutural está em causa. Além disso, apresentam geralmente um elevado número de frequências naturais, às quais estão associados modos de vibração com baixos níveis de amortecimento. Outra característica importante é que geralmente o controlo tem como objectivo atingir a resposta nula, ou seja, pretende-se que o sistema mantenha o campo de deslocamentos iniciais estáticos, sendo, na maior parte das vezes, suficiente actuar ao nível do amortecimento da estrutura, sem necessidade de alteração das suas frequências naturais.

Ao ter em conta que em muitas das aplicações nesta área os sistemas só funcionam com controlo ligado, e que a resposta procurada não é a resposta nula, mas sim a imposição de um campo de deslocamentos dinâmicos diferente de zero, chega-se à conclusão de que o controlo de vibrações em estruturas é, comparativamente, um problema conceptualmente menos complexo. Consequentemente, alguns dos métodos e procedimentos habitualmente utilizados no contexto dos sistemas de controlo em geral, acabam por não ter grande interesse no caso de sistemas estruturais. Este facto permitiu estabelecer um dos principais objectivos deste trabalho, que consistiu em fazer uma exposição selectiva dos princípios e conceitos básicos na área do controlo de sistemas, numa perspectiva dirigida para os problemas que afectam as estruturas de Engenharia Civil. Nesse sentido, houve necessidade de

inicialmente fazer uma incursão relativamente aprofundada nesta área, para posteriormente fazer uma triagem dos assuntos que podem efectivamente ser úteis no controlo de vibrações em estruturas. Complementarmente, houve também a necessidade de transpor alguns problemas da área do controlo de sistemas para o caso específico das estruturas de Engenharia Civil, tentando correlacionar as variáveis envolvidas entre ambos. Para o efeito, desenvolveram-se vários exemplos elucidativos no sentido de facilitar esta tarefa e de proporcionar uma boa compreensão dos assuntos abordados.

Além desta vertente analítica, neste trabalho procurou-se concretizar diversos sistemas de controlo em modelos laboratoriais e estruturas reais, tendo em vista a aquisição de experiência e conhecimentos associados à sua implementação efectiva. De facto, para se dominar completamente a concepção e funcionamento de um sistema de controlo integrado numa estrutura, não só é necessário ter uma compreensão dos aspectos teóricos do problema, mas é igualmente indispensável conhecer as exigências e implicações práticas da solução escolhida. Além disso, é necessário saber lidar com equipamentos, actuadores e instrumentação, e saber contornar problemas afectos à área experimental, como a existência de não-linearidades, de folgas, atritos e ruído nos sensores. Também é essencial dominar áreas como a análise e processamento de sinais e ter conhecimentos básicos de circuitos eléctricos e de electrónica.

O desenvolvimento desta parte do trabalho só foi possível devido aos equipamentos e instrumentação existentes no VIBEST/FEUP e ao apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia para aquisição de novos equipamentos e construção de modelos físicos, no contexto do projecto de investigação “Controlo de Vibrações em Estruturas de Engenharia Civil” (POCTI/ECM/55310/2004).

1.5 ORGANIZAÇÃO E DESCRIÇÃO SUMÁRIA DA TESE

Os sete capítulos desta tese podem ser enquadrados dentro de três partes essenciais que definiram a linha condutora deste trabalho. A primeira parte tem a ver com a descrição do estado da arte relativo ao tema do controlo de vibrações em estruturas, a segunda parte com a teoria referente à modelação, análise e controlo de sistemas dinâmicos e a terceira parte com a descrição da implementação de sistemas de controlo em modelos laboratoriais e estruturas reais.

Concretamente, no capítulo dois faz-se uma breve descrição de algumas normas Portuguesas e Estrangeiras que tendem a limitar os níveis máximos de vibração em estruturas, dando particular ênfase àquelas que têm em vista o alcance de níveis de conforto para os seus utilizadores. Neste capítulo, faz-se também uma descrição de algumas implementações reais de sistemas de controlo em estruturas de Engenharia Civil, pretendendo-se dar uma perspectiva geral daquilo que tem sido feito neste domínio em termos de técnicas de controlo passivo, activo, semi-activo e híbrido.

O terceiro capítulo é dedicado à modelação e análise de sistemas dinâmicos, no qual se começa por apresentar algumas noções elementares sobre cálculo matricial e análise modal, úteis na exposição de assuntos tratados ao longo do trabalho. Seguidamente, é abordado o tema da transformada de Laplace e

respectiva transformada inversa como ferramenta essencial na modelação de sistemas sob a forma de funções de transferência. Este assunto é pouco divulgado nos cursos de Engenharia Civil, pelo que, neste capítulo se apresentam com detalhe alguns dos seus aspectos mais importantes. Posteriormente, são descritos os métodos de representação de sistemas dinâmicos com interesse para este trabalho, nomeadamente, a representação sob a forma de equações do movimento, sob a forma de equações do tipo entrada-saída, sob a forma de funções de transferência e, finalmente, a representação em espaço de estado. São ainda referidos os processos de equivalência entre as diferentes representações e algumas formas canónicas de interesse. É feita uma incursão nos sistemas não-lineares e sobre a forma como se podem linearizar, tendo em vista a resolução de problemas utilizado as técnicas aplicáveis a sistemas lineares. Por fim, são descritos alguns processos de análise da resposta no domínio do tempo, quer em termos quantitativos, quer em termos qualitativos, e referem-se alguns métodos da análise da resposta em frequência, com especial ênfase para o método de Bode e de Nyquist.

No capítulo quatro é feita uma abordagem aos métodos de modelação e análise de sistemas de controlo tendo em vista o seu dimensionamento. São inicialmente apresentadas algumas noções básicas, partindo-se depois para a exposição dos conceitos associados a um controlador do tipo PID. Seguidamente, descreve-se o método do lugar das raízes como sendo uma das mais interessantes ferramentas de análise de sistemas de controlo representados sob a forma de funções de transferência. É salientado o interesse em utilizar sistemas de controlo “colocados”, tendo em vista a sua robustez relativamente à estabilidade. Posteriormente, é apresentado o método da alocação de pólos, cuja aplicação permite modificar a dinâmica global de um sistema em termos de um conjunto de frequências naturais e coeficientes de amortecimento previamente definidos. São também apresentados métodos para o dimensionamento de observadores de estado, úteis no caso de não se poder medir directamente o vector de estado completo do sistema. Finalmente, é feita uma incursão no tema de sistemas digitais onde, a título introdutório, se descrevem os efeitos da degradação da estabilidade e da resposta transiente decorrente do processo de digitalização dos sinais, fazendo-se também uma referência à transformada z e às respectivas transformações bilineares.

O capítulo cinco apresenta um conjunto de implementações laboratoriais de sistemas de controlo a modelos físicos de escala reduzida, tendo-se inicialmente começado por descrever o processo de controlo de uma plataforma vibratória utilizada para a excitação basal dos modelos. Seguidamente, testou-se a aplicação de um sistema de controlo passivo composto por um TMD para atenuar as vibrações harmónicas e sísmicas num pórtico de 1 piso, tendo-se evoluído posteriormente para a utilização de um AMD destinado a reduzir as vibrações provocadas por cargas impulsivas, harmónicas e sísmicas. Tendo em vista a aplicação de sistemas de controlo a modelos mais complexos, implementou-se seguidamente um AMD para reduzir as vibrações harmónicas num pórtico de 3 pisos induzidas por uma plataforma vibratória especialmente desenvolvida para este trabalho. Logo após, utilizou-se uma diagonal activa inserida no mesmo pórtico com o objectivo de modificar a dinâmica inicial da estrutura, recorrendo à estratégia da alocação de pólos. Por último, implementou-se um sistema de controlo no funcionamento de

um pêndulo invertido. Embora esta experiência não esteja directamente relacionada com uma estrutura de Engenharia Civil, serviu no entanto para consolidar os conhecimentos adquiridos na vertente teórica e experimental do controlo de sistemas, pois, embora a componente analítica deste problema esteja devidamente tratado em diversos livros, a sua implementação laboratorial revela ter um grau de dificuldade elevado.

No capítulo seis apresenta-se um conjunto de implementações de sistemas de controlo em estruturas reais, bem como a implementação de um sistema de monitorização de vibrações numa ponte pedonal controlada com TMDs. Embora sejam áreas do conhecimento diferentes, o controlo de vibrações está tradicionalmente ligado à monitorização dinâmica, pela necessidade que existe de observar o efeito da sua aplicação às estruturas, o que justificou uma incursão também neste domínio. As implementações reais mencionadas referem-se à utilização de um AMD para controlar as vibrações induzidas por peões na ponte pedonal existente no campus da FEUP, assim como à ponte pedonal Pedro e Inês, localizada em Coimbra, na qual se implementou um sistema de controlo de vibrações composto por um conjunto de TMD verticais e horizontais, bem como um sistema de monitorização dinâmica permanente com controlo remoto via Internet.

Finalmente, no capítulo sete descrevem-se as principais conclusões deste trabalho no que respeita à implementação prática das diferentes estratégias de controlo e sistemas de actuação escolhidos, bem como à experiência adquirida com o conjunto de implementações reais levadas a efeito. Apresentam-se também algumas ideias e considerações a ter em conta em trabalhos futuros nesta área.

CAPÍTULO 2

ESTADO DA ARTE

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo começa-se por apresentar um conjunto de critérios de avaliação de vibrações em estruturas, tendo em vista a possível necessidade de implementação de sistemas de controlo. Nas situações em que as vibrações são provocadas por acções exteriores adversas, como é o caso da acção sísmica, os sistemas de controlo podem melhorar o desempenho da estrutura evitando o surgimento de danos estruturais importantes. Por outro lado, nos casos em que está em causa o bom funcionamento da estrutura em serviço, particularmente no que diz respeito ao estado limite de utilização de vibração, a utilização de sistemas de controlo pode conduzir a uma atenuação das vibrações para níveis aceitáveis, podendo estes ser estipulados de acordo com diversas normas Portuguesas ou estrangeiras. Nestas situações, será necessário atender a limiares de aceitabilidade das vibrações, os quais, entre outros factores, têm em conta o tipo de estrutura em análise e a sua utilização. Além de existirem normas que tendem a estabelecer limiares de conforto em termos genéricos baseadas no estudo da percepção das vibrações pelo ser humano, outras há que fixam esses níveis para algumas estruturas em concreto. É o caso das normas que referem especificamente os níveis máximos de vibração aconselhados em determinadas construções, em lajes de edifícios, em edifícios altos expostos ao vento ou em pontes pedonais.

Seguidamente, procura-se fazer uma exposição de algumas normas conhecidas neste domínio, assim como de normas que têm em conta outros critérios de avaliação, tais como critérios estruturais que limitam o surgimento de patologias nas construções, provocadas por explosões ou trabalhos de construção. Embora nestes casos a implementação de soluções de controlo de vibrações não seja tão divulgada, neste trabalho faz-se também uma breve descrição de normas de referência nesta área, com o objectivo de, no conjunto, apresentar uma visão geral sobre os níveis máximos de vibração permitidos em estruturas submetidas aos mais diversos tipos de solicitações dinâmicas.

Numa segunda parte deste capítulo, descrevem-se algumas implementações reais de sistemas de controlo em estruturas de Engenharia Civil localizadas por todo o mundo, assim como algumas aplicações levadas a efeito em Portugal nos últimos anos. Com estes exemplos, pretende-se demonstrar a aplicabilidade de técnicas de controlo passivo, activo, semi-activo e híbrido na atenuação da resposta estrutural à acção sísmica, à acção do vento e à excitação provocada por cargas de natureza periódica. No caso dos sistemas passivos, dá-se particular atenção à utilização de amortecedores metálicos, friccionais, viscosos e viscoelásticos, bem como aos sistemas de isolamento de base, aos amortecedores de massas sintonizadas e aos amortecedores de líquido sintonizado. Já os exemplos de controlo activo centram-se na utilização de amortecedores de massa activa em edifícios, muitas vezes associados a sistemas híbridos. As aplicações de sistemas semi-activos descritas dizem respeito à utilização de sistemas de rigidez variável ou sistemas de amortecimento variável, com particular interesse no caso dos amortecedores magnetoreológicos. Refere-se ainda a utilização de sistemas de amortecedores passivos e semi-activos no controlo de vibrações em tirantes de pontes.

2.2 AVALIAÇÃO DOS NÍVEIS DE VIBRAÇÃO EM ESTRUTURAS

2.2.1 CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

As acções exteriores particularmente severas, como a acção sísmica e alguns casos da acção do vento, podem induzir danos estruturais significativos ou até levar as construções ao colapso. Nestas situações, o critério de avaliação das vibrações em causa é estabelecido de acordo com o estado limite último de resistência das estruturas, condicionado pelas características dos materiais constituintes. Segundo este critério, as acções exteriores devem ser quantificadas através de regulamentos da especialidade e posteriormente deve verificar-se a segurança estrutural de acordo com as regras indicadas em códigos de dimensionamento correspondentes ao tipo de estrutura em análise.

Além destas acções adversas, existem outros tipos de acções exteriores de menor intensidade que também podem provocar danos estruturais, ainda que de menor importância relativamente às anteriores. É o caso de explosões devidas a explorações mineiras, trabalhos de construção próximas de localidades ou o caso de tráfego intenso ou máquinas em funcionamento junto a edifícios existentes. Nestas situações, as vibrações induzidas por estas actividades, além de poderem originar fendilhações em elementos não estruturais como fachadas e paredes divisórias, podem conduzir à fissuração de elementos estruturais diversos. Além disso, podem originar estados de tensão elevados nos materiais e induzir fenómenos de fadiga motivados pelos sucessivos ciclos de solicitação causados pelas vibrações.

No sentido de limitar os danos em estruturas causados por estas solicitações, diversas normas tendem a estabelecer níveis máximos de vibração em construções de modo a salvaguardar determinados critérios estruturais. Genericamente, as normas existentes têm em consideração o tipo de construção em causa, pois, será razoável admitir que os edifícios recentes sejam mais resistentes a danos do que construções mais antigas. Também é vulgar terem em conta factores como a periodicidade, a duração e o conteúdo em frequência das vibrações. Na próxima secção apresenta-se resumidamente o conteúdo de algumas dessas normas, as quais, de uma forma geral, estabelecem limites de vibração em termos de amplitudes de velocidades.

No que respeita a critérios de conforto humano, também existe um conjunto de outras normas que definem níveis máximos de vibração em estruturas de tal forma a que sejam garantidas boas condições de serviço aos seus utilizadores. Caso as vibrações ultrapassem aqueles níveis, além de reduzirem o nível de conforto, podem afectar a capacidade de trabalho e, em certos casos, podem ter implicações ao nível da saúde e segurança dos ocupantes dos edifícios [98]. Tal como sucede com os critérios estruturais mencionados anteriormente, o estabelecimento de limites de vibração tem também neste caso algum grau de subjectividade, devendo ser encarados como valores de referência e não como valores fixos a partir dos quais se ultrapassa impreterivelmente um determinado nível de conforto. Efectivamente, a percepção dos seres humanos às vibrações varia de individuo para individuo, dependendo ainda de factores como a idade, o género, a actividade desenvolvida ou se as vibrações ocorrem durante o dia ou a noite e se são

sentidas persistentemente ou pontualmente. Além disso, a sensibilidade aos níveis de vibração depende ainda do seu conteúdo em frequência e da sua direcção (vertical ou lateral), sendo usualmente as vibrações avaliadas em aceleração e por vezes em velocidade ou outras grandezas delas deduzíveis. Na secção 2.2.3 descrevem-se algumas normas de referência nesta área e nas secções posteriores apresentam-se aquelas que tendem a particularizar os limites de vibração para diferentes tipos de estruturas.

2.2.2 CRITÉRIOS ESTRUTURAIS

A norma DIN 4150 – parte 3 (1975) [37] é aceite na Europa como uma norma padrão relativamente ao estabelecimento de níveis de vibração aceitáveis em estruturas sujeitas a acções impulsivas tais como explosões em pedreiras ou trabalhos de cravação de estacas. É neste documento que muitas outras normas se baseiam para fixarem os níveis de vibração admissíveis nestas circunstâncias, de entre as quais, a norma Portuguesa NP-2074 (1983) [98].

Nesta norma alemã é feita uma classificação das construções em edificios industriais, edificios habitacionais e edificios particularmente vulneráveis a vibrações, tais como monumentos antigos e outras construções de particular fragilidade. Distingue-se também as situações em que as vibrações têm curta duração ou têm carácter permanente. Na Tabela 2.1 transcreve-se o conteúdo desta norma no que respeita a acções de curta duração, podendo verificar-se que os limites impostos, em termos de velocidade de pico em mm/s (em qualquer direcção), dependem do conteúdo em frequência das vibrações, distinguindo-se os casos em a frequência é inferior a 10Hz, se se situa entre 10 e 50Hz ou se está na banda de 50 a 100Hz. Também se tem em conta se as medições são efectuadas ao nível da base do edificio ou se são colhidas no seu piso mais elevado.

Se as vibrações possuírem carácter permanente, a DIN 4150-3 sugere que a componente horizontal da velocidade não ultrapasse 5mm/s nos pisos de edificios industriais e habitacionais, e que em elementos estruturais isolados destas construções, como é o caso de lajes, a velocidade seja inferior a 10mm/s.

Tipo de estrutura	Velocidade máxima (mm/s) na base do edificio			Velocidade máxima (mm/s) no piso mais elevado do edificio
	Frequência (Hz)			Qualquer frequência
	<10	10–50	50–100	
Edificios industriais	20	20–40	40–50	40
Edificios habitacionais	5	5–15	15–20	15
Edificios particularmente delicados	3	3–8	8–10	8

Tabela 2.1 – Valores limite para vibrações curta duração sugeridos pela norma DIN 4150-3

A norma Suíça SN 640312 (1978) [112] é também bastante referenciada na literatura como fornecendo valores plausíveis para o estabelecimento de níveis de vibração em estruturas sujeitas a acções impulsivas. Neste caso, as construções são classificadas como pertencendo a quatro grupos distintos, dependendo das vulnerabilidades que apresentam a estas solicitações. Além de mencionar diferentes tipos de edifícios, esta classificação inclui também outros tipos de estruturas como pontes, chaminés, muros de suporte, condutas e estruturas subterrâneas. Também distingue se as vibrações são induzidas pelo funcionamento de máquinas, tráfego e trabalhos de construção, ou se são devidas a trabalhos que envolvam o uso de explosivos, o que de certa forma tem a ver com o facto das vibrações poderem ter carácter permanente ou ocasional. No primeiro caso são considerados intervalos de frequências entre 10 e 30Hz e entre 30 e 60Hz, e no outro caso, intervalos de frequências entre 10 e 60Hz e entre 60 e 90Hz. Na Tabela 2.2 descrevem-se as classificações atribuídas aos diversos tipos de estruturas e na Tabela 2.3 apresentam-se os correspondentes valores limite, os quais devem ser medidos em termos de velocidade máxima em mm/s (em qualquer direcção). Repare-se que a norma permite níveis de vibração mais elevados nos casos em que as vibrações têm carácter ocasional relativamente àquelas que têm carácter permanente, isto porque ocorrem com menos frequência, e portanto são mais toleráveis.

Classe da estrutura	Definição
I	Estruturas de betão armado e estruturas de aço (não contendo rebocos) tais como edifícios industriais, pontes, chaminés, muros de suporte e condutas superficiais; Estruturas subterrâneas como cavernas, túneis e galerias sem revestimentos
II	Edifícios com lajes e caves em betão, com paredes em betão e alvenaria de tijolo, muros de alvenaria e condutas enterradas; Estruturas subterrâneas como cavernas, túneis e galerias revestidas a alvenaria
III	Edifícios com caves compostas por pavimentos e paredes em betão, com superestrutura em alvenaria de pedra e pavimentos em madeira
IV	Edifícios particularmente vulneráveis ou edifícios em restauro

Tabela 2.2 – Classificações das estruturas de acordo com a norma SN 640312

A norma Portuguesa NP-2074 [98] mencionada anteriormente, apresenta também valores limites para a velocidade máxima em qualquer direcção, medida na base das construções. Refere que as regras apresentadas têm como objectivo limitar os danos em construções destinadas à habitação, indústrias e serviços, sujeitas a acções impulsivas tais como desmonte por meio de explosivos, cravação de estacas e outras operações da mesma índole. Relativamente à gama de frequências de interesse, refere que os dispositivos de medição devem estar preparados para leituras de sinais com conteúdos espectrais entre 3 e 60Hz.

Classe da estrutura	Vibrações provocadas pelo movimento de máquinas, tráfego e trabalhos de construção		Vibrações provocadas por trabalhos com explosivos	
	f (Hz)	v _{max} (mm/s)	f (Hz)	v _{max} (mm/s)
I	10 – 30	12	10 – 60	30
	30 – 60	12 – 18	60 – 90	30 – 40
II	10 – 30	8	10 – 60	18
	30 – 60	8 – 12	60 – 90	18 – 25
III	10 – 30	5	10 – 60	12
	30 – 60	5 – 8	60 – 90	12 – 18
IV	10 – 30	3	10 – 60	8
	30 – 60	3 – 5	60 – 90	8 – 12

Tabela 2.3 – Valores limite para vibrações em estruturas sugeridos pela norma SN 640312

O valor da velocidade medida em m/s, não deve exceder o limite v_L sob pena de poderem ocorrer fendilhações que danifiquem a construção, sendo esse limite dado por

$$v_L = \alpha\beta\gamma \cdot 10^{-2}$$

em que α é um coeficiente que tem em conta as características do terreno de apoio da construção no sentido de acautelar os efeitos de assentamentos diferenciais das respectivas fundações, estando quantificado na Tabela 2.4. O coeficiente β destina-se a atribuir um factor de peso em função da vulnerabilidade dos diversos tipos de construções às vibrações, assumindo os valores da Tabela 2.5, e γ é um factor que faz intervir o carácter persistente ou ocasional nas vibrações, estando definido na Tabela 2.6 em função do número médio diário de ocorrências.

Características do terreno	α
Rochas e solos coerentes rijos ($v > 2000\text{m/s}$)	2
Solos coerentes muito duros, duros e de consistência média; solos incoerentes compactos; areias e misturas areia-seixo bem graduadas, areias uniformes ($1000 \text{ m/s} < v < 2000\text{m/s}$)	1
Solos incoerentes soltos; areias e misturas areia-seixo bem graduadas, areias uniformes, solos coerentes moles e muito moles ($v < 1000\text{m/s}$)	0,5
v (m/s) designa a velocidade de propagação das ondas elásticas longitudinais	

Tabela 2.4 – Valores do coeficiente α

Tipos de construção	β
Construções que exigem cuidados especiais (ex.: monumentos históricos, hospitais, depósitos de água, chaminés)	0,5
Construções correntes	1
Construções reforçadas	3

Tabela 2.5 – Valores do coeficiente β

Número médio diário de solicitações	γ
< 3	1
> 3	0,7

Tabela 2.6 – Valores do coeficiente γ

Além das normas anteriormente descritas, existe um vasto conjunto de outras normas e recomendações de várias instituições que tendem a limitar os danos em estruturas provocados por diversos tipos de acções. É o caso da norma ISO4886 (1990) [61] e das normas britânicas BS7385 (1990) [16] e BS5228 (1997) [12]. Também é o caso da norma Italiana UNI 9916 (1991) [124] e da norma Francesa da AFTES (1974) [1] e da norma Sueca SS4604866 (1991) [117].

2.2.3 CRITÉRIOS DE CONFORTO HUMANO

O problema de vibrações excessivas em estruturas tendo por base critérios de conforto humano está directamente relacionado com a percepção e sensibilidade que os seus utilizadores têm a estes fenómenos, havendo necessidade de estabelecer limites a partir dos quais se atinge um determinado nível de incomodidade. Vários autores indicaram regras expeditas de avaliação da sensibilidade dos seres humanos a vários níveis de vibração, estando indicada na Tabela 2.7 uma dessas propostas [4]. Neste caso, pressupõe-se que as vibrações têm carácter harmónico de amplitude inferior a 1mm, fazendo-se uma distinção das vibrações com frequências entre 1 e 10Hz, onde se estabelecem valores limite em termos de aceleração máxima, e das vibrações cujo conteúdo em frequência se situa entre 10 e 100Hz, devendo nestas circunstâncias proceder-se a uma avaliação em termos de velocidade de pico.

Efeitos das vibrações nas pessoas	Frequências de 1 a 10 Hz	Frequências de 10 a 100 Hz
	a_{\max} (mm/s ²)	v_{\max} (mm/s)
Imperceptíveis	10	0,16
Pouco perceptíveis	40	0,64
Claramente perceptíveis	125	2,0
Incômodas	400	6,4
Muito desagradáveis	1000	16,0
Intoleráveis	>1000	>16

Tabela 2.7 – Limites da percepção humana às vibrações verticais (pessoa em pé)

No que diz respeito a normas que estabelecem níveis máximos de vibração em estruturas para atender a critérios de conforto humano, a DIN 4150 – parte 2 (1975) [36] é uma das mais conhecidas neste domínio. Sendo uma das mais antigas na Europa, esta norma alemã é dirigida para os problemas de vibrações em edifícios originados principalmente por fontes de perturbação externas, estabelecendo limites aceitáveis para vibrações com frequências entre 1 e 80Hz. Para o efeito recorre a um parâmetro designado de KB, que é definido em função da amplitude das oscilações, d , e da sua frequência, f , através da seguinte relação

$$KB = d \frac{0,8f^2}{\sqrt{1 + 0,032f^2}}$$

A amplitude das oscilações deve ser considerada mediante a direcção que for mais gravosa, podendo também ser obtida a partir do registo de velocidades ou acelerações se o movimento for harmónico. Para tal, basta dividir qualquer uma destas grandezas pela frequência angular ou pelo seu quadrado, respectivamente. Na Tabela 2.8, encontra-se transcrito o conteúdo da norma relativo aos limites impostos para alguns casos concretos, os quais têm em consideração alguns factores, tais como o tipo de utilização dos edifícios, a frequência de ocorrência das vibrações, a sua duração e o período de ocorrência, se diurno se nocturno. Como se pode constatar, as situações de vibrações diurnas pouco frequentes são bastante mais toleradas do que aquelas que apresentam carácter contínuo ou repetitivo, chegando, neste último caso, a ser permitidos valores 20 a 30 vezes superiores aos da primeira situação. Também se pode observar que, na generalidade dos edifícios, impõem-se níveis de vibração mais baixos durante a noite relativamente àqueles que podem ser registados durante o dia.

Localização do edifício	Período	KB aceitável	
		Vibrações contínuas ou repetidas	Vibrações pouco frequentes
Zonas puramente residenciais, propriedades de alojamento e estâncias de férias	dia	0,2 (0,15*)	4
	noite	0,15 (0,1*)	0,15
Aldeias, zonas de pequenos escritórios e centros comerciais	dia	0,3 (0,2*)	8
	noite	0,2	0,2
Zonas de escritórios e comércio em geral	dia	0,4	12
	noite	0,3	0,3
Zonas industriais	dia	0,6	12
	noite	0,4	0,4
Zonas especialmente sensíveis a vibrações	dia	0,1 – 0,6	4 – 12
	noite	0,1 – 0,4	0,15 – 0,4
(*) Os valores entre parêntesis devem ser adoptados se os edifícios forem excitados horizontalmente com frequências inferiores a cerca de 5Hz			

Tabela 2.8 – Valores aceitáveis de vibrações em edifícios avaliados em KB sugeridos pela norma DIN 4150-2

Outra norma bastante divulgada relativamente ao estabelecimento de níveis máximos de vibrações em construções para atender a critérios de conforto humano é a ISO 2631 (1978) [58]. Este documento serve de referência a muitas outras normas internacionais e normas internas de diferentes países, incluindo a norma Portuguesa NP-1673 (1980) [97]. Esta norma internacional tem como objectivo definir um critério de apreciação da exposição de seres humanos a vibrações que se processam segundo uma direcção bem definida, transmitidas através de superfícies de sustentação rígidas. É válida para vibrações situadas numa gama de frequências de 1 a 80Hz, devendo estas possuir factores de crista não superiores a 3, sendo este parâmetro definido pelo quociente entre o valor máximo e o valor eficaz do sinal medido. São definidos três níveis de incomodidade, nomeadamente, o limiar de incomodidade, o limiar de perda de eficiência por fadiga e o limite máximo de exposição, devendo os níveis de vibração ser avaliados de acordo com um sistema de eixos ortogonal, orientado de acordo com o esquema da Figura 2.1.

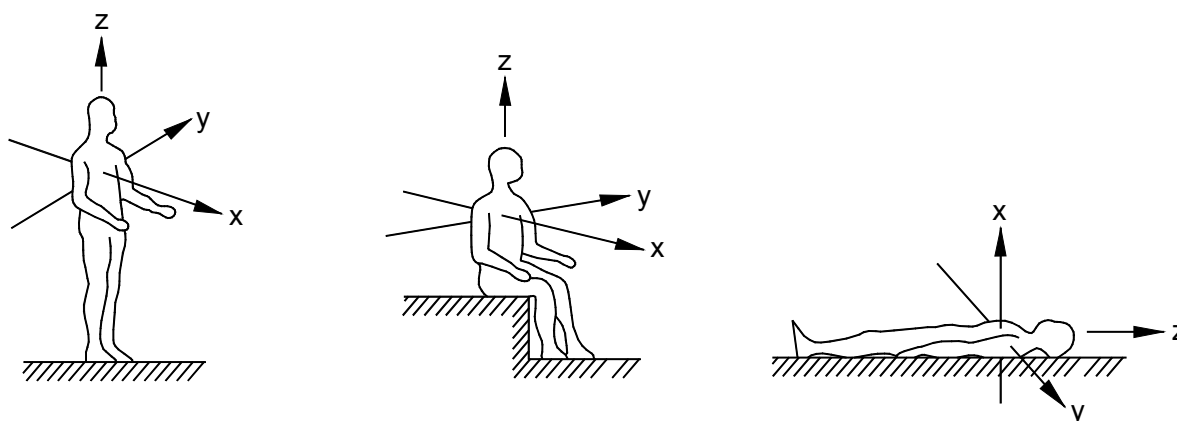


Figura 2.1 – Sistema de eixos utilizado para avaliação dos níveis de vibração no corpo humano (ISO 2631)

Nas Figuras 2.2 e 2.3 apresentam-se os ábacos constantes desta norma, os quais definem os níveis de vibração correspondentes aos limiares de perda de eficiência por fadiga avaliados segundo a direcção z e segundo a direcção x e y, respectivamente. Nestes gráficos representam-se várias curvas associadas aos limites respeitantes a diferentes tempos de exposição. Para se obterem os gráficos correspondentes aos limiares de incomodidade, os valores dos ábacos devem ser divididos por 3,15 e para se obterem os gráficos referentes aos limites máximos de exposição devem multiplicados por 2. Se as vibrações não apresentarem uma orientação coincidente com qualquer um dos eixos de referência, então deve proceder-se a uma decomposição vectorial segundo esses eixos e posteriormente fazer uma análise comparativa independente para uma das direcções.

Em qualquer dos casos os níveis de vibração devem ser avaliados em aceleração, sendo necessário calcular o valor eficaz do sinal medido num período de tempo T , podendo ser calculado através de

$$a_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt}$$

Se as vibrações tiverem carácter harmónico, o valor eficaz, raiz quadrada do valor quadrático médio (RMS), obtém-se simplesmente dividindo o valor da aceleração máxima por $\sqrt{2}$, podendo ser imediatamente comparado com os valores limite indicados nos ábacos. Se, porém, as vibrações tiverem um conteúdo espectral mais alargado (contínuo ou discreto), deve ser feita uma apreciação segundo bandas normalizadas de terço de oitava. Neste caso, o espectro de cada componente é apreciado tendo em conta as diferentes bandas definidas pelos seus limites inferiores e superiores, comparando o valor calculado da aceleração eficaz correspondente à frequência central de cada banda com o limite indicado pelo respectivo ábaco.

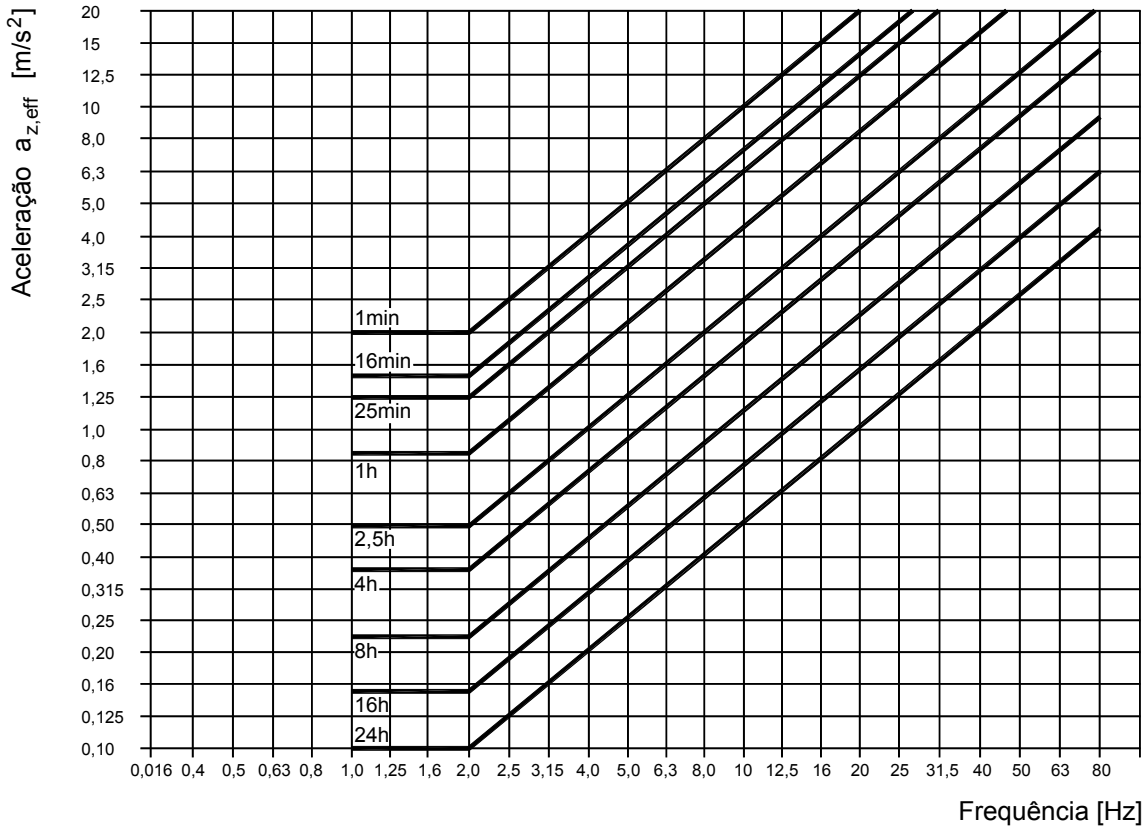


Figura 2.2 – Limites de perda de eficiência por fadiga associados à direção z (ISO 2631)

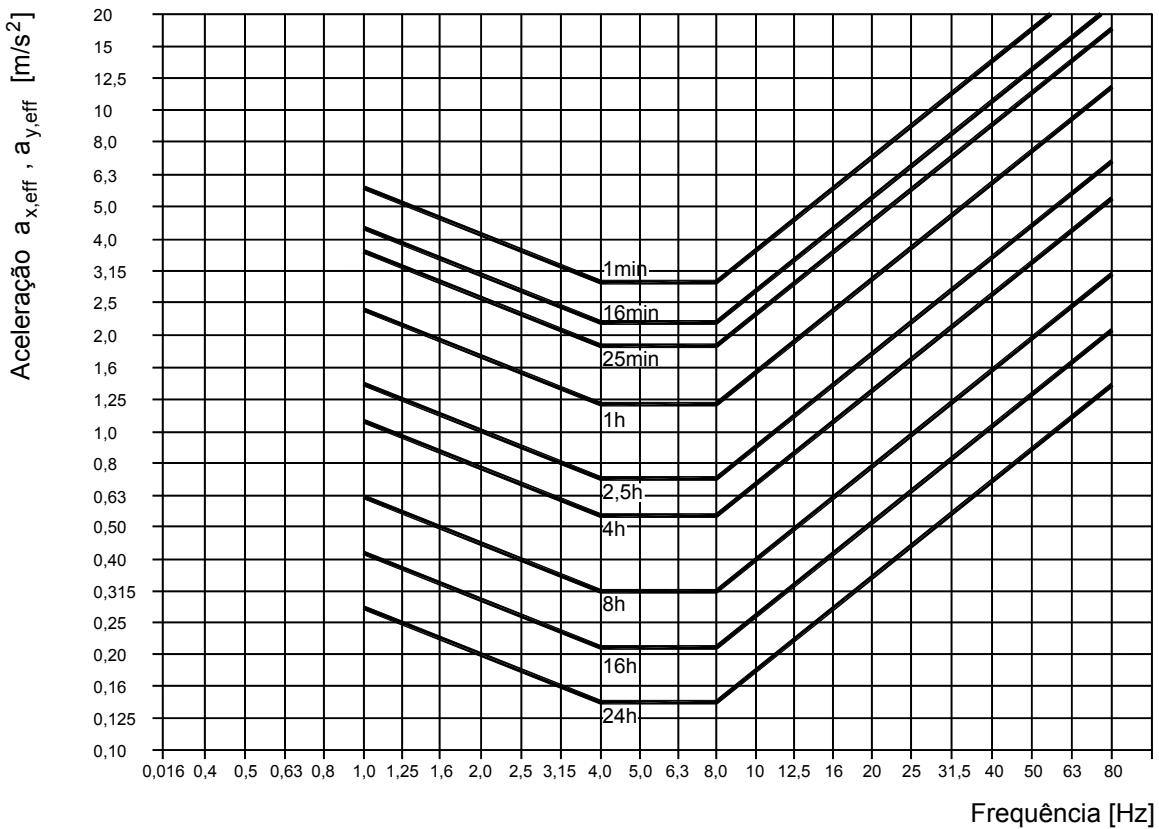


Figura 2.3 – Limites de perda de eficiência por fadiga associados à direção x e y (ISO 2631)

Banda n°	Frequência central [Hz]	1/3 oitava [Hz]		Banda n°	Frequência central [Hz]	1/3 oitava [Hz]	
		de	a			de	a
1	1,25	1,12	1,41	11	12,5	11,2	14,1
2	1,6	1,41	1,78	12	16	14,1	17,8
3	2	1,78	2,24	13	20	17,8	22,4
4	2,5	2,24	2,82	14	25	22,4	28,2
5	3,15	2,82	3,55	15	31,5	28,2	35,5
6	4	3,55	4,47	16	40	35,5	44,7
7	5	4,47	5,62	17	50	44,7	56,2
8	6,3	5,62	7,08	18	62	56,2	70,8
9	8	7,08	8,91	19	80	70,8	89,1
10	10	8,91	11,2	20	100	89,1	112

Tabela 2.9 – Caracterização das bandas de terço de oitava normalizadas internacionalmente

As bandas de terço de oitava estão normalizadas internacionalmente em termos dos seus limites inferiores e superiores bem como das respectivas frequências centrais, podendo ser consultadas na Tabela 2.9. Definindo f_1 e f_2 como sendo os limites inferior e superior de cada banda e f_0 como sendo a frequência central, é ainda possível estabelecer as seguintes relações entre ambas

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \qquad f_1 = 2^{-\frac{1}{6}} f_0 \qquad f_2 = 2^{\frac{1}{6}} f_0$$

Se as vibrações apresentarem um carácter descontínuo mas com o mesmo valor eficaz, esta norma internacional sugere que a apreciação dos níveis de vibração se faça utilizando os ábacos referidos anteriormente, somando algebricamente os tempos parciais de exposição diária para definir qual a curva de exposição de tempo real a adoptar. Se, por outro lado, as vibrações apresentarem valores eficazes diferentes durante o dia, aconselha-se que, para cada banda de frequência, a exposição total seja decomposta em exposições parciais a vibrações de valor eficaz aproximadamente constante $a_{\text{eff},i}$ de duração t_i . Neste caso, a exposição às vibrações avalia-se à custa do valor de

$$\sum_i \frac{t_i}{\tau_i}$$

onde τ_i representa a duração limite de exposição correspondente ao valor de $a_{\text{eff},i}$, não devendo este somatório exceder a unidade em cada banda de frequências considerada, tendo em conta o critério de incomodidade em causa.

A norma ISO 2631 descrita serviu de base nos últimos anos à avaliação dos níveis de vibração nos seres humanos nas mais diversas circunstâncias. No entanto, este documento teve evoluções posteriores que reflectem os últimos avanços científicos nesta área, dando origem à ISO 2631-1 (1997) [59] e à ISO 2631-2 (1989) [60], esta última com uma recente edição em 2003. Em Portugal a primeira parte da norma foi recentemente publicada sob a forma de NP ISO 2631-1 (2007) [99] cujo título é “Vibrações mecânicas e choque: avaliação da exposição do corpo inteiro e vibrações. Parte 1. requisitos gerais”.

Esta parte da norma, similar à BS 6841 (1987) [15], tem como objectivo definir métodos de medição de vibrações periódicas, aleatórias e transientes, induzidas ao ser humano através de superfícies de apoio. Uma das novidades apresentadas é que a avaliação dos níveis de vibração é feita agora relativamente aos efeitos na saúde e conforto, à probabilidade da percepção da vibração e à incidência de enjoo ao movimento. Neste último caso, a gama de frequências considerada é de 0,1 a 0,5Hz e nos restantes casos dos 0,5 aos 80Hz. Também se introduz a possibilidade da avaliação das vibrações ser feita relativamente a eixos adicionais posicionados ao nível do assento, das costas do assento e nos pés de pessoas sentadas. Além disso, considera o efeito de vibrações que causam rotação do corpo em torno do eixo x , y e z em pessoas nas mesmas circunstâncias.

Relativamente aos métodos que podem ser utilizados para avaliar os níveis de vibração, a ISO 2631-1 sugere que se adopte um método básico de avaliação nos casos em que o factor de crista não ultrapasse o valor de 9. Este método recorre ao cálculo da aceleração eficaz ponderada em frequência como parâmetro de comparação com determinados valores limiares aceitáveis. Para valores de crista superiores, a norma considera que o método básico pode subestimar os efeitos das vibrações, propondo que se utilizem métodos alternativos de avaliação, nomeadamente, o método do valor eficaz em contínuo ou o método da dose de vibração de quarta potência. No primeiro caso, a amplitude de vibração é definida como sendo o valor máximo da vibração transiente (MTVV), caracterizado por ser o valor mais elevado de $a_w(t_0)$ verificado no período de ocorrência das vibrações. O valor de $a_w(t_0)$ é definido por

$$a_w(t_0) = \left(\frac{1}{\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0} a_w^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

em que $a_w(t)$ é a aceleração instantânea ponderada em frequência, τ é o tempo de integração considerado (o valor recomendado é $\tau=1s$) e t_0 é o tempo instantâneo em que é feita a observação. O segundo método alternativo é mais sensível aos picos que o método básico de avaliação, na medida em que utiliza a quarta potência em vez da segunda potência do registo temporal da aceleração. Neste caso, recorre-se ao valor da dose de vibração de quarta potência (VDV) que é definido como sendo

$$VDV = \left(\int_0^T a_w^4(t) dt \right)^{\frac{1}{4}}$$

onde $a_w(t)$ é igualmente a aceleração instantânea ponderada em frequência e T é o período de duração da medição. Refere-se no entanto que a BS 6841, pioneira na utilização do valor de VDV para a avaliação das vibrações, define T como sendo o período total diário em que ocorrem as vibrações, o que pode conduzir a valores distintos de VDV dos calculados pela norma internacional. Esta norma Britânica refere ainda a este respeito que, se as vibrações mantiverem as suas características durante o dia, apenas se torna necessário medir um período de tempo t_1 do tempo total de exposição t_d , sendo o valor total de VDV dado por

$$\text{VDV}_d = \left(\frac{t_d}{t_1} \right)^{\frac{1}{4}} \times \text{VDV}_1$$

em que VDV_1 é o valor da dose de vibração correspondente ao período de tempo medido. Ainda refere que, nos casos em que se disponha da medição do valor eficaz da aceleração ponderada em frequência, a_w , o valor de VDV pode ser estimado a partir de

$$e\text{VDV} = 1,4 \times a_w \times t_d^{0,25}$$

Em ambas as normas se menciona que, nas situações em que a exposição às vibrações consiste em vários períodos de diferente duração caracterizados cada um deles por um determinado VDV_i , o valor da dose de vibração para a exposição total VDV_{total} pode ser calculado através de

$$\text{VDV}_{total} = \left(\sum_i \text{VDV}_i^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

Um outro aspecto novo nestas normas é que, nos casos em que as vibrações apresentam um alargado conteúdo espectral, é considerado que existe uma sobreposição dos efeitos das vibrações de diferentes frequências, o que contraria a metodologia sugerida pela anterior ISO 2631 segundo a qual os níveis de vibração deveriam ser analisados em termos do valor limiar correspondente à frequência central de cada banda de terços de oitava. Segundo esta nova metodologia, a aceleração deve ser ponderada em frequência através da utilização de curvas de ponderação W_k , W_d , W_f , W_c , W_e e W_k , que devem ser escolhidas de acordo com o critério em análise, se a saúde, o conforto, a percepção ou o enjoo, e de acordo com a direcção das vibrações. Estas ponderações devem ser feitas isoladamente para cada eixo, podendo realizar-se quer em termos do registo temporal da aceleração, quer em termos de espectros de aceleração. No primeiro caso, o registo temporal da aceleração deverá ser corrigido tendo em conta a curva de ponderação em causa, aplicando-se posteriormente a definição de aceleração eficaz. No caso da utilização de espectros, o valor eficaz da aceleração ponderada em frequência deve ser determinado por ponderação e adição adequada de dados em banda estreita ou em banda de terços de oitava. Neste último processo, ambas as normas apresentam tabelas referenciando os valores das curvas de ponderação

associados às diferentes frequências centrais das bandas de terços de oitava, devendo a aceleração global ponderada ser determinada a partir da expressão

$$a_w = \left[\sum_i (W_i a_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

em que W_i é o factor de ponderação tabelado para cada banda de terço de oitava e a_i é o valor da aceleração eficaz colhido do espectro associado a essa mesma banda.

Em qualquer das situações, antes de fazer a ponderação em frequência da aceleração, é necessário aplicar filtros aos sinais colhidos, cujas características estão bem definidas para cada caso em concreto. Se as curvas de ponderação são as W_c , W_d , W_e , W_j e W_k , deve utilizar-se um filtro passa-alto a 0,4Hz e passa-baixo a 100Hz. Se, por outro lado, a curva de ponderação for a W_f , deve utilizar-se um filtro passa-alto a 0,08Hz e passa-baixo a 0,63Hz.

As normas ISO 2631-1 e BS 6841 até aqui descritas não contêm quaisquer valores limite de exposição às vibrações, pois apenas definem os métodos disponíveis para as avaliar. No entanto, os limiares de vibração admissível podem ser consultados na ISO 2631-2 já referida anteriormente, ou então na BS 6472 (1992) [14]. No caso da norma internacional, dá-se particular atenção à exposição de ábacos que estipulam os valores admissíveis das vibrações em edifícios, de tal forma que a possibilidade de ocorrência de queixas seja rara. Remete a determinação dos valores da aceleração eficaz ponderada em frequência para a parte 1 da norma e apresenta curvas base da aceleração eficaz e da velocidade eficaz nas diversas direcções, as quais são utilizadas para a fixação de valores limiares das vibrações mediante a aplicação adequada de factores multiplicativos.

Nas Figuras 2.4 e 2.5 apresentam-se as curvas base da aceleração para vibrações na direcção z e nas direcções x e y (tal como definidas anteriormente na norma ISO 2631) e nas Figuras 2.6 e 2.7 as curvas base da velocidade para vibrações nas direcções referidas. Estas curvas também constam da BS 6472, a qual prefere representar as curvas da velocidade em termos de valores de pico e não de velocidade eficaz como é sugerido pela norma ISO. Esta opção parece ser mais adequada na medida em que na generalidade das normas em que a velocidade é utilizada como parâmetro de avaliação das vibrações, é efectivamente dada preferência à velocidade de pico. Este facto não é assim tão relevante, pois a velocidade eficaz e a velocidade de pico estão relacionadas por um factor de $\sqrt{2}$, sendo fácil converter uma noutra. A norma ISO apresenta também curvas base para as vibrações que não têm um eixo definido ou quando apresentam direcções que podem variar durante o dia.

Os níveis máximos de vibração admissíveis em diferentes tipos de edifícios podem ser obtidos por aplicação dos factores multiplicativos indicados na Tabela 2.10 às curvas base de interesse. Esta tabela que consta na ISO 2631-2 pode também ser encontrada na BS 6472 com ligeiras diferenças, a qual, além do tipo de edifício, tem também em conta o período do dia em que ocorrem as vibrações e se são contínuas ou intermitentes, ou então, se são impulsivas com várias ocorrências diárias. No primeiro caso devem comparar-se os níveis de vibração em aceleração e, no caso de vibrações impulsivas, devem

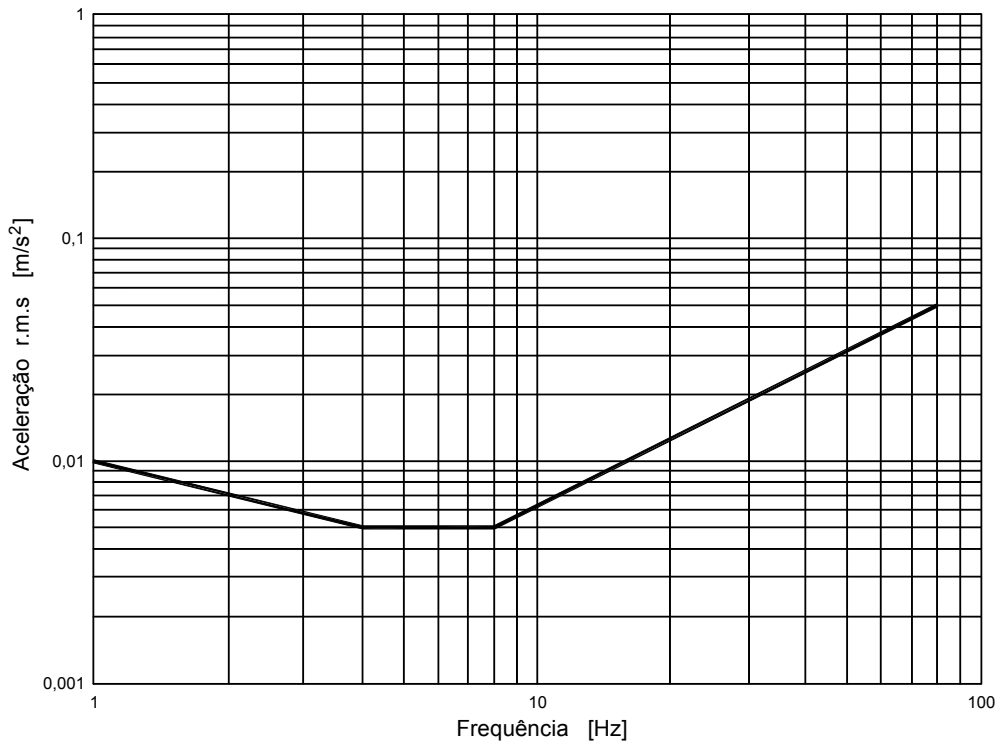


Figura 2.4 – Curva base para a aceleração eficaz segundo a direcção z (ISO 2631-2 e BS 6472)

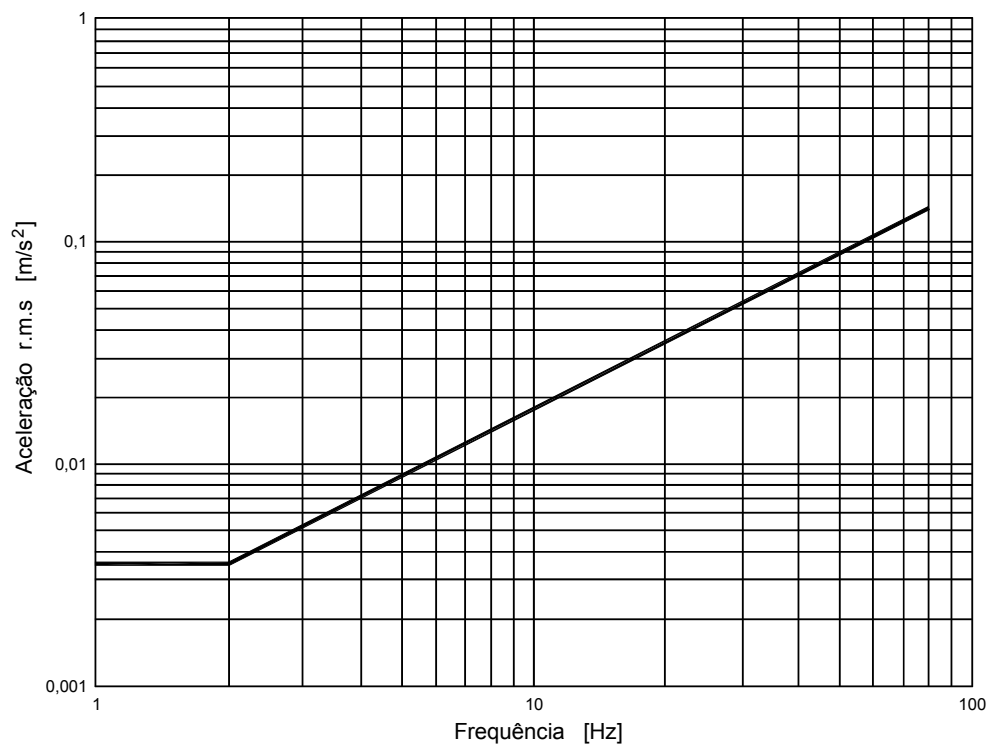


Figura 2.5 – Curva base para a aceleração eficaz segundo as direcções x e y (ISO 2631-2 e BS 6472)

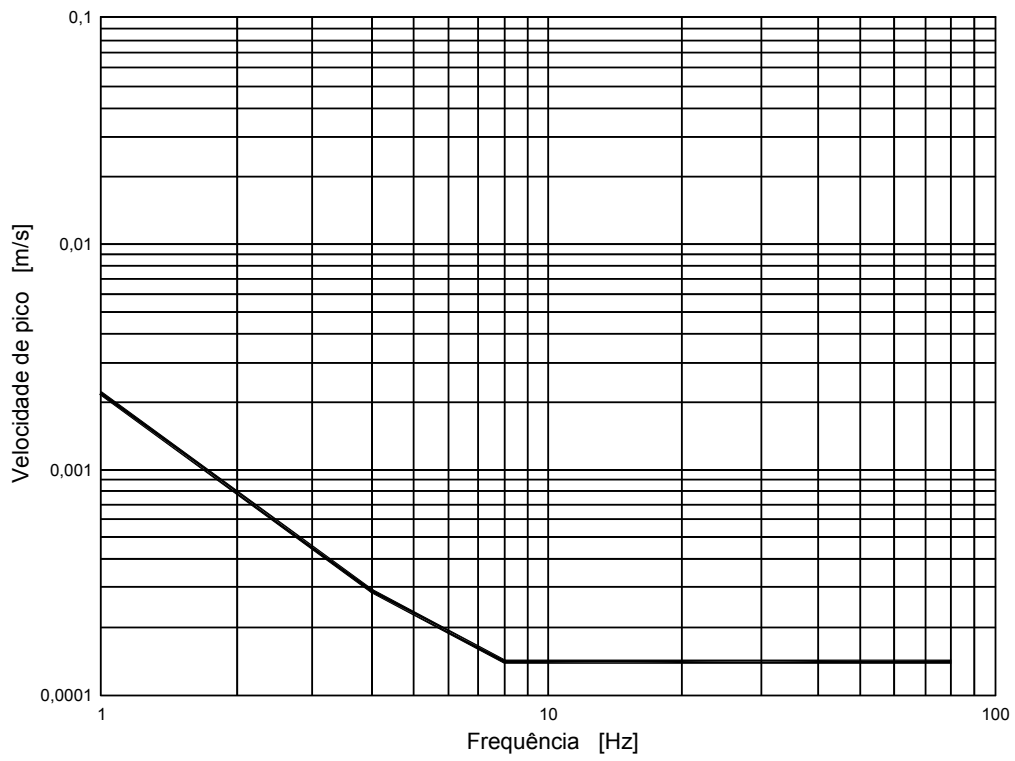


Figura 2.6 – Curva base para a velocidade de pico segundo a direcção z (ISO 2631-2 e BS 6472)

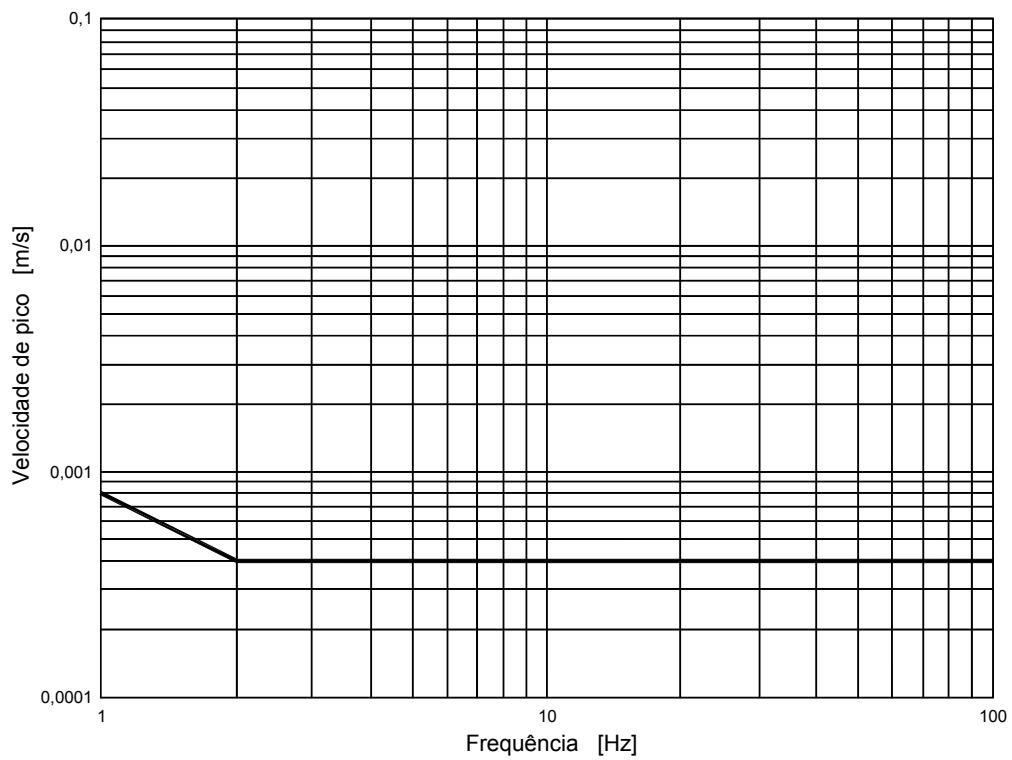


Figura 2.7 – Curva base para a velocidade de pico segundo as direcções x e y (ISO 2631-2 e BS 6472)

Localização	Período	Factores multiplicativos	
		Exposição a vibrações contínuas ou intermitentes	Excitação através de vibrações impulsivas com várias ocorrências diárias
Áreas críticas de trabalho (ex: salas de operações de hospitais, laboratórios de precisão)	Dia	1	1
	Noite	1	1
Zonas residenciais	Dia	2 a 4	30 a 90
	Noite	1,4	1,4 a 20
Zonas de escritórios	Dia	4	60 a 128
	Noite	4	60 a 128
Zonas de comércio	Dia	8	90 a 128
	Noite	8	90 a 128

Tabela 2.10 – Factores multiplicativos a aplicar às curvas base (ISO 2631-2)

utilizar-se os ábacos em velocidade. Nas Figuras 2.8 a 2.11 encontram-se representados os ábacos para consulta directa tendo em conta os factores multiplicativos referidos. Apesar da ISO 2631-1 possibilitar a avaliação da exposição às vibrações através do método do valor eficaz em contínuo ou o método da dose de vibração de quarta potência, a segunda parte da norma não apresenta quaisquer valores limite relativos aos parâmetros neles envolvidos.

No caso da norma BS 6472, é referido que os valores multiplicativos que surgem na terceira coluna da Tabela 2.10 devem ser utilizados exclusivamente para vibrações contínuas (16 horas durante o dia e 8 horas durante a noite), sugerindo que no caso de vibrações intermitentes se recorra ao valor da dose de vibração. Nestas situações, devem ser respeitados os valores indicados na Tabela 2.11, concebida especificamente para edifícios residenciais.

Além da avaliação dos níveis de vibração através do valor de VDV, a norma britânica inclui também uma tabela indicando quais os valores da aceleração eficaz correspondentes a uma baixa probabilidade de ocorrência de queixas, tendo em conta o período de exposição às vibrações. Neste caso, deve ter-se em conta a direcção mais desfavorável, combinando as diferentes componentes vectoriais da aceleração,

podendo o correspondente limite ser consultado na Tabela 2.12, a qual se refere especificamente a vibrações diurnas em edifícios residenciais.

No que diz respeito a vibrações de carácter impulsivo, esta norma menciona que os factores multiplicativos da tabela devem ser utilizados para um número de ocorrências inferior ou igual a três ocorrências diárias. Caso contrário, e no que respeita a edifícios residenciais, deve utilizar-se em alternativa um factor multiplicativo dado por

$$F = 1,7N^{-0,5}T^{-d}$$

onde N é o número de ocorrências diurnas num período de 16 horas, supostamente superior a três, T é a duração das ocorrências, d vale zero se $T < 1s$ e, para $T > 1s$, $d = 0,32$ para pavimentos em madeira e vale 1,22 para pavimentos em betão. Também refere que as vibrações impulsivas, tais como vibrações provocadas por explosões, não deveriam ser permitidas durante a noite, mas que se tal acontecer o factor multiplicativo deve fixar-se em 20.

Localização	Queixas pouco prováveis	Queixas possíveis	Queixas prováveis
Edifícios residenciais Período diurno (16h)	0,2 a 0,4	0,4 a 0,8	0,8 a 1,6
Edifícios residenciais Período nocturno (8h)	0,13	0,26	0,51

Tabela 2.11 –Valores de Dose de Vibração ($m/s^{1,75}$) associados a diferentes níveis de queixas em edifícios residenciais (BS 6472)

Localização	Períodos de exposição				
	16h	1h	225s	14s	0,9s
Edifícios residenciais Período diurno	0,01 a 0,02	0,02 a 0,04	0,04 a 0,08	0,08 a 0,16	0,16 a 0,32

Tabela 2.12 – Valores da aceleração eficaz (m/s^2) correspondentes a uma baixa probabilidade de ocorrência de queixas (BS 6472)

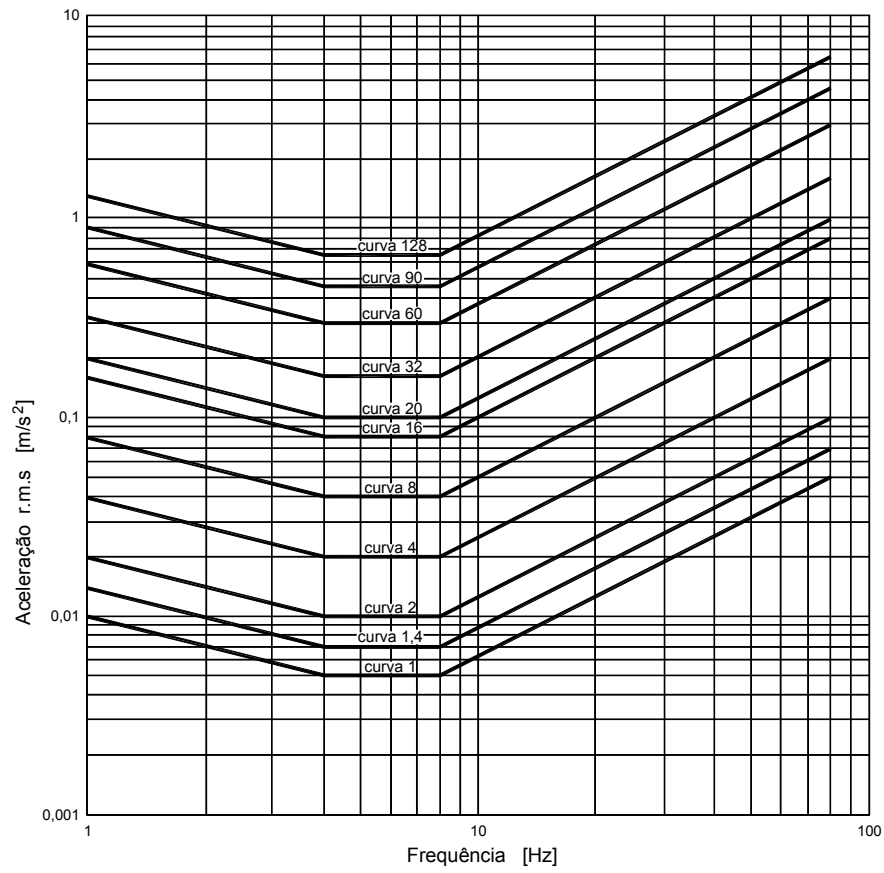


Figura 2.8 – Curvas para a aceleração eficaz segundo a direcção z (ISO 2631-2 e BS 6472)

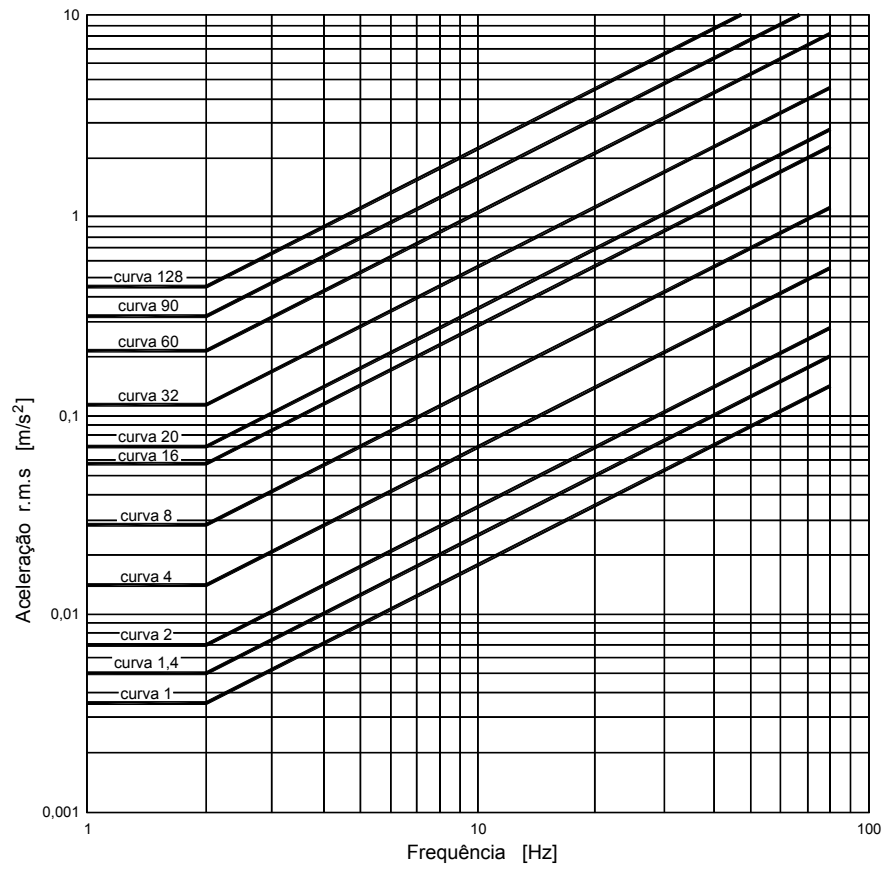


Figura 2.9 – Curvas para a aceleração eficaz segundo as direcções x e y (ISO 2631-2 e BS 6472)

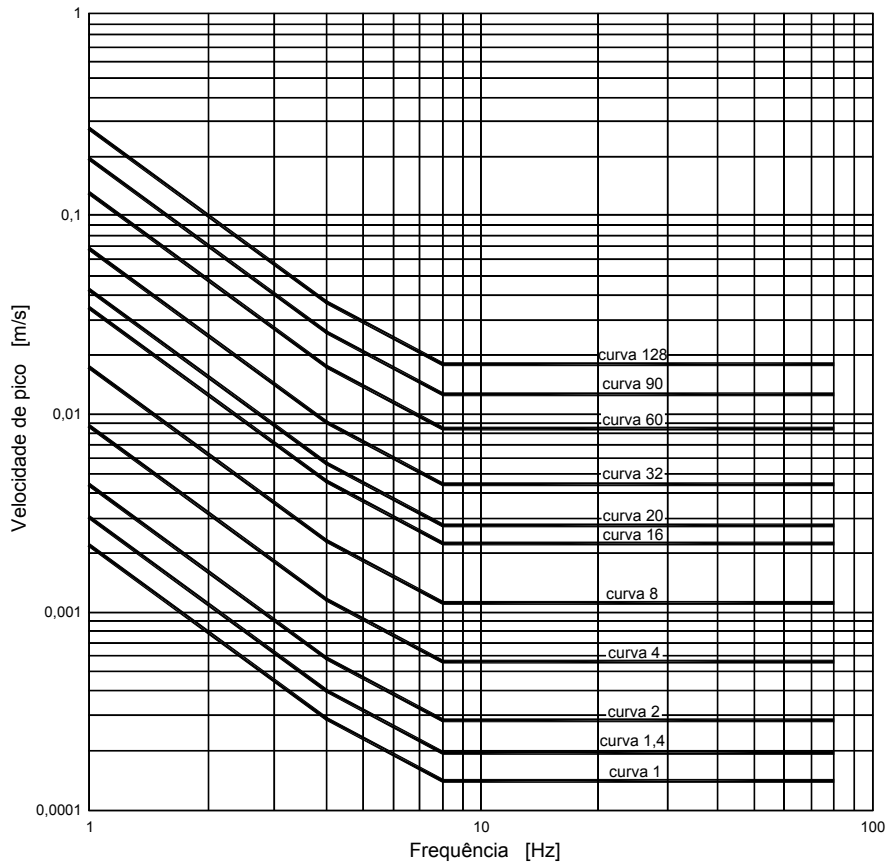


Figura 2.10 – Curvas para a velocidade de pico segundo a direcção z (ISO 2631-2 e BS 6472)

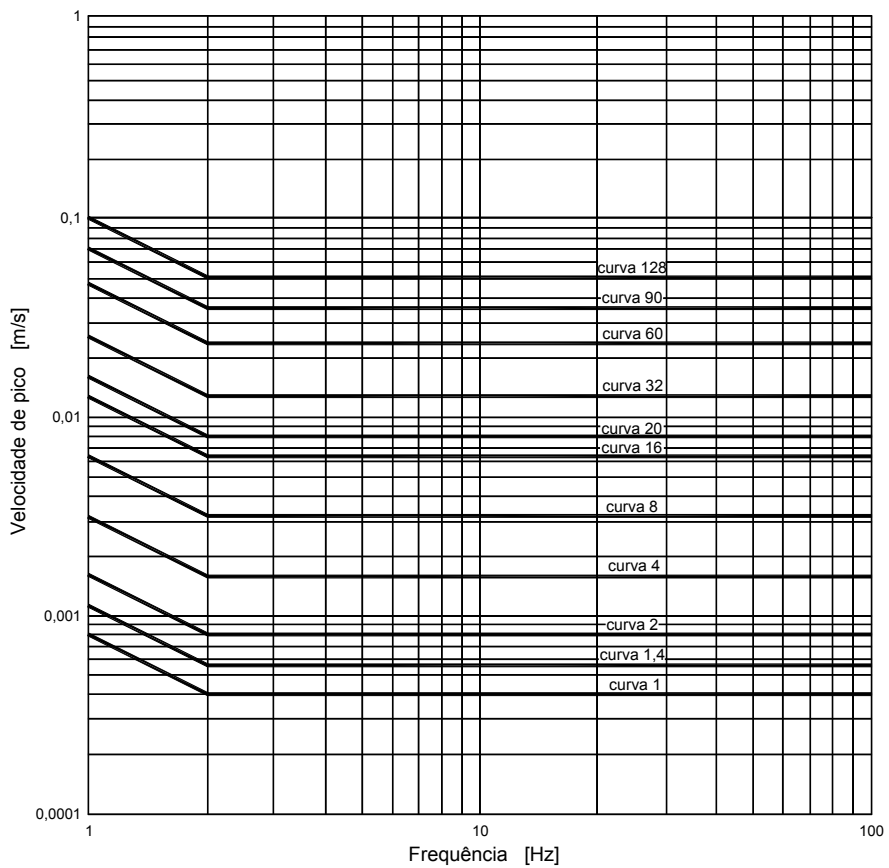


Figura 2.11 – Curvas para a velocidade de pico segundo as direcções x e y (ISO 2631-2 e BS 6472)

2.2.4 RECOMENDAÇÕES RELATIVAS A ALGUMAS ESTRUTURAS

2.2.4.1 LAJES DE EDIFÍCIOS

Apesar das normas descritas na secção anterior poderem naturalmente ser utilizadas para avaliar os níveis de conforto em lajes de edifícios, seguidamente procura-se referir um conjunto de normas e recomendações complementares nesta área que surgiram ao longo dos últimos anos, fruto da experiência e de ensaios realizados por diversos autores.

Em geral, as vibrações em lajes têm carácter transiente e são provocadas essencialmente pela circulação de cargas móveis ou de pessoas. É geralmente aceite que a sensibilidade dos seres humanos às vibrações nestes elementos, além de depender de factores como a intensidade e frequência, varia também com o nível de amortecimento estrutural. De facto, as oscilações associadas a valores de amortecimento elevados são mais toleradas do que as vibrações que tendem a ser mais persistentes porque, ao serem mais rapidamente amortecidas, causam uma menor sensação de desconforto. Por esta razão, muitas das recomendações que indicam níveis máximos de vibração admissíveis em lajes fazem depender os valores limiares nelas apresentados do coeficiente de amortecimento do modo de vibração condicionante.

Um outro aspecto relevante no caso dos pavimentos é que algumas normas e recomendações baseiam a fixação de níveis máximos de vibração em função dos resultados de um ensaio que consiste em excitar a estrutura através da acção provocada pelo cair de calcanhares (“heel-drop”). Este teste, além de expedito, possibilita a obtenção de uma medida de referência, normalmente a resposta inicial máxima, como meio de aferir se a laje é vulnerável ou não a problemas de vibrações excessivas.

Uma das primeiras propostas baseada nesta técnica foi apresentada por Lenzen [76] em 1966, o qual sugeriu que se utilizasse cargas impulsivas do tipo referido anteriormente como meio de obter uma estimativa do nível de percepção às vibrações em pavimentos de estrutura metálica. Para o efeito, apoiou-se num dos primeiros trabalhos de investigação nesta área desenvolvido por Reiher e Meister [106] na anterior década de 30, tendo proposto a escala modificada de Reiher-Meister, cuja representação gráfica está indicada na Figura 2.12. Lenzen sugeriu que a escala inicialmente desenvolvida por estes autores fosse multiplicada por um factor de 10 para ter em conta a redução da sensibilidade que os seres humanos têm a vibrações de carácter transiente quando comparada com a aquela que têm relativamente a vibrações contínuas.

Em 1981, Murray [92] tendo por base os estudos por ele realizados nesta área, propôs um critério (conhecido por critério de Murray) relativamente à definição de um nível de amortecimento mínimo em lajes de escritórios e edifícios residenciais para que tenham um comportamento aceitável em serviço, sendo este traduzido por

$$\xi > 35A_0f_n + 2,5$$

em que ξ é o coeficiente de amortecimento do pavimento, A_0 é a amplitude do deslocamento inicial provocado pelo cair de calcanhares (em polegadas) e f_n é a respectiva primeira frequência natural.

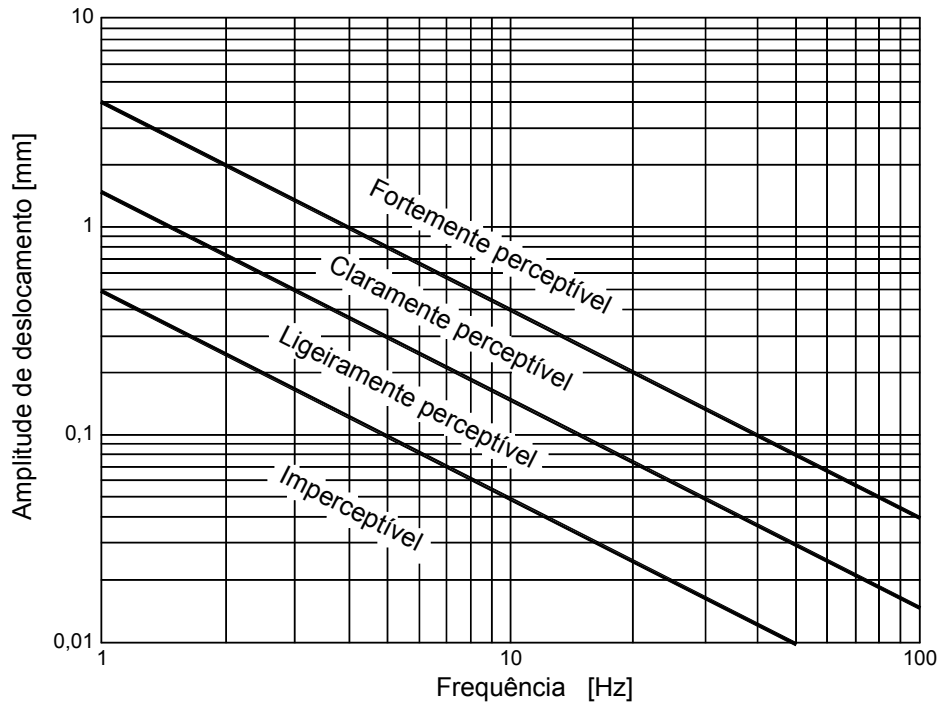


Figura 2.12 – Escala modificada de Reiher-Meister

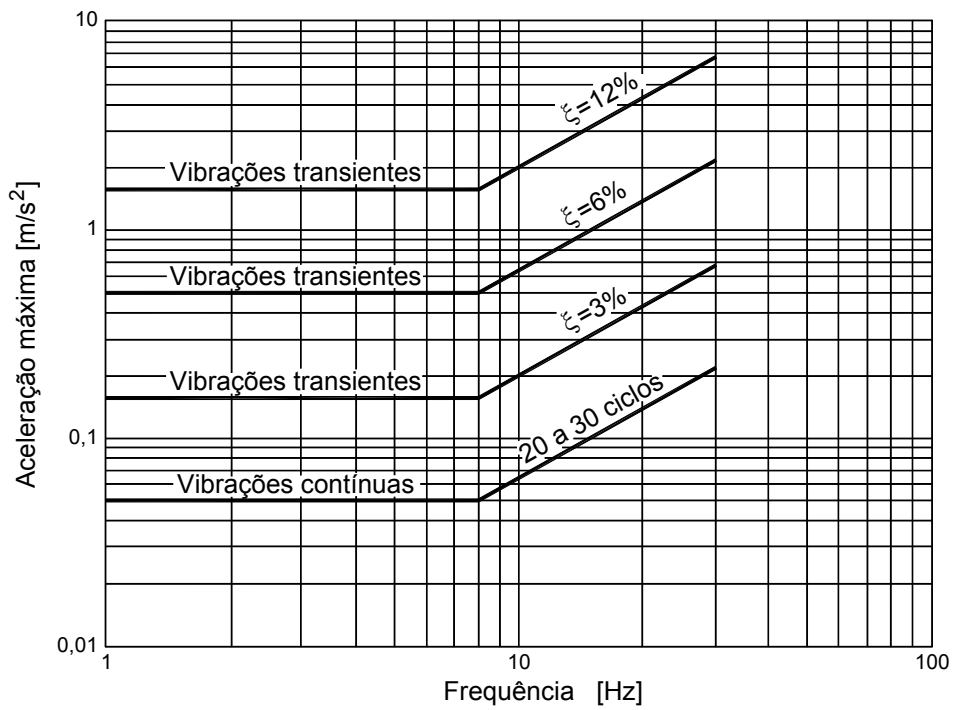


Figura 2.13 – Limites da vibração indicados pela norma da CSA

A norma canadiana da CSA (“Canadian Standards Association”) conhecida como a CAN3-S16.1 (1989) [28], também é um documento de referência nesta área, propondo limiares para vibrações em pavimentos residenciais, de escritórios e de escolas. Baseado no trabalho de Allen e Rainer [2], esta norma faz intervir a frequência natural e coeficiente de amortecimento do pavimento e tem em conta o tipo de vibração em causa. Distingue se as vibrações são do tipo transiente, provocadas por “heel-drop” ou por acções impulsivas resultantes do caminhar, ou se são contínuas com um número de oscilações entre 10 e 30 ciclos (ver Figura 2.13). Também sugere que a percepção dos utilizados às vibrações é mais sensível na banda dos 2 ao 8Hz.

Já na década de 90, Allen e Murray [3] propuseram novos critérios baseados na utilização da norma ISO 2631-2 para a definição de níveis de vibração máximos admissíveis em vários tipos de pavimentos, mas também em outras estruturas, tais como pontes pedonais e passadiços no interior de edifícios. Em particular, sugeriram que os factores multiplicativos da curva base da direcção z , expressos em termos da aceleração de pico, fossem 10 para escritórios e residências, 30 para zonas comerciais, salas de dança, salas de jantar e passadiços interiores, e 100 para pavimentos de apoio a actividades rítmicas e pontes pedonais. Sugeriram também que tais factores multiplicativos deveriam ser corrigidos por um coeficiente entre 0,8 e 1,5 para ter em conta a frequência e a duração das vibrações.

Por outro lado, Ellingwood and Tallin [39] recomendaram que em pavimentos de apoio à actividade comercial não se ultrapassasse uma aceleração de 0,005g para vibrações provocadas pelo andamento. Para cumprir este critério sugeriram que a máxima deformação do pavimento quando sujeito a uma carga concentrada de 2,5kN aplicada em qualquer localização da laje, não excedesse 0,5mm. Curiosamente, o Eurocódigo 3 [41], relativo ao projecto de estruturas de aço, utiliza verificações deste género para que se proceda à verificação dos estados limites de utilização no que respeita aos efeitos dinâmicos nas lajes. Em particular, refere que no caso de pavimentos de habitações e escritórios ou outros semelhantes, onde haja pessoas a circular regularmente, a frequência própria da laje não deverá ser inferior a 3Hz. De acordo com este regulamento, esta condição será satisfeita se o deslocamento total instantâneo provocado pela combinação frequente de acções for inferior a 28mm. Também refere que poderão ser estabelecidos limites menos severos para lajes com elevado nível de amortecimento. Se o pavimento em análise corresponder a um ginásio, salão de baile ou outro em que haja incidência de movimentos rítmicos, este Eurocódigo aconselha que a frequência própria da laje seja inferior a 5Hz, podendo verificar-se esta condição se, sob a acção de uma carga nas condições referidas, a deformação máxima não exceder 10mm.

Já o Eurocódigo 5 [42], relativo ao projecto de estruturas de madeira, impõe que para pavimentos residenciais em que a frequência fundamental seja inferior ou igual a 8Hz se faça uma análise dinâmica cuidada dos efeitos das vibrações. Porém, se a frequência própria for superior a este valor, será suficiente garantir que a relação entre a deformação máxima da estrutura u para uma carga pontual F aplicada no ponto mais gravoso obedeça a $u / F \leq 1,5 \text{ mm/kN}$ e que a amplitude da velocidade inicial por impulso unitário, v , não exceda $100^{(\zeta - 1)} \text{ m/(Ns}^2)$, igualmente avaliada no ponto de maior resposta máxima a esta acção.

2.2.4.2 PONTES PEDONAIS

As pontes pedonais podem apresentar níveis de vibração excessivos particularmente nas situações de ocorrência de fenómenos de ressonância na direcção vertical ou de “lock-in” na direcção horizontal. Neste sentido, diversas normas estrangeiras tendem a estabelecer níveis máximos de vibração nestas estruturas de modo a garantir o seu bom funcionamento em serviço. É o caso da BS5400 [13], a qual, tendo por base a proposta apresentada por Blanchard et al [10], refere que a aceleração máxima vertical originada pela travessia de um peão tipo (700N de peso) em andamento sobre a ponte não deve exceder

$$a_{\max} \leq 0,5\sqrt{f} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

sendo f a frequência natural da estrutura. Embora este limite esteja associado à acção do caminhar, é frequentemente aceite que também deve ser utilizado nas situações de vibrações provocadas por outras acções dinâmicas transmitidas pelos peões, tal como a corrida ou o salto rítmico.

Outra norma bastante divulgada nesta área é norma canadiana ONT 83 [17], a qual, nas mesmas circunstâncias do caso anterior, é mais conservativa, impondo que a resposta máxima da ponte seja limitada a

$$a_{\max} \leq 0,25 \cdot f^{0,78} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Sabendo que frequência crítica associada a fenómenos de ressonância na direcção vertical é cerca de 2Hz, correspondente à frequência da passada de um peão em andamento normal, as normas Britânica e Canadiana referidas apontam para um valor da aceleração máxima admissível de cerca de $0,71\text{m/s}^2$ e $0,43\text{m/s}^2$, respectivamente. Estes valores são significativamente superiores aos limites estabelecidos para lajes, os quais apontam para níveis máximos na ordem dos $0,5\%$ g, ou seja, $0,05\text{m/s}^2$. Este facto deve-se naturalmente à menor exigência de conforto requerida para pontes pedonais, frequentemente caracterizadas por terem vãos relativamente elevados e coeficientes de amortecimento reduzidos, não sendo economicamente viável nem justificável conceber estruturas deste género que cumpram limites tão exigentes [132].

Ambas as normas anteriores definem limiares da aceleração vertical para a excitação provocada por um único peão, estabelecendo uma metodologia simples que pode ser utilizada para aferir a vulnerabilidade de uma ponte pedonal a vibrações, em especial, se se tiverem em conta os diversos métodos simplificados de avaliação da resposta estrutural desenvolvidos para estes casos [84]. Todavia, estas normas não referem os valores limite da aceleração que devem ser respeitados nas situações em haja grupos de pessoas ou fluxos contínuos de peões sobre a ponte, sendo geralmente aceite que, nestas circunstâncias, os limiares de vibração permitidos podem ser superiores aos definidos para um único peão, existindo propostas que fixam uma tolerância máxima na ordem de $1,8$ a 2m/s^2 [6].

Já a ISO 10137 (1992), com uma actualização em 2007 [63], sendo um documento mais recente, contempla um conjunto mais alargado de solicitações e tem em conta a possibilidade de vibração da

estrutura quer na direcção vertical, quer na lateral. Em particular, refere que as passagens (ou pontes) pedonais devem ser estudadas de acordo com a quantidade de tráfego de pessoas previsível durante o seu funcionamento em serviço, devendo considerar-se a possibilidade dos seguintes cenários: *i*) uma pessoa a fazer a travessia em andamento e uma outra (receptor das vibrações) parada a meio vão; *ii*) um fluxo médio de peões que diariamente fazem repetidas travessias em grupos de 8 a 15 pessoas (em andamento não sincronizado) dependendo do comprimento e largura da passagem; *iii*) o fluxo de uma multidão de pessoas (significativamente mais de 15 indivíduos) e; *iv*) Eventos festivos ou coreográficos ocasionais (quando relevantes).

Em qualquer das situações consideradas, a norma recomenda que, à falta de dados mais concretos, se limitem as vibrações verticais a valores obtidos a partir da curva base da aceleração efectiva segundo o eixo z indicada na norma ISO 2631-2 (ver Figura 2.4), utilizando um factor multiplicativo de 60. Porém, se for previsível a existência de pessoas paradas sobre a estrutura, como é o caso do primeiro cenário, o factor multiplicativo deve reduzir-se para 30. Relativamente a vibrações laterais induzidas pelos peões ou até pelo vento, esta norma recomenda que a aceleração eficaz máxima não exceda 60 vezes os valores indicados pela curva base associada à direcção horizontal (ver Figura 2.5). Também refere que no cálculo do valor da aceleração eficaz se tome um período de integração de 1s, o que só faz sentido na presença de vibrações de carácter não harmónico.

Para finalizar, na Tabela 2.13 encontra-se uma proposta relativa à fixação de níveis máximos de vibração em pontes pedonais em função da classe de conforto da estrutura, a qual foi publicada pelo “Service d’Études Techniques des Routes et Autoroutes” (SÉTRA) do ministério dos transportes Franceses. Estes valores foram também adoptados pelo grupo de trabalho do projecto SYNPEX (“Advanced Load Models for Synchronous Pedestrian Excitation and Optimised Design Guidelines for Steel Footbridges”) [119] no qual a FEUP foi um dos parceiros. Os níveis de vibração aconselhados são consensuais com a generalidade das propostas nesta área e têm em conta as vibrações quer na direcção vertical, quer lateral por efeito de “lock-in”.

Nível de conforto	Direcção	Aceleração (m/s^2)
Máximo	Vertical	0 – 0,5
	Horizontal	0 – 0,15
Médio	Vertical	0,5 – 1
	Horizontal	0,15 – 0,3
Mínimo	Vertical	1 – 2,5
	Horizontal	0,3 – 0,8
Inaceitável	Vertical	>2,5
	Horizontal	>0,8

Tabela 2.13 – Níveis de vibração admissíveis em pontes pedonais em função da classe de conforto [110]

2.2.4.3 EDIFÍCIOS ALTOS

Os edifícios altos são estruturas que apresentam por vezes elevados níveis de esbelteza, podendo ficar sujeitos a vibrações de baixa frequência, particularmente durante a ocorrência de tempestades e ventos fortes. Estas situações podem suscitar queixas por parte dos utilizados devido ao desconforto que sentem motivado por sensações de medo, enjoo ou vertigem, afectando directamente a actividade que estão a desenvolver. Além deste caso, este tipo de fenómenos é susceptível de ocorrer em outros tipos de estruturas caracterizadas por terem uma baixa frequência própria, tais como torres esbeltas e estruturas “off-shore”. Apesar da percepção dos seres humanos a vibrações deste tipo já ser referida na ISO 2631-1, nem a ISO 2631-2, nem a BS6472, definem claramente os correspondentes valores limiares de exposição, sendo necessário o recurso a outras normas que abordem adequadamente este problema.

As normas mais conhecidas neste domínio são a ISO 6897 (1984) [62], cujo título é “Guidelines for the evaluation of the response of occupants of fixed structures, especially buildings and off-shore structures, to low-frequency horizontal motion (0,063 to 1 Hz)”, o regulamento Canadano de edificios NBCC (1981) [95] e, mais recentemente, a ISO 10137 [63]. A norma Britânica BS 6611, também por vezes referenciada, é em tudo idêntica à ISO 6897. A norma internacional ISO 6897, tal como se diz no título, aplica-se a vibrações horizontais na gama de frequências entre 0,063 e 1Hz, considerando que são transmitidas ao “corpo inteiro” dos seres humanos em qualquer postura que apresentem. Distingue três categorias de percepção às vibrações começando pela categoria “a” referente ao um nível de mínimo de percepção, depois pela categoria “b” onde inclui os níveis de percepção que podem causar medo e alarme, e finalmente a categoria “c” correspondentes aos limites que interferem com a capacidade de trabalho.

Em edificios correntes onde se verifiquem níveis de vibração elevados originados por tempestades fortes pouco frequentes mas que tenham um período de incidência de pelos menos 10 minutos, a norma sugere que se respeitem os limites correspondentes à categoria de percepção “b” traduzidos pela curva 1 da Figura 2.14. Neste caso, a probabilidade de ocorrência de queixas não excede 2% considerando a exposição dos indivíduos durante os 10 minutos mais gravosos de uma tempestade com um período de retorno de pelo menos 5 anos. Nos casos de edificios de características especiais onde seja frequente a ocorrência de vibrações devidas ao vento e em que se exija um ambiente praticamente estático, a norma ISO aconselha a que não se ultrapassem os limites mínimos de percepção (categoria “a”) traduzidos pela curva 1 da Figura 2.15. Se a situação não for tão restritiva, como é o caso de edificios onde se executem trabalhos de precisão rotineiros, aconselha que se respeitem os limites traduzidos pela curva 2 da mesma figura, referentes ao limiar de percepção calculado em termos de valores médios numa população adulta. A curva 2 da Figura 2.14 diz respeito aos limites impostos em estruturas “off-shore” onde esteja em causa a capacidade de trabalho (categoria de percepção “c”).

Em qualquer das situações descritas, os níveis de vibração devem ser avaliados em termos de valores de aceleração eficaz, seguindo os princípios subjacentes às primeiras edições da ISO 2631, ou seja, sem

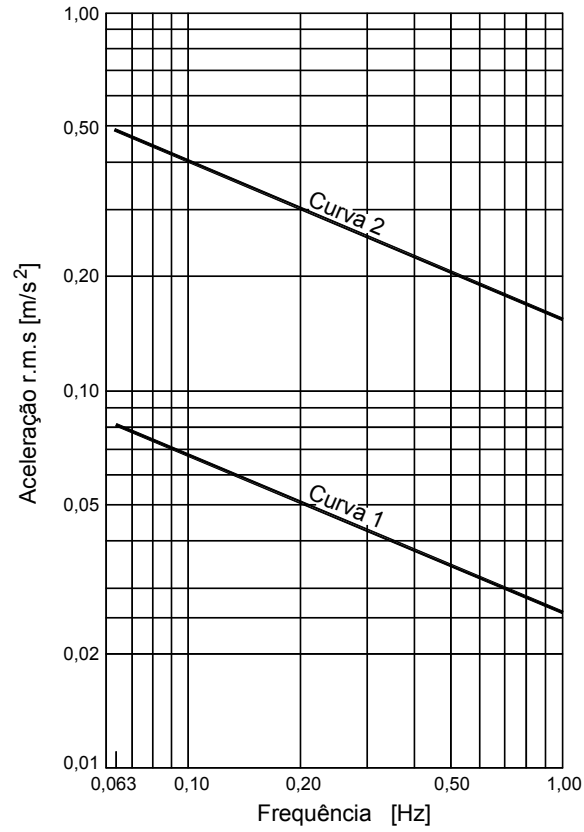


Figura 2.14 – Limites das vibrações em edifícios correntes (1) e estruturas “off-shore” fixas ao solo (2) (ISO 6897)

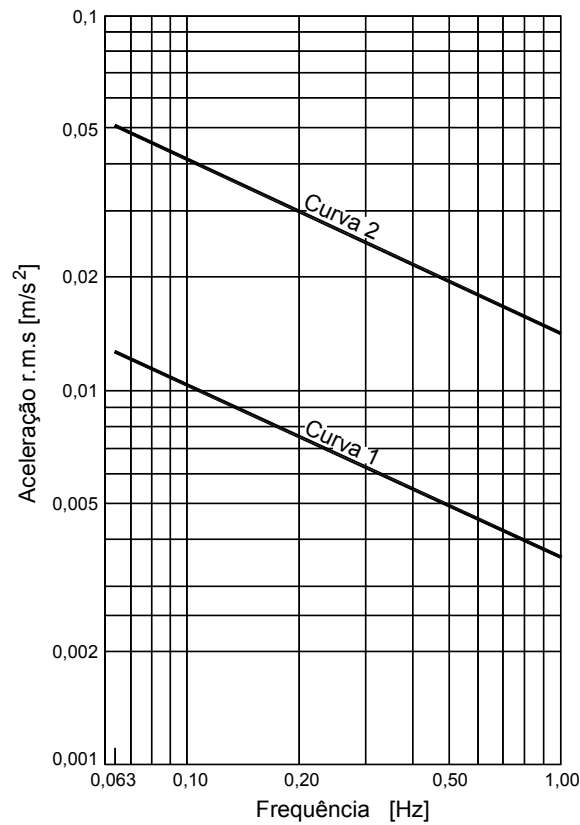


Figura 2.15 – Curvas de percepção mínima (1) e média (2) em seres humanos (ISO 6897)

ponderação em frequência, e, nos casos em que as vibrações apresentem um conteúdo em frequência disperso, comparando o valor eficaz associado à frequência central de cada banda de terço de oitava com o respectivo valor limiar indicado no ábaco em causa.

Em alternativa à ISO 6897 descrita, o código Canadano NBCC também sugere limites para a vibração horizontal de edifícios sujeitos a tempestades com um período de retorno de 10 anos. Ao contrário da norma internacional, este código não faz depender os valores limiares em função da frequência das vibrações, mas distingue o tipo de edifício em análise, estabelecendo um limite da aceleração máxima de 10mili-g para edifícios residenciais e de 30mili-g para edifícios de escritórios.

Já a ISO 10137 apresenta no seu anexo D curvas de percepção em função da frequência de vibração do edifício (de 0,06 a 5Hz) e do tipo de utilização. Refere que, de modo a garantir limites aceitáveis da aceleração horizontal em edifícios em condições de serviço, será suficiente considerar a acção de uma tempestade com o período de retorno de 1 ano. A curva de valores limiares referente a edifícios residenciais corresponde a 90% da taxa da probabilidade de percepção das vibrações pelos seres humanos e a curva associada a edifícios de escritório é 1,5 vezes superior a esta, estando as suas representações gráficas indicadas na Figura 2.16, em função da frequência de vibração em causa e da aceleração de pico.

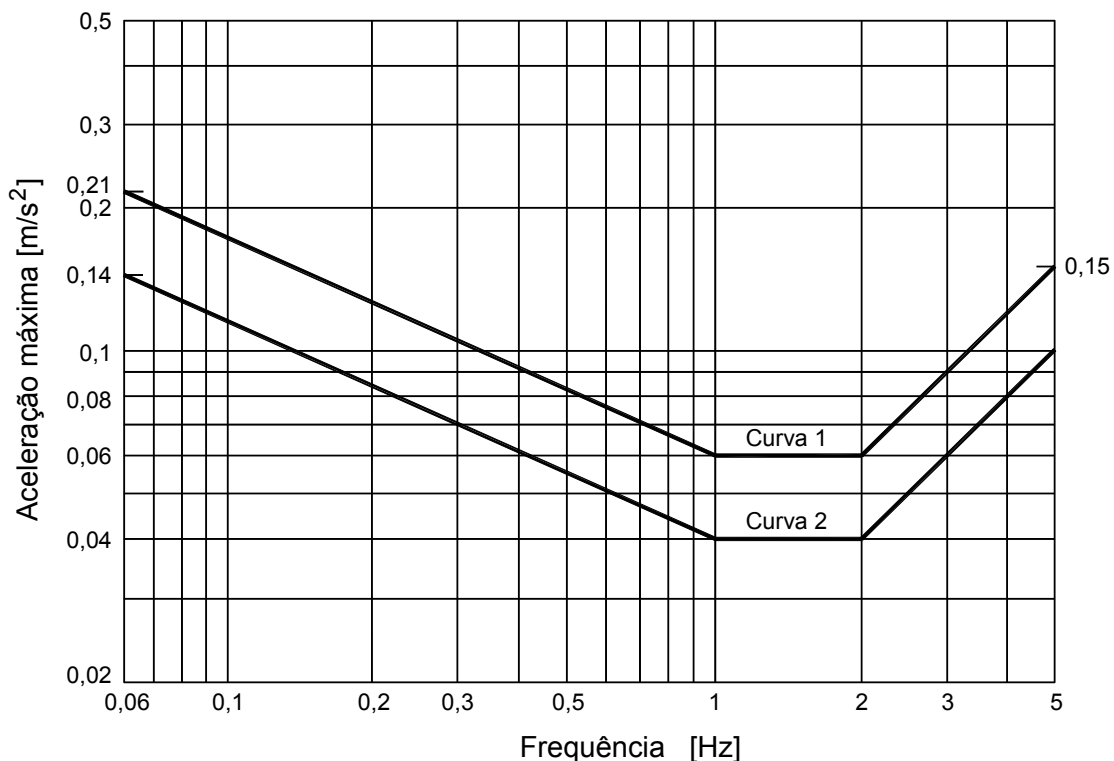


Figura 2.16 – Curvas de avaliação das vibrações induzidos pela acção do vento de acordo com a ISO 10137

2.3 SISTEMAS DE CONTROLO DE VIBRAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL

2.3.1 CLASSIFICAÇÃO DOS DIFERENTES SISTEMAS

No capítulo 1 fez-se uma descrição das técnicas actualmente utilizadas na Engenharia Civil para solucionar problemas de vibrações excessivas em diversos tipos de estruturas. Dado o elevado número de aplicações nesta área e de propostas que têm surgido nos últimos anos, é impraticável num trabalho como este descrever pormenorizadamente as diversas soluções encontradas. Por esta razão, nas secções seguintes procura-se fazer um breve resumo dos sistemas mais conhecidos, procurando associá-los a exemplos de aplicação com maior ou menor grau de actualidade. Os sistemas descritos baseiam-se na classificação sugerida na Figura 2.17, a qual, dentro da área o controlo estrutural, agrupa os sistemas de carácter passivo, activo, semi-activo e híbrido.

Controlo Estrutural	-Passivo	-Absorsores	-Amortecedores de massa sintonizada -Amortecedores de líquido sintonizado
		-Dissipadores	-Amortecedores viscosos -Amortecedores viscoelásticos -Amortecedores friccionais -Amortecedores histeréticos
		-Isoladores	-Isolamento de base
	-Activo		-Amortecedores de massa activa -Cabos activos -Diagonais activas -Actuadores piezoeléctricos
	-Semi-activo		-Dispositivos de rigidez variável -Amortecedores de atrito variável -Amortecedores viscosos de orifício variável -Amortecedores de viscosidade variável
	-Híbrido		

Figura 2.17 – Classificação dos diferentes sistemas de controlo de vibrações em estruturas

2.3.2 SISTEMAS PASSIVOS

No que diz respeito a sistemas passivos, começa-se por descrever os sistemas que actuam por absorção das vibrações, incluindo-se nesta categoria os amortecedores de massa sintonizada, vulgarmente conhecidos como TMDs (“Tuned Mass Dampers”), e os amortecedores de líquido sintonizado, conhecidos como TLDs (“Tuned Liquid Dampers”). Os TMDs são dispositivos mecânicos compostos por uma massa ligada à estrutura através de uma mola e de um amortecedor, os quais, quando devidamente sintonizados, introduzem compensação de fase ao movimento do sistema principal reduzindo o seu comportamento dinâmico à custa da absorção da energia mecânica por parte da massa passiva do aparelho. Quando apropriado, os TMDs podem ser materializados através do funcionamento de um pêndulo fixo à estrutura, cuja aplicação é particularmente interessante nos casos em que a frequência própria do sistema a controlar é relativamente baixa.

Estes dispositivos comprovam ser bastante eficazes no controlo de vibrações harmónicas, conhecendo-se muitas aplicações na área da Engenharia do Vento envolvendo estruturas flexíveis como edifícios altos e pontes de grande vão, bem como aplicações em estruturas vulneráveis a fenómenos de ressonância como lajes de edifícios e pontes pedonais. Apesar de relativamente menos eficientes no controlo de vibrações devidas a terremotos, estes dispositivos desempenham também um papel importante na redução da resposta sísmica de estruturas, tirando partido do nível de amortecimento adicional resultante da sua adaptação a estes sistemas [126].

Para funcionarem correctamente, os TMDs têm de estar devidamente sintonizados para a frequência de vibração de estrutura, podendo registar-se uma significativa perda de eficiência mesmo para pequenos desvios de calibração. Além disso, cada dispositivo só pode atenuar a resposta de um modo de vibração específico (o que em grande parte dos casos é suficiente), devendo adoptar-se pelos menos tantas unidades quantos os modos distintos que se queiram controlar.

Na Figura 2.18a mostra-se a torre de televisão CN Tower em Toronto, que corresponde à primeira aplicação de um TMD numa estrutura com estas características. Para o efeito, foram concebidos dois dispositivos de funcionamento pendular com 9ton de massa cada, no sentido de reduzir a resposta estrutural à acção do vento [38]. Esta torre de 553m, construída no ano de 1975, permaneceu classificada como a estrutura mais alta do mundo até ao ano de 2007, data em foi ultrapassada pelo edifício Burj Dubai, na cidade do Dubai, cuja conclusão está prevista para 2009.

Na Figura 2.18b mostra-se um caso mais recente, o edifício Taipei 101 localizado na ilha de Taiwan na China, considerado o edifício mais alto do mundo entre os anos de 2005 e 2007. No sentido de atenuar a resposta estrutural em face da acção do vento e da acção sísmica, foi instalado no topo um TMD de funcionamento pendular constituído por uma massa de geometria esférica de 650ton, suspensa através de 4 cabos de aço e amortecida pela adaptação à base de 8 amortecedores viscosos tal como se evidencia na Figura 2.18c. Calcula-se que este dispositivo consiga reduzir a resposta dinâmica desta estrutura de 0,15Hz de frequência natural em cerca de 40% [11].



a)



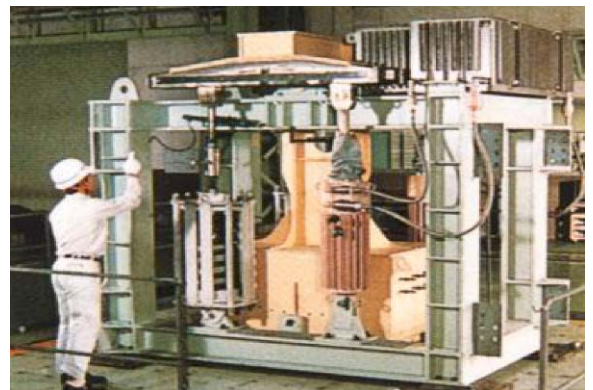
b)



c)



d)



e)

Figura 2.18 – a) CN tower em Toronto; b) Edifício Taipei 101 em Taiwan ; c) TMD instalado no Taipei 101; d) TMD na ponte da Normandia; e) TMD utilizado da Ponte de Akashi Kaikyo

Os TMDs também têm sido utilizados em pontes de grande vão, quer na fase construtiva, quer em serviço, com o objectivo de reduzir a sua resposta dinâmica à acção do vento e evitar fenómenos de instabilidade como “vortex-shedding” ou “flutter”. Na Figura 2.18d mostra-se o TMD utilizado na construção da ponte atirantada da Normandia, constituído por uma massa de 40ton guiada por um carro ligado às laterais do tabuleiro através de um conjunto de molas. Este dispositivo permitiu reduzir a amplitude das oscilações provocadas pelo vento em cerca de 35% [24]. Já na Figura 2.18e, pode ver-se uma fotografia do TMD utilizado na construção da ponte suspensa de Akashi Kaikyo no Japão, a qual foi concluída em 1998 tendo, até à data, o recorde do maior vão do mundo com uma extensão de 1991m. Durante a sua construção, instalaram-se 20 TMDs distribuídos pelas duas torres no sentido de amortecer as vibrações nos pilares em consola caracterizados por frequências de 0,13 e 0,46Hz nas duas direcções principais [67]. O aparelho utilizado tem um funcionamento pendular, ao qual foram adaptados um amortecedor viscoso em forma de tambor e um conjunto de molas paralelas conforme se pode ver na fotografia.

Na Figura 2.19a apresenta-se o exemplo de um sistema de controlo de vibrações constituídos por TMDs aplicados a chaminés de grande altura, neste caso referente à central termoeléctrica de Priolo Gargallo na Itália. Os amortecedores de massas sintonizadas são materializados através de anéis metálicos suspensos no topo das torres através de pendurais metálicos dotados de rótulas universais para permitir o movimento pendular da massa em qualquer direcção (ver Figura 2.19b). Além disso, tal como se pode ver na fotografia, estes dispositivos estão ainda dotados de amortecedores viscosos que ligam o anel ao corpo da chaminé.

As lajes são estruturas que também podem experimentar níveis elevados de vibração, em particular na ocorrência de fenómenos de ressonância decorrentes das acções dinâmicas induzidas pelos seus utilizadores. Na Figura 2.19c pode ver-se uma solução de controlo composta por TMDs formados por conjuntos de massas simétricas fixas à estrutura por intermédio de barras de aço, as quais permitem o ajuste da frequência natural do dispositivo por variação do vão da consola [8]. Neste caso pode observar-se que os dois aparelhos estão sintonizados para frequências diferentes, ficando cada um responsável por amortecer isoladamente os respectivos modos de vibração.

No controlo de vibrações em pontes pedonais tem-se igualmente dado especial atenção à utilização de TMDs para controlo das vibrações verticais e laterais. A Figura 2.19d mostra um conjunto de dispositivos deste género que foram utilizados na ponte pedonal Pedro e Inês em Coimbra, sintonizados para a frequência de vibração lateral de cerca de 0,9Hz com o objectivo de reduzir a vulnerabilidade da estrutura à ocorrência de fenómenos de “lock-in” [25]. Além destas unidades foram também implementados vários TMDs para controlo das vibrações verticais, na medida em que estrutura apresenta um conjunto de frequências naturais na gama de frequências susceptíveis de serem excitadas pelas acções dinâmicas dos peões. Esta aplicação, correspondente à primeira implementação de dispositivos deste género em estruturas desta natureza em Portugal, faz parte deste trabalho e está descrita pormenorizadamente no capítulo 6.

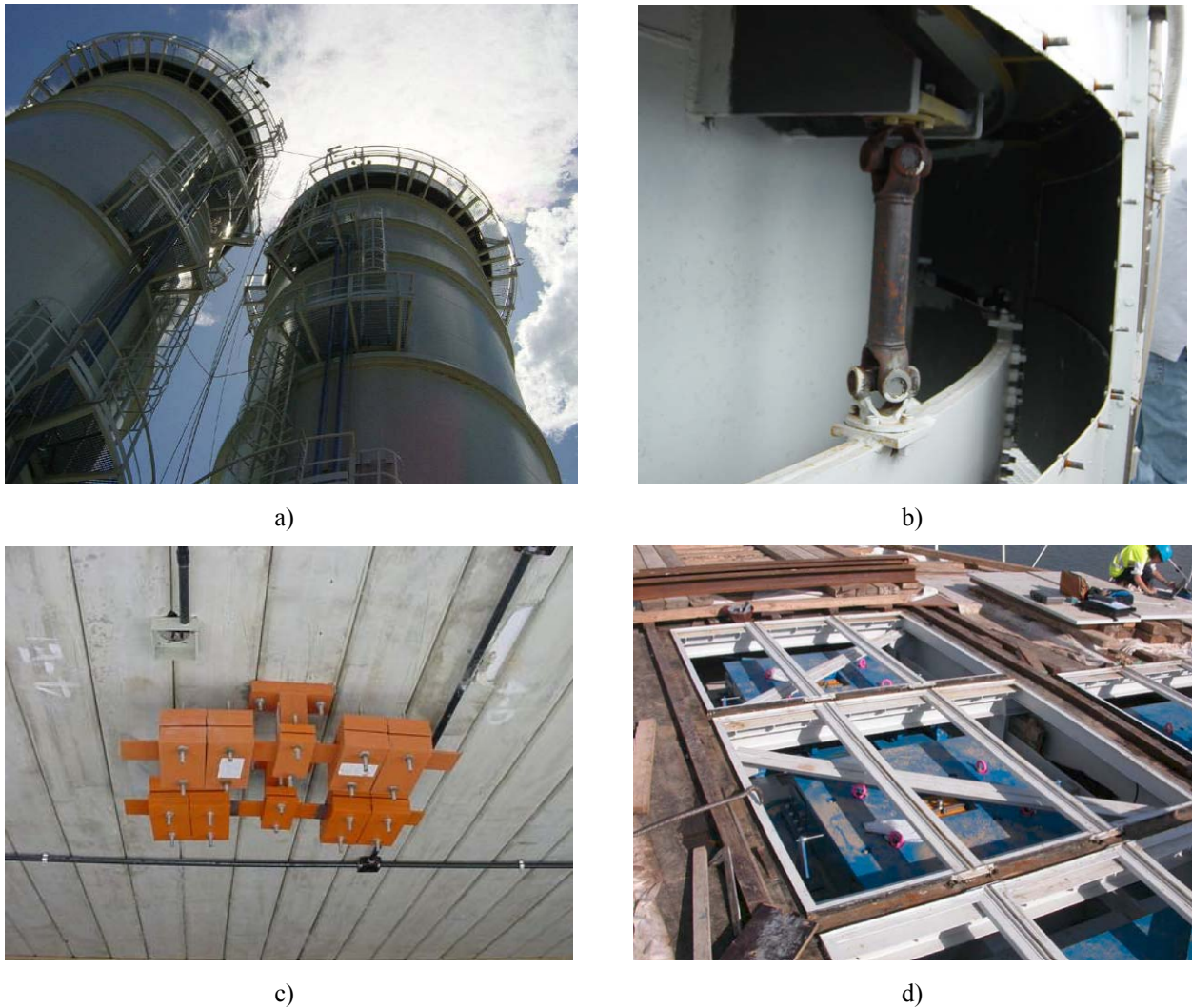


Figura 2.19 – a) Central termoeléctrica de Priolo Gargallo na Itália; b) Detalhe dos TMDs utilizados no topo das chaminés; c) TMDs adaptados a uma laje; d) TMDs para controlo de vibrações laterais na ponte Pedro e Inês

Os amortecedores de líquido sintonizado são dispositivos de controlo que produzem um efeito semelhante aos TMDs, embora apresentem um comportamento mais complexo de carácter não-linear. Todavia, através da consideração de determinadas hipóteses, as equações que regem o seu comportamento dinâmico podem ser linearizadas conseguindo-se inclusivamente estabelecer procedimentos de dimensionamento análogos aos dos TMDs [118]. Estes dispositivos tiram partido do efeito hidrodinâmico de um líquido (normalmente a água) no interior de um reservatório que pode assumir várias configurações, no sentido de introduzir uma compensação de fase ao movimento da estrutura ao qual estão fixados. Os TLDs são particularmente interessantes em aplicações cujos sistemas apresentem uma baixa frequência de vibração, constituindo uma solução atractiva do ponto de vista económico e pelo facto de poderem ser facilmente sintonizados por adição ou subtracção de líquido. No entanto, têm as mesmas limitações que os TMDs, ou seja, só atingem um adequado grau de eficiência se estiverem devidamente sintonizados e podem controlar individualmente um modo de vibração específico.

O primeiro exemplo de aplicação que se refere diz respeito à implementação de TLDs para controlo de vibrações laterais numa ponte pedonal atirantada situada na cidade de Toda no Japão (ver Figura 2.20a). Esta ponte, de acesso a um estádio de desportos aquáticos, foi concluída em 1989 tendo-se observado durante os primeiros anos de serviço oscilações laterais de cerca de 8mm de amplitude e de 0,95Hz de frequência [46], originadas pelo fenómeno de “lock-in” associado à passagem do fluxo de peões após o término dos espectáculos (ver Figura 2.20b). Para solucionar este problema de vibrações excessivas, foi implementada uma solução de controlo estrutural proposta por Fujino *et al* [94] baseada na utilização de 600 pequenos reservatórios plásticos de dimensões 360mm×290mm com uma altura de água de 34mm, armazenados no interior do tabuleiro (ver Figura 2.20c). Além disso foram também utilizados cabos de aço de 10mm de diâmetro interligando os tirantes da ponte como media adicional de remediar as vibrações que também se faziam sentir nestes elementos.



a)



b)



c)

Figura 2.20 – Utilização de TLDs para controlo de vibrações laterais na ponte de Toda [94]: a) Vista geral da estrutura; b) Fluxo de pessoas após o término dos espetáculos; c) Reservatórios de água no interior do tabuleiro

Como resultado desta operação, a amplitude das vibrações laterais sofreu um decréscimo de cerca de 65% avaliadas nas mesmas condições de carregamento anteriormente descritas, o que traduz uma redução significativa da resposta estrutural. Curiosamente, após 10 anos de funcionamento as medidas de controlo foram novamente avaliadas tendo-se verificado uma degradação da eficiência do sistema motivada pela falta de manutenção. Efectivamente muitos dos reservatórios, expostos a temperaturas elevadas, sofreram perda de água por evaporação ficando dessintonizados com a frequência de vibração da estrutura.

Os TLDs têm sido igualmente utilizados no controlo de vibrações em edifícios altos expostos à acção do vento ou de sismos. Na Figura 2.21a pode ver-se o caso do hotel Cosima em Tóquio caracterizado pela excentricidade da sua arquitectura, sendo composto por 26 pisos totalizando um altura de 106m. Com o objectivo de reduzir o seu compostamente dinâmico às acções indicadas, foi instalado no topo um TLD de colunas líquidas conhecido como TLCD, o qual, tendo uma massa de 58ton, permite reduzir a resposta dinâmica da estrutura em cerca de 50% [111]. Outro exemplo diz respeito à utilização de TLDs no topo do hotel Shin-Yokohama no Japão (ver Figura 2.21b). Caracterizado por uma geometria circular em planta, esta estrutura de 42 pisos e de 149m de altura tem uma frequência própria de 0,31Hz, tendo-se decidido instalar 30 reservatórios de geometria igualmente circular dada a possibilidade de ocorrerem vibrações em qualquer direcção [120]. Os reservatórios são constituídos pela sobreposição de vários níveis de água separados em diferentes tanques, constituindo uma solução conhecida como TLDs “multi-layer” (ver Figura 2.21c). Esta solução também foi encontrada no caso da torre do novo aeroporto internacional de Tóquio, onde se instalaram 1404 pequenos reservatórios de 15 litros de água sintonizados para uma frequência de vibração de 0,74Hz [121] (ver Figura 2.21d). Neste caso, optou-se por introduzir pequenas partículas flutuantes nos reservatórios com o objectivo de conseguir um maior amortecimento no movimento do líquido.

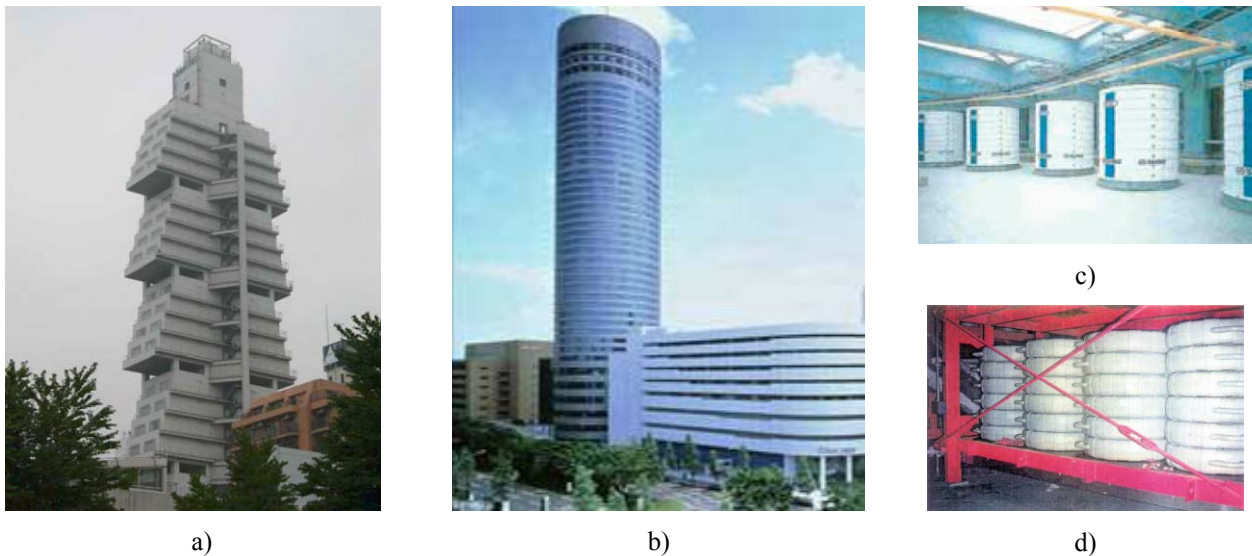


Figura 2.21 – a) Hotel Cosima em Tóquio; b) Hotel Shin-Yokohama; c) Reservatórios “multi-layer” utilizados no hotel Shin-Yokohama; d) TLDs utilizados na torre do aeroporto Haneda em Tóquio

No que diz respeito à classe de sistemas de controlo que funcionam como dissipadores passivos, começa-se por referir que a introdução de dispositivos deste género numa estrutura tem como objectivo contribuir para a dissipação da energia mecânica induzida pelas acções dinâmicas exteriores, servindo de complemento aos mecanismos de dissipação desenvolvidos pelas secções dos elementos estruturais [114]. Embora actualmente se conheçam muitas aplicações relacionadas com a redução das vibrações em estruturas na fase de serviço, grande parte das implementações nesta área estão dirigidas para os problemas de Engenharia Sísmica, onde têm surgido diversas propostas de vários tipos de dispositivos.

As vantagens em utilizar dissipadores passivos integrados em estruturas são aquelas que normalmente se atribuem a sistemas passivos em geral, ou seja, elevada fiabilidade e reduzido custo directo e em manutenção. Além disso, afiguram-se uma boa solução de reforço de estruturas existentes através da adaptação de amortecedores em zonas críticas devidamente seleccionadas. No entanto, apresentam algumas desvantagens comparativamente a outros sistemas passivos, como por exemplo o isolamento de base, pois só funcionam depois da estrutura já estar afectada pelas vibrações.

Os dissipadores passivos utilizados designam-se normalmente de amortecedores porque tiram partido de um qualquer mecanismo de amortecimento ou dissipação da energia, quer seja viscoso, viscoelástico, friccional ou histerético. No caso de amortecedores viscosos, é gerada uma força de amortecimento em função da velocidade absoluta ou relativa, dependendo se estão fixados ao exterior ou se interpostos entre dois pontos da estrutura, respeitando uma lei linear ou não-linear conforme o efeito que se pretenda obter. A utilização de amortecedores viscosos lineares tem a vantagem de conduzir a cálculos mais simples e a um funcionamento aceitável na maioria das aplicações [130], sendo a solução adoptada em muitos casos práticos. Todavia, na sua concretização real é por vezes difícil evitar algum grau de não-linearidade caracterizado por um expoente da velocidade diferente da unidade. Além disso, os amortecedores não-lineares podem ser mais eficazes na resposta a determinados tipos de acções exteriores [56] sendo preferível em alguns casos optar deliberadamente por um dispositivo deste género.

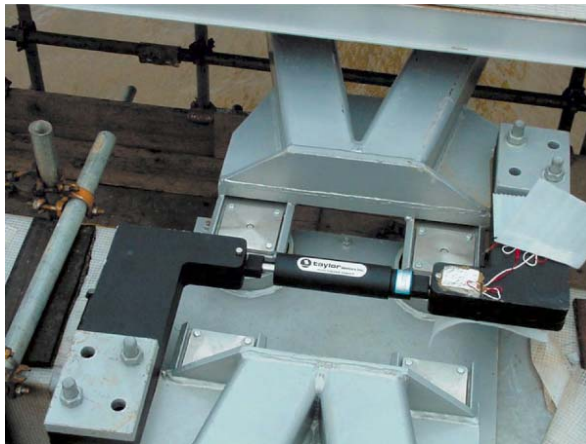
Na Figura 2.22a apresenta-se o primeiro exemplo de aplicação envolvendo a utilização de amortecedores viscosos numa ponte pedonal localizada em Minden na Alemanha [17]. Neste caso, dada a elevada flexibilidade lateral da estrutura, optou-se por introduzir estes dispositivos de controlo de modo a atenuar as vibrações nesta direcção. Na Figura 2.22b pode ver-se um detalhe dos amortecedores viscosos utilizados, podendo constatar-se que não existe qualquer ligação rígida do tabuleiro aos pilares metálicos. Por outro lado, na Figura 2.22c mostra-se também um dos 37 amortecedores viscosos utilizados no conhecido caso de reforço da ponte do Millenium em Londres [123], solução que foi compatibilizada com a instalação de 52 TMDs. O amortecedor indicado na figura foi aplicado ao nível do tabuleiro num esquema de montagem conhecido como “Chevron damper”, caracterizado pela estrutura rígida em forma de “V” de fixação do dispositivo. A adaptação de um conjunto destes amortecedores à estrutura permitiu aumentar significativamente o nível do amortecimento na direcção lateral do tabuleiro reduzindo a vulnerabilidade da estrutura à ocorrência de fenómenos de “lock-in”, principal motivo da intervenção realizada na ponte.



a)



b)



c)



d)



e)



f)

Figura 2.22 – a) Ponte pedonal de Minden; b) Detalhe dos amortecedores instalados entre o tabuleiro e os pilares; c) Amortecedor utilizado no reforço da ponte do Millenium; d) Amortecedores utilizados no controlo de vibrações dos tirantes da ponte Fred Hartman; e) Amortecedores instalados na cobertura do estádio de basebol de Seattle; f) “Chevron damper” integrado num pórtico de um edifício

Na Figura 2.22d encontra-se mais um exemplo da utilização de amortecedores viscosos no controlo de vibrações em estruturas. Neste caso, trata-se de uma ponte atirantada localizada no estado do Texas, nos Estados Unidos, conhecida como Fred Hartman Bridge, a qual, após a data de conclusão em 1995, manifestava problemas de vibrações nos tirantes causados pela acção combinada do vento e da chuva [105]. Com o objectivo de reduzir a amplitude das vibrações nestes elementos, foram instalados amortecedores viscosos a uma determinada distância das ancoragens, esquema que tem sido ultimamente utilizado neste tipo de reforços por não interferir significativamente com o aspecto arquitectónico da estrutura. Porém, a localização destes dispositivos junto das extremidades dos tirantes não é muito favorável em termos de componentes modais elevadas nos primeiros modos de vibração, o que obriga a um estudo cuidadoso da sua aplicação [24]. Além disso, a introdução de forças de controlo concentradas em determinadas secções pode induzir danos localizados nos tirantes que têm de ser devidamente acautelados.

Os amortecedores viscosos têm sido também utilizados noutro tipo de estruturas, como o caso do estádio de basebol de Seattle, que se mostra na Figura 2.22e. A elevada dissipação da energia sísmica alcançada por estes dispositivos permitiu reduzir significativamente os esforços de cálculo da estrutura, tendo conduzido a uma redução importante no custo global da obra. Na Figura 2.22f pode ver-se outro exemplo da aplicação destes amortecedores em estruturas, mostrando a aplicação de um “Chevron damper” integrado no pórtico de um edifício. Esta solução tem sido amplamente utilizada no reforço sísmico de estruturas de edifícios por permitir integrar dispositivos deste género no interior de construções novas ou existentes sem afectar significativamente a sua operacionalidade e o seu aspecto arquitectónico.

Em alternativa aos amortecedores viscosos, os amortecedores viscoelásticos constituem também uma solução possível para atenuar as vibrações em estruturas de Engenharia Civil [82]. Além da elevada capacidade de dissipação de energia mecânica, particularmente nas situações de vibrações de elevada velocidade, estes amortecedores possuem ainda uma força de restituição semelhante à exercida por uma mola, de tal modo que seu o comportamento global pode ser idealizado através de um amortecedor viscoso e uma mola ligados em paralelo. Este tipo de amortecedor é geralmente constituído por um material viscoelástico colado entre chapas metálicas (tipo “sandwich” de uma ou várias camadas), sendo a energia comunicada pelas acções exteriores dissipada por efeito da deformação por corte desse material. Estes amortecedores apresentam todavia alguns inconvenientes, particularmente porque o comportamento do material viscoelástico é fortemente dependente do conteúdo em frequência das vibrações e dos níveis de tensão e temperatura instalados, dificultando a previsão do seu desempenho numa estrutura [114].

A implementação real de amortecedores viscoelásticos verifica-se não só em edifícios, como é o caso das torres do World Trade Center onde se instalaram 20000 unidades destes dispositivos, mas também em outras estruturas como pontes. De facto, nas Figuras 2.23a e 2.23b mostra-se uma aplicação envolvendo a ponte atirantada Veterans Memorial Bridge em Ohio, na qual se utilizaram amortecedores viscoelásticos para atenuar as vibrações excessivas nos tirantes produzidas pela acção do vento e chuva [66].



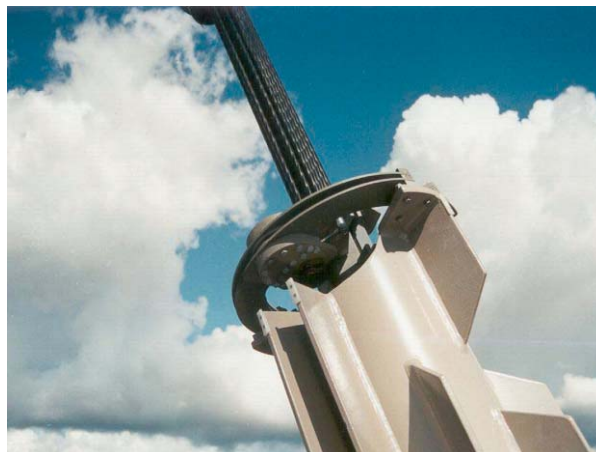
Figura 2.23 – a) Detalhe do amortecedor viscoelástico utilizado na Ponte Veterans Memorial Bridge em Ohio;
b) Aspecto do dispositivo ligando os tirantes ao tabuleiro

O recurso a amortecedores friccionais ou atríticos é também uma solução possível para dissipar a energia das vibrações em estruturas, convertendo a energia mecânica em energia calorífica. Neste caso, procura-se instalar forças de controlo que se opõem ao movimento do sistema, as quais dependem essencialmente da rugosidade das superfícies sólidas das placas deslizantes que constituem o amortecedor e da força que as comprime, podendo o movimento relativo dessas placas ser de translação ou de rotação. As principais vantagens dos amortecedores friccionais centram-se no facto de facilmente poderem ser ajustáveis através da regulação da força de compressão nas placas e por serem relativamente insensíveis às variações de temperatura e frequência das vibrações. Além disso, podem ser regulados para funcionarem a partir de um determinado nível de força, aumentando a sua durabilidade e reduzindo os custos de manutenção por ficarem desactivados perante vibrações de menor significado.

Na Figura 2.24a mostram-se dissipadores passivos deste género integrados em pórticos de um edifício segundo as duas direcções, os quais tiram partido do atrito desenvolvido pelo movimento de rótulas friccionais para dissiparem a energia [78]. Já na Figura 2.24b, mostra-se o amortecedor friccional utilizado pela VSL para atenuar as vibrações em tirantes de pontes [127]. Neste caso, recorre-se ao movimento de translação relativo das placas solidárias com o tirante e dos discos anelares fixados ao tabuleiro para produzir uma força de atrito que pode ser regulada através da respectiva força de aperto.



a)



b)



c)



d)

Figura 2.24 – a) Amortecedores friccionais adaptados a um edifício; b) Amortecedores friccionais da VSL; c) Amortecedor metálico em forma de “X”; d) Amortecedor metálico em forma triangular

Os amortecedores hysteréticos ou metálicos são dispositivos conhecidos como eficazes dissipadores da energia, sendo particularmente interessantes nas aplicações de Engenharia Sísmica. Estes aparelhos baseiam a sua acção de controlo nas sucessivas deformações plásticas associadas ao comportamento hysterético do material constituinte que é normalmente um metal possuidor de características de elevada ductilidade [114]. São quase sempre integrados em pórticos de edifícios através de barras em forma de “V” e podem assumir diversas formas, sendo as mais vulgares as configurações em forma de “X”, placas triangulares ou barras verticais, tal como se mostra nas Figuras 2.24c e 2.24d. Estes aparelhos, além de ajudarem a dissipar a energia sísmica, aumentam a rigidez da estrutura, assumindo também a designação de ADAS (“Added Damping And Stiffness”) [108]. Apesar de constituírem uma solução relativamente económica e de serem eficazes na redução da resposta sísmica, apresentam no entanto deformações permanentes após o seu funcionamento o que, ao contrário dos amortecedores anteriormente referidos, pode obrigar à sua substituição.

Em alternativa aos sistemas passivos de dissipação da energia descritos, o isolamento de base pode constituir uma solução vantajosa, particularmente porque, ao invés dos anteriores, tenta resolver o problema das vibrações reduzindo a sua propagação às estruturas. Esta técnica, especialmente vocacionada para os problemas de Engenharia Sísmica, tem como objectivo eliminar tanto quanto possível as ligações horizontais do solo de fundação à restante estrutura, recorrendo para o efeito a dispositivos de apoio dotados de baixa rigidez lateral. Como resultado, o movimento horizontal do sistema estrutural tende a ficar independente do movimento do terreno nessa direcção, passando a estrutura a funcionar quase como um corpo rígido separado da fundação e imune à acção horizontal dos sismos.

Para conseguir este efeito é necessário que os aparelhos de apoio não só tenham baixa rigidez lateral, mas também possuam capacidade de suporte na direcção vertical, de modo a garantir a estabilidade estrutural. Além disso, devem ter simultaneamente capacidade de dissipação da energia de modo a evitar grandes deslocamentos horizontais da estrutura ao nível do solo e a garantir a funcionalidade do sistema. Apesar de existir uma vasta gama de aparelhos de apoio [52], os mais divulgados são os “Lead Rubber Bearing” (LRB), os “High Damping Rubber Bearing” (HDRB) e os “Friction Pendular System” (FPS). No primeiro caso, os aparelhos são constituídos por camadas intercalares de chapas de aço e de elastómero constituindo um volume de forma cilíndrica, com um núcleo em chumbo destinado à dissipação da energia por histerese. Os HDRB têm um aspecto semelhante, mas são exclusivamente compostos por camadas de aço e de borracha de alto amortecimento. Já os FPS apresentam um princípio de funcionamento bastante diferente, embora produzam um efeito semelhante aos anteriores dispositivos. Neste caso, os aparelhos são constituídos por uma base côncava polida, sobre a qual desliza uma peça semi-esférica de um material compósito auto-lubrificado fixado à outra metade do apoio. Quando sujeito a acções sísmicas, o apoio comporta-se de uma forma semelhante a um pêndulo, caracterizado por induzir uma força de restituição da posição central e por permitir a dissipação da energia por atrito. A utilização destes dispositivos apresenta algumas vantagens relativamente aos anteriores aparelhos de apoio, em particular porque possuem uma maior durabilidade e maior resistência à temperatura, mantendo as características iniciais ao longo do seu período útil de vida [129].

Apesar do isolamento de base ser conceptualmente uma boa solução de controlo, tem no entanto algumas limitações, sendo a sua utilização até contraproducente em algumas situações práticas [65]. É o caso de estruturas localizadas em solos cuja resposta dinâmica à acção sísmica seja dominada por movimentos oscilatórios de baixa frequência, onde existe a possibilidade de ocorrência de fenómenos de ressonância entre o solo e a estrutura, assim como o caso de edifícios altos de grande esbelteza vulneráveis a problemas de estabilidade global a acções horizontais, visto que os aparelhos de apoio não têm geralmente capacidade de resistir a acções de levantamento.

À excepção destes casos, o sistema de isolamento de base tem sido bastante utilizado por todo o mundo na redução da resposta sísmica em diversas estruturas, tais como edifícios novos, ou até no reforço de edifícios existentes, em hospitais e centrais nucleares, em pontes e em silos ou reservatórios. A título



a)



b)



c)



d)



e)



f)

Figura 2.25 – a) Hospital USC em Los Angeles; b) Reservatório localizado na ilha de Revithoussa na Grécia; c) Apoio do tipo FPS utilizado na ponte Benicia-Martinez em São Francisco; d) Sistema de isolamento de base do hospital da Luz; e) Amortecedor viscoso associado ao isolamento de base; f) Amortecedor friccional associado ao isolamento de base

de exemplo, referem-se algumas aplicações reais conhecidas, começando pelo caso do hospital USC (“University of Southern California University Hospital”) em Los Angeles, cuja fotografia se apresenta na Figura 2.25a. Este edifício, concluído em 1991, foi isolado com cerca de 300 aparelhos de apoio de diversos tipos, tendo sido sujeito ao sismo de Northridge em 1994, do qual não resultaram quaisquer danos estruturais [65].

Outro caso bem conhecido diz respeito ao reforço sísmico do edifício da Câmara de São Francisco, o qual ficou bastante danificado após o sismo de Loma Prieta em 1989, tendo a cúpula sofrido um deslocamento basal de cerca de 10cm. Neste caso, decidiu-se instalar cerca de 530 aparelhos de apoio do tipo LRB conjugados com alguns apoios friccionais, tendo-se para o efeito procedido ao levantamento das fundações para a sua instalação.

Na Figura 2.25b mostra-se o caso do isolamento de base de um reservatório de gás líquido natural (LNG) situado na ilha Grega de Revithoussa, próxima de Atenas. Este reservatório encontra-se numa das zonas sísmicas mais intensas da Europa, tendo sido instalados 212 dispositivos do tipo FPS por se ter considerado que esta solução era a mais adequada para fazer face às diversas condicionantes impostas na sua construção, em especial as condições climatéricas agressivas originadas pelo ambiente marítimo e pelas temperaturas extremas que se fazem sentir naquele local. Solução idêntica foi também utilizada no reforço da ponte Benicia-Martinez em São Francisco, onde se instalaram apoios do tipo FPS (ver Figura 2.25c) entre os pilares e o tabuleiro metálico. Os dispositivos utilizados possibilitam deslocamentos horizontais de 135cm de amplitude e induzem uma frequência própria de vibração à estrutura de 0,2Hz.

Em Portugal, só recentemente se implementou um sistema de isolamento de base em edifícios [53]. Trata-se do Hospital da Luz localizado em Lisboa, o qual foi inaugurado no ano de 2007, sendo composto por um edifício que funciona como o hospital propriamente dito e um outro destinado à residência de pessoas de 3ª idade. No seu conjunto foram instalados 315 apoios do tipo HDRB com diâmetros entre 400 e 900mm e características de amortecimento e rigidez variáveis (Ver Figura 2.25d). Além da função normalmente desempenhada pelo isolamento de base destinado ao isolamento sísmico da estrutura, esta solução possibilitou ainda a atenuação de vibrações verticais na estrutura induzidas pela passagem do metropolitano cuja linha passa sob as respectivas fundações.

Nas Figuras 2.25e e 2.25f mostram-se ainda duas aplicações onde se utilizaram amortecedores passivos associados ao isolamento de base, destinados a reduzir os deslocamentos horizontais basais da estrutura. Este tipo de solução é particularmente interessante quando o funcionamento isolado do sistema principal não tem capacidade suficiente de dissipação de energia, o que pode acontecer se se utilizarem aparelhos de apoio mais simples baseados na utilização de blocos de elastómero cintado [52]. O primeiro caso diz respeito à utilização de amortecedores viscosos utilizados no reforço sísmico do edifício da Câmara de Los Angeles e o segundo exemplo refere-se à utilização de amortecedores atríticos compostos por braços contendo rótulas friccionais utilizado num edifício no Japão [78].

2.3.3 SISTEMAS ACTIVOS

Já anteriormente se enunciaram as vantagens e desvantagens existentes na utilização de sistemas activos em estruturas de Engenharia Civil, podendo destacar-se que, apesar da elevada eficiência demonstrada por dispositivos deste género no controlo de vibrações, apresentam custos elevados e um menor grau de fiabilidade do que os sistemas passivos. A implementação de sistemas de controlo activo é particularmente interessante em estruturas flexíveis que apresentem uma dinâmica onde vários modos de vibração podem contribuir significativamente para a resposta estrutural ou quando os parâmetros modais do sistema variam substancialmente ao longo do tempo [48]. Nestes casos, os dispositivos activos têm a capacidade de se sintonizar para a dinâmica do sistema, suplantando a falta de adaptabilidade que caracteriza os sistemas passivos.

Embora se conheçam alguns sistemas de controlo de funcionamento activo que podem ser adaptados em pórticos de edifícios ou estruturas em geral, tais como diagonais ou cabos activos, a grande parte das aplicações centra-se na utilização de AMDs, porque estes têm a vantagem de poderem ser adaptados nas secções onde os principais modos de vibração têm componentes modais significativas, como por exemplo no topo dos edifícios. Já a utilização de actuadores piezoeléctricos, bastante divulgados na área do controlo activo de sistemas mecânicos, não é muito interessante nas aplicações em estruturas reais, pelo facto de terem um curso reduzido para além de exigirem uma grande quantidade de energia no seu funcionamento.

É de facto no domínio da aplicação de AMDs em edifícios que se têm registado mais aplicações de controlo activo, tendo-se verificado pela primeira vez a implementação de um sistema deste género no ano de 1989 no edifício Kyobashi Center localizado em Tóquio [68]. Este edifício, com 10 pisos e 33 metros de altura, é particularmente sensível a vibrações provocadas por acções exteriores, devido à sua elevada esbelteza, marcada por uma relação de largura/profundidade de 1/9,5 (ver Figura 2.26a). O objectivo deste sistema de controlo é proporcionar aos utilizadores do edifício algum nível de conforto quando perturbado por acções sísmicas de baixa intensidade, frequentes em Tóquio, ou por ventos fortes, estando o sistema dimensionado para obter uma redução da resposta estrutural entre 35 e 50%. O sistema de controlo activo utilizado é composto por dois AMDs posicionados ao nível da cobertura, sendo um deles constituído por uma massa de 4,2ton e o outro por uma massa de 1,2ton, suspensas no tecto através de cabos e activadas por servo motores hidráulicos tal como se pode ver nas Figuras 2.26b e 2.26c. Estes dispositivos aplicam forças à estrutura calculadas por um controlador, o qual se apoia na informação transmitida pelo sistema de observação constituído por sensores de aceleração colocados na base, no 6º piso e na cobertura, e por um anemómetro responsável por registar a velocidade do vento. O posicionamento dos AMDs resultou da necessidade de se pretender controlar especialmente os modos de flexão transversal e torção do edifício. A eficácia do sistema de controlo pôde ser comprovada após a ocorrência de acções exteriores perturbadoras registadas posteriormente à instalação dos dispositivos, tendo-se atingido os níveis de eficácia previstos no respectivo dimensionamento [69].

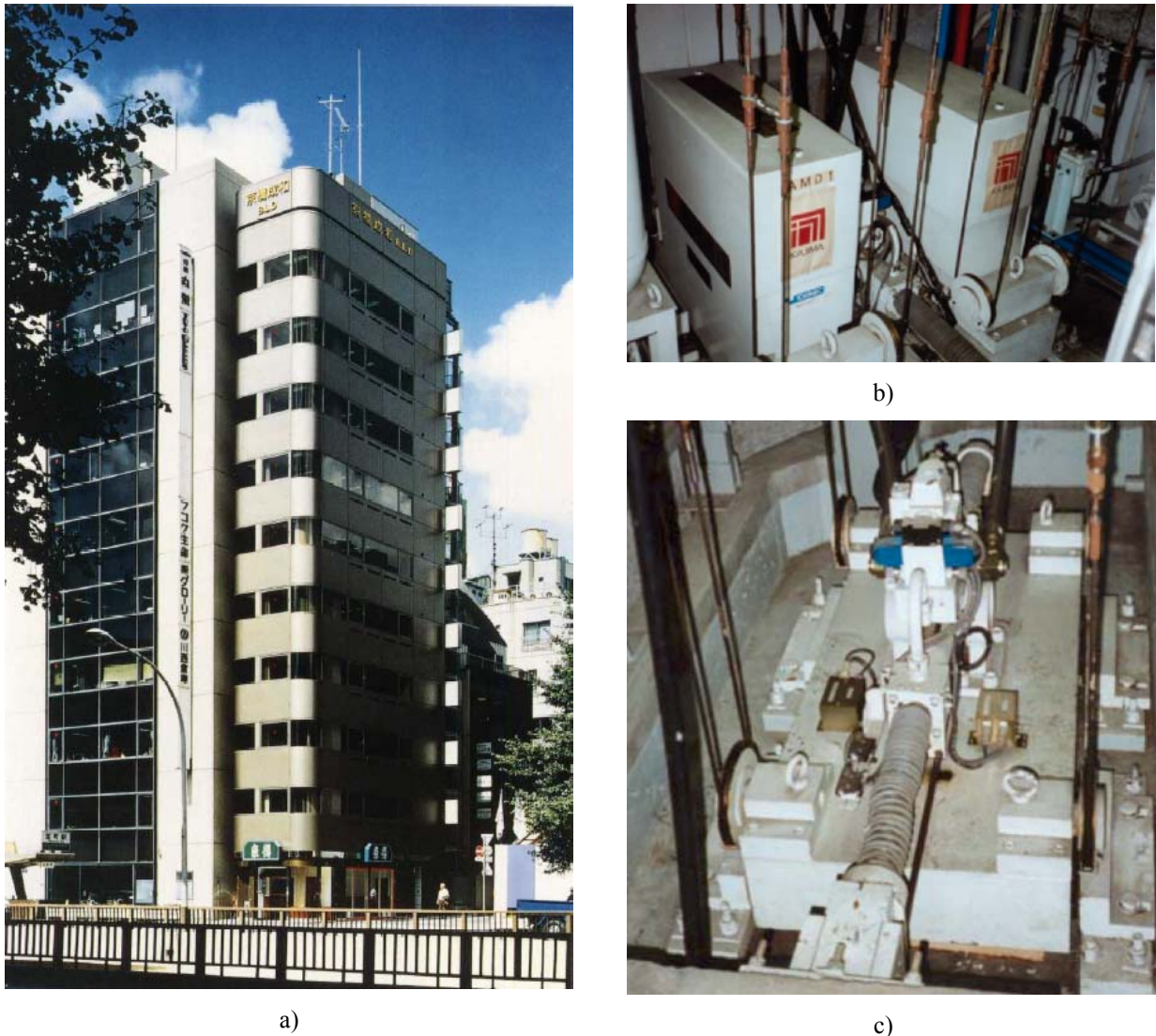


Figura 2.26 – a) Vista geral do Kyobashi Center localizado em Tóquio; b) AMD 1 de 4,2ton de massa; c) AMD 2 de 1,2ton de massa

Outro caso bem conhecido da instalação de AMDs para controlo de vibrações em edifícios altos diz respeito à “Applause Tower”, localizada em Osaka no Japão, a qual foi concluída em 1992. Neste edifício de 34 andares utilizou-se a plataforma do último piso de 480ton destinada a um heliporto como massa activa do sistema de controlo (ver Figura 2.27a). Neste caso, a plataforma é apoiada na estrutura por intermédio de apoios semelhantes àqueles que são utilizados nos sistemas de isolamento de base (ver Figura 2.27b), sendo activada nas duas direcções por intermédio de actuadores hidráulicos (ver Figura 2.27c) [122]. Com este sistema de controlo pretendeu-se atenuar a resposta dinâmica da estrutura face a ventos fortes e a sismos de intensidade pequena ou moderada, tendo-se verificado que com o sistema em funcionamento foi possível aumentar o coeficiente de amortecimento estrutural do 1º modo de vibração de 1,4% para 10,6% [64].



Figura 2.27 – a) Vista geral da “Applause Tower”; b) Aparelhos de apoio da plataforma;
c) Actuador hidráulico

Os sistemas de controlo activo envolvendo AMDs têm também sido utilizados noutro tipo de aplicações, como é o caso do controlo de vibrações em pilares de pontes durante a fase construtiva ou durante o serviço. Refere-se o exemplo da construção da ponte suspensa “Rainbow bridge” em Tóquio no ano de 1992, como sendo a primeira aplicação neste domínio na qual foram utilizados AMDs em 13 pilares da estrutura com o objectivo de amortecer as vibrações induzidas pela acção do vento [47]. A utilização de dispositivos de controlo activo nestes casos tem a vantagem de ser uma solução de controlo que se adapta às sucessivas fases construtivas, pois a estrutura vai assumindo dinâmicas diferentes à medida que cresce em altura. Além disso, devido à elevada flexibilidade dos pilares na fase em que estão em consola, o sistema apresenta diversos modos de vibração susceptíveis de serem excitados pelo vento, o que motiva a utilização de sistemas adaptativos [48].

2.3.4 SISTEMAS SEMI-ACTIVOS

Os sistemas de controlo semi-activo encontram-se actualmente em grande desenvolvimento pelo facto de constituírem uma solução intermédia entre os sistemas passivos e activos, superando algumas fragilidades dos sistemas passivos, particularmente a falta de adaptabilidade à dinâmica da estrutura, sendo ao mesmo tempo uma solução mais económica e fiável do que a generalidade dos sistemas activos. Além disso, requerem uma pequena quantidade de energia no seu funcionamento, podendo na maior parte dos casos ser alimentados com pilhas ou baterias o que os torna imunes a problemas de corte de energia eléctrica [30]. Os sistemas semi-activos podem ser encarados também como sistemas “passivos inteligentes” na medida em que baseiam a acção de controlo no efeito da dissipação de energia através de mecanismos semelhantes aos sistemas passivos, como por exemplo através de amortecedores viscosos. No entanto, têm a capacidade de se ajustarem em face da resposta efectiva da estrutura e em função da alteração das características dos próprios dissipadores, particularmente vulneráveis às variações de temperatura decorrentes da conversão da energia mecânica em energia térmica.

A implementação de sistemas semi-activos em estruturas reais teve grande impulso no início da década de 90, altura em que se instalou pela primeira vez um sistema deste género baseado na alteração activa da rigidez (“Active Variable Stiffness”, AVS) de diagonais integradas na estrutura de um edifício. Trata-se do Kajima Technical Research Institute localizado em Tóquio (ver Figura 2.28a) o qual foi dotado de dispositivos capazes de proporcionar ao edifício rigidez variável activa com o objectivo de evitar fenómenos de ressonância, potenciais causadores de danos estruturais [70]. Estes dispositivos estão instalados em diagonais do edifício de 3 pisos, sendo constituídos por cilindros hidráulicos regulados por válvulas que permitem comandar instantaneamente o bloqueio ou desbloqueio das barras, mobilizando ou desmobilizando a sua rigidez axial (ver Figura 2.28b). Este procedimento, como é próprio dos sistemas semi-activos, requer uma pequena quantidade de energia, sendo neste caso apenas necessária uma potência eléctrica de 20 Watts. Quando todas as diagonais estão desbloqueadas, o edifício apresenta uma frequência própria de 1Hz, subindo esta frequência para 2,5Hz quando todas se encontrarem bloqueadas, sendo possível estabelecer níveis intermédios de rigidez através da selecção adequada do modo de funcionamento de cada aparelho. A escolha do nível de rigidez a adoptar em cada instante é feita pelo controlador, o qual processa a informação recebida pelo sensor de aceleração posicionado na base do edifício e, através da determinação da frequência dominante do sinal colhido, selecciona qual desses níveis conduz a uma menor resposta estrutural. A eficácia deste sistema de controlo pôde ser comprovada após a ocorrência de sismos reais, tendo-se registado uma significativa redução da resposta estrutural medida relativamente à calculada sem o sistema de controlo [70]. Salienta-se também o facto de, no caso de haver corte geral de energia, o conjunto de baterias existente ter a capacidade de garantir a operacionalidade de todo o sistema de controlo por um período de pelo menos 30 minutos.



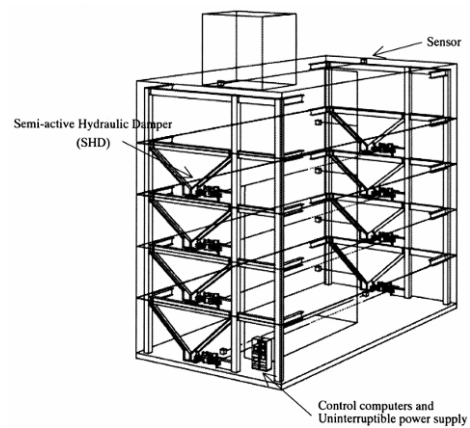
a)



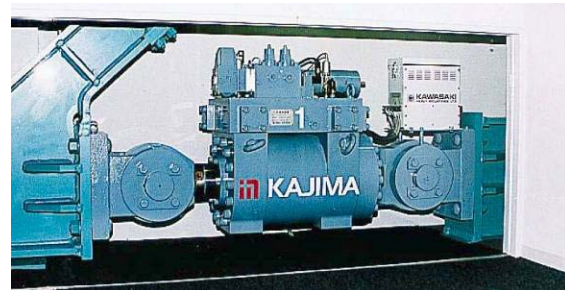
b)



c)



d)



e)

Figura 2.28 – a) Edifício do Kajima Technical Research Institute; b) Localização do amortecedor AVS; c) Edifício Kajima Shizuoka; d) Esquema do sistema de controlo; e) Amortecedor de orifício variável utilizado

Outro caso bem conhecido diz respeito à utilização, pela primeira vez, de amortecedores de orifício variável para controlo das vibrações sísmicas, neste caso referente ao edifício Kajima Shizuoka igualmente localizado em Tóquio (ver Figura 2.28c). Este edifício está dotado 8 cilindros hidráulicos integrados em diagonais dos pórticos (ver Figura 2.28d), de modo a exercerem uma acção de controlo eficaz face de sismos de elevada amplitude [75]. Os dispositivos utilizados (ver Figura 2.28e) têm uma válvula que controla o fluxo do líquido com o objectivo de maximizar os ciclos de dissipação da energia, podendo exercer uma força de amortecimento de 1000kN apenas com uma potência de 70Watts, tendo uma autonomia de pelo menos 8 minutos.

Os amortecedores de atrito variável têm também sido propostos para o controlo semi-activo de edifícios, embora só se conheçam, até à data, algumas implementações laboratoriais [116]. Neste caso, os dispositivos utilizados são constituídos por um conjunto de elementos, cujas superfícies estão comprimidas entre si através de uma força variável comandada por um controlador. A estratégia normalmente utilizada para calcular essa força é fazer com que o dispositivo permaneça constantemente na eminência de bloquear.

Ultimamente têm também sido propostos e implementados sistemas semi-activos baseados na utilização de amortecedores de viscosidade variável, com particular interesse para os amortecedores magnetoreológicos. Estes dispositivos contêm um líquido que apresenta uma viscosidade variável que pode ser continuamente modificada mediante a aplicação de um determinado campo magnético, utilizando para o efeito uma reduzida quantidade de energia. Esta solução tem como vantagens o facto de ser relativamente económica e de garantir elevada durabilidade dos aparelhos. Além dos amortecedores magnetoreológicos poderem ser utilizados nos problemas de Engenharia Sísmica, têm-se registado também diversas aplicações envolvendo problemas de vibrações de estruturas na fase de serviço.

Nas Figuras 2.29a e 2.29b mostra-se o exemplo da aplicação destes dispositivos na atenuação das vibrações em tirantes de pontes, neste caso da ponte Dongting Lake na China. A utilização de amortecedores semi-activos nestas situações tem a vantagem relativamente aos sistemas passivos de permitir o ajuste do amortecimento ideal dos dissipadores em função dos modos de vibração actuantes. Nas Figuras 2.30a a 2.30c encontra-se outro caso relativo à utilização de amortecedores magnetoreológicos integrados no funcionamento de um TMD para controlo de vibrações numa ponte pedonal em Forchheim na Alemanha. Neste caso, a função do aparelho semi-activo é melhorar o desempenho do Amortecedor de Massas Sintonizadas, particularmente no que se refere ao processo de sintonização do aparelho [109].



a)



b)

Figura 2.29 – a) Vista da ponte de Dongting Lake na China; b) Amortecedores semi-activos utilizados no controlo de vibrações nos tirantes



Figura 2.30 – a) Vista da ponte pedonal em Forchheim na Alemanha; b) Detalhe da ancoragem dos tirantes no encontro; c) Instalação de um TMD semi-activo

2.3.5 SISTEMAS HÍBRIDOS

Os sistemas híbridos são aqueles que resultam da combinação de diferentes sistemas de controlo com o objectivo de combinar os efeitos e tirar partido das vantagens associadas a cada um deles. Apesar de alguns dos exemplos já referidos anteriormente poderem eventualmente ser enquadrados como sistemas híbridos, como é o caso dos TMDs com amortecedores semi-activos acabado de referir, a designação de sistema híbrido está tradicionalmente associada à conjugação de sistemas passivos com activos. Neste grupo, os sistemas mais conhecidos são os HMDs (“Hybrid Mass Dampers”) que resultam da combinação de TMDs com sistemas activos, com inúmeras implementações em edifícios particularmente no Japão. Com este tipo de sistema híbrido, procura-se explorar o efeito passivo das forças de inércia dos TMDs e implementar um sistema activo paralelo de modo a aumentar o desempenho do aparelho, quer amplificando ainda mais o movimento da massa passiva quer aumentando a robustez do dispositivo face a problemas de sintonização. Através deste procedimento, exige-se muito menos do sistema activo do que se ele actuasse isoladamente, obtendo-se uma redução significativa do custo directo do sistema, do consumo de energia eléctrica e dos custos de manutenção.

Das inúmeras implementações práticas deste sistema refere-se, por exemplo, o caso da utilização de HMDs no controlo de vibrações do edifício Shinjuku Park Tower em Tóquio (ver Figura 2.31a), onde se utilizaram HMDs em forma de “V” desenvolvidos por Ishikawajima-Harima Heavy Industries [72] (ver Figura 2.31b). Estes dispositivos combinam um TMD passivo de comportamento pendular de massa 110ton, com um sistema activo composto por um motor eléctrico de 75kW de potência, permitindo cursos da ordem de ± 100 cm. Após a instalação de várias unidades no edifício, comprovou-se que o coeficiente de amortecimento do primeiro modo de vibração aumentou de 1,1% para 4,9%, tendo possibilitado uma redução da resposta estrutural em cerca de 50% durante o tufão que atingiu Tóquio em 1996 [72].

Outro tipo de HMD bastante divulgado na literatura diz respeito a um sistema designado de DUOX [101], o qual é composto por um TMD sobre o qual é adaptado um AMD de massa inferior, mas que força o movimento da massa passiva do aparelho. Este aparelho, que requer uma força activa de baixa intensidade, foi instalado em vários edifícios no Japão, nomeadamente no edifício Ando Nishikicho de 14 pisos e na torre Dowa Kansai Phoenix de 28 pisos.

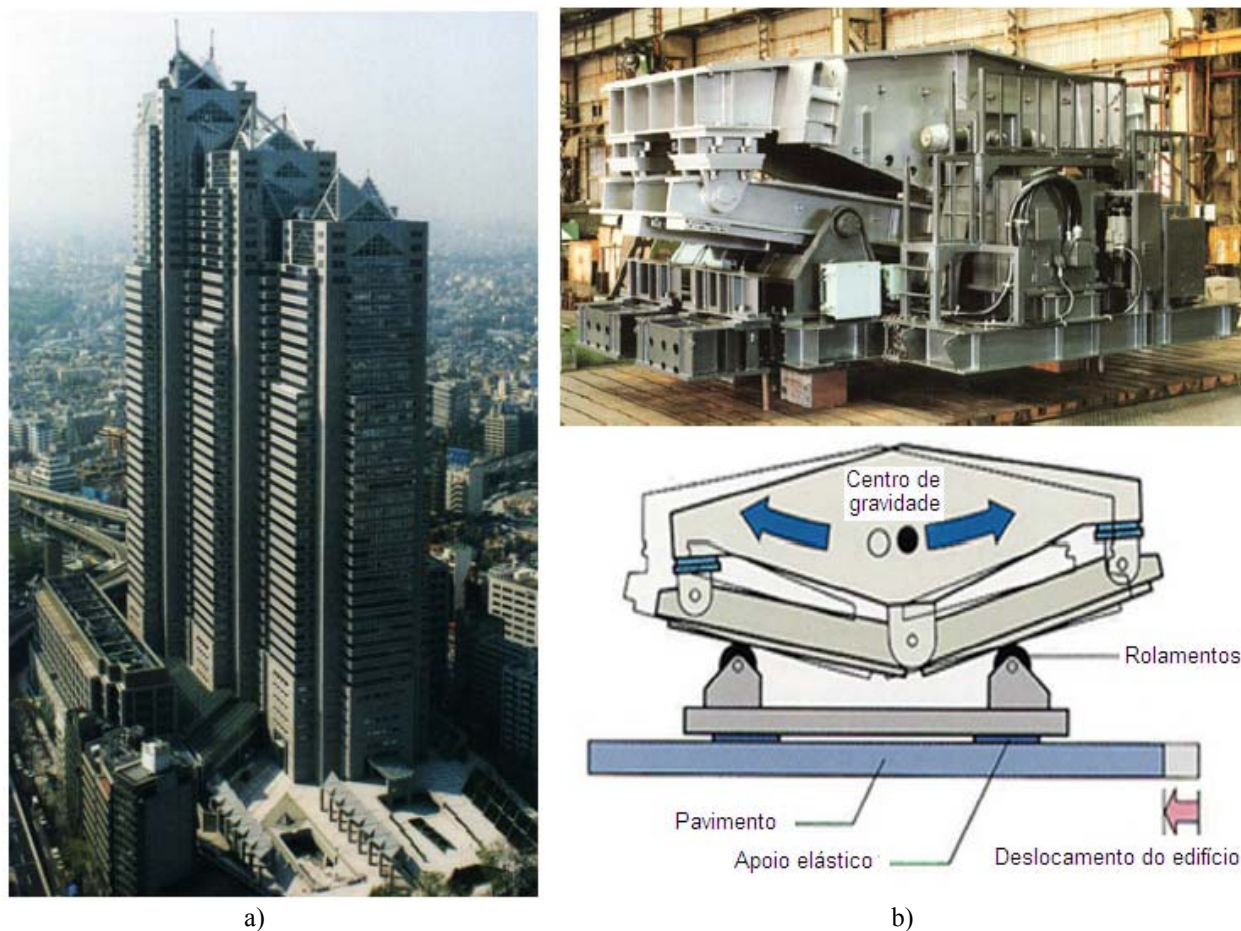


Figura 2.31 – a) Vista do edifício Shinjuku Park Tower em Tóquio; b) HMD em forma de “V” utilizado para o controlo de vibrações provocadas por ventos fortes e sismos de intensidade moderada

CAPÍTULO 3

MODELAÇÃO E ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS

3.1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de modelos numéricos que permitam simular o comportamento dinâmico de estruturas é uma ferramenta matemática essencial no contexto da análise e dimensionamento de sistemas de controlo. Por este motivo, neste capítulo é feita uma incursão nalguns métodos de representação de sistemas com interesse na área do controlo de vibrações, tendo naturalmente em conta os assuntos que são abordados neste trabalho.

Após algumas considerações iniciais sobre elementos de cálculo matricial e análise modal, é abordado o tema da utilização da Transformada de Laplace e Transformada Inversa de Laplace para a conversão de funções expressas no domínio do tempo para o domínio da variável complexa de Laplace e vice-versa. O recurso a esta transformada potencia métodos poderosos de representação de sistemas, principalmente porque operações como a derivação e integração, ou até funções sinusoidais e exponenciais no domínio do tempo, são tratadas algebricamente no domínio de Laplace. Por este assunto não ser tradicionalmente ensinado nos cursos de Engenharia Civil, neste trabalho é feita uma descrição relativamente detalhada dos aspectos considerados mais relevantes.

É feita também uma abordagem aos métodos de representação de sistemas através de equações do movimento, de equações de Entrada-Saída, através de funções de transferência e também recorrendo à formulação de estado. São apresentados os procedimentos que permitem converter modelos desenvolvidos com base numa determinada representação para outra representação diferente. Aborda-se também a representação canónica controlável e observável dos modelos de estado, bastante útil para o dimensionamento de controladores e de observadores.

Finalmente, apresentam-se alguns métodos de análise da resposta de sistemas no domínio do tempo e da frequência. Nesta secção, são também expostos alguns métodos de representação gráfica de Funções de Resposta em Frequência, designadamente a representação de Bode e de Nyquist.

3.2 ELEMENTOS DE CÁLCULO MATRICIAL E ANÁLISE MODAL

3.2.1 VALORES E VECTORES PRÓPRIOS

O problema matemático da determinação de valores e vectores próprios de uma matriz reveste-se da maior importância relativamente à resolução de diversos problemas de engenharia, como por exemplo a determinação de frequências próprias e modos de vibração de sistemas mecânicos.

Considere-se uma matriz A quadrada de ordem n , a qual pode ser considerada como um operador linear que transforma vectores de ordem n em outros vectores de ordem n . A questão que se coloca é saber se existem vectores cuja direcção permaneça invariante após a transformação linear. A direcção de um vector qualquer $x \neq 0$ e de um vector $y = Ax$, resultante da transformação de x sob a acção de A , não é normalmente a mesma, contudo, haverá certos vectores x que após a transformação linear são paralelos a y . As Figuras 3.1a e 3.1b ilustram estas duas situações possíveis.

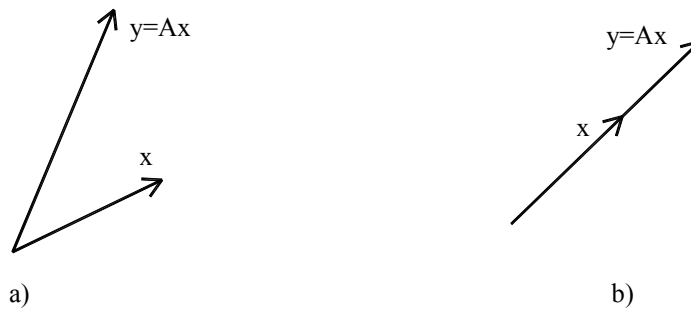


Figura 3.1 – a) A direcção de x não permanece invariante; b) A direcção de x permanece invariante

Para que as direcções de x e y permaneçam inalteradas é necessário que os dois vectores sejam paralelos, ou seja, $y = \lambda x$ para um certo λ . O problema de valores e vectores próprios consiste, então, em determinar a solução não trivial ($x \neq 0$) dos valores de λ e x , tal que

$$Ax = \lambda x \quad (3.1)$$

Os valores de λ são designados valores próprios e os correspondentes vectores x são designados vectores próprios. O sistema de equações expresso na eq.(3.1) pode ser reescrito na seguinte forma

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (3.2)$$

o qual tem uma solução não trivial, se e só se a matriz $(A - \lambda I)$ for singular, o que corresponde a dizer que

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (3.3)$$

conduzindo a uma equação conhecida como a equação característica de A .

Uma vez determinados os valores próprios, os respectivos vectores próprios podem ser encontrados resolvendo o sistema de equações (3.2) para cada valor de λ . A resolução deste sistema conduz a uma indeterminação só possível de resolver atribuindo um factor de escala ao vector próprio. No entanto, para matrizes A de dimensão elevada, o procedimento descrito torna-se bastante fastidioso, sendo mais vantajoso utilizar métodos numéricos alternativos [103].

A matriz diagonal cujos elementos são os valores próprios de uma determinada matriz designa-se por matriz espectral, representada por Ω , e a matriz cheia que contém nas suas colunas os correspondentes vectores próprios designa-se por matriz modal, representada por Φ .

3.2.2 TRANSFORMAÇÃO MATRICIAL E DIAGONALIZAÇÃO

A modelação de sistemas lineares conduz frequentemente à definição de matrizes que não possuem qualquer forma especial. Nestas situações pode ser desejável proceder-se a uma transformação matricial de tal forma que a matriz resultante seja de tratamento mais fácil, havendo particular interesse na obtenção de matrizes diagonais ou matrizes com outras formas especiais, conforme se verá na secção 3.4.4. Para tal, convém definir que duas matrizes quadradas de ordem n , A e B , são matrizes similares se existir uma matriz não singular da mesma ordem, S , de tal forma que $B = S^{-1}AS$, ou inversamente, $A = S^{-1}BS$. Uma das propriedades mais interessantes das matrizes similares é que, independentemente da matriz S escolhida, os respectivos valores próprios são iguais. Isto significa que qualquer valor próprio de A é também valor próprio de B , e vice-versa. Para demonstrar este facto, considere-se por exemplo que λ é valor próprio de B . Se tal suceder, pode afirmar-se que, de acordo com a eq.(3.3),

$$|B - \lambda I| = 0$$

Dado que $B = S^{-1}AS$ e que $S^{-1}S = I$, fica

$$|S^{-1}AS - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |S^{-1}(A - \lambda I)S| = 0$$

Atendendo às propriedades de produtos de determinantes, obtém-se

$$|S^{-1}| |A - \lambda I| |S| = 0 \Rightarrow |A - \lambda I| = 0$$

o que significa que λ obedece igualmente à condição de valor próprio de A , sendo simultaneamente valor próprio de A e de B .

A transformação matricial referida assume primordial importância quando a matriz de transformação é a matriz modal de uma dada matriz que se pretende transformar, ou seja, quando $S = \Phi$. Neste caso particular, verifica-se que

$$\Phi^{-1}A\Phi = \Omega \quad (3.4)$$

em que Φ é a matriz modal de A , sendo Ω a correspondente matriz espectral. Desta transformação ressalta o facto de se ter transformado uma matriz não diagonal numa matriz similar diagonal. Este processo designa-se normalmente de diagonalização da matrix A .

3.2.3 FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS

Como já referido, uma das situações conducentes à necessidade de resolução de um problema de valores e vectores próprios diz respeito à determinação de frequências naturais e correspondentes modos de vibração de sistemas mecânicos. Neste caso, procura-se conhecer em que circunstâncias estes sistemas descrevem um movimento harmónico quando submetidos a uma vibração livre. Numa primeira abordagem interessa considerar sistemas não amortecidos, cuja resposta livre é governada pela equação

$$M_s \ddot{y}_s(t) + K_s y_s(t) = 0 \quad (3.5)$$

onde M_s é matriz de massa e K_s a matriz de rigidez do sistema, descritas detalhadamente na secção 3.4.1.2, e $\ddot{y}_s(t)$ e $y_s(t)$ representam os vectores aceleração e deslocamento, respectivamente, associados aos diversos graus de liberdade. A resposta do sistema, em cada instante, admite-se poder ser expressa na forma

$$y_s(t) = \phi \text{sen } \omega t \quad (3.6)$$

onde ϕ é um vector que representa a forma do modo de vibração do sistema, supostamente invariável no tempo, e ω a frequência natural de vibração. Derivando esta equação duas vezes em ordem ao tempo, obtém-se

$$\ddot{y}_s(t) = -\phi \omega^2 \text{sen } \omega t \quad (3.7)$$

Substituindo a eq.(3.6) e (3.7) na eq.(3.5), resulta

$$(K_s - \omega^2 M_s) \phi = 0 \quad (3.8)$$

correspondente a um problema de valores e vectores próprios tal como definido na eq.(3.2), bastando para isso multiplicar cada termo da equação por M_s^{-1} , admitindo que existe inversa de M_s . Neste caso, ω^2 está relacionado com os valores próprios e ϕ com os vectores próprios do sistema, podendo ser determinados de acordo a metodologia indicada na secção anterior. Os resultados obtidos podem ser condensados em matrizes quadradas de ordem N , sendo N o número de graus de liberdade do sistema o qual está em correspondência com o número de frequências naturais e modos de vibração. As frequências naturais podem ser agrupadas na seguinte matriz espectral

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

e os modos de vibração podem ser agrupados numa matriz designada matriz modal, contendo em cada coluna as componentes de um modo de vibração específico

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.2.4 CONDIÇÕES DE ORTOGONALIDADE

Os modos de vibração de um sistema têm determinadas propriedades especiais que podem ser bastante úteis na modelação e análise de sistemas. É o caso das condições de ortogonalidade dos modos de vibração, as quais podem ser demonstradas utilizando o teorema de Betti, segundo o qual, o trabalho virtual realizado por um conjunto de forças aplicadas a um sistema sobre os deslocamentos provocados por um outro conjunto de forças, é igual ao trabalho virtual desse outro conjunto de forças sobre os deslocamentos provocados pelo primeiro conjunto de forças.

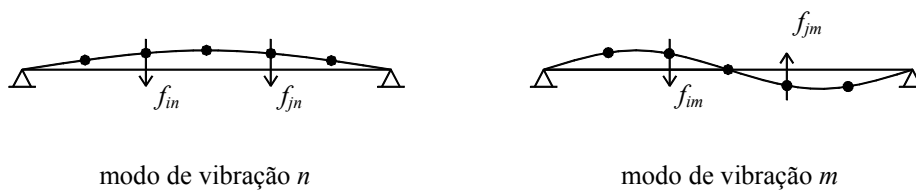


Figura 3.2 – Representação das forças de inércia associadas à vibração de dois modos distintos

Considere-se dois modos de vibração distintos de um sistema, n e m , representados na Figura 3.2, que, por simplicidade, é composto por uma viga que suporta um conjunto de massas concentradas. As forças de inércia associadas à vibração do modo n , valem

$$f_n = \omega_n^2 M_s \phi_n$$

e as forças de inércia associadas à vibração do modo m , valem

$$f_m = \omega_m^2 M_s \phi_m$$

Aplicando o teorema de Betti, fica

$$\begin{aligned} f_n^T \phi_m &= f_m^T \phi_n \\ (\omega_n^2 M_s \phi_n)^T \phi_m &= (\omega_m^2 M_s \phi_m)^T \phi_n \end{aligned}$$

Atendendo às regras de cálculo matricial, resulta

$$\omega_n^2 \phi_n^T M_s \phi_m = \omega_m^2 \phi_m^T M_s \phi_n$$

Sabendo que os produtos indicados na expressão anterior conduzem a escalares, logo, passíveis de serem transpostos arbitrariamente, conclui-se que

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \phi_n^T M_s \phi_m = 0$$

Esta igualdade é naturalmente válida quando $\omega_n \neq \omega_m$ e prova a condição de ortogonalidade dos modos de vibração relativamente à matriz de massa, ou seja

$$\phi_n^T M_s \phi_m = 0 \quad \text{se} \quad n \neq m \quad (3.11)$$

A mesma conclusão pode ser obtida se se admitir a actuação isolada das forças de rigidez, as quais, por considerações de equilíbrio dinâmico, são iguais às forças de inércia, ou seja

$$f_n = \omega_n^2 M_s \phi_n = K_s \phi_n \quad \text{e} \quad f_m = \omega_m^2 M_s \phi_m = K_s \phi_m$$

A aplicação do teorema de Betti resulta na condição de ortogonalidade dos modos de vibração relativamente à matriz de rigidez, segundo a qual

$$\phi_n^T K_s \phi_m = 0 \quad \text{se} \quad n \neq m \quad (3.12)$$

3.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.3.1 INTRODUÇÃO

A solução da equação diferencial que rege o comportamento de sistemas lineares invariáveis no tempo pode, em determinados casos, ser difícil ou laboriosa recorrendo a alguns dos métodos clássicos utilizados na resolução de equações diferenciais ordinárias. Nestas situações, a Transformada de Laplace pode permitir resolver estas equações por um processo alternativo mais rápido.

A principal virtude da Transformada de Laplace é que possibilita transformar funções comuns, tais como funções sinusoidais e exponenciais, em funções algébricas de uma variável complexa, bem como transformar operações como a integração e derivação em operações algébricas em função dessa variável complexa. Assim, uma equação diferencial linear pode ser convertida numa equação algébrica em função de uma variável complexa e, posteriormente, ser resolvida em ordem essa variável. A vantagem deste método é que, paralelamente à simplicidade de resolução de uma equação algébrica, é possível expressar a solução em termos da variável dependente da equação diferencial inicial, através da operação inversa da Transformada de Laplace. Este procedimento está esquematizado na Figura 3.3.

A Transformada de Laplace assume também particular interesse na modelação e análise de sistemas, na medida em que permite a construção de funções de transferência as quais relacionam no domínio de Laplace a relação determinística entre acção e a resposta. Além disso, possibilita a construção de diagramas de blocos bastante úteis para o estudo de sistemas de controlo realimentados. A utilização da Transformada de Laplace tem também a vantagem de potenciar métodos gráficos de análise e dimensionamento de sistemas de controlo, os quais podem ser utilizados para avaliar qualitativamente o desempenho do sistema, sem a necessidade de primeiramente resolver a equação diferencial que o descreve.

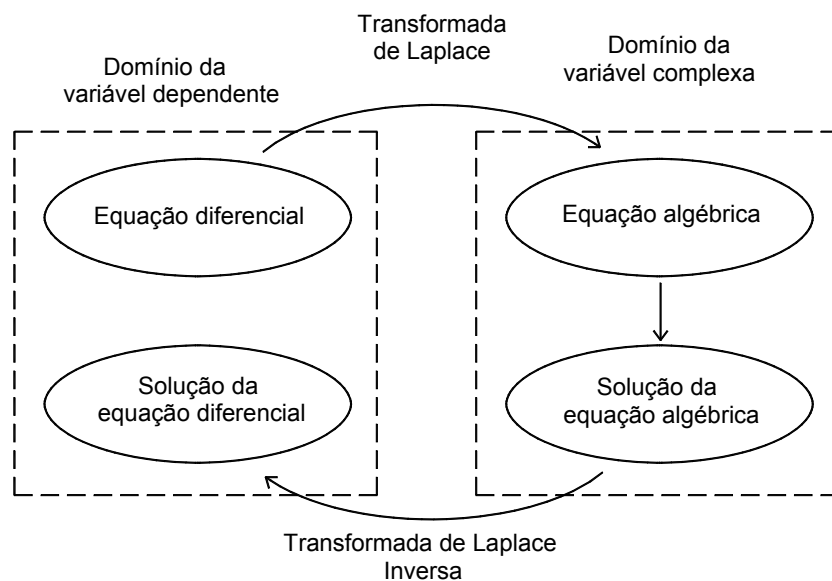


Figura 3.3 – Operações que envolvem o método da Transformada de Laplace

3.3.2 DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A Transformada de Laplace é definida na expressão seguinte, na qual s é a variável complexa designada variável de Laplace, L é o operador da Transformada de Laplace e $F(s)$ é a Transformada de Laplace da função $f(t)$ definida tal que $f(t)=0$ para $t<0$.

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.13)$$

Para que esta transformada exista, o integral da equação 3.13, designado de integral de Laplace, tem de ser convergente. Para isso, é necessário que a função $f(t)$ seja contínua em qualquer intervalo de tempo finito definido em $t \in [0, \infty]$, e que seja limitada por uma função do tipo exponencial [125], ou seja

$$|f(t)| \leq Me^{at}$$

em que a e M são constantes reais convenientemente definidas considerando $t \in [0, \infty]$. Nos casos em que a Transformada de Laplace é diferente dependendo se se considera o limite inferior imediatamente antes ou depois da origem dos eixos, como sucede quando a função $f(t)$ tem uma função impulso aplicada em $t=0$ (definida na secção seguinte), então o limite inferior do integral de Laplace tem de ser claramente especificado se é tomado como $t=0^-$ ou $t=0^+$. Se se considerar o limite inferior $t=0^-$, então deve utilizar-se para a Transformada de Laplace a notação $L^- \{f(t)\}$ ou, no caso contrário, a notação $L^+ \{f(t)\}$.

3.3.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE DE ALGUMAS FUNÇÕES SIMPLES

Seguidamente determina-se a Transformada de Laplace de algumas funções simples frequentemente usadas na área da engenharia do controlo de sistemas.

a) Função degrau

A função degrau está representada na Figura 3.4, sendo nula para $t<0$ e apresentando amplitude constante de valor A para $t>0$.

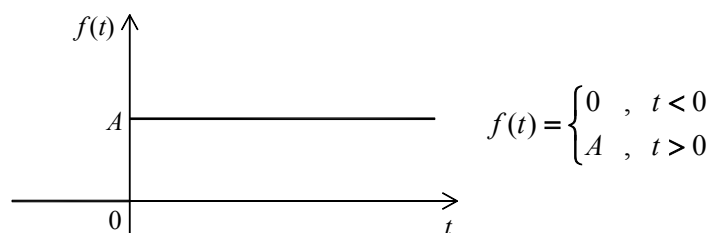


Figura 3.4 – Representação gráfica da função degrau

A Transformada de Laplace da função degrau é determinada utilizando a definição expressa na equação 3.13, resultando

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \left(-\frac{Ae^{-st}}{s}\right)_0^{\infty} = \frac{A}{s} \quad (3.14)$$

Muitas vezes a função degrau é referida como função degrau unitário, significando que a constante A é unitária.

b) *Função rampa*

A função rampa, representada na Figura 3.5, é nula para $t < 0$ e varia linearmente com amplitude de valor At para $t \geq 0$.

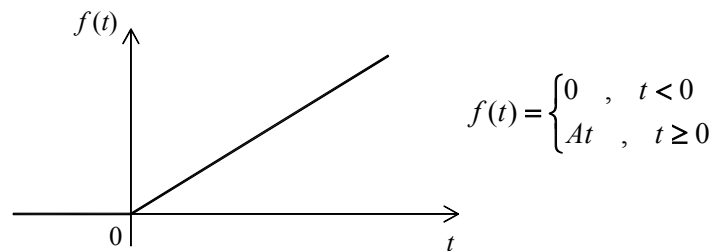


Figura 3.5 – Representação gráfica da função rampa

A Transformada de Laplace desta função vale

$$F(s) = \int_0^{\infty} At e^{-st} dt = \left\{ At \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) \right\}_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(\frac{Ae^{-st}}{-s} \right) dt = \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2} \quad (3.15)$$

Assim como sucede com a função anterior, a função rampa é muitas vezes referida como função rampa unitária, o que acontece quando a constante A é unitária.

c) *Função impulso rectangular*

A função impulso rectangular, representada na Figura 3.6, é semelhante à função degrau aplicada num intervalo de tempo finito que varia entre $t = 0$ e $t = t_1$ com amplitude A/t_1 .

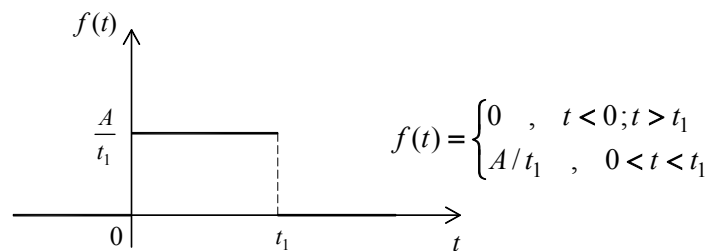


Figura 3.6 – Representação gráfica da função impulso rectangular

Aplicando a Transformada de Laplace a esta função obtém-se

$$F(s) = \int_0^{t_1} \frac{A}{t_1} e^{-st} dt = \frac{A}{t_1} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right)_{t=0}^{t_1} = \frac{A}{st_1} (1 - e^{-st_1}) \quad (3.16)$$

Esta função também é designada de função impulso rectangular unitário quando a constante A vale 1.

d) Função impulso

A função impulso é um caso limite da função impulso rectangular na qual o instante t_1 tende para 0 (ver Figura 3.7). A interpretação física desta função pode ser comparada, por exemplo, à aplicação de uma acção num sistema durante um período de tempo muito curto mas com uma amplitude muito elevada. De facto, mantendo-se a área da função igual a A , quando o tempo de aplicação da entrada no sistema tende para 0 a amplitude da função tende para o infinito. Obviamente que um impulso de amplitude infinita e duração nula constitui uma abstracção matemática impossível de ocorrer em sistemas físicos, mas que, em determinados casos, nos quais o impulso seja de grande amplitude e de duração muito pequena quando comparado com as restantes variáveis envolvidas no sistema, a acção aplicada se pode aproximar à função impulso descrita. Nestes casos, a energia é transferida ao sistema num tempo infinitesimal, sendo o aspecto mais importante a área do impulso e não propriamente a sua forma exacta.

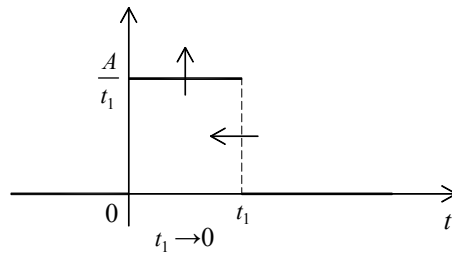


Figura 3.7 – Obtenção da função impulso a partir da função impulso rectangular

Esta função é também conhecida como função Delta Dirac, que, no caso da área da função ser unitária, se designa de função impulso unitário ou função Delta Dirac unitário. A Transformada de Laplace respectiva pode ser calculada a partir da expressão 3.16 referente à função impulso rectangular fazendo as convenientes adaptações:

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \left\{ \frac{A}{st_1} (1 - e^{-st_1}) \right\} = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \left(A \frac{se^{-st_1}}{s} \right) = A \quad (3.17)$$

A função impulso é geralmente expressa na forma $A\delta(t)$ onde A representa a sua área, ou então na forma $\delta(t-t_1)$ indicando a aplicação de um impulso unitário no instante $t=t_1$. A utilização desta função é particularmente atractiva devido às seguintes propriedades matemáticas:

$$\delta(t-t_1) = 0 ; t \neq t_1 \quad \delta(t-t_1) = \infty ; t = t_1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-t_1)d\tau = f(t_1)$$

e) Função seno e função co-seno

A função seno é definida da seguinte maneira:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ A \sin(\omega t) & , t \geq 0 \end{cases}$$

Sabendo que $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$, a respectiva Transformada de Laplace vale

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{A}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})e^{-st} dt = \frac{A}{2i} \left\{ \int_0^{\infty} e^{t(-s+i\omega)} dt - \int_0^{\infty} e^{t(-s-i\omega)} dt \right\} = \frac{A}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3.18)$$

Por sua vez, a função co-seno é definida da seguinte maneira:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ A \cos(\omega t) & , t \geq 0 \end{cases}$$

De forma análoga, sabendo que $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ a respectiva Transformada de Laplace vale

$$F(s) = \int_0^{\infty} A \cos(\omega t) e^{-st} dt = \frac{As}{s^2 + \omega^2} \quad (3.19)$$

f) Função exponencial

A função exponencial está representada na Figura 3.8, sendo nula para $t < 0$ e amplitude $Ae^{-\alpha t}$ para $t > 0$.

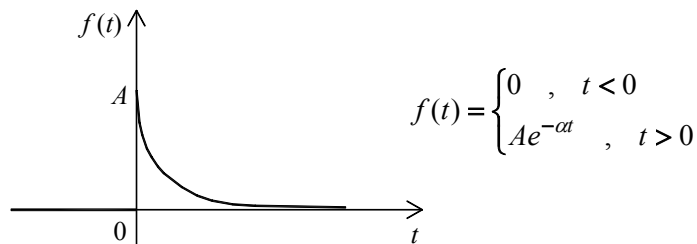


Figura 3.8 – Representação gráfica da função exponencial

Aplicando a Transformada de Laplace a esta função resulta

$$F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{A}{(s+\alpha)} \left[e^{-(s+\alpha)t} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{A}{s+\alpha} \quad (3.20)$$

3.3.4 TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

A Transformada de Laplace de uma função pode ser obtida aplicando a sua definição tal como até aqui. No entanto, este procedimento pode ser facilitado através da utilização de tabelas, tal como a Tabela 3.1, as quais possibilitam a determinação directa da Transformada de Laplace de algumas funções correntes. Além disso, estas tabelas possibilitam a obtenção da Transformada Inversa de Laplace na medida em que, identificada uma função no domínio da variável complexa a sua imagem no domínio da variável dependente fica igualmente determinada. Daí que, efectivamente, estas tabelas estabelecem pares de Transformadas de Laplace.

3.3.5 PROPRIEDADES E TEOREMAS DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

3.3.5.1 LINEARIDADE DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Dadas as funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ cujas Transformadas de Laplace existam, sendo representadas por $F_1(s)$ e $F_2(s)$ respectivamente, e dadas as constantes escalares A e B , então

$$L\{Af_1(t) + Bf_2(t)\} = AL\{f_1(t)\} + BL\{f_2(t)\} = AF_1(s) + BF_2(s)$$

3.3.5.2 TEOREMAS DA TRANSLAÇÃO NO EIXO s E NO EIXO t

Admitindo a existência da Transformada de Laplace da função $f(t)$, representada por $F(s)$, e sendo α uma constante positiva, então

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(s + \alpha)$$

Isto significa que a função $f(t)$ quando multiplicada por $e^{-\alpha t}$ sofre uma translação α no plano complexo. De forma semelhante, admitindo que a Transformada Inversa de Laplace da Função $F(s)$ existe, sendo representada pela função $f(t)$, a multiplicação da função complexa por $e^{-\alpha s}$ conduz à seguinte relação

$$L\{f(t - \alpha)\} = e^{-\alpha s} F(s)$$

que corresponde a introduzir uma translação $-\alpha$ na variável tempo. Este teorema é particularmente interessante no estudo de sistemas com atraso na resposta.

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso unitário $\delta(t)$	1
2	Degrau unitário $1(t)$	$1/s$
3	Rampa unitária t	$1/s^2$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ($n=1,2,3,\dots$)	$1/s^n$
5	t^n ($n=1,2,3,\dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ ($n=1,2,3,\dots$)	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at}$ ($n=1,2,3,\dots$)	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\text{senh } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\text{cosh } \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$

Tabela 3.1 – Pares de Transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \text{cos } \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen } \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t \quad (0 < \xi < 1)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}; (0 < \xi < 1, 0 < \phi < \frac{\pi}{2})$	$\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$ $(0 < \xi < 1, 0 < \phi < \frac{\pi}{2})$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \text{cos } \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
27	$\text{sen } \omega t - \omega t \text{cos } \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \text{sen } \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \text{cos } \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\text{cos } \omega_1 t - \text{cos } \omega_2 t) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega} (\text{sen } \omega t + \omega t \text{cos } \omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

Tabela 3.1 – Pares de Transformadas de Laplace (continuação)

3.3.5.3 TEOREMA DO INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

Considere-se o seguinte integral conhecido matematicamente como o integral de convolução

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \quad (3.21)$$

o qual é normalmente escrito como

$$f_1(t) * f_2(t)$$

onde “*” representa a operação de convolução de duas funções. Facilmente se pode constatar, através de uma mudança de variável no integral, que existe simetria nesta operação, ou seja

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

Se existir a Transformada de Laplace para cada uma das funções isoladamente, então a Transformada de Laplace do integral de convolução pode ser obtida através de

$$L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = F_1(s)F_2(s) \quad (3.22)$$

onde

$$F_1(s) = L\{f_1(t)\} \text{ e } F_2(s) = L\{f_2(t)\}$$

Esta igualdade assume primordial importância nas situações em que se pretende calcular a Transformada Inversa de Laplace de uma função complexa composta pelo produto de duas funções distintas, cujas imagens no domínio do tempo são conhecidas. Este princípio está na base do método do integral de convolução para a determinação da Transformada Inversa de Laplace, exposto na secção 3.3.6.3.

3.3.5.4 TEOREMAS DA DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

Como se referiu anteriormente, o facto da Transformada de Laplace permitir transformar operações como a derivação e a integração em operações algébricas, potencia o desenvolvimento de métodos simples de resolução de equações diferenciais e integrais, as quais, em muitas situações, são de difícil solução utilizando técnicas tradicionais. Esta característica da Transformada de Laplace constitui a sua principal virtude.

Começando pela operação de derivação, considere-se o integral de Laplace dado pela equação 3.13. Integrando-o por partes obtém-se

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \left[f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} L \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\}$$

ou seja

$$L \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} = sF(s) - f(0) \quad (3.23)$$

Nesta equação $f(0)$ representa o valor inicial de $f(t)$ calculado em $t=0$. Este procedimento pode ser igualmente aplicado ao cálculo da Transformada de Laplace da segunda derivada de uma função, obtendo-se

$$L \left\{ \frac{d^2}{dt^2} f(t) \right\} = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (3.24)$$

Generalizando esta dedução para a derivada de ordem n de $f(t)$, resulta

$$L \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (3.25)$$

onde $f(0), \dot{f}(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ representam os valores iniciais de $f(t), df(t)/dt, \dots, d^{(n-1)}f(t)/dt^{(n-1)}$ calculados em $t=0$. Se estes valores iniciais forem nulos, então a Transformada de Laplace da derivada de ordem n de $f(t)$ é dada simplesmente por $s^n F(s)$. Em alguns exemplos futuros admitir-se-á, sem perda de generalidade, que o sistema se encontra inicialmente em repouso, correspondendo valores iniciais nulos, tornando-se fácil a obtenção da Transformada de Laplace de uma derivada de qualquer ordem.

Para obter a Transformada de Laplace de integrais, aplique-se a sua definição ao integral da função $f(t)$ expandido de acordo com a fórmula de integração por partes. Neste caso obtém-se

$$L \left\{ \int f(t) dt \right\} = \int_0^{\infty} \left[\int f(t) dt \right] e^{-st} dt = \left[\int f(t) dt \right] \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

resultando em

$$L \left\{ \int f(t) dt \right\} = \frac{f^{-1}(0)}{s} + \frac{F(s)}{s} \quad (3.26)$$

Nesta igualdade $f^{-1}(0)$ representa o integral da função $f(t)$ calculado em $t=0$.

No caso de integrais definidos, a Transformada de Laplace pode ser obtida começando-se por constatar que

$$\int_0^t f(t)dt = \int f(t)dt - f^{-1}(0)$$

Aplicando a Transformada de Laplace a cada um dos termos, tendo em consideração que

$$L\{f^{-1}(0)\} = \frac{f^{-1}(0)}{s}, \text{ facilmente se pode concluir que}$$

$$L\left\{\left[\int_0^t f(t)dt\right]\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (3.27)$$

3.3.5.5 TEOREMAS DO VALOR FINAL E VALOR INICIAL

Estes teoremas têm primordial importância particularmente no caso de funções representadas pela sua Transformada de Laplace e sobre as quais se pretenda conhecer o seu valor inicial e final, ou seja, o seu valor nos instantes $t=0^+$ e $t=\infty$ respectivamente. Caso a função represente a resposta de um sistema, estes teoremas permitem conhecer as condições iniciais a que ficou sujeito e a sua resposta estacionária. Estes teoremas são aplicáveis se o limite de $f(t)$ existir quando t tender para o infinito, o que significa que a resposta tende para um valor constante quanto $t \rightarrow \infty$. Para demonstrar o Teorema do Valor Final, calcule-se o limite quando s tende para zero da Transformada de Laplace da derivada de $f(t)$, tendo por base a eq.(3.23)

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)]$$

Por outro lado, como $\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} = 1$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] dt = f(\infty) - f(0)$$

Conjugando as duas expressões anteriores, resulta

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0) = f(\infty) - f(0)$$

que traduz o Teorema do Valor Final, segundo o qual

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (3.28)$$

O Teorema do Valor Inicial pode ser deduzido calculando o limite, quando s tende para infinito, da Transformada de Laplace L^+ da derivada de $f(t)$, ou seja

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)]$$

Como $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$, conclui-se que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)] = 0$$

ou seja

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (3.29)$$

que traduz o Teorema do Valor Inicial.

3.3.6 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

3.3.6.1 DEFINIÇÃO

A Transformada Inversa de Laplace, permite obter, no domínio da variável dependente (normalmente o tempo), a solução de uma equação diferencial linear. Esta operação, indicada por L^{-1} , é definida por

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (3.30)$$

Esta equação é válida para $t > 0$, sendo c uma constante real escolhida de tal forma que o caminho de integração seja paralelo ao eixo imaginário permanecendo deste a uma distância c , devendo c ser superior à parte real de todos os valores singulares de $F(s)$.

Embora a Transformada Inversa de Laplace possa ser calculada pela equação anterior, esta via não é normalmente utilizada por em geral conduzir à necessidade de cálculo de um integral complicado, perdendo-se, em parte, o mérito deste método. Por este motivo, o cálculo da Transformada Inversa de Laplace é feito regularmente recorrendo a tabelas, tal como a Tabela 3.1, nas quais se apresentam as soluções relativas às funções mais comuns. Se tal não for possível, pode recorrer-se ao método da expansão em fracções parciais, o qual tira partido da propriedade da linearidade da Transformada Inversa de Laplace para determinar isoladamente a transformada inversa de funções mais simples, ou ao método do integral de convolução já referido anteriormente. Estes dois métodos encontram-se descritos nas secções seguintes.

3.3.6.2 MÉTODO DA EXPANSÃO EM FRACÇÕES PARCIAIS

Suponha-se que a função Transformada de Laplace $F(s)$ é descrita na forma $F(s)=F_1(s)+ F_2(s)+\dots+F_k(s)$, onde cada parcela $F_i(s)$ representa a Transformada de Laplace de cada função $f_i(t)$, sendo $1 \leq i \leq k$. À semelhança do que sucede com a Transformada de Laplace, a Transformada Inversa de Laplace também goza da propriedade da linearidade, resultando

$$f(t) = L^{-1}\{F_1(s)\} + L^{-1}\{F_2(s)\} + \dots + L^{-1}\{F_k(s)\} = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_k(t)$$

Por outro lado, a Transformada de Laplace é frequentemente expressa na forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{a=1}^m (s - z_a)}{\prod_{b=1}^n (s - p_b)}$$

onde z_a e p_b são os zeros e pólos da função $F(s)$, respectivamente. Na expansão de $F(s)$ em fracções parciais é importante que o grau do polinómio do denominador seja superior ao do numerador [100], ou seja, $n > m$. Caso contrário, é conveniente dividir o polinómio do numerador pelo do denominador, resultando uma função em s cujo grau do denominador é superior ao do numerador, acrescida de um resto também função de s . Além disso, a expansão em fracções parciais exige que previamente se conheçam os pólos de $F(s)$ o que significa que, dependendo se esses pólos são distintos ou repetidos, reais ou complexos, o procedimento para a obtenção da expansão varia ligeiramente. Seguidamente, descreve-se a metodologia a adoptar em cada caso em concreto.

a) Caso de pólos distintos

No caso dos pólos serem distintos entre si, a função $F(s)$ pode ser expressa na seguinte forma

$$F(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n} \quad (3.31)$$

Cada constante A_i ($1 \leq i \leq n$) é designada de resíduo de $F(s)$ em correspondência com o pólo p_i , podendo ser obtida se se multiplicar ambos os membros da equação anterior por $(s - p_i)$ e posteriormente se se substituir $s = p_i$, resultando [100]

$$A_i = [(s - p_i)F(s)]_{s=p_i} \quad (3.32)$$

EXEMPLO 3.1

Pretende-se determinar a Transformada Inversa de Laplace da função $F(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+4)}$

O grau do polinómio do denominador é superior ao do numerador e os pólos são reais e distintos entre si, $p_1=-3$ e $p_2=-4$, pelo que se pode proceder do seguinte modo:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s+4)} = \frac{A_1}{(s+3)} + \frac{A_2}{(s+4)}$$

Aplicando a eq.(3.32) para a determinação dos resíduos, obtém-se

$$A_1 = [(s+3)F(s)]_{s=-3} = \left[\frac{s+1}{s+4} \right]_{s=-3} = -2$$

$$A_2 = [(s+4)F(s)]_{s=-4} = \left[\frac{s+1}{s+3} \right]_{s=-4} = 3$$

Substituindo os resíduos em $F(s)$, resulta

$$F(s) = \frac{-2}{(s+3)} + \frac{3}{(s+4)}$$

Calculando a Transformada Inversa de Laplace de cada um dos termos recorrendo à propriedade da linearidade da Transformada Inversa de Laplace, e utilizando a eq.(3.20), fica

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{-2}{s+3} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{3}{s+4} \right\} = -2e^{-3t} + 3e^{-4t}, \quad t \geq 0$$

Se a função Transformada de Laplace possuir pólos complexos distintos, a eq.(3.32) continua a poder ser utilizada, tendo em conta porém que, nos casos em que os pólos são complexos conjugados, os resíduos devem ser isolados em fracções separadas do tipo

$$F(s) = \frac{A_1}{s-\alpha-j\beta} + \frac{A_2}{s-\alpha+j\beta}$$

onde A_1 e A_2 são constantes complexas conjugadas. Contudo, como $A_2 = \overline{A_1}$, na prática só uma das constantes precisa de ser calculada.

EXEMPLO 3.2

Pretende-se determinar a Transformada Inversa de Laplace da função $F(s) = \frac{s-1}{(s+1+j)(s+1-j)}$

Neste caso, $F(s)$ possui um par de pólos complexos conjugados $p_{1,2} = -1 \pm j$, conduzindo à seguinte expansão em fracções parciais

$$F(s) = \frac{s-1}{(s+1+j)(s+1-j)} = \frac{A_1}{s+1+j} + \frac{A_2}{s+1-j}$$

As constantes $A_2 = \bar{A}_1$ podem ser calculadas recorrendo à eq.(3.32), resultando

$$A_1 = [(s+1+j)F(s)]_{s=-1-j} = \left[\frac{s-1}{s+1-j} \right]_{s=-1-j} = \frac{2+j}{2j} = \frac{1}{2} - j$$

$$A_2 = \bar{A}_1 = \frac{1}{2} + j$$

Substituindo as constantes na expansão de $F(s)$, fica

$$F(s) = \left(\frac{1}{2} - j \right) \frac{1}{s+1+j} + \left(\frac{1}{2} + j \right) \frac{1}{s+1-j}$$

Calculando a Transformada Inversa de Laplace termo a termo recorrendo à eq.(3.20), resulta

$$f(t) = \left(\frac{1}{2} - j \right) e^{-(1+j)t} + \left(\frac{1}{2} + j \right) e^{-(1-j)t} = \left(\frac{1}{2} - j \right) e^{-t} e^{-jt} + \left(\frac{1}{2} + j \right) e^{-t} e^{jt}$$

Colocando e^{-t} em evidência e recorrendo à conhecida relação de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$$

obtém-se finalmente

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-t} \left\{ \left(\frac{1}{2} - j \right) (\cos t - j \operatorname{sen} t) + \left(\frac{1}{2} + j \right) (\cos t + j \operatorname{sen} t) \right\} \\ &= e^{-t} (\cos t - 2 \operatorname{sen} t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

b) *Caso de pólos repetidos*

Se a função Transformada de Laplace apresentar pólos repetidos com multiplicidade $q > 1$, então a expansão em fracções parciais de $F(s)$ terá a forma

$$F(s) = \frac{A_q}{(s - p_i)^q} + \frac{A_{q-1}}{(s - p_i)^{q-1}} + \dots + \frac{A_1}{(s - p_i)} \quad (3.33)$$

sendo as constantes $A_1 \dots A_q$ calculadas pela seguinte equação [100]

$$A_l = \frac{1}{(q-l)!} \left\{ \frac{d^{q-l}}{ds^{q-l}} [(s - p_i)^q F(s)] \right\}_{s=p_i} \quad (3.34)$$

Se por outro lado a função $F(s)$ apresentar pólos repetidos conjuntamente com pólos distintos, então a expansão em fracções parciais respectiva será uma combinação das equações (3.31) e (3.33), sendo as constantes A_i e A_l calculadas separadamente de acordo com as equações (3.32) e (3.34), respectivamente.

EXEMPLO 3.3

Pretende-se determinar a Transformada Inversa de Laplace da função $F(s) = \frac{2s + 3}{(s + 4)(s + 1)^2}$

Neste caso, a função $F(s)$ apresenta um pólo distinto, $p_1 = -4$, e dois pólos repetidos com multiplicidade 2, $p_2 = p_3 = -1$. A correspondente expansão em fracções parciais tem a forma

$$F(s) = \frac{2s + 3}{(s + 4)(s + 1)^2} = \frac{A_1}{(s + 1)^2} + \frac{A_2}{(s + 1)} + \frac{A_3}{(s + 4)}$$

podendo as constantes A_1 e A_2 ser calculadas pela eq.(3.34), e a constante A_3 pela eq.(3.32).

$$A_1 = \frac{1}{(2-2)!} [(s + 1)^2 F(s)]_{s=-1} = \left[\frac{2s + 3}{s + 4} \right]_{s=-1} = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \frac{1}{(2-1)!} \left\{ \frac{d}{ds} [(s + 1)^2 F(s)] \right\}_{s=-1} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{2s + 3}{s + 4} \right] \right\}_{s=-1} = \frac{5}{9}$$

$$A_3 = [(s+4)F(s)]_{s=-4} = \left[\frac{2s+3}{(s+1)^2} \right]_{s=-4} = -\frac{5}{9}$$

Substituindo estas constantes na expansão de $F(s)$, resulta

$$F(s) = \frac{2s+3}{(s+4)(s+1)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{5}{9} \frac{1}{(s+1)} - \frac{5}{9} \frac{1}{(s+4)}$$

Finalmente, atendendo à eq.(3.22) e sabendo que a Transformada Inversa de Laplace pode ser calculada aplicando o operador L^{-1} a cada um dos termos, tem-se

$$f(t) = \frac{1}{3} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} + \frac{5}{9} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)} \right\} - \frac{5}{9} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+4)} \right\}$$

$$f(t) = \frac{1}{3} t e^{-t} + \frac{5}{9} e^{-t} - \frac{5}{9} e^{-4t}, \quad t \geq 0$$

3.3.6.3 MÉTODO DO INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

O método do integral de convolução pode ser utilizado na determinação da Transformada Inversa de Laplace de uma função complexa nos casos em que esta é susceptível de ser representada sob a forma de um produto de duas funções mais simples cujas transformadas inversas sejam conhecidas. O teorema do integral de convolução permite afirmar que

$$L \left\{ \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right\} = F_1(s) F_2(s)$$

Ora, sendo conhecidas as funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ como as imagens no domínio do tempo de $F_1(s)$ e $F_2(s)$, respectivamente, a Transformada Inversa de $F_1(s)F_2(s)$ pode ser imediatamente determinada resolvendo o integral.

EXEMPLO 3.4

Pretende-se utilizar o método do integral de convolução para determinar a Transformada Inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Esta função pode ser representada pelo produto das seguintes funções mais simples

$$F(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{(s+1)} = F_1(s)F_2(s)$$

Neste caso,

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \text{ e } F_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

A Transformada Inversa de Laplace de cada uma destas funções vale, de acordo com a eq.(3.15) e eq.(3.22)

$$f_1(t) = L^{-1}\{F_1(s)\} = 1 \quad , \quad t \geq 0$$

$$f_2(t) = L^{-1}\{F_2(s)\} = e^{-t} \quad , \quad t \geq 0$$

Então

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t 1e^{-\tau}d\tau = -[e^{-\tau}]_{\tau=0}^t = 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

ou, atendendo à da simetria da operação de convolução,

$$f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}1d\tau = [e^{-(t-\tau)}]_{\tau=0}^t = 1 - e^{-t}$$

3.4 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

3.4.1 REPRESENTAÇÃO SOB FORMA DE EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

3.4.1.1 SISTEMAS DE 1 GRAU DE LIBERDADE

A equação do movimento de um sistema dinâmico pode obter-se aplicando a lei ou leis físicas que regem seu o comportamento. Ora, sendo este trabalho dirigido para o estudo de sistemas mecânicos, a dedução das equações do movimento destes sistemas é feita recorrendo à 2ª Lei de Newton, segundo a qual o somatório das forças exteriores actuantes num corpo é igual ao produto da sua massa pela respectiva aceleração.

Considere-se o sistema linear de 1 grau de liberdade representado na Figura 3.9a, constituído por um corpo de massa m , ligado ao exterior através de uma mola de rigidez k e por um amortecedor viscoso de constante de amortecimento c , ao qual está aplicado uma força variável no tempo $u(t)$.

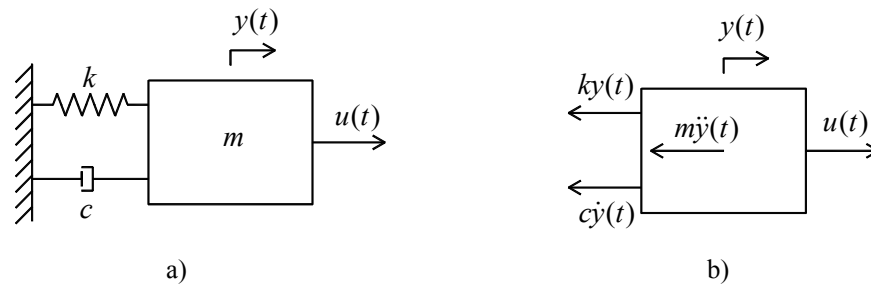


Figura 3.9 – a) Sistema mecânico de 1 grau de liberdade; b) Diagrama de corpo livre

O diagrama de corpo livre respectivo indicado na Figura 3.9b, no qual estão representadas todas as forças aplicadas ao sistema, permite estabelecer a seguinte equação do movimento

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t) \quad (3.35)$$

onde $\ddot{y}(t)$, $\dot{y}(t)$ e $y(t)$ representam a aceleração, a velocidade e o deslocamento do corpo, respectivamente, $m\ddot{y}(t)$ é a força de inércia, $c\dot{y}(t)$ é a força de amortecimento e $ky(t)$ a força elástica.

3.4.1.2 SISTEMAS DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

Se por outro lado o sistema for constituído por um conjunto de corpos, então a aplicação da segunda lei de Newton a cada um deles permite obter as equações do movimento associadas ao movimento global do sistema.

Considere-se o sistema mecânico linear de N graus de liberdade, caracterizado por um conjunto de massas m_1, m_2, \dots, m_N , ligadas ao exterior através de uma mola de rigidez k_1 e amortecedor viscoso de constante de amortecimento c_1 , e ligadas entre si através de molas de rigidezes k_2, \dots, k_N e amortecedores viscosos de constantes de amortecimento c_2, \dots, c_N , solicitado por forças variáveis no tempo $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$, conforme se indica da Figura 3.10. Os diagramas de corpo livre respectivos, associados ao equilíbrio dinâmico de cada um dos corpos, estão indicado na Figura 3.11.

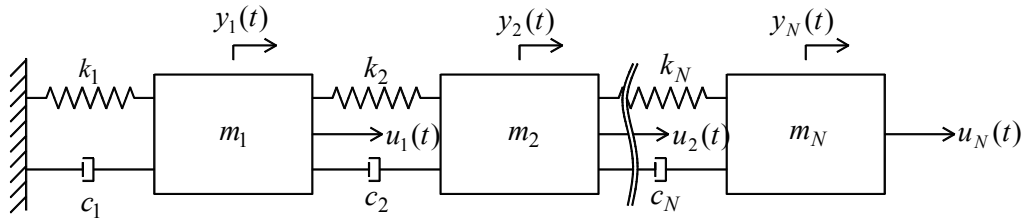


Figura 3.10 – Sistema mecânico de N graus de liberdade

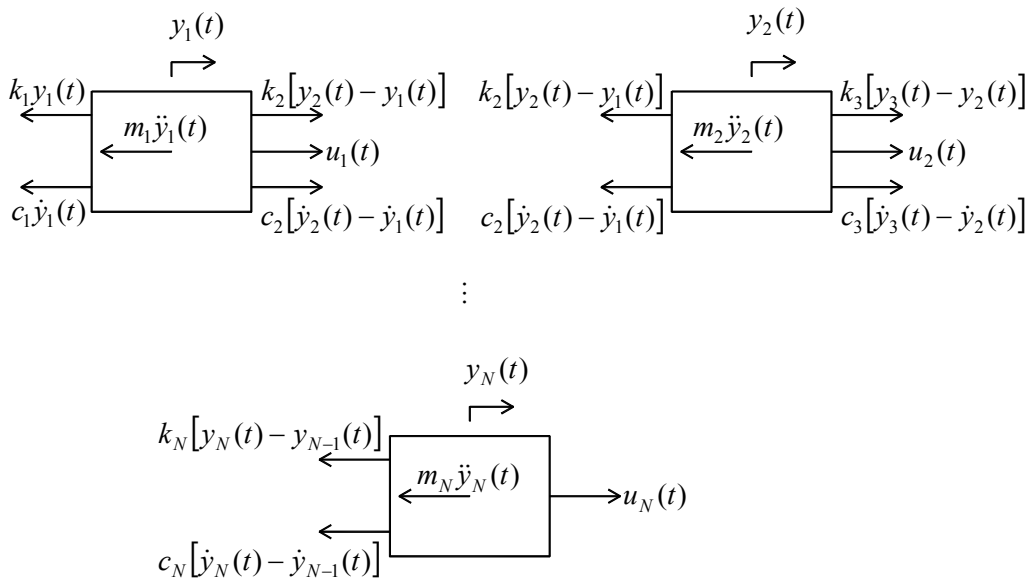


Figura 3.11 – Diagramas de corpo livre do sistema de N graus de liberdade

Escrevendo as equações de equilíbrio relativas a cada um dos corpos obtêm-se as seguintes equações do movimento, correspondentes a sistema de equações diferenciais de 2ª ordem

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{y}_1(t) - c_2 \dot{y}_2(t) + (k_1 + k_2) y_1(t) - k_2 y_2(t) = u_1(t) \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + (c_2 + c_3) \dot{y}_2(t) - c_3 \dot{y}_3(t) + (k_2 + k_3) y_2(t) - k_3 y_3(t) = u_2(t) \\ \vdots \\ m_N \ddot{y}_N(t) + c_N \dot{y}_N(t) - c_N \dot{y}_{N-1}(t) + k_N y_N(t) - k_N y_{N-1}(t) = u_N(t) \end{cases}$$

Este sistema de equações pode ser reescrito na seguinte forma matricial

$$M_s \ddot{y}_s(t) + C_s \dot{y}_s(t) + K_s y_s(t) = u_s(t) \quad (3.36)$$

onde $\ddot{y}_s(t)$, $\dot{y}_s(t)$ e $y_s(t)$ representam os vectores aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente, e $u_s(t)$ o vector das forças, dados por

$$\ddot{y}_s(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{y}_N(t) \end{Bmatrix} \quad \dot{y}_s(t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_N(t) \end{Bmatrix} \quad y_s(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{Bmatrix} \quad u_s(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix}$$

e M_s , C_s e K_s as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, definidas da seguinte maneira

$$M_s = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_N \end{bmatrix}$$

$$K_s = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & -k_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & k_{N-1} + k_N & -k_N \\ 0 & \dots & 0 & -k_N & k_N \end{bmatrix}$$

$$C_s = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & -c_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{N-1} + c_N & -c_N \\ 0 & \dots & 0 & -c_N & c_N \end{bmatrix}$$

3.4.1.3 DECOMPOSIÇÃO MODAL

A representação de sistemas lineares de múltiplos graus de liberdade pode alternativamente ser descrita através de um sistema de equações desacopladas, utilizando para o efeito uma mudança de coordenadas traduzida pela seguinte relação

$$y_s(t) = \Phi \eta(t) \quad (3.37)$$

onde $y_s(t)$ representa os deslocamentos físicos em correspondência com os diversos graus de liberdade, Φ é a matriz modal já definida na secção 3.2.3. e $\eta(t)$ representa as coordenadas modais associadas aos diversos modos de vibração. A substituição da eq.(3.37) e suas derivadas na eq.(3.36) resulta em

$$M_s \Phi \ddot{\eta}(t) + C_s \Phi \dot{\eta}(t) + K_s \Phi \eta(t) = u(t)$$

Pré-multiplicando a equação anterior por Φ^T obtém-se

$$\Phi^T M_s \Phi \ddot{\eta}(t) + \Phi^T C_s \Phi \dot{\eta}(t) + \Phi^T K_s \Phi \eta(t) = \Phi^T u(t) \quad (3.38)$$

As condições de ortogonalidade dos modos vibração relativamente à matriz de massa e rigidez, enunciadas na secção 3.2.4, permitem afirmar que as matrizes $\Phi^T M_s \Phi$ e $\Phi^T K_s \Phi$ são diagonais. Por outro lado, se se assumir que a matriz de amortecimento do sistema pode ser obtida por combinação linear das matrizes de massa e rigidez, ou seja $C_s = \alpha M_s + \beta K_s$, em que α e β são constantes convenientemente escolhidas, o sistema tem amortecimento clássico, podendo igualmente concluir-se que a matriz $\Phi^T C_s \Phi$ é também diagonal. Nestas circunstâncias, o sistema de equações (3.38) pode ser desacoplado, constituído por um conjunto de N equações independentes com a seguinte forma

$$m_i \ddot{\eta}_i(t) + c_i \dot{\eta}_i(t) + k_i \eta_i(t) = f_i(t) \quad (3.39)$$

em que

$$m_i = \phi_i^T M_s \phi_i ; c_i = \phi_i^T C_s \phi_i ; k_i = \phi_i^T K_s \phi_i ; f_i = \phi_i^T u(t)$$

onde m_i , c_i , k_i e f_i são a massa modal, rigidez modal, amortecimento modal e força modal, respectivamente, associadas ao modo de vibração i com configuração modal ϕ_i . Cada uma destas equações pode ser resolvida através de qualquer um dos métodos utilizados em sistemas de 1 grau de liberdade, como por exemplo, a Transformada Inversa de Laplace.

Um dos principais méritos da utilização da decomposição modal em sistemas de vários graus de liberdade é que a resposta de um sistema deste género pode ser obtida com suficiente aproximação, se no cálculo do somatório implícito na eq.(3.37), se utilizar um número de termos significativamente inferior ao número total de graus de liberdade.

3.4.2 REPRESENTAÇÃO SOB A FORMA DE EQUAÇÕES DE ENTRADA-SAÍDA

A representação matemática de um sistema pode também ser feita sob a forma de equações de Entrada-Saída, as quais são normalmente equações diferenciais que relacionam uma variável de entrada e uma variável de saída do sistema e as suas derivadas no tempo, possuindo a seguinte forma geral

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} \dot{u}(t) + b_m u(t) \quad (3.40)$$

em que $m \leq n$, $u(t)$ é a variável de entrada, $y(t)$ a variável de saída e $a_i (i=1,2,\dots,n)$ e $b_j (j=1,2,\dots,m)$ são coeficientes constantes (em sistemas lineares).

Poderia inicialmente pensar-se que tal equação podia ser extraída a partir do sistema global de equações diferenciais do modelo isolando as variáveis pretendidas por um processo de eliminação de variáveis. Contudo, na maior parte das vezes, esta operação é difícil ou impossível porque essas variáveis e suas derivadas encontram-se simultaneamente na mesma equação diferencial. Para contornar este problema, pode recorrer-se às propriedades da Transformada de Laplace descritas anteriormente. A ideia é aplicar esta transformada ao sistema de equações global do modelo, transformando-as num sistema de equações algébricas e consequentemente susceptíveis de serem manipuladas algebricamente, em particular, obtendo-se a relação entre duas variáveis através do método da substituição ou regra de Cramer.

EXEMPLO 3.5

Pretende-se determinar a equação de Entrada-Saída que relaciona o deslocamento $y_1(t)$ com a força aplicada $u(t)$ no sistema mecânico indicado na seguinte figura

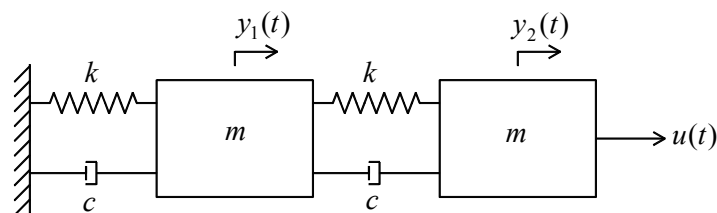


Figura 3.12 – Modelo de 2 graus de liberdade sujeito a uma acção $u(t)$

Ora, as equações do movimento do sistema obtidas de acordo com o procedimento referido na secção 3.4.1.2 são

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) - c[\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] + ky_1(t) - k[y_2(t) - y_1(t)] = 0 \\ m\ddot{y}_2(t) + c[\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] + k[y_2(t) - y_1(t)] = u(t) \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace a cada uma das equações, considerando nulas as condições iniciais, obtém-se

$$\begin{cases} ms^2 Y_1(s) + cs Y_1(s) - c[s Y_2(s) - s Y_1(s)] + k Y_1(s) - k[Y_2(s) - Y_1(s)] = 0 \\ ms^2 Y_2(s) + c[s Y_2(s) - s Y_1(s)] + k[Y_2(s) - Y_1(s)] = U(s) \end{cases}$$

Reagrupando os termos das equações resulta

$$\begin{cases} [ms^2 + 2cs + 2k]Y_1(s) - (cs + k)Y_2(s) = 0 \\ -(cs + k)Y_1(s) + (ms^2 + cs + k)Y_2(s) = U(s) \end{cases}$$

que é um sistema de equações algébricas com incógnitas $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$. Nesta fase é possível definir uma única equação na qual intervêm as variáveis $Y_1(s)$ e $U(s)$, bastando para isso resolver uma das equações em ordem a $Y_2(s)$ e substituí-la na outra. Deste modo, obtém-se a seguinte equação no domínio de Laplace

$$[m^2 s^4 + 3mcs^3 + (mk + 2mk + 2c)s^2 + 2cks + k^2]Y_1(s) = (cs + k)U(s)$$

Para obter a correspondente imagem no domínio do tempo basta aplicar a Transformada Inversa de Laplace, resultando

$$m^2 y_1^{(4)}(t) + 3mcy_1^{(3)}(t) + (3mk + c^2)\ddot{y}_1(t) + 2ck\dot{y}_1(t) + k^2 y_1(t) = cu(t) + ku(t)$$

que é a equação de Entrada-Saída pretendida, a qual possui a forma da eq.(3.40).

3.4.3 REPRESENTAÇÃO SOB A FORMA DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Considere-se novamente a possibilidade de se representar um sistema através de equações do tipo da eq.(3.40), aqui novamente repetida

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} \dot{u}(t) + b_m u(t)$$

onde $u(t)$ é a variável de entrada e $y(t)$ a variável de saída. Aplicando a Transformada de Laplace a cada um dos termos da equação, considerando nulas as condições iniciais, obtém-se

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m)U(s)$$

ou seja

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3.41)$$

$G(s)$ relaciona no domínio de Laplace a função de entrada com a função de saída do sistema sendo designada por função de transferência. Como se pode constatar, a definição desta função depende apenas das constantes a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e b_j ($j = 1, 2, \dots, m$), o que equivale a dizer que a função de transferência depende exclusivamente das características mecânicas e materiais do sistema, que no caso de sistemas mecânicos, são definidas pelas características de massa, amortecimento e rigidez respectivas.

Os valores de s para os quais o denominador da função de transferência se anula, ou seja as raízes de $U(s)=0$, são designados pólos, da mesma maneira que os valores de s para os quais $Y(s)=0$ se designam de zeros da função de transferência. Os pólos e zeros de multiplicidade 1 são designados de simples ou distintos e, no caso de multiplicidade superior a 1, são designados de múltiplos ou repetidos. Conhecidos os pólos e zeros da função de transferência, a função indicada na eq.3.41 pode ser reescrita na forma de pólos e zeros da seguinte maneira

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3.42)$$

onde, K é uma constante, e p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e z_j ($j = 1, 2, \dots, m$) são os pólos e zeros de $G(s)$, respectivamente.

EXEMPLO 3.6

Determinar a função de transferência de um sistema mecânico de 1 grau de liberdade tal como o representado na Figura 3.9a. A equação do movimento é dada por

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace a cada um dos membros da equação, considerando nulas as condições iniciais, obtém-se

$$(ms^2 + cs + k)Y(s) = U(s)$$

ou seja

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Da mesma forma que num sistema de vários graus de liberdade é possível extrair diversas equações de Entrada-Saída, as quais relacionam no domínio do tempo pares de variáveis de entrada e saída associados aos diversos graus de liberdade, também é possível estabelecer diversas funções de transferência que relacionam esses mesmos pares de variáveis no domínio de Laplace. Genericamente pode dizer-se que, num sistema com p entradas e q saídas, é possível definir $p \times q$ funções de transferência. Essas funções de transferência podem ser agrupadas numa matriz designada por Matrix Função de Transferência ou simplesmente Matriz de Transferência.

Caso se disponha antecipadamente do conjunto de equações Entrada-Saída que relacionam no domínio do tempo os diversos pares de variáveis de entrada e saída do sistema, a Matriz de Transferência pode ser obtida aplicando a Transformada de Laplace a cada uma destas equações. Caso contrário, pode aplicar-se directamente a Transformada de Laplace às equações de equilíbrio do sistema, transformando-as num sistema de equações algébricas, e a partir delas estabelecer as diversas funções de transferência do sistema.

Alternativamente, a Matriz de Transferência pode ser obtida directamente através das matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, através da seguinte equação obtida aplicando a Transformada de Laplace à eq.(3.36)

$$G(s) = [M_s s^2 + C_s s + K_s]^{-1} \quad (3.43)$$

Contudo, se o sistema possuir muitos graus de liberdade, a utilização da eq.(3.43) bem como a aplicação directa da Transformada de Laplace às equações de equilíbrio, pode ser bastante laboriosa, sendo preferível recorrer ao método da decomposição modal descrito anteriormente. Por esta via é possível obter a Matriz de Transferência recorrendo a um modelo simplificado do sistema, considerando para o efeito que o seu comportamento pode ser descrito através do contributo dos primeiros M modos de vibração. Neste caso, esta matriz é dada por

$$G(s) = \sum_{i=1}^M \frac{\phi_i \phi_i^T}{m_i (s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2)} \quad (3.44)$$

onde ω_i é a frequência circular do i -ésimo modo de vibração, ϕ_i é a respectiva configuração modal, e m_i e $\xi_i = c_i / 2m_i \omega_i$ são as correspondentes massas modais e coeficientes de amortecimento modais, respectivamente.

EXEMPLO 3.7

Pretende-se obter a Matriz de Transferência do seguinte sistema mecânico

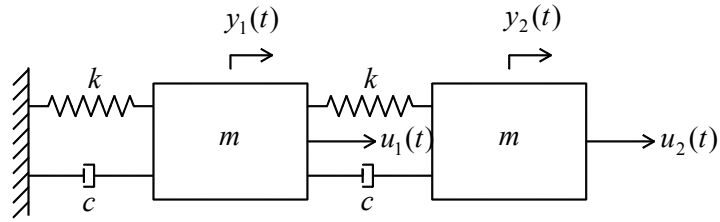


Figura 3.13 – Modelo de 2 graus de liberdade sujeito à ação de $u_1(t)$ e $u_2(t)$

Neste caso, o sistema tem duas variáveis de entrada, $u_1(t)$ e $u_2(t)$, e duas variáveis de saída, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, sendo possível estabelecer 4 funções de transferência, $G_{11}(s)$, $G_{12}(s)$, $G_{21}(s)$ e $G_{22}(s)$, conducentes à seguinte Matriz de Transferência

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Para a obter, comece-se por escrever as equações de equilíbrio dinâmico

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1(t) + c\dot{y}_1(t) + c[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)] + ky_1(t) + k[y_1(t) - y_2(t)] = u_1(t) \\ m\ddot{y}_2(t) - c[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)] - k[y_1(t) - y_2(t)] = u_2(t) \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace a cada uma das equações e reescrevendo o sistema na forma matricial obtém-se

$$\begin{bmatrix} ms^2 + 2cs + 2k & -cs - k \\ -cs - k & ms^2 + cs + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações em ordem a $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$, resulta

$$Y_1(s) = \frac{ms^2 + cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} U_1(s) + \frac{cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} U_2(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} U_1(s) + \frac{ms^2 + 2cs + 2k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} U_2(s)$$

Cada função de transferência do sistema pode ser obtida da seguinte maneira

$$G_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} \Big|_{U_2(s)=0}, \quad G_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} \Big|_{U_1(s)=0}$$

$$G_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} \Big|_{U_2(s)=0}, \quad G_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} \Big|_{U_1(s)=0}$$

chegando-se finalmente à seguinte Matriz de Transferência

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{ms^2 + cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} & \frac{cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} \\ \frac{cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} & \frac{ms^2 + 2cs + 2k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} \end{bmatrix}$$

3.4.4 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADO

3.4.4.1 FORMULAÇÃO GERAL

A representação de sistemas dinâmicos em espaço de estado tem como principal objectivo reescrever o sistema de equações do movimento inicial num sistema com um maior número de equações mas de grau inferior. Esta operação é computacionalmente desejável, pois, apesar do número de equações ser superior, são de tratamento mais fácil. A representação em espaço de estado tem grande importância em diversos domínios, em particular, na engenharia do controlo moderno de sistemas, devido ao facto de esta abordagem permitir tratar problemas de elevada complexidade, como por exemplo sistemas multivariáveis (várias entradas e saídas) e sistemas não-lineares.

Este tipo de representação envolve três tipos de variáveis, nomeadamente, variáveis de estado, variáveis de entrada e variáveis de saída. Começando por definir o que são variáveis de estado, pode dizer-se que são o menor conjunto de variáveis independentes que caracterizam completamente o estado de um sistema, de tal forma que conhecidos os seus valores num instante inicial $t = t_0$, é possível determinar completamente a resposta do sistema em qualquer instante $t \geq t_0$ supondo conhecidos os valores das entradas no sistema nesse intervalo de tempo. O vector $x(t)$ constituído pelas diversas variáveis de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ designa-se vector de estado e o espaço n -dimensional cujos eixos x_1, x_2, \dots, x_n estão em correspondência com as n variáveis de estado, designa-se de espaço de estado. Qualquer estado do sistema pode ser representado através de um ponto no espaço de estado.

As variáveis de entrada representam as acções exteriores aplicadas ao sistema, também conhecidas como perturbação ou excitação exterior. O vector $u(t)$ constituído pelas diversas entradas no sistema designa-se de vector de entrada.

As variáveis de saída, por sua vez, estão relacionadas com as variáveis de estado ou entrada susceptíveis de serem medidas. Em muitas situações práticas, nem todos os estados ou entradas estão disponíveis para medida, de tal forma que a informação relativa ao comportamento do sistema é organizada em termos do vector de saída $y(t)$ constituído pelas diversas variáveis de saída.

O sistema de equações diferenciais de 1ª ordem, resultante da transformação do sistema de equações inicial numa representação em espaço de estado, geralmente consiste em equações cujo primeiro membro é constituído pela derivada temporal de uma variável de estado, sendo o segundo membro uma função algébrica das variáveis de estado e variáveis de entrada. Dado um sistema de múltiplas entradas e saídas com n variáveis de estado, m variáveis de entrada e p variáveis de saída, a sua representação em espaço de estado é obtida pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \end{cases} \quad (3.45)$$

Por outro lado, as equações que caracterizam a saída do sistema têm a seguinte forma geral

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \end{cases} \quad (3.46)$$

No caso geral, f_1, \dots, f_n e g_1, \dots, g_p são não-lineares, podendo inclusivamente incluir explicitamente a variável tempo (sistemas variáveis no tempo). Os sistemas de equações (3.45) e (3.46) podem ser representados de uma forma mais compacta da seguinte maneira

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (3.47)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (3.48)$$

sendo

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{Bmatrix} \quad u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{Bmatrix}$$

$$f(x, u, t) = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \end{Bmatrix} \quad g(x, u, t) = \begin{Bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ g_p(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \end{Bmatrix}$$

A eq.(3.47) é designada de equação de estado e a eq.(3.48) é designada de equação de saída. No caso particular das funções f_1, \dots, f_n e g_1, \dots, g_n serem lineares, a equação de estado e de saída podem ser simplificadas da seguinte maneira

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.49)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.50)$$

em que A, B, C e D são matrizes de coeficientes constantes, possuindo a seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

Os vectores $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ são respectivamente os vectores de estado, entrada e saída, já referidos anteriormente, e as matrizes A, B, C e D são designadas por matriz de estado, matriz de entrada, matriz de saída e matriz de transmissão directa, respectivamente.

EXEMPLO 3.8

Pretende-se obter a representação de estado do seguinte sistema mecânico de 1-GL

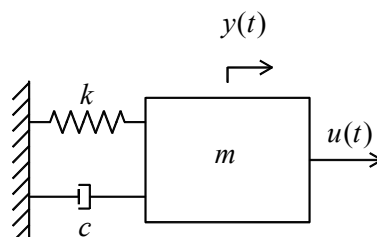


Figura 3.14 – Modelo de 1 grau de liberdade

A equação do movimento respectiva é

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

O estado de um sistema deste género fica completamente definido através do conhecimento da sua posição e velocidade, logo, o sistema tem as duas variáveis de estado

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Atendendo à definição destas variáveis e à equação do movimento, obtém-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t)$$

Por outro lado, se se admitir que a única variável disponível para medida é a posição do sistema, então

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Finalmente, as equações de estado e de saída do sistema são

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

No caso de sistemas mecânicos com N graus de liberdade com múltiplas entradas e múltiplas saídas, as equações do movimento inicialmente formuladas constituem um sistema de N equações diferenciais de 2ª ordem com N incógnitas, que são os deslocamentos associados aos diversos graus de liberdade. A representação em espaço de estado de tal sistema é realizada sob a forma de um sistema de $2N$ equações diferenciais de 1ª ordem, cujas $2N$ incógnitas são as n variáveis de estado compostas pelos N deslocamentos e N velocidades associados aos diversos graus de liberdade, ou seja

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_N(t) \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

em que $\mathbf{x}(t)$ é o vector de estado de dimensão $n = 2N$, e $y_1(t), \dots, y_N(t)$ e $\dot{y}_1(t), \dots, \dot{y}_N(t)$ são os deslocamentos e velocidades associados aos diversos graus de liberdade, respectivamente.

Se existirem m variáveis de entrada, que podem ser perturbações exteriores ou acções directamente aplicadas ao sistema, e p variáveis de saída disponíveis para medida, os respectivos vectores de entrada e saída têm a forma

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

As matrizes de estado e de entrada, associadas à representação em espaço de estado, podem ser obtidas directamente a partir das matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, utilizando as seguintes relações

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{K}_s & -\mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{C}_s \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

em que $\mathbf{0}$ é a matriz nula, \mathbf{I} a matriz identidade, \mathbf{M}_s a matriz de massa, \mathbf{C}_s a matriz de amortecimento e \mathbf{K}_s a matriz de rigidez do sistema. A matriz \mathbf{J} é a matriz de localização ou mapeamento das variáveis de entrada, sendo constituída por um número de linhas igual ao número de graus de liberdade do sistema e

por um número de colunas igual ao número de variáveis de entrada. Esta matriz é formada por elementos nulos, com excepção dos elementos que estão em correspondência com a localização das variáveis de entrada. A matriz de estado A tem dimensões $2N \times 2N$ e a matriz de entrada B tem dimensões $n \times m$.

Por outro lado, a matriz de saída C tem dimensões $p \times n$ sendo geralmente constituída por elementos nulos, possuindo elementos unitários nas localizações que estão em correspondência com as variáveis de estado que podem ser medidas. A matriz de transmissão directa D tem dimensões $p \times m$ e nos casos correntes é geralmente composta por elementos nulos.

EXEMPLO 3.9

Dado o sistema mecânico de 2-GL representado na Figura 3.15, pretende-se obter a representação do modelo em espaço de estado, sabendo que as forças exteriores actuam em ambos os graus de liberdade e que é possível medir o deslocamento relativo entre as duas massas.

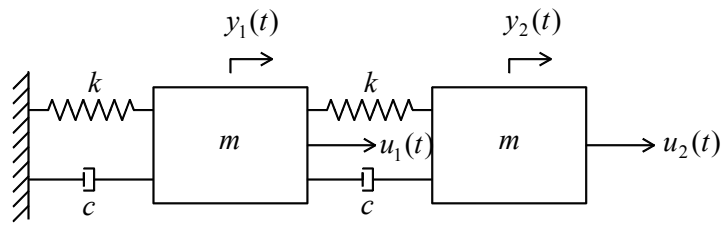


Figura 3.15 – Modelo de 2 graus de liberdade sujeito à acção de $u_1(t)$ e $u_2(t)$

As matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, obtidas de acordo com a metodologia descrita na secção 3.4.1.2, valem

$$M_s = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad C_s = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad K_s = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

As equações de estado e de saída do sistema ficam

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Neste caso, a matriz de J de posicionamento das variáveis de entrada é dada por

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por aplicação das equações 3.53 e 3.54 obtêm-se as seguintes as matrizes de estado e de entrada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{2c}{m} & \frac{c}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_s^{-1}J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

sendo as matrizes de saída e de transmissão directa dadas por

$$C = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \quad D = [0 \quad 0]$$

3.4.4.2 FORMA CANÓNICA CONTROLÁVEL

As equações de estado descritas anteriormente podem ser objecto de uma mudança de coordenadas, tendo em vista a transformação das matrizes que nelas figuram em matrizes com formas mais adequadas do ponto de vista da solução de um problema em específico. É o caso do dimensionamento de controladores através da formulação de estado, descrito na secção 4.6.5. Nesta situação concreta, é vantajoso representar o sistema na forma canónica controlável, a qual é caracterizada por ter uma matriz de estado com elementos unitários numa determinada diagonal, e por ter os coeficientes da respectiva equação característica (tal como definida em 3.2.1) na sua última linha, sendo os restantes elementos nulos. Para representar o sistema na forma canónica controlável, considere-se a mudança de coordenadas definida por

$$x(t) = Tr(t) \tag{3.55}$$

em que T é a matriz de transformação, dada por [100]

$$T = RW \tag{3.56}$$

onde R é a matriz de controlabilidade definida por

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \tag{3.57}$$

e W uma matriz com a seguinte composição

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

sendo os elementos a_i os coeficientes da equação característica da matriz de estado do sistema. A substituição da eq.(3.55) e sua derivada na eq.(3.49) permite escrever

$$T\dot{r}(t) = ATr(t) + Bu(t)$$

Pré-multiplicando ambos os membros da equação por T^{-1} , admitindo T invertível, resulta

$$\dot{r}(t) = T^{-1}ATr(t) + T^{-1}Bu(t)$$

ou simplesmente

$$\dot{r}(t) = A_R r(t) + B_R u(t) \quad (3.59)$$

onde

$$A_R = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B_R = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De acordo com o exposto na secção 3.2.2, as matrizes A e A_R têm os mesmos valores próprios, pois são matrizes similares. Isto é verdade porque, sendo a matriz de transformação invertível, é necessariamente não singular. Refira-se também que esta transformação só tem interesse nos casos em que a matriz de entrada, B , é composta por um só coluna, pois, tal como se verá na secção 4.6.5, a modificação dos coeficientes da equação característica do sistema é realizada por meio de uma única entrada no sistema.

EXEMPLO 3.10

Pretende-se representar um sistema de dois graus de liberdade idêntico ao do exemplo 3.9 na sua forma canónica controlável, sendo inicialmente representado pelas seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{2c}{m} & \frac{c}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad D = 0$$

A equação característica de A obtém-se aplicando a eq.(3.3), obtendo-se uma equação do tipo

$$|A - sI| = 0 \Leftrightarrow s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

ficando neste caso

$$s^4 + \frac{3c}{m}s^3 + \frac{c^2 + 3km}{m^2}s^2 + \frac{2ck}{m^2}s + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

Os coeficientes da equação característica valem

$$a_1 = \frac{3c}{m} \quad a_2 = \frac{c^2 + 3km}{m^2} \quad a_3 = \frac{2ck}{m^2} \quad a_4 = \frac{k^2}{m^2}$$

os quais são utilizados para construir a matriz W da eq.(3.58), obtendo-se

$$W = \begin{bmatrix} \frac{2ck}{m^2} & \frac{c^2 + 3km}{m^2} & \frac{3c}{m} & 1 \\ \frac{c^2 + 3km}{m^2} & \frac{3c}{m} & 1 & 0 \\ \frac{3c}{m} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, a matriz de controlabilidade do sistema é dada por

$$R = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & -\frac{2c}{m^2} & \frac{5c^2 - 2km}{m^3} \\ 0 & 0 & \frac{c}{m^2} & -\frac{3c^2 - km}{m^3} \\ \frac{1}{m} & -\frac{2c}{m^2} & \frac{5c^2 - 2km}{m^3} & -\frac{c(13c^2 - 10km)}{m^4} \\ 0 & \frac{c}{m^2} & -\frac{3c^2 - km}{m^3} & \frac{2c(3c^2 - 3km)}{m^4} \end{bmatrix}$$

Definidas as matrizes W e R, pode obter-se a seguinte matriz de transformação

$$T = RW = \begin{bmatrix} \frac{k}{m^2} & \frac{c}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \\ \frac{k}{m^2} & \frac{c}{m^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m^2} & \frac{c}{m^2} & \frac{1}{m} \\ 0 & \frac{k}{m^2} & \frac{c}{m^2} & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema pode agora ser representado na sua forma canónica controlável utilizando as relações da eq.(3.59), tendo a matriz de estado e a matriz de entrada do sistema a seguinte composição

$$A_R = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k^2}{m^2} & -\frac{2ck}{m^2} & -\frac{c^2 + 3km}{m^2} & -\frac{3c}{m} \end{bmatrix} \quad B_R = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.4.4.3 FORMA CANÓNICA OBSERVÁVEL

À semelhança do descrito na secção precedente, a conversão do modelo de estado na forma canónica observável tem interesse na resolução de outro tipo de problemas, em particular no dimensionamento de observadores de estado, conforme se verá na secção 4.6.6. Neste caso, procede-se a uma mudança de coordenadas do sistema, utilizando para o efeito a seguinte transformação linear

$$x(t) = Sq(t) \tag{3.60}$$

onde S é a matriz de transformação, dada por [100]

$$S = (WQ)^{-1} \tag{3.61}$$

sendo W uma matriz já definida pela igualdade (3.58) e Q a matriz de observabilidade definida por

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

A substituição da eq.(3.60) e sua derivada na eq.(3.49) e posterior pré-multiplicação por S^{-1} , admitindo S invertível, permite escrever

$$\dot{q}(t) = S^{-1}ASq(t) + S^{-1}Bu(t)$$

ou, de uma forma mais condensada

$$\dot{q}(t) = A_Qq(t) + B_Qu(t) \quad (3.63)$$

sendo

$$A_Q = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad B_Q = S^{-1}B = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ b_{n-2} - a_{n-2} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, a substituição da eq.(3.60) na eq.(3.50), admitindo $D=0$, conduz à seguinte relação

$$y(t) = CSq(t)$$

sendo

$$CS = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \quad (3.64)$$

Os coeficientes b_i estão associados ao vector de controlo estando em correspondência com os coeficientes indicados na eq.(3.40). Tal como no caso anterior, as matrizes A e A_Q têm os mesmos valores próprios, dado que se supõe que a matriz de transformação correspondente é invertível.

EXEMPLO 3.11

Pretende-se representar o sistema de dois graus de liberdade indicado no exemplo 3.9 na sua forma canónica observável.

Neste caso, a matriz de observabilidade tal como definida na eq.(3.62) vale

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{2c}{m} & \frac{c}{m} \\ \frac{5ck}{m^2} & -\frac{3ck}{m^2} & \frac{5c^2 - 2km}{m^2} & \frac{-3c^2 + km}{m^2} \end{bmatrix}$$

Estando a matriz W da eq.(3.58) já definida no exemplo anterior, a matriz de transformação fica

$$S = (WQ)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{cm}{k^2} & \frac{m}{k} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3c}{m} \\ \frac{m}{k} & 0 & -1 & \frac{2c}{m} \end{bmatrix}$$

O sistema pode agora ser representado na sua forma canónica observável expressa na eq.(3.63) e eq.(3.64), tendo a matriz de estado e a matriz de entrada no sistema a seguinte composição

$$A_Q = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{k^2}{m^2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{2ck}{m^2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{c^2 + 3km}{m^2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3c}{m} \end{bmatrix} \quad B_Q = S^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{k}{m^2} \\ \frac{c}{m^2} \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.4.5 EQUIVALÊNCIAS ENTRE REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS

3.4.5.1 CONVERSÃO DE ESPAÇO DE ESTADO PARA FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Considere-se um sistema dinâmico de vários graus de liberdade de múltiplas entradas e saídas, representado em espaço de estado pelas seguintes equações de estado e saída

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

onde cada um dos vectores e matrizes têm o significado referido na secção 3.4.4.1. Pretende-se obter a representação deste sistema sob a forma da matriz de transferência, a qual é composta por um conjunto de funções de transferência em que cada uma delas relaciona, no domínio de Laplace, um determinado par Entrada-Saída do sistema. Aplicando a Transformada de Laplace às equações de estado e saída, considerando nulas as condições iniciais do problema, ou seja, $x(t=0)=0$, obtém-se

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (3.65)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (3.66)$$

Resolvendo a eq.(3.65) em ordem a $X(s)$, resulta

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

ou

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Substituindo este resultado na eq.(3.66), fica

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] U(s) \quad (3.67)$$

A matriz $[C(sI - A)^{-1}B + D]$ é a matriz de transferência procurada na medida em que permite relacionar o vector de saída $Y(s)$ com o vector de entrada $U(s)$. Em muitos casos, porém, o que se pretende encontrar é uma função de transferência específica, ou um número reduzido de funções de transferência. Nestas situações, pode utilizar-se a eq.(3.67) ajustando convenientemente a dimensão das matrizes B, C e D . Se se pretender encontrar apenas uma função de transferência, $Y(s)$, $U(s)$ e D reduzem-se a escalares, e a equação anterior passa a ser dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.68)$$

EXEMPLO 3.12

Pretende-se converter o modelo do sistema de 2 graus de liberdade indicado no exemplo 3.9, inicialmente expresso em espaço de estado, para um modelo na forma de matriz de transferência que relacione todas as variáveis de entrada e saída. O modelo em espaço de estado tem a seguinte forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{2c}{m} & \frac{c}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{c}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A correspondente matriz de transferência pode ser obtida a partir da eq.(3.67)

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1}B + D = C \frac{1}{|sI - A|} \text{adj}(sI - A)B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{m^2 s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{m^2 s^3 + 3cms^2 + (c^2 + km)s + ck}{m^2} & \frac{ks}{m} & \frac{ms^2 + cs + k}{m} & \frac{cs + k}{m} \\ \frac{ks}{m} & \frac{m^2 s^3 + 3cms^2 + (c^2 + 2km)s + ck}{m^2} & \frac{cs + k}{m} & \frac{ms^2 + 2cs + 2k}{m} \\ -\frac{k(2ms^2 + cs + k)}{m^2} & \frac{ks^2}{m} & \frac{s(ms^2 + cs + k)}{m} & \frac{s(cs + k)}{m} \\ \frac{m^2}{ks^2} & \frac{-k(ms^2 + cs + k)}{m^2} & \frac{m}{s(cs + k)} & \frac{m}{s(ms^2 + 2cs + 2k)} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{ms^2 + cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} & \frac{cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} \\ \frac{cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} & \frac{ms^2 + 2cs + 2k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} \end{bmatrix}$$

Este resultado é naturalmente coincidente com a matriz de transferência já anteriormente obtida no exemplo 3.7. Se se pretendesse conhecer unicamente a função de transferência $G_{11}(s)$, poderia ser utilizado o mesmo procedimento redimensionando as matrizes B,C e D anteriores da seguinte forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad D = 0$$

ficando

$$G_{11} = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} C(sI - A)^{-1} B + D = \frac{ms^2 + cs + k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2}$$

Considere-se novamente a função de transferência definida na eq.(3.68) a qual resultou da conversão do modelo originalmente definido em espaço de estado. Sabendo que

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{|sI - A|} \text{adj}(sI - A)$$

e substituindo esta relação na eq.(3.68) fica

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D = \frac{C \text{adj}(sI - A) B}{|sI - A|} + D = \frac{C \text{adj}(sI - A) B + |sI - A| D}{|sI - A|} = \frac{N(s)}{|sI - A|}$$

onde $N(s)$ é uma função polinomial em s . Ora, sabendo que a resolução do problema $|sI - A| = 0$ resulta na obtenção dos valores próprios da matriz A e, simultaneamente, que é pela anulação do denominador que se determinam os pólos da função de transferência, da relação expressa na expressão anterior pode concluir-se os valores próprios da matriz de estado A são idênticos aos pólos da função de transferência.

3.4.5.2 CONVERSÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA PARA ESPAÇO DE ESTADO

O processo de conversão de modelos expressos sob a forma de funções de transferência para modelos em espaço de estado pode seguir estratégias diferentes, dependendo do facto de a função de transferência em causa ter uma constante no numerador ou ter uma função polinomial em s . No primeiro caso a conversão do modelo é mais simples e directa, enquanto que no segundo caso é necessário recorrer a um processo mais trabalhoso. Considere-se primeiro o caso do numerador ser uma constante, ou seja

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (3.69)$$

A função de transferência pode assumir a forma

$$(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)Y(s) = b_0U(s)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace a cada um dos termos, assumindo condições iniciais nulas, obtém-se a equação diferencial que rege o comportamento do sistema

$$y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_ny(t) = b_0u \quad (3.70)$$

De acordo com o referido na secção 3.4.4.1, esta equação pode ser convertida directamente na forma de representação em espaço de estado, considerando para o efeito as seguintes variáveis de estado

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

resultando no seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= -a_1x_n(t) - \dots - a_{n-1}x_2(t) - a_nx_1(t) + bu(t) \end{aligned}$$

o qual pode ser reescrito na seguinte forma matricial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{Bmatrix}$$

e dado que só existe uma variável de saída, isto é $y = x_1$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad \text{e} \quad D=0$$

Salienta-se o facto da representação em espaço de estado alcançada estar na forma canónica controlável.

EXEMPLO 3.13

Pretende-se obter a representação de estado do sistema expresso pela seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Utilizando a Transformada Inversa de Laplace, pode deduzir-se a seguinte equação diferencial

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

Fazendo

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

obtém-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t)$$

Dado que $y = x_1$ é a única variável de saída

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

O sistema está agora expresso na sua representação em espaço de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Se, por outro lado, a função de transferência do sistema tiver uma função polinomial no numerador, ou seja, se for do tipo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (3.71)$$

torna-se útil reescrever a função como o produto de duas novas funções, obtidas à custa da introdução de um novo termo $W(s)$, da seguinte maneira

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)} \cdot \frac{W(s)}{U(s)} = (b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_n) \left[\frac{1}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \right] \quad (3.72)$$

Cada uma das funções pode ser convertida para o domínio do tempo recorrendo à Transformada Inversa de Laplace, obtendo-se

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_n \quad \Rightarrow \quad y(t) = b_0w^{(n)}(t) + b_1w^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1}\dot{w}(t) + b_nw(t) \quad (3.73)$$

e

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad \Rightarrow \quad w^{(n)}(t) + a_1w^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}\dot{w}(t) + a_nw(t) = u(t) \quad (3.74)$$

A eq.(3.74) é semelhante à eq.(3.70), ficando sujeita à mesma representação em espaço de estado. Neste caso, as variáveis de estado são

$$\begin{aligned} x_1(t) &= w(t) \\ x_2(t) &= \dot{w}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= w^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad (3.75)$$

dando origem às seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= w^{(n)} = -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \dots - a_1 x_n(t) + u(t) \end{aligned} \quad (3.76)$$

Expressando este sistema de equações na forma matricial, obtém-se

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

sendo

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

A equação de saída do sistema é dada pela eq.(3.73) a qual pode ser expressa em termos das variáveis de estado através de

$$y(t) = b_0 w^{(n)}(t) + b_1 w^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1} \dot{w}(t) + b_n w(t) = b_0 \dot{x}_n + b_1 x_n + \dots + b_n x_1$$

Substituindo o valor de $\dot{x}_n(t)$, tal como definido na última equação do sistema eq.(3.76), na equação anterior, obtém-se

$$y(t) = b_0 [-a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \dots - a_1 x_n(t) + u(t)] + b_1 x_n + \dots + b_n x_1$$

Rearranjando e agrupando os termos iguais, resulta

$$y(t) = (-b_0 a_n + b_n) x_1(t) + (-b_0 a_{n-1} + b_{n-1}) x_2(t) + \dots + (-b_0 a_1 + b_1) x_n(t) + b_0 u(t)$$

ou, na forma matricial

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.77)$$

onde

$$C = [-b_0 a_n + b_n \quad -b_0 a_{n-1} + b_{n-1} \quad \cdots \quad -b_0 a_1 + b_1] \quad e \quad D = b_0$$

Note-se que, relativamente à conversão de funções de transferência na sua representação em espaço de estado, ficou claramente demonstrado que a equação de estado obtida depende do denominador da função de transferência, enquanto que a equação de saída depende do seu numerador.

EXEMPLO 3.14

Pretende-se obter a representação de estado do sistema expresso pela seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s - 1}{ms^2 + cs + k}$$

Neste caso, a função $\frac{W(s)}{U(s)}$ vale,

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

a qual vai conduzir à seguinte equação de estado (ver exemplo anterior)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

Por outro lado, a nova função $\frac{Y(s)}{W(s)}$ é definida por

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = 5s - 1$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace, obtém-se a seguinte equação de saída

$$y(t) = 5\dot{w}(t) - w(t)$$

Atendendo à relação de variáveis expressa nas equações (3.75)

$$y(t) = 5x_2(t) - x_1(t)$$

ou ainda, na forma matricial

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

ou seja

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

com

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = 0$$

3.4.6 LINEARIZAÇÃO DE MODELOS NÃO-LINEARES

A técnica de linearização de sistemas pode ser aplicada ao estudo de muitos sistemas não-lineares, com a vantagem de se poder estudar um problema não-linear utilizando as inúmeras ferramentas desenvolvidas para sistemas lineares, com particular ênfase para as técnicas desenvolvidas no domínio da frequência. Naturalmente que esta abordagem é válida quando o comportamento do sistema não-linear pode ser linearizado na vizinhança próxima de um ponto em análise. Este procedimento assume ainda maior relevância no caso do estudo de sistemas de controlo realimentados, onde os efeitos das não-linearidades são mais facilmente atenuados pela permanente observação da resposta efectiva do sistema.

A técnica de linearização que a seguir se apresenta baseia-se na expansão da função não-linear utilizando séries de Taylor, considerando para o efeito o ponto no qual se pretende linearizar a função e retendo unicamente o termo linear da série. Para que os termos não-lineares possam ser desprezados, é necessário que o sistema em análise tenha o comportamento focado num ponto de equilíbrio e apresente uma resposta marcada por ligeiras variações em torno desse ponto.

Considere-se o caso em que se pretende linearizar um sistema em torno de um ponto de coordenadas y_0 e z_0 pertencentes a uma função não-linear $z = f(y)$. Recorrendo ao desenvolvimento em série de Taylor, esta relação pode ser expandida da seguinte maneira

$$z = f(y) = f(y_0) + \left. \frac{df}{dy} \right|_{y=y_0} (y - y_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dy^2} \right|_{y=y_0} (y - y_0)^2 + \dots$$

Se a variação $y - y_0$ for pequena, os termos de ordem superior podem ser desprezados, concluindo-se que a função inicial pode ser aproximada por uma função linear definida por uma recta tangente à função no ponto de equilíbrio, tal como esquematizado na Figura 3.16. Neste caso, a função não-linear pode ser expressa sob a forma

$$f(y) \approx f(y_0) + \left. \frac{df}{dy} \right|_{y=y_0} (y - y_0) \quad (3.78)$$

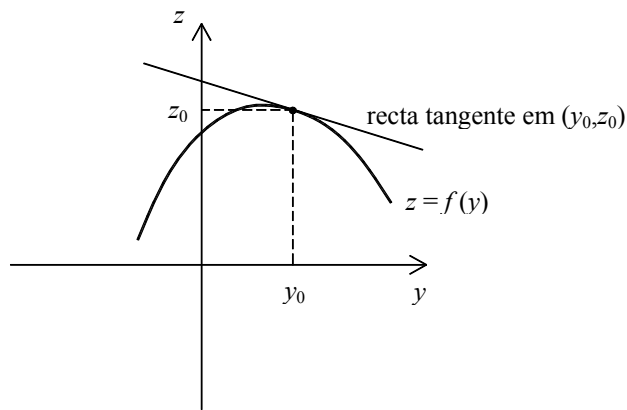


Figura 3.16 – Linearização em torno do ponto (y_0, z_0)

EXEMPLO 3.15

O sistema indicado na Figura 3.17 representa uma massa m ligada ao exterior por intermédio de um amortecedor viscoso linear de constante de amortecimento c e por uma mola não-linear caracterizada pela lei $f_k = LN(y+1)$ com $y > -1$, o qual se encontra sujeito a uma força $u(t)$. Pretende-se conhecer a função de transferência do sistema $Y(s)/U(s)$ para pequenas oscilações em torno do ponto $y = 0$.

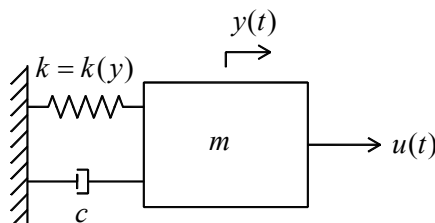


Figura 3.17 – Sistema não-linear de 1 grau de liberdade

Definindo o conjunto de todas as forças externas e internas que actuam no sistema no ponto de equilíbrio, além da força $u(t)$ directamente aplicada, podem identificar-se a força de inércia e a força de amortecimento as quais valem respectivamente

$$f_i(t) = m \frac{d^2[y(t) - y_0]}{dt^2} = m\ddot{y}(t)$$

$$f_a(t) = c \frac{d[y(t) - y_0]}{dt} = c\dot{y}(t)$$

e a força da mola a qual pode ser deduzida da lei não-linear dada. Este termo pode ser linearizado utilizando a aproximação expressa na eq.(3.78). Neste caso,

$$y_0 = 0$$

$$f(y_0) = \text{LN}(1) = 0$$

e

$$\left. \frac{df}{dy} \right|_{y=y_0} (y - y_0) = \left. \frac{d[\text{LN}(y+1)]}{dy} \right|_{y=y_0} (y - y_0) = \left. \frac{1}{y+1} \right|_{y=0} (y - 0) = y$$

Fazendo intervir a variável tempo, a função linear aproximada vale simplesmente

$$f_k(t) = y(t)$$

A equação de equilíbrio do sistema pode finalmente ser escrita envolvendo todas as forças aplicadas ao sistema, resultando a seguinte equação linear

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Aplicando a Transformada de Laplace, admitindo condições iniciais nulas, fica

$$(ms^2 + cs + 1)Y(s) = U(s)$$

ou seja

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + 1}$$

3.5 ANÁLISE DA RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

3.5.1 INTRODUÇÃO

A construção do modelo de um sistema é feita através da definição de relações matemáticas entre as suas diversas variáveis de entrada e de saída, podendo para o efeito recorrer-se a qualquer uma das representações indicadas na secção 3.4. O desenvolvimento de qualquer modelo tem normalmente como principal finalidade a extracção de informação sobre o comportamento do sistema, seja informação expressa no domínio do tempo ou da frequência. Seguidamente, apresentam-se alguns métodos que permitem obter a resposta do sistema no domínio do tempo em termos quantitativos e qualitativos. Para o efeito, procura-se fazer uma abordagem diferente, mas que serve de complemento aquela que é comum no estudo de estruturas de Engenharia Civil. Neste caso, privilegia-se a utilização do método da Transformada da Laplace e da formulação de estado como ferramentas para a obtenção das funções contínuas da resposta do sistema. Naturalmente que, nos casos em que a excitação exterior é definida em termos de uma série discreta de pontos, faz mais sentido utilizar os métodos de integração passo a passo conhecidos.

3.5.2 UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Já foram realçadas na secção 3.3 as potencialidades do método da Transformada de Laplace para a resolução de equações diferenciais, nomeadamente a possibilidade de transformar uma equação diferencial numa equação algébrica do domínio de Laplace e, após determinar a sua solução, obter a sua imagem no domínio do tempo utilizando a Transformada Inversa de Laplace. Seguidamente, apresentam-se dois exemplos elucidativos, nos quais se procura obter a resposta temporal de sistemas de 2ª ordem sujeitos a diversos tipos de perturbações exteriores.

O primeiro exemplo diz respeito à aplicação de um impulso unitário a um sistema mecânico inicialmente em repouso. A equação diferencial que caracteriza a resposta do sistema é do tipo

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = \frac{1}{m}\delta(t)$$

em que $y(t)$ é a variável no domínio do tempo que caracteriza a resposta do sistema, e ω_n , m e ξ são constantes que caracterizam a frequência natural, o coeficiente de amortecimento e a massa do sistema, e $\delta(t)$ é a função impulso. Aplicando a Transformada de Laplace à equação diferencial, admitindo condições iniciais nulas e atendendo à propriedade da linearidade da Transformada de Laplace e às eq.(3.25) e eq.(3.17), que traduzem a imagem no domínio de Laplace de uma função derivada e da função impulso, obtém-se

$$Y(s)s^2 + 2\xi\omega_n Y(s)s + \omega_n^2 Y(s) = \frac{1}{m}$$

que é uma equação algébrica relativamente a $Y(s)$. Resolvendo a equação em ordem a esta variável resulta

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

A resposta do sistema pode ser agora obtida aplicando a Transformada Inversa de Laplace, voltando a converter para o domínio do tempo o termo $Y(s)$, obtendo-se $y(t)$. Para o efeito pode recorrer-se à Tabela 3.1, após modificar a equação para a seguinte forma mais conveniente

$$Y(s) = \frac{1}{m\omega_n^2} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

obtendo-se imediatamente

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen } \omega_n\sqrt{1-\xi^2}t, \quad 0 < \xi < 1$$

Considerando $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ a solução reduz-se à seguinte expressão

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen } \omega_d t, \quad 0 < \xi < 1$$

Na figura seguinte representa-se graficamente a resposta do sistema, considerando $\xi = 0,5$, $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ e $m=1\text{kg}$.

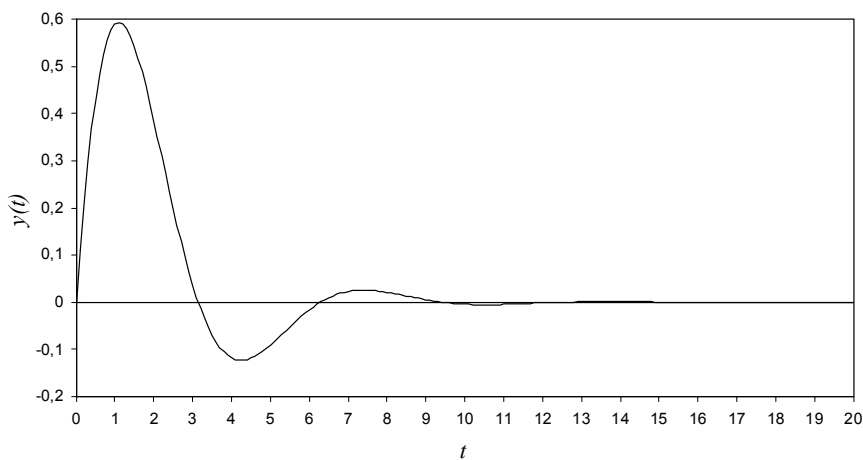


Figura 3.18 – Resposta de um sistema de 2º ordem ao impulso unitário

O segundo exemplo que se apresenta diz respeito à determinação da resposta de um sistema de 2ª ordem a uma acção definida pela função degrau unitário, bastante útil na caracterização qualitativa da resposta transiente como adiante se verá. A equação diferencial que rege o comportamento do sistema sujeito à função $f(t)$ correspondente ao impulso unitário tal como definido na secção 3.3.3 é dada por

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = \frac{1}{m}f(t)$$

admitindo condições iniciais nulas e atendendo à eq.(3.15), a aplicação da Transformada de Laplace permite obter

$$Y(s)s^2 + 2\xi\omega_nY(s)s + \omega_n^2Y(s) = \frac{1}{ms}$$

ou seja

$$Y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

A resposta do sistema no domínio do tempo pode ser obtida calculando a respectiva Transformada Inversa de Laplace, utilizando para o efeito a Tabela 3.1, ficando

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \right], \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \quad (3.79)$$

onde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$$

A resposta do sistema está indicada na Figura 3.19, admitindo como no exemplo anterior, $\xi = 0,5$, $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ e $m=1\text{kg}$.

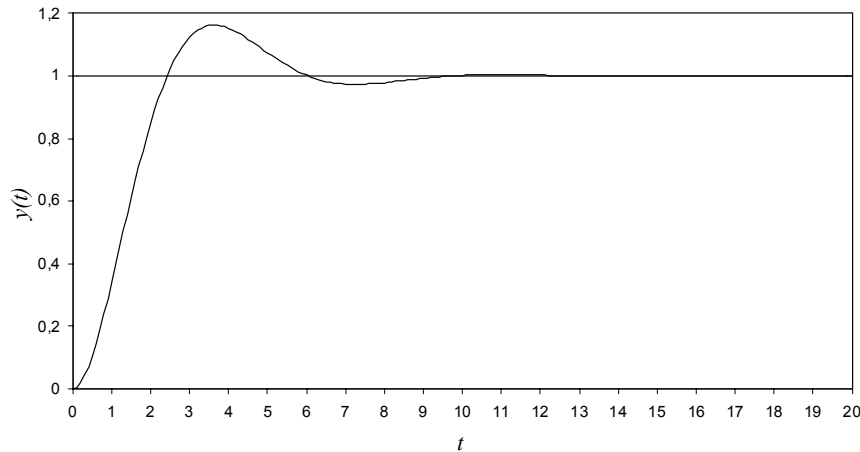


Figura 3.19 – Resposta de um sistema de 2ª ordem a uma acção do tipo degrau unitário

3.5.3 MÉTODO DA SOBREPOSIÇÃO MODAL

Tal como descrito na secção 3.4.1.3, a representação de um sistema dinâmico pode ser obtida por um conjunto de equações diferenciais desacopladas, desde que a matriz de amortecimento seja clássica. Nestas circunstâncias, a resposta do sistema pode ser determinada pela resolução independente de cada uma destas equações, após a qual se procede à sobreposição dos contributos modais de acordo com as coordenadas modais assim encontradas. Este procedimento tem especial interesse no estudo de sistemas mais complexos caracterizados por um elevado número de graus de liberdade, com a vantagem adicional de, na maior parte dos casos, se conseguir suficiente rigor considerando unicamente a contribuição dos primeiros modos de vibração. Seguidamente, descrevem-se os procedimentos deste método, utilizando para o efeito o sistema mecânico indicado da Figura 3.20, no qual a força $u(t)$ corresponde à aplicação do impulso unitário.

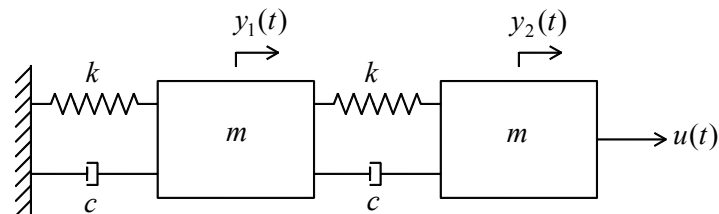


Figura 3.20 – Sistema mecânico de dois graus de liberdade

O sistema de equações de equilíbrio dinâmico é constituído por um conjunto de equações ligadas, obtido de acordo com o descrito na secção 3.4.1.2, dado por

$$M_s \ddot{y}_s(t) + C_s \dot{y}_s(t) + K_s y_s(t) = u_s(t) \quad (3.80)$$

Neste caso, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema valem

$$M_s = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad C_s = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad K_s = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

E o vector solicitação fica

$$u_s(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Verifica-se que a matriz de amortecimento é clássica porque pode ser obtida por combinação linear da matriz de rigidez, logo o sistema pode ser objecto de uma análise modal por desacoplamento das equações de equilíbrio. O primeiro passo deste procedimento consiste na determinação das frequências próprias de vibração e configuração dos modos de vibração respectivos, de acordo com a metodologia indicada na secção 3.2.3, conducente à necessidade de resolução do seguinte problema de valores e vectores próprios

$$(\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s)\phi = 0 \quad (3.81)$$

As frequências próprias de vibração podem ser encontradas resolvendo a equação $|\mathbf{K}_s - \omega^2 \mathbf{M}_s| = 0$, resultando

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{-2k(\sqrt{5}-3)}}{2\sqrt{m}} \quad ; \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{2k(\sqrt{5}+3)}}{2\sqrt{m}}$$

Resolvendo o sistema de equações expresso na eq.(3.81) para cada uma das frequências encontradas, considerando um valor unitário para cada primeira componente modal, obtêm-se os vectores correspondentes à configuração modal de cada modo

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

O passo seguinte consiste no cálculo das massas modais, rigidezes modais, amortecimentos modais e forças modais associados a cada modo de vibração, valores que podem ser calculados a partir das equações indicadas na secção 3.4.1.3, obtendo-se

$$m_1 = \phi_1^T \mathbf{M}_s \phi_1 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right) m \quad ; \quad m_2 = \phi_2^T \mathbf{M}_s \phi_2 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) m$$

$$k_1 = \phi_1^T \mathbf{K}_s \phi_1 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) k \quad ; \quad k_2 = \phi_2^T \mathbf{K}_s \phi_2 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right) k$$

$$c_1 = \phi_1^T \mathbf{C}_s \phi_1 = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) c \quad ; \quad c_2 = \phi_2^T \mathbf{C}_s \phi_2 = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right) c$$

$$f_1 = \phi_1^T \mathbf{u}_s(t) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) u(t) \quad ; \quad f_2 = \phi_2^T \mathbf{u}_s(t) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) u(t)$$

De acordo com o método de análise modal, o sistema de equações ligadas indicado na eq.(3.80) pode ser substituído por um conjunto de equações desacopladas, por intermédio de uma mudança de variáveis adequada. Sabendo que

$$c_i = 2\xi_i m_i \omega_i \quad \text{e} \quad k_i = m_i \omega_i^2$$

as equações desligadas ficam

$$\ddot{\eta}_1(t) + 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1(t) + \omega_1^2 \eta_1(t) = \frac{1}{m_1} f_1(t)$$

$$\ddot{\eta}_2(t) + 2\xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2(t) + \omega_2^2 \eta_2(t) = \frac{1}{m_2} f_2(t)$$

Tal como já demonstrado no exemplo da secção anterior, cada uma destas equações pode ser resolvida isoladamente em ordem a $\eta_1(t)$ e $\eta_2(t)$, considerando $u(t) = \delta(t)$. Subsequentemente, pode obter-se a resposta dinâmica do sistema em cada grau de liberdade a partir da relação $y_s(t) = \Phi \eta(t)$, ficando

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$y_1(t) = \frac{1+\sqrt{5}}{2m_1\omega_{1d}} e^{-\xi_1\omega_1 t} \text{sen } \omega_{1d}t + \frac{1-\sqrt{5}}{2m_2\omega_{2d}} e^{-\xi_2\omega_2 t} \text{sen } \omega_{2d}t, \quad 0 < \xi_1 < 1, \quad 0 < \xi_2 < 1$$

$$y_2(t) = \frac{3+\sqrt{5}}{2m_1\omega_{1d}} e^{-\xi_1\omega_1 t} \text{sen } \omega_{1d}t + \frac{3-\sqrt{5}}{2m_2\omega_{2d}} e^{-\xi_2\omega_2 t} \text{sen } \omega_{2d}t, \quad 0 < \xi_1 < 1, \quad 0 < \xi_2 < 1$$

Na figura seguinte representa-se a resposta do sistema $y_1(t)$ considerando $m=10\text{kg}$, $k=10\text{N/m}$ e $c=0,5\text{kg/s}$.

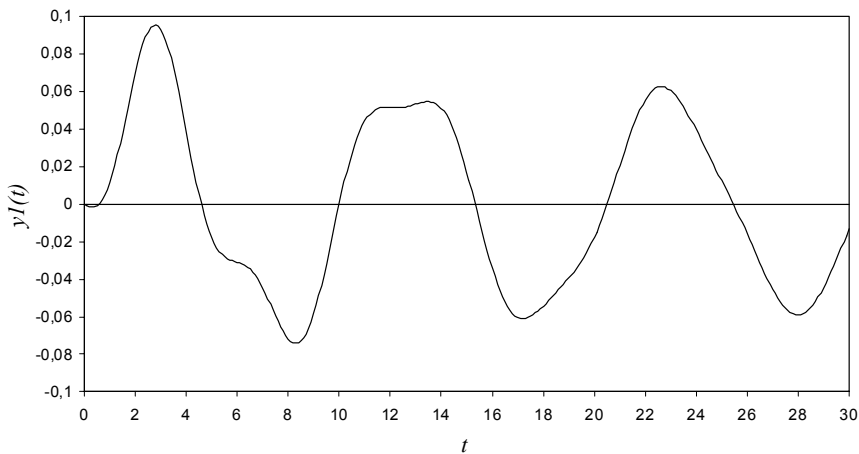


Figura 3.21 – Resposta do 1º grau de liberdade à acção impulso unitário

3.5.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO

Nos modelos desenvolvidos utilizando uma formulação de estado, a obtenção da resposta do sistema no domínio do tempo implica ter de determinar a solução da equação de estado. A solução desta equação diferencial pode ser encontrada recorrendo a diversos métodos, como os métodos clássicos de resolução de equações diferenciais ou através da utilização da Transformada de Laplace. Ao longo deste trabalho tem-se privilegiado a utilização desta segunda opção, pelo que, seguidamente se expõe o procedimento para determinar a solução da referida equação.

Considere-se inicialmente o caso em que não existem entradas no sistema, ou seja, o caso da resposta em decaimento livre. Nesta situação, a equação de estado resulta na seguinte equação homogénea

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3.82)$$

A matriz A tem dimensão $n \times n$, sendo o estado inicial do sistema definido pelo vector $x(0)=x_0$ de dimensão n . Aplicando a transformada de Laplace a cada um dos membros, obtém-se

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

Expressando a equação anterior numa forma mais conveniente, fica

$$(sI - A)X(s) = x_0$$

Assumindo que a matriz A é não singular, pode multiplicar-se ambos os membros da equação por $(sI - A)^{-1}$, resultando

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x_0$$

Resolvida a equação em ordem a $X(s)$, a correspondente imagem no domínio do tempo pode ser encontrada aplicando a Transformada Inversa de Laplace, ou seja

$$x(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} x_0$$

A transformada inversa pode ser determinada recorrendo à eq.(3.20), resultando

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (3.83)$$

A matriz e^{At} designa-se de Matriz de Transição de Estado, $\Lambda(t)$, na medida em que, conhecido o estado inicial do sistema, permite obter o estado num instante posterior $x(t)$ por uma simples transformação linear do vector x_0 .

Considere-se agora o caso em que sistema é solicitado por perturbações exteriores. Nesta situação, a equação de estado é dada pela seguinte equação não homogénea

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.84)$$

Reordenando os termos e multiplicando ambos os membros por e^{-At} fica

$$e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = e^{-At}Bu(t) \quad (3.85)$$

Ora, o lado esquerdo da equação pode ser entendido como sendo a derivada de $e^{-At}x(t)$, pois

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}\dot{x}(t) - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] \quad (3.86)$$

Comparando as equações (3.86) e (3.85), obtém-se

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

Integrando ambos os membros da equação no intervalo $[0, t]$, chega-se a

$$[e^{-At}x(t)]_0^t = e^{-At}x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Sabendo que a avaliação de e^{-At} para $t = 0$ resulta na matriz identidade, a explicitação da equação anterior em ordem a $x(t)$ permite escrever

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.87)$$

Ou, tendo presente a definição da Matriz de Transição de Estado

$$x(t) = \Lambda(t)x_0 + \int_0^t \Lambda(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (3.88)$$

O integral presente nas equações (3.87) ou (3.88) designa-se de integral de convolução, tal como já definido na secção 3.3.5.3. Repare-se também que a resposta do sistema é obtida a partir do somatório de duas componentes distintas. Já foi demonstrado que a parcela $e^{At}x_0$ representa a resposta livre do sistema em face das condições iniciais definidas por x_0 . Por outro lado, a parcela integral depende exclusivamente da solicitação aplicada ao sistema e das matrizes de estado e de entrada, correspondendo à contribuição da resposta forçada para a resposta total do sistema.

Relativamente ao cálculo da Matriz de Transição de Estado e^{At} , pode recorrer-se a diversos processos. O caso mais simples corresponde à situação em que a matriz At é diagonal. Nesta situação, a Matriz de Transição de Estado é também uma matriz diagonal cujo conteúdo corresponde à aplicação directa da função exponencial a cada uma dos elementos da diagonal, ou seja, se

$$At = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{bmatrix}$$

No caso geral, em que a matriz At não é diagonal, uma forma de obter a Matriz de Transição de Estado é diagonalizá-la utilizando o procedimento indicado na secção 3.2.2 e posteriormente ter em conta que $e^{At} = \Phi(e^{\Phi^{-1}A\Phi t})\Phi^{-1}$ [128]. Este processo de diagonalização envolve a determinação dos valores próprios e respectivos vectores próprios da matriz A . Outra forma de calcular a matriz e^{At} consiste em recorrer ao desenvolvimento desta função em série de Taylor, considerando a contribuição de um número adequado de termos de modo a que se obtenha suficiente rigor na aproximação feita. Neste caso, a Matriz de Transição de Estado pode ser obtida através da seguinte relação [33]

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{j!}(At)^j + \cdots \quad (3.89)$$

3.5.5 CARACTERIZAÇÃO QUALITATIVA DA RESPOSTA TRANSIENTE

Em muitas situações práticas, não há interesse em conhecer com rigor a resposta temporal do sistema, mas sim, em caracterizá-la qualitativamente. Nas secções anteriores já se fez referência a alguns parâmetros que, de certa forma, fornecem informação relativamente à forma como o sistema responde a uma solicitação exterior. É o caso da frequência natural e do coeficiente de amortecimento, os quais condicionam claramente o seu comportamento. De facto, conhecendo estes parâmetros, é fácil ter uma ideia de como será a resposta estrutural face, por exemplo, a uma acção impulsiva. Neste caso, o período das oscilações livres depende da frequência natural do sistema e a forma da envolvente é marcada pelo

respectivo coeficiente de amortecimento. Sistemas mais amortecidos têm um decaimento mais pronunciado em termos da amplitude da resposta do que sistemas menos amortecidos.

De forma semelhante, existe um conjunto de outros parâmetros que fornecem uma informação qualitativa relativamente à forma como o sistema responde a determinado tipo de acção exterior, os quais têm particular interesse no estudo e dimensionamento de sistemas de controlo. Estes parâmetros designam-se de tempo de pico, T_p , sobre-elevação percentual, P_u , tempo de subida, T_s , e tempo de assentamento, T_a , e caracterizam a resposta de um sistema de 2ª ordem à acção tipo degrau unitário. Estes parâmetros devem ser calibrados pela actuação da acção de controlo, de tal forma que a resposta transiente do sistema seja suficientemente rápida e amortecida. Na Figura 3.22 representa-se esquematicamente a resposta de um sistema nas condições referidas, normalizada relativamente à resposta estacionária, onde se evidencia o significado de cada um destes parâmetros.

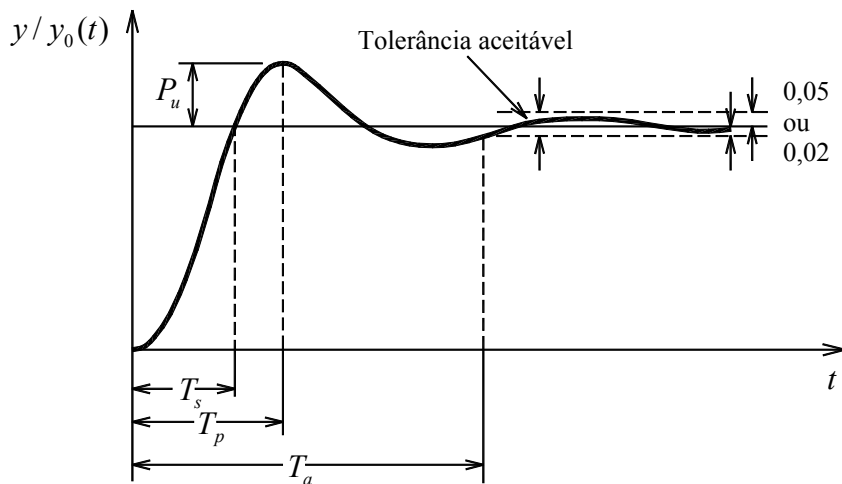


Figura 3.22 – Resposta de um sistema de 2ª ordem a uma acção tipo degrau unitário

O tempo de pico, T_p , é um parâmetro que define o tempo necessário para que um sistema atinja o primeiro máximo após ter ultrapassado o valor estacionário da resposta. Para encontrar este valor, pode recorrer-se à eq.(3.79), derivando-a em ordem a t e igualando-a a zero [96]. Assim, os tempos de ocorrência dos máximos e mínimos locais podem ser conhecidos através da seguinte expressão

$$t = \frac{i\pi}{\omega_d} \quad (3.90)$$

na qual i estabelece o número sequencial do mínimo ou máximo e ω_d é a frequência angular amortecida do sistema. O tempo associado à ocorrência do primeiro máximo, ou seja, o tempo de pico, pode determinar-se considerando na expressão anterior $i = 1$, obtendo-se

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3.91)$$

A sobre-elevação percentual, P_u , quantifica o valor percentual da resposta máxima, associada ao tempo de pico, relativamente ao valor da resposta estacionária. Este parâmetro pode ser facilmente calculado dividindo o valor da resposta do sistema para $t = T_p$ pelo valor obtido para $t = \infty$ utilizando eq.(3.79), chegando-se a uma expressão a qual faz depender a sobre-elevação percentual exclusivamente do coeficiente de amortecimento do sistema

$$P_u = e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})} \times 100 \quad (3.92)$$

O tempo de subida, T_s , pode ser definido como sendo o tempo necessário para que a resposta do sistema passe de 10% a 90%, ou de 5% a 95%, ou de 0% a 100% do valor final. No caso de sistemas de 2ª ordem sub-amortecidos, o tempo de subida de 0% para 100% é normalmente utilizado [100]. Este parâmetro pode ser avaliado recorrendo novamente à eq.(3.79) igualando-a ao valor da resposta estacionária avaliada para $t = \infty$, obtendo-se

$$T_s = \frac{1}{\omega_d} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (3.93)$$

Finalmente, o tempo de assentamento, T_a , é o tempo necessário para que a curva da resposta do sistema não ultrapasse uma faixa definida por 2% ou 5% em torno do valor final, aí permanecendo indefinidamente. Para obter a expressão que quantifica este parâmetro, recorre-se às equações das curvas envolventes da resposta $y/y_\infty(t) = 1 \pm (e^{-\xi\omega_n t} / \sqrt{1-\xi^2})$ representadas na Figura 3.23. Analisando a intersecção destas curvas com os limites impostos pelas faixas anteriormente definidas, é possível estabelecer os seguintes relações para o tempo de assentamento [128]

$$T_a = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (\text{critério de 2\%}) \quad (3.94)$$

ou

$$T_a = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad (\text{critério de 5\%}) \quad (3.95)$$

Conhecidas as expressões que definem os parâmetros caracterizadores da resposta de um sistema nas condições anteriormente descritas, é possível especificar previamente as características da resposta transiente pretendidas e conseqüentemente redefinir as características dinâmicas do sistema, em termos da frequência natural e coeficiente de amortecimento, de tal forma que ele tenha o desempenho desejado. Naturalmente que a alteração destas características dinâmicas deve ser imposta por uma acção de controlo adequada.

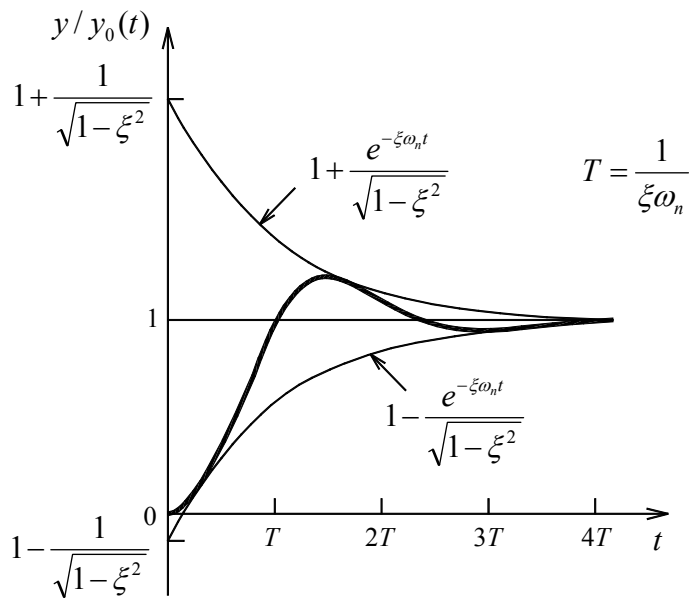


Figura 3.23 – Envolventes da resposta de um sistema de 2ª ordem a uma acção tipo degrau unitário

No entanto, neste processo é necessário ter em conta que pode haver situações de conflito em termos da definição de alguns parâmetros que podem ser antagónicos entre si. É o caso da relação existente entre o tempo de subida e a sobre-elevação percentual, os quais não podem ser diminuídos simultaneamente, ou seja, se um deles aumenta o outro necessariamente diminui. Por outras palavras, não se pode querer ter um sistema que responda rapidamente sem que este ultrapasse com elevada velocidade a resposta desejada, acabando por atingir um valor de pico mais elevado.

EXEMPLO 3.16

Determinar as características dinâmicas de um sistema, em termos da frequência natural e coeficiente de amortecimento, de tal forma que, submetido a uma acção tipo do degrau unitário, demore 0,15 segundos a atingir a resposta máxima e que estabilize ao fim de 4 segundos no interior de uma faixa de erro de 2%.

Neste caso,

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0,15s$$

e

$$T_a = \frac{4}{\xi \omega_n} = 4s$$

Resolvendo o sistema composto por estas duas equações obtém-se $\omega_n = 20\text{rad/s}$ e $\xi = 0,05$.

3.6 ANÁLISE DA RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

3.6.1 INTRODUÇÃO

O conceito de resposta no domínio da frequência está associado à caracterização da resposta estacionária de um sistema na presença de excitações harmónicas. Em sistemas lineares, se a solicitação exterior for constituída por uma acção sinusoidal, a resposta do sistema será igualmente sinusoidal com a mesma frequência, mas, geralmente, de amplitude e fase diferentes. De facto, utilizando a função de transferência do sistema, é possível conhecer para cada frequência de excitação a relação existente entre a amplitude da resposta e a amplitude da acção, bem como a diferença de fase da sinusóide de resposta relativamente à sinusóide caracterizadora da perturbação exterior. Deste modo, os métodos de representação da resposta do sistema no domínio da frequência baseiam-se na representação gráfica da variação destas duas grandezas relativamente à frequência de excitação aplicada.

Em geral, pode recorrer-se a diferentes métodos para a representação desta função conhecida como Função de Resposta em Frequência (FRF), sendo os mais conhecidos o diagrama de Bode e o diagrama de Nyquist, descritos nas secções seguintes. Estes métodos de representação apresentam algumas vantagens relativamente aos métodos utilizados no domínio do tempo, especialmente porque através deles é possível caracterizar experimentalmente a Função de Resposta em Frequência (FRF) de um sistema e consequentemente construir a função de transferência que lhe está associada.

3.6.2 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

A Função de Resposta em Frequência é por definição uma função que traduz a componente estacionária da resposta de um sistema quando sujeito a uma excitação harmónica. Embora ela possa ser obtida através da Transformada de Fourier, sendo esta até mais utilizada na análise de muitos problemas relacionados com sistemas mecânicos, com particular ênfase para as estruturas de Engenharia Civil, esta função pode igualmente ser deduzida a partir da aplicação da Transformada de Laplace. Na verdade, a Transformada de Fourier não é mais que particularização da Transformada de Laplace ao eixo imaginário $s=j\omega$ [19], sendo ω a variável que caracteriza a frequência de excitação.

Para mostrar como se pode obter a FRF a partir da Transformada de Laplace, comece-se por recordar que um número complexo pode ser representado na forma cartesiana $A + jB$, na forma polar $M\angle\theta$, onde $M = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\theta = \arctg(B/A)$, e na forma exponencial $Me^{j\theta}$. Seguidamente, considere-se a função de transferência de um sistema dada na seguinte forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

onde K é uma constante. Considerando a actuação de uma excitação dada por $u(t)=F_0\text{sen}(\omega t)$, cuja imagem do domínio de Laplace, de acordo com a eq.(3.18), vale $U(s)=F_0\omega/(s^2+\omega^2)$, pode encontrar-se resposta do sistema no domínio do tempo calculando a transformada inversa de $Y(s)$. Para tal, pode recorrer-se ao método da expansão em fracções parciais descrito na secção 3.3.6.2, obtendo-se[128],

$$y(t) = c_1 e^{-p_1 t} + \dots + c_n e^{-p_n t} + d_1 e^{-j\omega t} + \bar{d}_1 e^{j\omega t}$$

em que \bar{d}_1 é o conjugado de d_1 . Havendo interesse em conhecer a parcela da resposta estacionária do sistema, apenas os dois últimos termos da equação interessam, pois os restantes termos tendem para zero quando o tempo tende para infinito. Neste caso, a resposta estacionária do sistema fica

$$y_{ss}(t) = d_1 e^{-j\omega t} + \bar{d}_1 e^{j\omega t}$$

Calculando os resíduos d_1 e \bar{d}_1 considerando $s=j\omega$, e procedendo a alguma manipulação matemática, obtém-se a seguinte resposta harmónica [128]

$$y_{ss}(t) = F_0 |G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (3.96)$$

onde

$$\theta = \theta(j\omega) = \text{arctg} \left\{ \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \right\}$$

Ou seja, o conhecimento da função $G(j\omega)$ permite definir a amplitude da resposta estacionária e o respectivo ângulo de fase, provando-se que a resposta em frequência de um sistema definido pela função de transferência $G(s)$ pode ser obtido através da respectiva Função de Resposta em Frequência $G(j\omega)$, ambas relacionadas de acordo com

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s \rightarrow j\omega} \quad (3.97)$$

3.6.3 DIAGRAMA DE BODE

Uma das maneiras de representar graficamente a Função de Resposta em Frequência de um sistema consiste em recorrer ao diagrama de Bode, o qual é composto por dois gráficos separados. Num deles representa-se a amplitude da FRF, usualmente expressa numa escala logarítmica em decibéis, em função da variável ω que traduz a frequência de excitação, expressa numa escala logarítmica simples. No outro representa-se o ângulo de fase medido relativamente à função de excitação. Neste caso, o ângulo é representado numa escala linear e a frequência numa escala logarítmica simples.

A escala logarítmica usualmente adoptada no gráfico das amplitudes utiliza a unidade decibel (dB), a qual, tomando como referência a unidade, é definida de acordo com

$$y(\text{em dB}) = 20 \log y$$

Na situação inversa de se ter a função representada em dB, pretendendo-se obter o correspondente valor numa escala linear utiliza-se a relação

$$y = 10^{y/20} (y \text{ em dB})$$

Considere-se, por exemplo, um sistema mecânico de 1 grau de liberdade cuja função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

ou, fazendo intervir a frequência natural e coeficiente de amortecimento,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/m}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

A correspondente Função de Resposta em Frequência é obtida igualando $s=j\omega$, resultando

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{1/m}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{1/m}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j(2\xi\omega_n\omega)} \quad (3.98)$$

ou ainda

$$G(j\omega) = \frac{1/m}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j2\xi(\omega/\omega_n)} \quad (3.99)$$

Neste caso, a FRF é definida em termos da frequência de excitação normalizada relativamente à frequência natural do sistema. A determinação da componente real e da componente complexa desta função permite obter a correspondente amplitude e ângulo de fase, sendo dados respectivamente por [19]

$$|G(j\omega)| = \frac{1/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (3.100)$$

$$\theta(j\omega) = -\arctg \left[\frac{2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] \quad (3.101)$$

Cada uma destas funções pode ser representada graficamente para diferentes valores do coeficiente de amortecimento, resultando no gráfico de Bode indicado na Figura 3.24, tendo-se para o efeito considerando $m = 1$. A amplitude máxima da resposta do sistema pode ser observada no diagrama de Bode e obtida numericamente através da diferenciação da eq.(3.99). Igualando esta derivada a zero, obtém-se o valor da frequência de excitação conducente à máxima resposta, chegando-se a

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (3.102)$$

O valor do coeficiente de amortecimento do sistema pode também ser encontrado a partir do respectivo diagrama de Bode. Neste caso, é necessário modificar o digrama para escalas lineares e aplicar o método da meia potência [32], que se baseia na determinação das frequências ω_1 e ω_2 , com $\omega_1 < \omega_2$, para as quais o quadrado da amplitude da FRF é igual a metade do seu valor máximo, obtendo-se

$$\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1} \quad (3.103)$$

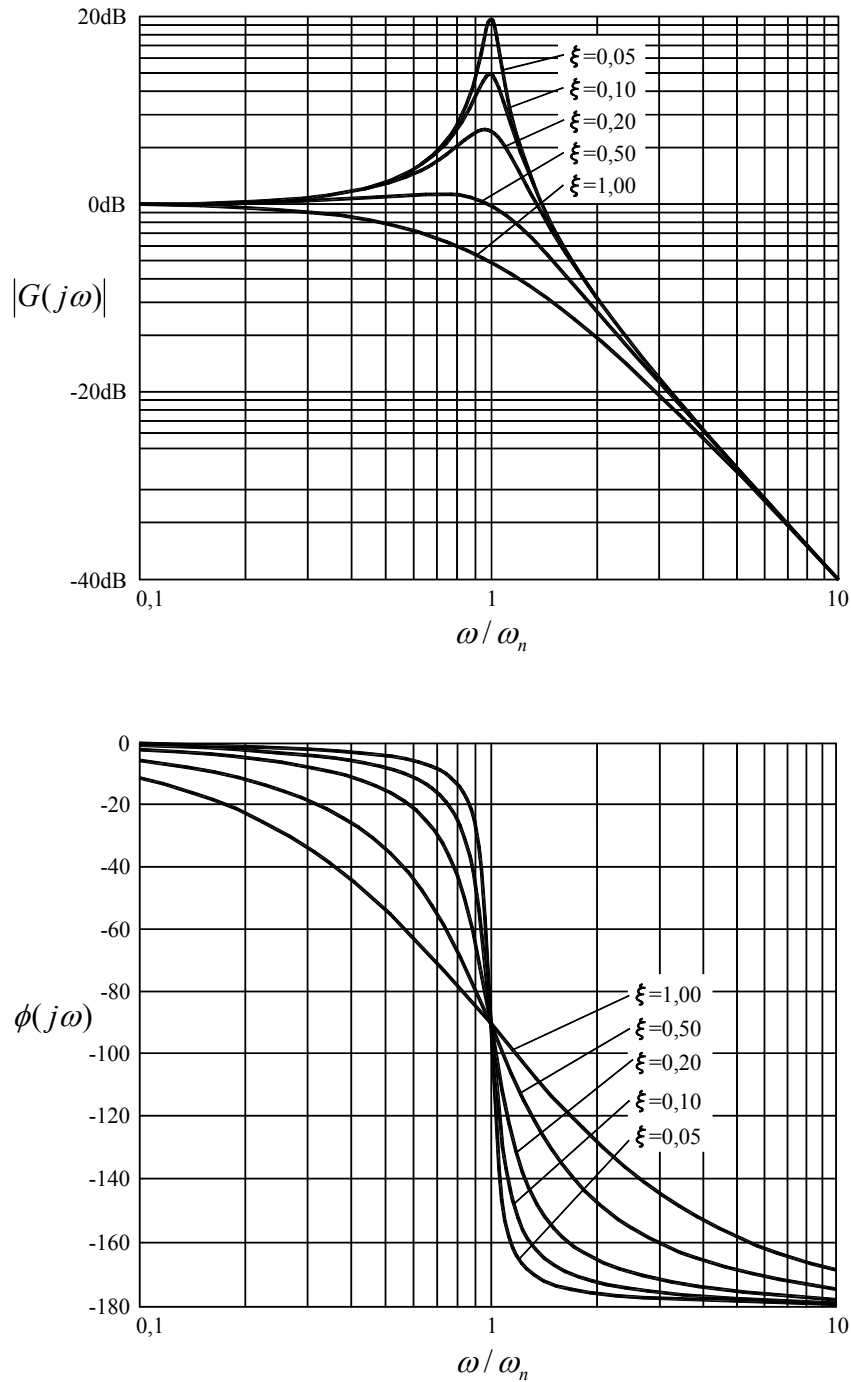


Figura 3.24 – Diagrama de Bode (amplitude e fase) associado à resposta de um sistema de 2ª ordem

A utilização do diagrama de Bode assume particular importância na análise e dimensionamento de sistemas de controlo [100]. De facto, sabendo que a Função de Resposta em Frequência de um sistema pode ser obtida a partir da respectiva função de transferência de acordo com

$$|G(j\omega)| = K \frac{|(s - z_1)| |(s - z_2)| \cdots |(s - z_m)|}{|(s - p_1)| |(s - p_2)| \cdots |(s - p_n)|}$$

então, a amplitude total da resposta pode ser conhecida se se conhecer a amplitude da resposta associada a cada pólo e zero. Este procedimento assume ainda mais interesse quando se trabalha em escalas logarítmicas pois, neste caso, a amplitude logarítmica total da resposta pode ser obtida através da soma das contribuições dos zeros do sistema subtraindo a contribuição dos pólos, conduzindo a um processo mais sugestivo do que utilizar operações de multiplicação ou divisão.

3.6.4 DIAGRAMA DE NYQUIST

Ao contrário do caso anterior, o diagrama de Nyquist, também conhecido como diagrama polar, é composto por um único gráfico, no qual se representa a FRF de um sistema em termos da amplitude da resposta e do respectivo ângulo de fase, fazendo variar a frequência de zero até infinito. Por outras palavras, o diagrama de Nyquist baseia-se na representação gráfica dos vectores que definem o conteúdo da FRF em coordenadas polares, quando a frequência varia de zero até infinito. Neste diagrama, os ângulos positivos têm o sentido contrário aos ponteiros do relógio e marcam-se a partir do eixo real positivo.

Na Figura 3.25 representa-se o diagrama de Nyquist de um sistema obtido nestas condições. Efectivamente, o diagrama de Nyquist pode ser obtido directamente a partir do diagrama de Bode e vice-versa. Para tal, basta converter os valores da amplitude e fase para uma escala linear e posteriormente representá-los graficamente em coordenadas polares, definindo para o efeito uma gama de frequências de interesse. A vantagem de utilizar o diagrama de Nyquist é que se consegue reunir num só gráfico diversa informação sobre o sistema. Em contrapartida, perde-se a noção clara da localização dos pontos de ressonância e níveis de amortecimento a eles associados.

Na Figura 3.26 representa-se o diagrama de Nyquist de um sistema mecânico de 2ª ordem nas mesmas condições do representado na secção anterior através do diagrama de Bode. Neste caso, qualquer que seja o nível de amortecimento do sistema, o diagrama começa no ponto $1 \angle 0^\circ$ e termina em $0 \angle 180^\circ$ à medida que ω cresce de zero até infinito. Se o ângulo de término é 180° , significa que as curvas representadas são tangentes ao eixo real na origem dos eixos. Verifica-se também que, quando a frequência de excitação é igual à frequência natural do sistema, ou seja $\omega = \omega_n$, a amplitude da FRF vale $1/2\zeta$, como aliás se pode concluir através da análise da eq.(3.100), e o ângulo de fase vale -90° , igualmente deduzível a partir da aplicação eq.(3.101). Isto significa que a frequência de excitação para a qual a curva do diagrama intersecta a parte negativa do imaginário vale ω_n , podendo também concluir-se que as curvas exteriores correspondem a níveis de amortecimento mais baixos relativamente às interiores, as quais correspondem a elevados valores do amortecimento.

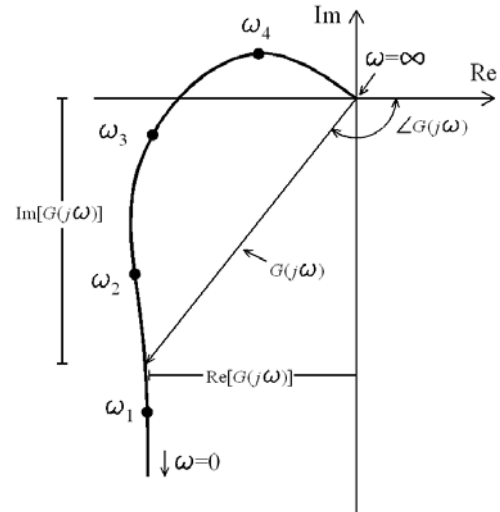


Figura 3.25 – Traçado do Diagrama de Nyquist

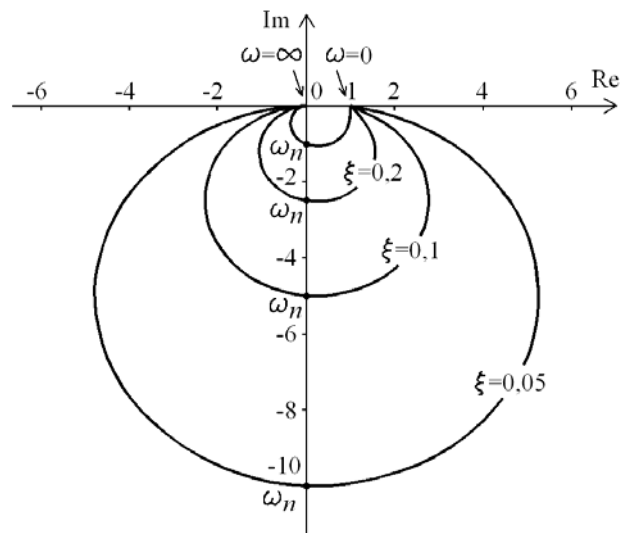


Figura 3.26 – Diagrama de Nyquist associado à resposta de um sistema de 2ª ordem

CAPÍTULO 4

MODELAÇÃO E ANÁLISE DE SISTEMAS DE CONTROLO

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é abordado o tema relativo à modelação e análise de sistemas de controlo activo, recorrendo quer a técnicas clássicas, quer a técnicas de controlo moderno. As técnicas clássicas baseiam-se no estudo de sistemas modelados como tendo uma única entrada e uma saída relacionadas por uma função de transferência. Estas técnicas foram impulsionadas em meados dos anos 20 e anos 30 do século passado por H. Bode e H. Nyquist, no contexto da utilização de sistemas realimentados aplicados a sistemas de telecomunicações e, mais tarde, por W. Evans com o objectivo de resolver problemas no domínio da indústria aeronáutica [96]. O trabalho por eles desenvolvido teve naturalmente por base importantes contribuições de diversos físicos e matemáticos do século XIX, como por exemplo J. Maxwell, E. Routh e A. Lyapunov.

Por outro lado, as técnicas de controlo moderno só mais recentemente começaram a ser divulgadas e implementadas, tendo para isso contribuído o desenvolvimento de ferramentas de cálculo automático verificado nas últimas décadas. Estas técnicas permitem estudar o controlo de sistemas multivariáveis, ou seja, sistemas dotados de várias entradas e várias saídas simultâneas, recorrendo-se para o efeito a modelos baseados numa formulação de estado. No contexto deste trabalho, porém, dar-se-á particular ênfase ao estudo de sistemas com uma só entrada, com a possibilidade de existência de várias saídas.

Como abordagem geral, pode dizer-se que um sistema de controlo tem como objectivo modificar as características dinâmicas de uma determinada estrutura, tendo em vista melhorar o seu desempenho em serviço ou até, quando está em causa a integridade estrutural, aumentar os níveis de segurança para fazer face a um potencial colapso. De facto, através da aplicação de uma acção de controlo é possível reconfigurar as características dinâmicas iniciais da estrutura, em termos de frequências naturais e coeficientes de amortecimento, de tal forma que o sistema adquira uma nova dinâmica mais eficaz tendo em vista os objectivos do controlo.

Nesse sentido, seguidamente é feita uma abordagem ao estudo e análise de sistemas de controlo, a qual fornece ferramentas importantes para a fase de concepção e dimensionamento. Dado tratar-se de uma área muito vasta de assuntos, alguns deles tendo até alguma complexidade [107], o conteúdo deste capítulo deve ser visto numa perspectiva introdutória aos problemas de controlo, tendo como preocupação dominante a selecção dos temas que mais interessam à Engenharia Civil. Além da descrição dos métodos de controlo clássico e moderno já referidos, discutem-se também os problemas relacionados com a estabilidade e é feita uma breve incursão nos sistemas de controlo digitais.

4.2 NOÇÕES BÁSICAS

4.2.1 TIPOS DE MALHA

Os sistemas de controlo podem ser constituídos por sistemas de malha aberta ou de malha fechada. Os sistemas de malha aberta são caracterizados por exercer uma determinada acção sobre uma estrutura, sem contudo receber informação de como realmente esta se está a comportar em face da acção introduzida. Neste caso, é estipulado um determinado objectivo a atingir, designado referência, e em face dele é aplicada a acção de controlo correspondente, de forma a aproximar a resposta do sistema a esse objectivo.

A acção aplicada é condicionada unilateralmente pelo controlador com base na referência, sendo imposta de uma forma “cega”, ou seja, a medição da resposta efectiva do sistema não é considerada na eventual correcção a acção de controlo. O funcionamento de um sistema de malha aberta tal, como descrito, está esquematizado na Figura 4.1. Como exemplo de sistemas de malha aberta, podem referir-se a generalidade dos sistemas de controlo passivo, os quais exercem uma acção sobre a estrutura sem que haja a possibilidade de se ajustarem temporalmente à forma como o sistema está efectivamente a responder.

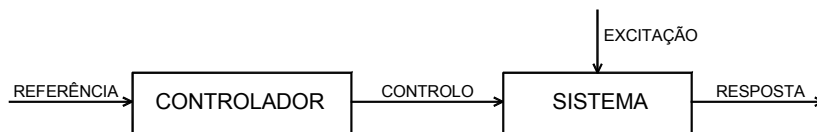


Figura 4.1 – Funcionamento de um sistema de controlo em malha aberta

No caso de um sistema em malha fechada, a acção de controlo é corrigida permanentemente em função da resposta efectiva do sistema, dizendo-se que, neste caso, o sistema é realimentado. Este tipo de esquema permite corrigir os erros inerentes aos sistemas de malha aberta, na medida em que, sendo a resposta da estrutura continuamente medida através de sensores, possibilita que o controlador (também conhecido como compensador) ajuste a acção de controlo de tal forma que o objectivo proposto seja efectivamente alcançado. O funcionamento de um sistema deste género está esquematizado na Figura 4.2.

Os sistemas activos e semi-activos actualmente utilizados no controlo de vibrações em estruturas são um bom exemplo de sistemas realimentados. A vantagem de utilizar sistemas em malha fechada é que, ao contrário dos sistemas de malha aberta, são mais eficazes em face das perturbações exteriores, das variações dos parâmetros estruturais e das não-linearidades impossíveis de evitar em sistemas reais. Em contrapartida, são mais dispendiosos porque necessitam de um nível de tecnologia superior, e são vulneráveis a problemas de estabilidade, ao contrário dos sistemas de malha aberta que são incondicionalmente estáveis.

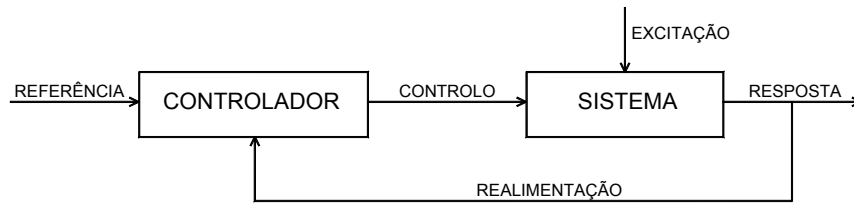


Figura 4.2 – Funcionamento de um sistema de controlo em malha fechada

4.2.2 TIPOS DE REALIMENTAÇÃO

Nos sistemas realimentados, a acção de controlo é determinada tendo em conta a resposta efectiva do sistema, comparando esta com a resposta de referência. A diferença entre a resposta efectiva e a de referência é designada de erro, e é em função do erro que o controlador decide qual a correcção a introduzir ao sistema. Se o erro é nulo, ou seja, se a resposta efectiva é igual à de referência, então o valor do erro é nulo e não é gerada qualquer acção de controlo. Se por outro lado a resposta efectiva se afasta da resposta de referência, então o erro é diferente de zero e o controlador tende a gerar uma acção de controlo que corrija o desvio verificado. Este tipo de actuação é próprio de um sistema com realimentação negativa, porque o erro é obtido por subtracção da resposta efectiva à de referência (ver Figura 4.3). Este tipo de realimentação é certamente o esquema mais utilizado no controlo de sistemas, pois, neste caso, o objectivo é tentar conduzir o sistema uma resposta desejada.

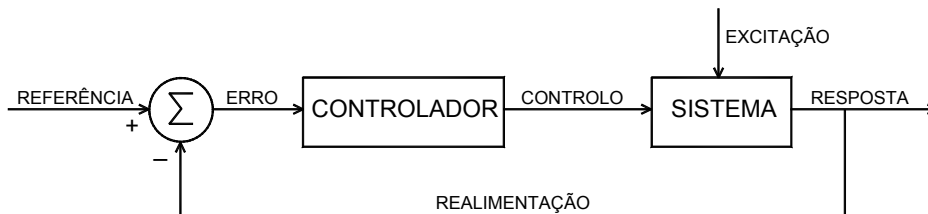


Figura 4.3 – Funcionamento de um sistema de controlo com realimentação negativa

Em contrapartida, se o objectivo do controlo for afastar o sistema de uma determinada resposta em vez de o aproximar, então o que interessa é maximizar o desvio somando a resposta medida à resposta de referência. Neste caso, diz-se que o sistema tem realimentação positiva, estando o respectivo esquema de funcionamento indicado na Figura 4.4.

Este tipo de controlo é menos vulgar que o controlo por realimentação negativa, sendo ainda menos vulgar nos problemas de Engenharia Civil. De facto, em sistemas estruturais interessa aproximar a resposta dinâmica da resposta nula e não afastá-la desta.

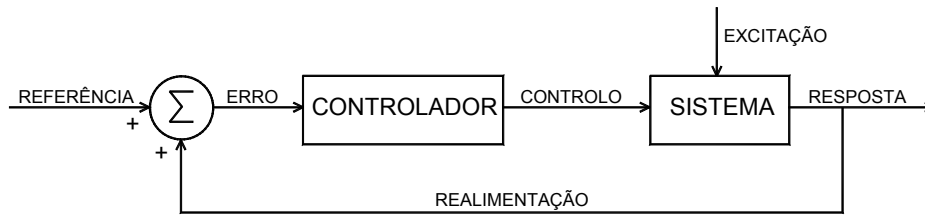


Figura 4.4 – Funcionamento de um sistema de controlo com realimentação positiva

4.2.3 DIAGRAMAS DE BLOCOS

No estudo e análise de sistemas de controlo é particularmente útil recorrer à representação de sistemas utilizando diagramas de blocos. Qualquer sistema dinâmico é susceptível de ser representado através desta técnica. A representação de um sistema por diagrama de blocos pode não ser única, isto é, podem ser construídos diagramas de configurações diferentes associados ao mesmo sistema, bastando, por exemplo, trocar a sequência das operações sem contudo alterar o seu conteúdo.

A vantagem da representação de sistemas através de diagramas de blocos é que num único esquema é possível ter uma imagem visual da sua estrutura global, bastando para isso interligar diversos blocos de acordo com um determinado fluxo de sinais. Estes diagramas podem ser construídos relacionando Transformadas de Laplace de determinadas variáveis, bem como relacionando variáveis de estado ou até variáveis de qualquer outro tipo. De facto, os diagramas já utilizados nas Figuras 4.1 a 4.4 são diagramas de blocos que relacionam as variáveis neles indicadas. No entanto, no contexto do tema em estudo neste capítulo vai dar-se particular atenção às operações realizadas no domínio de Laplace.

Na Figura 4.5 representa-se o princípio subjacente à definição de um bloco, no qual o sinal de entrada $i(t)$ é transformado no sinal de saída $o(t)$ através da correspondente relação no domínio do tempo. Da mesma forma, o sinal de entrada $I(s)$ é transformado no sinal de saída $O(s)$ através da correspondente relação no domínio de Laplace, ou seja, utilizando a respectiva função de transferência $G(s)$, também conhecida como ganho do bloco.

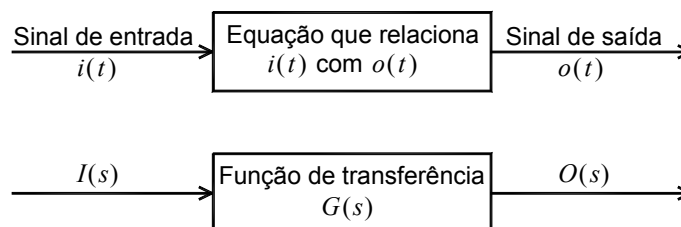


Figura 4.5 – Esquema de um bloco

Neste caso, a saída do bloco obtém-se multiplicando o sinal de entrada pela respectiva função de transferência, isto é, $O(s) = I(s)G(s)$, sendo $G(s) = O(s)/I(s)$. Repare-se que esta operação é condicionada pelo sentido do fluxo indicado nas setas, querendo isto dizer que um diagrama de blocos evidencia explicitamente uma propriedade unilateral.

As operações algébricas podem também ser representadas nos diagramas de blocos através de um círculo no qual convergem todos os fluxos e do qual sai o resultado (ver Figura 4.6). Nesta operação, é necessário indicar claramente o valor do sinal de soma ou subtração e ter o cuidado de antecipadamente converter todas as variáveis de entrada à mesma unidade e dimensão.

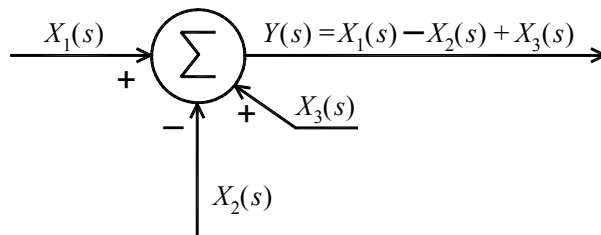


Figura 4.6 – Operação de soma e subtração

Também é possível introduzir pontos de ramificação, permitindo que uma variável possa dirigir-se simultaneamente para vários blocos ou pontos de soma, conforme se indica na figura seguinte

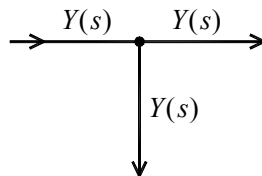


Figura 4.7 – Representação de um ponto de ramificação

Veja-se agora o caso particular em que a função de transferência do bloco corresponde a um ganho constante K . Nestas circunstâncias, a saída do bloco corresponde à multiplicação da função de entrada pelo próprio ganho.

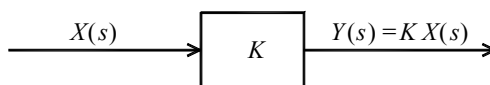


Figura 4.8 – Caso em que o bloco tem um ganho constante

Outro caso de interesse diz respeito a funções de transferência combinadas em série, conforme indicado na Figura 4.9. Nesta situação, a função $U(s)$ é simultaneamente a saída do primeiro bloco e a entrada do segundo. Para se obter a função de transferência global que relaciona $Y(s)/X(s)$, é necessário deduzir o resultado da aplicação isolada de cada um dos blocos e posteriormente combiná-los entre si. Sendo $X(s)$ a entrada no primeiro bloco e $U(s)$ a saída, a respectiva função de transferência vale

$$G_1(s) = \frac{U(s)}{X(s)}$$

Da mesma maneira, a função de transferência do segundo bloco é

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Ora, eliminando $U(s)$ na conjugação das funções anteriores, chega-se à seguinte igualdade

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

que é a função de transferência global do sistema. Como resultado, o diagrama de blocos em série da Figura 4.9 pode ser substituído pelo digrama de um único bloco indicado na Figura 4.10. No caso geral em que o diagrama é constituído por n blocos em série, $G_1(s), G_2(s), \dots, G_n(s)$, este pode ser substituído por um diagrama de um único bloco cuja função de transferência global é dada por

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s) \cdots G_n(s) \quad (4.1)$$

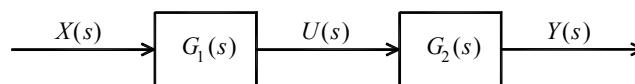


Figura 4.9 – Funções de transferência em série

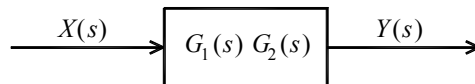


Figura 4.10 – Diagrama equivalente ao de funções de transferência em série

Se, por outro lado, o diagrama de blocos for constituído por um conjunto de funções de transferência em paralelo, então a função de entrada $X(s)$ é a mesma para ambos os blocos, dado só se utilizar um único ponto de ramificação (ver Figura 4.11). Posteriormente, as saídas de cada um dos blocos são somadas, resultando na saída $Y(s)$. Neste caso, a função de transferência global pode ser obtida tendo em

consideração as operações matemáticas envolvidas do diagrama. Assim, pode começar-se por observar que as funções de transferência intermédias, $U_1(s)$ e $U_2(s)$, são dadas respectivamente por

$$U_1(s) = X(s)G_1(s)$$

e

$$U_2(s) = X(s)G_2(s)$$

Por outro lado,

$$Y(s) = U_1(s) + U_2(s)$$

De onde

$$Y(s) = X(s)G_1(s) + X(s)G_2(s)$$

Colocando $X(s)$ em evidência no segundo membro, chega-se à seguinte função de transferência global

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$

Generalizando este resultado para n blocos em paralelo, obtém-se

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_n(s) \quad (4.2)$$

Então, o diagrama da Figura 4.11 pode ser substituído pelo da Figura 4.12 constituído por um único bloco equivalente.

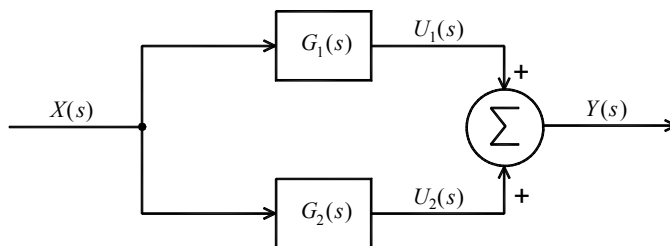


Figura 4.11 – Funções de transferência em paralelo

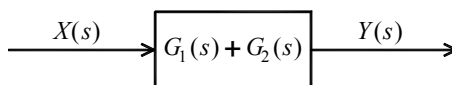


Figura 4.12 – Diagrama equivalente ao de funções de transferência em paralelo

As operações de integração e derivação podem igualmente ser representadas sob a forma de diagramas de blocos, bastando para tal recorrer às respectivas Transformada de Laplace indicadas na secção 3.3.5. No caso da integração, a transformada fica

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

e no caso da derivação

$$L\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s)$$

de onde resultam os seguintes diagramas associados às operações $y(t) = \int f(\tau)d\tau$ e $y(t) = \frac{d}{dt}f(t)$

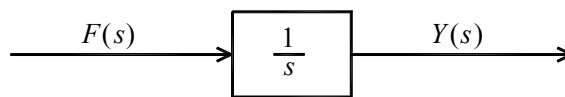


Figura 4.13 – Diagrama associado à operação de integração

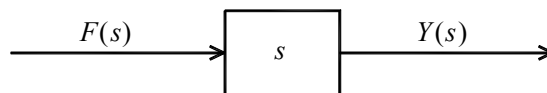


Figura 4.14 – Diagrama associado à operação de derivação

4.2.4 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE UM SISTEMA EM MALHA FECHADA

Considere-se o diagrama de blocos da Figura 4.15 referente ao funcionamento de um sistema em malha fechada. O sistema a controlar é definido pela função de transferência $G_c(s)$ e o controlador pela função de transferência $G_e(s)$. O sinal de controlo gerado $U(s)$ funciona como entrada no sistema o qual responde com a saída $Y(s)$. Situada no ciclo de realimentação, $H(s)$ é a função de transferência do sensor que permite converter o sinal de saída, que é normalmente uma grandeza física, na grandeza da variável de saída. Deste modo, a saída do sistema pode ser comparada com a referência $R(s)$, que representa o objectivo do controlo em termos da resposta desejada, dando origem à variável erro $E(s)$ também conhecida como erro actuante.

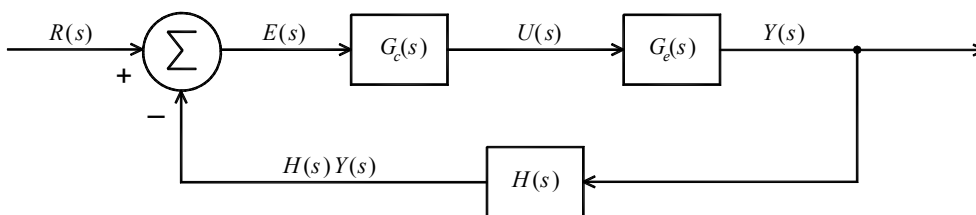


Figura 4.15 – Funcionamento de um sistema em malha fechada

O diagrama anterior pode ser simplificado através da substituição das funções de transferência $G_c(s)$ e $G_e(s)$ ligadas em série, pela função equivalente respectiva. Neste caso pode constatar-se que

$$U(s) = E(s)G_c(s)$$

e

$$Y(s) = U(s)G_e(s)$$

Eliminando a variável $U(s)$ nas igualdades anteriores, conclui-se que

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G_c(s)G_e(s)$$

Por conseguinte, o diagrama da Figura 4.15 pode alternativamente ser representado na seguinte configuração

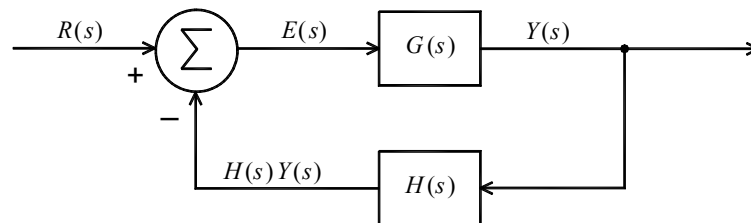


Figura 4.16 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada

Da análise deste último diagrama, pode observar-se que a saída do sistema é dada por

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

Por outro lado, a variável erro vale

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

Eliminado $E(s)$ das equações anteriores, obtém-se

$$Y(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

Explicitando a igualdade anterior em ordem a $Y(s)$, fica

$$Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s)$$

resultando finalmente em

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.3)$$

que é a função de transferência de um sistema em malha fechada, a qual relaciona a resposta medida do sistema com a resposta de referência, admitindo a ausência de perturbações exteriores. O produto $G(s)H(s)$ corresponde à função de transferência em malha aberta, pois, não existindo realimentação no ciclo de controlo, a resposta do sistema medida pelo sensor é obtida pela actuação do controlador não realimentado sobre a estrutura.

A função de transferência em malha fechada considerando a aplicação de perturbações exteriores poderia ser igualmente deduzida somando algebricamente a acção de controlo à acção exterior. No entanto, este caso não tem tanto interesse para o estudo de sistemas de controlo, pois, como se verá adiante, a acção de controlo modifica internamente as características dinâmicas do sistema, o que não sucede no caso da acção exterior.

4.3 CONTROLADORES BÁSICOS

4.3.1 CONTROLADOR PROPORCIONAL

O controlador proporcional baseia-se simplesmente na aplicação de uma entrada no sistema proporcional ao erro. A lei de controlo subjacente a este procedimento é dada por

$$u(t) = K_p e(t) \quad (4.4)$$

sendo K_p uma constante. No domínio de Laplace esta igualdade fica

$$U(s) = K_p E(s) \quad (4.5)$$

o que significa que a acção deste controlador corresponde à aplicação de um ganho constante. Como resultado, a função de transferência do controlador, que relaciona a entrada no controlador com a respectiva saída, fica

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (4.6)$$

O efeito da utilização de um controlador num sistema mecânico traduz-se no aumento da sua rigidez, isto porque ao ser gerada uma força proporcional ao erro, está-se na prática a introduzir uma força proporcional ao deslocamento da estrutura. De facto, a variável erro é definida subtraindo-se a resposta medida à resposta de referência. Ora, numa estrutura real o objectivo do controlo é anular a sua resposta dinâmica, o que corresponde a dizer que a resposta de referência é a resposta nula. Então, neste caso, o erro vale

$$e(t) = r(t) - y(t) = 0 - y(t) = -y(t) \quad (4.7)$$

Se se substituir este resultado na equação (4.4), a lei de controlo proporcional passa a ser dada por

$$u(t) = K_p e(t) = -K_p y(t) \quad (4.8)$$

Considere-se agora a equação de equilíbrio dinâmico de um sistema de 1 grau de liberdade sujeito a uma acção exterior $f(t)$ e a uma força de controlo $u(t)$

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) + u(t) \quad (4.9)$$

Substituindo nesta equação o valor da acção de controlo dado na eq.(4.8) e colocando a variável $y(t)$ em evidência, resulta

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + (k + K_p)y(t) = f(t) \quad (4.10)$$

ou seja, o ganho do controlador proporcional traduz-se num aumento da rigidez do sistema, podendo somar-se algebricamente à rigidez passiva da estrutura. Note-se que, utilizando um controlador proporcional é igualmente possível diminuir a rigidez do sistema bastando para isso utilizar uma realimentação positiva. Desta análise, pode concluir-se que a través da variação do ganho atribuído a um controlador proporcional, é possível modificar a frequência natural de um determinado oscilador, sendo inclusivamente possível definir qual o ganho necessário para alterar a frequência natural para um determinado valor predefinido.

4.3.2 CONTROLADOR DERIVATIVO

No caso do controlador derivativo, a entrada aplicada ao sistema é proporcional à derivada do erro, sendo a respectiva lei de controlo dada por

$$u(t) = K_d \dot{e}(t) \quad (4.11)$$

sendo K_d uma constante. Aplicando a Transformada de Laplace a cada membro resulta

$$U(s) = K_d s E(s) \quad (4.12)$$

o que é equivalente a dizer que a função de transferência deste controlador vale

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_d s \quad (4.13)$$

Tal como no caso anterior, a introdução de um controlador derivativo integrado no sistema de controlo de um sistema mecânico, altera as suas características dinâmicas. De facto, sendo a resposta de referência nula, a acção de controlo traduz-se na aplicação de uma força proporcional à velocidade, o que é equivalente a introduzir amortecimento adicional no sistema. A quantificação desse amortecimento pode ser avaliada começando-se por constatar que a derivada do erro, de acordo com a eq.(4.7) vale

$$\dot{e}(t) = -\dot{y}(t) \quad (4.14)$$

conduzindo à seguinte força de controlo

$$u(t) = K_d \dot{e}(t) = -K_d \dot{y}(t) \quad (4.15)$$

A substituição deste resultado na eq.(4.9) leva a concluir que

$$m\ddot{y}(t) + (c + K_d)\dot{y}(t) + ky(t) = f(t) \quad (4.16)$$

Neste caso, a constante de ganho associada ao controlador derivativo pode ser algebricamente somada ao amortecimento passivo já existente na estrutura, sendo deste modo possível determinar qual o valor do ganho que conduz a um aumento predefinido do amortecimento estrutural.

4.3.3 CONTROLADOR INTEGRAL

O efeito que um controlador integral produz sobre um sistema é de introduzir uma entrada proporcional ao integral do erro ao longo do tempo. A lei respectiva é

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (4.17)$$

A função de transferência deste controlador obtém-se aplicando a Transformada de Laplace, ficando

$$U(s) = K_i \frac{1}{s} E(s) \quad (4.18)$$

ou seja,

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_i \frac{1}{s} \quad (4.19)$$

A utilização deste controlador tem interesse nos casos em que se pretende impor um deslocamento à estrutura diferente do valor estático, razão pela qual não é tão utilizado nos problemas de Engenharia Civil como os anteriores. Salvo algumas situações especiais, a resposta estrutural pretendida é quase

sempre a resposta nula, principalmente quando se trata de problemas de vibrações. No entanto, com o objectivo de realçar um caso em que este controlador poderia ser necessário, seguidamente descreve-se um exemplo envolvendo uma viga como a representada na Figura 4.17, a qual se encontra submetida ao seu peso próprio. A deformação a meio vão é a variável erro que se pretende controlar, sendo a resposta de referência o deslocamento nulo.

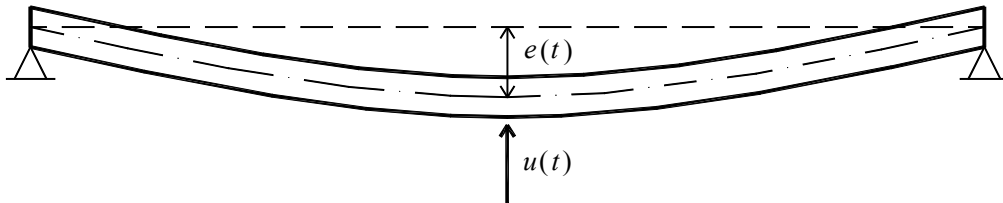


Figura 4.17 – Viga deformada pelo seu peso próprio sujeita a uma acção de controlo

A evolução temporal do erro e da força de controlo estão indicados na Figura 4.18, onde se pode verificar que a acção de controlo aplicada em cada instante é proporcional ao integral do erro calculado até aquele momento, correspondendo à área A_1 do gráfico multiplicada pela constante K_i . Inicialmente a força é aplicada energeticamente porque o erro também é máximo, mas, à medida que o erro diminui, a força de controlo aumenta lentamente até se atingir a resposta desejada. Na situação de equilíbrio, a força aplicada é a estritamente necessária para manter o sistema na posição de referência. Naturalmente que a tempo de convergência será tanto menor quanto maior for o ganho K_i , havendo necessidade de, em face do problema, calibrar correctamente esta constante.

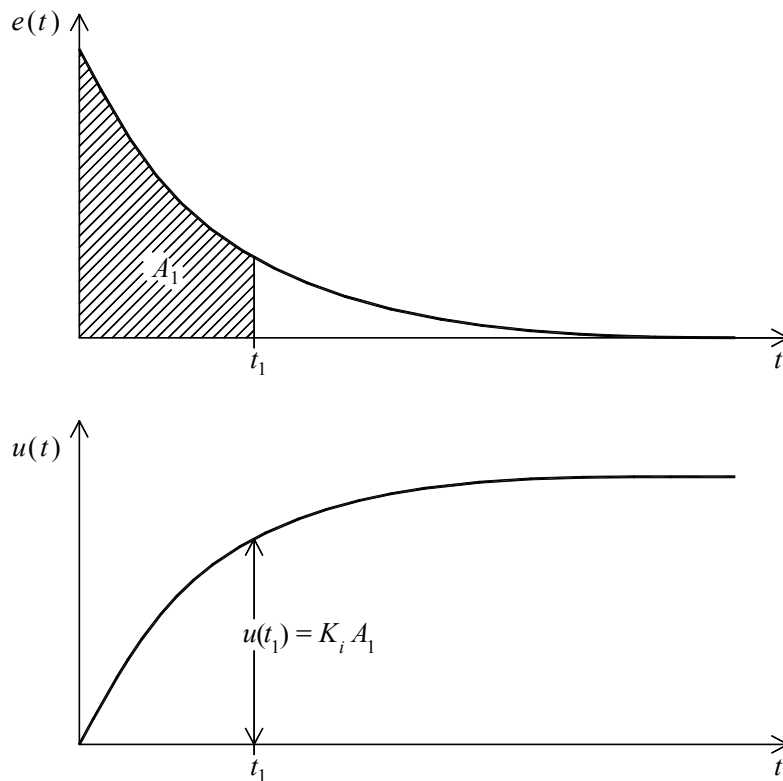


Figura 4.18 – Evolução temporal do erro e da força de controlo

4.3.4 CONTROLADOR PROPORCIONAL–INTEGRAL–DERIVATIVO

O controlador Proporcional-Integral-Derivativo, vulgarmente conhecido pelas suas iniciais PID, resulta da conjugação simultânea dos três tipos básicos de acções de controlo descritas anteriormente. Estima-se que mais de cinquenta por cento das aplicações de sistema de controlo em todo o mundo utilizem este controlador [100], devido à sua fácil implementação, ajuste e robustez. A lei de controlo obtém-se somando a contribuição dos diversos controladores mais simples, ou seja

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \dot{e}(t) \quad (4.20)$$

sendo a correspondente função de transferência dada por

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s \quad (4.21)$$

Alternativamente, esta função pode ser expressa em função dos parâmetros $K=K_p$, $T_i=K/K_i$ e $T_d=K_d/K$, tomando a forma

$$G_c(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (4.22)$$

Na Figura 4.19 representa-se o diagrama de blocos respeitante a este controlador. Salienta-se o facto de em muitos casos se fazerem combinações diferentes das acções básicas de controlo, sendo vulgar a utilização de controladores do tipo Proporcional–Derivativo (PD) ou Proporcional–Integral (PI). Nestas situações, a função de transferência pode ser obtida a partir do controlador PID, anulando a constante de ganho respectiva.

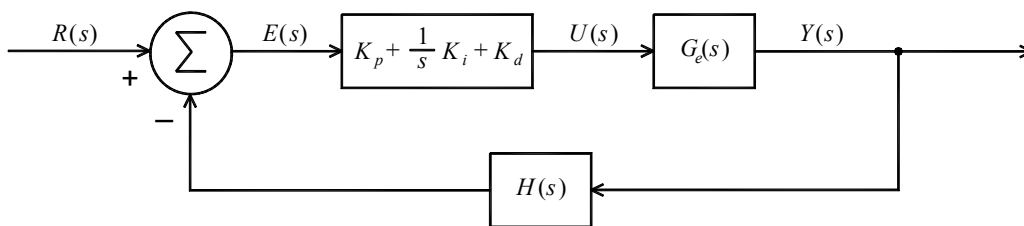


Figura 4.19 – Diagrama de blocos do controlador PID

EXEMPLO 4.1

Pretende-se dimensionar um controlador de tal forma que um sistema mecânico de um grau de liberdade de massa $m = 1\text{kg}$, $k = 25\text{N/m}$ e $c = 0,1\text{Ns/m}$, caracterizado por uma frequência natural de 5rad/s e por um coeficiente de amortecimento de 1% , para que, por via de uma acção de controlo, o sistema passe a ter uma frequência natural de 7rad/s e um coeficiente de amortecimento de 2% .

Neste caso, é suficiente utilizar um controlador Proporcional-Derivativo, cujos ganhos K_p e K_d afectam a equação de equilíbrio dinâmico da seguinte maneira

$$\ddot{y}(t) + (0,1 + K_d)\dot{y}(t) + (25 + K_p)y(t) = 0$$

A frequência natural do sistema pode ser encontrada através da seguinte expressão

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25 + K_p}{1}}$$

Quando o ganho K_p do controlador é zero, o sistema tem a sua frequência natural original de 5rad/s, sendo necessário um valor de $K_p = 24$ para que a frequência se eleve para 7rad/s. Nesta condições, o coeficiente de amortecimento do sistema pode ser obtido através de

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{0,1 + K_d}{14}$$

sendo necessário considerar um ganho $K_d = 0,18$ para o coeficiente de amortecimento seja de 2%.

4.3.5 SINTONIZAÇÃO DE CONTROLADORES PID

4.3.5.1 MÉTODOS DE SINTONIZAÇÃO

Na utilização de controladores PID é necessário determinar as constantes de ganho K_p , K_i e K_d de forma a conseguir o desempenho desejado do sistema de controlo. Em muitas situações, essas constantes podem ser determinadas explicitamente através de cálculos ou simulações numéricas. Como exemplo disso, na secção anterior expôs-se uma situação na qual os ganhos foram estabelecidos tendo por base a imposição de uma determinada dinâmica para o sistema. Porém, em muitos casos práticos não se dispõe de nenhum modelo numérico que permita avaliar com rigor esses ganhos, tornando-se necessário recorrer a métodos expeditos de sintonização que permitam calibrar o sistema “in-loco”.

Quando o objectivo é a alteração da frequência ou do amortecimento, os ganhos do controlador podem ser ajustados manualmente de uma forma interactiva com a estrutura, isto é, vão-se ajustando gradualmente os ganhos com base na resposta estrutural, até que se atinja a dinâmica pretendida. Em muitos outros casos porém, os objectivos não estão muito bem quantificados, pretendendo-se apenas melhorar o desempenho do sistema em face das perturbações exteriores aplicadas. Nesse sentido, as secções seguintes descrevem dois dos mais conhecidos métodos de sintonização que podem ser utilizados para o efeito, a saber, o primeiro e o segundo métodos de Ziegler-Nichols. Note-se que qualquer que seja o procedimento utilizado para a determinação dos ganhos do controlador, na prática será sempre necessário um ajuste “fino” desses parâmetros, fazendo-os variar ligeiramente na tentativa de os aproximar dos seus valores óptimos.

4.3.5.2 PRIMEIRO MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS

O primeiro método de Ziegler-Nichols baseia-se na forma em “S” da resposta experimental que determinados sistemas exibem na presença de uma acção correspondente ao degrau unitário, tal como se mostra na Figura 4.20. Se o sistema não possuir a dita resposta em forma de “S”, então este método não pode ser utilizado. Primeiro, começa-se por definir os parâmetros L e T , tal como se sugere na figura. Para o efeito, é necessário traçar uma linha tangente à curva da resposta no seu ponto de inflexão e encontrar a intersecção desta recta com o eixo da variável tempo e com a recta que caracteriza a resposta estacionária do sistema. Conhecidos estes parâmetros, Ziegler e Nichols [100] propuseram que se sintonizasse o sistema com base nos valores de K_p , T_i e T_d estipulados na Tabela 4.1, em função do tipo de controlador utilizado.

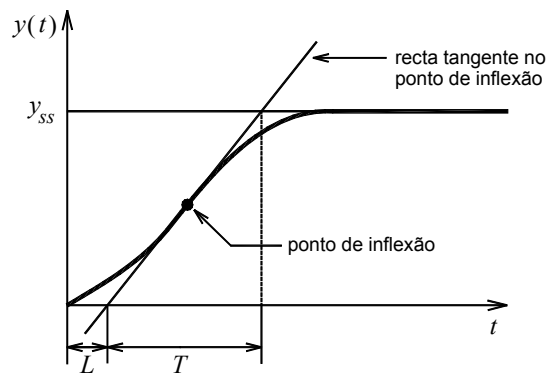


Figura 4.20 – Definição dos parâmetros L e T

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0,9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0,3}$	0
PID	$1,2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0,5L$

Tabela 4.1 – Valores de K_p , T_i e T_d aconselhados (primeiro método de Ziegler-Nichols)

4.3.5.3 SEGUNDO MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS

Em alternativa ao primeiro método, o segundo método de Ziegler-Nichols permite igualmente sintonizar um controlador PID com base na resposta experimental medida. Este método chega a ser até mais utilizado que o primeiro na medida em que não tem algumas das limitações já referidas, em particular a necessidade da resposta do sistema ter a forma de “S”. Este facto faz com que este método de

Ziegler-Nichols seja aplicável a uma gama mais alargada de problemas de controlo, quer o sistema apresente uma resposta dinâmica em forma de “S” ou não.

Para sintonizar um controlador PID por este segundo método, é necessário inicialmente igualar $T_i = \infty$ e $T_d = 0$, ou seja, começar por utilizar um controlador Proporcional. Seguidamente, o sistema é colocado numa posição diferente do ponto de equilíbrio e começa-se a testar o dispositivo de controlo utilizando valores crescentes do ganho K_p , desde zero até um determinado valor crítico. Este valor crítico, designado K_{cr} , é encontrado a partir do momento em que o sistema apresente oscilações harmónicas sustentadas, indiciadoras de uma situação de instabilidade eminente, sendo o período de oscilação deste movimento definido por T_{cr} . Encontrados os valores de K_{cr} e T_{cr} , os ganhos K_p , T_i e T_d a adoptar para o controlador PID podem ser determinados a partir da Tabela 4.2 [100]. A única limitação da aplicação do segundo método de Ziegler-Nichols é que tem de existir um ganho K_p para o qual o sistema se torna instável. Se tal não acontecer, o método não pode ser utilizado.

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0,5K_{cr}$	∞	0
PI	$0,45K_{cr}$	$\frac{1}{1,2}T_{cr}$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5T_{cr}$	$0,125T_{cr}$

Tabela 4.2 – Valores de K_p , T_i e T_d aconselhados (segundo método de Ziegler-Nichols)

4.4 MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

4.4.1 INTRODUÇÃO

Nesta secção, apresenta-se um dos métodos mais utilizados para dimensionar sistemas de controlo em termos da especificação da resposta transiente pretendida, bem como para analisar a sua estabilidade. O método do lugar das raízes tem como base a representação gráfica dos pólos do sistema em malha fechada quando se faz variar o ganho de zero até infinito, tendo sido proposto por W. Evans no ano de 1948 [96]. Até aquela data, era frequente o recurso a métodos baseados na representação de Bode e de Nyquist. Embora esses métodos continuem a ser utilizados no estudo de muitos sistemas, o diagrama do lugar das raízes introduziu uma ferramenta muito poderosa de análise e dimensionamento, sobretudo devido ao carácter mais intuitivo atribuído a este processo, aliado ao facto de se poder estudar num só diagrama sistemas de ordens elevadas. Este método permite facilmente tirar conclusões sobre aspectos qualitativos do desempenho do sistema e, tendo por base algumas ferramentas actuais de visualização gráfica, possibilita um dimensionamento rápido e eficaz.

4.4.2 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES

4.4.2.1 REPRESENTAÇÃO VECTORIAL DE NÚMEROS COMPLEXOS

Antes de se entrar na exposição do método propriamente dito, apresentam-se seguidamente algumas considerações sobre o modo de como se pode representar graficamente um número complexo. Já foi referido anteriormente que um número complexo pode ser expresso em vários tipos de coordenadas, sendo os mais comuns em coordenadas cartesianas na forma $A+jB$, ou em coordenadas polares na forma $M\angle\theta$, onde $M = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\theta = \arctg(B/A)$. Se um número complexo for substituído numa determinada função $F(s)$, então essa função também terá um valor complexo passível de ser representado graficamente. Se, por exemplo, na função $F(s)=(s+a)$ se substituir $s=A+jB$, resulta o valor $F(s)=(a+A)+jB$, o qual pode ser representado tal como indicado na Figura 4.21a, ou, se se tiver em conta que a função tem um zero em $-a$, pode alternativamente ser representado como na Figura 4.21b. Neste caso, o vector sofre uma translação para a esquerda, ficando com a sua origem no zero e com a sua extremidade no ponto $s=A+jB$.

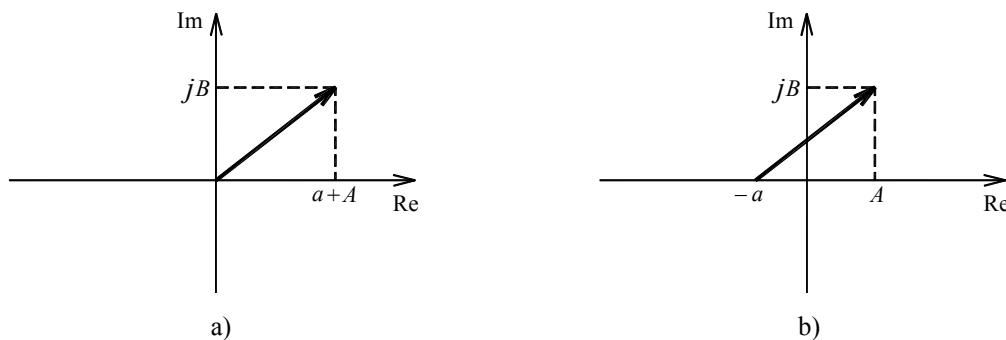


Figura 4.21 – a) Representação de um número complexo; b) Representação alternativa

Se a função $F(s)$ for mais complicada, isto é, se for traduzida pelo quociente de dois polinómios do tipo

$$F(s) = \frac{\prod_{a=1}^m (s - z_a)}{\prod_{b=1}^n (s - p_b)}$$

a substituição da variável s por um número complexo resulta igualmente noutra número complexo. Neste caso, o numerador da função pode ser visto como uma multiplicação de várias funções do tipo daquela que foi representada anteriormente na Figura 4.21b, sendo composta por um conjunto de vectores com origem no zero z_a de cada termo e com extremidade no ponto s . O mesmo se passa com o denominador da função, composto pela multiplicação de um conjunto de números complexos cuja representação gráfica isolada corresponde a um vector com origem no pólo respectivo p_b tendo a extremidade em s .

A magnitude M do número complexo resultante da avaliação da função completa em s pode ser obtida a partir da magnitude do número complexo traduzido por cada termo em numerador e denominador, isto é, pela magnitude de cada vector que lhe está associado, tendo naturalmente em atenção à aritmética definida pela própria função, ou seja

$$M = \frac{\prod_{a=1}^m |(s - z_a)|}{\prod_{b=1}^n |(s - p_b)|} \quad (4.23)$$

Nesta igualdade, $|(s - z_a)|$ é a norma do vector que liga cada zero a s , e $|(s - p_b)|$ é a norma do vector que liga cada pólo igualmente a s . Por outro lado, o ângulo θ que lhe está associado vale [96]

$$\theta = \sum_{a=1}^m \angle(s - z_a) - \sum_{b=1}^n \angle(s - p_b) \quad (4.24)$$

em que $\angle(s - z_a)$ é o ângulo definido pelo vector que liga cada zero z_a a s , e $\angle(s - p_b)$ é o ângulo definido pelo vector que liga cada pólo p_b a s , ambos medidos no sentido anti-horário a partir da parte positiva do eixo real.

EXEMPLO 4.2

Pretende-se avaliar o valor da função $F(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s+3)}$ no ponto $s = -2 + j5$.

Para resolver este problema, pode recorrer-se à representação gráfica dos vectores indicados na seguinte figura

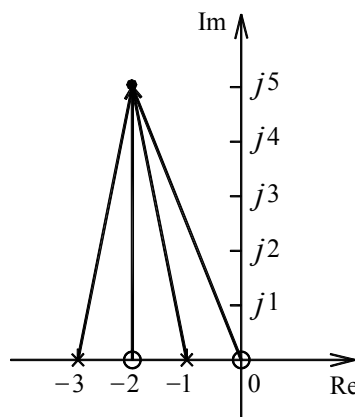


Figura 4.22 – Representação dos vectores que ligam os pólos e os zeros a um ponto s

Neste gráfico, os zeros da função estão assinalados com um círculo e os pólos com uma cruz, conforme é habitual no estudo de sistema de controlo. Os vectores que ligam os zeros a s valem $\sqrt{29} \angle 111,8^\circ$ e

$5\angle 90^\circ$, e os que ligam os pólos a s valem $\sqrt{26}\angle 101,3^\circ$ e $\sqrt{26}\angle 78,7^\circ$. As equações (4.23) e (4.24) permitem obter a amplitude e o ângulo do número complexo resultante, ficando

$$M\angle\theta = \frac{\sqrt{29} \times 5}{\sqrt{26} \times \sqrt{26}} \angle (111,8^\circ + 90^\circ) - (101,3^\circ + 78,7^\circ) = 5 \frac{\sqrt{29}}{26} \angle 21,8^\circ$$

4.4.2.2 DETERMINAÇÃO DOS PÓLOS E ZEROS

A determinação dos pólos e dos zeros das funções de transferência em malha fechada e malha aberta de um sistema é uma tarefa indispensável para a definição do diagrama do lugar das raízes. A determinação dos pólos e zeros da função de transferência em malha aberta não oferece qualquer dificuldade na medida em que, conhecidos individualmente os pólos e zeros das funções $G(s)$ e $H(s)$, os pólos e zeros de $G(s)H(s)$ são dados pelo somatório dos pólos e zeros de cada uma das funções.

No caso da função de transferência em malha fechada esta tarefa não é tão directa. Para o demonstrar, considere-se novamente a função de transferência em malha fechada de um sistema já deduzida na secção 4.2.4, na qual o ganho K aparece claramente explicitado

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad (4.25)$$

As funções de transferência $G(s)$ e $H(s)$, associadas à estrutura com controlador e ao sensor, podem ser escritas em termos do seu conteúdo em numerador e denominador, na seguinte forma

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \quad \text{e} \quad H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

Logo, a função de transferência em malha fechada pode ser expressa da seguinte maneira

$$T(s) = \frac{K \frac{N_G(s)}{D_G(s)}}{1 + K \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \frac{N_H(s)}{D_H(s)}}$$

resultando em

$$T(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)} \quad (4.26)$$

Ou seja, os zeros de $T(s)$ são dados pelo zeros da função $G(s)$ e pelos pólos de $H(s)$ e não dependem do ganho K , logo podem ser imediatamente conhecidos. Já os pólos de $T(s)$ dependem de K e não podem ser conhecidos sem que primeiro se proceda à expansão do denominador e posteriormente à determinação das suas raízes.

4.4.2.3 DEFINIÇÃO DO DIAGRAMA

O método do lugar das raízes tem como base a representação gráfica dos pólos do sistema em malha fechada, quando se faz variar o ganho do controlador de zero até infinito. Como resultado, obtém-se uma sucessão de pontos associados a cada pólo, os quais, no limite, podem ser substituídos por uma linha orientada, a qual define a evolução do posicionamento dos pólos do sistema em malha fechada com o aumento do ganho.

Observe-se o exemplo do modelo mecânico de 1 grau de liberdade indicado na Figura 4.23, o qual está sujeito a uma acção de controlo Proporcional, ou seja, $u(t)=Ky(t)$. Considere-se que $m=1\text{kg}$, $k=25\text{N/m}$ e $c=1\text{Ns/m}$, e admita-se que a função de transferência do sensor vale $H(s)=1$, ou seja, que o sensor tem sensibilidade unitária. Este sistema de controlo está convenientemente representado no diagrama de blocos indicado na Figura 4.24.

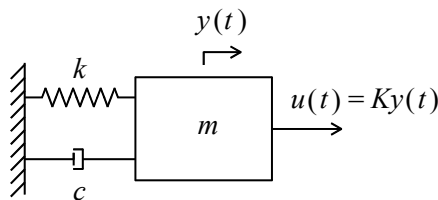


Figura 4.23 – Sistema de 1 grau de liberdade com controlador Proporcional

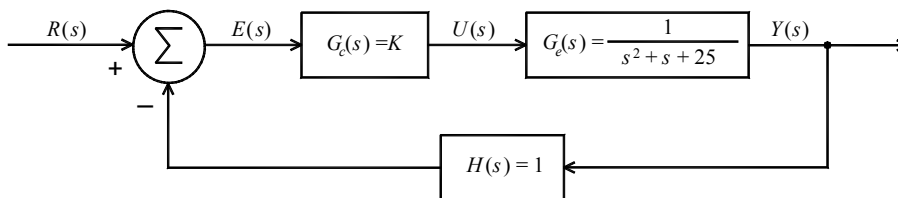


Figura 4.24 – Diagrama de blocos do sistema de controlo em malha fechada

Definindo níveis de ganho crescentes desde zero até infinito, é possível calcular os pólos da função de transferência do sistema em malha fechada para cada valor de K , podendo recorrer-se ao processo indicado na secção anterior. Na Tabela 4.3 sumarizam-se os resultados obtidos para $K=0$, $K=25$, $K=75$, $K=225$ e $K=\infty$, podendo observar-se que a parte real permanece inalterada para todos os pólos, enquanto

que a parte imaginária, em módulo, aumenta com o ganho, ou seja, os pólos deslocam-se na direcção vertical. O pólo que se designará de pólo 1 descola-se no sentido ascendente, enquanto que o outro, o pólo 2, no sentido descendente. Na Figura 4.25a representa-se graficamente os pólos do sistema em malha fechada indicados na tabela, estando cada um deles referenciado pelo valor do ganho respectivo.

Repare-se que, à medida que o ganho aumenta, os pólos vão percorrendo um caminho definido pela sucessão de pontos associados a cada valor do ganho, sugerindo que, se a variável ganho fosse contínua, a localização dos pólos em malha fechada poderia ser convenientemente traduzida por uma linha contínua devidamente orientada. Desta forma, chega-se à representação do diagrama do lugar das raízes representado na Figura 4.25b, no qual também é usual definir os valores de ganho representativos.

K	Pólo 1	Pólo 2
0	$-0,5000 + j 4,9749$	$-0,5000 - j 4,9749$
25	$-0,5000 + j 7,0534$	$-0,5000 - j 7,0534$
75	$-0,5000 + j 9,9875$	$-0,5000 - j 9,9875$
225	$-0,5000 + j 15,8035$	$-0,5000 - j 15,8035$
⋮	⋮	⋮
∞	$-0,5000 + j ∞$	$-0,5000 - j ∞$

Tabela 4.3 – Evolução dos pólos em malha fechada com o ganho

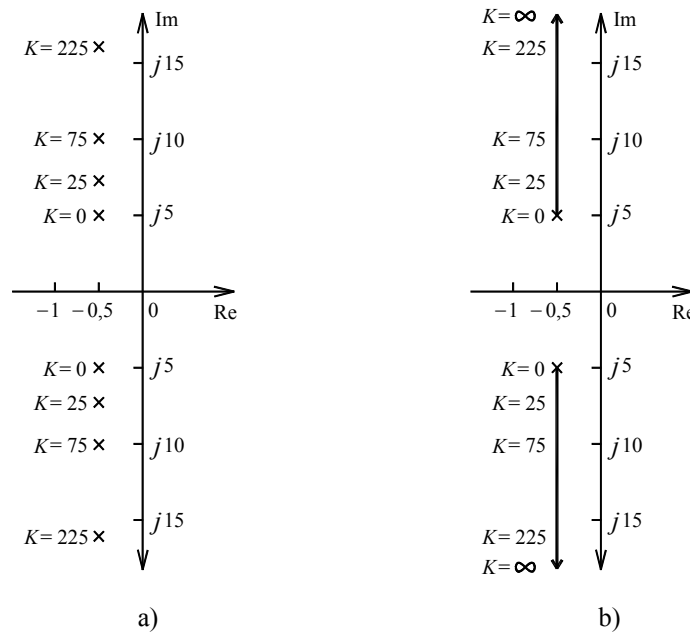


Figura 4.25 – a) Representação gráfica da evolução dos pólos; b) Diagrama do lugar das raízes

A utilização deste diagrama é particularmente interessante no estudo de sistemas de controlo porque, além da sua simplicidade, o posicionamento dos pólos do sistema no plano complexo tem um significado físico importante. De facto, o valor de cada pólo está directamente relacionado com as características dinâmicas do modo de vibração que lhe está associado. Isto significa que, através da utilização do diagrama do lugar das raízes, é possível avaliar quais as modificações introduzidas na estrutura em termos

de frequências naturais e coeficientes de amortecimento, associadas ao ganho adoptado para o sistema de controlo.

No caso de sistemas mecânicos lineares de vários graus de liberdade, os pólos da função de transferência são dados por [128]

$$p_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_{d,i} \quad (4.27)$$

onde ω_i representa a *i*ésima frequência natural do sistema, $\omega_{d,i}$ a frequência amortecida e ξ_i o correspondente coeficiente de amortecimento. Repare-se que a cada frequência do sistema estão associados dois pólos complexos conjugados, um no plano associado à parte positiva do eixo imaginário e outro na parte negativa deste, o que leva a concluir que, qualquer que seja o modelo estrutural em análise, existe sempre uma simetria gráfica em torno do eixo real.

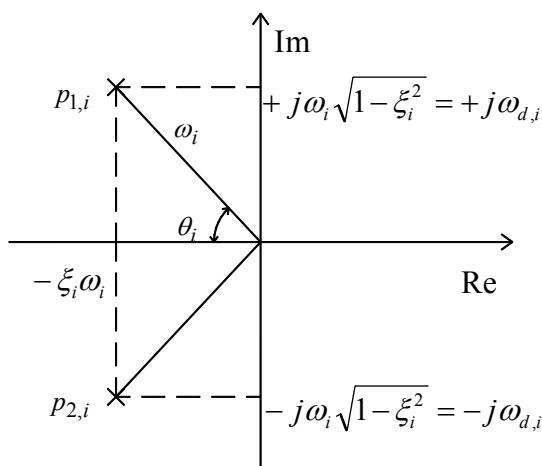


Figura 4.26 – Representação de pólos no plano complexo

Na Figura 4.26 está efectuada a representação de um par desses pólos, a partir da qual é possível estabelecer um conjunto de relações entre o posicionamento gráfico dos pólos e o seu significado físico. Começando por determinar a norma M do vector que liga a origem dos eixos a um dos pólos, obtém-se

$$M = \sqrt{(-\xi_i \omega_i)^2 + (j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2})^2} = \sqrt{\xi_i^2 \omega_i^2 + \omega_i^2 (1 - \xi_i^2)} = \omega_i$$

ou seja, a distância do pólo à origem dos eixos está directamente relacionada com a frequência natural do sistema. Isto quer dizer que, no diagrama do lugar das raízes se pode traçar um conjunto de circunferências concêntricas na origem dos eixos, sendo que, cada uma delas representa uma determinada frequência natural em correspondência com o valor do seu raio. Então, se os pólos do sistema se estiverem a afastar da origem dos eixos, tal significa que a correspondente frequência natural está a aumentar, ou, no caso contrário, significa que a frequência natural do sistema está a diminuir. Também se pode concluir que o traço de cada circunferência no eixo real ou no eixo imaginário está em correspondência directa com a frequência natural que representa.

Calcule-se agora, o ângulo θ_i indicado na mesma figura, o qual pode ser determinado a partir da seguinte relação

$$\cos(\theta_i) = \frac{\xi_i \omega_i}{\omega_i} = \xi_i$$

Neste caso, observa-se que se pode obter o coeficiente de amortecimento associado à localização do pólo, calculando o cosseno do ângulo do vector que une o pólo à origem dos eixos, medido a partir do lado negativo do eixo real. Deste facto resulta que, se os pólos do sistema estiverem sobre o eixo imaginário, então estarão em correspondência com modos de vibração com coeficiente de amortecimento nulo, pois, nesta situação, $\xi_i = \cos(\pm 90^\circ) = 0$. Por outro lado, se os pólos estiverem próximos do eixo real, o respectivo coeficiente de amortecimento será próximo de 1, pois $\xi_i = \cos(0^\circ) = 1$, estando neste caso associados o modos de vibração fortemente amortecidos.

A equação anterior permite também retirar uma conclusão importante no contexto da análise de estabilidade de sistemas, é que todos os pólos situados à direita do eixo imaginário têm coeficientes de amortecimento negativo, na medida em que qualquer ângulo θ_i , tal que $90^\circ < |\theta_i| \leq 180^\circ$, tem cosseno negativo. Isto significa que qualquer pólo situado nesta região do plano complexo fica potencialmente sujeito a um movimento vibratório sucessivamente amplificado em vez de amortecido, ou seja, pode conduzir a uma situação de instabilidade do sistema provocada pela vibração descontrolada do modo de vibração que representa. Na Figura 4.27 esquematiza-se um conjunto de pólos no plano complexo, no sentido de exemplificar cada um dos conceitos acabados de referir.

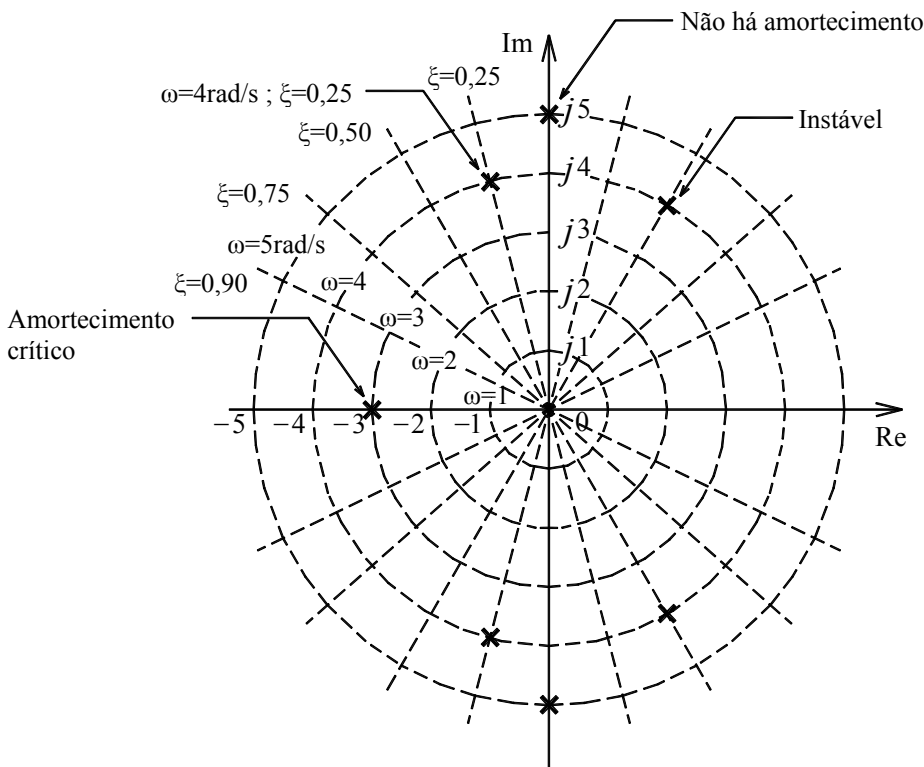


Figura 4.27 – Relação dos pólos com as características dinâmicas de um sistema

Dado que já se conhece o significado físico associado à localização dos pólos no plano complexo, nesta fase é possível confrontar o digrama do lugar das raízes traçado para o sistema de 1 grau de liberdade indicado na Figura 4.23 com alguns cálculos básicos de dinâmica de estruturas. Com efeito, consultando o diagrama do lugar das raízes da Figura 4.25b, pode constatar-se que, quando o ganho do controlador é $K=75$, os pólos do sistema em malha fechada valem $-0,5 \pm j9,9875$. De acordo com a eq.(4.27), esses pólos estão em correspondência com uma frequência natural de $\omega = 10\text{rad/s}$ e com um coeficiente de amortecimento $\xi = 0,05$.

Ora, recordando o descrito na secção 4.3.1, o efeito da utilização de um controlador proporcional resume-se a um aumento da rigidez da estrutura, podendo somar-se numericamente o ganho à sua rigidez passiva. Neste caso, valendo a rigidez passiva $k=25\text{N/m}$, a rigidez total do sistema controlado passa a ser $k_T = 25+75=100\text{N/m}$. Por conseguinte, sendo $m=1\text{kg}$, a frequência natural do sistema passa a valer $\omega = \sqrt{k_T/m} = \sqrt{100/1} = 10\text{rad/s}$. Dado que não se utilizou ganho na componente derivativa do controlador, a constante de amortecimento c permanece inalterada, prevalecendo unicamente a componente passiva de $c=1\text{kg/s}$. Sendo assim, o coeficiente de amortecimento da sistema controlado fica $\xi = c/2m\omega = 1/(2 \times 1 \times 10) = 0,05$.

Estes resultados provam a equivalência existente entre a análise de sistemas pelo método do lugar das raízes e por métodos de dinâmica clássica. Salienta-se porém que, no caso do sistema ter vários graus de liberdade, o digrama do lugar das raízes acaba por ser uma ferramenta mais vantajosa, porque num só gráfico é possível visualizar o efeito do controlo sobre todos os modos de vibração envolvidos. Ao mesmo tempo, este método possibilita uma análise da estabilidade do sistema condicionada pela localização dos pólos no plano complexo.

4.4.2.4 PROPRIEDADES DO DIAGRAMA

Seguidamente, descrevem-se algumas propriedades do diagrama do lugar das raízes, das quais resultam regras que facilitam a sua construção gráfica a partir do conhecimento de determinados parâmetros iniciais. Recorde-se novamente que a função de transferência de um sistema em malha fechada vale

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Os pólos desta função correspondem aos valores de s para os quais o respectivo denominador se anula, ou seja, para os quais

$$KG(s)H(s) = -1 = 1 \angle (2i + 1)180^\circ \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.28)$$

Nesta igualdade representou-se o valor de -1 na forma polar, isto é, $-1 = 1\angle(2i+1)180^\circ$. Uma forma alternativa de determinar os pólos da função de transferência recorrendo à expressão anterior, consiste em impor que o vector associado à representação de $KG(s)H(s)$ tenha norma unitária e ângulo 180° , ou seja

$$|KG(s)H(s)| = 1 \quad (4.29)$$

e

$$\angle KG(s)H(s) = (2i+1)180^\circ \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.30)$$

Suponha-se agora que se pretende traçar o digrama do lugar das raízes do sistema a partir da função de transferência em malha fechada. Um dos processos seria naturalmente seguir os passos já descritos na secção precedente, calculando os pólos da função de transferência para crescentes valores do ganho. No entanto, este procedimento tem a desvantagem de se ter de redefinir o denominador da função para cada valor de ganho, o que pode tornar esta tarefa fastidiosa na ausência de ferramentas de cálculo automático.

Em alternativa, poderia seguir-se o processo sugerido nas equações (4.29) e (4.30), segundo o qual, um pólo da função de transferência fica determinado se, para um determinado valor de s , o ângulo de $KG(s)H(s)$ apresentar qualquer valor múltiplo ímpar de 180° . Se tal suceder, o ganho correspondente à localização desse pólo pode ser identificado a partir da eq.(4.29), obtendo-se

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} \quad (4.31)$$

Para demonstrar este procedimento, considere-se novamente o exemplo descrito na secção anterior, relativamente ao controlo de um sistema de 1 grau de liberdade. Calcule-se o ângulo do vector resultante de $KG(s)H(s)$, ou melhor, de $G(s)H(s)$, já que K é um escalar que afecta unicamente a norma do vector, tomando-se valores de s situados no eixo paralelo ao eixo imaginário e distanciados deste de um valor de $-0,5$. Sabendo que $H(s)=1$, que $G_c(s)=1$ por se tratar de um controlador proporcional, e que $G_e(s)=1/(s^2+s+25)$, a função $G(s)H(s)$ fica

$$G(s)H(s) = G_c(s)G_e(s)H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 25}$$

Para avaliar o ângulo do vector resultante desta função de transferência, pode seguir-se o descrito na secção 4.4.2.1. Para isso, é necessário calcular os pólos e zeros da função, podendo de imediato aplicar-se a fórmula resolvente para determinar os pólos, ou seja, os valores de s que anulam o denominador, obtendo-se $s = -0,5 \pm j 4,9749$. Por outro lado, embora não exista um polinómio do numerador, pode constatar-se que a função de transferência se anula para valores infinitos de s . Mas, dado que a direcção

do infinito no plano complexo é indeterminada, será necessário ter em conta que qualquer raiz do denominador terá um valor de s com parte real igual a $-0,5$. Por conseguinte, os zeros da função são necessariamente $-0,5 \pm j \infty$.

Na Figura 4.28 está representada graficamente a obtenção do ângulo θ do vector resultante de $G(s)H(s)$ avaliado em $s = -0,5 + j 9,9875$. De acordo com a eq.(4.24), esse ângulo vale

$$\theta = \sum_{a=1}^m \angle(s + z_a) - \sum_{b=1}^n \angle(s + p_b)$$

chegando-se a

$$\theta = (\angle \bar{z}_1 + \angle \bar{z}_2) - (\angle \bar{p}_1 + \angle \bar{p}_2) = (-90^\circ + 90^\circ) - (90^\circ + 90^\circ) = -180^\circ$$

Isto significa que $s = -0,5 + j 9,9875$ é um pólo da função de transferência em malha fechada, na medida em que cumpre o requisito expresso na eq.(4.30). O ganho que lhe está associado pode ser obtido através da eq.(4.31), resultando

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|_{s=-0,5+j9,9875}} = \frac{1}{0,0133(3)} = 75$$

Repetindo este procedimento para diversos valores de s situados na mesma vertical, excepto no espaço entre os pólos $-0,5 - j 4,9749$ e $-0,5 + j 4,9749$, facilmente se concluiria que todos eles são pólos da função de transferência em malha fechada, e portanto fazem parte do traçado das linhas do diagrama do lugar das raízes. Na avaliação dos ganhos associados a cada pólo encontrado, concluir-se-ia igualmente serem idênticos aos já calculados na secção anterior.

Chama-se no entanto a atenção de que, neste caso em particular, quando existem zeros localizados no infinito, a utilização da eq.(4.23) para a determinação do valor de $|G(s)H(s)|$ não é válida, tendo-se que proceder ao seu cálculo algébrico através da equação.

Portanto, conclui-se que a propriedade do diagrama do lugar das raízes implícita nas equações (4.28) a (4.30) permite constituir um processo alternativo para o seu traçado. No entanto, esta metodologia continua a ser fastidiosa sem cálculo automático, na medida em que é necessário proceder a um mapeamento do plano complexo e, para cada valor de s , verificar se o ângulo resultante da função $KG(s)H(s)$ apresenta um valor múltiplo ímpar de 180° . Então, no sentido de acelerar este processo, pode recorrer-se a um conjunto de outras propriedades que fornecem informações úteis para uma rápida construção do diagrama do lugar das raízes.

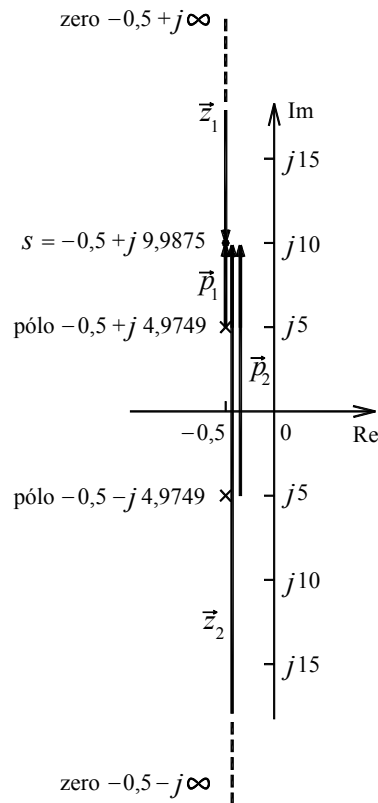


Figura 4.28 – Determinação do ângulo de $G(s)H(s)$ quando $s = -0,5 + j 9,9875$

Outra propriedade que pode ser facilmente deduzida é que, atendendo ao facto de o diagrama representar o lugar geométrico dos pólos do sistema em malha fechada para diferentes valores do ganho, podendo no limite substituir-se essa sucessão de pontos por linhas contínuas, o número de linhas (ou ramos) que definem o diagrama é igual ao número de pólos do sistema em malha fechada.

Por outro lado, já se tinha constatado anteriormente a propriedade da simetria do diagrama relativamente ao eixo real, que todos os sistemas apresentam. A justificação é que, sendo a função de transferência construída com base em grandezas físicas mensuráveis, como a massa, rigidez e amortecimento, será constituída por polinómios de coeficientes reais, cujas raízes, a serem complexas, surgem necessariamente em pares conjugados.

Outra propriedade importante do diagrama do lugar das raízes diz respeito à localização do início e fim dos ramos do diagrama. Já se sabe que os ramos iniciam o seu trajecto nos pontos associados a um ganho nulo e terminam nos pontos em que o ganho é infinito. Atente-se para a função de transferência em malha fechada $T(s)$, tal como descrita na eq.(4.26). Quando o ganho é próximo de zero, a função de transferência pode ser avaliada por

$$T(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + \varepsilon}$$

pois o segundo termo do denominador perde importância relativamente ao primeiro. Neste caso, pode observar-se que os pólos da função são as raízes combinadas do denominador de $G(s)$ e de $H(s)$, ou seja, são os pólos da função de transferência do sistema em malha aberta $G(s)H(s)$.

Por outro lado, se o ganho tender para infinito, a função de transferência passa a ser avaliada por

$$T(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{\varepsilon + KN_G(s)N_H(s)}$$

podendo observar-se que, nestas circunstâncias, os pólos passam a ser dependentes das raízes combinadas do numerador de $G(s)$ e de $H(s)$, ou seja, dos zeros da função de transferência do sistema em malha aberta. Então, pode afirmar-se a regra de que o traçado dos ramos do diagrama do lugar das raízes, começa nos pólos (finitos ou infinitos) do sistema em malha aberta, $G(s)H(s)$, e terminam nos zeros (finitos ou infinitos) do sistema igualmente em malha aberta.

No traçado do diagrama importa também conhecer o ângulo de partida de cada pólo, como factor determinante na caracterização do seu percurso no plano complexo. Considere-se então o exemplo de um sistema cujos pólos e zeros da função em malha aberta estão indicados na Figura 4.29, sendo alguns deles complexos e outros reais. Já se sabe que os ramos do diagrama do lugar das raízes começam e terminam nos pólos e zeros da função em malha aberta, respectivamente, podendo avaliar-se o que se passa na vizinhança de um desses pólos se se considerar a existência de um ganho muito pequeno. Também já se sabe que o ponto vizinho s é um pólo do sistema de malha fechada se o ângulo de $G(s)H(s)$ nesse ponto apresentar qualquer valor múltiplo ímpar de 180° . Ora, admitindo que no cálculo do ângulo da função nesse ponto próximo, os vectores desenhados a partir dos outros pólos e zeros conservam os mesmos ângulos como se estivessem orientados para o próprio pólo, o único ângulo desconhecido será o ângulo do vector ε , que liga o pólo ao ponto vizinho s . Portanto, impondo um ângulo de $(2i+1)180^\circ$ ao vector associado a $G(s)H(s)$, conclui-se que

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6 = (2i+1)180^\circ \quad (4.32)$$

de onde se retira o ângulo de partida desse pólo, isto é

$$\theta_5 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_6 - (2i+1)180^\circ$$

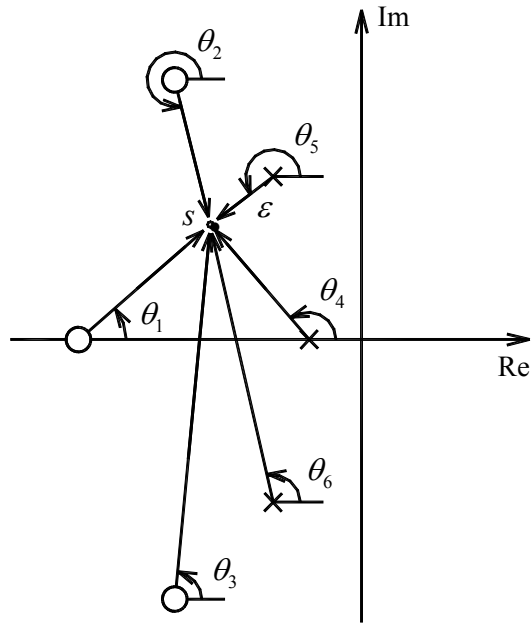


Figura 4.29 – Avaliação do ângulo de partida

O mesmo raciocínio poderá ser feito relativamente ao ângulo de chegada, na medida em que na vizinhança do zero do sistema em malha aberta, o pólo em malha fechada também respeita a condição do ângulo de $G(s)H(s)$ ter de ser múltiplo ímpar de 180° . Então, ao avaliar esta função num ponto s próximo de um zero em malha aberta, de acordo com o esquema da Figura 4.30, obtém-se uma equação igual à eq.(4.32), de onde se pode retirar o valor de θ_2 correspondente ao ângulo de chegada do ramo do diagrama associado a esse zero.

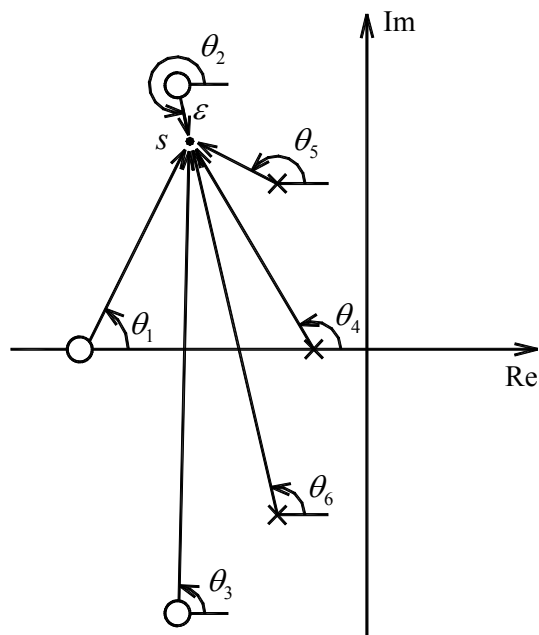


Figura 4.30 – Avaliação do ângulo de chegada

4.4.3 APLICAÇÃO A UMA ESTRUTURA DE VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

Nesta secção exemplifica-se o traçado do diagrama do lugar das raízes a uma estrutura de vários graus de liberdade, recorrendo às técnicas descritas anteriormente. No entanto, antes disso, é oportuno nesta fase introduzir o significado físico dos zeros de um sistema. Já foi anteriormente referido que os pólos de uma função de transferência estão em correspondência com as frequências naturais e coeficientes de amortecimento do sistema que estão na base da sua formulação. Determinados os pólos, os coeficientes dinâmicos que lhe estão associados podem ser imediatamente conhecidos por aplicação da eq.(4.27). Na Engenharia Civil, assim como na maioria das outras áreas da engenharia, é usual dar-se grande importância aos pólos do sistema, pois são eles que determinam a sua dinâmica e que caracterizam a sua resposta transiente e estacionária na presença de perturbações exteriores. No entanto, os zeros também têm um significado físico importante. O conhecimento dos zeros, ou seja os valores de s que anulam a função de transferência, permite entender o comportamento a estrutura quando sujeita a uma vasta gama de frequências de excitação e fornece uma ferramenta importante para o dimensionamento de sistemas de controlo.

Considere-se o caso uma estrutura constituída por uma barra vertical encastrada na base, a qual pode ser discretizada conforme se indica na Figura 4.31a. Admita-se que o amortecimento estrutural é nulo e que os graus de liberdade significativos estão em correspondência com as translações horizontais associadas a cada ponto indicado. Considere-se a actuação de uma força $f(t)$ ao nível do 4º grau de liberdade, sendo a resposta do sistema $y(t)$ também medida a esse nível. A função de transferência $Y(s)/F(s)$, que caracteriza a resposta do sistema em face da acção aplicada, pode ser deduzida através dos métodos indicados na secção 3.4.3, e a correspondente Função de Resposta em Frequência obtém-se a partir dela igualando $s = j\omega$.

Ora, verifica-se que, nestas circunstâncias, os zeros da função de transferência estão em correspondência com as frequências de excitação que produzem resposta nula em termos de $y(t)$, sendo estas frequências conhecidas na dinâmica de estruturas como frequências de anti-ressonância. Então, conclui-se que nos casos em que a força actuante e ponto de medição coincidem na mesma secção, as frequências de excitação coincidentes com as frequências de anti-ressonância não produzem qualquer efeito nesse grau de liberdade. Isto quer dizer que a estrutura se comporta como se se tivesse introduzido um apoio fictício nessa secção (ver Figura 4.31b), sendo que a força aplicada é exactamente igual à reacção que se desenvolveria nesse apoio fictício, pois ambos produzem o mesmo efeito [104]. Por conseguinte, pode afirmar-se que as frequências de anti-ressonância da estrutura são iguais às frequências naturais de uma estrutura modificada, obtida a partir da primeira introduzindo o dito apoio fictício.

O facto de se ter considerado a força actuante alinhada com o ponto de medição tem outras particularidades especialmente interessantes no estudo de sistemas de controlo, como seja o facto das frequências naturais e frequências de anti-ressonância estarem ordenadas alternadamente umas em relação às outras. Este assunto será tratado em detalhe na secção 4.5.

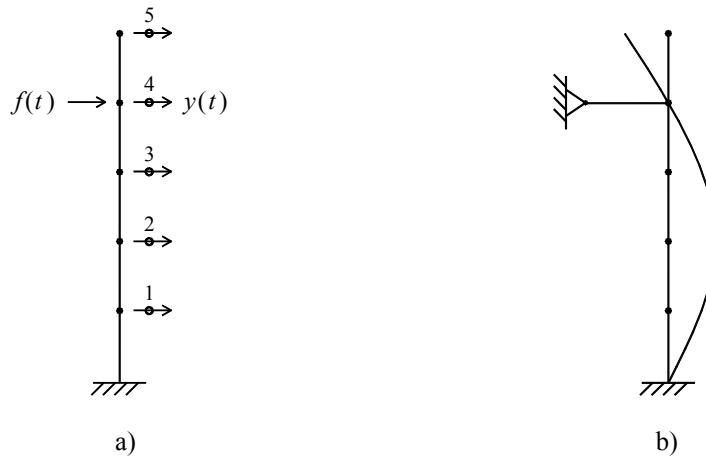


Figura 4.31 – a) Sistema de vários graus de liberdade b) Sistema equivalente com apoio fictício

Refira-se, no entanto, que no caso geral em que a força está aplicada num grau de liberdade n e se está a medir a resposta num grau de liberdade m , as frequências de anti-ressonância são aquelas que, estando a acção aplicada em n , conduzem a uma resposta nula em m (ver figura 4.32). Esta situação é em vários aspectos diferente daquela que se verifica no caso anterior. Em primeiro lugar porque a acção actuante já não desempenha o papel de um apoio fictício, pois, neste caso, o apoio fictício situa-se sobre o ponto m , acabando até por não desenvolver qualquer reacção, na medida em que se situa sobre um nodo do modo de vibração respectivo.

Como consequência do diferente posicionamento da força e do ponto de medição, as frequências de anti-ressonância serão diferentes em relação ao caso anterior, apesar das frequências naturais do sistema permanecerem inalteradas, pois estas só dependem das características mecânicas e materiais do sistema. Em resumo, pode dizer-se que os zeros do sistema dependem do par entrada-saída considerado, enquanto que os pólos permanecem nas mesmas posições.

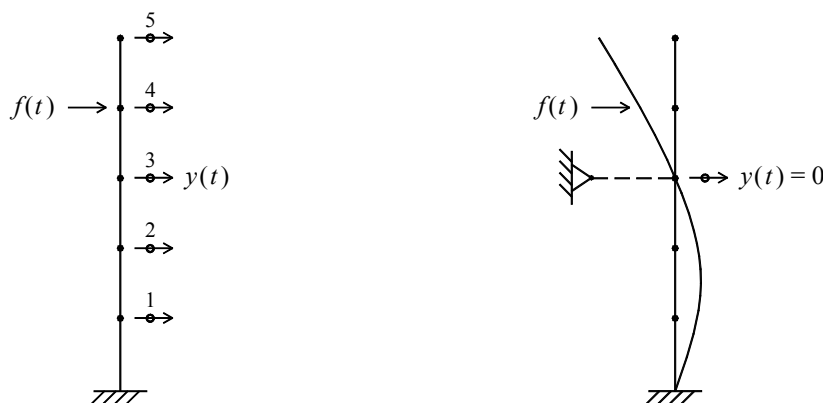


Figura 4.32 – Caso em que a força actua num grau de liberdade diferente do medido

Agora que o significado de todas as variáveis envolvidas no traçado do diagrama do lugar das raízes está esclarecido, descreve-se seguidamente um exemplo do traçado do referido diagrama aplicado à estrutura de dois graus de liberdade representada na Figura 4.33. O desenvolvimento do modelo numérico

respectivo segue os passos já descritos no capítulo anterior, tendo presente que a estrutura que aqui se representa é em tudo equivalente aos modelos de massas alinhadas até aqui considerados. A diferença é que, neste caso, os modos de vibração podem ser visualizados de uma forma mais sugestiva, aliado ao facto de se tratar de um modelo estrutural bastante utilizado nos problemas de Engenharia Civil, ou seja, um pórtico plano de pisos infinitamente rígidos.

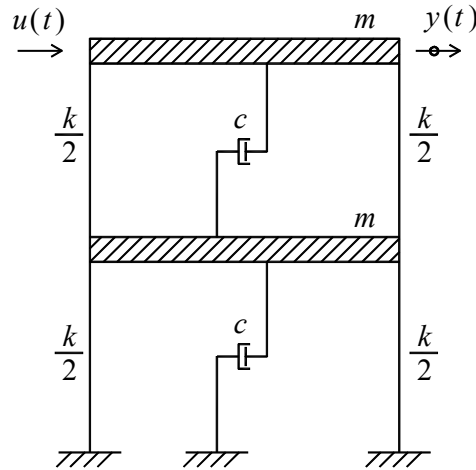


Figura 4.33 – Estrutura de dois graus de liberdade sujeita a uma acção de controlo

Considere-se que a estrutura está sujeita a condições iniciais diferentes de zero, e que sobre ela actua uma acção de controlo $u(t)$ aplicada no último piso, podendo igualmente medir-se a resposta $y(t)$ a esse nível. A massa de cada piso vale $m=1t$, a rigidez à flexão imposta pelo conjunto dos dois pilares vale $k=50kN/m$ e a constante de amortecimento vale $c=1kNs/m$. A função de transferência que relaciona a resposta $y(t)$ da estrutura com uma acção genérica $f(t)$ aplicada no último piso já foi deduzida no exemplo 3.7, sendo dada por

$$G_e(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{ms^2 + 2cs + 2k}{m^2s^4 + 3cms^3 + (c^2 + 3km)s^2 + 2cks + k^2} = \frac{0,001s^2 + 0,002s + 0,1}{s^4 + 3s^3 + 151s^2 + 100s + 2500}$$

Calculando as raízes do numerador e denominador, chega-se a $-1 \pm j9,9499$ para o numerador e $-0,1910 \pm j4,3660$ e $-1,3090 \pm j11,3661$ para o denominador. Encontram-se assim os zeros e pólos da função de transferência, a qual pode ser reescrita na forma da eq.(3.42), ou seja

$$G_e(s) = \frac{(s + 1 + j9,9499)(s + 1 - j9,9499)}{(s + 0,1910 + j4,3660)(s + 0,1910 - j4,3660)(s + 1,3090 + j11,3661)(s + 1,3090 - j11,3661)}$$

Neste fase já é possível avaliar as características dinâmicas iniciais do sistema através da análise dos pólos da função de transferência, podendo recorrer-se à eq.(4.27). Neste caso, o par de pólos complexos $-0,1910 \pm j4,3660$ permite constatar que $f_1 = 0,70Hz$ e $\zeta_1=4,37\%$, e os pólos $-1,3090 \pm j11,3661$

permitem obter $f_2 = 1,82\text{Hz}$ e $\zeta_2=11,44\%$. Alternativamente, estes resultados poderiam ser obtidos por cálculos simples de análise modal, de acordo com as expressões já deduzidas na secção 3.4.1.3.

Com o objectivo de modificar a resposta do sistema, pretende-se introduzir uma acção de controlo do tipo PD que produza uma força proporcional ao erro e à sua derivada, definida pela seguinte função de transferência

$$G_c(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K \left(1 + \frac{s}{3} \right)$$

na qual se considerou, $T_i = \infty$ e $T_d=1/3$, sendo fácil constatar que este controlador tem um zero real igual a -3 . Na Figura 4.34 representa-se o diagrama de blocos do sistema de controlo completo, no qual se considerou $H(s)=1$.

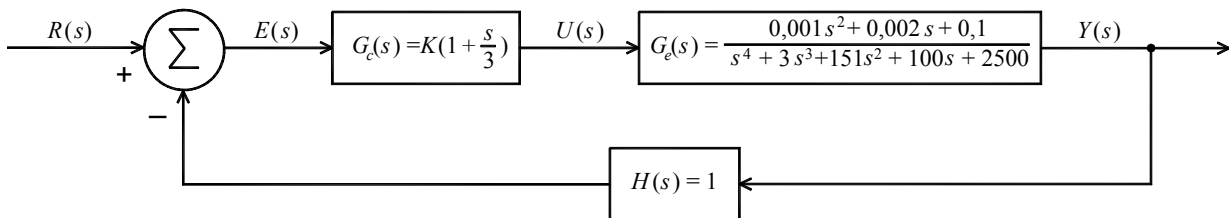


Figura 4.34 – Diagrama de blocos do sistema de controlo em malha fechada

Para traçar o diagrama do lugar das raízes, começa-se por determinar e representar graficamente os pólos e zeros da função de transferência em malha aberta $G(s)H(s)$, onde $G(s)=G_c(s)G_e(s)$. Neste caso, os pólos de $G(s)H(s)$ devem-se exclusivamente a $G_e(s)$, já que as funções de transferência do controlador e do sensor só têm zeros. Por outro lado, os zeros de $G(s)H(s)$ equivalem ao par de zeros complexos de $G_e(s)$, o zero real de $G_c(s)$ e ainda um zero infinito dado que o grau do polinómio do denominador da função de transferência é superior ao grau do numerador. A exigência de 4 pólos em malha aberta, ou melhor, dois pares de pólos complexos conjugados, implica que o diagrama tenha necessariamente 4 ramos, os quais terão uma representação gráfica simétrica, devido à propriedade da simetria. O percurso dos pólos do sistema em malha fechada terá agora de ser definido de acordo com um dos métodos expostos anteriormente, sendo certo que os ramos a eles associados terão início na localização dos pólos do sistema em malha aberta e dirigir-se-ão para as posições dos zeros do sistema em malha aberta.

Na Figura 4.35 encontra-se representado o diagrama do lugar das raízes resultante da aplicação do método descrito na secção 4.4.2.3, tendo sido utilizada uma ferramenta de cálculo automático para a determinação dos pólos em malha fechada associados a ganhos sucessivamente crescentes. Salienta-se o facto de se ter adoptado no gráfico escalas diferentes para o eixo real e o imaginário, como é aliás vulgar na representação de muitos sistemas de controlo, nos quais a grandeza da parte real dos pólos e zeros difere significativamente da grandeza da parte imaginária. Como consequência desta distorção, as

circunferências que marcam as diversas frequências naturais aparecem em forma de elipse, enquanto que os eixos que definem os vários níveis de amortecimento continuam a ser representados por semi-rectas.

Da análise do diagrama ressalta imediatamente a representação de vários ramos com desenvolvimento na parte estável do plano complexo, querendo isto dizer que o sistema é estável para qualquer valor de ganho adoptado. Quando o ganho é nulo, os pólos do sistema em malha fechada coincidem com os pólos em malha aberta e, à medida que o ganho aumenta, os pólos em malha fechada assumem novas posições em correspondência com uma nova dinâmica imposta pela força de controlo. Quando o ganho sobe para $K=56k$, os pólos associados à frequência mais baixa atingem o eixo real, e o modo de vibração respectivo passa a ter amortecimento crítico. À medida que o ganho continua a subir, um dos pólos desloca-se no sentido do zero infinito e o outro no sentido do zero do controlador. Nesta fase, o modo de vibração associado tem amortecimento superior ao crítico.

Relativamente aos pólos correspondentes à frequência mais elevada, pode observar-se que estes mantêm um valor complexo para qualquer valor de ganho, o que significa que o modo de vibração respectivo conserva um nível de amortecimento inferior ao crítico. Através da análise dos ramos descritos por estes pólos, é possível avaliar qual o nível de amortecimento mais elevado que se pode obter por via do sistema de controlo. Para tal, basta traçar um eixo tangente ao ramo correspondente, de tal forma que se consiga a menor abertura possível do ângulo θ (ver Figura 4.26), pois, como se sabe, $\zeta = \cos\theta$. Neste caso, regista-se um valor máximo de 22,6% para um ganho aproximadamente de $K=31k$.

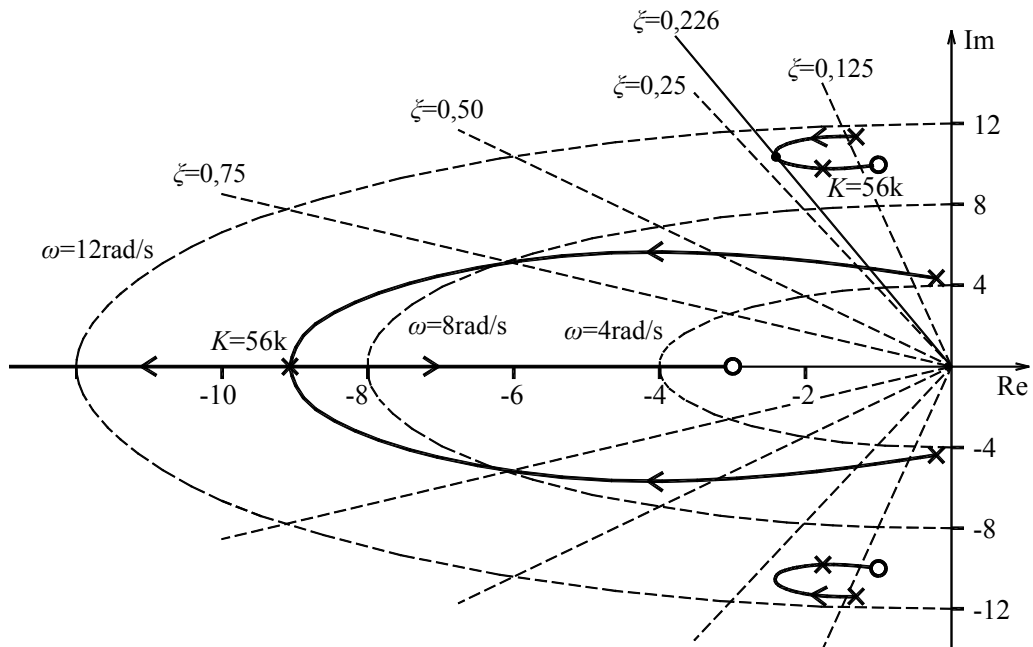


Figura 4.35 – Diagrama do lugar das raízes associado ao controlo do pórtico de 2 pisos

Veja-se agora o que sucede quando o ganho tende para infinito. Nestas circunstâncias, a acção de controlo é tão intensa que praticamente conduz ao bloqueio do piso superior, ficando a estrutura a funcionar como um único grau de liberdade associado ao movimento da massa do primeiro piso. Esta situação é claramente visível no diagrama do lugar das raízes, pois, neste caso, os pólos do sistema em malha fechada coincidem com os zeros em malha aberta, cujo significado foi discutido anteriormente. Ou seja, por via da acção de controlo, a estrutura original é transformada numa estrutura equivalente obtida da primeira através da introdução de um apoio fictício no último piso, sendo esta caracterizada por ter frequências próprias de vibração iguais às frequências de anti-ressonância. Neste caso, como só existe um par de zeros complexos, também só haverá uma única frequência de anti-ressonância.

O efeito desta acção de controlo pode ainda ser vista por outro prisma, pois, quando o ganho aumenta desde zero até infinito, a frequência natural do primeiro modo tende igualmente para o infinito, facto que se pode associar ao movimento de um dos pólos em malha fechada em direcção ao $-\infty$ do eixo real. Ora, se a frequência tende para o infinito, significa que o modo respectivo tende a ficar infinitamente rígido, ficando a estrutura a funcionar em exclusivo no seu outro modo de vibração, caracterizado por ter uma frequência própria ditada pelo zero em malha aberta respectivo.

Estas conclusões podem ser validadas através da elaboração de cálculos envolvendo o diagrama do lugar das raízes, comparando-os posteriormente com os resultados obtidos recorrendo a métodos clássicos de dinâmica de estruturas. A saber, dado que o par de zeros complexos do sistema em malha aberta vale $-1 \pm j9,9499$, pode determinar-se as características dinâmicas associadas a esta localização no plano complexo, recorrendo à eq.(4.27). Neste caso, obtém-se $f=1,59\text{Hz}$, como sendo a frequência de anti-ressonância, e $\zeta=0,10$ como coeficiente de amortecimento correspondente.

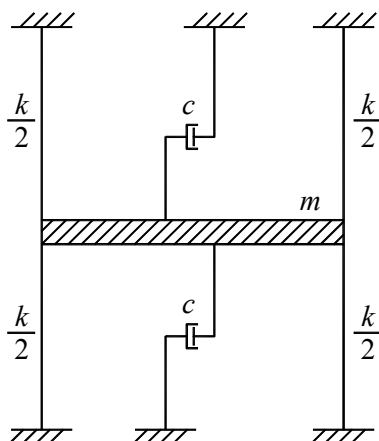
Por outro lado, numa perspectiva de uma análise dinâmica clássica da estrutura equivalente representada na Figura 4.36, facilmente se pode concluir que a respectiva frequência natural vale

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \times 50000}{1000}} = 1,59\text{Hz}$$

e o que o coeficiente de amortecimento vale

$$\xi = \frac{2c}{2m\omega} = \frac{2 \times 1000}{2 \times 1000 \times (2 \times \pi \times 1,59)} = 0,10$$

provando-se a equivalência das duas abordagens descritas.


 Figura 4.36 – Estrutura equivalente ao efeito da acção de controlo quando $K = \infty$

Para concluir este exemplo, realça-se novamente as potencialidades da utilização do diagrama do lugar das raízes como ferramenta de análise de sistemas de controlo. De facto, a simples observação do diagrama permite extrair informações importantes relativas ao problema em análise, mesmo que não se disponha de qualquer outro modelo ou dados suplementares. Por exemplo, através da consulta do diagrama da Figura 4.35 pode imediatamente constatar-se que: *i*) o problema tratado consiste num sistema de dois graus de liberdade por ter dois pares de pólos complexos; *ii*) as frequências naturais estão bem espaçadas e que os respectivos coeficientes de amortecimento são relativamente baixos porque os pólos em malha aberta estão próximos do eixo imaginário; *iii*) o sistema é mais eficiente no controlo do primeiro modo do que do segundo, pois, para o mesmo ganho, a taxa de variabilidade dos parâmetros dinâmicos do primeiro modo é maior; e *iv*) o sistema é estável para qualquer valor do ganho, pois os ramos do diagrama desenvolvem-se sempre na zona instável do plano complexo.

O método do lugar das raízes tem também algumas limitações. A mais importante é que este método só é aplicável ao estudo de sistemas com uma entrada e uma saída, sendo inadequado para o tratamento de problemas multivariáveis, ou seja, com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

4.4.4 DIMENSIONAMENTO DE CONTROLADORES

No exemplo anterior, assumiu-se a utilização de um controlador do tipo PD com o objectivo de alterar as características dinâmicas do sistema definidas pelos seus pólos em malha fechada. Através do ajuste do ganho do controlador, é possível modificar as frequências naturais e coeficientes de amortecimento da estrutura, de tal forma que, com estas novas características, ele responda satisfatoriamente a uma determinada perturbação exterior. Isto quer dizer que, através da acção de controlo, os pólos do sistema podem ser movimentados para localizações desejadas em correspondência com as características dinâmicas pretendidas para a estrutura. Nesse sentido, o diagrama do lugar das

raízes permite determinar o percurso dos pólos no plano complexo, podendo encontrar-se o valor do ganho que posicione os pólos do sistema nas tais posições desejadas.

No entanto, sendo o ganho a única variável associada ao traçado do diagrama, e sendo os percursos dos pólos definidos univocamente através dessa variável, a questão que se coloca é saber se, nesse percurso, os pólos se dirigem efectivamente para as posições pretendidas, ou se, pelo contrário, desenvolvem trajectórias não desejáveis. Então, se tal acontecer, a outra questão é saber qual é o controlador que, mediante o ganho adequado, efectivamente coloca os pólos nas posições pretendidas.

Tendo como cenário os problemas ligados às estruturas de Engenharia Civil, geralmente o controlador ideal é aquele que melhora a resposta transiente do sistema, isto é, que actua directamente ao nível da modificação da rigidez e do amortecimento. Muitas das vezes será até suficiente actuar apenas ao nível do amortecimento, na medida em que este parâmetro é o principal responsável pela atenuação da resposta nos casos do mau funcionamento estrutural em serviço, caracterizado frequentemente pela vibração harmónica de um modo de vibração específico.

Neste contexto, o controlador que melhor se adapta a este tipo de problemas corresponde à utilização de um controlador que introduza um zero real na função de transferência em malha aberta. Ou seja, a utilização de um controlador com a função de transferência dada por $G_c(s) = s + z_c$, caracterizada por ter um zero localizado em $-z_c$. Este controlador é imediatamente identificado como sendo do tipo PD, ou seja, Proporcional-Derivativo, o qual interfere simultaneamente sobre a frequência natural e coeficiente de amortecimento estrutural. No caso de se pretender actuar simplesmente ao nível do amortecimento, será adequado utilizar um controlador derivativo, isto é, que tenha uma função de transferência do tipo $G_c(s) = s$.

Na Figura 4.37 está representado o diagrama do lugar das raízes típico de uma estrutura de vários graus de liberdade pouco amortecida, na qual se utilizou um controlador do tipo PD, tendo-se considerado que o actuador está posicionado na mesma secção que o sensor. Neste caso, observa-se que os ramos do diagrama desenvolvem trajectórias no plano complexo estável e que, quando o ganho aumenta desde zero, todos os pólos do sistema em malha fechada dirigem-se para a esquerda, ou seja, todos os modos de vibração sofrem um aumento do amortecimento estrutural. A partir de determinados ganhos elevados, a situação reverte-se e o amortecimento começa a diminuir, não havendo, portanto, interesse em utilizar ganhos excessivos no sistema de controlo. Em paralelo com a alteração do amortecimento, as frequências naturais do sistema também se alteram, pois os ramos do diagrama não descrevem trajectórias circulares.

Veja-se agora a situação na qual se quer impor que o diagrama do lugar das raízes tenha obrigatoriamente um pólo numa determinada localização. Em primeiro lugar, refere-se que o procedimento que se descreve é válido na condição de que apenas se quer impor o posicionamento de um e não de vários pólos simultaneamente. Geralmente, escolhe-se o pólo dominante, ou seja, o mais condicionante em termos da resposta estrutural, o qual, em muitos casos, está em correspondência com primeiro modo de vibração.

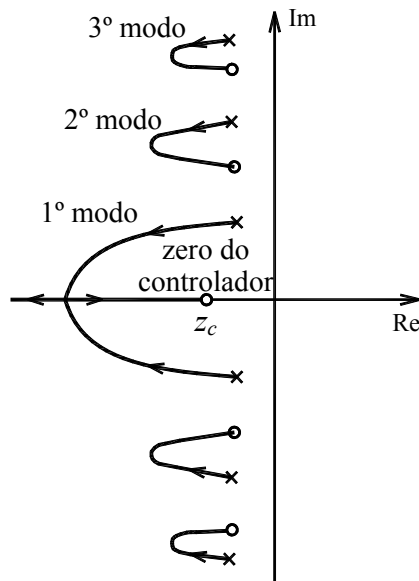


Figura 4.37 – Diagrama do lugar das raízes de um sistema de 3-GL com controlador PD

Recorde-se novamente que um ponto s do plano complexo é um pólo da função de transferência em malha fechada se o ângulo da função de transferência em malha aberta $G(s)H(s)$ avaliado em s , apresentar qualquer valor múltiplo ímpar de 180° . Nestas circunstâncias, o ganho correspondente à localização desse pólo vale $K = 1 / |KG(s)H(s)|$. Considere-se que se pretende dimensionar um controlador PD para um sistema cuja função de transferência $G_e(s)$ é conhecida, sendo também conhecida a função de transferência do sensor $H(s)$. Sabendo que o controlador não tem pólos e que tem um único zero real, todos os pólos e zeros da função de transferência em malha aberta são conhecidos, à excepção do zero do controlador. Ora, se se impuser que a avaliação da função de transferência em malha aberta no ponto s tem de conduzir a um ângulo múltiplo ímpar de 180° , então a única variável desconhecida neste problema é o ângulo do zero do controlador, obtendo-se de imediato a respectiva localização sobre o eixo real por considerações geométricas. Na Figura 4.38 exemplifica-se este processo.

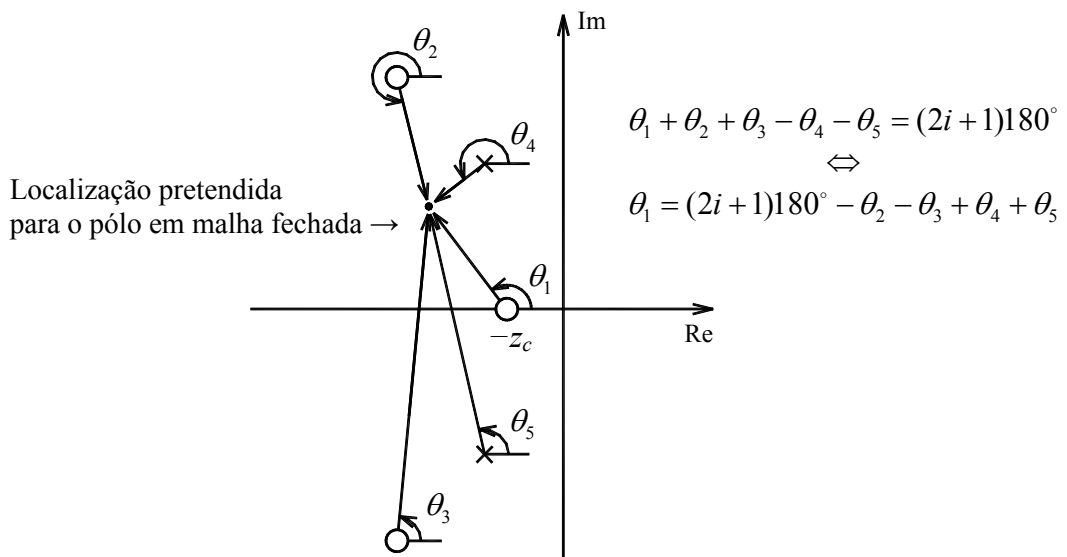


Figura 4.38 – Avaliação do ângulo do zero de um controlador PD

Considere-se o problema do controlo da estrutura de 2 graus de liberdade descrito na secção anterior, cujo diagrama do lugar das raízes está representado na Figura 4.35. Pretende-se dimensionar um controlador do tipo PD, de tal forma que seja mais eficiente do que o utilizado anteriormente, em termos da introdução de amortecimento no primeiro modo de vibração, ou seja, com o mesmo ganho obter maior coeficiente de amortecimento nesse modo. Isto consegue-se tentando fazer com que o ramo associado a esse modo seja mais curto, cruzando mais rapidamente os eixos do diagrama que definem os níveis de amortecimento do sistema. Nesse sentido, pode impor-se que, por exemplo, o ponto $s = -3,5+j4$ seja um pólo em malha fechada, sendo certo que, se tal acontecer, o pólo conjugado também o será.

Sendo a função de transferência do controlador dada por $G_c(s)=s+z_c$, podem calcular-se os ângulos de todos os vectores associados aos pólos e zeros da função de transferência em malha aberta, e posteriormente determinar-se o valor z_c . A Tabela 4.4 resume os resultados obtidos, podendo concluir-se que, de acordo com o esquema da Figura 4.38, $\theta = (-2 + 1) \times 180^\circ - 347,37^\circ + 649,44^\circ = 122,07^\circ$, tendo-se considerado $i = -1$.

Zero	Ângulo	Pólo	Ângulo
$-1 + j9,9499$	$247,21^\circ$	$-0,1910 + j4,3660$	$186,31^\circ$
$-1 - j9,9499$	$100,16^\circ$	$-0,1910 - j4,3660$	$111,58^\circ$
$-\infty$	0°	$-1,3090 + j11,3661$	$253,44^\circ$
		$-1,3090 - j11,3661$	$98,11^\circ$
Σ	$347,37^\circ$	Σ	$649,44^\circ$

Tabela 4.4 – Ângulos dos vectores de ligam os pólos e zeros em malha aberta ao pólo pretendido

Ora, sabendo que o ângulo do vector que liga o zero real do controlador ao ponto $s = -3,5+j4$ vale $\theta=122,07^\circ$, através da construção geométrica indicada na Figura 4.39, chega-se a $z_c = 1$. Ou seja, a função de transferência do controlador pretendido vale $G_c(s) = s + 1$. Na Figura 4.40 redesenha-se (a linha contínua) o diagrama do lugar das raízes relativo ao controlo do pórtico utilizando este novo controlador, representando-se também (a tracejado) os ramos associados ao caso anterior. Pode verificar-se que, de facto, o ponto $s = -3,5+j4$ é um pólo do sistema em malha fechada para um determinado ganho, cujo valor pode ser avaliado utilizando a eq.(4.31), obtendo-se $K = 8,3k$. Também se pode verificar que a estratégia utilizada para definir a localização desejada do pólo foi bem sucedida, pois o ramo associado ao primeiro modo de vibração descreve agora um ciclo mais curto.

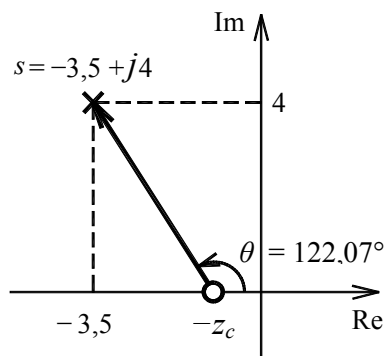


Figura 4.39 – Construção gráfica para a determinação de z_c

No sentido de avaliar a melhoria de eficácia deste novo controlador, pode comparar-se o ganho que cada um dos controladores necessitaria para elevar o coeficiente do primeiro modo de vibração de 4,37% para, por exemplo, 25% do amortecimento crítico. Para o efeito, é necessário traçar o eixo correspondente a esse nível de amortecimento e determinar as intersecções com os ramos do diagrama respectivos, encontrando-se a localização dos pólos em malha fechada correspondentes. Seguidamente, podem avaliar-se os ganhos associados a cada controlador nesses pontos, utilizando novamente a eq.(4.31).

No caso do controlador anterior com função de transferência $G_c(s) = s/3 + 1$, o ganho necessário seria de 9,2k, enquanto que com o novo controlador caracterizado por $G_c(s) = s + 1$, o ganho seria de apenas 2,7k. A razão pela qual o novo controlador é mais eficiente na adição de amortecimento à estrutura é que na função de transferência respectiva se valoriza mais a componente derivativa relativamente à componente proporcional que no caso do controlador anterior. Ou seja, na aplicação da acção de controlo, a componente da força de amortecimento começa a ganhar peso relativamente à força de alteração da rigidez.

Reforça-se aqui novamente a ideia de que, tendo-se dimensionado um controlador para que um determinado ramo do diagrama passe numa determinada localização desejada, não é possível, por este processo, impor simultaneamente localizações para os outros pólos. Mas, na prática, esta limitação não é assim tão importante porque a escolha da função de transferência do controlador acaba por ser definida procurando um certo compromisso entre todos os modos de vibração mais relevantes.

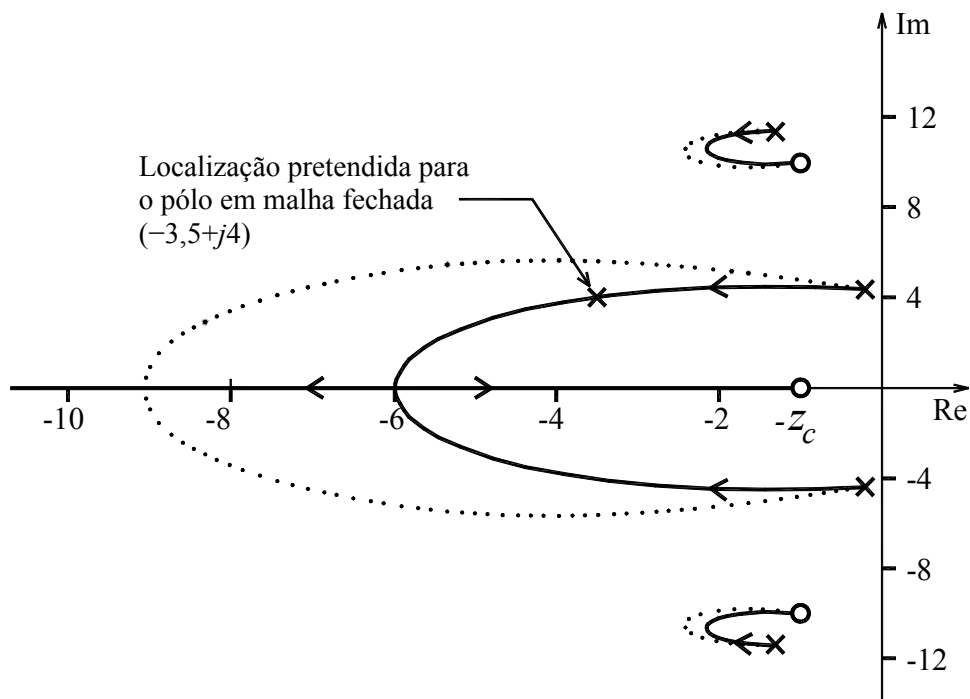


Figura 4.40 – Redesenho do diagrama do lugar das raízes para o sistema dotado do novo controlador

4.5 CONTROLO COLOCADO E NÃO-COLOCADO

4.5.1 CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Já se referiram anteriormente algumas das características dos sistemas que têm a força actuante situada na mesma secção da medição da resposta, nomeadamente, no que se refere à propriedade de alternância de frequências naturais e frequências de anti-ressonância. Esta propriedade é válida qualquer que seja o carácter da força actuante, isto é, quer seja uma força exterior ao sistema, quer seja uma força de controlo. Se a força actuante for uma acção de controlo, então terá de ser aplicada por um dispositivo mecânico designado de actuador, podendo a resposta ser medida através de um sensor. No contexto dos sistemas de controlo, quando o actuador está colocado em linha com o sensor que alimenta o circuito de realimentação, então diz-se que se trata de um sistema de controlo colocado, caso contrário, diz-se que o sistema tem um controlo não-colocado.

Considere-se o caso de um sistema pouco amortecido de vários graus de liberdade, sujeito a uma acção aplicada por um actuador no grau de liberdade n , sendo a resposta do sistema medida nesse mesmo ponto por intermédio de um sensor. Nesta situação, o par actuador-sensor está colocado, sendo possível relacionar a entrada com a saída do sistema através da respectiva função de transferência, ou em alternativa, através da correspondente Função de Resposta em Frequência no caso de se tratar de acções harmónicas. Na Figura 4.41 encontra-se representado o diagrama de Bode típico de um sistema nestas condições. Pode observar-se que o gráfico das amplitudes apresenta picos positivos em correspondência com as frequências de ressonância ω_i e picos negativos em correspondência com as frequências de anti-ressonância ω_{ai} . Paralelamente, sempre que encontra uma frequência de ressonância ou anti-ressonância, o gráfico do ângulo de fase sofre uma variação de alternadamente $\pm 180^\circ$. Importa realçar que, neste caso, as frequências naturais do sistema aparecem alternadas com as frequências de anti-ressonância, de tal modo que, entre cada duas frequências naturais consecutivas, existe uma sempre uma frequência de anti-ressonância. Sabendo que os pólos da função de transferência estão em correspondência com as frequências naturais do sistema, e que os zeros estão em correspondência com as frequências de anti-ressonância, então a representação dos pólos e zeros da função de transferência no plano complexo conduz a uma representação gráfica alternada entre eles.

Em contrapartida, na Figura 4.42 representa-se o diagrama de Bode típico de uma função de transferência do sistema descrito anteriormente, mas no caso em que o par actuador-sensor não se encontra colocado. Verifica-se que, nestas circunstâncias, a propriedade de alternância entre frequências naturais e frequências de anti-ressonância perde-se, pois existem frequências naturais consecutivas sem que entre elas se verifique qualquer frequência de anti-ressonância. Neste caso, a alternância de fase também se perde, podendo o gráfico da fase desenvolver-se fora dos limites de $-180^\circ \leq \phi(j\omega) \leq 0$. Como consequência desta situação, os pólos e zeros da função de transferência deixam de ter representações alternadas no plano complexo.

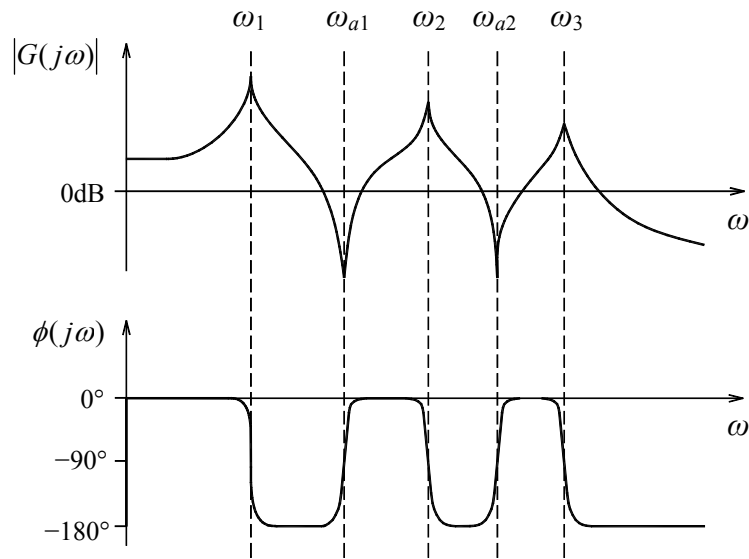


Figura 4.41 – Diagrama de Bode de um sistema colocado

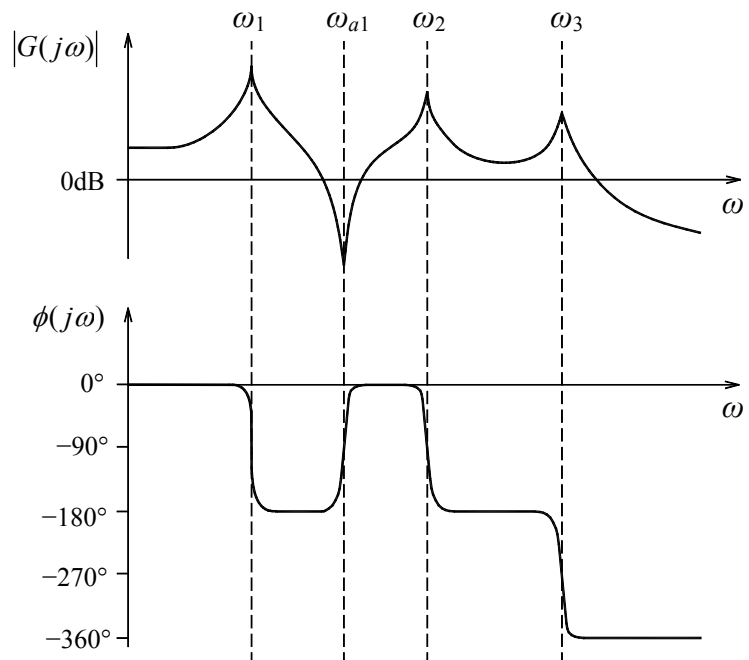


Figura 4.42 – Diagrama de Bode de um sistema não-colocado

4.5.2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE

O facto da função de transferência de uma determinada estrutura apresentar, ou não, pólos e zeros de uma forma alternada tem sérias implicações na estabilidade de um sistema de controlo, sendo este factor uma das suas características mais importantes. Para provar este facto, comece-se por considerar

novamente o sistema de vários graus de liberdade estudado na secção anterior, o qual apresenta um baixo nível de amortecimento em todos os seus modos de vibração. Suponha-se que se pretende implementar um sistema de controlo comandado por um controlador do tipo PD. O estudo do comportamento do sistema realimentado pode ser feito recorrendo ao método do lugar das raízes, tendo-se inicialmente que calcular os pólos e zeros da função de transferência em malha aberta. Admitindo que $H(s)=1$, e sabendo que o zero do controlador se situa sobre a parte negativa do eixo real, os restantes pólos e zeros de $G(s)H(s)$ só dependem da função de transferência associada ao par actuador-sensor.

Na Figura 4.43a e 4.43b estão representados os pólos e zeros do sistema de malha aberta de um sistema deste género, relativamente aos quais se implementou um sistema de controlo colocado e não colocado, respectivamente. No traçado do diagrama do lugar das raízes de cada uma dos casos, pode avaliar-se quais os ângulos de partida e de chegada associados aos diversos ramos, o que permitirá ter uma ideia de como esses ramos se desenvolverão no plano complexo.

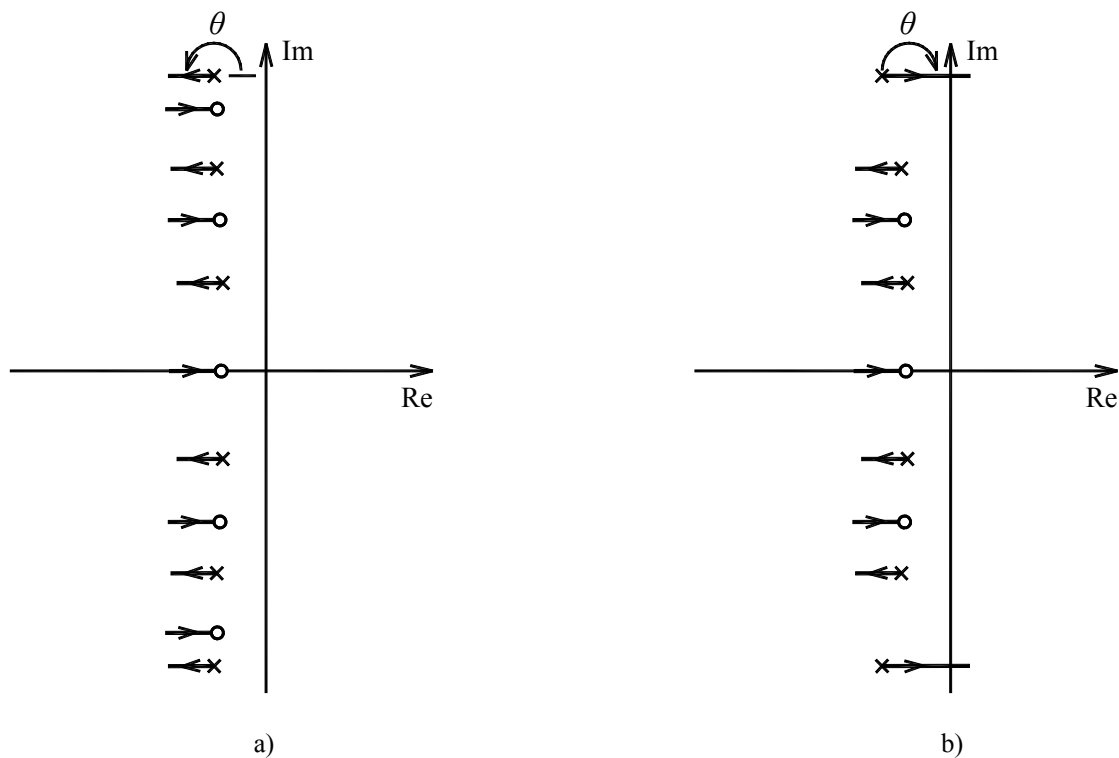


Figura 4.43 – Pólo e zeros do sistema em malha fechada e respectivos ângulos de partida e chegada
 a) caso do sistema colocado; b) caso do sistema não-colocado

Aplicando o procedimento descrito em 4.4.2.4 ao caso do sistema com pólos e zeros alternados, verifica-se que o ângulo de partida do ramo associado ao pólo mais elevado é dado por

$$\theta = \sum_{a=1}^5 \theta_{z,a} - \sum_{b=1}^5 \theta_{p,b} - (2i + 1)180^\circ$$

em que, $\theta_{z,a}$ são os ângulos formados pelos vectores que ligam os diversos zeros a um ponto s situado na proximidade do pólo em análise, e $\theta_{p,b}$ os ângulos dos pólos medidos de uma forma semelhante. Ora, estando neste caso os pólos e zeros em malha aberta do sistema localizados aproximadamente sobre a mesma vertical, é fácil verificar que cada um desses ângulos tem um valor aproximado de $+90^\circ$. Então, considerando $i = -2$, conclui-se que o ângulo de partida do ramo associado ao último pólo vale $\sim 180^\circ$, ou seja, dirige-se horizontalmente para a esquerda do plano complexo. Utilizando o mesmo procedimento para a determinação dos ângulos de partida e de chegada para os restantes pólos e zeros, verificar-se-ia que, neste caso, qualquer um desses ângulos valeria aproximadamente 180° .

Este facto permite retirar uma conclusão extremamente importante: quando o sistema de controlo é constituído por um par actuador-sensor colocado, os ramos do diagrama desenvolvem-se exclusivamente no lado do plano complexo estável, dado que os pólos em malha fechada partem dos pólos em malha aberta e dirigem-se necessariamente para os zeros em malha aberta. Isto significa que o sistema será sempre estável, qualquer que seja o ganho adoptado. Esta conclusão pode ainda ser estendida para os casos em que, apesar do sistema ser colocado, não se verifique este alinhamento de pólos e zeros, pois, mesmo nesta situação, os ângulos de partida e chegada continuam a impor um desenvolvimento dos ramos do diagrama no plano estável (ver Figura 4.44). Isto quer dizer que, apesar dos pólos e zeros do sistema em malha aberta poderem sofrer variações de posição moderadas, o aspecto geral do diagrama mantém-se, o que faz com que o sistema de controlo seja robusto em termos de estabilidade [104]. Em rigor, pode até afirmar-se que um dado sistema com pólos e zeros em malha aberta estáveis, sujeito a uma acção de controlo do tipo PD, no qual o sensor e actuador estão colocados, é incondicionalmente estável para qualquer valor do ganho adoptado [7].

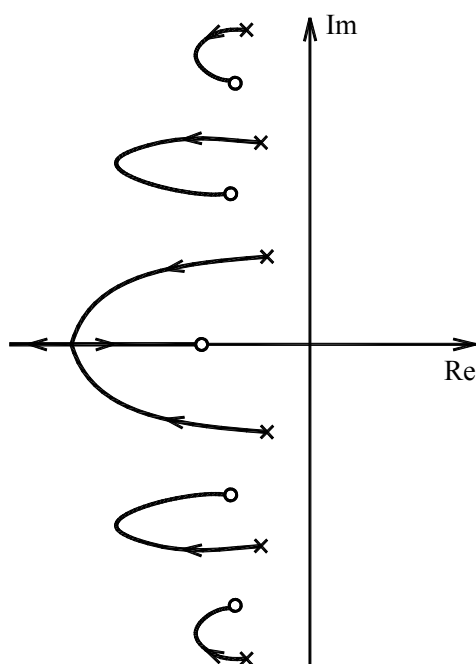


Figura 4.44 – Diagrama do lugar das raízes típico de um sistema colocado com controlador PD

Este cenário muda radicalmente no caso da utilização de um sistema de controlo não-colocado, pois, como se pode constar pela análise da Figura 4.43b, o ângulo de partida do pólo mais elevado vale

$$\theta = \sum_{a=1}^3 \theta_{z,a} - \sum_{b=1}^5 \theta_{p,b} - (2i + 1)180^\circ$$

Tal como no caso anterior, cada um dos ângulos $\theta_{z,a}$ e $\theta_{p,b}$ vale aproximadamente $+90^\circ$, o que leva a concluir que o ângulo θ se situa na ordem dos 0° , tendo em consideração que $i = -2$. Ou seja, o ramo do diagrama associado a este pólo dirige-se horizontalmente para a direita, no sentido do plano complexo instável, conduzindo à instabilidade do sistema mesmo para valores de ganho relativamente reduzidos.

Como resultado, conclui-se que o controlo não-colocado é desaconselhado por potenciar situações de instabilidade do sistema, conduzindo a um diagrama do lugar das raízes com aspecto idêntico ao da Figura 4.45. No entanto, em muitos casos práticos, não é possível a concretização física de sistemas colocados, como sucede com os amortecedores de massas activas, havendo a necessidade de tentar afastar, tanto quanto possível, os pólos potencialmente instáveis da proximidade do eixo imaginário. Isto consegue-se através da introdução de amortecimento passivo no modo de vibração associado a esse pólo, fazendo aumentar a margem de ganho do controlador, até que efectivamente se produza uma situação de instabilidade.

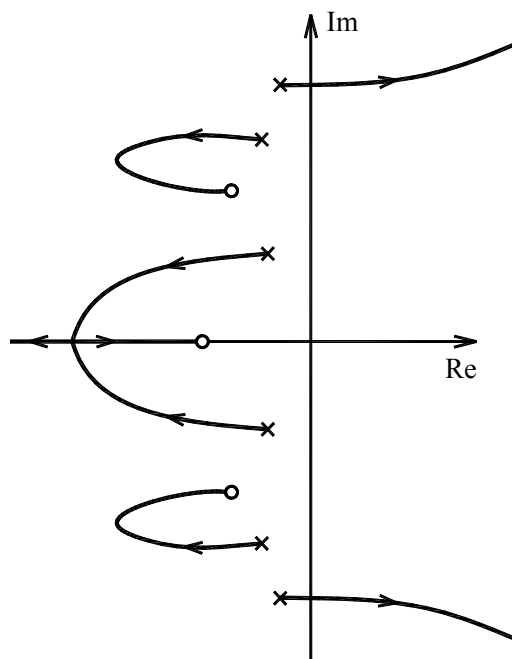


Figura 4.45 – Diagrama do lugar das raízes de um sistema não-colocado

4.6 MÉTODO DA ALOCAÇÃO DE PÓLOS

4.6.1 INTRODUÇÃO

O método de análise e concepção de sistemas de controlo descrito nesta secção tem por base a utilização de modelos de sistemas desenvolvidos com recurso a uma formulação de espaço de estado. Através desta representação, é possível abordar um grupo mais alargado e complexo de problemas de controlo, particularmente, os que envolvem sistemas não-lineares e sistemas com múltiplas entradas e saídas. No entanto, no contexto deste trabalho, discutir-se-ão apenas alguns dos aspectos relativos a sistemas lineares invariáveis no tempo e a sistemas com múltiplas saídas mas com uma só entrada.

Uma das limitações do método discutido na secção anterior é que a sua aplicação destina-se exclusivamente a sistemas modelados com uma única entrada e saída. Como consequência, o dimensionamento de controladores tem como alvo um único pólo em malha fechada, o que de certa forma limita a acção do controlo sobre os restantes pólos do sistema. Para tal, contribui o facto de, neste caso, apenas existir um parâmetro ajustável no controlador, que é a variável ganho, fazendo com que o objectivo do controlo seja focado num só pólo. Porém, utilizando modelos em espaço de estado, a definição da acção de controlo tem por base o contributo de vários parâmetros, o que possibilita a actuação simultânea sobre o posicionamento de múltiplos pólos em malha fechada. Neste caso, a acção de controlo impõe uma nova dinâmica ao sistema inicial, através da atribuição de frequências naturais e coeficientes de amortecimento associados especificamente a cada modo de vibração. Para o efeito é necessário que o sistema obedeça a determinados requisitos, conforme se verá posteriormente.

No processo de dimensionamento do controlador é necessário definir as novas posições dos pólos do sistema, tendo em vista o objectivo que se pretende alcançar. Se as características desejadas para a estrutura estão bem definidas, então pode impor-se directamente a localização de cada pólo em correspondência com os parâmetros dinâmicos a atribuir a cada modo. Se tal não acontecer, pode adoptar-se um qualquer outro processo que permita estabelecer criteriosamente essas posições. Nestes casos, é vulgar o recurso a processos de optimização, tendo como objectivo obter a matriz de controlo que conduza a um desempenho óptimo do sistema, tendo naturalmente em conta todas variáveis envolvidas no problema.

Neste trabalho, optou-se por dar maior relevância ao método da alocação directa dos pólos por ser um processo mais intuitivo de dimensionamento, permitindo que haja uma maior sensibilidade no tratamento do problema em análise. Já a utilização de procedimentos óptimos fornece uma solução matemática para o problema do controlo, perdendo-se por vezes a intuição e a razoabilidade relativamente a aspectos práticos.

4.6.2 O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE PÓLOS

Como já foi referido, o comportamento dinâmico de um determinado sistema é condicionado pelo posicionamento dos seus pólos em malha fechada. Nas situações em que é feita uma abordagem clássica ao problema do controlo, os pólos são definidos como sendo as raízes do denominador da função de transferência que o representa, podendo ser determinados pelos processos descritos anteriormente. Porém, se a representação utilizada recorrer a modelos baseados numa formulação de espaço de estado, a determinação dos pólos segue um processo diferente. Para analisar o que se passa neste caso, comece-se por recordar que um sistema pode ser convenientemente representado através da equação de estado e equação de saída, tal como definidas na secção 3.4.4.1, dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Ora, devido à equivalência de representação de sistemas em funções de transferência ou em espaço de estado, foi visto na secção 3.4.5.1 que os pólos de qualquer função de transferência do sistema são idênticos aos valores próprios da matriz de estado correspondente. Isto porque a equação característica da matriz de estado dada por $|sI - A| = 0$, da qual resultam os valores próprios da matriz A , é a mesma equação que se obtém quando se iguala o denominador da função de transferência a zero, da qual resultam os seus pólos. Por conseguinte, conclui-se que o processo de controlo de um sistema através da modificação dos pólos da sua função de transferência é equivalente à modificação dos valores próprios da matriz de estado respectiva.

Considere-se então um sistema descrito através das equações anteriores, o qual se pretende controlar através de uma acção do tipo

$$u(t) = -Kx(t) \tag{4.33}$$

onde K representa o vector de ganho e $x(t)$ é o vector de estado. No caso geral de existirem várias acções de controlo simultâneas, K transforma-se numa matriz com tantas colunas quantas as acções de controlo, passando então a designar-se de matriz de ganho. Neste caso, porém, admite-se a utilização de uma única acção de controlo, tendo o vector de ganho a mesma ordem que a do vector de estado, de tal forma que da multiplicação dos dois resulte o escalar $u(t)$, isto é

$$u(t) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Substituindo a eq.(4.33) na equação de estado e colocando $x(t)$ em evidência, facilmente se obtém

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (4.34)$$

de onde se pode concluir que a introdução de uma acção de controlo do tipo definido anteriormente, afecta directamente a matriz de estado do sistema, passando esta a valer $A - BK$. Ora, estando os pólos do sistema em correspondência com valores próprios da matriz de estado, a alteração do posicionamento dos pólos do sistema para localizações desejadas por via da acção de controlo é um problema equivalente à alteração dos valores próprios da matriz de estado devido à actuação de $u(t)$. Neste caso, deverá ser possível encontrar o vector de ganho K de tal forma que a matriz $A - BK$ tenha um conjunto de valores próprios desejados. Este problema matemático é conhecido como o problema da alocação de pólos, o qual só pode ser determinado se o sistema obedecer a determinados requisitos, nomeadamente, se o sistema for controlável e observável [125].

4.6.3 NOÇÃO DE CONTROLABILIDADE

Diz-se que um sistema é controlável se e só se existir uma acção de controlo $u(t)$ não restringida, de tal forma que, num intervalo finito de tempo, consiga transferir o sistema do estado inicial para um outro qualquer estado final. É importante referir que a controlabilidade pode ser completa ou não. Um sistema diz-se completamente controlável se for possível transferir todos os seus estados, caso contrário haverá estados que não podem ser controlados. Isto não quer dizer que o sistema de controlo proposto não pode ser utilizado, mas significa que não é possível impor uma dinâmica completa ao sistema. Por outras palavras, se o sistema não for completamente controlável, haverá modos de vibração sobre os quais não se pode exercer qualquer acção de controlo.

Fisicamente, a controlabilidade está relacionada com o posicionamento da acção de controlo no sistema, pois depende essencialmente da composição da matriz B . Isto quer dizer que, se a acção de controlo estiver posicionada sobre um nodo de um determinado modo de vibração, será impossível controlar esse modo, pois a força modal correspondente será sempre nula. No entanto, tal facto pode não ser impeditivo da utilização deste sistema de controlo, pois pode dar-se o caso de este modo de vibração não ser importante na dinâmica global do sistema, podendo a força de controlo estar até melhor posicionada relativamente às componentes modais máximas dos modos mais relevantes.

Um sistema com n variáveis de estado será completamente controlável se a matriz de controlabilidade, tal como definida na eq.(3.57), tiver característica n , ou seja, se tiver n linhas ou colunas linearmente independentes [100]. No caso do sistema não ser completamente controlável, pode haver interesse em conhecer qual ou quais os modos de vibração não são controláveis. Este problema pode ser imediatamente resolvido, caso se disponha da representação gráfica de todos os modos de vibração do sistema, sendo identificados os que tiverem nodos coincidentes com a posição da acção de controlo. No

entanto, poderá também ser feita uma abordagem numérica baseada numa transformação linear da equação de estado de acordo com as regras descritas na secção 3.2.2, havendo interesse em utilizar a matriz modal de A como matriz de transformação. Então, designando de Φ a matriz de transformação, admita-se a seguinte mudança de coordenadas

$$x(t) = \Phi z(t)$$

Substituindo esta igualdade na equação de estado e pré-multiplicando o resultado por Φ^{-1} , fica

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}A\Phi z(t) + \Phi^{-1}Bu(t)$$

Neste caso, $\Phi^{-1}A\Phi$ resulta numa matriz diagonal cujos elementos são os valores próprios de A, ou seja a matriz espectral de A, e $\Phi^{-1}B$ resulta numa matriz cujos elementos serão todos diferentes de zero se o sistema for completamente controlável. Caso contrário, $\Phi^{-1}B$ terá elementos nulos em correspondência com os valores próprios não controláveis, podendo ser identificados relacionando a ordem dos elementos nulos de cada coluna de $\Phi^{-1}B$ com a ordem do valor próprio indicado na matriz $\Phi^{-1}A\Phi$. A representação do sistema através das equações anteriores é conhecida como representação modal da equação de estado, a qual permite identificar directamente os modos de vibração controláveis e não controláveis.

EXEMPLO 4.3

Pretende-se avaliar a controlabilidade da estrutura de 3 graus de liberdade indicada na figura 4.46, tendo em conta que a força de controlo pode ser aplicada horizontalmente, quer ao nível do 1º piso, quer ao nível do 2º piso. Para o efeito, pode considerar-se $m=1t$, $k=50kN/m$ e $c=250Ns/m$.

As matrizes de massa, rigidez e amortecimento em correspondência com os graus de liberdade indicados valem

$$M_s = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & & 1000 \end{bmatrix} \text{kg} \quad K_s = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \times 10^4 \text{N/m} \quad C_s = \begin{bmatrix} 500 & -250 & 0 \\ -250 & 500 & -250 \\ 0 & -250 & 500 \end{bmatrix} \text{Ns/m}$$

sendo que, a matriz de estado, tal como definida na secção 3.4.4.1, resulta em

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -100 & 50 & 0 & -0,50 & 0,25 & 0 \\ 50 & -100 & 50 & 0,25 & -0,5 & 0,25 \\ 0 & 50 & -100 & 0 & 0,25 & -0,5 \end{bmatrix}$$

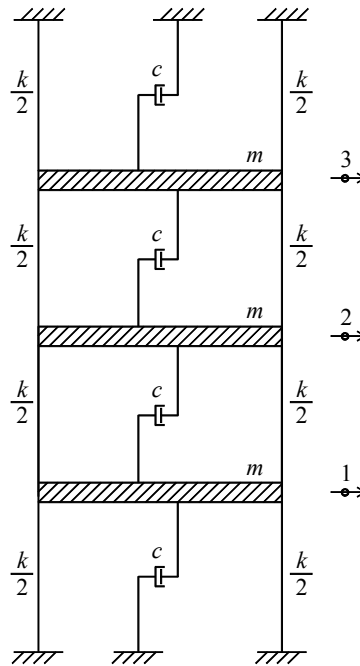


Figura 4.46 – Estrutura de 3 graus de liberdade

Os valores e vectores próprios da matriz A , podem ser calculados pelo processo indicado na secção 3.2.1, chegando-se à seguinte matriz espectral Ω e matriz modal Φ

$$\Omega = \begin{bmatrix} -0,073 - j5,41 & & & & & & \\ & -0,073 + j5,41 & & & & & \\ & & -0,25 - j10,00 & & & & \\ & & & -0,25 + j10,00 & & & \\ & & & & -0,427 - j13,06 & & \\ & & & & & -0,427 + j13,06 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0,0012 + j0,09 & -0,0012 - j0,09 & 0,0018 - j0,07 & 0,0018 + j0,07 & 0,0012 - j0,04 & 0,0012 + j0,04 \\ -0,0017 + j0,13 & -0,0017 - j0,13 & 0,0000 - j0,00 & 0,0000 + j0,00 & -0,0018 + j0,05 & -0,0018 - j0,05 \\ -0,0012 + j0,09 & -0,0012 - j0,09 & -0,0018 + j0,07 & -0,0018 - j0,07 & 0,0012 - j0,04 & 0,0012 + j0,04 \\ 0,492 & 0,492 & -0,704 & -0,704 & -0,499 & -0,499 \\ 0,696 & 0,696 & 0,000 & 0,000 & 0,705 & 0,705 \\ 0,492 & 0,492 & 0,704 & 0,704 & -0,499 & -0,499 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios indicados na diagonal da matriz espectral formam pares de números complexos conjugados, estando em correspondência com as frequências naturais do sistema e respectivos coeficientes de amortecimento. Neste caso, recorrendo à eq.(4.27), pode deduzir-se que

$$\lambda_{1,2} = -0,073 \pm j5,41 \rightarrow \omega_1 = 5,41 \text{ rad/s e } \zeta_1 = 1,35\%$$

$$\lambda_{3,4} = -0,25 \pm j10,00 \rightarrow \omega_2 = 10,00 \text{ rad/s e } \zeta_2 = 2,50\%$$

$$\lambda_{5,6} = -0,427 \pm j13,06 \rightarrow \omega_3 = 13,06 \text{ rad/s e } \zeta_3 = 3,27\%$$

Por outro lado, as componentes dos modos de vibração do sistema podem ser extraídas dos vectores próprios correspondentes a cada valor próprio. Devido ao facto dos vectores próprios terem dimensão $2N$, sendo N o número de graus de liberdade do sistema, constata-se que os elementos que efectivamente caracterizam a deformada do modo são os que constam da semi-matriz inferior da matriz modal [128]. Neste caso obtém-se

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0,492 \\ 0,696 \\ 0,492 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -0,704 \\ 0 \\ 0,704 \end{bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} -0,499 \\ 0,705 \\ -0,499 \end{bmatrix}$$

estando as correspondentes configurações representadas na seguinte figura

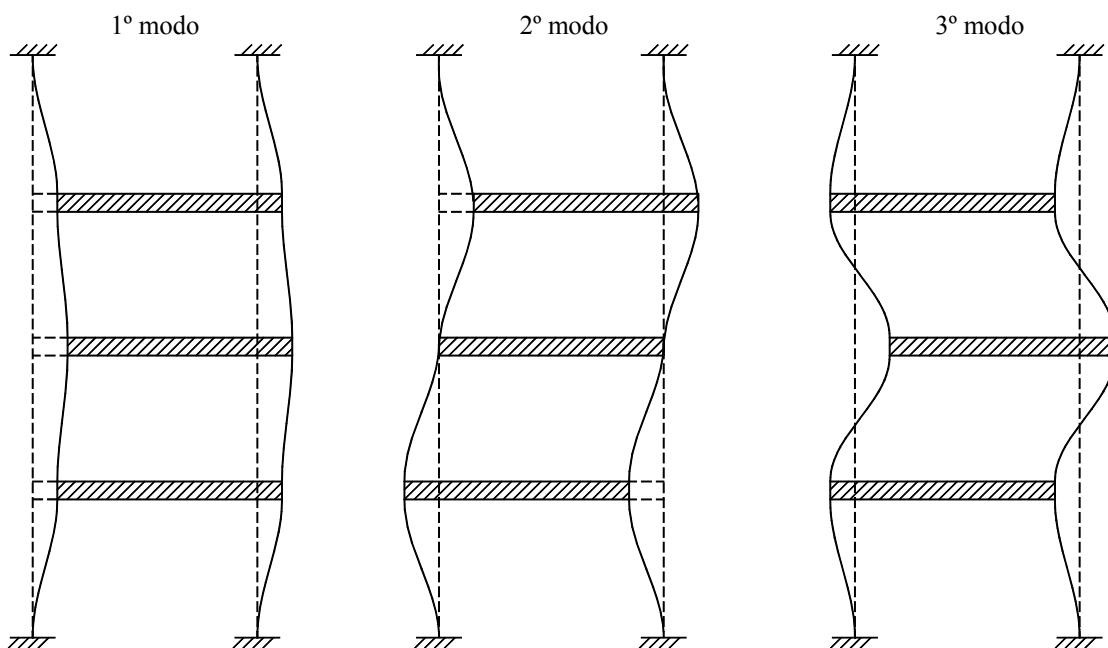


Figura 4.47 – Configuração dos modos de vibração da estrutura de 3 graus de liberdade

Nesta fase, está-se em condições de avaliar a controlabilidade do sistema, podendo de imediato concluir-se que, se a força de controlo estiver posicionada ao nível do 1º piso, o sistema será completamente controlável, pois, neste ponto todos os modos vibração têm componentes modais não nulas. No entanto, se a força estiver posicionada ao nível do 2º piso, o sistema não será completamente controlável, em virtude do 2º modo de vibração ter aqui componente modal nula, sendo impossível controlá-lo por esta via. A controlabilidade do sistema também pode ser avaliada por intermédio da análise da matriz de controlabilidade, a qual depende da matriz de estado e da matriz de controlo. Neste caso, como só existe uma força de controlo, a matriz de controlo transforma-se num vector coluna determinado como descrito na secção 3.4.4.1. Considerando primeiramente a hipótese da força de controlo estar posicionada ao nível do 1º piso, o vector de controlo fica

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de controlabilidade respectiva pode calculada a partir da eq.(3.57), ou seja

$$R = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B] = \begin{bmatrix} 0 & 0,001 & -0,0005 & -0,0997 & 0,1248 & 12,369 \\ 0 & 0 & 0,0003 & 0,0498 & -0,0998 & -9,869 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0,0249 & 2,444 \\ 0,001 & -0,0005 & -0,0997 & 0,1248 & 12,369 & -26,119 \\ 0 & 0,0003 & 0,0498 & -0,0998 & -9,869 & 26,100 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0,0249 & 2,444 & -11,169 \end{bmatrix}$$

A característica desta matriz pode ser obtida por diversos processos, como por exemplo através método de eliminação de Gauss, podendo constatar-se que, neste caso, a característica vale 6. Ora, tratando-se de um sistema de 6ª ordem, conclui-se que o sistema é completamente controlável. Já no caso em que a força de controlo está aplicada ao nível do 2º piso, o vector de controlo modifica-se para

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,001 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a matriz de controlabilidade passa a ser composta por

$$R = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ A^4B \ A^5B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,003 & 0,0498 & -0,0998 & -9,869 \\ 0 & 0,001 & -0,0005 & -0,0996 & 0,1497 & 14,813 \\ 0 & 0 & 0,0003 & 0,0498 & -0,0998 & -9,869 \\ 0 & 0,003 & 0,0498 & -0,0998 & -9,869 & 26,10 \\ 0,001 & -0,0005 & -0,0966 & 0,1497 & 14,813 & -37,29 \\ 0 & 0,0003 & 0,0498 & -0,0998 & -9,869 & 26,10 \end{bmatrix}$$

cuja característica vale 4, o que significa que, nestas circunstâncias, o sistema não é completamente controlável.

O processo acabado de referir não permite avaliar quais os modos controláveis e não controláveis, conduzindo apenas à determinação do nível de controlabilidade do sistema. Então, pode alternativamente seguir-se o processo de converter o modelo inicialmente dado na sua representação modal. Neste caso, como já se referiu, a matriz de estado passa a ter a mesma composição que a matriz espectral, interessando apenas analisar o conteúdo do vector de controlo. Considerando a actuação da força de controlo ao nível do primeiro piso, este vector vale

$$\Phi^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,254 - j0,0034 \\ 0,254 + j0,0034 \\ -0,355 + j0,0089 \\ -0,355 - j0,0089 \\ -0,250 + 0,0082 \\ -0,250 - 0,0082 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

podendo constatar-se que não possui quaisquer elementos nulos, o que significa que este sistema é completamente controlável, como aliás já se tinha concluído anteriormente. Fazendo a mesma análise para o caso em que a força de controlo se situa ao nível do 2º piso, chega-se ao seguinte vector de controlo

$$\Phi^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,360 - j0,0049 \\ 0,360 + j0,0049 \\ 0 \\ 0 \\ 0,355 - j0,0116 \\ 0,355 + j0,0116 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Neste caso, o vector tem elementos nulos em correspondência com os valores próprios associados ao 2º modo de vibração, reforçando-se a ideia que este sistema não é completamente controlável, em virtude da força de controlo não poder actuar sobre esta configuração modal específica. Por último, admitindo a possibilidade da actuação simultânea das forças de controlo ao nível do 1º e do 2º piso, pode constatar-se que a matriz de controlo \mathbf{B} passa a ter dimensões 6×2 , ficando cada coluna associada a cada acção de controlo $u_1(t)$ e $u_2(t)$. Nesta situação, a dimensão da matriz de controlabilidade tem dimensões 6×12 , ou seja $n \times nm$, sendo n a ordem do sistema e m o número de forças de controlo, podendo verificar-se que, para o problema em análise, a característica desta matriz vale 6. Isto significa que, atendendo ao conjunto das forças actuantes, o sistema é completamente controlável em termos globais, apesar de poderem existir forças de controlo que só por si não serão capazes de excitar determinados modos de vibração.

4.6.4 NOÇÃO DE OBSERVABILIDADE

O conceito da observabilidade de um sistema está de certa forma relacionado com o conceito de controlabilidade, mas, neste caso, na perspectiva da observação da resposta dos modos de vibração da estrutura, e não na perspectiva do controlo desses modos. Por definição, um sistema diz-se observável se e só se qualquer estado inicial puder ser determinado pela observação de $y(t)$ durante um intervalo finito de tempo [100]. Um sistema será completamente observável se for possível observar todos os seus estados, caso contrário, não será completamente observável, ou seja, haverá modos de vibração que não contribuem para a saída do sistema definida pela matriz de saída C . Isto quer dizer que se um sensor estiver posicionado sobre um nodo de um determinado modo de vibração, será impossível medir a contribuição desse modo para a variável de saída associada a esse ponto.

Um sistema será completamente observável se a matriz de observabilidade, tal como definida na eq.(3.62), tiver característica n , sendo n o número de variáveis de estado [100]. No caso do sistema não ser completamente observável, podem identificar-se os modos não observáveis recorrendo à representação gráfica de todas as configurações modais, ou, em alternativa, recorrendo à representação do sistema na sua forma modal. Neste último caso, se a matriz de saída $C\Phi$ for composta por elementos não nulos, a observabilidade será completa, caso contrário, terá elementos nulos em correspondência com os valores próprios da matriz espectral, cuja relação permite identificar quais os modos não observáveis.

O facto de um sistema ser completamente observável não quer dizer que todos os estados estão a ser efectivamente observados, mas significa que os estados eventualmente não observados podem ser estimados a partir de relações que os ligam com os estados que estão a ser directamente medidos. Esta noção é extremamente importante porque, como se sabe, a modelação de uma estrutura vulgar envolve frequentemente um elevado número de graus de liberdade, tornando-se impraticável medir na íntegra o vector de estado do sistema. Por outro lado, como se sabe, a obtenção do vector de estado é uma tarefa essencial para a determinação da acção de controlo. Então, nestes casos, pode recorrer-se a um estimador de estado, o qual, tendo por base as medições levadas a efeito num número limitado de graus de liberdade, permite estimar o vector de estado completo. Este assunto será tratado em detalhe na secção 4.6.6.

Uma forma de tentar reduzir o número de graus de liberdade a medir, será utilizar uma menor discretização do sistema estrutural, ou então, tendo um modelo numérico complexo, condensá-lo de modo a reduzir a sua representatividade a um menor número de modos de vibração. Embora esta operação seja desejável para a operacionalidade do sistema de controlo, é no entanto necessário ter algum cuidado com este procedimento, pois a utilização de modelos numéricos de ordem reduzida pode, na prática, aumentar a vulnerabilidade do sistema à ocorrência de “spillover”[113]. Este fenómeno de instabilidade é despoletado devido à insuficiente discretização do modelo, que faz com que os modos de vibração de ordem mais elevada sejam ignorados na modelação numérica, apesar de na verdade estarem presentes na medição da resposta estrutural, e logo, contribuirão para o cálculo da acção de controlo sobre os

primeiros modos. Além disso, a própria acção de controlo assim gerada acaba por excitar os modos de ordem superior, sendo esta interacção em malha fechada, associada a baixo amortecimento estrutural, que está na origem deste problema. Por outras palavras, pode dizer-se que os modos de ordem superior não modelados numericamente, funcionam como ruído no controlo dos modos de ordem inferior, de tal forma que, se os modos ignorados tiverem uma participação significativa na resposta do sistema (principalmente nas frequências mais elevadas), o sistema entra em instabilidade.

EXEMPLO 4.4

Pretende-se avaliar a observabilidade da estrutura de 3 graus de liberdade indicada no exemplo anterior, admitindo que se dispõe de um único transdutor de deslocamento, o qual poderá ser adaptado alternadamente em qualquer um dos pisos.

Neste caso, facilmente se poderá concluir através da observação das configurações modais que, se o sensor estiver posicionado quer ao nível do 1º piso quer ao nível do 3º piso, o sistema será completamente observável na medida em que todos os modos têm componentes modais nesses pontos. Em contrapartida, se o sensor estiver posicionado no 2º piso, o 2º modo de vibração será inobservável por este ter aqui componente modal nula. A observabilidade do sistema poderá também ser avaliada através da determinação da característica da matriz de observabilidade definida pela eq.(3.62). No caso de se considerar um só sensor posicionado ao nível do 1º piso, a matriz de saída transforma-se num único vector linha composto por

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

dando origem à seguinte matriz de observabilidade

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & 50 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 63 & -50 & 13 & -100 & 50 & 0 \\ 12456 & -9956 & 2481 & 125 & -100 & 25 \\ -17567 & 17463 & -7480 & 12369 & -9869 & 2444 \end{bmatrix}$$

a qual tem característica 6, ou seja, o sistema é, nestas circunstâncias, completamente observável. Conclusão idêntica poderia obter-se ao considerar a utilização do sensor ao nível do 3º piso. Porém, no caso de este transdutor estar posicionado ao nível do 2º piso, o vector de saída transforma-se em

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

dando origem à seguinte matriz de controlabilidade

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 50 & -100 & 50 & 0 & -1 & 0 \\ -50 & 75 & -50 & 50 & -100 & 50 \\ -9956 & 14937 & -9956 & -100 & 150 & -100 \\ 17463 & -24947 & 17463 & -9869 & 14813 & -9869 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tem característica 4, o que leva a concluir que o sistema que ela representa não é completamente observável. Agora, veja-se o problema da controlabilidade através da análise da matriz de saída, resultante da conversão do modelo em espaço de estado inicialmente dado para uma representação modal. Considerando a matriz de saída respeitante ao posicionamento do sensor no 1º piso, obtém-se

$$C\Phi = \begin{bmatrix} -1,2 + j90,8 \\ -1,2 - j90,8 \\ -1,8 - j70,3 \\ -1,8 + j70,3 \\ 1,2 - j38,1 \\ 1,2 + j38,1 \end{bmatrix}^T \times 10^{-3}$$

Esta matriz não tem quaisquer elementos nulos, o que significa que o sistema é completamente observável. Conclusão idêntica pode ser retirada no caso em que o sensor está colocado no 3º piso. Por último, considere-se o posicionamento do sensor no 2º piso. Neste caso, a matriz de saída vale

$$C\Phi = \begin{bmatrix} -1,7 + j128,5 \\ -1,7 - j128,5 \\ 0 \\ 0 \\ -1,8 + j53,9 \\ -1,8 - j53,9 \end{bmatrix}^T \times 10^{-3}$$

Podendo constatar-se que existem dois elementos nulos em correspondência com o par de valores próprios associados ao 2º modo de vibração, ou seja, este modo não pode ser observado desta posição.

4.6.5 CONTROLO POR ALOCAÇÃO DE PÓLOS

4.6.5.1 DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE GANHO

Já foi referido que o problema da alocação de pólos consiste na determinação da matriz de ganho K , de tal forma que a matriz $A-BK$ tenha valores próprios pré-definidos em correspondência com uma dinâmica que se quer impor à estrutura. Assumindo que toda as variáveis de estado estão disponíveis para medida, ou, se tal não acontecer, que possam ser obtidas por estimação, será possível alocar arbitrariamente todos os valores próprios do sistema, se e só se o sistema for completamente controlável [100, 125]. Naturalmente que esta afirmação é válida no pressuposto de que o sistema é linear e invariável no tempo e de que não existe qualquer limitação à acção de controlo. Neste caso, a matriz de ganho (também conhecida como matriz de realimentação) pode ser determinada impondo que a equação característica da matriz $A-BK$, da qual resultam os seus valores próprios, seja igual à equação polinomial definida pelos valores próprios desejados. Ou seja, sabendo que os valores próprios de $A-BK$ se obtêm a partir das raízes de

$$|(A - BK) - sI| = 0 \Rightarrow |sI - (A - BK)| = 0 \Rightarrow s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

e que esses valores próprios devem ser iguais aos valores desejados $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$, então, impondo esses valores como raízes da equação característica, obtém-se

$$s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = (s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2) \dots (s - \hat{\lambda}_n) \quad (4.35)$$

Desta igualdade podem retirar-se os valores dos ganhos que formam a matriz de realimentação, igualando os coeficientes de um e de outro lado da equação.

EXEMPLO 4.5

Dado o pórtico de 2 graus de liberdade indicado na Figura 4.48, pretende-se determinar a matriz de ganho de tal forma que, por intermédio de uma acção de controlo $u(t) = -Kx(t)$ aplicada no último piso, o sistema controlado tenha uma dinâmica caracterizada por frequências naturais $f_1 = 6\text{Hz}$ e $f_2 = 12\text{Hz}$, e coeficientes de amortecimento $\xi_1 = \xi_2 = 10\%$. Considera-se que todas as variáveis de estado podem ser observadas directamente através de sensores adaptados aos dois pisos. Considera-se também que $m=1\text{t}$, $k=1\text{MN/m}$ e $c=0,5\text{kNs/m}$.

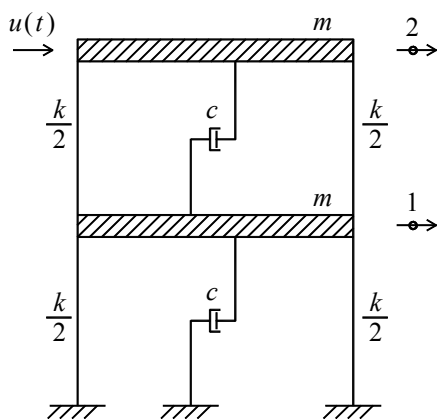


Figura 4.48 – Estrutura de 2 graus de liberdade

As matrizes de massa, rigidez e amortecimento, em correspondência com os graus de liberdade indicados na figura, valem

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t \quad K_s = \begin{bmatrix} 2000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} \text{kN/m} \quad C_s = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \text{kNs/m}$$

Este sistema pode ser representado pela seguinte equação de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2000 & 1000 & -1 & 0,5 \\ 1000 & -1000 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios da matriz de estado podem ser calculados e posteriormente relacionados com as frequências naturais e coeficientes de amortecimento do sistema, chegando-se a

$$\lambda_{1,2} = -0,0955 \pm j19,54 \rightarrow \omega_1 = 19,54 \text{rad/s} ; f_1 = 3,11 \text{Hz} ; \xi_1 = 0,49\%$$

$$\lambda_{3,4} = -0,6564 \pm j51,16 \rightarrow \omega_2 = 51,16 \text{rad/s} ; f_2 = 8,14 \text{Hz} ; \xi_2 = 1,28\%$$

Sendo a dinâmica pretendida para o sistema caracterizada por $f_1 = 6\text{Hz}$, $f_2 = 12\text{Hz}$ e $\xi_1 = \xi_2 = 10\%$, os valores próprios da estrutura controlada devem modificar-se para

$$\lambda_{1,2} = -\xi_1 \omega_1 \pm j \omega_1 \sqrt{1 - \xi_1^2} = -3,7699 \pm j37,51$$

$$\lambda_{3,4} = -\xi_2 \omega_2 \pm j \omega_2 \sqrt{1 - \xi_2^2} = -7,5398 \pm j75,02$$

Esta dinâmica só poderá ser implementada se o sistema for completamente controlável, podendo para isso calcular-se a característica da matriz de controlabilidade. Neste caso, esta matriz resulta em

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0005 & 0,9992 \\ 0 & 0,001 & -0,0005 & -0,9995 \\ 0 & 0,0005 & 0,9992 & -2,999 \\ 0,001 & -0,0005 & -0,9995 & 1,9994 \end{bmatrix} \times 10^3$$

cuja característica vale 4, o que significa que o sistema é completamente controlável, pois é de 4ª ordem. Ora, como só existe uma acção de controlo, a matriz de ganho reduz-se a um vector linha com a seguinte composição

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$$

Portanto, os valores próprios da matriz $A-BK$ podem ser encontrados resolvendo a seguinte equação

$$|sI - (A - BK)| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2000 & 1000 & -1 & 0,5 \\ 1000 & -1000 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1, k_2, k_3, k_4 \end{bmatrix} \right) \right| = 0$$

chegando-se à seguinte equação característica

$$s^4 + (k_4 + 1,5)s^3 + (k_2 + 0,5k_3 + k_4 + 3000,25)s^2 + (0,5k_1 + k_2 + 1000k_3 + 2000k_4 + 1000)s + 1000k_1 + 2000k_2 + 1000000 = 0$$

Pretendendo-se que as raízes desta equação sejam iguais aos valores próprios desejados, $\lambda_{1,2} = -3,7699 \pm j37,51$ e $\lambda_{3,4} = -7,5398 \pm j75,02$, ela será equivalente a

$$(s + 3,7699 - j37,51)(s + 3,7699 + j37,51)(s + 7,5398 - j75,02)(s + 7,5398 + j75,02) = 0$$

a qual, após expansão, fica

$$s^4 + 22,62s^3 + 7219,76s^2 + 64293,9s + 8079380 = 0$$

Finalmente, igualando coeficiente a coeficiente esta equação com a equação característica anterior, chega-se ao seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} k_4 + 1,5 = 22,62 \\ k_2 + 0,5k_3 + k_4 + 3000,25 = 7219,76 \\ 0,5k_1 + k_2 + 1000k_3 + 2000k_4 + 1000 = 64293,9 \\ 1000k_1 + 2000k_2 + 1000000 = 8079380 \end{cases}$$

do qual resulta $k_1 = -1300$, $k_2 = 4190$, $k_3 = 17,5$ e $k_4 = 21,1$, concluindo-se que a matriz de ganho procurada vale

$$K = [-1300 \quad 4190 \quad 17,5 \quad 21,1]$$

4.6.5.2 RECURSO AO MODELO NA FORMA CANÓNICA CONTROLÁVEL

A determinação da matriz de ganho, utilizando a metodologia descrita na secção anterior, pode conduzir a um processo bastante fastidioso no caso de sistemas com ordens mais elevadas. É geralmente aceite que esse procedimento é justificável para sistemas até à 4ª ou 5ª ordem [125], sendo preferível optar por outros métodos no caso de sistemas mais complexos. Um dos métodos alternativos baseia-se na representação do sistema na sua forma canónica controlável, tal como descrita na secção 3.4.4.2. Neste caso, é necessário proceder a uma mudança de coordenadas utilizando a matriz de transformação T definida na eq.(3.56), de tal forma que

$$x(t) = T r(t)$$

fazendo com que a equação de estado passe a ser representada por

$$\dot{r}(t) = T^{-1} A T r(t) + T^{-1} B u(t) \quad (4.36)$$

Devido a esta transformação linear, a acção de controlo $u(t) = -Kx(t)$ é expressa na forma

$$u(t) = -K T r(t) \quad (4.37)$$

podendo esta relação ser simplificada definindo

$$K' = K T = \begin{bmatrix} k'_n & k'_{n-1} & \dots & k'_1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Substituindo a eq.(4.37) na eq.(4.36), obtém-se

$$\dot{r}(t) = T^{-1} A T r(t) - T^{-1} B K T r(t)$$

ou, colocando $r(t)$ em evidência

$$\dot{r}(t) = (T^{-1} A T - T^{-1} B K T) r(t) \quad (4.39)$$

Esta equação expressa um problema de alocação de pólos idêntico ao da eq.(4.34), com a particularidade que, apesar do sistema estar representado na sua forma controlável, possui uma dinâmica igual ao do sistema representado na sua forma geral, isto é, os valores próprios da matriz $A - BK$ são os mesmos que o da matriz $T^{-1} A T - T^{-1} B K T$. Para demonstrar este facto, recorda-se que, sendo T uma matriz de transformação não singular, as matrizes $A - BK$ e $T^{-1} (A - BK) T$ são similares, e portanto, têm os mesmo valores próprios. O desenvolvimento desta segunda matriz conduz a

$$T^{-1} (A - BK) T = T^{-1} A T - T^{-1} B K T$$

provando-se assim essa relação. Então, a questão que se coloca é saber qual deverá ser a composição da matriz $K'=KT$, de tal forma que a matriz $T^{-1}AT - T^{-1}BKT$ tenha um conjunto de valores próprios previamente definidos, os quais são os mesmos que os pretendidos para a matriz $A - BK$. Para resolver este problema, pode começar-se por achar a equação característica da matriz $T^{-1}AT - T^{-1}BKT$, tendo em conta as equações (3.59) e (4.38), isto é

$$\begin{aligned} |sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| &= \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_n & k'_{n-1} & k'_{n-2} & \cdots & k'_1 \end{bmatrix} \right| = \\ &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ (a_n + k'_n) & (a_{n-1} + k'_{n-1}) & (a_{n-2} + k'_{n-2}) & \cdots & (s + a_1 + k'_1) \end{vmatrix} = \\ &= s^n + (a_1 + k'_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-2} + k'_{n-2})s^2 + (a_{n-1} + k'_{n-1})s + (a_n + k'_n) = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como se pode observar, os coeficientes desta equação característica referente ao sistema com controlo podem ser imediatamente encontrados sem necessidade de proceder ao cálculo do determinante, o que justifica o recurso a este método no caso de sistemas de ordem elevada. Adicionalmente, também não será necessário resolver um sistema de equações, na medida em que, sendo os valores próprios desejados $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$, a equação característica correspondente será

$$(s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2) \cdots (s - \hat{\lambda}_n) = s^n + \hat{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \hat{a}_{n-1} s + \hat{a}_n \quad (4.41)$$

Ora, impondo igualdade entre os coeficientes das equações características (4.40) e (4.41), obtém-se

$$\begin{aligned} a_1 + k'_1 &= \hat{a}_1 \\ &\vdots \\ a_{n-1} + k'_{n-1} &= \hat{a}_{n-1} \\ a_n + k'_n &= \hat{a}_n \end{aligned}$$

Então, os coeficientes da matriz de ganho podem ser obtidos a partir da equação (4.38), isto é

$$K = K'T^{-1} = \begin{bmatrix} k'_n & k'_{n-1} & \cdots & k'_1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{a}_n - a_n & \hat{a}_{n-1} - a_{n-1} & \cdots & \hat{a}_1 - a_1 \end{bmatrix} T^{-1} \quad (4.42)$$

EXEMPLO 4.6

Pretende-se calcular a matriz de ganho nas circunstâncias do exemplo anterior, recorrendo à forma canónica controlável.

O primeiro passo na resolução deste problema será definir a matriz de transformação $T=RW$ para que se possa converter o modelo inicialmente dado para a forma canónica pretendida. Sabendo que os valores próprios da matriz de estado inicial valem $\lambda_{1,2} = -0,0955 \pm j19,54$ e $\lambda_{3,4} = -0,6564 \pm j51,16$, a respectiva equação característica é dada por

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = s^4 + 1,5s^3 + 3000,5s^2 + 1000,09s + 1000090 = 0$$

Os coeficientes $a_1=1,5$, $a_2=3000,5$, $a_3=1000,09$ e $a_4=1000090$, permitem obter directamente a matriz W tal como definida na eq.(3.58), resultando

$$W = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000,09 & 3000,5 & 1,5 & 1 \\ 3000,5 & 1,5 & 1 & 0 \\ 1,5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz de controlabilidade R já foi calculada no exemplo anterior, podendo de seguida achar-se a matriz de transformação

$$T = RW = \begin{bmatrix} 1000 & 0,5 & 0 & 0 \\ 2000,3 & 1 & 1 & 0 \\ 0,125 & 1000 & 0,5 & 0 \\ -0,035 & 2000,3 & 1000 & 1000 \end{bmatrix}$$

A equação característica correspondente aos valores próprios desejados definidos anteriormente, vale

$$(s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2)(s - \hat{\lambda}_3)(s - \hat{\lambda}_4) = s^n + \hat{a}_1s^{n-1} + \dots + \hat{a}_{n-1}s + \hat{a}_n = s^4 + 22,62s^3 + 7219,76s^2 + 642939s + 8079380 = 0$$

Neste caso, $\hat{a}_1 = 22,62$, $\hat{a}_2 = 7219,76$, $\hat{a}_3 = 64293,9$ e $\hat{a}_4 = 8079380$. Logo, nesta fase, todos os elementos necessário para o cálculo da matriz de ganho são conhecidos, podendo aplicar-se a eq.(4.42)

$$K = K'T^{-1} = [\hat{a}_4 - a_4 \quad \hat{a}_3 - a_3 \quad \hat{a}_2 - a_2 \quad \hat{a}_1 - a_1] T^{-1} = [-1300 \quad 4190 \quad 17,5 \quad 21,1]$$

podendo constatar-se que o resultado obtido é igual ao do exemplo anterior.

4.6.5.3 UTILIZAÇÃO DA FÓRMULA DE ACKERMANN

Em alternativa aos métodos expostos anteriormente, a fórmula de Ackermann possibilita igualmente a determinação da matriz de ganho do controlador, sendo porventura o método mais expedito mesmo quando aplicado a sistemas de ordem elevada. Não se descreverá aqui o processo seguido para a sua obtenção, podendo, para o efeito, consultar-se bibliografia da especialidade [29, 100]. Segundo esta fórmula, a matriz de realimentação a utilizar num sistema de ordem n , de tal forma que tenha uma dinâmica imposta por valores próprios pré-definidos, é dada por

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] R^{-1} \beta(A) \quad (4.43)$$

sendo R é a matriz de controlabilidade e $\beta(A)$ é uma matriz dada por

$$\beta(A) = A^n + \hat{a}_1 A^{n-1} + \dots + \hat{a}_{n-1} A + \hat{a}_n I$$

onde todos as variáveis intervenientes têm o significado já descrito anteriormente.

EXEMPLO 4.7

Pretende-se utilizar a fórmula de Ackermann para determinar a matriz de ganho nas condições descritas nos dois anteriores problemas.

Neste caso, tendo sido já calculada a matriz de controlabilidade, falta definir a matriz $\beta(A)$ tendo em consideração os coeficientes da equação característica em correspondência com os valores próprios desejados, obtendo-se

$$\beta(A) = A^4 + 22,62A^3 + 7219,76A^2 + 64293,9A + 8079380 I = \begin{bmatrix} -130,6 & 418,8 & 1,686 & 2,321 \\ 418,8 & 288,1 & 2,321 & 4,007 \\ -1050,8 & -635,3 & -131,2 & 418,5 \\ -635,3 & -1686,1 & 418,5 & 287,3 \end{bmatrix} \times 10^4$$

conduzindo à seguinte matriz de ganho

$$K = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] R^{-1} \beta(A) = [-1300 \ 4190 \ 17,5 \ 21,1]$$

cuja composição coincide naturalmente com os resultados anteriores.

4.6.6 DIMENSIONAMENTO DE OBSERVADORES DE ESTADO

4.6.6.1 ASPECTOS GERAIS

A utilização de observadores de estado é inevitável em muitas situações práticas, pois, quando o sistema tem um número de graus de liberdade relativamente elevado, torna-se impraticável a instalação de sensores de deslocamento e de velocidade em todos esses os pontos. Pode dizer-se até que, mesmo existindo condições para proceder à observação directa do vector de estado, em muitos casos nem haverá necessidade de o fazer, se o número de variáveis medidas for suficiente para conduzir a estimativas precisas das variáveis não medidas.

No caso particular das estruturas de Engenharia Civil, os observadores de estado revelam ser uma ferramenta importante na implementação real de sistemas de controlo baseados na realimentação do vector de estado completo, porque, em geral, a medição rigorosa de deslocamentos é dificultada pelas dimensões que normalmente estes sistemas apresentam. Por outro lado, a medição de velocidades não é tão problemática, pois geralmente pode ser realizada com suficiente rigor integrando os sinais provenientes de acelerómetros. A obtenção de deslocamentos por dupla integração das acelerações pode não ser a melhor solução para este problema, conduzindo por vezes a diferenças significativas, em particular decorrentes do facto de muitos sensores não apresentarem uma resposta linear na gama de frequências que caracterizam estes sistemas. Nestes casos, poderá ser preferível recorrer a observadores de estado para estimar os deslocamentos da estrutura, tendo por base a medição das velocidades. A eficácia deste processo depende, no entanto, de uma boa calibração do estimador e do modelo numérico do sistema.

Ao invés desta situação, por vezes tem-se a possibilidade de medir deslocamentos da estrutura e a necessidade de, a partir deles, obter as correspondentes velocidades. Neste caso também é necessário ter algum cuidado, porque a operação de derivação é sensível à presença de ruído no sinal, conduzindo a sua amplificação [96]. Nestas circunstâncias, pode optar-se também por utilizar um observador de estado que estime a componente das velocidades do sistema a partir da medição dos correspondentes deslocamentos. A utilização de filtros também pode constituir uma boa solução para minimizar o problema, no entanto, será necessário ter em conta que tais dispositivos conduzem a um atraso no sinal que, a ser significativo, degrada o desempenho do sistema de controlo, podendo até conduzir à sua instabilidade.

Seguidamente apresentam-se as equações que estão na base da concepção dos observadores de estado e do seu dimensionamento. Neste trabalho dar-se-á particular atenção aos observadores de estado de ordem completa, ou seja, independentemente do número de variáveis que possam ser medidas directamente, a resposta do observador será sempre a estimativa para todas as variáveis de estado, representadas pelo vector $\tilde{x}(t)$. Em muitos casos práticos, este vector é realimentado na íntegra no ciclo de controlo, pois as estimativas feitas pelo observador das variáveis que são directamente medidas são geralmente bastante precisas, não havendo a necessidade de separar as variáveis observadas das estimadas.

4.6.6.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se um sistema dinâmico cujo comportamento é definido pelas equações (3.49) e (5.59), cujas variáveis de estado não estão todas disponíveis para medição directa. Então, pode recorrer-se a um observador de estado caracterizado pela seguinte equação

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\tilde{x}(t)] \quad (4.44)$$

onde $\tilde{x}(t)$ representa a estimativa do vector de estado, $y(t)$ é a variável de estado disponível para medida e L é uma matriz cujo objectivo é introduzir um factor de peso a um termo de correcção baseado na diferença verificada entre a resposta medida $y(t)$ e a resposta estimada $C\tilde{x}$. Esta equação é conhecida como a equação de Luenberger [79], a qual traduz o modelo dinâmico da estimativa do erro, e não do sistema estrutural, como à partida se poderia pensar. Repare-se que as variáveis de entrada são $u(t)$ e $y(t)$ e a saída é $\tilde{x}(t)$, ou seja, conhecidas a solicitação exterior e a saída do sistema, a resolução da equação (4.44) fornece a estimativa do vector de estado, tendo por base as matrizes A e B da estrutura em análise.

Defina-se o vector erro $e(t)$ como sendo a diferença entre o vector de estado efectivo e o vector de estado estimado, ou seja

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \quad (4.45)$$

cuja derivada vale

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) \quad (4.46)$$

Admitindo que o comportamento do sistema é definido pela equação (3.49) e que o observador de estado é caracterizado pela eq.(4.44), a substituição destas equações na eq.(4.46) permite escrever

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\tilde{x}(t) - Bu(t) - L[y(t) - C\tilde{x}(t)]$$

ou, sabendo que $y(t)=Cx(t)$

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (4.47)$$

de onde se conclui que a dinâmica do erro é determinada pelos valores próprios da matriz $A-LC$. Para se compreender bem este resultando, repare-se na semelhança entre a eq.(4.47) e a eq.(4.34) relativa ao comportamento dinâmico de um sistema estrutural. Assim como os valores próprios da matriz $A-BK$ condicionam a dinâmica de uma estrutura, da mesma maneira os valores próprios de $A-LC$ ditam o comportamento do observador na estimação das variáveis de estado. Isto é, se por exemplo, os valores próprios da matriz $A-LC$ estiverem em correspondência com frequências naturais e coeficientes de

amortecimento elevados, o erro tenderá rapidamente para zero, da mesma maneira que uma estrutura também tenderia para a resposta nula. Por outro lado, se os valores próprios de $A-LC$ corresponderem a uma dinâmica baixa, o erro demora a estabilizar podendo até atingir valores elevados, o que também aconteceria à resposta estrutural de um sistema mecânico.

Portanto, o dimensionamento de um observador de estado depende essencialmente da composição matriz L , a qual se designa de matriz de ganho do observador. Será fácil perceber que, idealmente, a dinâmica associada à estimação das variáveis de estado terá necessariamente de ser caracterizada por valores próprios correspondentes a elevadas frequências e coeficientes de amortecimento, porque só assim se manterá o erro com um valor próximo de zero, produzindo-se desta maneira boas estimativas do vector de estado. É geralmente aceite que a dinâmica do observador deve ser, pelo menos, duas a cinco vezes mais rápida do que a dinâmica do sistema em análise [100], ou seja, o observador deve ter a capacidade de se antecipar relativamente ao comportamento da estrutura, de tal forma que o sistema de controlo baseie a sua actuação em valores fiáveis das variáveis de estado. A questão da rapidez está relacionada com o tempo que o sistema precisa para estabilizar dentro de uma margem pequena de erro, podendo ser quantificada através do tempo de assentamento, tal como definido na secção 3.5.5.

No entanto, a dinâmica do observador deve também ser limitada a valores aceitáveis porque, quanto maior for a sua dinâmica, maior será a sua sensibilidade a perturbações e ruído dos sensores. Se o observador possuir uma dinâmica baixa, torna-se pouco sensível a estes fenómenos porque, tendo baixos ganhos, não consegue actuar energeticamente sobre o erro. Por outro lado, se o observador tiver uma dinâmica demasiado elevada caracterizada por ganhos excessivos, qualquer pequena flutuação do sinal faz disparar a acção de correcção do erro, tornando o observador hipersensível. Portanto, na prática, a imposição de uma dinâmica para o observador requer um compromisso equilibrado entre rapidez e sensibilidade, havendo muitas vezes a necessidade de calibrar “in-situ” a matriz de ganho do observador.

Relativamente à questão da determinação desta matriz, já foi feita referência à equivalência existente entre o comportamento de um sistema controlado e o desempenho de um observador. Por conseguinte, por analogia com o que foi dito na secção 4.6.2 relativamente a controladores, o problema da determinação da matriz L consiste em saber qual deverá ser a sua composição de tal forma que, definido um conjunto de valores próprios em correspondência com uma dinâmica que se quer implementar no observador, a matriz $A-LC$ tenha esses valores próprios desejados. Novamente, este problema é um problema de alocação de pólos cuja solução matemática pode ser encontrada seguindo processos semelhantes aos já expostos na secção 4.6.5. Por essa razão, na próxima secção apenas se fará um breve resumo desses métodos, com as devidas adaptações ao caso dos observadores de estado.

Por último, refira-se que o estabelecimento da dinâmica do observador pode ser feita recorrendo a processos de optimização, tendo por base uma função objectivo. Um dos observadores mais conhecidos que segue esta estratégia é o observador de Kalman [50], o qual, além de definir a sua dinâmica, faz intervir a influência do ruído no processo de estimação.

4.6.6.3 MÉTODOS PARA A DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE GANHO

A matriz de ganho de um determinado observador, que permita a observação completa do vector de estado, poderá ser encontrada se e só se o sistema em análise for completamente observável [100]. No âmbito dos temas abordados neste trabalho, supõe-se que a saída do sistema, caracterizada pela matriz C, é composta por um só vector linha, ou seja, só existe uma variável de saída que pode ser uma variável de estado, ou então, uma relação entre várias variáveis de estado. Por conseguinte, a matriz de ganho do observador será, neste caso, composta por um único vector coluna. Na situação de sistemas multivariáveis nos quais existam várias variáveis de saída, será necessário ter em conta o peso de cada uma dessas variáveis para a estimação do vector de estado, aumentando a complexidade do problema. Nestes casos mais gerais, a matriz de ganho terá tantas colunas quantas as variáveis de saída do sistema.

Como já referido, a determinação da matriz de ganho do observador pode ser feita recorrendo a métodos semelhantes aos já expostos anteriormente para a determinação da matriz de ganho de um controlador. No caso do observador de estado, estando a sua dinâmica pré-estabelecida em correspondência com valores próprios pretendidos, a matriz de ganho L pode ser encontrada impondo que a equação característica da matriz A-LC tenha efectivamente esses valores próprios desejados $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$, ou seja

$$|sI - (A - LC)| = (s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2) \cdots (s - \hat{\lambda}_n) \quad (4.48)$$

Deste sistema de equações resultará a determinação de cada elemento da matriz de ganho $L = [l_1 \ l_2 \ \cdots \ l_n]^T$.

No caso de se dispor da representação do sistema na sua forma observável, tal como definida na secção 3.4.4.3, ou se se puder converter o modelo inicial nesta representação canónica utilizando a matriz de transformação S dada na eq.(3.61), a determinação da matriz de ganho do observador será imediata. Efectivamente, não havendo alteração dos valores próprios da matriz de estado, a equação característica de A-LC é equivalente a

$$|sI - S^{-1}AS + S^{-1}LCS| = \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l'_n \\ l'_{n-1} \\ \vdots \\ l'_2 \\ l'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & \cdots & a_n + l'_n \\ -1 & s & 0 & \cdots & a_{n-1} + l'_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (a_2 + l'_2) \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & (s + a_1 + l'_1) \end{vmatrix} = s^n + (a_1 + l'_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-2} + l'_{n-2})s^2 + (a_{n-1} + l'_{n-1})s + (a_n + l'_n) = 0 \quad (4.49)$$

Na determinação desta equação característica teve-se em conta a eq.(3.64) e a relação $L' = S^{-1}L$. Ora, pretendendo-se impor um conjunto de valores próprios desejados $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$, a equação (4.49) terá de ser equivalente a

$$(s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2) \cdots (s - \hat{\lambda}_n) = s^n + \hat{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \hat{a}_{n-1} s + \hat{a}_n$$

de onde resulta que

$$\begin{aligned} a_1 + l'_1 &= \hat{a}_1 \\ &\vdots \\ a_{n-1} + l'_{n-1} &= \hat{a}_{n-1} \\ a_n + l'_n &= \hat{a}_n \end{aligned}$$

Determinando os valores de $l'_1, \dots, l'_{n-1}, l'_n$, a matriz de ganho do observador é obtida a partir de

$$L = SL' = S \begin{bmatrix} l'_n \\ l'_{n-1} \\ \vdots \\ l'_1 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \hat{a}_n - a_n \\ \hat{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \cdots \\ \hat{a}_1 - a_1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Outro processo para obter a matriz L do observador de estado consiste em utilizar a fórmula de Ackermann [29, 100], segundo a qual

$$L = \beta(A)Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

onde Q é a matriz de observabilidade e $\beta(A)$ é uma matriz já definida na secção 4.6.5.3.

EXEMPLO 4.8

Considerando o sistema de 2 graus de liberdade utilizado nos exemplos anteriores, pretende-se dimensionar um observador para estimar o vector de estado completo, sabendo que a sollicitação actuante sobre a estrutura é constituída por uma carga harmónica $f(t) = \text{sen}(35t)$ kN aplicada ao nível do 1º piso, e que a única variável que se pode medir directamente é o deslocamento ao nível do 2º piso.

As matrizes envolvidas na equação (4.44), que caracteriza o comportamento do observador, podem ser definidas tendo em conta as condições descritas para o problema. Neste caso, a matriz de estado A é igual à já definida no exemplo 4.5, a matriz B corresponde a um vector nulo porque não se dispõe da medição da força aplicada ao pórtico, e a matriz C reduz-se a um vector linha caracterizado por ter elementos nulos, à excepção do elemento correspondente à localização do sensor, o qual assume valor unitário. Ou seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2000 & 1000 & -1 & 0,5 \\ 1000 & -1000 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

Para que se possa resolver este problema, é necessário verificar primeiro se, nas circunstâncias descritas, o sistema é completamente observável ou não. A matriz de observabilidade, de acordo com a eq.(3.62), vale

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1000 & -1000 & 0,5 & -0,5 \\ -1500 & 1000 & 999,25 & -999,5 \end{bmatrix}$$

podendo verificar-se que tem característica 4, o que significa que o sistema é completamente observável. O passo seguinte consiste em definir a matriz de ganho do observador, de modo que este tenha uma dinâmica compatível com a rapidez pretendida para o processo de estimação. Tendo em conta os valores próprios que caracterizam a dinâmica da estrutura, calculados no exemplo 4.5, pode começar-se por testar o desempenho do observador atribuindo-lhe uma dinâmica definida, por exemplo, pelos valores próprios $\hat{\lambda}_{1,2} = -4 \pm j200$ e $\hat{\lambda}_{3,4} = -4 \pm j300$. Estes valores estão em correspondência com uma dinâmica mais elevada do que a da estrutura, pois têm uma representação gráfica relativamente afastada das localizações dos pólos do sistema. Estes valores próprios escolhidos, mesmo que demonstrem ser uma boa opção, não são naturalmente a única solução para o problema, na medida em que haverá certamente outros valores que também perfilam um bom desempenho para o observador. Nas situações correntes, será necessário

testar vários conjuntos de valores próprios, e posteriormente optar por uma solução que se adeque ao problema em análise. A matriz de ganho a adoptar para o observador, de tal forma que a matriz A-LC tenha os valores próprios desejados, pode ser determinada utilizando qualquer um dos métodos indicados na secção anterior. Recorrendo, por exemplo, à fórmula de Ackermann obtém-se

$$L = \beta(A)Q^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso, a equação característica pretendida para a matriz A-LC vem dada por

$$(s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2)(s - \hat{\lambda}_3)(s - \hat{\lambda}_4) = s^4 + \hat{a}_1 s^3 + \hat{a}_2 s^2 + \hat{a}_3 s + \hat{a}_4 = s^4 + 16 s^3 + 130096 s^2 + 1040256 s + 3602080256 = 0$$

podendo identificar-se os coeficientes $\hat{a}_1 = 16$, $\hat{a}_2 = 130096$, $\hat{a}_3 = 1040256$ e $\hat{a}_4 = 3602080256$, os quais servem de base para o cálculo da matriz $\beta(A)$, chegando-se a

$$\beta(A) = A^4 + \hat{a}_1 A^3 + \hat{a}_2 A^2 + \hat{a}_3 A + \hat{a}_4 I = \begin{bmatrix} 3346,9 & 127,07 & 0,8832 & 0,0780 \\ 127,07 & 3474 & 0,0780 & 0,9612 \\ -1688,3 & 805,14 & 3346,1 & 127,48 \\ 805,14 & -883,18 & 127,48 & 3473,6 \end{bmatrix} \times 10^6$$

A matriz de ganho do observador pode finalmente ser obtida através de

$$L = \begin{bmatrix} 3346,9 & 127,07 & 0,8832 & 0,0780 \\ 127,07 & 3474 & 0,0780 & 0,9612 \\ -1688,3 & 805,14 & 3346,1 & 127,48 \\ 805,14 & -883,18 & 127,48 & 3473,6 \end{bmatrix} \times 10^6 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1000 & -1000 & 0,5 & -0,5 \\ -1500 & 1000 & 999,25 & -999,5 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -790,3 \\ 14,5 \\ 3,347 \times 10^6 \\ 1,271 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

O desempenho deste observador na estimação do vector de estado pode ser avaliado graficamente comparando a resposta efectiva do sistema sujeito a uma acção harmónica, com a resposta estimada. A resposta efectiva pode ser obtida através da resolução da equação de estado, cuja solução já foi apresentada na secção 3.5.4, tendo-se chegado à eq.(3.87). A resposta do observador poderá ser obtida utilizando o mesmo procedimento, na medida em que, com os devidos ajustes, a equação do observador pode transformar-se numa equação semelhante à equação de estado. Com efeito, sendo

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\tilde{x}(t)]$$

fica

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) - LC\tilde{x}(t)$$

Colocando $\tilde{x}(t)$ em evidência, obtém-se

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

Ou, rearranjando os termos numa forma mais conveniente,

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$$

Esta equação é do tipo da equação de estado (3.49) e, portanto, poderá ter o mesmo tratamento que esta. Repare-se que na equação anterior, o vector $\{u(t), y(t)\}^T$ constitui a entrada no sistema e $\tilde{x}(t)$ a saída, logo, como neste caso a matriz B é nula, conhecendo-se a função $y(t)$, por aplicação da eq.(3.87) obtêm-se as funções que fornecem as estimativas para todas as variáveis de estado. Naturalmente que a dedução analítica destas equações conduz a um processo relativamente fastidioso, pelo que, para o efeito, se torna bastante útil recorrer a ferramentas de cálculo automático. Na figura 4.49 mostra-se a comparação entre a resposta efectiva do sistema e a resposta estimada pelo observador, obtidas por via numérica com o apoio do programa Matlab [83]. Neste caso, verifica-se que o observador faz excelentes estimativas das variáveis de estado associadas ao posicionamento do sensor, ou seja, de x_2 e x_4 , e tem um bom desempenho na estimação das restantes, concluindo-se que este observador, caracterizado pela matriz de ganho definida na página anterior, seria porventura uma boa solução para o problema.

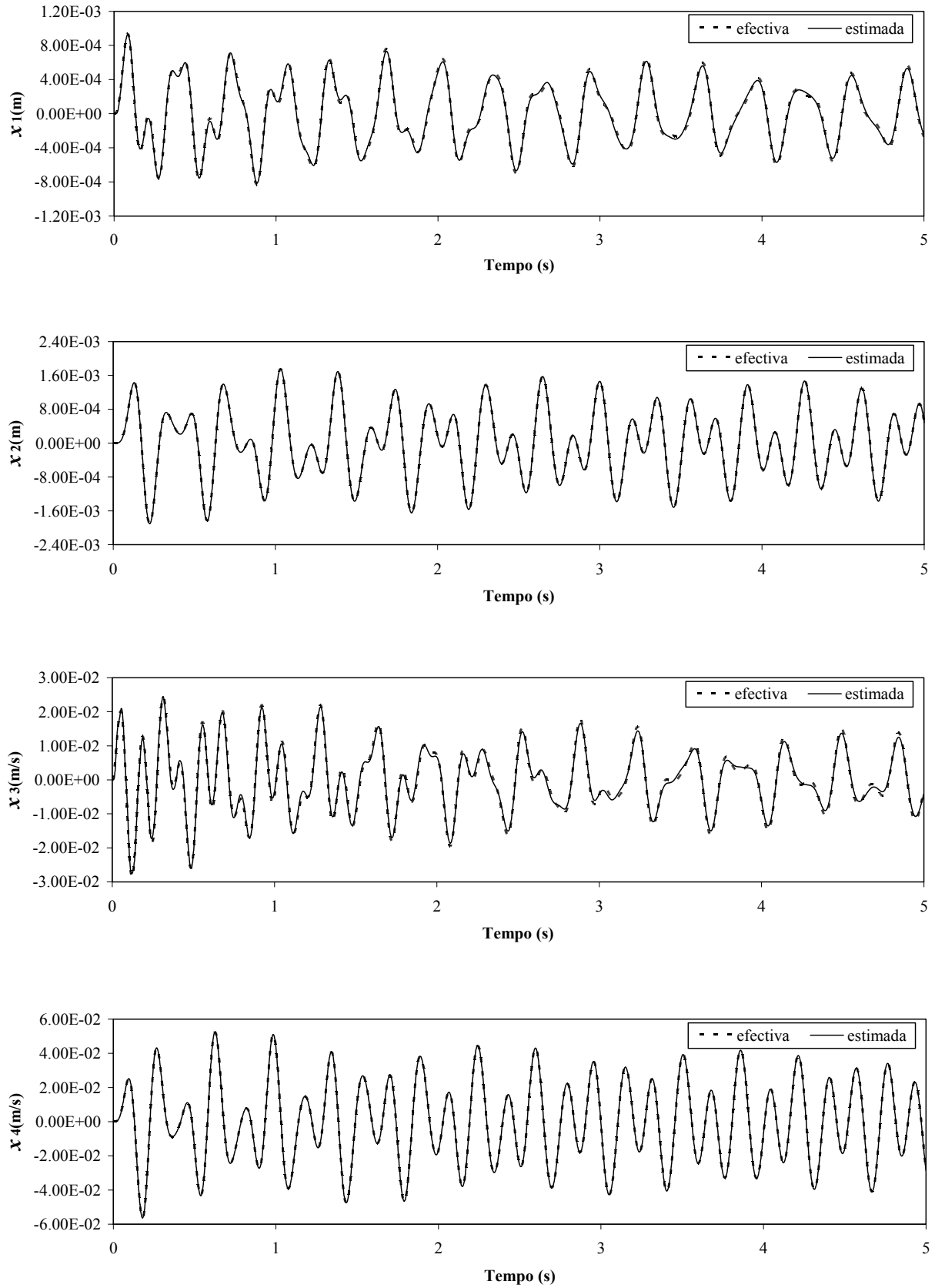


Figura 4.49 – Comparação entre a resposta efectiva do sistema e a resposta estimada pelo observador

4.6.7 IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADORES E OBSERVADORES DE ESTADO

Na implementação real de um sistema de controlo numa estrutura, será necessário ter em funcionamento paralelo um algoritmo dedicado à definição da acção de controlo, e um outro algoritmo destinado à estimação do vector de estado em cada instante, caso este não se encontre disponível para medição directa. Neste funcionamento conjunto, o observador alimenta o controlador, o qual, com base nas estimativas fornecidas e com base na matriz de realimentação adoptada, calcula a força a ser aplicada pelo actuador, para que a dinâmica pretendida seja efectivamente imposta à estrutura.

Nas secções anteriores, abordou-se o processo de dimensionamento associado a cada um deles, descrevendo-se o processo de como determinar as matrizes de ganho, de tal modo que cada um tenha um bom desempenho caracterizado pelas dinâmicas desejadas respectivas. Todavia, estando o controlador e o observador a funcionar simultaneamente na estrutura, a questão legítima que se pode colocar é saber qual é o efeito que cada um exerce sobre o outro. Ou seja, até que ponto a inclusão de um observador pode afectar o desempenho do controlador, e vice-versa. Para responder a esta questão, considere-se novamente a equação de estado de um determinado sistema estrutural

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

no qual a acção de controlo é baseada na observação do vector de estado, isto é

$$u(t) = -K\tilde{x}(t)$$

Substituindo $u(t)$ na equação de estado, verifica-se que

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\tilde{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK[x(t) - \tilde{x}(t)]$$

Tendo presente a definição do vector de erro expressa na eq.(4.45), a equação anterior transforma-se em

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BKe(t)$$

A conjugação desta equação com a eq.(4.47) permite escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Esta equação traduz o comportamento de uma estrutura controlada com base na observação completa do vector de estado. Então, a dinâmica global do sistema, dotado simultaneamente de um controlador e de um observador, pode ser avaliada calculando a equação característica respectiva, obtendo-se

$$\begin{vmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + LC \end{vmatrix} = |sI - A + BK| |sI - A + LC| = 0$$

Como se pode constatar, os valores próprios da matriz que caracteriza a dinâmica global são os valores próprios da matriz $A-BK$ que caracteriza a dinâmica do controlador, mais os valores próprios de $A-LC$, que caracteriza a dinâmica do observador, obtidos independentemente um do outro. Ou seja, o dimensionamento do sistema de controlo baseado na alocação dos pólos da matriz $A-BK$ é independente do dimensionamento do observador de estado baseado na alocação dos pólos da matriz $A-LC$. Por outras palavras, pode dizer-se que ambos os sistemas podem ser dimensionados separadamente e, posteriormente, colocados a funcionar em conjunto, sem que haja interferências de um na dinâmica do outro.

Por último, referira-se que a implementação de um controlador e, quando necessário, de um observador de estado, necessita de ter em conta o carácter digital de todo o processo associado ao controlo de uma estrutura. De facto, as vantagens associadas à utilização de computadores digitais fazem com que, actualmente, não seja interessante o desenvolvimento de sistemas analógicos, pelo que se torna inevitável a utilização destes equipamentos inseridos na malha de realimentação. Nestas situações, é necessário analisar o efeito da digitalização nos sistemas de controlo, sendo este importante assunto tratado na próxima secção.

4.7 SISTEMAS DE CONTROLO DIGITAIS

4.7.1 INTRODUÇÃO

A utilização de computadores inseridos na malha do sistema de controlo tem diversas vantagens relativamente aos sistemas puramente analógicos porque, além de estes permitirem a definição da acção de controlo em cada instante, desempenham com relativa facilidade diversas tarefas paralelas tais como o supervisionamento do funcionamento do sistema de controlo, registo de dados, monitorização da estabilidade, desactivação do sistema quando necessário e eventual ajuste dos parâmetros ao longo do tempo. Além disso, permitem regular o funcionamento de toda a instrumentação, controlar o sistema de actuação e gerir eventuais sistemas de transmissão de dados. Embora muitas destas tarefas possam ser naturalmente executadas por controladores analógicos, a utilização do computador revela-se ser actualmente uma solução bastante mais atractiva do ponto de vista económico.

Em contrapartida, a digitalização do sistema pode conduzir a uma degradação da sua estabilidade, bem como da sua capacidade de alterar as características da estrutura relativamente à dinâmica que se quer impor. Isto porque, associado à digitalização de um sinal, existe um tempo de atraso introduzido na

malha de realimentação devido à retenção do sinal durante um certo período de tempo [45], de tal forma que a acção efectivamente aplicada se traduz, na prática, numa aproximação a um sinal analógico.

Para se ter em conta o carácter digital do processo de controlo, podem seguir-se duas estratégias básicas distintas. Uma das estratégias consiste em formular de raiz o problema do controlo numa formulação discreta, procurando-se definir em cada intervalo de tempo caracterizado por kT , sendo k um número inteiro e T o período de discretização temporal, qual a acção de controlo que deve ser aplicada à estrutura tendo em vista um determinado objectivo a atingir. A outra estratégia consiste em tratar inicialmente o problema em tempo contínuo e, posteriormente, avaliar quais os efeitos da implementação da lei de controlo assim definida, inserida no funcionamento de sistemas digitais.

Neste trabalho seguiu-se a segunda estratégia porque, dada a velocidade de processamento dos computadores actuais, os ciclos da malha de controlo são suficientemente rápidos para que se possa aproximar com elevado rigor os sinais digitais a sinais contínuos no tempo. Este aspecto torna-se ainda mais relevante no caso das estruturas de Engenharia Civil, por apresentarem frequentemente uma gama de frequências de interesse na casa das poucas dezenas de Hertz. De facto, nas implementações reais de sistemas de controlo descritas nos capítulos 5 e 6 seguintes, constatou-se que os efeitos da digitalização dos sinais podiam até ser negligenciados, tendo em conta a rapidez de processamento alcançada pelos equipamentos utilizados associada às baixas frequências naturais dos sistemas estruturais em análise.

Além disso, tendo em conta os assuntos tratados neste trabalho, a abordagem aos problemas de controlo feita em tempo contínuo parece ser a mais adequada por apresentar expressões matemáticas mais elegantes e compreensíveis, sendo depois mais fácil passar para uma formulação discreta. Por este motivo, nesta secção apresentam-se brevemente alguns aspectos básicos relativos aos sistemas digitais, tendo como objectivo fazer uma antevisão daquilo que poderá ser o estudo mais aprofundado deste tema.

4.7.2 MODELAÇÃO DO PROCESSO DA DIGITALIZAÇÃO

O processo normalmente seguido para modelar o efeito da digitalização é baseado na utilização de um amostrador com retenção, cujo funcionamento está indicado na figura 4.50. Inicialmente, a função contínua é discretizada num conjunto sucessivo de pontos espaçados de um determinado período de tempo T , cujas ordenadas estão em correspondência com os valores que a função $f(t)$ apresenta nesses pontos. Este processo de amostragem equivale a transformar a função inicial numa outra definida por [96]

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t - kT) \quad (4.53)$$

sendo k um inteiro, e $\delta(t - kT)$ a função impulso ou Delta Dirac, tal como definida na secção 3.3.3.

Após a definição da amplitude do sinal em cada intervalo de tempo, é necessário reter esse valor durante o período T , de tal modo que, da aplicação sucessiva das operações de amostragem e retenção, resulte uma função constituída por segmentos horizontais, cuja configuração se aproxima da função inicial $f(t)$. Neste caso, o processo de retenção é equivalente à utilização de uma função do tipo impulso rectangular, caracterizada por ter em cada intervalo de tempo uma amplitude definida pelo valor de $f(t)$ colhida no instante da amostragem, ou seja, $f(kT)$. A função de transferência que caracteriza o processo de retenção pode ser avaliada de acordo com a eq.(3.16), considerando que, em cada intervalo de tempo, a função adquire o valor dado pelo amostrador no instante inicial desse intervalo, ou seja $t=0$, e o conserva durante o período de tempo correspondente a $t=T$, obtendo-se

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (4.54)$$

O processo de amostragem seguido de retenção pode ser representado em diagramas de blocos como colocando em série um amostrador tal como definido na equação (4.53), e o retentor definido na equação (4.54) também conhecido como retentor de ordem zero, passando este conjunto a designar-se de amostrador com retenção de ordem zero. Na Figura 4.51 representa-se o diagrama de sistema de controlo em malha fechada dotado de um dispositivo deste género, chamando-se a atenção de que a função de transferência resultante do funcionamento em série do amostrador e do retentor é dada simplesmente pela eq.(4.54), na medida em que a transformada de Laplace da função impulso tem valor unitário [96].

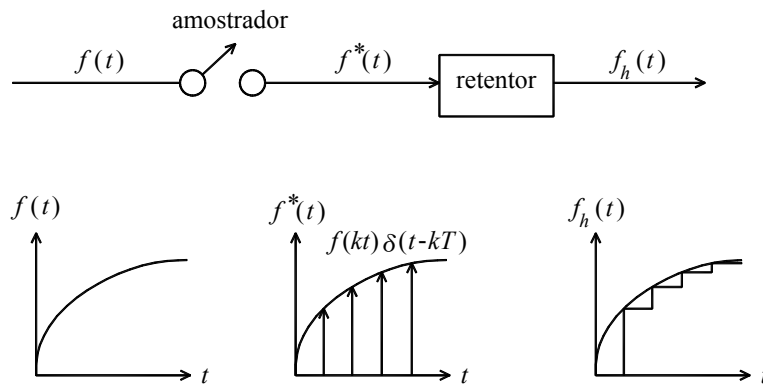


Figura 4.50 – Processo de amostragem e retenção e respectivo efeito sobre o sinal

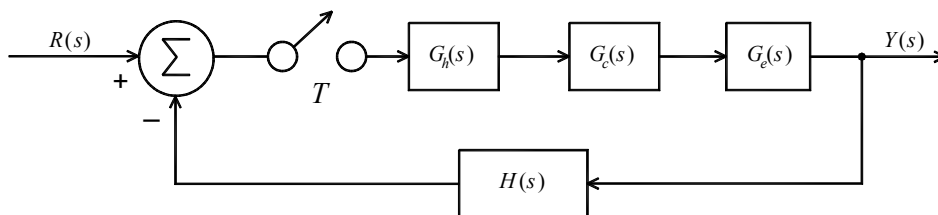


Figura 4.51 – Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada dotado de um amostrador com retenção

4.7.3 TRANSFORMADA z

A transformada z permite converter funções expressas no domínio do tempo contínuo para o domínio discreto da variável complexa z . A vantagem em utilizar esta transformada tem a ver com facto de se poderem ter em conta os efeitos da digitalização do sinal na avaliação da estabilidade do sistema e na sua capacidade em modificar a resposta transiente da estrutura. Para obter a transformada z , pode começar-se por aplicar a transformada de Laplace à eq.(4.53), tendo em conta o efeito da retenção do valor da função em cada intervalo kT , ficando

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

Considerando $z = e^{Ts}$, a equação anterior pode ser escrita da seguinte maneira

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (4.55)$$

encontrando-se a definição da transformada z , segundo a qual $f(kT)$ pode ser transformada em $F(z)$, sendo a operação inversa possível através da respectiva transformada inversa.

EXEMPLO 4.9

Pretende-se obter a transformada z da representação da função rampa unitária, tal como definida em 4.2.3. Neste caso, valendo a função $f(kT) = kT$, a sua substituição na eq.(4.53) permite escrever

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kT\delta(t - kT)$$

Aplicando a transformada de Laplace, fica

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} kTe^{-kTs}$$

Convertendo para o domínio z , através da relação $z = e^{Ts}$, a equação anterior transforma-se em

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kTz^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por z , obtém-se

$$zF(z) = T(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots)$$

Subtraindo uma à outra as equações anteriores, fica

$$zF(z) - F(z) = (z - 1)F(z) = T(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots)$$

Mas

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

Substituindo esta equação na anterior, resulta finalmente

$$F(z) = T \frac{z}{(z - 1)^2}$$

que é a transformada z de $f(kT) = kT$.

Dada a dificuldade que muitas vezes existe em determinar a transformada z de algumas funções mais complexas, torna-se bastante útil o recurso a tabelas onde estejam indicadas as transformadas para os casos mais comuns. É o caso da Tabela 4.5 [96], na qual estão também representadas as transformadas de Laplace correspondentes à transformada z em questão. Repare-se que, estando tabeladas as relações unívocas da representação de uma função em vários domínios, tabelas como esta podem servir para facilmente encontrar a transformada inversa do domínio z para o domínio do tempo, ou então, para o domínio de Laplace.

Para determinar a transformada inversa de uma função mais complexa não tabelada, poderá recorrer-se ao método da expansão em fracções parciais, já utilizado no caso da transformada inversa de Laplace, ou então recorrer-se ao método das séries de potência [45]. Utilizando um destes métodos é possível expandir a função inicial num conjunto de outras mais simples e, posteriormente, tirar partido das propriedades da transformada z , no sentido de encontrar a transformada inversa da função original a partir da transformada inversa de cada uma dessas funções elementares. Na Tabela 4.6 [96] estão resumidas algumas das propriedades de que goza a transformada z , úteis na transformação de funções expressas no domínio do tempo para o domínio z , e vice-versa.

	$f(t)$	$f(kT)$	$F(s)$	$F(z)$
1	Degrau unitário 1	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
2	Rampa unitária t	kT	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	t^n	$(kT)^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right]$
4	e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
5	$t^n e^{-at}$	$(kT)^n e^{-akT}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$(-1)^n \frac{d^n}{da^n} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right]$
6	$\text{sen}(\omega t)$	$\text{sen}(\omega kT)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \text{sen}(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
7	$\text{cos}(\omega t)$	$\text{cos}(\omega kT)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$z \frac{z - \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
8	$e^{-at} \text{sen}(\omega t)$	$e^{-akT} \text{sen}(\omega kT)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \text{sen}(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega T) + e^{-2aT}}$
9	$e^{-at} \text{cos}(\omega t)$	$e^{-akT} \text{cos}(\omega kT)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos(\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega T) + e^{-2aT}}$

Tabela 4.5 – Transformadas z e de Laplace

	Teorema	Nome
1	$z\{af(kT)\} = aF(z)$	Teorema da linearidade
2	$z\{f_1(kT) + f_2(kT)\} = F_1(z) + F_2(z)$	Teorema da linearidade
3	$z\{f(kT - nT)\} = z^{-n}F(z)$	Translação do eixo real
4	$z\{tf(kT)\} = -Tz \frac{dF(z)}{dz}$	Diferenciação complexa
5	$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$	Teorema do valor inicial
6	$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F$	Teorema do valor final

Tabela 4.6 – Teoremas da transformada z

4.7.4 ANÁLISE DA ESTABILIDADE

Como já referido, o processo de digitalização do sistema de controlo em malha fechada não só afecta o seu desempenho relativamente à capacidade de modificar as características dinâmicas da estrutura, mas também pode interferir com a sua estabilidade. Se o intervalo de discretização temporal adoptado for muito pequeno, o comportamento do sistema aproxima-se a um sistema analógico. Porém, se esse intervalo for demasiado grande, a força de controlo pode ficar descoordenada temporalmente com o movimento da estrutura, podendo instalar-se uma situação de instabilidade.

No plano s , a instabilidade pode ocorrer quando um dos pólos do sistema em malha fechada estiver localizado no semi-plano complexo direito, querendo isto dizer que o modo de vibração correspondente tem amortecimento negativo. No domínio z , também é possível fazer uma análise semelhante a esta, bastando, para tal, estabelecer uma correspondência de áreas entre o plano s e o plano z . Para o efeito, pode recorrer-se à relação entre as variáveis s e z anteriormente definida ou seja, $z = e^{Ts}$. Sabendo que qualquer ponto do plano s pode ser dado por $s = A + jB$, a correspondente imagem no plano z vale

$$z = e^{Ts} = e^{T(A+jB)} = e^{TA} e^{jTB}$$

Expressando e^{jTB} segundo a relação de Euler, fica

$$z = e^{TA}(\cos TB + j\text{sen}TB)$$

Sabendo que em coordenadas polares $(\cos TB + j\text{sen}TB) = 1 \angle TB$, resulta que

$$z = e^{AT} \angle TB \quad (4.56)$$

Dado que qualquer ponto situado no semi-plano direito de s tem um valor de A positivo, a respectiva imagem no plano z expressa pela eq.(4.56) será caracterizada por ter um raio e^{AT} superior a 1, o que quer dizer que a sua representação nesse plano se situará numa região exterior a um círculo de raio unitário. Por outro lado, se o ponto s se situar na zona esquerda do semi-plano complexo, terá necessariamente um valor de A negativo, o que levará a que tenha uma representação gráfica no plano z inserida no interior do círculo unitário, dado que, nessas condições, $e^{AT} < 1$. No caso do ponto s se situar na divisão do semi-plano estável com o semi-plano instável, ou seja, se se situar sobre o eixo imaginário, a sua imagem no domínio z localizar-se-á sobre uma circunferência de raio unitário, pois, nesta situação, $e^{AT}=1$. Na Figura 4.52 encontram-se representadas graficamente as relações descritas.

Como conclusão, pode dizer-se que um determinado sistema é estável se todos os pólos da função de transferência respectiva, expressa no domínio z , se localizarem no interior de um círculo de raio unitário. Será instável se qualquer um dos pólos se localizar no exterior desse círculo, ou então, se existirem pólos de multiplicidade superior a 1 no seu interior [96]. Finalmente, o sistema será marginalmente estável se existirem pólos sobre o limite do círculo, estando os restantes no interior deste.

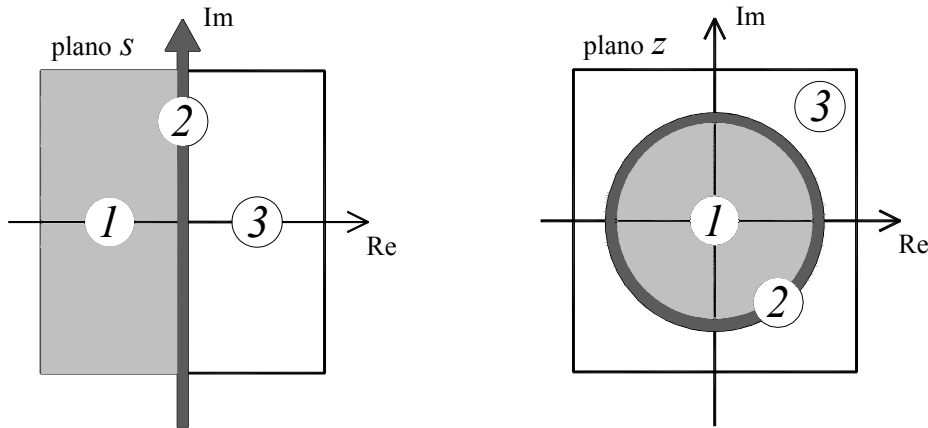


Figura 4.52 – Correspondência de regiões entre o plano s e o plano z

EXEMPLO 4.10

Dado um sistema mecânico de 1 grau de liberdade não amortecido, caracterizado por $m=1t$ e $k=1MN/m$, pretende-se amortecê-lo através de um controlador derivativo disposto em malha fechada, com ganho $K=10000$ definido tendo em conta o funcionamento analógico do sistema. Na sua concretização real, pretende-se utilizar um computador digital inserido na malha de controlo, havendo interesse em conhecer qual o período máximo de discretização temporal a adoptar para que não ocorra instabilidade.

O diagrama de blocos do funcionamento do sistema de controlo está representado na seguinte figura

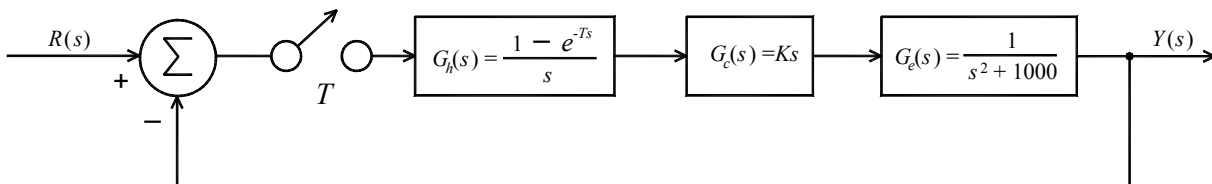


Figura 4.53 – Diagrama de blocos do funcionamento do sistema de controlo digital

onde se indicam as funções de transferência relativas ao retentor, ao compensador e ao sistema mecânico, tendo-se considerado $H(s)=1$, ou seja, realimentação unitária. A função de transferência do sistema em malha fechada vale

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

Por outro lado, $G(z)$ pode ser avaliada a partir de $G(s)$, sendo

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \times Ks \times \frac{1}{s^2 + 1000} = K(1 - e^{-Ts}) \frac{1}{s^2 + 1000}$$

Sabendo que

$$1 - e^{-Ts} = 1 - \frac{1}{e^{Ts}} = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z}$$

por aplicação da Tabela 4.5 chega-se a

$$G(z) = \frac{K}{\omega} \times \frac{z-1}{z} \times \frac{z \text{sen} \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

sendo $\omega^2 = 1000$, de onde se conclui que

$$T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K(z-1)\text{sen} \omega T}{\omega(z^2 + 1) - 2z\omega \cos \omega T + K(z-1)\text{sen} \omega T}$$

Os pólos de $T(z)$ obtêm-se encontrando as raízes do respectivo denominador, obtendo-se

$$z_{1,2} = \frac{2\omega \cos \omega T - K \text{sen} \omega T \pm j\sqrt{\text{sen} \omega T (4K\omega \cos \omega T + 4\omega^2 \text{sen} \omega T - K^2 \text{sen} \omega T - 4K\omega)}}{2\omega}$$

Na figura 4.54 encontra-se representada a evolução do posicionamento dos pólos do sistema para diversos valores de T , podendo verificar-se que a instabilidade do sistema ocorre no caso de se adoptar uma discretização temporal superior a 0,08s. Neste caso, a instabilidade é originada, não porque existam pólos fora do círculo unitário, mas porque, adoptando o referido valor de T , os dois pólos ficam coincidentes fazendo com que, nessas condições, o sistema tenha pólos de multiplicidade superior a 1 no interior do círculo.

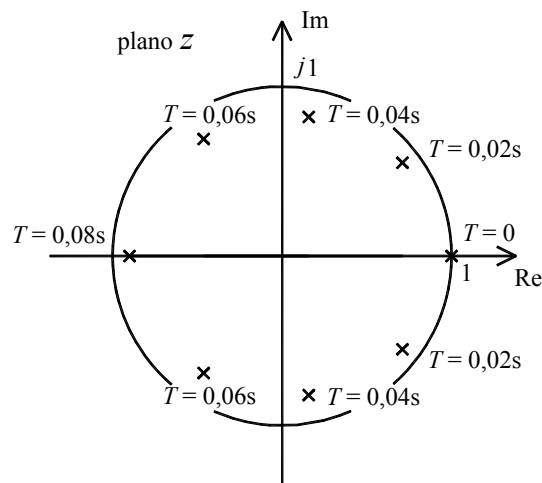


Figura 4.54 – Evolução do posicionamento dos pólos no plano z associada a diversos valores de T

4.7.5 ANÁLISE DA RESPOSTA TRANSIENTE

O efeito da digitalização do sistema de controlo pode afectar a resposta transiente da estrutura, caracterizada pelas respectivas frequências naturais e coeficientes de amortecimento. Quando o sistema é analógico, o controlador é definido através da imposição de uma determinada dinâmica estrutural com o objectivo de melhorar o desempenho do sistema quando sujeito a perturbações exteriores. Para o efeito, os pólos da função de transferência em malha fechada devem ter localizações em correspondência com as características dinâmicas desejadas, sendo atribuídos de acordo com $p_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_{d,i}$.

O facto de se digitalizar o processo de controlo vai fazer com que o controlador dimensionado numa base analógica, não tenha o desempenho pretendido, assistindo-se a um desvio da resposta do sistema relativamente aquela se desejava obter. Para resolver este problema, os métodos de dimensionamento de controladores em tempo discreto fazem intervir o parâmetro T no sentido de corrigir a acção de controlo a ser aplicada ao sistema, de tal forma que efectivamente se consiga impor a dinâmica pretendida.

No caso de se optar por dimensionar o sistema de controlo numa formulação contínua e implementá-lo em ambiente digital, a alteração da dinâmica do sistema resultante da digitalização pode ser avaliada determinando os pólos da função de transferência em malha fechada, obtida no domínio z . Efectivamente, tal como acontece no plano s , a localização dos pólos no plano z está em correspondência com determinadas características dinâmicas da estrutura, acrescentando o facto de, neste domínio, se fazer intervir também a variável T .

A identificação das características dinâmicas pode ser facilitada se, na representação do plano z , se indicarem as iso-linhas correspondentes a valores iguais de frequências naturais e coeficientes de amortecimento. No plano s , o lugar geométrico dos pólos correspondentes a frequências naturais idênticas, é definido por circunferências centradas na origem dos eixos, com raio igual ao valor da frequência que representam, e, no caso dos coeficientes de amortecimento, por semi-rectas que passam pela origem dos eixos e cujas inclinações determinam o valor do coeficiente de amortecimento associado. Na conversão para o plano z , essas iso-linhas respeitam a relação existente entre s e z , ou seja, $z = e^{Ts}$, ou inversamente, $s = (1/T) \ln z$, de tal forma que as circunferências e semi-rectas descritas se transformam nas curvas indicadas na Figura 4.55. Neste gráfico, onde se representa somente o semi-plano complexo superior devido a considerações de simetria, as curvas de igual frequência natural estão normalizadas relativamente ao período de discretização temporal T , estando limitadas pela frequência de Nyquist π / T . As curvas de igual amortecimento desenvolvem-se no sentido crescente do eixo imaginário à medida que o coeficiente de amortecimento que representa diminui, até coincidirem com a semi-circunferência de raio unitário corresponde à ausência de amortecimento, como já referido anteriormente. Um facto interessante a registar na configuração deste gráfico é que quando T tende para zero, ou seja, quando os sinais digitais tendem para uma configuração contínua, os pólos do sistema aproximam-se da abcissa 1 do eixo real, sendo essa zona do plano complexo z semelhante à configuração do plano s .

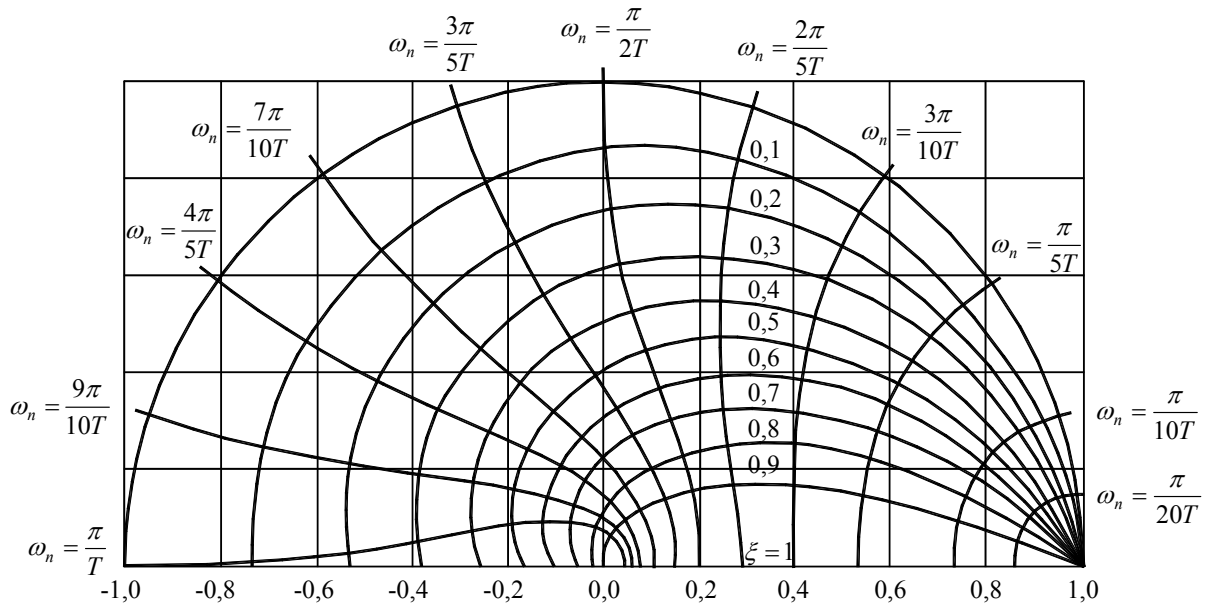


Figura 4.55 – Indicação das curvas de igual frequência natural e coeficiente de amortecimento no plano z

EXEMPLO 4.11

Pretende-se avaliar o impacto da digitalização do sistema de controlo descrito no exemplo anterior, sabendo que o intervalo de discretização temporal adoptado foi de $T = 0,04s$.

Se o sistema funcionar numa base analógica, a dinâmica estrutural imposta pelo sistema de controlo será caracterizada pela seguinte frequência natural e coeficiente de amortecimento

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{1}} = 31,62 \text{ rad/s} \quad \xi = \frac{K}{2m\omega} = \frac{10}{2 \times 1 \times 31,62} = 0,158$$

Se o sistema for digitalizado utilizando a frequência de amostragem $1/T$, os pólos da respectiva função de transferência no domínio z podem ser calculados utilizando a expressão deduzida no exemplo anterior, obtendo-se $z_{1,2} = 0,150 \pm j0,822$. Recorrendo à eq.(4.56), a qual refere que

$$z = e^{AT} \angle TB = e^{(-\xi\omega_n)T} \angle T\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

chega-se ao seguinte sistema de equações não-linear

$$\begin{cases} -\xi\omega_n = \ln\left(\sqrt{0,150^2 + 0,822^2}\right)/0,04 \\ 0,04\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) = \arctan(0,822/0,150) \end{cases}$$

do qual resulta que $\omega_n = 35,04\text{rad/s}$ e $\xi = 0,128$, podendo observar-se que, nestas circunstâncias, a digitalização do sistema conduz a um desvio significativo do funcionamento analógico.

4.7.6 TRANSFORMAÇÕES BILINEARES

Já foram referidas anteriormente as relações exactas existentes entre os domínios s e z , ou seja, $z = e^{Ts}$ ou $s = (1/T) \ln z$. À partida, poderia pensar-se que um dos processos para converter funções inicialmente expressas no domínio de Laplace para o domínio z seria substituir na função $s = (1/T) \ln z$, ou no caso inverso, substituir a variável z por $z = e^{Ts}$. O problema é que tais substituições conduzem a funções transcendentais, ou seja, funções não algébricas que não podem ser convertidas em polinómios. Nestes casos, é preferível utilizar directamente a definição da transformada z , por mais complicado que este caminho possa ser. Seguindo esta via, pode inicialmente converter-se a função expressa no domínio de Laplace para o domínio do tempo, com eventual recurso a métodos de factorização e tabelas, e, posteriormente, aplicar-se a transformada z e suas propriedades para achar a representação da função neste domínio. Do mesmo modo, se poderá proceder para converter funções expressas no domínio z para o domínio s .

Alternativamente a este método exacto, poderão adoptar-se métodos aproximados os quais permitem com suficiente rigor transformar directamente funções entre estes dois domínios. Para o efeito, poderão utilizar-se transformações do tipo

$$z = \frac{as + b}{cs + d}$$

ou, inversamente

$$s = \frac{-dz + b}{cz - a}$$

nas quais, os coeficientes a , b , c e d são escolhidos tendo em conta o objectivo da transformação e o rigor pretendido [96]. Este tipo de aproximações às transformações exactas referidas, têm a vantagem de conduzir a funções de coeficientes lineares e consequentemente poderem ser traduzidas em polinómios assim que se conheçam os seus pólos e zeros. Esta característica aplica-se nos dois sentidos de transformação, ou seja, de s para z e de z para s , daí que sejam conhecidas como transformações bilineares.

Um aspecto muito importante nestas transformações é que os coeficientes da função de transformação são escolhidos tendo em conta o objectivo com que se faz esta operação, ou seja, se o objectivo é estudar a estabilidade do sistema são escolhidos determinados coeficientes, porém, se se pretender analisar a resposta transiente, a função de transformação terá coeficientes diferentes dos anteriores. No caso de se pretender estudar estabilidade do sistema de controlo, será necessário escolher uma transformação que permita fazer uma estimativa rigorosa do posicionamento dos pólos do plano complexo de Laplace para o z ou vice-versa. Isto é, os pólos situados no semi-plano esquerdo de s , de acordo com essa transformação devem ser mapeados dentro do círculo de raio unitário no plano z , e os pólos no semi-plano direito devem

ter imagem localizada no exterior desse círculo, devendo essa transformação conduzir ao mesmo resultado no caso inverso. Demonstra-se [45] que a transformação bilinear que permite este tipo de análise é dada por

$$s = \frac{z+1}{z-1} \quad (4.57)$$

ou, no sentido inverso

$$z = \frac{s+1}{s-1} \quad (4.58)$$

Por outro lado, se o objectivo for relacionar nos dois domínios a resposta transiente do sistema, então a transformação bilinear a utilizar será do tipo [96]

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad (4.59)$$

ou, inversamente

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (4.60)$$

Esta transformação, também conhecida como a transformação de Tustin, permite verificar que, quando T tende para zero, z tende para s , ou seja o comportamento do sistema digital aproxima-se do analógico. A transformação de Tustin, tal como definida, deve no entanto ser utilizada com algum cuidado, pois, quando o intervalo de discretização temporal é elevado, conduz a distorções significativas na aproximação dos dois domínios, sendo necessário corrigi-las através de técnicas específicas [96].

CAPÍTULO 5

IMPLEMENTAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLO EM MODELOS LABORATORIAIS

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo descrevem-se algumas implementações laboratoriais de sistemas de controlo em modelos físicos de 1 ou de vários de liberdade. Estes ensaios tiveram como objectivo a verificação experimental e colocação em prática de muitos dos conceitos teóricos referidos nos capítulos precedentes, bem como compreender e ultrapassar os problemas relacionados com a implementação real de sistemas de controlo. Efectivamente, a possibilidade de se poder medir e observar o efeito do controlo sobre uma determinada estrutura contribui para a consolidação dos conhecimentos adquiridos e enriquece a compreensão relativamente a problemas de ordem prática que surgem no real funcionamento destes sistemas.

Estando a área do controlo de vibrações vocacionada para a resolução de problemas concretos que afectam as estruturas, a implementação destes sistemas exige conhecimentos para além do problema do controlo propriamente dito. De facto, é necessário dominar assuntos relacionados, por exemplo, com a aquisição e processamento de sinal, com a escolha de hardware e software de controlo, com a escolha da instrumentação e com o dimensionamento e concepção de sistemas de actuação. Além disso, é preciso ter em conta as não-linearidades decorrentes do funcionamento do sistema de actuação e da existência de folgas e atritos, dos problemas de ruído nos sensores e de atraso nos sinais, e de problemas associados à possibilidade da ocorrência de instabilidade devida a erros por spillover.

As experiências de controlo realizadas em ambiente laboratorial enriqueceram esta vertente do trabalho, tendo-se começado por estudar o sistema de controlo de uma plataforma destinada à excitação basal de modelos físicos. Embora esta experiência não esteja directamente relacionada com uma estrutura de Engenharia Civil, permitiu, no entanto, ensaiar controladores do tipo PID. Estudou-se também a aplicação de sistemas de controlo a um pórtico de 1 piso, começando-se por utilizar um sistema passivo composto por um TMD, tendo-se evoluído posteriormente para a um sistema activo baseado num AMD. Testou-se a utilização de sistemas activos num pórtico de 3 pisos, começando-se por adaptar à estrutura um AMD. Neste caso, deu-se particular atenção à análise da estabilidade devido ao facto deste dispositivo constituir um sistema de controlo não-colocado, tendo-se, para o efeito, utilizado o método do lugar das raízes. Também se estudou a adaptação de uma diagonal activa no pórtico plano, tendo como objectivo a modificação da dinâmica inicial do sistema para uma outra predefinida, recorrendo-se ao método da alocação de pólos. Por último, implementou-se um sistema de controlo no funcionamento de um pêndulo invertido. Esta experiência contribuiu para o enriquecimento deste trabalho por se tratar de um sistema originalmente instável, cujo comportamento pode ser alterado de forma a dotá-lo de uma dinâmica própria de um sistema estável.

5.2 CONTROLO DE UMA PLATAFORMA VIBRATÓRIA

5.2.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Tendo em vista a implementação laboratorial de sistemas de controlo em modelos físicos de escala reduzida, foi utilizada uma plataforma vibratória existente no Laboratório de Vibrações de Monitorização de Estruturas da FEUP, com o objectivo de introduzir excitações de diversas naturezas na base dos modelos. A aplicação de forças harmónicas não oferece, em geral, grandes dificuldades desde que a frequência de excitação se situe dentro da gama de frequências permitida pelo sistema de actuação. Neste caso, o sinal de excitação pode ser comandado por um sistema de malha aberta, na medida em que, face a um sinal sinusoidal, a mesa vibratória responderá também com um movimento do mesmo tipo, caracterizado por ter a mesma frequência e por um determinado ângulo de fase.

Já a aplicação de forças de carácter aleatório, com especial interesse no caso da excitação sísmica, os sistemas de malha aberta não são geralmente tão eficientes. Para tal, contribuem vários factores, de entre os quais, os fenómenos de interacção dinâmica entre a mesa e o modelo, as não-linearidades do sistema de actuação e um conjunto de outros factores inerentes à construção dos modelos e da mesa vibratória, tais como a existência de atritos e folgas. As mesas sísmicas actualmente existentes em diversos laboratórios deparam-se igualmente com este tipo de problemas, de tal modo que é impraticável utilizar um equipamento deste género sem que esteja devidamente dotado de um sistema de controlo em malha fechada.

Os problemas de interacção referidos consistem no facto de, ao apoiar uma estrutura sobre uma mesa vibratória, haver uma alteração significativa da dinâmica de cada um dos sistemas, devido ao facto de ambos passarem a funcionar em conjunto. Nestas circunstâncias, o sinal de comando a introduzir pelo sistema de actuação da mesa deve ter em conta a nova dinâmica global, de modo a evitar grandes discrepâncias entre a excitação que se pretende aplicar à estrutura e aquela que efectivamente é exercida. Isto quer dizer que, cada vez que um modelo diferente é ensaiado, é necessário reajustar os parâmetros do algoritmo que controla o funcionamento da mesa, tornando este procedimento fastidioso nas situações de ensaios repetidos a diferentes modelos.

Para tentar contornar este problema, é possível introduzir alguns artificios que minimizam a interacção entre a mesa vibratória e o modelo, como por exemplo, utilizar uma mesa com massa activa bastante superior à massa do modelo de ensaio. De facto, se tal acontecer, a interacção dinâmica entre os dois sistemas reduz-se, passando o modelo de escala reduzida a ter uma dinâmica local com frequências e modos e vibração locais. Nesta situação, o problema do controlo da mesa deve ser centrado em termos do movimento da elevada massa da plataforma, podendo eventualmente desprezar-se a interferência exercida pela massa do modelo laboratorial.

5.2.2 OBJECTIVOS

Tendo em conta a proximidade de relação de massas existente entre a mesa vibratória disponível no laboratório e os modelos físicos desenvolvidos no âmbito deste trabalho, não é possível ignorar os fenómenos de interacção que se estabelecem entre estes dois sistemas dinâmicos. Por conseguinte, a utilização de um sistema de controlo activo integrado no funcionamento da plataforma é uma ferramenta indispensável para que se consiga impor um movimento na base dos modelos em correspondência com uma determinada acção exterior, definida por um registo previamente dado. Neste contexto, esta primeira implementação de um sistema de controlo tentou explorar a utilização de um controlador PID para, tanto quanto possível, alcançar esse objectivo, colocando em prática alguns dos conceitos descritos na secção 4.3 dedicada ao estudo desta estratégia.

Esta experiência teve também como objectivo comparar o desempenho de um controlador PID com um controlador preditivo simplificado desenvolvido por Rodellar *et al* [43,18] utilizado em trabalhos anteriores [84]. Basicamente, o controlador preditivo tira partido das estimativas que faz sobre a evolução temporal do comportamento do sistema num determinado intervalo de tempo futuro, para antecipadamente proceder ao cálculo da acção de controlo a aplicar ao sistema, de forma a aproximar a sua resposta efectiva à resposta desejada. A formulação teórica deste controlador não faz parte do âmbito desta tese, pelo que, a sua descrição detalhada pode encontrar-se nas referências [43] e [84].

5.2.3 DESCRIÇÃO DO MODELO E EQUIPAMENTOS UTILIZADOS

A implementação do sistema de controlo foi realizada testando a eficácia da mesa vibratória em introduzir excitações basais predefinidas num modelo laboratorial de um pórtico de 1 piso. O modelo utilizado é constituído por uma massa em aço de 8,81kg, ligada à base por intermédio de dois pilares em alumínio com 0,18kg de massa, dimensões 60×3mm² e altura efectiva 280mm (ver Figura 5.1), estando indicados no Anexo I os desenhos de execução desenvolvidos para a sua realização. A plataforma vibratória utilizada para excitar o pórtico é constituída por um excitador electrodinâmico APS modelo 400 ELECTRO-SEIS, de funcionamento unidireccional, ao qual se adaptou uma mesa em alumínio para suporte de modelos laboratoriais, sendo mobilizada a este nível uma massa total de 12,32kg. O somatório destas massas traduz o peso total instalado sobre o equipamento, o qual ainda está longe da sua capacidade máxima de carga que vale 32kg.

Com o objectivo de medir continuamente a resposta da mesa e da estrutura, utilizaram-se dois transdutores de deslocamento da RDP e dois acelerómetros miniatura da PCB, posicionados ao nível da base e do piso. Após a colocação do pórtico sobre a mesa vibratória foi possível identificar uma frequência natural do conjunto de 6,03Hz e um coeficiente de amortecimento de 1,5%, obtidos através da análise da sua resposta livre a uma acção impulsiva.

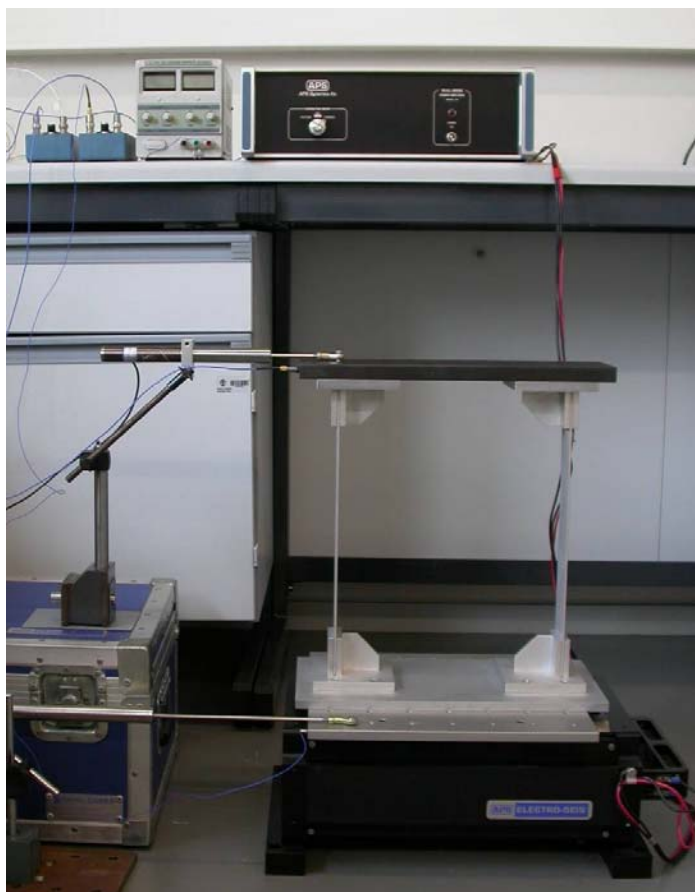


Figura 5.1 – Modelo laboratorial de um pórtico de um piso sobre a plataforma vibratória

A aquisição e processamento de sinal foi realizada utilizando o software comercial LabVIEW versão 6.1, com o auxílio de uma placa de conversão analógico/digital de sinal da National Instruments modelo PCI-6035E. Para a geração do sinal de controlo, foi utilizado um computador digital, no qual se implementou quer um controlador PID, quer um controlador preditivo. A acção de controlo correspondente é exercida utilizando o excitador electrodinâmico, o qual gera uma força proporcional à corrente emitida por um amplificador entreposto entre o excitador e o computador digital.

5.2.4 DESCRIÇÃO DO SOFTWARE DESEVOLVIDO

Tendo em vista a implementação experimental do sistema de controlo activo associado ao funcionamento da plataforma vibratória, desenvolveram-se em LabVIEW dois programas distintos para funcionarem com cada uma das estratégias de controlo referidas. Na Figura 5.2, encontra-se representado o programa desenvolvido para controlo da plataforma utilizando o controlador PID, cujo princípio de funcionamento está descrito na secção 4.3. A excitação basal que se pretende reproduzir é dada sob forma de um ficheiro, no qual se caracteriza a respectiva evolução temporal da lei de deslocamentos. Embora

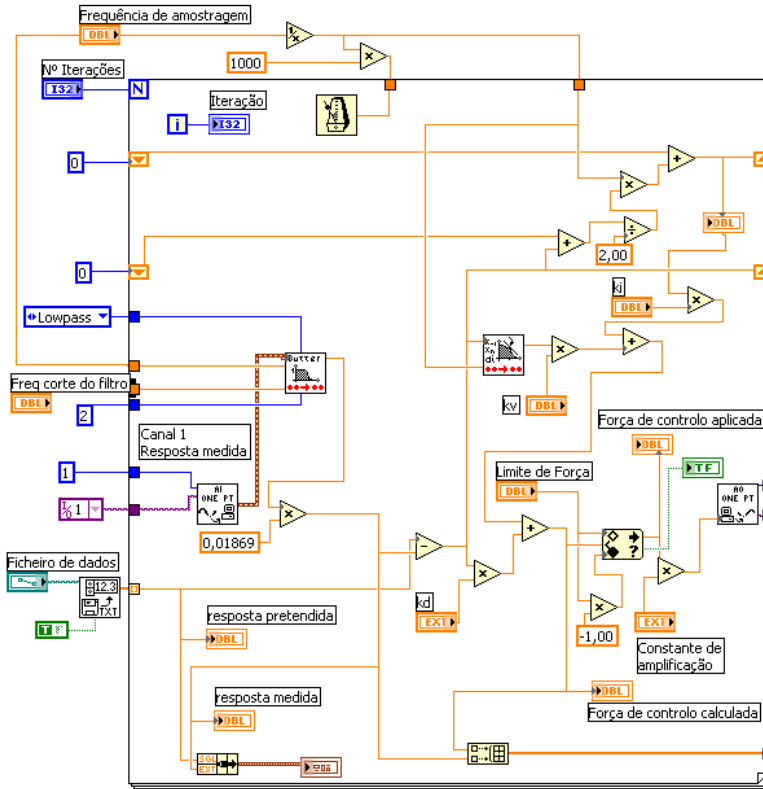


Figura 5.2 – Sub-rotina principal do controlador PID

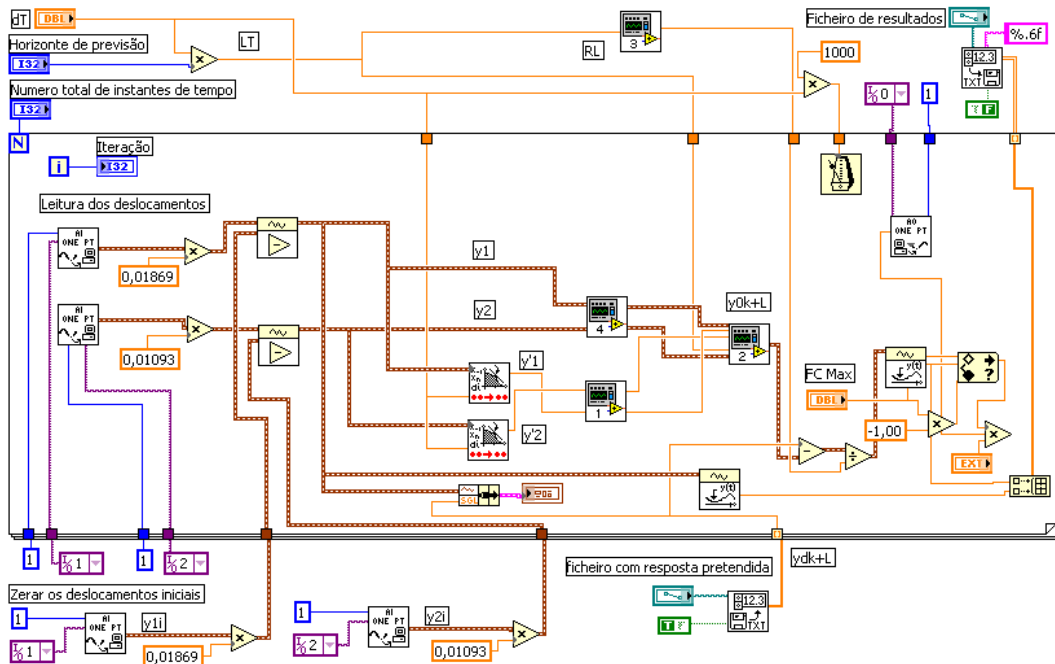


Figura 5.3 – Sub-rotina principal do controlador preditivo

esta estratégia seja formulada em tempo contínuo, a aquisição e geração de sinais é realizada utilizando um determinado intervalo de discretização temporal, dado o carácter digital do computador utilizado. Este facto porém não é relevante para o desempenho do controlador pois, como discutido na secção 4.7, a elevada frequência de amostragem de sinal conseguida pelos equipamentos actuais torna a acção de controlo equiparável a um sinal contínuo. Todavia, nestes ensaios, a frequência de amostragem adoptada acabou até por ser mais condicionada pela frequência utilizada nos registos dos sinais constantes nos ficheiros de dados, do que propriamente pela velocidade de processamento.

Após a leitura da resposta da plataforma em cada instante de tempo, o controlador calcula o sinal de controlo tendo por base a estratégia adoptada, e imediatamente executa um conjunto de verificações de modo a garantir um adequado funcionamento de todo o sistema. Uma das verificações consiste em limitar o valor da amplitude da força de controlo, caso este ultrapasse um valor previamente definido, evitando-se eventuais danos, quer na mesa vibratória, quer no próprio modelo laboratorial. A outra verificação consiste em desligar imediatamente o sistema de controlo, caso os deslocamentos experimentados pela plataforma ultrapassem determinados limites previamente estabelecidos. Com este procedimento, pretende-se evitar choques com as fronteiras laterais da plataforma, causados pela imposição de uma lei de deslocamentos que ultrapasse os limites físicos estabelecidos para a sua movimentação, ou até por uma eventual instabilidade do sistema de controlo. Estas verificações foram também implementadas no programa desenvolvido com base na estratégia de controlo preditivo, cujo esquema está indicado na Figura 5.3.

5.2.5 DIMENSIONAMENTO DOS CONTROLADORES

Após a montagem do modelo e de toda a instrumentação, começou-se por calibrar o controlador PID tendo como objectivo garantir o bom desempenho da resposta da mesa. Tal como descrito na secção 4.3.5, a obtenção dos parâmetros deste controlador, nomeadamente de K_p , T_i e T_d , é realizada experimentalmente sem necessidade de qualquer cálculo analítico. Para o efeito, recorreu-se ao segundo método de Ziegler-Nichols, dada a impossibilidade de se utilizar o primeiro método por não estarem reunidas todas as suas condicionantes. Começou-se por testar vários ganhos proporcionais largando o modelo de uma determinada posição afastada do eixo da mesa, tendo-se encontrado o valor do ganho crítico K_{cr} e o correspondente período crítico T_{cr} . Através da consulta da Tabela 4.2 definiu-se os parâmetros do controlador, tendo-se ainda decidido adoptar $T_i = \infty$, ou seja, anulou-se a componente integral do sinal de controlo. Isto porque num processo de ajuste fino dos parâmetros, a ausência deste ganho conduziu a uma melhoria da estabilidade nalguns ensaios prévios realizados com o pórtico sobre a mesa.

O controlador preditivo foi também sintonizado, tendo-se desenvolvido previamente um modelo numérico do sistema e um observador de estado. Como este controlador não foi descrito neste trabalho, remete-se esta análise para as referências indicadas anteriormente.

5.2.6 VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DA EFICÁCIA DO SISTEMA DE CONTROLO

A eficácia do sistema de controlo activo desenvolvido foi testada experimentalmente através da aplicação de várias acções sísmicas na base no modelo de escala reduzida. Para o efeito, seleccionou-se um conjunto de sismos reais cujo registo é conhecido, e tentou-se, para cada um deles, reproduzir a lei de deslocamentos correspondente, tendo-se posteriormente comparado a resposta efectiva na base do pórtico com a resposta desejada. Na Figura 5.4 apresentam-se os resultados obtidos no caso do sismo de Friuli, ocorrido a 6 de Maio de 1976, e na Figura 5.5 os resultados para o caso do sismo de Loma Prieta ocorrido a 18 de Novembro de 1989. Como se pode constatar, em ambos os casos se verifica uma grande proximidade entre o registo real do sismo e a resposta da plataforma vibratória comandada por qualquer dos dois sistemas de controlo propostos.

Embora nas Figuras 5.4 e 5.5 os registos sejam praticamente coincidentes, há que salientar alguns aspectos interessantes relativamente ao desempenho de cada um dos controladores. Por exemplo, o controlador PID tem maior dificuldade em responder a variações bruscas do movimento do que o controlador preditivo. Tal deve-se ao facto de este controlador não dispor de um modelo do comportamento dinâmico do sistema que permita prever tais variações, possibilitando a actuação antecipada na correcção do sinal de controlo para poder fazer face a estas situações. De facto, o controlador PID gera a acção de controlo mediante a existência de erros, o que o torna relativamente menos eficaz que o controlador preditivo. Por outro lado, ao não conhecer a resposta futura pretendida, este controlador faz permanentemente correcções à trajectória, guiado pela existência de erros e gerando forças de controlo em correspondência com esses erros, conduzindo a uma mudança constante no sentido da força de controlo. Este facto está bem patente na Figura 5.6, a qual representa a evolução temporal da força de controlo exigida pelo controlador PID, resultante da simulação da resposta do sismo de Friuli.

O controlador preditivo, por seu turno, exerce uma acção de controlo mais ponderada, antecipando a resposta pretendida e gerando uma força de controlo mais suave, conduzindo a uma resposta da mesa praticamente coincidente com a desejada. Contudo, a sua implementação é mais complexa, obrigando à elaboração de um modelo dinâmico do sistema e ao desenvolvimento de um observador de estado. Em contrapartida, o controlador PID não necessita de qualquer destes procedimentos, pois a sua sintonização depende exclusivamente da avaliação de parâmetros medidos experimentalmente. Por esta razão, a utilização de um controlador PID é, na prática, bastante mais interessante que a de um controlador preditivo, salvo nos casos em que se pretenda um elevado rigor no desempenho da plataforma vibratória.

Nos ensaios descritos nas secções seguintes utilizou-se geralmente este controlador para introduzir acções sísmicas nas bases dos modelos, pois, além das vantagens referidas, as sucessivas alterações das estruturas laboratoriais produzidas pela adição de vários sistemas de controlo de vibrações não afectam significativamente a sua massa, o que possibilita a utilização do mesmo controlador para a realização de diversos ensaios sobre o mesmo modelo físico.

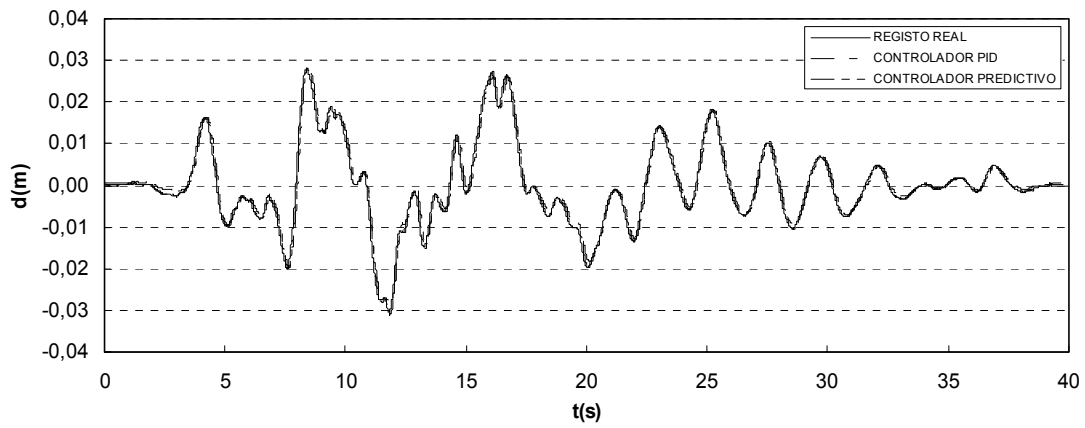


Figura 5.4 – Comparação entre o registo real e o medido na plataforma (sismo de Friuli)

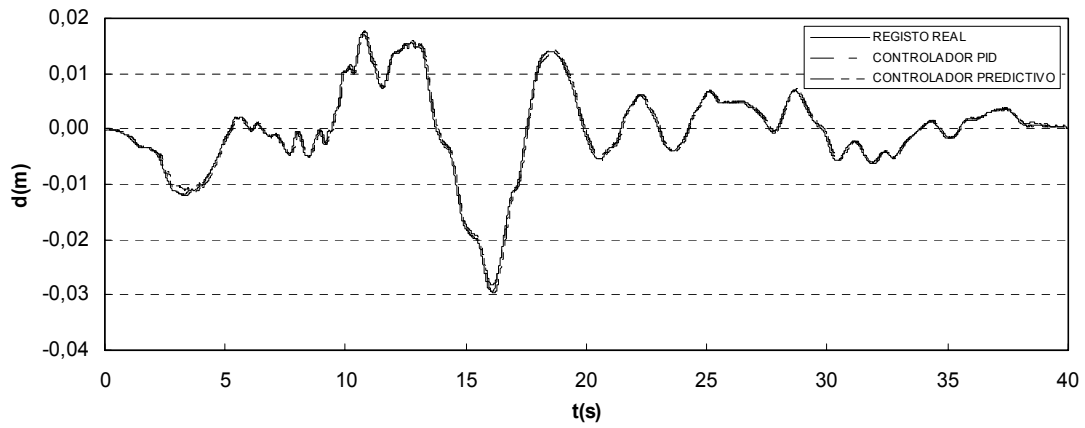


Figura 5.5 – Comparação entre o registo real e o medido na plataforma (sismo de Loma Prieta)

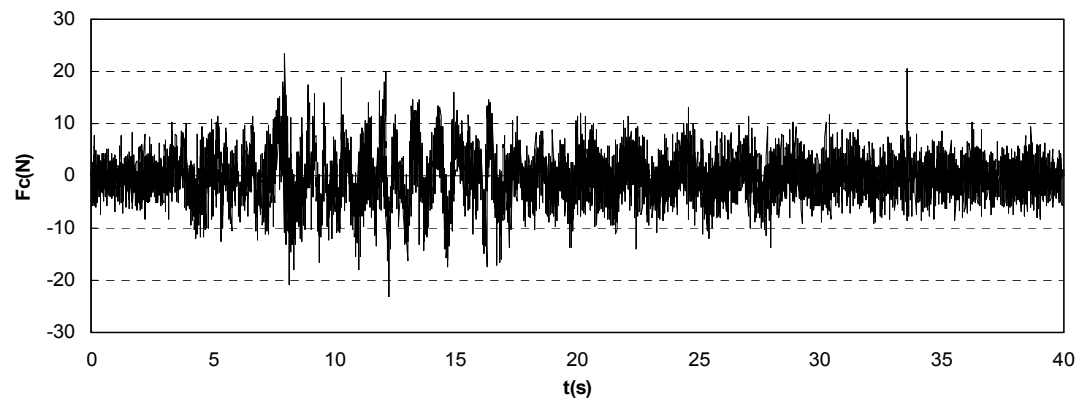


Figura 5.6 – Força de controlo calculada pelo controlador PID (sismo de Friuli)

5.3 CONTROLO DE VIBRAÇÕES NUM PÓRTICO DE 1 PISO

5.3.1 OBJECTIVOS

Estando a plataforma vibratória a funcionar correctamente, foi possível proceder a um conjunto de experiências iniciais de controlo sobre o pórtico de 1 piso referido anteriormente. Em particular, houve interesse em avaliar experimentalmente o desempenho de sistemas activos e de sistemas passivos estudados em trabalhos anteriores [84]. No caso de sistemas passivos, procurou-se implementar um amortecedor de massa passiva com o objectivo de atenuar as vibrações no modelo de escala reduzida, provocadas por excitações sísmicas e por excitações harmónicas basais. Já no caso de sistemas activos, testou-se a utilização de um amortecedor de massa activa no sentido de atenuar as vibrações induzidas por acções impulsivas, acções harmónicas e acções sísmicas.

5.3.2 SISTEMA PASSIVO COMPOSTO POR UM TMD

5.3.2.1 SINTONIZAÇÃO DO DISPOSITIVO PARA CARGAS HARMÓNICAS

Tendo em vista o controlo passivo de vibrações no referido modelo de escala reduzida, foi desenvolvido um TMD adaptado ao nível do piso superior. Este dispositivo é composto por uma massa de alumínio a qual, por intermédio de rolamentos de baixo atrito, desliza através de dois veios metálicos de secção circular fixos ao seu suporte, tal como mostra a Figura 5.7. O elemento deslizante tem uma massa base de 245g, podendo ser aumentada através da adaptação de pequenas massa adicionais, de modo a que se possa ajustar a frequência natural do TMD (ver Figura 5.8). A mola que liga essa massa ao corpo do dispositivo tem uma rigidez de 337N/m, o que faz com que o TMD tenha uma frequência natural inicial de 5,90Hz. Devido à reduzida escala do aparelho, não se incorporou qualquer amortecedor específico no dispositivo por não se ter encontrado no mercado um amortecedor viscoso linear de tão pequenas dimensões, contribuindo para tal também o facto de, nos TMDs, a sintonização do amortecimento não ser tão importante como a sintonização da frequência [5]. No Anexo II encontram-se os desenhos de execução que foram preparados para a construção deste dispositivo de controlo passivo.

Após a colocação do TMD sobre o pórtico já adaptado à mesa vibratória, foram avaliadas as características dinâmicas do sistema, de modo a dimensionar o valor a atribuir à massa deslizante. Para o efeito, teve-se em conta que o sistema colocado sobre a plataforma vibratória passou a ter dois graus de liberdade, originando dois modos de vibração independentes (ver Figura 5.9). O primeiro modo tem um movimento de corpo rígido, o que equivale a uma frequência natural nula, pois não existe qualquer ligação horizontal entre a mesa e o exterior. O segundo modo de vibração é caracterizado pelo movimento relativo dos dois pisos, sendo o único a contribuir significativamente para as vibrações na estrutura.



Figura 5.7 – Perspectiva do TMD

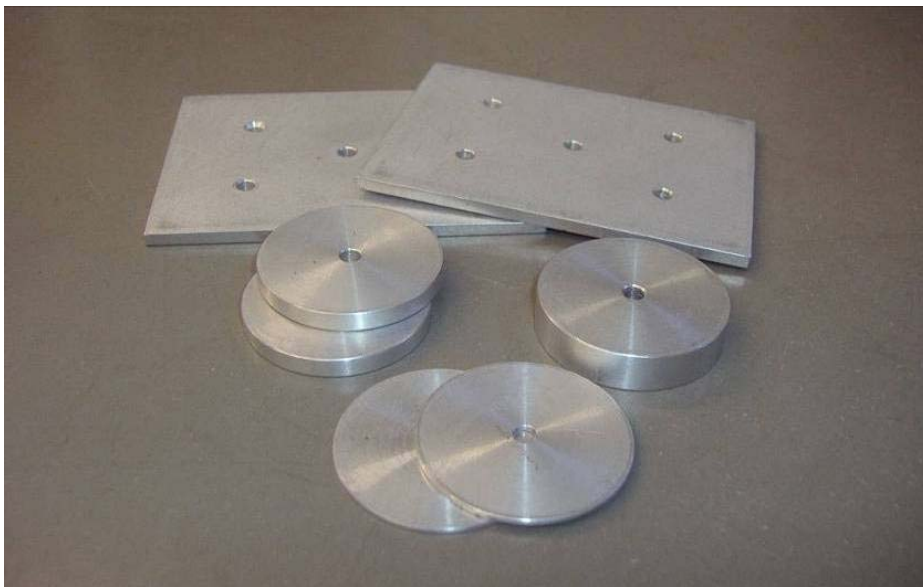


Figura 5.8 – Massas adicionais para ajuste da frequência própria do TMD

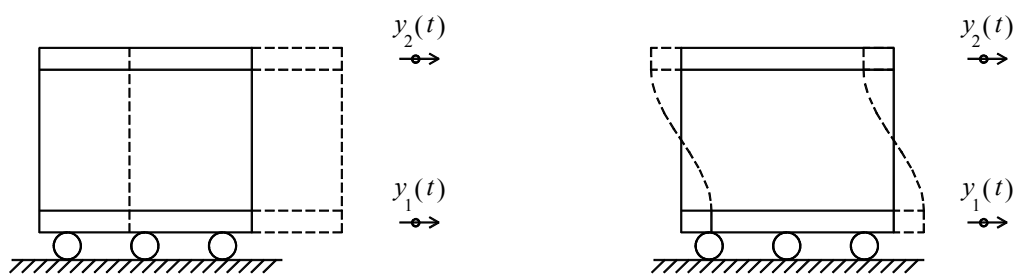


Figura 5.9 – Representação dos graus de liberdade do sistema e respectivos modos de vibração (massa do TMD fixa)

Os valores das massas associadas aos 2 graus de liberdade foram avaliadas, tendo sido incluídas as massas dos sensores, do corpo do TMD e de uma base adicional de fixação do pórtico, chegando-se a $m_1=11,92\text{kg}$ e $m_2=11,60\text{kg}$. A frequência natural medida experimentalmente, fixando a massa livre do TMD, foi de 5,42Hz, podendo estimar-se a rigidez k dos pilares através da relação

$$\omega = \sqrt{k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \quad (5.1)$$

que corresponde à frequência natural teórica do modelo, obtendo-se $k = 6,8\text{kN/m}$. A configuração modal teórica pode igualmente deduzir-se, chegando-se a

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{m_2}{m_1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

valendo neste caso

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11,60}{11,92} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,973 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O cálculo das características óptimas de um TMD implica a normalização das características dinâmicas modais relativamente a uma componente modal unitária na secção de adaptação do dispositivo [5]. Neste caso, a configuração modal calculada anteriormente já se encontra nesta forma, de onde se conclui que as características dinâmicas modais associadas a este modo de vibração valem

$$m_{11} = \phi^T M_s \phi = 22,3\text{kg}$$

$$k_{11} = \phi^T K_s \phi = 25,8\text{kN/m}$$

onde M_s e K_s são as matrizes de massa e rigidez do sistema, respectivamente. O coeficiente de amortecimento do sistema foi igualmente avaliado através do método de decremento logarítmico aplicado à observação da resposta experimental em vibração livre, tendo-se estimado um valor de $\zeta_{11} = 1\%$ correspondente a

$$c_{11} = 15,2\text{Ns/m}$$

A sintonização do TMD foi realizada através da adição e subtração sucessiva de pequenas massas, até que a curva de amplificação da estrutura obtida experimentalmente tivesse picos iguais associados às duas frequências naturais do sistema resultante do funcionamento conjunto do pórtico e do TMD. As curvas de amplificação referidas foram obtidas por medição do deslocamento do pórtico ao nível do piso onde estava fixado o TMD, tendo-se feito um varrimento para valores discretos da frequência próximos da localização dos picos. Através deste procedimento, concluiu-se que o valor da massa que conduzia ao nivelamento desses picos seria de 0,302kg, ou seja, 1,35% da massa modal da estrutura ($\mu=0,0135$), ficando o TMD com uma frequência própria de $f_{22}=5,34\text{Hz}$, chegando-se a uma relação de $f_{22}/f_{11}=5,34/5,42 = 0,985$. O amortecimento do TMD foi avaliado experimentalmente em $\xi_{22}=5,1\%$, ligeiramente diferente do valor óptimo proposto por Den Hartog [55], que seria de 6,9%. No entanto, como já referido, tal diferença não é significativa, pelo que se considera que as características descritas do TMD correspondem, em princípio, a um bom desempenho deste dispositivo.

Na Figura 5.10 representam-se as curvas de amplificação teóricas da estrutura com e sem TMD (a cheio e a tracejado respectivamente), as quais foram obtidas tendo em consideração os parâmetros dinâmicos medidos experimentalmente. A curva de amplificação sem TMD depende fortemente do amortecimento estrutural, pelo que foi calibrada tendo em conta o valor medido de 1%. Já a curva de amplificação com TMD foi obtida a partir de [55]

$$\frac{X_1}{X_{1,est}} = \sqrt{\frac{(2\xi_{22}rq)^2 + (r^2 - q^2)^2}{\left\{ r^4 - [1 + (1 + \mu)q^2] r^2 + q^2 \right\}^2 + (2\xi_{22}rq)^2 [1 - r^2(1 + \mu)]^2}}$$

em que r é o valor da frequência de excitação normalizada, ou seja $r = f / f_{11}$. Na mesma figura estão também indicados valores da amplificação dinâmica medidos experimentalmente obtidos através da excitação basal do pórtico com cargas harmónicas, medindo-se a resposta estacionária ao nível do piso

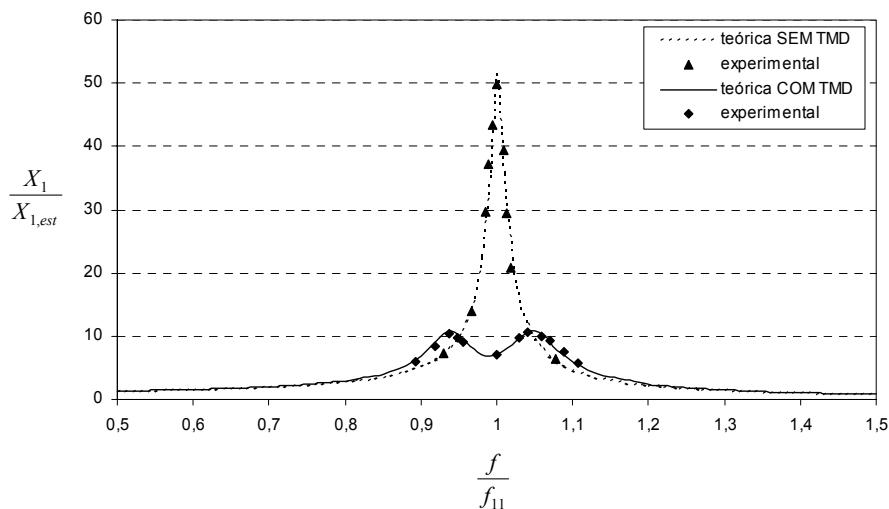


Figura 5.10 – Curvas de amplificação dinâmica da estrutura com e sem TMD

nos casos em que o TMD se encontrava bloqueado e desbloqueado. Como se pode constatar, existe uma excelente concordância entre os valores teóricos e os experimentais, que se pode atribuir à elevada linearidade do TMD e do modelo experimental desenvolvido. Também se pode concluir que, neste caso, a utilização de um TMD passivo na estrutura permitiu reduzir a resposta para cerca de 20% do seu valor inicial, o que corresponde a um elevado desempenho deste sistema passivo no controlo de vibrações harmónicas.

5.3.2.2 AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO NO CASO DE ACÇÕES SÍSMICAS

É geralmente aceite que os TMDs não são tão eficientes no controlo de vibrações devidas à acção sísmica, quanto são no caso de acções sinusoidais. Isto porque a estratégia de dimensionamento já não se baseia no estabelecimento de uma compensação de fase ao movimento harmónico da estrutura, mas na introdução de amortecimento no sistema como meio de atenuar a sua resposta dinâmica. No entanto, tal facto não impede a utilização destes dispositivos no controlo das vibrações sísmicas, os quais podem até evidenciar um grau de eficiência acrescido nos casos em que ocorram fenómenos de ressonância em determinados modos de vibração da estrutura.

Neste contexto, e tirando partido do esforço já realizado em torno do trabalho experimental envolvendo a sintonização de TMDs para cargas harmónicas, recorreu-se ao pórtico e TMD descritos anteriormente para avaliar experimentalmente a resposta do modelo laboratorial, com e sem o dispositivo de controlo passivo, a três acções sísmicas distintas. Essas acções foram geradas recorrendo a técnicas de análise estocástica [33], tendo por base os diferentes espectros de potência indicados na Figura 5.11, caracterizados por possuírem a mesma energia, mas terem conteúdos em frequência distintos. O conteúdo

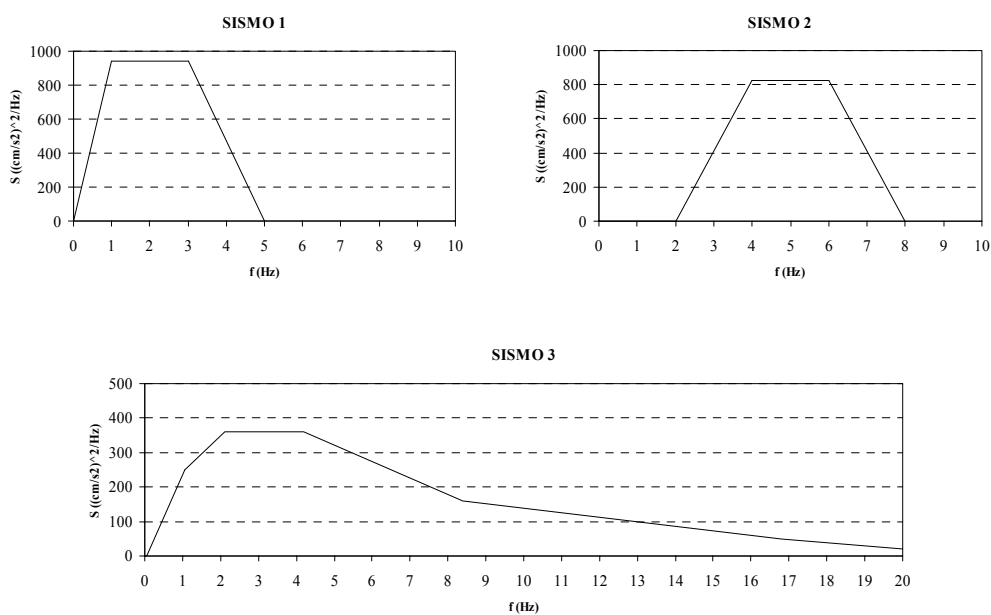


Figura 5.11 – Espectros de potência utilizados na geração da acção sísmica

espectral do sismo 1 centra-se numa gama de frequências afastada da frequência natural da estrutura (5,42Hz), enquanto que o do sismo 2 se centra em torno desta. Já o sismo 3 se caracteriza por ter um largo conteúdo espectral numa gama de frequências que se prolonga até aos 20Hz.

O processo de sintonização de TMDs para a acção sísmica é, como já foi dito, diferente daquele que é utilizado para acções harmónicas. Um dos métodos mais conhecidos de dimensionamento destes dispositivos para a atenuação de vibrações sísmicas é o método de Villaverde [126]. Este método sugere que o TMD seja sintonizado para a 1ª frequência natural da estrutura e que se adopte um valor do amortecimento igual a $\xi_{22} = \xi_{11} + \phi\sqrt{\mu}$, onde ϕ é a componente do modo de vibração da estrutura sem TMD, normalizado para um factor de participação unitário, correspondente à localização do amortecedor de massa sintonizada.

Ora, na impossibilidade de se modificar o amortecimento do TMD laboratorial desenvolvido neste trabalho, testou-se a utilização deste aparelho com as mesmas características definidas para o caso das acções harmónicas, pois, também nesta situação, a frequência natural adoptada é muito próxima da frequência natural da estrutura. Além disso, havendo a possibilidade de ocorrência de fenómenos de ressonância, em especial no caso da acção sísmica 2, a sintonização do TMD para oscilações harmónicas até pode conduzir a um melhor desempenho deste aparelho do que estando sintonizado pelo método de Villaverde [86].

Nos ensaios experimentais levados a efeito, recorreu-se ao sistema de controlo da mesa vibratória descrito na secção 5.2 para induzir a aplicação das acções sísmicas basais. Neste caso, construíram-se os ficheiros de dados correspondentes à lei de deslocamentos de cada sismo e posteriormente desenvolveram-se alguns ensaios com o TMD bloqueado e desbloqueado, tendo-se para cada um deles medido a resposta estrutural em termos de deslocamentos relativos entre a base e o 1º piso.

Na Tabela 5.1 apresentam-se os resultados experimentais obtidos para as três acções sísmicas referidas, estando também indicados os níveis de redução da resposta alcançados pelo sistema passivo de controlo das vibrações. Como se pode constatar, o TMD proposto é relativamente eficaz na atenuação da resposta estrutural, particularmente no caso da acção sísmica 2, chegando a diminuir a resposta dinâmica da estrutura em 38% do seu valor sem controlo. O registo temporal da resposta está, para este caso, representada na Figura 5.12, podendo observar-se claramente o efeito da inclusão deste dispositivo no modelo laboratorial.

Apesar de no caso do sismo 3, correspondente a um sismo de características mais próximas das reais, se ter conseguido um nível de eficiência inferior, a possibilidade de se utilizarem na prática TMDs de maior massa e amortecimento possibilita certamente o alcance de níveis de desempenho superiores, o que pode justificar a utilização destes dispositivos em estruturas reais.

Acção sísmica	Deslocamento máximo relativo entre pisos (mm)		
	Sem TMD	Com TMD	Redução
SISMO 1	1,87	2,12	-
SISMO 2	15,18	9,46	38%
SISMO 3	7,41	5,35	28%

Tabela 5.1 – Resultados dos ensaios experimentais obtidos com e sem TMD

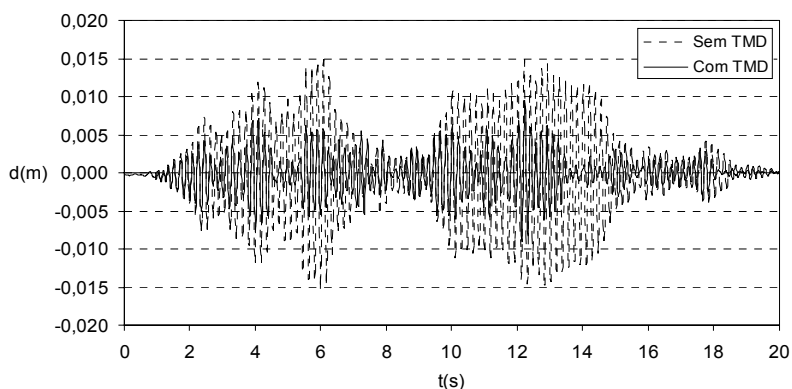


Figura 5.12 – Resposta medida do pórtico à acção sísmica 2 com e sem TMD

5.3.3 SISTEMA ACTIVO COMPOSTO POR UM AMD

5.3.3.1 DESCRIÇÃO DO DISPOSITIVO DE CONTROLO

O modelo laboratorial de 1 piso utilizado nas experiências anteriores de controlo passivo foi igualmente sujeito a ensaios envolvendo a implementação de um sistema de controlo activo. Para o efeito, desenvolveu-se o amortecedor de massa activa indicado na Figura 5.13 o qual resultou da evolução do TMD anteriormente descrito, estando os desenhos de execução respectivos incluídos no Anexo II. Este dispositivo é composto por uma massa activa de valor ajustável, ligada a um pequeno actuador electrodinâmico através de um veio metálico, o qual, por sua vez, está fixo ao corpo do aparelho. O veio do actuador confere uma ligação da massa activa ao corpo do AMD do tipo mola e amortecedor, de tal forma que, quando a massa é largada de uma determinada posição, descreve um movimento harmónico amortecido. Além das forças de rigidez e de amortecimento desenvolvidas entre a massa activa e o seu suporte, este aparelho possibilita que exista também uma força activa produzida pelo funcionamento do actuador.

O modelo numérico que permite traduzir o efeito da aplicação de um AMD a uma estrutura pode ser deduzido a partir do esquema representado na Figura 5.14, no qual se pode observar que este dispositivo adiciona um grau de liberdade ao sistema estrutural inicial, através da ligação materializada pela mola e amortecedor do AMD. A força activa traduz-se, na prática, por um par de forças de inércia $f_c(t)$

entrepostas entre a massa e o corpo do aparelho, as quais, quando devidamente geradas, podem exercer uma acção de controlo sobre a estrutura principal. Na secção 5.4.5 está exposta uma análise mais aprofundada relativamente ao funcionamento de um AMD, referindo-se desde já que este dispositivo obedece a um esquema de controlo não colocado, cujo desempenho depende da sua massa, das suas características dinâmicas e das características do actuador.

No sentido de avaliar os parâmetros dinâmicos do AMD, foram desenvolvidos alguns ensaios com o objectivo de determinar a frequência natural e o coeficiente de amortecimento associados a valores crescentes da massa activa entre 0,33kg e 2,89kg. A determinação desses parâmetros foi realizada através da análise da curva envolvente do decaimento livre da massa quando largada de uma posição inicial diferente da posição de equilíbrio, tendo-se para o efeito utilizado um acelerómetro miniatura. Na solução mais utilizada correspondente a uma massa activa de 2,89kg, a frequência natural de vibração é de 5,80Hz e o coeficiente de amortecimento de 3,2%. A rigidez da mola do AMD foi avaliada em cerca de 3840N/m.

O actuador utilizado no aparelho é um motor linear de funcionamento axial da LDS modelo V101, o qual pode aplicar forças até 8,9N de amplitude na gama de frequências de interesse, tendo um curso máximo de $\pm 2,5$ mm. Este actuador gera uma força proporcional à corrente eléctrica, pelo que, através do controlo desta grandeza é possível gerar a força activa pretendida. O amplificador respectivo corresponde ao modelo PA25-E de 25W de potência, podendo gerar uma corrente até 3A rms, cuja regulação pode ser feita através de um potenciómetro disponível no painel principal, ou, em alternativa, através de um canal de entrada em tensão eléctrica.



Figura 5.13 – Perspectiva do AMD

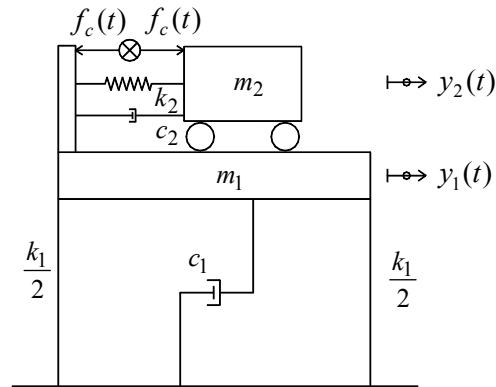


Figura 5.14 – Modelo de funcionamento de um AMD

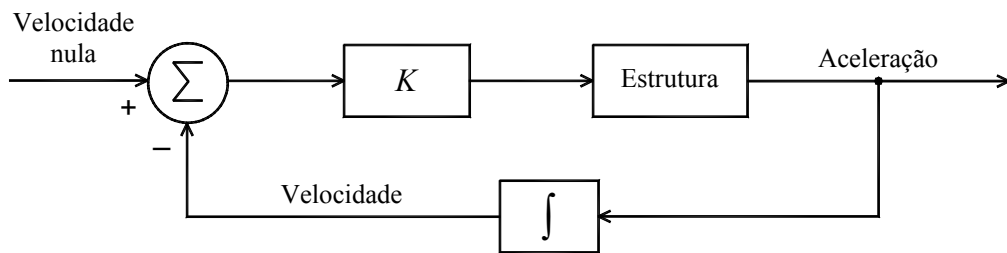


Figura 5.15 – Diagrama de blocos do sistema de controlo

5.3.3.2 IMPLEMENTAÇÃO DO SISTEMA ACTIVO

A estratégia de controlo utilizada para reduzir as vibrações no modelo laboratorial de 1 piso é baseada na utilização de um controlador derivativo, o qual gera uma força proporcional à velocidade em correspondência com um ganho K . Esta estratégia, também conhecida como realimentação directa da velocidade (DVF), tem como efeito a introdução de amortecimento no sistema, com algum paralelismo relativamente ao caso da introdução de um amortecedor passivo numa estrutura.

O funcionamento do sistema activo em malha fechada está indicado na Figura 5.15, onde constam todas as operações envolvidas no ciclo de controlo. Dada a simplicidade associada à implementação do controlador derivativo, optou-se nesta experiência por concretizar todo o sistema numa base analógica,

não se tendo inserido o computador na malha de controlo. Isto é possível porque, sendo a velocidade directamente obtida por integração do sinal do acelerómetro, o sinal de controlo é gerado internamente no amplificador do sistema de actuação, através da multiplicação do sinal de entrada por um determinado ganho fixado através do potenciómetro do aparelho.

Como consequência da utilização de um sistema de controlo puramente analógico, houve necessidade de se utilizar um sistema de aquisição que funcionasse em paralelo com o sistema de controlo, no sentido de registar em ficheiro a evolução temporal de alguns parâmetros de interesse. Nesse sentido, utilizou-se um sistema de aquisição desenvolvido em ambiente LabVIEW com recurso a uma placa de conversão analógica/digital dos sinais com 8 canais de entrada.

Nas próximas secções descrevem-se algumas experiências utilizando este sistema de controlo, excitando o modelo laboratorial com vários tipos de acções dinâmicas. Refere-se no entanto que os ensaios foram realizados apenas na vertente experimental sem recurso a modelos numéricos, pretendendo-se apenas observar experimentalmente acções básicas de controlo.

5.3.3.3 DESEMPENHO PARA ACÇÕES IMPULSIVAS

A primeira experiência diz respeito ao controlo de vibrações provocadas por acções impulsivas, com o objectivo de observar o efeito do controlo na fase de vibração livre do sistema. Para o efeito, utilizou-se o modelo de 1 piso descrito anteriormente apoiado sobre uma base fixa no laboratório, tendo-se entretanto adaptado um conjunto de pilares mais curtos no sentido de aumentar a frequência própria do pórtico. Isto para tentar tirar partido da elevada linearidade do sistema de actuação para frequências superiores a 5Hz. Nestas condições, a frequência natural da estrutura foi avaliada em 10,1Hz e o coeficiente de amortecimento em 0,5%.

No sentido de testar a eficácia do sistema de controlo proposto, aplicou-se uma acção impulsiva no topo do pórtico utilizando um martelo de impulsos (ver Figura 5.16), estando o sistema de controlo inicialmente desligado. Após alguns instantes em vibração livre, ligou-se o sistema rodando o potenciómetro até a um ganho de $K=60$, activando-se a oscilação forçada da massa do AMD. Na Figura 5.17 representa-se a medição da acção impulsiva aplicada ao pórtico e na Figura 5.18 evolução temporal da resposta medida no piso superior. Como se pode observar, após a aplicação da força impulsiva o modelo entra em vibração livre até ao instante em que se liga o controlo, momento a partir do qual se verifica o amortecimento forçado do sistema. A acção de controlo exercida pelo actuador do AMD, correspondente ao par de forças exercidas entre a estrutura e a massa activa, pode ser estimada multiplicando a velocidade medida experimentalmente pelo ganho do controlador, obtendo-se a representação gráfica da Figura 5.19.

Como o controlador utilizado é do tipo derivativo, o efeito que exerce sobre o pórtico traduz-se no aumento do amortecimento estrutural, havendo interesse em quantificar este parâmetro antes e depois do funcionamento do sistema de controlo. Para o efeito, recorreu-se aos registos das Figuras 5.18 e 5.19, tendo-se constado que antes da activação do AMD a estrutura apresenta um coeficiente de amortecimento aproximado de 0,5%, o qual se eleva para 4,5% após a ligação do dispositivo. Este aumento do amortecimento em cerca de 9 vezes, evidencia bem a eficácia deste tipo de controlador na redução de vibrações livres, cuja caracterização depende fortemente do amortecimento estrutural.

Como nota final relativamente a este ensaio, refere-se que a acção aplicada pelo martelo de impulsos tem uma representação gráfica marcada por um pico de valor negativo, o que pode suscitar algumas dúvidas. No entanto, o facto é que este pico é registado pelo sensor existente na cabeça do martelo, não havendo ainda uma razão devidamente fundamentada para esta situação. Todavia, algumas simulações numéricas anteriores demonstraram que a consideração deste pico negativo tem alguma razão de ser, pois conduzem a resultados mais próximos das medições experimentais.



Figura 5.16 – Martelo de impulsos e respectivo condicionador de sinal

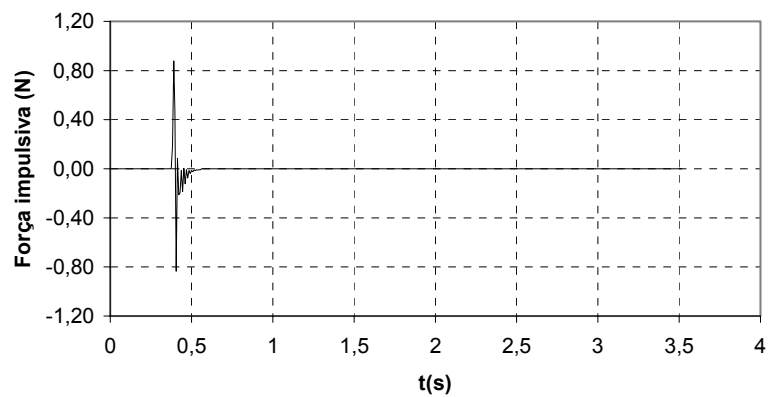


Figura 5.17 – Força impulsiva aplicada ao modelo

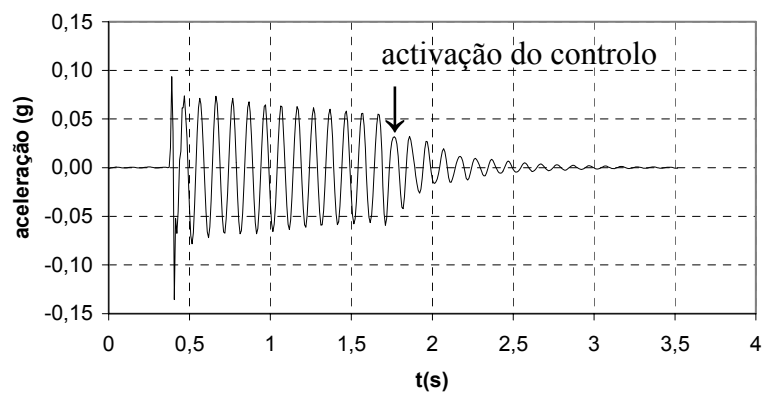


Figura 5.18 – Resposta estrutural com e sem controle medida no piso superior

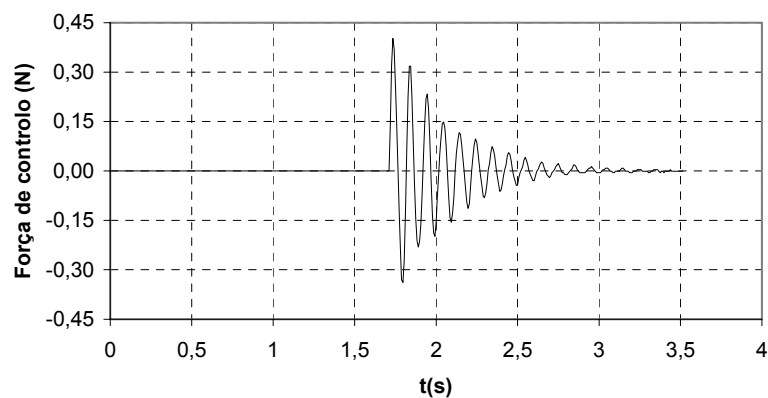


Figura 5.19 – Força de controle aplicada pelo actuador

5.3.3.4 ENSAIOS COM ACÇÕES HARMÓNICAS

O sistema de controlo activo composto pelo AMD foi também utilizado em ensaios envolvendo acções harmónicas, tendo-se para o efeito instalado o modelo laboratorial sobre a mesa vibratória para aplicação de excitações basais. Nesta experiência utilizou-se a instrumentação e equipamentos já descritos nas secções anteriores. O ensaio foi realizado impondo ao modelo frequências de excitação variáveis numa gama de frequências próxima da frequência natural da estrutura, tendo-se avaliado a resposta da estrutura com e sem controlo.

Quando o sistema de controlo está desligado, a estrutura apresenta um coeficiente de amortecimento de cerca de 2%, pelo que, a curva de amplificação deste oscilador de 1 grau de liberdade pode ser traçada sem dificuldades a partir da sua expressão teórica, encontrando-se representada na Figura 5.20. Chama-se porém a atenção de que este valor do amortecimento é substancialmente superior ao obtido no caso em que o pórtico está apoiado numa base fixa. Tal deve-se ao facto de que, além de ser alterado a dinâmica global do sistema, quando o modelo se encontra sobre a mesa vibratória, mobiliza pequenos atritos inerentes ao seu funcionamento.

Os ensaios com excitação harmónica basal foram igualmente realizados com o sistema de controlo em funcionamento, tendo-se adoptado um valor do ganho de $K=75$. Neste caso, verificou-se um significativo decréscimo da amplificação dinâmica do sistema de 26 para 6, ou seja, uma redução de 75% relativamente à resposta inicial sem controlo. Isto quer dizer que o sistema de controlo activo impôs um aumento do coeficiente de amortecimento de 2 para 8% sensivelmente, estando a curva de amplificação dinâmica associada a este nível de amortecimento indicada da Figura 5.20. Na mesma figura está também representada a curva de amplificação associada ao desempenho de um TMD passivo sintonizado com parâmetros óptimos, podendo constatar-se que, neste caso, este dispositivo apresenta igualmente uma elevada eficácia na redução da resposta estrutural, embora ligeiramente inferior à do sistema activo. Isto quer dizer que, no caso de vibrações harmónicas os TMDs, constituem uma boa solução de controlo, pois, apesar de serem relativamente menos eficientes que os sistemas activos equivalentes são uma opção mais económica e exequível.

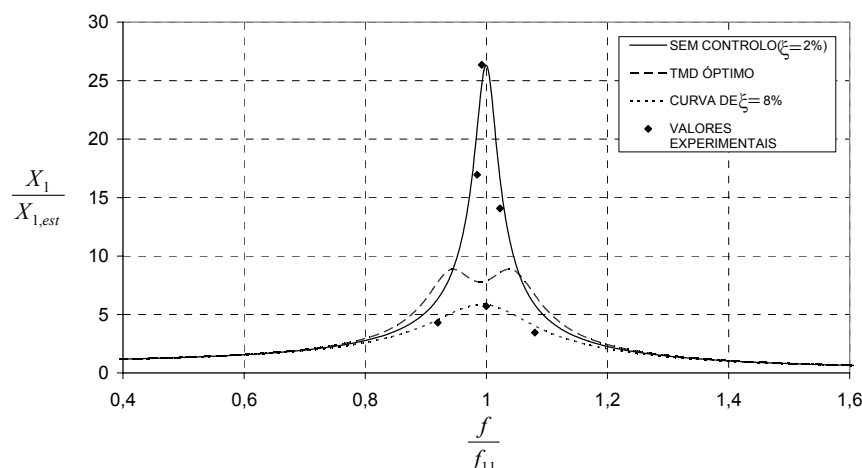


Figura 5.20 – Curvas de amplificação dinâmica

5.3.3.5 AVALIAÇÃO DA EFICÁCIA PARA ACÇÕES SÍSMICAS

Tendo por base o esquema do ensaio anterior, foram igualmente realizados testes com acções sísmicas aplicadas na base do modelo pela mesa vibratória dotada do sistema de controlo descrito na secção 5.2. Neste caso, adoptou-se uma acção sísmica do tipo 2, tal como caracterizada anteriormente, tendo-se recorrido também a um controlador derivativo integrado no funcionamento do AMD. Os ensaios realizados consistiram na avaliação da redução da resposta sísmica do modelo em função de valores de ganho desde zero (sem controlo) até $K=75$, tendo como objectivo avaliar experimentalmente o efeito da adição sucessiva de amortecimento na estrutura. Na Figura 5.21 encontram-se representados os valores máximos da resposta do modelo físico no seu piso superior com a evolução do ganho do controlador, podendo verificar-se que, neste caso, a estratégia de controlo adoptada não é tão eficiente na redução da resposta estrutural quanto é no caso de acções livres ou harmónicas. De facto, no caso das vibrações harmónicas, a redução da resposta estrutural é inversamente proporcional ao coeficiente de amortecimento do sistema, já no caso de acções de carácter aleatório, esse grau de eficiência não se verifica.

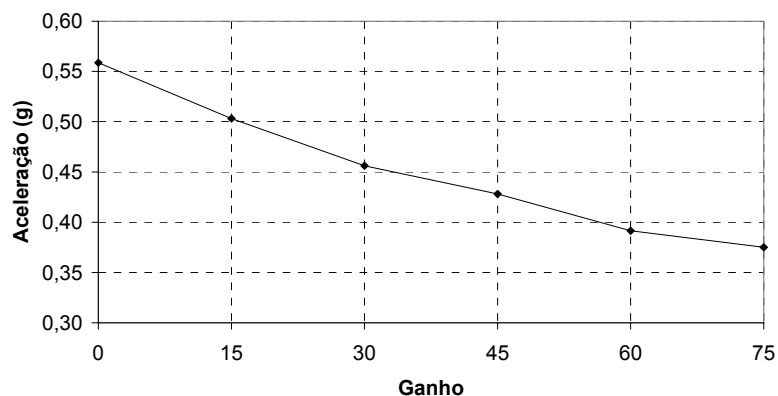


Figura 5.21 – Resposta estrutural máxima para diferentes valores de ganho

5.3.4 APRECIACÃO GLOBAL DOS RESULTADOS

Nesta experiência, que envolveu a aplicação de um sistema passivo composto por um TMD e um sistema activo composto por um AMD com o objectivo de atenuar as vibrações no modelo laboratorial de 1 piso, o sistema passivo demonstrou uma elevada eficácia no controlo de vibrações harmónicas, conseguindo-se, neste caso, obter reduções na ordem dos 80% relativamente à resposta inicial do sistema sem controlo. No caso da aplicação de acções sísmicas, verificou-se também uma significativa atenuação da resposta do pórtico por parte do sistema passivo, em particular na situação em que o conteúdo espectral da acção está centrado na frequência natural do sistema, tendo-se, nestas circunstâncias,

registado reduções da resposta na ordem dos 38%. Este resultados experimentais confirmam que os TMDs constituem uma boa solução de controlo nas situação em que a resposta da estrutura é dominada pela vibração harmónica de um modo de vibração do sistema, mas também podem ser relativamente eficientes no controlo da resposta sísmica de estruturas. Neste caso, os TMDs podem constituir uma boa solução de controlo em estruturas novas ou nos problemas de reforço sísmico de estruturas existentes, evitando-se uma intervenção generalizada ao nível dos elementos estruturais, certamente mais incómoda e dispendiosa.

Por outro lado, o sistema activo composto pelo AMD revelou ser extremamente eficaz no controlo de vibrações livres do sistema, conseguindo impor um aumento do respectivo coeficiente de amortecimento de 0,5% para 4,5%. Situação idêntica se verificou no caso de excitações harmónicas, tendo-se registado reduções da resposta estrutural na ordem dos 75%. No caso de excitações sísmicas conseguiu-se uma atenuação significativa das vibrações no pórtico da mesma ordem de grandeza da obtida com o sistema passivo.

Em face destes resultados, pode concluir-se que, em geral, a solução de controlo passivo adoptada é relativamente menos eficiente que a de controlo activo. Todavia, atendendo à elevada eficácia que ainda assim o TMD alcançou, seria, neste caso, difícil justificar na prática a opção pelo sistema activo, dada a sua complexidade e elevado custo relativo. Contudo, os sistemas activos apresentam algumas vantagens pertinentes face a alguns problemas do controlo passivo, fazendo com que em determinados casos se possa ponderar a sua utilização.

5.4 IMPLEMENTAÇÃO DE UM AMD NUM PÓRTICO DE 3 PISOS

5.4.1 OBJECTIVOS

Nas experiências anteriormente descritas utilizaram-se modelos de 1 grau de liberdade, tendo-se avaliado o efeito produzido por algumas acções básicas de controlo na resposta do sistema. Nesta secção, descreve-se a implementação de um sistema de controlo aplicado a um pórtico de 3 pisos, tendo como finalidade estudar o amortecimento de sistemas mais complexos, cujo comportamento dinâmico seja dominado por vários modos de vibração. Outro objectivo desta experiência está relacionado com o estudo da implementação de um AMD integrado num sistema de vários graus de liberdade, pois o facto deste dispositivo constituir uma forma de controlo não colocado exige que se considere adequadamente o problema da estabilidade. Finalmente, pretende-se abordar o problema do controlo modelando o sistema através de funções de transferência, recorrendo-se ao método do lugar das raízes como ferramenta de análise da estabilidade e da dinâmica do sistema controlado.

5.4.2 DESCRIÇÃO DO MODELO LABORATORIAL E EQUIPAMENTOS UTILIZADOS

O modelo utilizado nesta experiência é constituído por um pórtico de três pisos composto por massas de aço ligadas entre si por intermédio de pilares em alumínio, tendo sido apoiado numa mesa vibratória especialmente desenvolvida para este modelo (ver Figura 5.22). A massa total ao nível de cada piso, incluindo a massa de aço, as ligações em alumínio, a massa dos pilares adjacentes e a massa dos sensores vale $m_1=15,16\text{kg}$, $m_2=15,16\text{kg}$ e $m_3=12,76\text{kg}$, correspondendo ao 1º, 2º e 3º pisos, respectivamente. Os pilares de alumínio, com 400mm de altura, 120mm de largura e 7mm de espessura, têm ligações rígidas com os pisos e nas ligações à base. No Anexo III encontram-se os desenhos desenvolvidos para o fabrico deste modelo. O módulo de elasticidade do alumínio foi estimado em cerca de 60GPa.

De modo a excitar o sistema com cargas harmónicas, o modelo foi fixado numa mesa vibratória composta por uma mesa alumínio guiada por quatro rolamentos de baixo atrito e por um excitador electrodinâmico alimentado por um amplificador de corrente eléctrica (ver Figura 5.23). A massa total mobilizada na base do modelo, incluindo a mesa em alumínio, a chapa de suporte basal do modelo, a massa do êmbolo do excitador, a massa do sensor e parte da massa dos pilares adjacentes à plataforma, foi avaliada em $m_0=40,51\text{kg}$. Os detalhes de execução da mesa vibratória estão indicados no Anexo IV.

Para controlar as vibrações induzidas no modelo físico, instalou-se o AMD descrito anteriormente no último piso da estrutura (ver Figura 5.24). Neste caso, adoptou-se uma massa activa de 2,89kg através da adição de 2 massas adicionais de aço, de tal forma que, ao libertar a massa activa de uma determinada posição, esta descreve um movimento de vibração livre marcado por uma frequência de 5,80Hz e um coeficiente de amortecimento 3,2%.

Para medir continuamente a resposta do sistema foram instalados acelerómetros posicionados na base e em cada piso do modelo (ver Figura 5.25) e também um acelerómetro miniatura na massa do AMD. A força desenvolvida entre a estrutura e o AMD foi medida através de uma pequena célula de carga instalada no veio de transmissão da força activa. Foi também medida a corrente eléctrica fornecida pelos amplificadores aos excitadores electrodinâmicos utilizados nesta experiência, com o objectivo de determinar com rigor a força desenvolvida por estes equipamentos, quer na excitação basal do modelo, quer no controlo do sistema.

Todos os transdutores e excitadores electrodinâmicos descritos anteriormente foram controlados por um computador dotado de uma carta de conversão Analógica/Digital dos sinais, utilizando o software LabVIEW da National Instruments. À semelhança da experiência anterior, o algoritmo de controlo foi implementado numa base analógica, realimentando a velocidade medida no último piso do modelo no amplificador do AMD, concebendo-se desta forma um controlador derivativo.

Na identificação experimental dos parâmetros dinâmicos do sistema foi também utilizado um analisador de Fourier dotado de 8 canais de entrada. Além de permitir o registo da evolução temporal de algumas variáveis medidas experimentalmente, este equipamento permite obter estimativas de Funções de Resposta em Frequência, úteis na identificação das frequências naturais do modelo.



Figura 5.22 – Vista geral do modelo e equipamentos utilizados

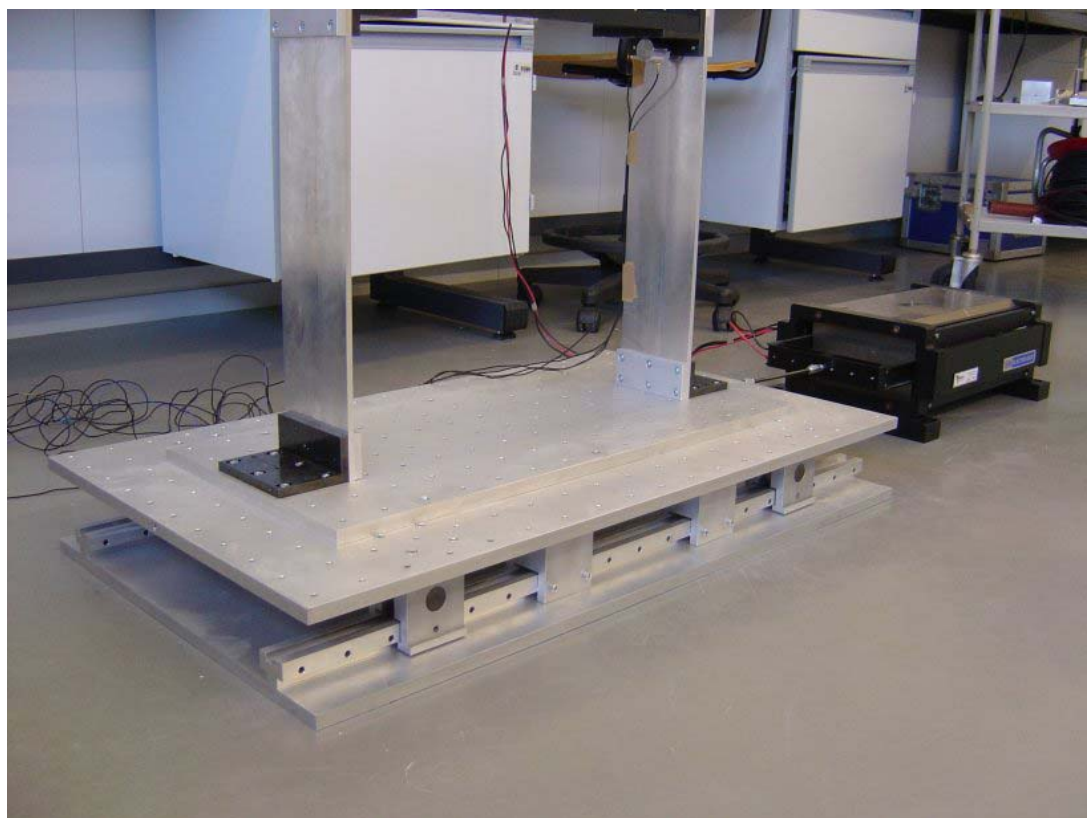


Figura 5.23 – Pormenor da mesa vibratória

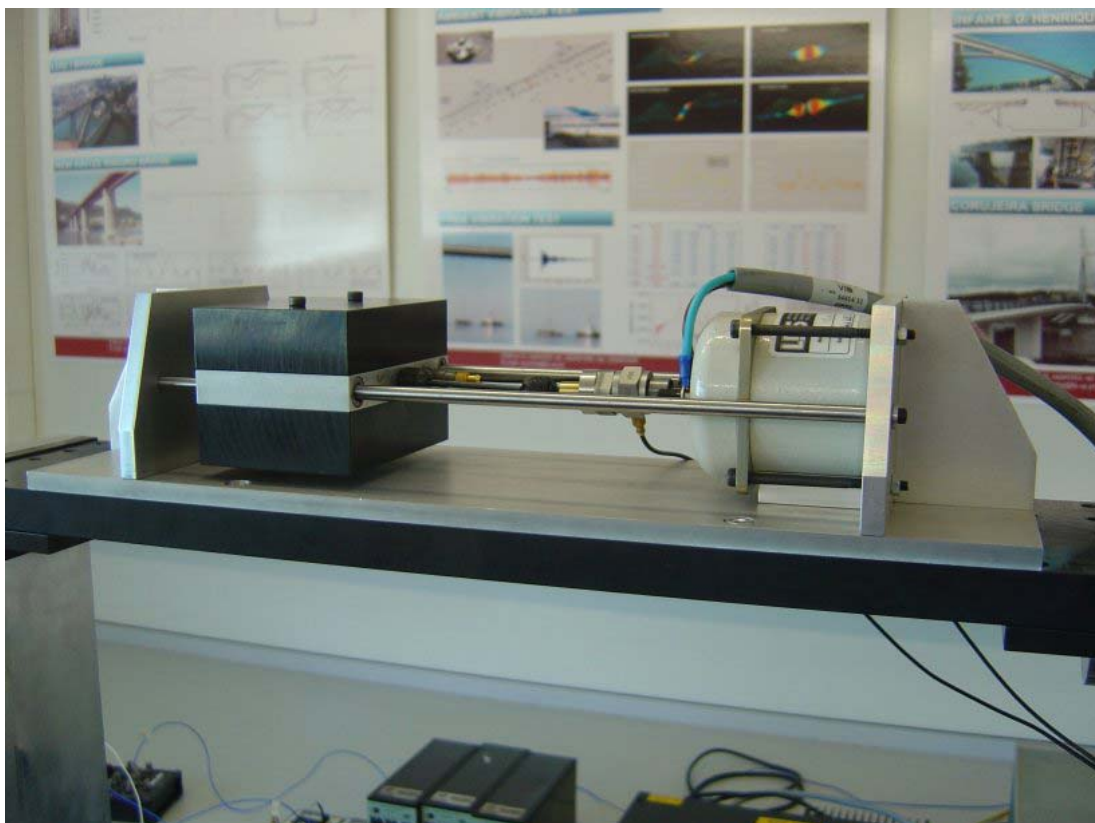


Figura 5.24 – Amortecedor de Massa Activa utilizado



Figura 5.25 – Acelerómetro posicionado ao nível do último piso

5.4.3 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DINÂMICOS DO SISTEMA

Tendo em vista a construção de um modelo numérico devidamente calibrado em termos dos parâmetros dinâmicos do sistema, realizaram-se alguns ensaios prévios com o objectivo de determinar experimentalmente as frequências naturais, coeficientes de amortecimento e a configuração dos modos de vibração do modelo laboratorial. As frequências naturais foram avaliadas através do método da selecção de picos, tendo-se recorrido à ajuda do analisador de Fourier para a avaliação das FRFs. No presente caso, relacionou-se a força perturbadora aplicada na base do pórtico pelo excitador electrodinâmico com a resposta em aceleração medida no último piso. Para o efeito, considerou-se uma banda de frequências de interesse dos 0 aos 25Hz para espectros obtidos a partir de 5 médias. Cada série foi adquirida durante 16 segundos o que conduziu a uma resolução em frequência de 0,0625Hz. A Figura 5.26 mostra a magnitude da FRF obtida tal como descrito, podendo claramente identificar-se as frequências naturais do sistema em correspondência com os picos indicados no gráfico. Na Tabela 5.2 estão indicadas as frequências naturais identificadas e também as obtidas analiticamente através do modelo numérico descrito na próxima secção. Refira-se que tendo o pórtico de 3 pisos, dotado do AMD e apoiado na mesa vibratória, 5 graus de liberdade, tem apenas 4 frequências naturais de interesse, na medida em que possui uma configuração modal de translação de corpo rígido.

Para determinar a configuração experimental de cada modo de vibração, excitou-se o modelo físico em condições de ressonância em correspondência com as diversas frequências naturais do sistema e, através da medição da amplitude e fase da resposta em cada piso, avaliou-se a componente modal associada a cada grau de liberdade. Este procedimento é válido porque, quando a estrutura se encontra sujeita a uma carga harmónica com frequência coincidente com uma das suas frequências naturais, a contribuição de outros modos vibração para a resposta é desprezável face à contribuição do modo excitado. Na maior parte dos casos, chega-se inclusivamente a visualizar a configuração modal correspondente à situação de ressonância. Na Figura 5.27 representam-se as configurações modais obtidas experimentalmente, tendo-se igualmente representado as configurações obtidas analiticamente, podendo constatar-se desde já uma excelente aproximação entre ambas. O primeiro modo de vibração pode ser identificado como estando associado à vibração do AMD, pois apresenta uma franca oscilação da massa deste aparelho relativamente ao movimento dos pisos. Já os restantes podem ser identificados com os modos de vibração da estrutura inicial sem AMD.

Para determinar as características de amortecimento do sistema, excitou-se o modelo físico em condições de ressonância em correspondência com cada uma das suas frequências naturais e, após a súbita paragem da acção harmónica basal, registou-se a sua resposta livre. A aplicação do método do decremento logarítmico permitiu obter estimativas de cada um dos coeficientes de amortecimento através da análise da respectiva curva envolvente. Os resultados obtidos encontram-se indicados na Figura 5.28 e sintetizados na Tabela 5.3, tendo-se medido a resposta do 1º modo de vibração ao nível da massa do AMD e as respostas dos restantes modos ao nível do 3º piso. Também aqui se pode identificar o

amortecimento do primeiro modo de vibração de 3,2%, como estando associado ao funcionamento isolado do AMD.

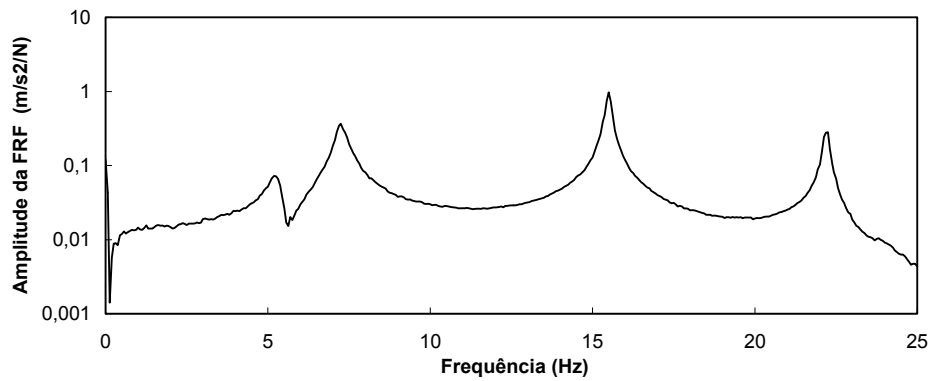


Figura 5.26 – FRF relacionando a força aplicada da base modelo com a resposta em aceleração medida no 3º piso

Modo de vibração	Frequência natural identificada (Hz)	Frequência natural calculada (Hz)
1	5,50	5,45
2	7,35	7,35
3	15,50	14,60
4	22,50	22,25

Tabela 5.2 – Frequências naturais identificadas experimentalmente e calculadas numericamente

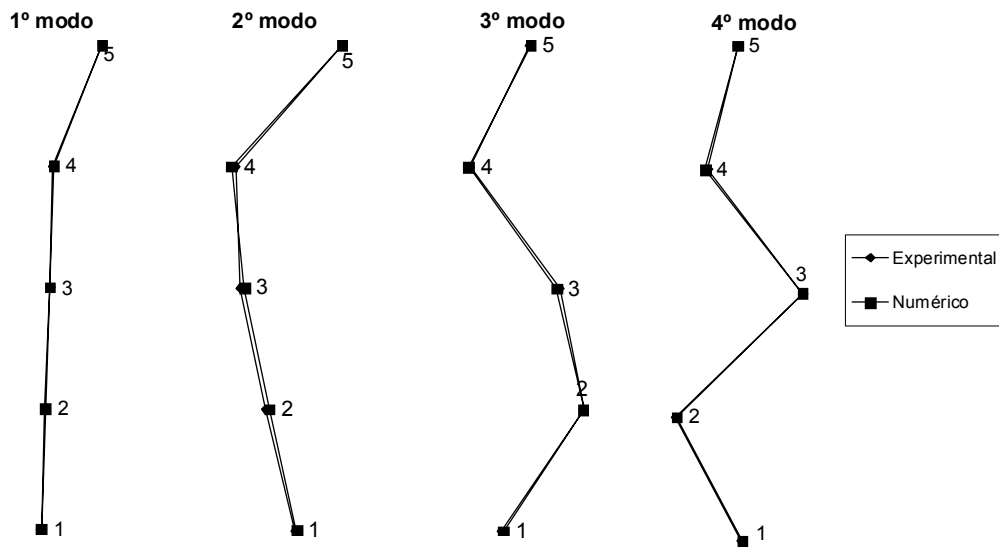


Figura 5.27 – Comparação entre os modos de vibração experimentais e numéricos

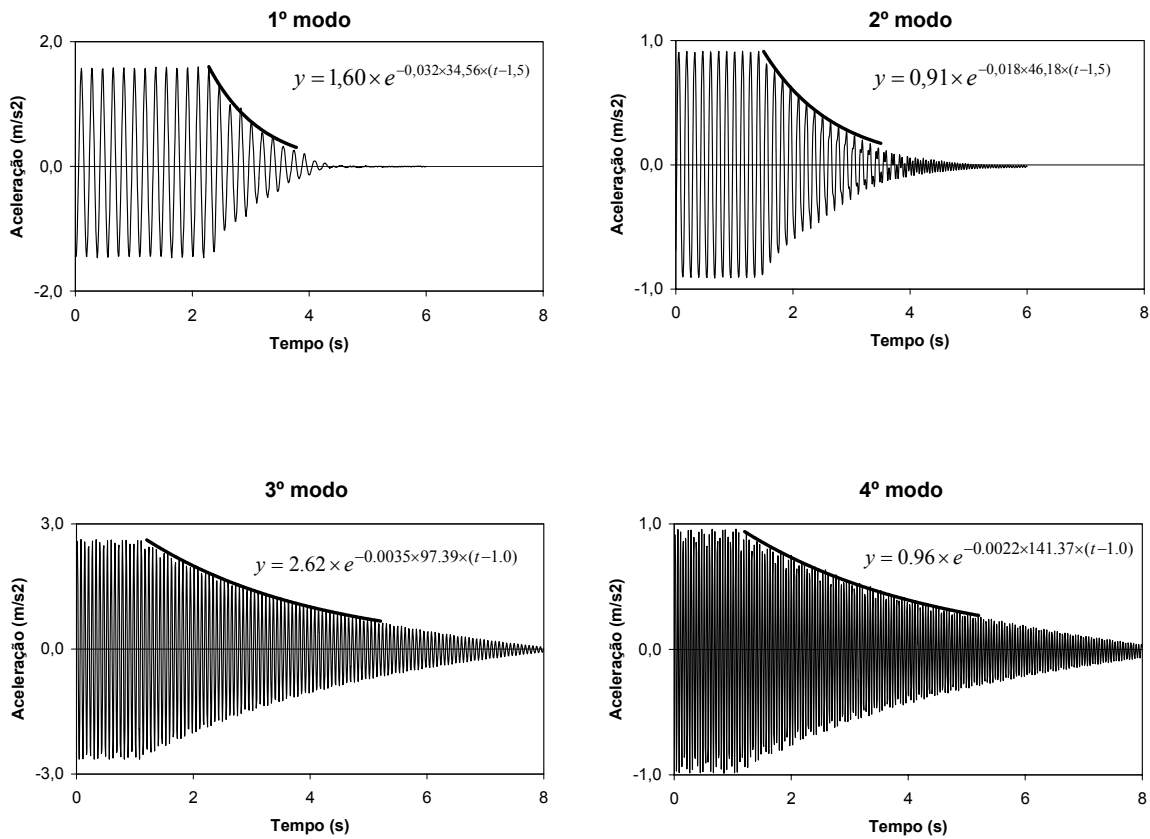


Figura 5.28 – Séries temporais da resposta livre do sistema e respectivas estimativas das curvas envolventes

Modo de vibração	Coefficiente de amortecimento (%)
1	3,20
2	1,80
3	0,35
4	0,22

Tabela 5.3 – Coeficientes de amortecimento identificados experimentalmente

5.4.4 DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO

Tendo por base as características geométricas e mecânicas do modelo descritas anteriormente, e a identificação experimental dos respectivos parâmetros dinâmicos, foi possível desenvolver um modelo numérico da estrutura tendo em vista o estudo do sistema de controlo. De facto, o conhecimento das relações matemáticas que caracterizam a resposta do sistema em função da entrada, possibilita analisar antecipadamente o efeito da variação do ganho do controlador e permite definir previamente qual o valor do ganho a adoptar, de tal forma a que o sistema de controlo atinja os objectivos pretendidos.

Nesta experiência optou-se por estudar o sistema de controlo tendo por base o método do lugar das raízes, o qual, mediante a representação gráfica da evolução dos pólos do sistema em malha fechada, permite conhecer a dinâmica imposta à estrutura, ao mesmo tempo que possibilita a análise da estabilidade do sistema de controlo. Para tal, foi necessário deduzir a função de transferência que relaciona a saída do sistema ao nível do 3º piso (como secção de referência para o controlo) com a entrada definida pelo par de forças aplicadas pelo AMD. Para o efeito, começou-se por definir as matrizes de massa, rigidez e amortecimento da estrutura em função das características do modelo, tendo-se concluído que, de acordo com os graus de liberdade indicados na Figura 5.29, essas matrizes valem respectivamente

$$M_e = \begin{bmatrix} 40,51 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15,16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15,16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15,41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,89 \end{bmatrix} \text{ [kg]}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 74,50 & -74,50 & 0 & 0 & 0 \\ -74,50 & 149,00 & -74,50 & 0 & 0 \\ 0 & -74,50 & 149,00 & -74,50 & 0 \\ 0 & 0 & -74,50 & 78,34 & -3,84 \\ 0 & 0 & 0 & -3,84 & 3,84 \end{bmatrix} \text{ [kN/m]}$$

$$C_e = \begin{bmatrix} 35,30 & -3,74 & -11,47 & -16,11 & -3,99 \\ -3,74 & 7,82 & -0,94 & -1,91 & -1,23 \\ -11,47 & -0,94 & 10,23 & 2,91 & -0,73 \\ -16,11 & -1,91 & 2,91 & 15,00 & 0,11 \\ -3,99 & -1,23 & -0,73 & 0,11 & 5,85 \end{bmatrix} \text{ [Ns/m]}$$

Na construção deste modelo numérico, admitiu-se que os pisos do pórtico funcionam como elementos infinitamente rígidos, mobilizando a rigidez à flexão dos pilares em correspondência com os deslocamentos horizontais associados aos diversos graus de liberdade. A matriz de massa foi definida tendo em conta os valores das massas dos pisos quantificadas anteriormente e na matriz de rigidez teve-se em conta a geometria dos pilares bem como o seu módulo de elasticidade. A matriz de amortecimento foi obtida a partir dos coeficientes de amortecimentos medidos experimentalmente, indicados na Tabelas 5.3, tendo sido definida utilizando o método da sobreposição das matrizes modais de amortecimento [31].

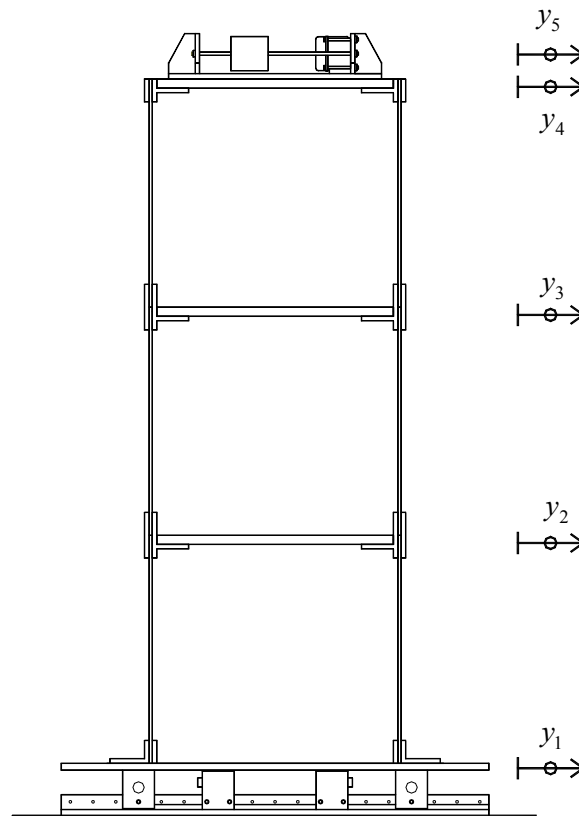


Figura 5.29 – Graus de liberdade adoptados para o desenvolvimento do modelo numérico

A função de transferência procurada, $G_{4,45}(s)$, que relaciona a saída do sistema no grau de liberdade 4 com o par de forças aplicadas nos graus de liberdade 4 e 5, pode ser obtida atendendo a que $G_{4,45}(s) = G_{44}(s) - G_{45}(s)$. Neste caso, $G_{44}(s)$ e $G_{45}(s)$ podem ser definidas utilizando os métodos expostos na secção 3.4.3, chegando-se a

$$G_{4,45}(s) = \frac{0,0649s^8 + 0,2677s^7 + 1395s^6 + 4711s^5 + 6,464E6s^4 + 1,527E7s^3 + 2,882E9s^2 + 2,995E6s + 16,42}{s^{10} + 5,06s^9 + 2,79E4s^8 + 1,21E5s^7 + 2,20E8s^6 + 7,41E8s^5 + 5,13E11s^4 + 9,41E11s^3 + 3,41E14s^2 + 6,42E6s - 110}$$

5.4.5 ESTUDO DO SISTEMA DE CONTROLO

5.4.5.1 ANÁLISE DA ESTABILIDADE

O sistema de actuação composto por um actuador de massa activa é bastante divulgado na área do controlo de vibrações em sistema mecânicos, o qual tem como principal característica o facto de tirar partido das forças de inércia que se desenvolvem entre a estrutura e a massa activa do aparelho. Um AMD permite aplicar forças de controlo em qualquer ponto de uma estrutura, dispensando ligações mecânicas ao exterior. No entanto, a sua utilização deve ser devidamente estudada, principalmente nos aspectos que podem afectar a estabilidade do sistema.

Uma das características mais importantes dos AMDs é que estes dispositivos constituem um sistema de actuação não-colocado, apesar do dispositivo estar geralmente colocado na mesma secção do sensor que serve o ciclo de realimentação. Isto porque, apesar de uma das componentes da força actuante estar em linha com o sensor, e portanto, aparentemente colocados, o facto é que existe uma outra componente da força aplicada à massa do aparelho, o que faz com que essa componente não esteja efectivamente na mesma situação que a outra.

Este aspecto é extremamente importante no que diz respeito às características de estabilidade do sistema porque, tal como referido na secção 4.5, quando o sistema é não-colocado perde-se a propriedade da alternância de pólos e zeros da função de transferência que o caracteriza. Como consequência, poderão existir pólos do sistema em malha fechada que se dirigem para o semi-plano complexo direito, produzindo instabilidade para um determinado valor do ganho.

Para melhor se compreender este problema, considere-se o diagrama do lugar das raízes indicado na Figura 5.30a, o qual representa a evolução dos pólos em malha fechada do pórtico em estudo, dotado de um AMD de baixa frequência natural comandado por um controlador derivativo. Como se pode constatar, os pólos associados aos modos de vibração do pórtico apresentam ângulos de partida para a esquerda, descrevendo percursos estáveis dentro do semi-plano complexo esquerdo, até chegarem aos respectivos zeros na situação de ganho máximo. Em contra-partida, o pólo associado à dinâmica do AMD apresenta um ângulo de partida para a direita, fazendo com que o coeficiente de amortecimento deste modo de vibração diminua progressivamente até cruzar o eixo imaginário, passando a localizar-se dentro da zona instável do plano complexo. O posicionamento dos pólos associado a esta transição de estabilidade está indicado na figura em correspondência com o ganho K_{max} , a partir do qual o sistema entra potencialmente em instabilidade por via da vibração descontrolada deste modo de vibração. Repare-se no entanto que, apesar do amortecimento deste modo ir diminuindo para valores crescentes do ganho, o amortecimento dos modos de vibração da estrutura aumenta. Desejavelmente deveria ser possível aumentar o ganho do controlador até que se atingisse os níveis de amortecimento estrutural pretendidos, mas tal desempenho acaba por ser limitado pela instabilidade do pólo associado ao AMD.

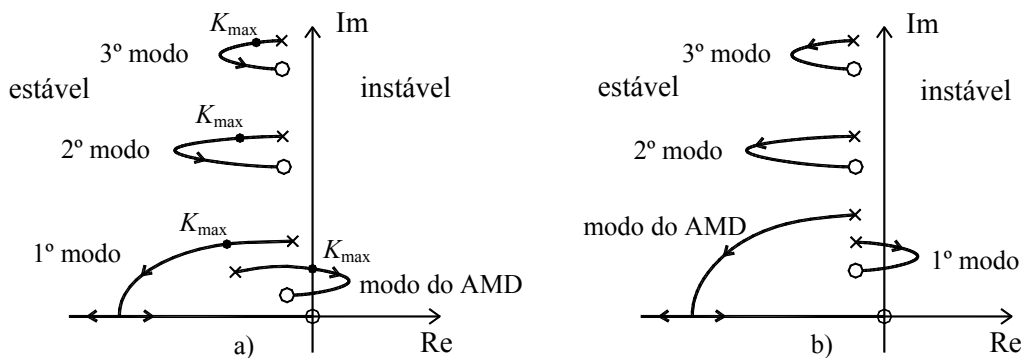


Figura 5.30 – Diagrama do lugar das raízes da estrutura com um AMD de (a) baixa e (b) elevada frequência natural

Esta análise permite concluir que um AMD deve ter um nível de amortecimento elevado porque, se tal acontecer, o pólo respectivo encontra-se inicialmente numa posição mais afastada do eixo imaginário permitindo a exploração de um maior nível de ganho do controlador, pois o pólo terá de percorrer uma maior distância até se verificar a instabilidade. Esta distância está em correspondência com aquilo que, na teoria de controlo de sistemas, se designa de margem de ganho.

Outra característica importante dos amortecedores de massa activa está relacionada com a sua frequência natural. No caso descrito anteriormente, admitiu-se que o dispositivo tinha uma baixa frequência de vibração, o que permitiu amortecer os modos de vibração da estrutura em detrimento da perda de amortecimento do AMD, mesmo sabendo que o sistema era instável para ganhos elevados. Esta situação é sem dúvida a que mais interessa na implementação de um sistema de controlo, pois faz reduzir a dinâmica da estrutura principal à custa da degradação da dinâmica do dispositivo de controlo, fazendo com que a massa activa possa experimentar grandes deslocamentos. No entanto, desde que o movimento da massa não ultrapasse as fronteiras do espaço físico que lhe está destinado e desde que esteja salvaguardada uma razoável margem de ganho de modo a haver segurança relativamente a fenómenos de instabilidade, o objectivo do controlo da estrutura é plenamente atingido.

Se, por outro lado, a frequência natural do AMD é superior à primeira frequência natural da estrutura, o diagrama do lugar das raízes passa a ter o aspecto indicado na Figura 5.30b. Neste caso, a perda de alternância de pólos e zeros dá-se numa zona intermédia do conjunto das frequências de vibração do sistema, revertendo a situação anteriormente descrita. De facto, o ramo do diagrama correspondente à dinâmica do AMD passa a ter uma trajectória estável no semi-plano complexo esquerdo, potenciando o surgimento de pólos com trajectórias instáveis associados a modos de vibração da estrutura. Naturalmente que esta situação não é desejável, sendo ainda mais crítica se a estrutura tiver modos com baixo nível de amortecimento, verificando-se instabilidade mesmo para valores reduzidos de ganho.

Em resumo, idealmente um AMD deve ter uma frequência natural inferior à frequência natural da estrutura, de modo possibilitar o amortecimento dos respectivos modos de vibração, e deve ter um elevado amortecimento, para que se consiga ter uma margem de ganho elevada até se atingir a instabilidade do sistema, permitindo explorar um maior desempenho do controlo.

No caso da experiência em análise, foi possível dotar o AMD com uma frequência natural de 5,80Hz, sendo mais baixa que a frequência fundamental do pórtico sem o dispositivo, a qual é cerca de 7,35Hz. Todavia, pelas razões já mencionadas, não foi possível aumentar o amortecimento do sistema de actuação além do amortecimento intrínseco do aparelho, situado na ordem dos 3,2%. Por esta razão, a eficácia da acção de controlo fica limitada ao valor da margem de ganho permitida com este valor do amortecimento, tendo-se, ainda assim, conseguido uma razoável prestação do sistema de controlo, conforme se descreve nas secções seguintes.

5.4.5.2 DIAGRAMA DO LUGAR DAS RAÍZES

O efeito da acção do controlador derivativo relativamente à alteração da dinâmica do modelo laboratorial pode ser estudado através da avaliação da evolução dos pólos da função de transferência em malha fechada do sistema, associada à adopção de valores de ganho sucessivamente crescentes, obtendo-se o diagrama de lugar das raízes. A função de transferência em malha fechada que traduz o funcionamento do sistema de controlo descrito anteriormente pode ser deduzida a partir do diagrama de blocos indicado na Figura 5.31. Neste caso, considerou-se $H(s)=1$, na medida em que a resposta da estrutura é dada directamente em velocidades por integração das acelerações.

Na Figura 5.32 representa-se o diagrama do lugar das raízes construído com base na função de transferência em malha fechada do sistema, o qual foi obtido com o apoio do programa Matlab. Como se pode constatar, o seu aspecto geral assemelha-se ao da Figura 5.30a, caracterizado por ter o pólo associado ao funcionamento do AMD na rota do plano complexo instável, estando os restantes a desenvolver trajectórias estáveis com ângulos de partida para a esquerda.

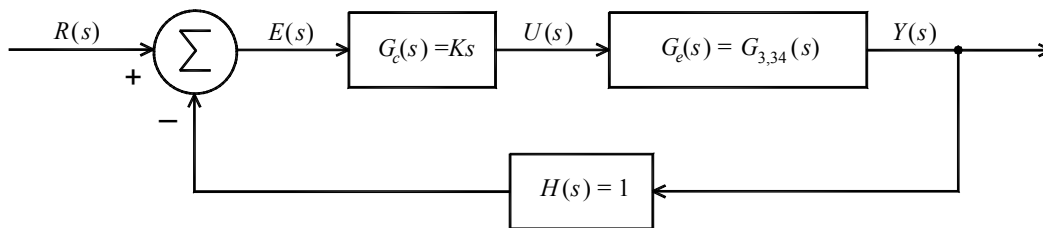


Figura 5.31 – Diagrama de blocos do sistema de controlo

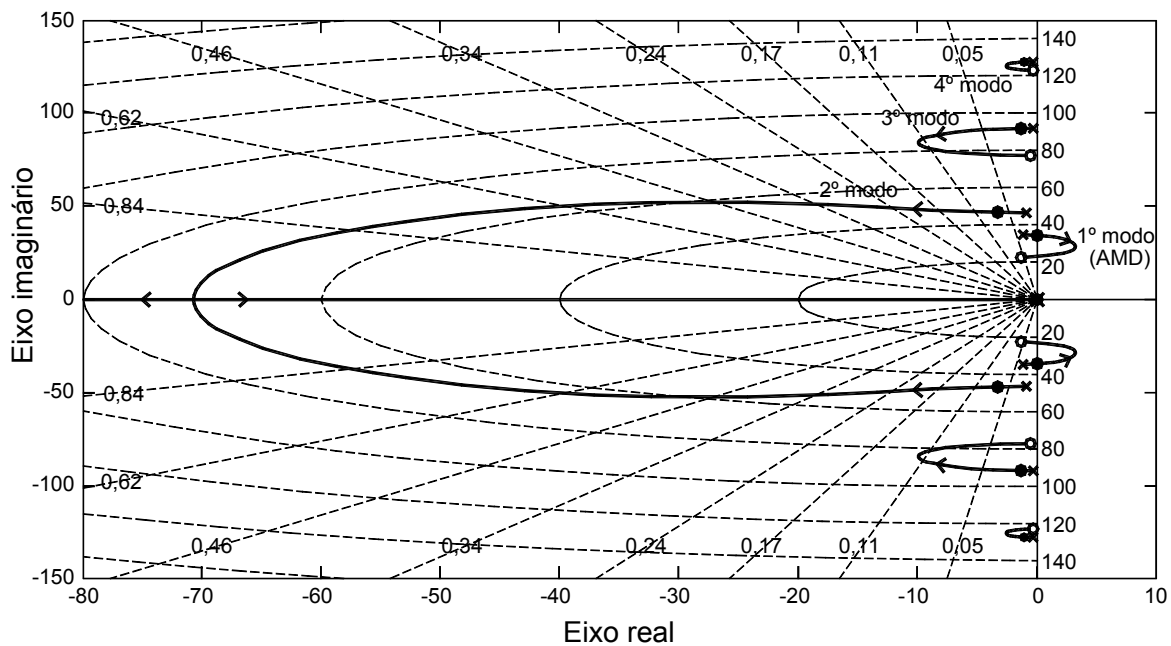


Figura 5.32 – Diagrama do lugar das raízes

Através da análise do diagrama, é possível retirar algumas conclusões relativamente à previsão do desempenho do sistema de controlo, podendo começar-se por observar que o sistema de actuação é mais eficiente no controlo do 2º modo de vibração (1º modo da estrutura) do que nos restantes. Isto porque o pólo em malha fechada respectivo desenvolve uma trajectória mais alargada, podendo atingir níveis de amortecimento francamente superiores aos dos restantes modos. De facto, mesmo que fosse possível adoptar um ganho infinito para o controlador, nunca se conseguiria aumentar o amortecimento do 3º modo além dos 12% e no 4º modo acima dos 2%, como aliás se pode deduzir pelo posicionamento dos seus pólos relativamente às semi-rectas de igual amortecimento do diagrama. Este desempenho do sistema de controlo está directamente relacionado com a controlabilidade da estrutura, pois, observando as configurações dos modos de vibração indicadas na Figura 5.27, constata-se que o 2º modo apresenta uma maior componente modal no piso de fixação do AMD do que os restantes modos da estrutura.

No entanto, o valor máximo do ganho possível de adoptar sem que ocorra instabilidade está limitado pela margem permitida pelo pólo do AMD, podendo verificar-se que, de acordo com o indicado pela “toolbox” de controlo do software mencionado, o seu valor não poderá ser superior a $K_{\max}=82$. O posicionamento dos pólos do sistema para este valor limite está devidamente assinalado com um ponto no diagrama do lugar das raízes da Figura 5.32, podendo observar-se que, nestas circunstâncias, o pólo associado ao AMD está posicionado sobre o eixo imaginário o qual, como se sabe, está em correspondência com amortecimento nulo. No caso de se adoptar um ganho superior a K_{\max} , o sistema entra em instabilidade pela vibração sucessivamente amplificada da massa do AMD. É também claro, pela observação do diagrama, que, neste caso, existe um ganho próximo do infinito para o qual todos os pólos do sistema voltam a ser estáveis, mas cuja implementação prática é irrealista e sem interesse.

Na Tabela 5.4 estão indicados os coeficientes de amortecimento associados aos vários modos de vibração do sistema no caso em que $K=0$, ou seja, quando não há controlo, bem como a sua evolução na situação de se estar a explorar ao máximo o desempenho do sistema de controlo, isto é, quando $K=K_{\max}=82$. Apesar da reduzida margem de ganho proporcionada pelas características do AMD utilizado, o sistema de controlo consegue, ainda assim, aumentar significativamente o amortecimento dos modos de vibração da estrutura, nomeadamente, quadruplica o amortecimento do 2º e 3º modos de vibração e duplica o amortecimento do 4º modo. Naturalmente que, apesar destes valores corresponderem a previsões numéricas da alteração da dinâmica do sistema, podem conduzir a uma boa estimativa do desempenho do sistema quer em termos qualitativos quer quantitativos.

Modo de vibração	ξ_i (%) para $K=0$ (sem controlo)	ξ_i (%) para $K=82$ (controlo com K_{\max})
1	3,20	-
2	1,80	7,09
3	0,35	1,44
4	0,22	0,44

Tabela 5.4 – Coeficientes de amortecimentos associados aos ganhos $K=0$ e $K=K_{\max}=82$

5.4.6 ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

De forma a verificar experimentalmente a eficácia do sistema de controlo descrito anteriormente, o modelo laboratorial foi ensaiado com o objectivo de se avaliarem as características de amortecimento da estrutura com o sistema de controlo ligado. Para o efeito, excitou-se o modelo em ressonância em correspondência com cada frequência natural e, após a súbita paragem da acção harmónica basal, analisou-se a envolvente da resposta em vibração livre ao nível do 3º piso, tendo-se extraído as estimativas dos coeficientes de amortecimento dos respectivos modos de vibração. Tendo em conta o estudo numérico descrito na secção anterior, nestes ensaios decidiu-se fixar o ganho do controlador derivativo em $K=60$, um pouco inferior ao valor $K_{\max}=82$ determinado anteriormente, como forma de garantir a robustez da estabilidade do sistema em face da inevitável existência de não-linearidades e imprecisões do modelo numérico.

Os resultados obtidos estão indicados na Figura 5.33 e sumariados na Tabela 5.5, na qual estão também indicados os valores teóricos referentes ao valor do ganho adoptado $K=60$. A boa aproximação entre os valores identificados experimentalmente e os calculados numericamente confirmam a validade do estudo analítico anteriormente desenvolvido. Em face destes resultados também se pode concluir que, apesar do ganho adoptado não ser muito elevado, devido ao baixo amortecimento associado ao funcionamento do AMD, foi todavia possível observar um aumento significativo do amortecimento estrutural conducente a uma redução significativa da resposta dinâmica do sistema. Em particular, conseguiu-se reduzir a resposta dos dois primeiros modos da estrutura em cerca 70% e, no caso do modo de frequência mais elevada, em cerca de 50%.

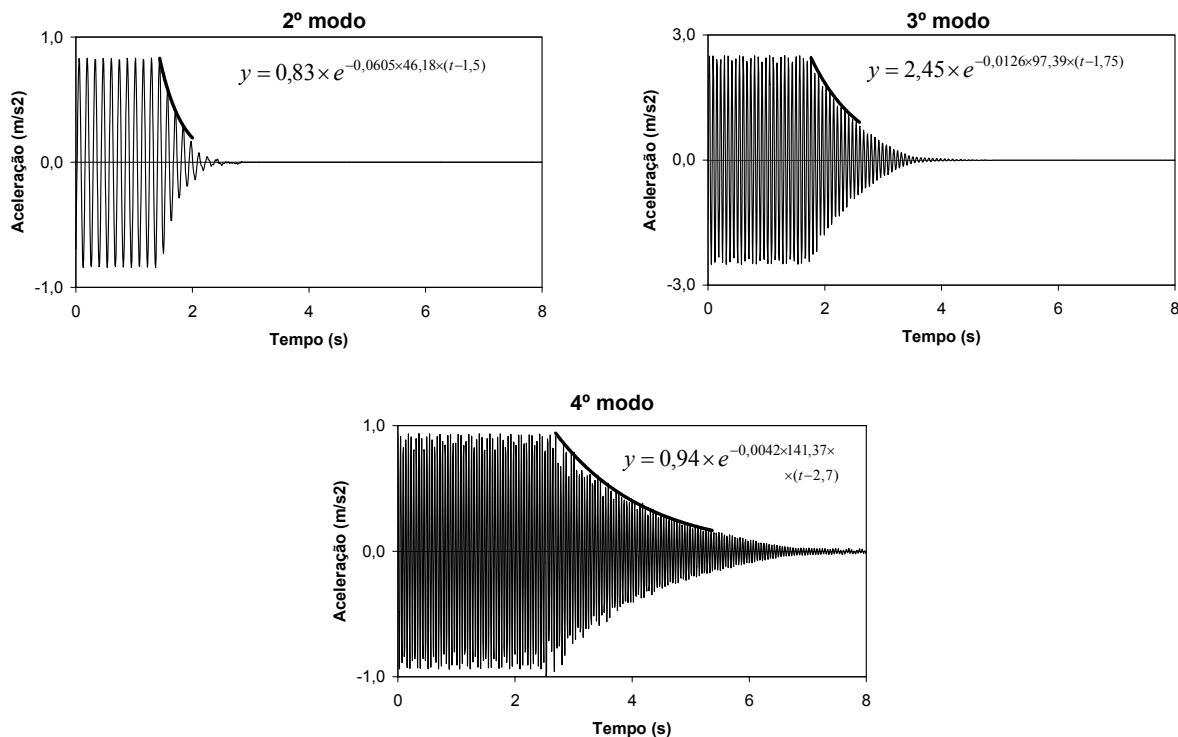


Figura 5.33 – Resposta livre do sistema e respectivas estimativas das curvas envolventes utilizando $K=60$

Modo de vibração	Coef. amort. Identificado (%)	Coef. amort. calculado (%)
1	-	0,83
2	6,05	5,72
3	1,26	1,15
4	0,42	0,38

Tabela 5.5 – Coeficientes de amortecimento modais alcançados com um ganho $K=60$

5.5 IMPLEMENTAÇÃO DE UMA DIAGONAL ACTIVA NUM PÓRTICO DE 3 PISOS

5.5.1 MOTIVAÇÃO E OBJECTIVOS DA EXPERIÊNCIA

Na experiência laboratorial anterior, utilizou-se uma abordagem ao problema do controlo baseada na modelação do comportamento dinâmico do sistema através de uma função de transferência que relaciona o par de variáveis entrada-saída de interesse. Este processo é, em grande parte dos casos, suficiente para resolver eficazmente o problema de vibrações excessivas em estruturas, tendo como vantagens a simplicidade da sua implementação e, nos casos em que o actuador e o sensor estão colocados, a garantia da estabilidade incondicional do sistema de controlo. Todavia, sendo o ganho a única variável ajustável no controlador, não é possível, com esta abordagem, ter uma acção independente sobre o posicionamento de cada pólo em malha fechada do sistema. Isto significa que, nos casos em que haja interesse estabelecer uma dinâmica específica para cada modo de vibração, será necessário recorrer a uma outra abordagem do problema do controlo, baseada no recurso a modelos formulados em espaço de estado.

Neste contexto, a experiência que seguidamente se descreve, teve como objectivo a implementação de uma estratégia de controlo baseada na alocação de pólos, tendo em vista a alteração da dinâmica de um pórtico de 3 pisos, atribuindo-lhe características previamente definidas em termos de frequências naturais e coeficientes de amortecimento. Além disso, com esta experiência pretendeu-se também implementar um sistema de actuação baseado na adaptação de uma diagonal activa à estrutura, possibilitando a aplicação de um par de forças iguais e opostas em dois dos seus nós.

5.5.2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA DE ACTUAÇÃO E INSTRUMENTAÇÃO UTILIZADA

O modelo físico ensaiado nesta implementação laboratorial é o mesmo que já foi utilizado anteriormente, sendo constituído por um pórtico de 3 pisos apoiado numa mesa vibratória, cujas características principais estão descritas na secção 5.4.2 (ver Figura 5.34). No entanto, foram efectuadas algumas alterações significativas relativamente à experiência anterior, particularmente no que diz respeito ao funcionamento da mesa vibratória, do sistema de actuação e também da instrumentação utilizada. No

caso da mesa vibratória, foram adaptadas 4 molas auxiliares, que fixam a plataforma à base, com o objectivo de limitar o campo de deslocamentos no sistema. Isto porque, como referido mais adiante, a utilização de sensores sem contacto exige o estabelecimento de um afastamento mínimo e máximo aos alvos de modo a poderem funcionar dentro da sua gama linear. Como consequência da adaptação destas molas adicionais, cujo aspecto pode ser visualizado na Figura 5.35, o modelo deixa de ter um modo de translação de corpo rígido, passando a estrutura a ter quatro frequências naturais de interesse associadas a quatro graus de liberdade. As molas foram adaptadas junto aos rolamentos da mesa através de rótulas universais de forma a minimizar o atrito, mobilizando, no seu conjunto, uma rigidez total de 80kN/m.

A diagonal activa adaptada ao pórtico é constituída por uma barra em alumínio de secção circular, à qual foi adaptado um motor eléctrico conhecido como “Voice Coil Motor” ou simplesmente VCM, bastante utilizado no fabrico de colunas de som por ter um funcionamento axial de elevada linearidade (ver Figura 5.36). Este motor, de 50W de potência, permite aplicar forças à estrutura até 45N e tem um curso de 15mm, tendo sido alimentado pelo amplificador de corrente já utilizado pelo AMD. A adaptação da diagonal à estrutura fez-se através de ligações rotuladas para permitir o livre funcionamento da diagonal em face dos deslocamentos relativos dos pisos. No Anexo V encontram-se os desenhos elaborados para a execução da diagonal activa, bem como de todos os acessórios necessários para a realização desta experiência.

No sentido de medir experimentalmente a força de controlo aplicada à estrutura, foi instalada uma célula de carga da Brüel & Kjør alinhada com o eixo da diagonal. Também nesta experiência se utilizou um sensor para medir a corrente eléctrica injectada no motor eléctrico, como meio de monitorização adicional da força de controlo, na medida em que a força gerada pelo VCM é proporcional à corrente de alimentação. O sensor utilizado para o efeito é conhecido como LEM (ver Figura 5.37), o qual permite medir a corrente sem contacto com o circuito eléctrico, ao contrário do que sucede com o multímetro. Um dado curioso neste sensor, cujo princípio de funcionamento se baseia no efeito “Hall” de um campo magnético, é que se pode regular a sua sensibilidade fazendo com que um dos condutores do circuito dê mais voltas ao sensor, aumentando-se a tensão eléctrica de leitura de acordo com o número de enrolamentos efectuados.

Como se sabe, a definição da acção de controlo através da estratégia da alocação de pólos exige o conhecimento do vector de estado associado aos diversos graus de liberdade do modelo. Nesta experiência, houve a possibilidade de medir directamente os deslocamentos em todos os pisos através de sensores capacitivos SG20 da RDP, os quais permitem a medição do deslocamento de alvos em movimento relativamente ao referencial em que estão fixados (ver Figura 5.38). No entanto, estes sensores requerem que o alvo esteja distanciado entre 1 e 21mm de modo a produzirem leituras na sua banda linear, razão pela qual se adaptaram as molas na mesa vibratória. Com o conhecimento dos deslocamentos, foi possível obter as velocidades ao nível dos pisos através da derivação numérica do sinal



Figura 5.34 – Modelo físico apoiado na mesa vibratória

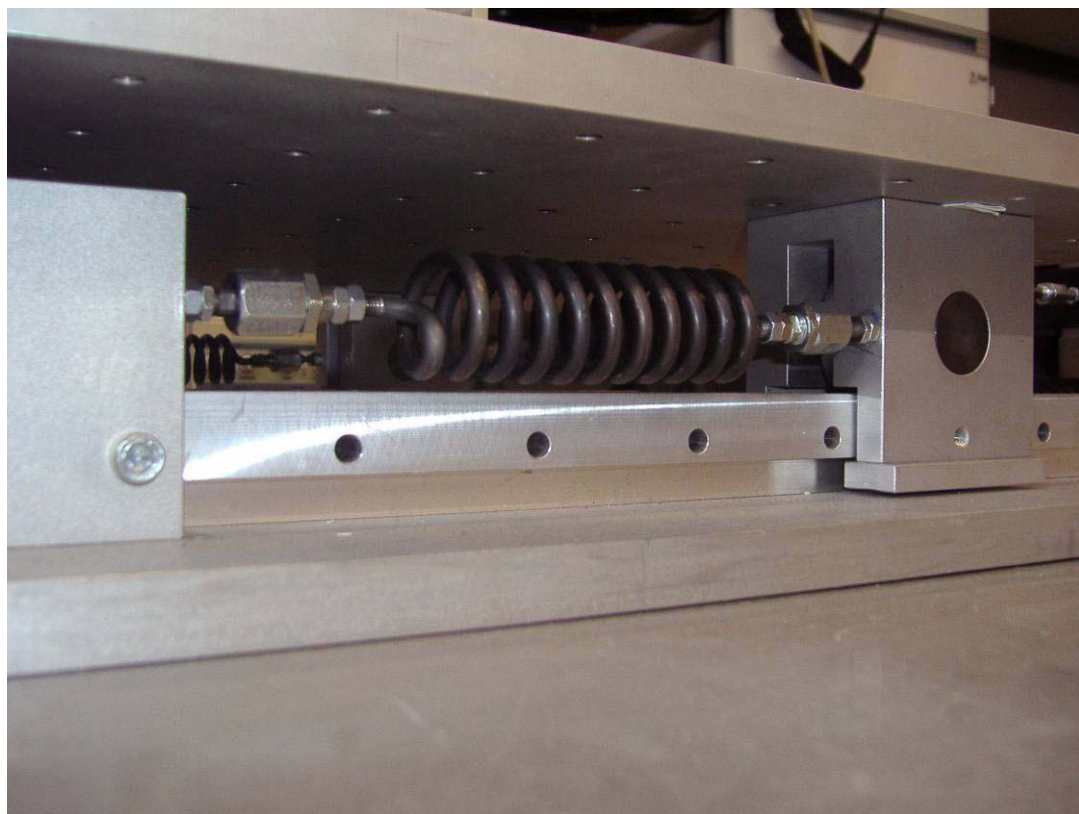


Figura 5.35 – Detalhe da mesa vibratória

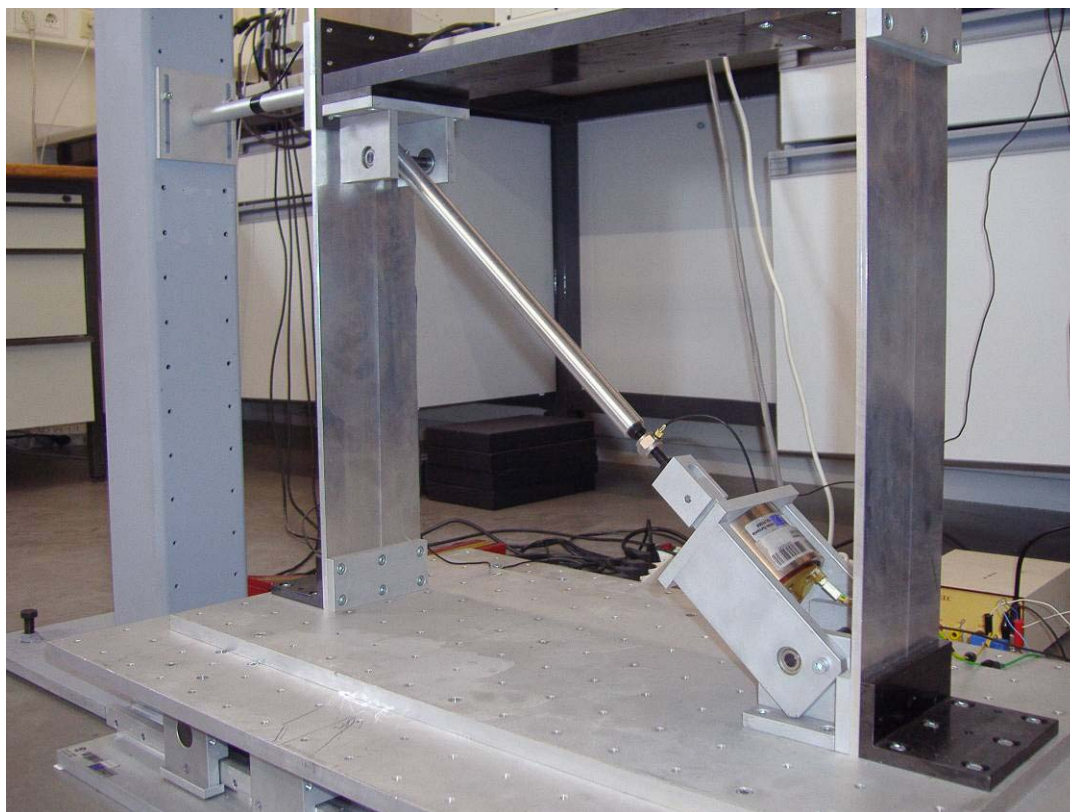


Figura 5.36 – Sistema de diagonal activa

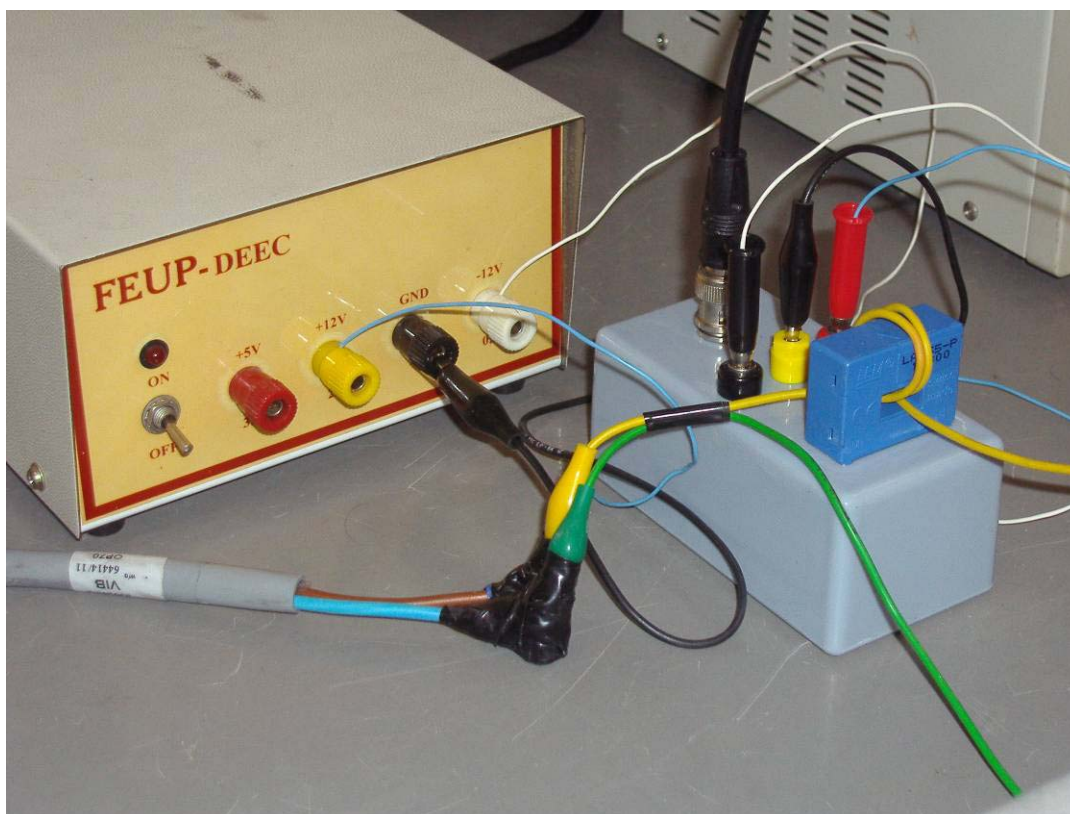


Figura 5.37 – Detalhe do transdutor de corrente

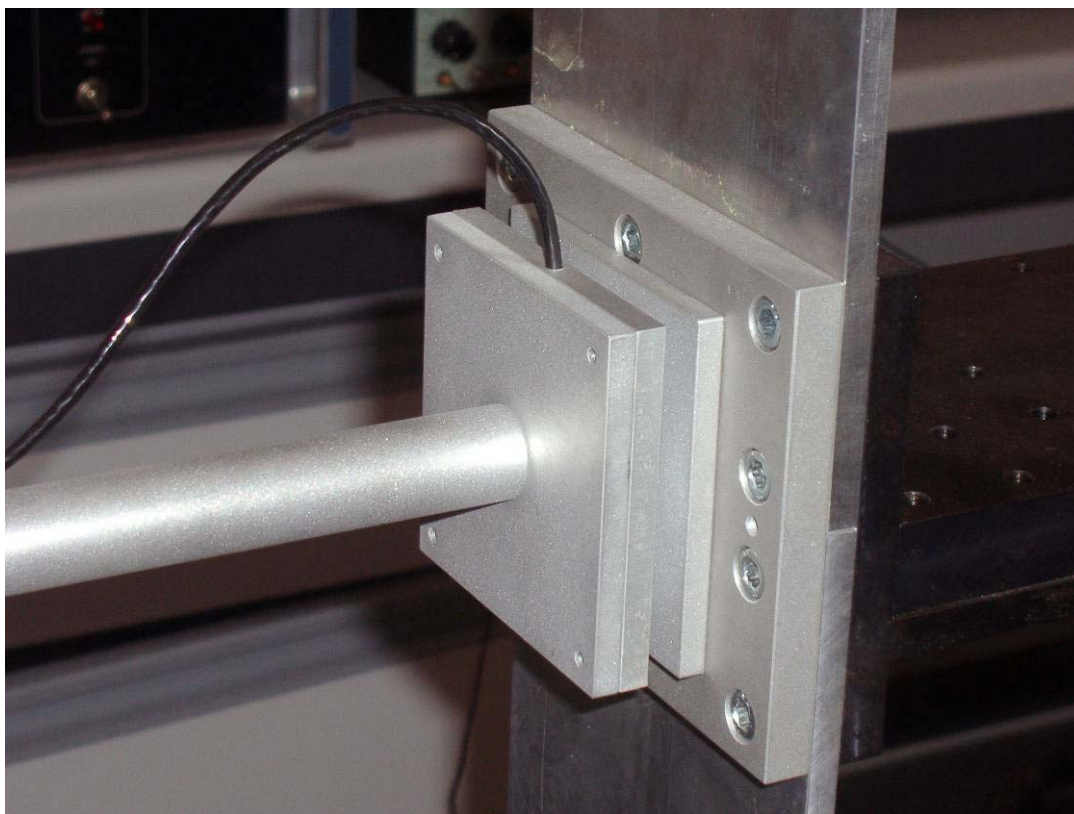


Figura 5.38 – Sensores de deslocamento sem contacto

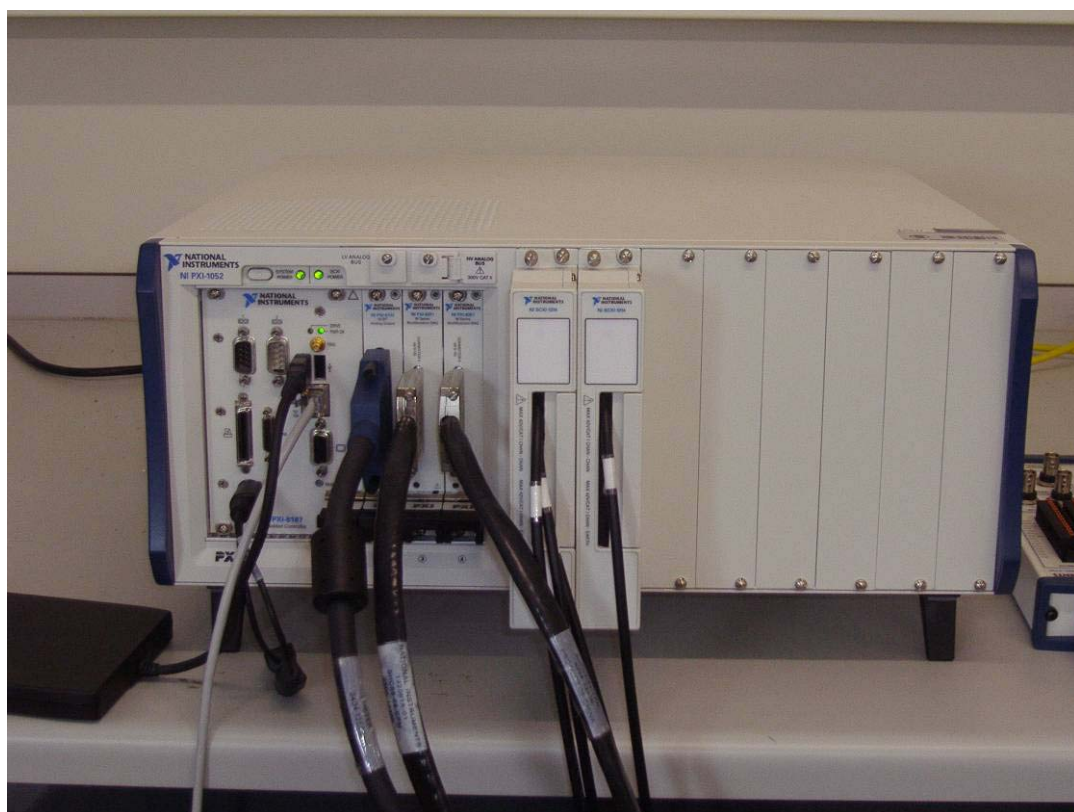


Figura 5.39 – Controlador NI PXI

dos sensores. Nesta operação, tentou-se minimizar o problema do ruído referido na secção 4.6.6.1, através da conjugação dos filtros analógicos instalados nos condicionadores de sinal com filtros digitais programados nos algoritmos de aquisição de dados. Deste processo, resultou um tempo de atraso no sinal avaliado como sendo claramente inferior a 1ms, tendo-se desprezado o seu efeito no ciclo de controlo.

Finalmente, refere-se que o algoritmo que define a acção de controlo foi implementado num controlador do tipo PXI da National Instruments especialmente desenvolvido para operar em ambiente de tempo real (ver Figura 5.39). Refere-se ainda que todo o software desenvolvido, incluindo os controladores dos equipamentos e sensores, foi produzido em ambiente LabVIEW.

5.5.3 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DINÂMICOS DO SISTEMA

O modelo laboratorial dotado da diagonal activa foi sujeito a ensaios de identificação dos seus parâmetros dinâmicos, tendo-se para o efeito utilizado o mesmo procedimento que nos ensaios de identificação anteriores. Os resultados destes ensaios permitiram calibrar o modelo numérico desenvolvido posteriormente, o qual está detalhado na próxima secção.

Na Figura 5.40 apresenta-se a comparação entre a FRF experimental e analítica obtida relacionando a excitação basal com a resposta de um acelerómetro posicionado no último piso. Tal como se pode observar, existe uma excelente correlação nas duas primeiras frequências naturais e uma menos boa aproximação nas frequências mais elevadas. Porém, esta diferença não é muito relevante pois, além de se tratarem de frequências de ordem elevada, a acção de controlo é baseada na resposta efectiva do sistema, o que na prática acaba por atenuar essa discrepância. Além disso, neste caso optou-se por manter a clareza do modelo numérico relativamente ao processo seguido para a sua obtenção, em vez de se tentar ajustar intuitivamente alguns dos seus parâmetros.

Na Tabela 5.6 resumem-se os resultados obtidos em termos da caracterização das frequências naturais do sistema, bem como os coeficientes de amortecimento modais avaliados pelo processo já referido. Na Figura 5.41 representa-se a comparação entre os modos de vibração obtidos experimentalmente, como descrito na secção 5.4.3, e os modos analíticos, podendo registar-se uma excelente aproximação entre ambos, o que de certa forma também contribuiu para justificar a adopção do modelo numérico desenvolvido.

Modo de vibração	Freq. natural calculada (Hz)	Freq. natural medida (Hz)	Coefficiente de amortecimento (%)
1	3,86	3,80	1,78
2	8,67	8,65	2,21
3	14,96	15,75	2,31
4	20,40	22,25	0,85

Tabela 5.6 – Frequências naturais e coeficientes de amortecimento do sistema

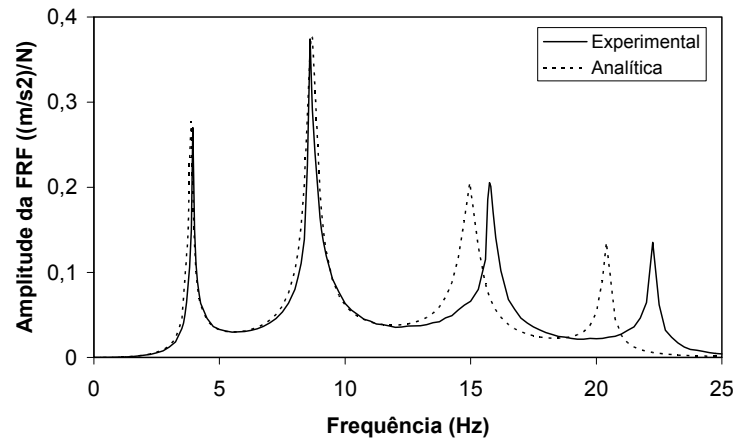


Figura 5.40 – Comparação entre a FRF experimental e analítica

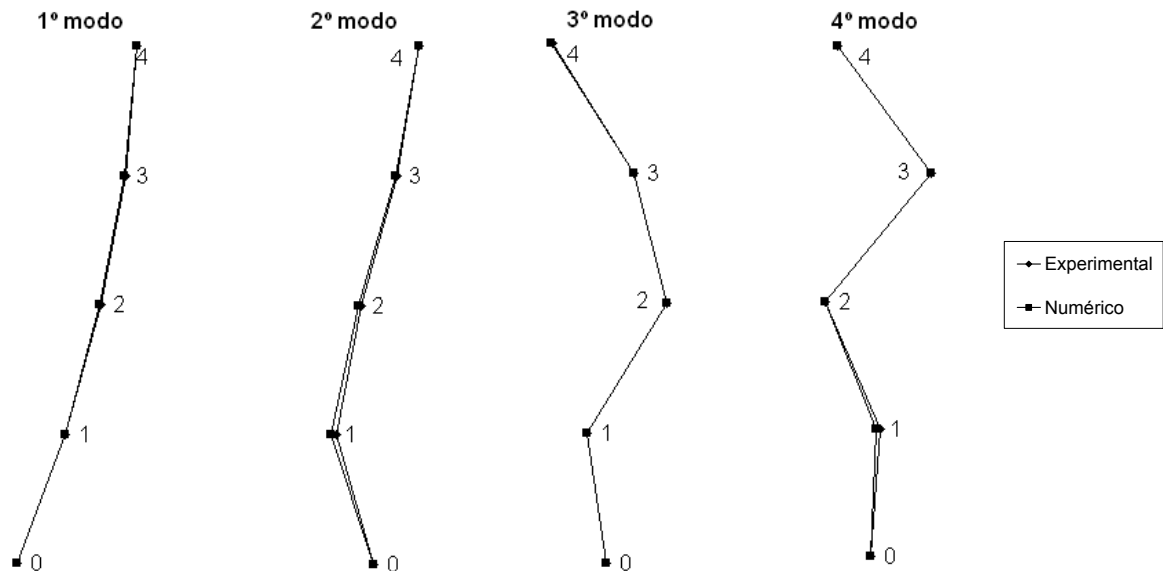


Figura 5.41 – Comparação entre configurações modais obtidas numericamente e experimentalmente

5.5.4 CARACTERIZAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

A construção do modelo numérico da estrutura baseou-se nos mesmos pressupostos já considerados na experiência anterior, ou seja, que os pisos podem ser considerados infinitamente rígidos e que mobilizam a rigidez dos pilares em correspondência com os deslocamentos relativos horizontais associados aos diferentes graus de liberdade. A matriz de massa foi obtida quantificando as contribuições das massas rígidas, das ligações e instrumentação existente ao nível de cada piso, na composição da matriz de rigidez foram consideradas as características geométricas e mecânicas dos pilares e a matriz de amortecimento foi construída com base nos valores dos coeficientes de amortecimentos medidos

experimentalmente. Tendo em conta os graus de liberdade representados na Figura 5.42, a composição destas matrizes é a seguinte

$$M_e = \begin{bmatrix} 43,55 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14,99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,76 \end{bmatrix} \text{ [kg]} \quad K_e = \begin{bmatrix} 154,5 & -74,5 & 0 & 0 \\ -74,5 & 149,0 & -74,5 & 0 \\ 0 & -74,5 & 149,0 & -74,5 \\ 0 & 0 & -74,5 & 74,5 \end{bmatrix} \text{ [kN/m]}$$

$$C_e = \begin{bmatrix} 104,2 & -19,7 & -15,4 & 0,8 \\ -19,7 & 46,1 & 1,9 & -16,4 \\ -15,4 & 1,9 & 29,9 & -10,46 \\ 0,8 & -16,4 & -10,46 & 31,5 \end{bmatrix} \text{ [Ns/m]}$$

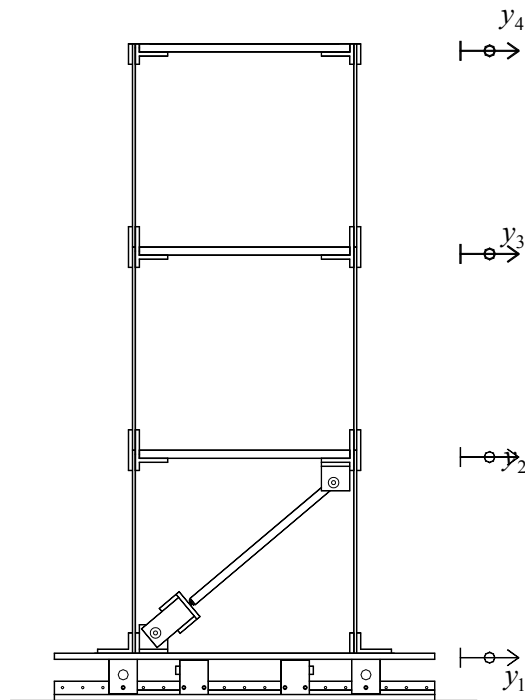


Figura 5.42 – Graus de liberdade adoptados para o desenvolvimento do modelo numérico

5.5.5 ESTUDO DO SISTEMA DE CONTROLO

5.5.5.1 CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

A primeira questão que deve ser ponderada no estudo de um sistema de controlo tem a ver com a sua controlabilidade e observabilidade. O problema da observabilidade não se coloca neste caso porque o vector de estado do sistema pode ser medido directamente sem necessidade da construção de um

observador. Já o problema da controlabilidade tem ser devidamente ponderado de acordo com os objectivos estabelecidos para esta experiência. Neste caso, pretendo-se posicionar o sistema de actuação de forma a poder actuar, se necessário, sobre todos os modos de vibração da estrutura, é importante que a força de controlo esteja em correspondência com componentes modais tão elevadas quanto possível associadas a esses modos. Em rigor, o que interessa até analisar nesta situação são as componentes modais relativas dos pisos, na medida em que o sistema de actuação aplica um par de forças relativas nos nós do pórtico.

Na Figura 5.43 estão representados isoladamente os quatro modos de vibração do sistema em termos de amplitudes modais relativas dos pisos, tendo sido obtidos a partir das componentes modais absolutas indicadas na Figura 5.41. O nível 1 corresponde à zona entre o pavimento e o nível da mesa vibratória e o nível 4 entre o 2º e o 3º piso. Naturalmente que no nível 1 não é possível adaptar a diagonal apesar de, em teoria, ser a zona mais adequada para controlar os dois primeiros modos de vibração. Então, analisando o que se passa entre o nível 2 e 4, e na impossibilidade de colocar o sistema de actuação simultaneamente nas secções de componentes máximas de todos os modos, parece aceitável que se adopte o nível 2 para fixação do dispositivo. Efectivamente, além desta posição corresponder à adaptação da diagonal entre a base do pórtico e o primeiro piso, nesta zona todos os modos de vibração têm uma contribuição modal significativa.

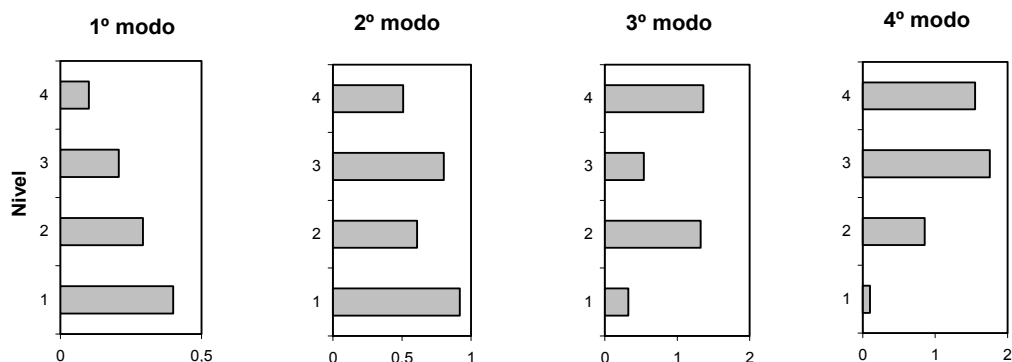


Figura 5.43 – Configuração dos modos de vibração em termos de amplitude de componentes modais relativas

5.5.5.2 DEFINIÇÃO DOS OBJECTIVOS DO CONTROLO

Numa situação real de dimensionamento de um sistema de controlo seria necessário definir quais os objectivos a atingir em termos da dinâmica ideal a impor ao sistema. Por exemplo, se o sistema estivesse a ser solicitado por cargas harmónicas causadoras de ressonância no pórtico, seria necessário estipular quais os coeficientes de amortecimento que a estrutura deveria ter, de forma a manter os níveis de vibração abaixo de um determinado valor limite. Para o efeito, poder-se-ia utilizar o coeficiente de amplificação $1/2\xi$, que estabelece que a resposta do sistema nestas circunstâncias é inversamente proporcional ao coeficiente de amortecimento do modo e vibração em causa.

Nesta experiência, porém, não se considerou nenhuma acção dinâmica em particular, pois, o objectivo do trabalho é tentar impor uma determinada dinâmica ao sistema, sem contudo dirigir o estudo para um caso de dimensionamento em concreto. Nesse sentido, idealizou-se um cenário de acordo com o qual a estrutura teria de melhorar desempenho em face de uma determinada acção exterior. Esse cenário idealizado consiste em assumir que, de acordo com o modelo numérico desenvolvido, seria desejável diminuir a 2ª frequência natural 8,67Hz para 8,0Hz e aumentar a terceira frequência de 14,96Hz para 15,5Hz, e, simultaneamente, aumentar o coeficiente de amortecimento do 1º modo de 1,78% para 2,5% e do segundo modo de 2,21% para 3,0%. Todos os outros valores de frequências e coeficientes de amortecimento devem permanecer inalterados.

Na escolha destas características dinâmicas teve-se em conta as limitações impostas pela potência do actuador e a constatação de que as forças de rigidez são de maior amplitude do que as forças de amortecimento, facto que conduziu a uma menor exigência na alteração de frequências do sistema e a uma maior eficácia ao nível do aumento do seu amortecimento. Na Tabela 5.7 resumem-se as características dinâmicas desejadas para a estrutura segundo a descrição feita, enquanto que na Figura 5.44 se representa a FRF, tal como definida anteriormente, correspondente à dinâmica actual bem como a FRF relativa à dinâmica pretendida.

Modo de Vibração	Frequência natural (Hz)	Coefficiente de amortecimento (%)
1	3,86	2,50
2	8,00	3,00
3	15,50	2,31
4	20,40	0,85

Tabela 5.7 – Características dinâmicas pretendidas para a estrutura

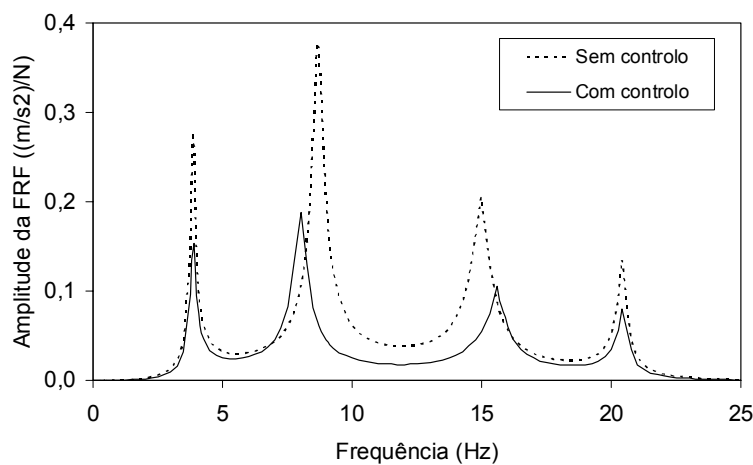


Figura 5.44 – FRF obtida analiticamente correspondente ao sistema sem e com controlo

5.5.5.3 DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE GANHO

Tendo em conta a dinâmica que se quer impor à estrutura, caracterizada pelas frequências naturais e coeficientes de amortecimento desejados, e logo, pelos correspondentes valores próprios a atribuir à matriz de estado, é possível determinar a matriz de ganho do controlador recorrendo a qualquer um dos métodos expostos na secção 4.6.5.

Os valores próprios que estão em correspondência com as características dinâmicas indicadas na Tabela 5.7, de acordo com a eq.(4.27) valem

$$\hat{\lambda}_{1,2} = 0,6063 \pm j24,2455$$

$$\hat{\lambda}_{3,4} = 1,5080 \pm j50,2429$$

$$\hat{\lambda}_{5,6} = 2,2497 \pm j97,3634$$

$$\hat{\lambda}_{7,8} = 1,0895 \pm j128,1723$$

sendo a equação característica desejada dada por

$$(s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2)(s - \hat{\lambda}_3)(s - \hat{\lambda}_4)(s - \hat{\lambda}_5)(s - \hat{\lambda}_6)(s - \hat{\lambda}_7)(s - \hat{\lambda}_8) = 0$$

$$s^8 - 10,907s^7 - 29070s^6 - 229875s^5 + 2,386E8s^4 - 1,089E9s^3 + 5,249E11s^2 - 8,944E11s + 2,316E14 = 0$$

Neste caso, a matriz de mapeamento das variáveis de entrada tem de ter em conta a inclinação de 40° da diagonal activa, ou seja

$$J = \begin{bmatrix} -\cos 40^\circ \\ \cos 40^\circ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

levando a deduzir a seguinte matriz de entrada

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_e^{-1}J \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,0176 \ 0,0489 \ 0 \ 0]^T$$

Ora, sendo a matriz de estado dada pela eq.(3.53) e a matriz de controlo dada eq.(3.57), aplicação da fórmula de Ackermann permite concluir que a matriz de ganho procurada vale

$$K = [32282 \ 18607 \ -5820 \ -21158 \ 496 \ -245 \ -169 \ -197]$$

5.5.6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O sistema de controlo descrito foi implementado no modelo do pórtico plano utilizando os equipamentos e instrumentação descritos anteriormente. O algoritmo que calcula a acção de controlo a introduzir pela diagonal activa, definida pela multiplicação do vector de estado medido em cada instante pela matriz de ganho deduzida na secção precedente, foi implementado no controlador PXI tendo-se fixado uma frequência de amostragem de 200Hz.

A eficiência do sistema em impor a dinâmica pretendida à estrutura foi comprovada através da análise de FRFs obtidas experimentalmente, calculadas relacionando a excitação aleatória aplicada na base do pórtico com a resposta no piso superior. Na Figura 5.45 comparam-se as funções obtidas nos casos em que o sistema de controlo estava ligado e desligado, podendo observar-se uma grande similaridade com as funções analíticas respectivas indicadas na Figura 5.44. Além disso, pode também constatar-se que os parâmetros dinâmicos pretendidos para o sistema foram efectivamente implementados através do sistema de controlo, gerando-se artificialmente uma nova dinâmica estrutural. De facto, a segunda frequência natural decresceu de 8,65Hz para 8,00Hz e a terceira frequência aumentou de 15,75Hz para 16,12Hz, o que significa que as frequências variaram sensivelmente nas mesmas proporções previstas no estudo analítico. De forma análoga, o coeficiente de amortecimento do 1º modo de vibração aumentou para 2,83% e o do 2º modo subiu para 2,92%. Estes resultados estão resumidos na Tabela 5.8.

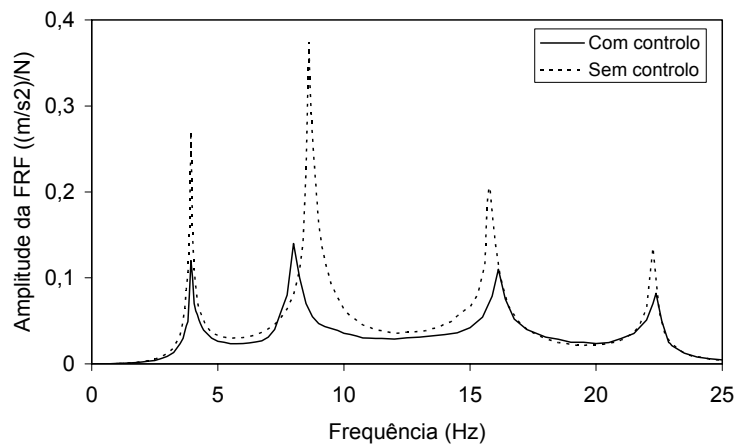


Figura 5.45 – FRF obtida experimentalmente correspondente ao sistema sem e com controlo

Modo de vibração	Frequência natural (Hz)	Coefficiente de amortecimento (%)
1	3,90	2,83
2	8,00	2,92
3	16,12	2,10
4	22,35	1,05

Tabela 5.8 - Características dinâmicas do sistema com controlo avaliadas experimentalmente

A eficácia do sistema de controlo foi igualmente verificada para excitações de carácter harmónico. A título de exemplo, na Figura 5.46 mostra-se a resposta do sistema quando foi excitado com uma acção sinusoidal de 8,65Hz, em condições de ressonância com o segundo modo de vibração. Inicialmente, o sistema de controlo estava desligado mas, após alguns segundos, o sistema foi ligado e a máxima resposta estrutural decresceu significativamente para cerca de 15% do seu valor inicial. Este resultado está em concordância com a redução prevista através da análise das FRFs da Figura 5.45, onde se pode observar um decréscimo da mesma ordem de grandeza quando comparado o valor das FRFs obtidas com e sem controlo para esta frequência de excitação.

Na Figura 5.47 mostra-se a evolução temporal da acção de controlo respectiva, podendo observar-se que inicialmente, quando o controlo estava desligado, existe um valor residual da força aplicada, que não é nada mais do que a interacção passiva da estrutura com o sistema de actuação, medida pela célula de carga. Nesse período está também representada a acção de controlo calculada pelo controlador mas que, nessa fase, ainda não está activada. Quando o sistema é ligado, a força de controlo é transferida para o modelo estrutural, podendo então registar-se uma excelente aproximação da acção calculada e a medida experimentalmente, o que prova a elevada linearidade conseguida nesta experiência.

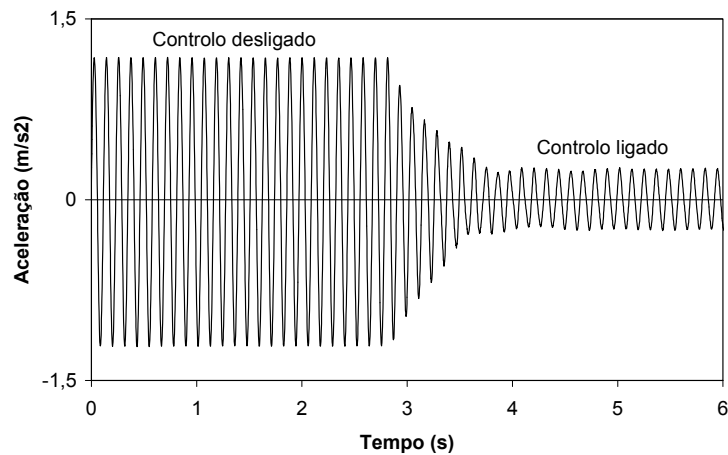


Figura 5.46 – Resposta do sistema a uma acção sinusoidal de 8,65Hz

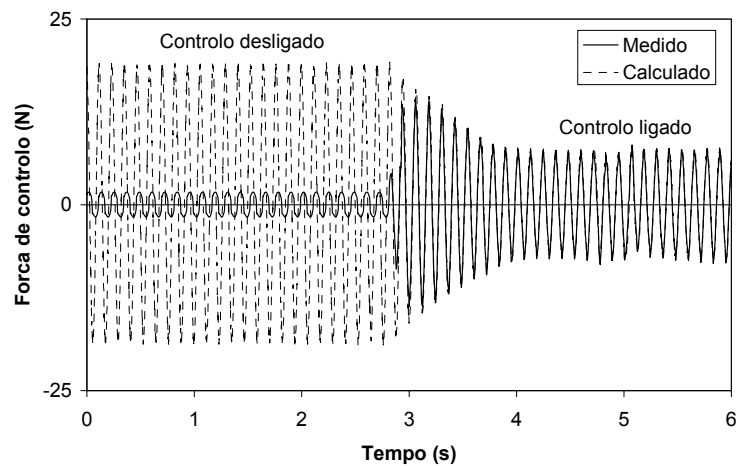


Figura 5.47 – Força de controlo calculada e medida experimentalmente

5.5.7 COMENTÁRIOS FINAIS

A utilização da estratégia baseada na alocação directa de pólos permite alterar de uma forma independente cada frequência natural e coeficiente de amortecimento do sistema, bastando para isso que o sistema tenha um comportamento linear, que seja completamente controlável e observável, e que tenha um sistema de actuação compatível com a amplitude e frequência das forças de controlo. No entanto, obriga ao desenvolvimento de um modelo numérico do sistema e à construção de um observador de estado no caso de não se dispor da medição directa de todas as variáveis de estado. Além disso, é sensível à ocorrência de fenómenos de instabilidade por spillover.

Neste sentido, a opção por um controlador deste género tem de ser devidamente ponderada pois, apesar de constituir uma solução de controlo mais poderosa, é mais complexa e tem custos mais elevados que a solução utilizada na experiência precedente. Por conseguinte, na implementação de um sistema de controlo deve primeiro ponderar-se a opção por um esquema mais simples baseado na utilização de sensores e actuadores colocados e, se tal solução não for suficientemente eficaz para atingir os objectivos pretendidos, avançar para um sistema baseado na realimentação do vector de estado.

5.6 IMPLEMENTAÇÃO DE UM PÊNDULO INVERTIDO

5.6.1 MOTIVAÇÃO DA EXPERIÊNCIA

O último trabalho laboratorial descrito neste capítulo diz respeito ao controlo de um pêndulo invertido. Apesar deste sistema ser muito diferente de uma estrutura de Engenharia Civil, trata-se de uma experiência com alguma espectacularidade cuja implementação exige conhecimentos sólidos na vertente teórica e experimental do controlo de sistemas. Efectivamente, um pêndulo invertido é um sistema potencialmente instável que pode ser convertido num sistema estável através da implementação de um sistema de controlo eficiente que modifique artificialmente a sua dinâmica inicial para uma nova dinâmica própria de um sistema estabilizado. Além disso, trata-se um problema não-linear, o que obriga à linearização das equações do movimento caso se pretenda utilizar as ferramentas de controlo de sistemas lineares, em particular, a alocação directa de pólos.

Neste contexto, a realização desta experiência contribuiu para o enriquecimento deste trabalho, pois, apesar de ser um problema que é tratado em diversos livros da especialidade [29,100], a sua concretização prática reveste-se de alguma dificuldade. Nas próximas secções faz-se uma descrição detalhada dos passos que foram seguidos para a implementação do sistema de controlo no pêndulo, começando-se por deduzir o modelo numérico do seu comportamento dinâmico e posteriormente as condições laboratoriais de realização desta experiência.

5.6.2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

As equações do movimento de um pêndulo invertido podem ser deduzidas a partir da constatação de que se trata de um sistema de dois graus de liberdade associados à posição x da base de apoio e da rotação angular θ do eixo da barra conforme indicado na Figura 5.48a. Sabendo que a massa da base de apoio, sujeita à acção exterior u , vale M e que a massa do pêndulo de comprimento $2l$ vale m , pode construir-se o diagrama de corpo livre indicado na Figura 5.48b, onde se também se representam as forças V e H de interacção entre os dois corpos dos sistema. O equilíbrio dinâmico associado à rotação da barra isolada em torno do seu centro de gravidade traduz-se através de

$$I\ddot{\theta} = Vl\text{sen}\theta - Hl\text{cos}\theta \quad (5.3)$$

onde I é o momento de inércia da barra em torno do eixo baricentrico, o qual vale

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

Por outro lado, estabelecendo o equilíbrio em termos do movimento horizontal da barra relativamente ao seu centro de gravidade, definido por $x_G = x + l \text{sen}\theta$, fica

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x + l\text{sen}\theta) = H \quad (5.4)$$

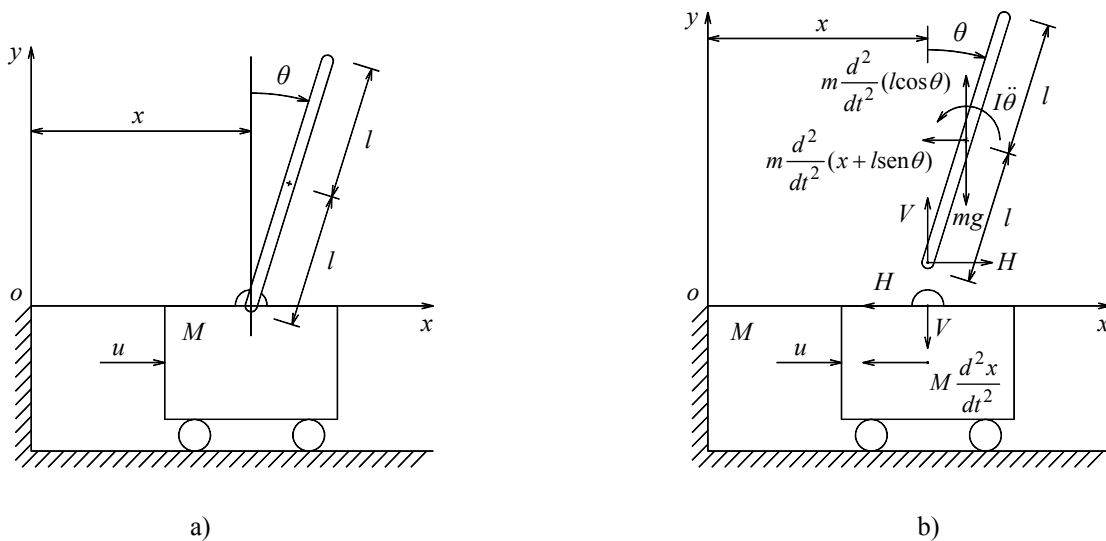


Figura 5.48 – a)Esquema do pêndulo invertido; b)Respectivo diagrama de corpo livre

Fazendo o mesmo para a direcção vertical, sabendo que $y_G = l \cos\theta$, obtém-se

$$-m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos\theta) = V - mg \quad (5.5)$$

Finalmente, estabelecendo o equilíbrio dinâmico da base do pêndulo na direcção horizontal, chega-se a

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (5.6)$$

As equações anteriores, nas quais a variável tempo está implícita, expressam o equilíbrio dinâmico do pêndulo invertido, tendo carácter não-linear devido aos termos $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$.

5.6.3 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

De forma a utilizar os métodos de análise e dimensionamento estudados neste trabalho, válidos para sistemas lineares invariáveis no tempo, as equações do movimento podem ser linearizadas em torno do ponto de equilíbrio do pêndulo, ou seja, quando a barra está numa posição aproximadamente vertical. Então, nestas circunstâncias θ é muito pequeno, podendo assumir-se $\sin\theta \cong \theta$ e $\cos\theta \cong 1$. Neste caso, as equações (5.3) a (5.6) passam a ter a forma

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \quad (5.7)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad (5.8)$$

$$0 = V - mg \quad (5.9)$$

$$M\ddot{x} = u - H \quad (5.10)$$

Conjugando as equações (5.8) e (5.10), de forma a eliminar a interacção horizontal H , e conjugando as equações (5.7) e (5.9) para eliminar a interacção vertical V , obtêm-se as seguintes equações do movimento linearizadas

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (5.11)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (5.12)$$

5.6.4 MODELO EM ESPAÇO DE ESTADO

Para construir o modelo em espaço de estado do sistema é necessário dar outra forma às equações do movimento começando por combinar as equações (5.11) e (5.12) eliminando a variável \ddot{x} , ficando

$$\ddot{\theta} \left[-m^2 l^2 + \frac{(M+m)(I+ml^2)}{ml} \right] = (M+m)g\theta - u \quad (5.13)$$

Da mesma forma, pode combinar-se as mesmas equações para eliminar a variável $\ddot{\theta}$, de onde resulta

$$\ddot{x} \left[-m^2 l^2 + (M+m)(I+ml^2) \right] = u(I+ml^2) - m^2 l^2 g\theta \quad (5.14)$$

Designando

$$\alpha = -m^2 l^2 + \frac{(M+m)(I+ml^2)}{ml}$$

$$\beta = (M+m)g$$

$$\gamma = -m^2 l^2 + (M+m)(I+ml^2)$$

$$\delta = I+ml^2$$

$$\varepsilon = -m^2 l^2 g$$

as equações (5.13) e (5.14) transformam-se em

$$\ddot{\theta}\alpha = \beta\theta - u$$

$$\ddot{x}\gamma = \varepsilon\theta + \delta u$$

ou ainda

$$\ddot{\theta} = \frac{\beta}{\alpha}\theta - \frac{1}{\alpha}u \quad (5.15)$$

$$\ddot{x} = \frac{\varepsilon}{\gamma}\theta + \frac{\delta}{\gamma}u \quad (5.16)$$

Definindo as variáveis de estado como sendo

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta \\x_2 &= \dot{\theta} \\x_3 &= x \\x_4 &= \dot{x}\end{aligned}$$

as equações do movimento (5.15) e (5.16) podem ser reescritas de acordo com

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{\beta}{\alpha}x_1 - \frac{1}{\alpha}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{\varepsilon}{\gamma}x_1 + \frac{\delta}{\gamma}u\end{aligned}$$

ou na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\varepsilon}{\gamma} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \\ 0 \\ \frac{\delta}{\gamma} \end{bmatrix} u$$

donde se pode obter a equação de estado tal como definida na secção 3.4.4.1. Na implementação desta experiência avaliou-se os parâmetros M , m e l do modelo laboratorial desenvolvido, tendo-se chegado a

$$\begin{aligned}M &= 10,10\text{kg} \\ m &= 1,71\text{kg} \\ l &= 0,35\text{m} \\ I &= 0,069825\text{m}^4\end{aligned}$$

Tendo em conta o valor numérico destes parâmetros, pode-se concluir que, neste caso

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 23,582 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,195 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2035 \\ 0 \\ 0,0950 \end{bmatrix} u \quad (5.17)$$

Dado que, nas condições deste trabalho, todas as variáveis de estado podem ser avaliadas experimentalmente, a matriz de saída associada à equação de saída vale

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.6.5 DIMENSIONAMENTO DO CONTROLADOR

A implementação de um controlador inserido no funcionamento do pêndulo invertido tem como objectivo a modificação da dinâmica inicial deste sistema para uma outra que, por um lado, corresponda a um sistema estável com os seus pólos em malha fechada localizados no semi-plano complexo estável, e, por outro, imponha um determinado nível de desempenho em face do comportamento pretendido. Tendo em conta que valores próprios da matriz de estado incluída na eq.(5.17) valem $\lambda_{1,2} = 0$ e $\lambda_{3,4} = \pm 4,856$, o sistema tem um pólo real positivo, o que confirma a situação de potencial instabilidade na ausência de um sistema de controlo.

Pretendendo-se dimensionar um controlador de tal forma a que o pêndulo possua as características referidas, o primeiro aspecto a ter em consideração é a questão da controlabilidade, isto é, saber se através de uma acção de controlo aplicada ao nível da base deslizante será possível implementar a dinâmica desejada. De acordo com o exposto na secção 4.6.3, o sistema será completamente controlável se a matriz de controlabilidade R respectiva, de dimensões $n \times n$, tiver característica n . Neste caso,

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & -0,2035 & 0 & -4,7989 \\ -0,2035 & 0 & -4,7989 & 0 \\ 0 & 0,0950 & 0 & 0,2432 \\ 0,0950 & 0 & 0,2432 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja característica vale 4, podendo concluir-se que, de facto, o sistema é completamente controlável.

Sendo assim, a determinação da matriz de ganho correspondente à dinâmica que se quer impor ao pêndulo pode ser feita recorrendo a qualquer dos métodos referidos na secção 4.6.5. No caso de se utilizar o processo baseado na forma canónica controlável do modelo de estado, é necessário definir inicialmente os coeficientes da equação característica do sistema sem controlo. Tendo em conta os valores próprios da matriz de estado já referidos, esta equação resulta em

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4) = s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = s^4 - 23,5817s^2 = 0$$

o que significa que $a_1=0$, $a_2=-23,5817$, $a_3=0$ e $a_4=0$. Então a matriz W, tal como definida na eq.(3.58), fica com a seguinte composição

$$W = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -23,5817 & 0 & 1 \\ -23,5817 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

permitindo a obtenção da seguinte matriz de transformação

$$T = RW = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,2035 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2035 \\ -1,9971 & 0 & 0,0950 & 0 \\ 0 & -1,9971 & 0 & 0,0950 \end{bmatrix}$$

Nesta fase é necessário definir qual a dinâmica a atribuir ao sistema, podendo seguir-se o processo referido por Ogata [100], o qual sugere que se aproxime o comportamento do pêndulo a um sistema de mecânica de 1 grau de liberdade fortemente amortecido. Para o efeito, devem posicionar-se os pólos do sistema no semi-plano complexo esquerdo, de tal modo que dois deles fiquem suficientemente afastados da origem dos eixos para que o comportamento do pêndulo seja dominado pelos outros dois pólos que devem ficar mais próximos deste referencial. Nestas circunstâncias, o sistema quando perturbado terá um movimento oscilatório marcado por uma determinada frequência natural e um coeficiente de amortecimento em correspondência com o posicionamento dos pólos dominantes. Naturalmente que esta metodologia possibilita um número infinito de soluções dependendo se se pretende atribuir uma dinâmica mais rápida ou mais lenta caracterizada pelo respectivo tempo de acomodação.

Assumindo que os valores próprios que se pretendem atribuir ao sistema são $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_4$, obtidos a partir das características dinâmicas desejadas utilizando a eq.(4.12), a correspondente equação característica vale

$$(s - \hat{\lambda}_1)(s - \hat{\lambda}_2)(s - \hat{\lambda}_3)(s - \hat{\lambda}_4) = s^4 + \hat{a}_1 s^3 + \hat{a}_2 s^2 + \hat{a}_3 s + \hat{a}_4 = 0$$

Neste caso, tendo em conta a matriz de transformação e os coeficientes das equações características anteriores, a matriz de ganho pode ser obtida a partir da eq.(4.42), resultando

$$K = [\hat{a}_4 \quad \hat{a}_3 \quad \hat{a}_2 + 23,5817 \quad \hat{a}_1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,2035 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2035 \\ -1,9971 & 0 & 0,0950 & 0 \\ 0 & -1,9971 & 0 & 0,0950 \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.18)$$

5.6.6 DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA LABORATORIAL

Para implementar esta experiência desenvolveu-se um modelo físico de um pêndulo invertido composto por uma barra vertical em alumínio de secção transversal $3 \times 3 \text{cm}^2$ e de comprimento 71,5cm, rotulada na base por intermédio de um rolamento de baixo atrito (ver Figura 5.49). Por sua vez, a base é composta por um bloco em alumínio que suporta o eixo de rotação da barra, tendo uns batentes laterais para absorver a energia de eventuais choques. No Anexo VI incluem-se os desenhos de execução preparados para a construção deste pêndulo. Este modelo foi adaptado à mesa vibratória utilizada nos trabalhos anteriores, a qual aplica a força de controlo necessária para garantir a estabilidade do sistema. Além de funcionar linearmente numa gama de frequências dos 0 aos 20Hz e possibilitar a aplicação de forças até 445N, esta mesa tem um curso total de 16cm, o que a torna adequada para lidar com deslocamentos relativamente elevados.

No sentido de medir continuamente a resposta dinâmica do pêndulo ao nível da base, a mesa vibratória dispõe de um LVTD de funcionamento axial cujo curso é compatível com a gama de deslocamentos da plataforma. Já a rotação angular da barra pode ser medida através de um outro tipo de LVDT que permite medir rotações dos 0 aos 300° , estando o seu corpo fixado ao bloco da base do pêndulo e o êmbolo ligado ao eixo de rotação da barra através de uma junta elástica (ver Figura 5.50). Através da conjugação adequada de filtros analógicos do sistema de aquisição e de filtros digitais implementados no algoritmo de controlo, foi possível atenuar o ruído dos sensores para que se pudessem fazer estimativas da velocidade por simples derivação numérica dos sinais, possibilitando a obtenção directa do vector de estado.

Também nesta experiência se utilizou o controlador PXI da National Instruments descrito anteriormente, tendo-se programado as sub-rotinas de controlo e todo o processo de aquisição e processamento de sinais em ambiente LabVIEW. No desenvolvimento dos algoritmos, teve-se em conta a implementação de alguns sistemas de monitorização do funcionamento do pêndulo de modo a evitar danos no modelo e na mesa vibratória, dado tratar-se de um sistema cuja estabilidade só pode ser mantida com o controlo a funcionar. Nesse sentido, impôs-se uma amplitude máxima da força aplicada pela mesa de $F_{c_{\text{Max}}}=10\text{N}$ e uma gama de deslocamentos útil $d_{\text{max}}=\pm 7\text{cm}$ a partir da qual se desliga automaticamente o sistema activo.

Na colocação em funcionamento do pêndulo é necessário inicialmente equilibrar manualmente a barra na posição de equilíbrio vertical de modo a que se possam “zerar” todos os sensores. Embora este procedimento possa ser dispensável através da calibração antecipada dos zeros dos transdutores, com esta operação inicial de alguma dificuldade, tenta-se evidenciar as potencialidades de um sistema activo integrado num sistema deste género. De facto, apesar de manualmente não se conseguir equilibrar o pêndulo durante mais do que um ou dois segundos, o sistema de controlo desempenha esta tarefa com bastante facilidade, o que revela o interesse desta experiência.



Figura 5.49 – Aspecto geral do pêndulo invertido

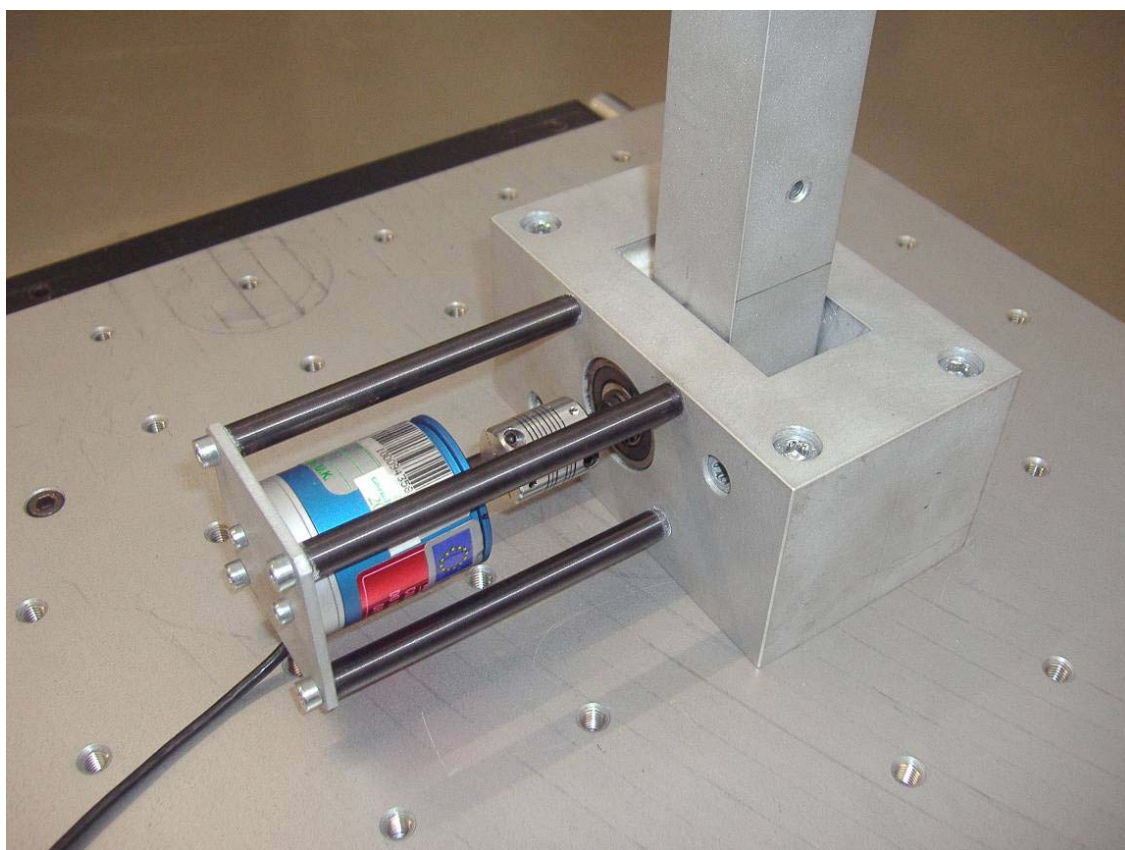


Figura 5.50 – Detalhe da base de apoio e da fixação do sensor de rotação

5.6.7 ANÁLISE DO DESEMPENHO DO SISTEMA DE CONTROLO

Na colocação em funcionamento do sistema de controlo proposto para o pêndulo invertido, testou-se a utilização de controladores com diferentes dinâmicas. Seguidamente expõe-se o caso específico de um controlador com o qual se pretendeu atribuir os valores de $s_1 = -10,5$, $s_2 = -9,5$ e $s_{3,4} = -1,33 \pm j 2,30$ aos pólos em malha fechada do sistema. Esta atribuição de valores próprios está em correspondência com o que foi dito anteriormente, pois s_1 e s_2 estão suficientemente afastados para que o par de pólos complexos conjugados $s_{3,4}$ domine a dinâmica do pêndulo, passando esta a ser caracterizada por uma frequência natural de 2,60rad/s e de um coeficiente de amortecimento de 0,5%, conforme se pode deduzir da eq.(4.27). Após o cálculo dos coeficientes da equação característica respectiva, a aplicação da eq.(5.18) permite definir a matriz de ganho associada a este controlador, resultando

$$K = [-1070 \quad -207 \quad -355 \quad -204]$$

Nas Figuras 5.51 e 5.52 estão representadas as séries temporais da resposta do pêndulo a uma acção impulsiva aplicada no seu topo, estando o sistema dotado do controlador descrito. Como se pode constatar, a tentativa de desestabilizar a barra foi imediatamente compensada pela actuação da força activa aplicada pela mesa vibratória. No entanto, apesar de registar um bom desempenho, o sistema de

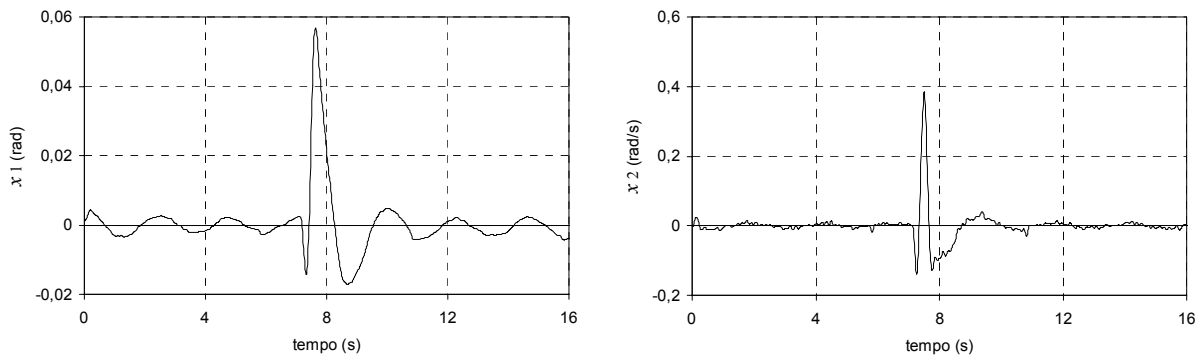


Figura 5.51 – Resposta do pêndulo em termos do deslocamento angular (x_1) e velocidade angular (x_2) da barra

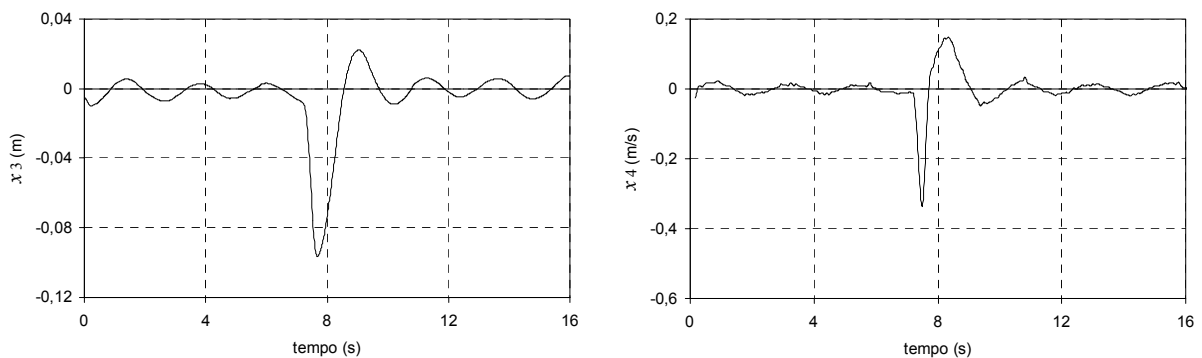


Figura 5.52 – Resposta do pêndulo em termos do deslocamento (x_3) e velocidade (x_4) da base

controlo não é capaz de anular completamente o movimento do pêndulo, ficando este a oscilar permanentemente com um movimento harmónico residual. Este facto vai de encontro à opinião de alguns autores [29], segundo os quais a fixação da barra na posição de equilíbrio é uma suposição teórica difícil de concretizar na prática. Isto porque a excitação de fundo originada pelo ruído nos sensores, aliada à resolução digital do problema e à permanente instabilidade que se verifica mesmo na vizinhança do ponto de equilíbrio, faz com que o pêndulo dificilmente se imobilize na vertical. Todavia, não deixa de ser interessante verificar que o movimento residual tem a frequência própria atribuída pelo controlador de acordo com o posicionamento dos pólos dominantes. Neste caso o valor medido é de 2,69rad/s praticamente coincidente com o valor numérico previsto de 2,60rad/s.

CAPÍTULO 6

IMPLEMENTAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLO EM ESTRUTURAS REAIS

6.1 INTRODUÇÃO

Tendo em vista a implementação de sistemas de controlo de vibrações em estruturas reais, neste capítulo descreve-se o trabalho realizado em torno de duas aplicações envolvendo duas pontes pedonais distintas. A primeira estrutura corresponde à ponte localizada no campus da FEUP, a qual serve de ligação entre a zona da biblioteca e a cantina. Em virtude da sua concepção estrutural caracterizada por uma ponte do tipo catenária, esta passagem pedonal apresenta uma invulgar flexibilidade na direcção vertical, evidenciando frequentemente níveis de vibração pouco comuns em pontes pedonais em Portugal. Esta situação está também relacionada com o facto da estrutura apresentar um conjunto de frequências naturais próximas dos 2Hz, o que a torna vulnerável à ocorrência de fenómenos de ressonância ocasionados pela proximidade entre as frequências próprias da estrutura e a frequência da passada dos peões em andamento normal.

Esta circunstância suscitou o interesse em instalar um sistema de controlo de vibrações para fins de investigação, tendo-se implementando um sistema de controlo activo baseado na utilização de um AMD existente no Laboratório de Vibrações e Monitorização da FEUP. A opção por um sistema deste género teve como objectivo demonstrar as potencialidades dos sistemas activos em funcionar com estruturas que podem exibir diferentes comportamentos dinâmicos em função das acções que as solicitam. Efectivamente, os sistemas activos possuem um grau de adaptabilidade às estruturas que não existe nos sistemas passivos, podendo um único dispositivo controlar simultaneamente vários modos de vibração, actuando em conjunto ou isoladamente.

Neste contexto, nas próximas secções faz-se uma descrição deste trabalho, começando por caracterizar a ponte, quer em termos geométricos e materiais, quer em termos dos seus parâmetros dinâmicos. Seguidamente, apresenta-se o estudo analítico desenvolvido para o sistema de controlo, o qual teve como objectivo identificar as secções mais favoráveis de localização do AMD, bem como fazer uma estimativa do nível de eficácia esperado na redução das vibrações da estrutura. Por fim, descrevem-se os equipamentos e instrumentação utilizados na experiência e apresentam-se os resultados experimentais obtidos.

A segunda aplicação descrita refere-se ao trabalho desenvolvido em torno do dimensionamento, implementação e observação de um sistema de controlo composto por TMDs para atenuação das vibrações laterais e verticais na ponte pedonal Pedro e Inês em Coimbra, amplamente estudada por Caetano, Cunha *et al* [21, 23]. Esta estrutura, correspondente à primeira implementação de dispositivos deste género em Portugal, além da particularidade de possuir um desalinhamento em planta do tabuleiro, tem uma frequência de vibração lateral de cerca de 0,9Hz, o que a torna vulnerável à ocorrência de fenómenos de “lock-in”. Além disso, apresenta múltiplas frequências naturais susceptíveis de serem excitadas pela acção vertical dos peões, o que levou à adopção dos dispositivos referidos para o controlo de vibrações verticais e laterais.

Neste trabalho faz-se uma descrição pormenorizada dos procedimentos levados a efeito em termos da identificação dos parâmetros modais da estrutura, bem como da avaliação dos efeitos dinâmicos produzidos pelos peões, e, posteriormente, expõe-se o estudo do sistema de controlo proposto. Seguidamente descreve-se o ensaio experimental realizado para aferir o real desempenho do sistema passivo, no qual se recorreu a ensaios de vibração forçada.

Por fim, apresenta-se o sistema de monitorização dinâmica permanente da estrutura, desenvolvido para observar os níveis de vibração da ponte no seu primeiro ano de funcionamento. Este sistema, composto por um conjunto de 6 acelerómetros devidamente posicionados no interior do tabuleiro e por um sistema de aquisição e transmissão de dados, permite colher dados para posterior análise e elaboração de relatórios. Devido à velocidade de processamento conseguida, este sistema permite ainda a visualização em tempo real dos registos colhidos através de uma página Web, especialmente desenvolvida para o efeito.

6.2 IMPLEMENTAÇÃO DE UM AMD NUMA PONTE PEDONAL FLEXÍVEL

6.2.1 DESCRIÇÃO GERAL DA ESTRUTURA

A ponte pedonal que integra o novo campus da Faculdade de Engenharia do Porto foi projectada pelo Gabinete de Projectos ENCIL (1998) [40], sendo constituída por um tabuleiro do tipo catenária (“stress-ribbon”) contínuo, apoiado nos encontros e num pilar intermédio, formando dois vãos de 28m e 30m. A laje de tabuleiro constitui uma estrutura laminar de betão armado com 3,8m de largura e cerca de 0,15m de espessura, cuja estabilidade é conferida por 4 cabos embebidos na secção de betão traccionados entre os encontros (Figura 6.1). A forma curva da estrutura resulta do equilíbrio estático entre as forças gravíticas e as forças de tracção nos cabos. O pilar central, cuja extremidade superior possui uma cota de 2m acima da cota dos encontros, é uma estrutura metálica formada por 4 tubos dispostos segundo as arestas de uma pirâmide quadrangular invertida, ligados superiormente por um elemento em forma de “sela” de desvio dos cabos do tabuleiro.

Sendo a resistência às acções horizontais conferida pelos cabos traccionados, tornou-se necessária a utilização de um sistema de apoio longitudinal durante a fase construtiva. Na construção do tabuleiro, começou-se por esticar os cabos até uma força de 750kN e posteriormente foram sendo colocadas pré-lajes de largura 1m de uma forma progressiva e alternada em cada um dos tramos, desde os encontros até ao limite da “sela” central. Seguidamente, procedeu-se à montagem das armaduras passivas e à betonagem do tabuleiro, tendo-se concluído a estrutura com a injeção das juntas entre as pré-lajes e o preenchimento das bainhas dos cabos com calda de cimento.



Figura 6.1 – Alçado da ponte pedonal

6.2.2 IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS

A identificação dos parâmetros modais que caracterizam o comportamento dinâmico da ponte pedonal assim como o desenvolvimento, actualização e validação do modelo numérico respectivo foram alvo de estudos desenvolvidos por Caetano e Cunha [22], tendo recorrido a diversos métodos de identificação baseados em ensaios de vibração ambiente e vibração forçada.

A identificação modal estocástica baseou-se na realização de um ensaio de vibração ambiental da ponte, o qual foi desenvolvido com base em quatro sismógrafos dotados de acelerómetros triaxiais de tipo “force-balance” devidamente sincronizados por um PC. A resposta ambiental foi medida em sucessivos “setups” recorrendo a dois pontos de referência fixos (pontos 3 e 18) e 18 pontos de medida móveis, todos situados sobre o eixo longitudinal da ponte (ver Figura 6.2).

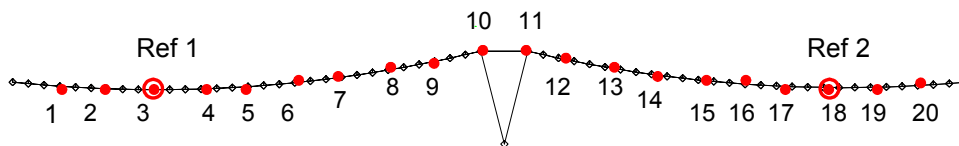


Figura 6.2 – Pontos de medida utilizados

Em cada “setup”, a resposta ambiente foi medida através da aquisição de séries temporais de aceleração com 6 minutos de duração. Estas séries foram posteriormente analisadas e processadas de forma a obter estimativas médias das funções de densidade espectral de potência (PSD) e de funções de transferência relacionando a resposta em cada ponto móvel com um ponto de referência. Na Figura 6.3 encontram-se representados dois desses espectros médios a partir dos quais se podem extrair estimativas das primeiras frequências naturais da estrutura.

A aplicação do método convencional de “Peak-Picking” ao conjunto das funções de resposta em frequência obtidas possibilitou igualmente a identificação das frequências naturais do sistema, assim como a identificação dos respectivos modos de vibração, estando as 4 primeiras configurações modais representadas na Figura 6.4. Na Tabela 6.1 resumem-se os valores das frequências naturais identificadas, bem como as características dos correspondentes modos de vibração, onde se inclui também uma comparação com resultados obtidos através de um modelo de elementos finitos devidamente calibrado com base nos ensaios experimentais. A obtenção desse modelo constituiu uma tarefa árdua na medida em que, face ao insuficiente rigor conseguido por diversos modelos lineares desenvolvidos previamente, teve de se ter em consideração o carácter não-linear geométrico da estrutura bem como o processo construtivo seguido na sua construção [22].

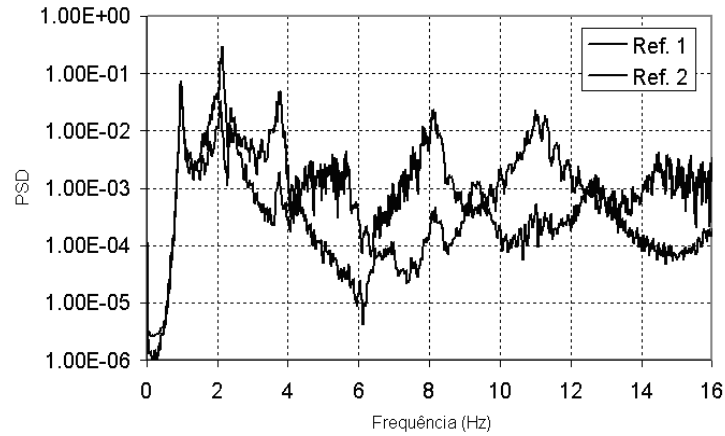


Figura 6.3 – Estimativas das funções de densidade espectral de potência médias avaliadas nas secções de referência

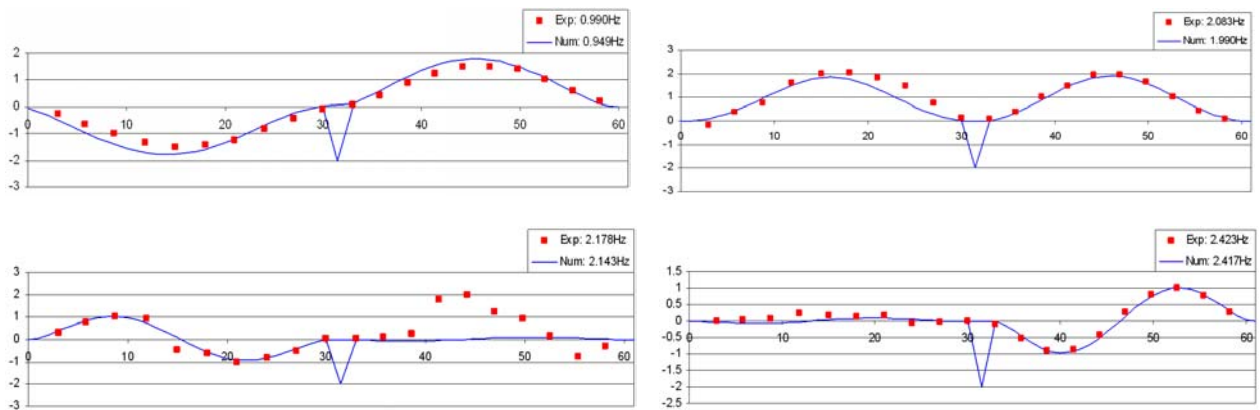


Figura 6.4 – Primeiros 4 modos de vibração identificados e calculados

Ordem	Frequência medida (Hz)	Frequência calc. (Hz)	Tipo de modo
1	0,990	0,949	1° anti-simétrico (dois vãos, oposição de fase)
2	2,083	1,990	1° simétrico (dois vãos, em fase)
3	2,178	2,143	2° anti-simétrico (L=30m)
4	2,423	2,417	2° anti-simétrico (L=28m)
5	3,753	3,334	2° simétrico (dois vãos, oposição de fase)
6	3,857	3,869	2° simétrico (L=30m)
7	4,229	4,381	2° simétrico (L=28m)
8	5,726	5,915	3° anti-simétrico (L=30m)
9	6,517	6,820	3° anti-simétrico (L=28m)
10	8,262	8,271	4° simétrico (dois vãos, oposição de fase)

Tabela 6.1 – Frequências naturais identificadas e calculadas

O amortecimento estrutural foi igualmente avaliado recorrendo a diferentes técnicas de identificação de parâmetros modais em sistemas, utilizando métodos baseados na medição da resposta ambiente ou da resposta forçada [34]. Um processo expedito de avaliação adoptado para estimar os coeficientes de amortecimento associados aos primeiros modos de vibração consistiu em excitar a estrutura com uma frequência próxima das respectivas frequências naturais utilizando um peão em salto rítmico. Após o alcance da resposta em ressonância, foi possível registar a o decaimento livre da estrutura parando subitamente a acção exterior, ficando o amortecimento determinado pela configuração da curva envolvente. Na Figura 6.5 estão indicadas as respostas obtidas utilizando frequências de excitação próximas de 1 e 2Hz, sendo possível identificar um coeficiente de amortecimento de cerca de 1,7% para o primeiro modo de vibração e de 2,6% para o segundo.

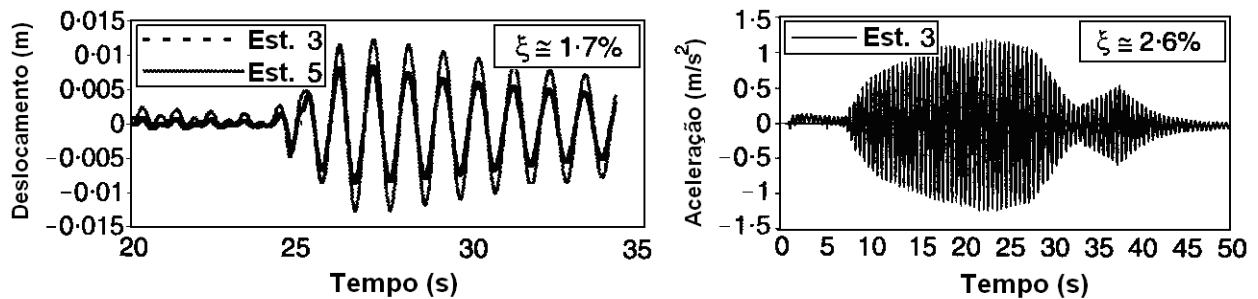


Figura 6.5 – Resposta em vibração livre associada aos dois primeiros modos de vibração

6.2.3 ESTUDO DO SISTEMA DE CONTROLO ACTIVO

6.2.3.1 NÚMERO E POSICIONAMENTO DE SENSORES E ACTUADORES

O número e posicionamento de actuadores e sensores numa estrutura dependem essencialmente de um compromisso equilibrado entre os objectivos do sistema de controlo e os custos que essa opção acarreta. Já foi referido no Capítulo 4 que o número e posicionamento de actuadores estão directamente ligados com o conceito de controlabilidade de um sistema dinâmico e, no caso dos sensores, com o conceito de observabilidade. Numa primeira abordagem ao sistema de controlo da ponte pedonal em análise, pode constatar-se que o sistema possui modos de vibração de carácter local, podendo imediatamente concluir-se que, para implementar uma solução de controlo eficaz sobre a globalidade da estrutura, seria necessário mais do que um actuador. Efectivamente, ao posicionar um único actuador em qualquer um dos tramos, inevitavelmente existem nessa secção modos com componentes modais reduzidas ou nulas, o que significa que as correspondentes forças modais de controlo serão de reduzida eficácia, ou então, para serem significativas, teriam de ser extremamente elevadas, o que levanta alguns

problemas de concretização prática. Também se pode concluir que a adopção de dois actuadores localizados em cada um dos tramos não significa que a estrutura seja globalmente controlável. De facto, será inevitável que as secções de posicionamento dos actuadores coincidam com nodos de alguns modos de vibração, ou pelo menos muito próximo deles, caindo-se no problema anteriormente referido.

Para ponderar esta questão, pode recorrer-se a um gráfico onde se sobrepõem as configurações modais dos modos de vibração que interessa controlar. No caso desta ponte, este gráfico encontra-se representado na Figura 6.6, no qual estão indicadas as configurações numéricas dos primeiros cinco modos de vibração. Em princípio, o controlo do primeiro modo com frequência 0,95Hz não é prioritário por se situar fora de uma gama de frequências crítica susceptíveis de serem excitadas pela acção vertical dos peões. Pelo mesmo motivo, não se representaram no gráfico os modos com frequência superior a 3,33Hz.

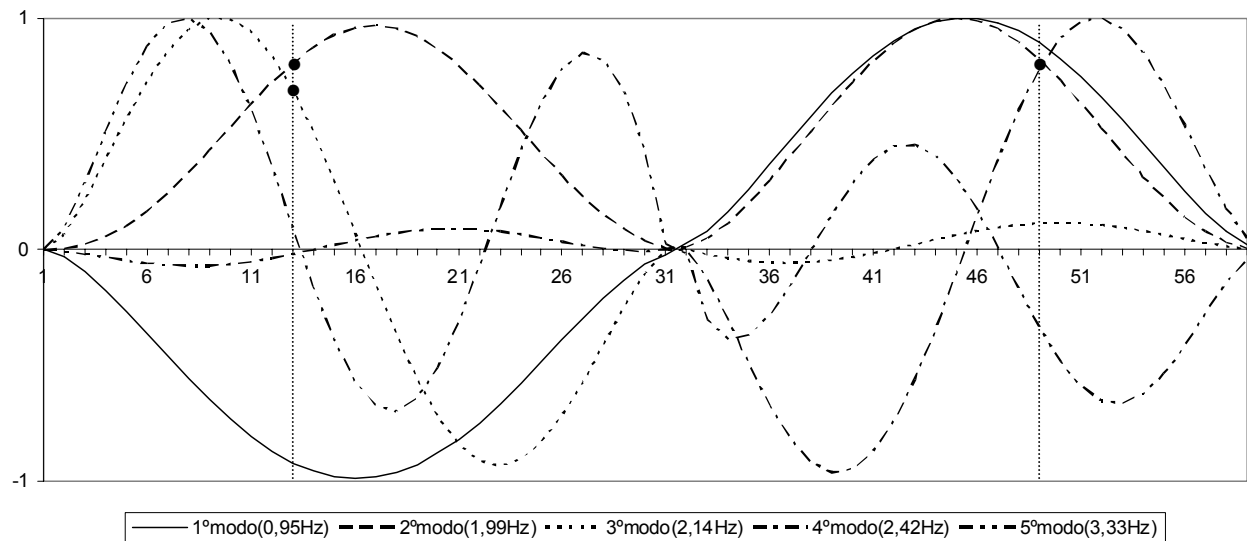


Figura 6.6 – Representação dos primeiros 5 modos de vibração do sistema

Através da observação deste gráfico, podem definir-se vários cenários em termos de posicionamento dos actuadores. No entanto, tendo em vista uma implementação real do sistema de controlo, um cenário provável será dar maior importância ao controlo do 2º, 3º e 4º modos de vibração, os quais têm frequências naturais próximas da gama de frequências da passada normalmente praticadas pelos peões, ficando para segundo plano o controlo do 1º e 5º modos. Nesse sentido, a localização de um actuador no primeiro tramo deverá situar-se na proximidade da secção 13, favorável ao controlo do 2º e 3º modos de vibração, e junto da secção 49, no caso do segundo tramo, contribuindo também para o controlo do 2º modo de vibração e potenciando o controlo do 4º modo.

No que diz respeito ao número de sensores a utilizar, deverá ter-se particular atenção à estratégia de controlo e ao número de modos a controlar. Neste caso, o objectivo será utilizar pares sensor-actuador colocados, o que significa que bastará ter um sensor para cada actuador.

6.2.3.2 ESTRATÉGIA DE CONTROLO

Já foi referido anteriormente que a resposta dinâmica de um sistema sujeito a acções harmónicas em condições de ressonância é fortemente condicionada pelo coeficiente de amortecimento do modo de vibração excitado. Isto significa que nestes casos, uma boa estratégia de controlo será aumentar o amortecimento estrutural para valores tais que mantenham a resposta estrutural dentro de limites máximos aceitáveis. Para se obter uma estimativa do aumento do amortecimento necessário para se atingir uma redução pré-definida da resposta estrutural, basta utilizar o coeficiente $1/2\zeta$ que traduz a amplificação dinâmica de um sistema nas condições referidas.

Para gerar uma força de amortecimento viscoso é necessário aplicar à estrutura uma força proporcional à velocidade do ponto de aplicação da força afectada do sinal negativo, ou seja, $F_a(t) = -c\dot{y}(t)$. Nesta equação c é a constante de amortecimento que, tal como mencionado na secção 4.3.2, está em correspondência directa com a variável ganho. Esta lei de controlo está naturalmente associada a um controlador derivativo, pois gera uma acção proporcional à derivada da resposta do sistema. O efeito desta lei de controlo (também conhecida como realimentação directa da velocidade) pode ser comparado com a introdução de um amortecedor viscoso passivo numa estrutura, pois também este gera uma força de amortecimento proporcional à velocidade.

No caso da ponte pedonal em estudo, a aplicação de forças activas localizadas nos nós 13 e 49 calculadas utilizando este controlador é equivalente a ter dois amortecedores passivos ligando a estrutura a apoios rígidos conforme se indica na Figura 6.7. Naturalmente que se a opção por amortecedores passivos tal como indicados na figura fosse possível, seria indubitavelmente preferível utilizar estes dispositivos para o controlo das vibrações. Sucede que em muitos casos práticos como este, tal não é possível, o que potencia a utilização de técnicas alternativas, como é o caso do controlo activo utilizando actuadores de massas activas.

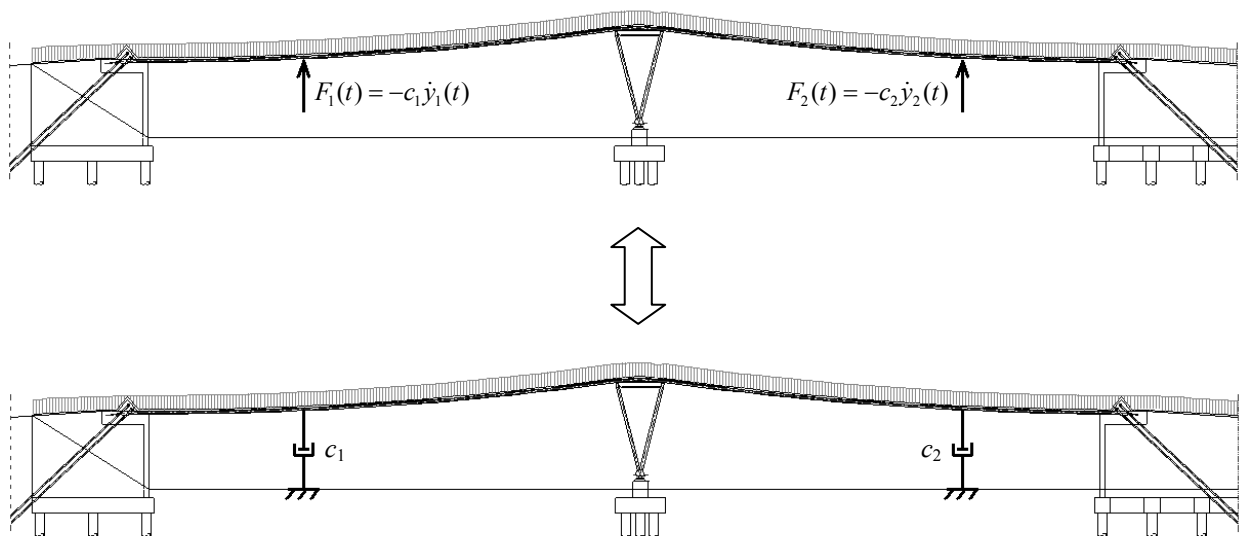


Figura 6.7 – Efeito do controlo activo utilizando um controlador derivativo

A utilização de AMDs permite de facto a aplicação de forças concentradas em qualquer ponto da estrutura sem que haja qualquer ligação de dispositivos de controlo de vibrações ao exterior. Por esta razão, esta solução é referida por vezes na literatura como correspondendo à utilização de um “Sky-hooke damper”, porque o efeito que se obtém é semelhante a ter um amortecedor ligando a estrutura a um ponto do espaço.

Todavia, a estratégia delineada relativamente à aplicação de uma lei de controlo baseada na realimentação directa da velocidade tem de ser adaptada neste caso, pois a força activa não corresponde a ter uma única força concentrada, mas sim a um par de forças iguais e opostas, sendo uma componente aplicada à estrutura e a outra à massa adicional. Como consequência, obtém-se um esquema de actuação não-colocado, devendo o efeito da interacção entre a estrutura e a massa adicional ser devidamente considerado através da análise do modelo dinâmico do sistema utilizando uma ferramenta apropriada, como por exemplo o diagrama do lugar das raízes.

6.2.4 AVALIAÇÃO EFICIÊNCIA ESPERADA UTILIZANDO O AMD EXISTENTE NA FEUP

6.2.4.1 DESCRIÇÃO DO ESQUEMA DE CONTROLO

O esquema de controlo proposto anteriormente implica a utilização de dois actuadores posicionados nos dois tramos da ponte pedonal, constituindo um sistema de controlo descentralizado na medida em que cada um é realimentado pelo respectivo sensor. No entanto, existindo apenas um actuador disponível no laboratório, a solução a implementar terá necessariamente de ser adaptada ao funcionamento isolado de um AMD. Embora tal situação constitua uma limitação em termos do controlo global da estrutura, a utilização de um só sistema de actuação posicionado num dos tramos da ponte, permite implementar um sistema de controlo local com a possibilidade de reduzir as vibrações nesse tramo, utilizando para o efeito a mesma estratégia delineada anteriormente.

Neste caso, o sistema de controlo constituído por um único AMD posicionado numa determinada secção do tabuleiro, desenvolverá uma acção de controlo calculada com base na realimentação directa da velocidade. Este esquema, ao contrário do inicialmente considerado, pode ser modelado como sendo um sistema com uma entrada e uma saída (SISO), devendo a resposta estrutural ser medida localmente na mesma secção de posicionamento do actuador.

6.2.4.2 CARACTERIZAÇÃO DO AMD

A identificação das características do AMD é crucial para avaliar as características de estabilidade do sistema de controlo. O dispositivo disponível no Laboratório de Vibrações e Monitorização de Estruturas

da FEUP é composto pelo excitador electrodinâmico “Electro-seis” modelo 400 já utilizado nos ensaios descritos no capítulo anterior, podendo ser modelado de acordo com o sistema mecânico linear indicado na Figura 6.8. No âmbito desta experiência de controlo, os parâmetros dinâmicos do actuador montado na direcção vertical foram avaliados em termos de frequência natural e respectivo coeficiente de amortecimento, induzindo um movimento forçado no sistema em correspondência com a frequência própria de vibração e largando-o em reposta livre após subitamente parar a excitação. A frequência natural pôde então ser avaliada através da contagem de ciclos ocorridos num determinado período de tempo e o coeficiente de amortecimento extraído utilizando o método de decremento logarítmico. Na Figura 6.9 encontra-se representada a evolução temporal da resposta do actuador obtida, permitindo estimar a frequência natural respectiva em 1,33Hz e o correspondente coeficiente de amortecimento em 7,1%. A massa activa do aparelho foi estimada em 34Kg de acordo com os manuais do equipamento.

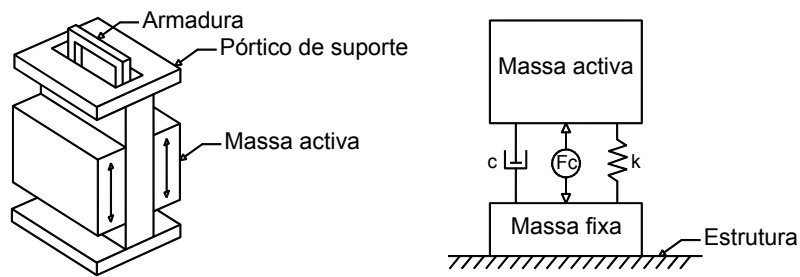


Figura 6.8 – Esquema e modelo do excitador electrodinâmico

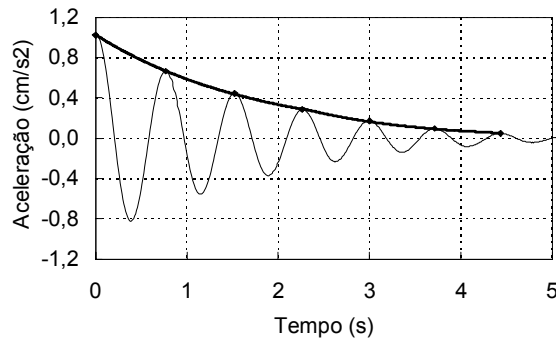


Figura 6.9 – Evolução temporal da resposta livre do actuador

Como se viu na secção 5.4.5.1, os AMDs devem ter frequência natural inferior à frequência própria da estrutura de modo a evitar perda da propriedade da alternância de pólos e zeros do sistema em malha fechada, e devem ter elevado amortecimento, tendo em vista a obtenção de uma maior margem de ganho. Verifica-se porém que o dispositivo usado neste trabalho tem frequência natural superior à primeira frequência da ponte, o que implica que o sistema não poderá controlar o correspondente modo de vibração, como adiante se verá. Além disso, a relação entre a massa activa e a massa do sistema é consideravelmente baixa (inferior a 2% no caso mais favorável), o que pode reduzir a eficácia do sistema

de actuação devido à limitação do curso total do êmbolo do aparelho. Efectivamente, de modo a poder absorver a mesma energia cinética, uma massa activa menor terá de percorrer deslocamentos de maior amplitude do que uma massa activa de valor mais elevado.

6.2.4.3 ANÁLISE DO SISTEMA ATRAVÉS DO MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

Para estudar o sistema de controlo recorreu-se ao diagrama do lugar das raízes devido ao facto da estrutura em análise poder ser considerada linear na gama de deslocamentos de interesse e porque na implementação do controlo importa somente considerar uma única função de transferência que relaciona o par entrada/saída na secção de posicionamento do sensor e actuador, havendo interesse em conhecer o efeito da localização do sistema de actuação em várias secções relevantes do tabuleiro. Tal como discutido na secção 6.2.3.1, a localização ideal do actuador será próxima da secção 13 se se pretender controlar em simultâneo o 2º e 3º modos de vibração e na secção 49 para controlar o 2º e 4º modos. Conjuntamente com estas secções, existe também a possibilidade do actuador se situar noutras localizações, tendo em vista o controlo isolado de um modo de vibração específico, como por exemplo na secção 9 para controlar isoladamente o 3º modo, na secção 52 para controlar o 4º modo ou na secção 17 para controlar o 2º modo.

Para se poder estudar o efeito do sistema de actuação em cada uma destas posições, as funções de transferência que definem o comportamento da estrutura dotada de um sistema de controlo em malha fechada foram calculadas utilizando o modelo numérico desenvolvido por Caetano e Cunha [22], no contexto de diversos trabalhos de análise dinâmica desta ponte pedonal. Estas funções foram determinadas tendo por base uma formulação modal considerando a contribuição dos cinco primeiros modos de vibração, seguindo o procedimento indicado na secção 3.4.3 com particular ênfase para a expressão 3.44. Já a análise do lugar das raízes foi realizada com a ajuda da “toolbox” de controlo do software comercial Matlab [83], estando representados na Figura 6.10 os diagramas do lugar das raízes referentes a três situações seleccionadas em correspondência com o posicionamento do sistema de actuação nas secções 13, 49 e 52. Na Figura 6.11, por sua vez, está expressa sob a forma de gráficos a evolução dos coeficientes de amortecimento modais associados aos diferentes níveis de ganho, assim como a indicação dos valores máximos do ganho de forma a evitar a instabilidade do sistema, ou seja, os valores máximos do ganho para os quais os pólos em malha fechada permanecem no semi-plano complexo esquerdo.

Neste processo, salienta-se o facto de que se adoptou coeficientes de amortecimento iniciais iguais a 1% para todos os modos de vibração. Este procedimento é conservativo na medida em que, de acordo como o exposto na secção 6.2.2, estes coeficientes serão na realidade superiores a este valor, fazendo com que os coeficientes de amortecimento estimados no sistema controlado sejam efectivamente superiores aos indicados.

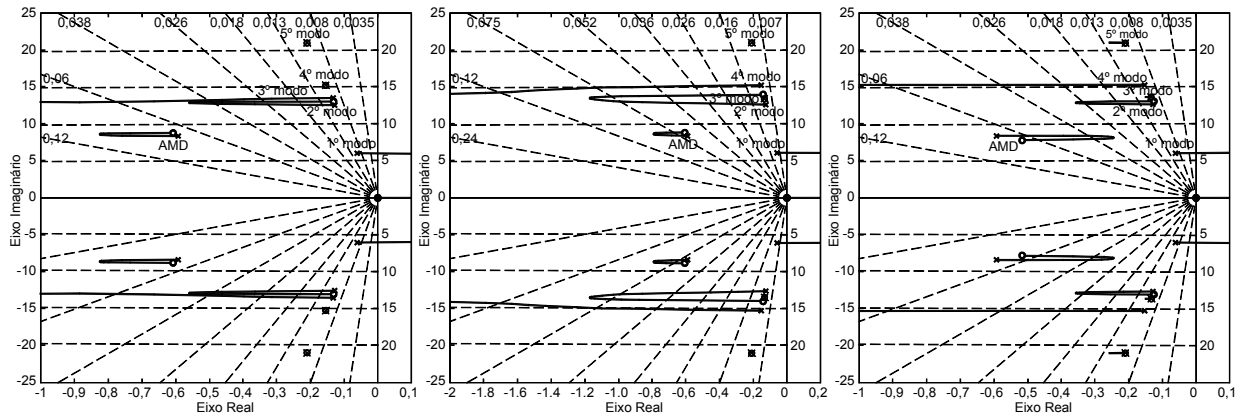


Figura 6.10 – Diagramas do lugar das raízes correspondentes ao posicionamento do sensor/actuador na secção 13, 49 e 52, respectivamente

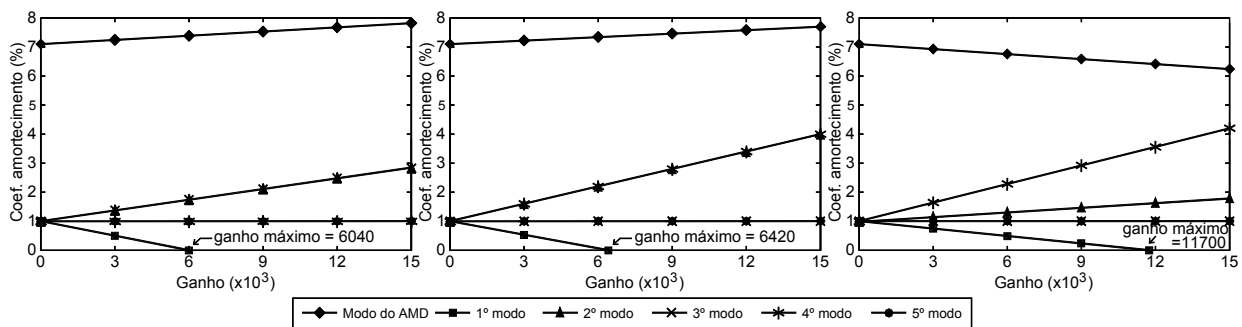


Figura 6.11 – Evolução dos coeficientes de amortecimento com indicação dos valores máximos de ganho

A análise das figuras anteriores permite retirar importantes conclusões relativamente a alguns aspectos relacionados com o desempenho do sistema de controlo. O primeiro aspecto diz respeito ao problema da estabilidade do sistema, que é uma das mais importantes qualidades num sistema activo. Analisando qualquer um dos diagramas do lugar das raízes representado, pode observar-se que a instabilidade do sistema pode efectivamente ocorrer através da vibração descontrolada do primeiro modo de vibração da estrutura. Este facto foi claramente assumido anteriormente devido à relativamente elevada frequência própria do actuador, a qual provoca uma descontinuidade na alternância de pólos e zeros do sistema em malha fechada. Isto significa que, à medida que o ganho aumenta, o coeficiente de amortecimento do 1º modo diminui até se atingir uma situação de instabilidade para ganhos superiores ao ganho máximo admissível.

Apesar disso, esta situação não é muito preocupante pois, tal como já se referiu, o valor da primeira frequência natural do sistema situa-se na ordem de 1Hz, estando afastada da gama crítica de frequências em termos da probabilidade de ocorrência de vibrações excessivas motivadas por fenómenos de ressonância em torno desta frequência. Haveria ainda assim a possibilidade de contornar este problema de potencial instabilidade, através da introdução de um filtro “Notch” no compensador do sistema. Contudo,

tal opção introduziria alguma complexidade na função de transferência do controlador, além de obrigar à medição de deslocamentos da estrutura. Além disso, a utilização de um filtro deste género deve ser cuidadosamente utilizada particularmente em sistemas cujos parâmetros dinâmicos podem ter alguma variabilidade ou grau de incerteza [104].

Outra conclusão importante a retirar das observação dos diagramas do lugar das raízes é que qualquer que seja o posicionamento do actuador, este irá beneficiar o desempenho da estrutura através do aumento dos coeficientes de amortecimento de alguns modos de vibração específicos. É o caso do posicionamento do actuador na secção 13 do tabuleiro, o qual permite o aumento do coeficiente de amortecimento do 2º modo de 1% para 1,76% e do 3º modo de 1% para 1,73%. Neste caso porém, o sistema de controlo é ineficaz no amortecimento do 4º e 5º modos de vibração pois, os pólos do sistema em malha fechada respectivos são praticamente coincidentes com os zeros. A explicação física para esta situação é que o actuador está posicionado sobre os nodos desses modos de vibração, sendo naturalmente ineficaz no seu controlo. Por outro lado, quando se posiciona o actuador na secção 49, é possível aumentar o coeficiente de amortecimento do 2º modo de 1% para 1,85% e do 4º modo de 1% para 1,84%, sendo ineficaz no amortecimento do 3º e 5º modos de vibração.

Estes resultados não são muito encorajadores pois, apesar de em qualquer dos casos existir amortecimento adicional da estrutura, os valores de eficiência alcançados podem não justificar a implementação de um sistema de controlo de vibrações com este AMD. Esta situação já era previsível, na medida em que já se sabia que o actuador existente na FEUP deveria ter outras características em termos de potência e massa activa para controlar uma estrutura de porte significativo como a ponte pedonal em estudo. Contudo, podem esperar-se melhores resultados se ao invés de se tentar controlar simultaneamente vários modos de vibração com o mesmo actuador, se tentar controlar eficientemente um único modo. Desta forma, o sistema de actuação concentra o esforço no controlo de um único modo em vez de o repartir por outros. Para o efeito, o actuador deve ser posicionado sobre a componente modal máxima do modo a controlar, em vez de se posicionar numa secção de compromisso entre vários modos de vibração.

Neste sentido, a análise do posicionamento do actuador na secção 52 da ponte permitiu constatar uma razoável eficiência por parte do sistema de controlo em amortecer significativamente o 4º modo de vibração de frequência natural 2,42Hz. Tal situação deve-se ao facto de, aliado à concentração do esforço de controlo neste modo, o 1º modo de vibração (potencialmente instável) ter nesta secção uma contribuição modal reduzida, o que permite praticamente duplicar o ganho do sistema de controlo face ao adoptado nos casos anteriores. Observando o diagrama de lugar das raízes respectivo, pode constatar-se que, com o actuador posicionado nesta secção, o coeficiente de amortecimento do 4º modo pode subir de 1% para 3,49%. Este resultado corresponde a um bom desempenho do sistema de controlo neste caso, o que motivou a implementação real de um sistema deste género na ponte pedonal. Ainda assim, este nível de desempenho pode não ser tão elevado na prática, pois o curso máximo da massa activa permitido pelo AMD não foi considerado neste estudo.

6.2.5 IMPLEMENTAÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLO

6.2.5.1 DESCRIÇÃO DOS EQUIPAMENTOS E INSTRUMENTAÇÃO

De modo a verificar experimentalmente a eficiência do sistema de controlo descrito anteriormente, foi levada a cabo a sua real implementação utilizando para o efeito os equipamentos e instrumentação existente no Laboratório de Vibrações de Monitorização de Estruturas. O sistema é basicamente composto pelo AMD descrito anteriormente, comandado pelo controlador que calcula a força a aplicar à estrutura com base na resposta estrutural medida continuamente por acelerómetros. Na Figura 6.12 mostra-se o sistema de actuação utilizado nos testes, composto pelo excitador electromagnético descrito na secção 6.2.4.2, o qual possibilita a aplicação de forças à estrutura até 445N de amplitude na gama de frequências de interesse. Este actuador está inserido numa estrutura metálica responsável pelo seu transporte e por transmitir as forças à estrutura por intermédio de um sistema de tripé. As forças de interacção desenvolvidas entre o actuador e a ponte podem ser medidas através de 3 células de carga adaptadas na base do aparelho, as quais se encontram alinhadas com os pés do suporte metálico (ver Figura 6.13a). O actuador está também dotado de um LDVT com o objectivo de medir continuamente os deslocamentos da massa activa do AMD relativamente à estrutura, permitindo monitorizar o movimento da massa e evitar choques com as fronteiras do equipamento.

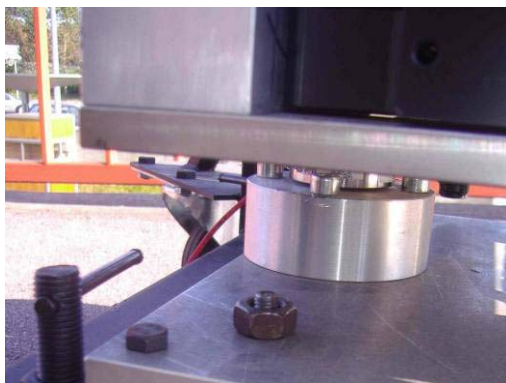
Com o objectivo de medir a resposta dinâmica nos pontos relevantes da estrutura, foram instalados 2 acelerómetros piezoeléctricos devidamente condicionados sobre o tabuleiro. Um desses sensores foi localizado na mesma secção de posicionamento do actuador tendo em vista a medição a velocidade do sistema nesse ponto através da integração analógica do sinal em aceleração. O outro sensor foi posicionado alternativamente em secções diferentes, em conformidade com a localização dos anti-nodos dos modos de vibração excitados (ver Figura 6.13b).

O algoritmo de controlo desenvolvido foi implementado num controlador do tipo NI PXI concebido para ambiente de tempo real, o qual incorpora um sistema operativo específico que garante determinismo na execução do código. Este controlador funciona em paralelo com um outro computador destinado ao desenvolvimento de software e que possibilita a visualização e gravação de dados provenientes do controlador (ver Figura 6.14). Todo o software criado para operar com a instrumentação, actuador e implementação do algoritmo de controlo foi desenvolvido em LabVIEW da National Instruments. Este software é baseado num estilo de programação por objectos, tendo algumas particularidades específicas no caso do desenvolvimento de código para ambientes de tempo real. Em particular, é dada especial atenção ao estabelecimento de prioridades na execução de determinadas tarefas. Por exemplo, a sub-rotina associada ao cálculo e execução da acção de controlo é prioritária relativamente à sub-rotina de visualização ou gravação de dados, sendo as tarefas menos prioritárias executadas nos períodos em que as de maior prioridade estão mais libertas.

Uma questão importante a ter em conta na implementação real de sistema de controlo activo diz respeito ao desenvolvimento de procedimentos de segurança, de tal forma que permanentemente sejam executadas verificações ao correcto funcionamento de todo o sistema. Nesta aplicação, deu-se particular atenção à possibilidade de ocorrência de choques provocados pela massa activa nos batentes do AMD. Se o deslocamento desta massa ultrapassar um determinado limite imposto, originado por eventual instabilidade do sistema ou pela existência de uma acção de controlo demasiado intensa, o sistema activo fica imediatamente em “stand-by”. Do mesmo modo foi também limitada a amplitude máxima da acção de controlo que possibilita o corte dos picos de forças de controlo excessivamente elevadas.



Figura 6.12 – Sistema de actuação



a)



b)

Figura 6.13 – a) Células de carga responsáveis por medir as forças de interacção; b) Acelerómetro utilizado na medição da resposta da estrutura



Figura 6.14 – Controlador e computador auxiliar

6.2.5.2 DESCRIÇÃO DOS TESTES RELIZADOS

Tendo em conta a existência de um único actuador disponível para os testes, decidiu-se localizar o sistema de actuação em algumas secções seleccionadas do tabuleiro da ponte. Nesse sentido, posicionou-se o sistema de actuação na secção 45, com o objectivo de controlar isoladamente o 2º modo de vibração, na secção 49, tendo em vista o controlo conjunto do 2º e 4º modos, e na secção 52, com a finalidade do controlo isolado do 4º modo. As acções exteriores foram aplicadas por um peão de aproximadamente 700N de peso, em andamento ou salto rítmico sobre a estrutura com uma frequência da passada apropriada (ver Figura 6.15 e 6.16).

No primeiro ensaio realizado posicionou-se o sistema de actuação na secção 52 e excitou-se a estrutura nesse ponto com o peão em salto rítmico em condições de ressonância com a frequência natural de 2,42Hz com a ajuda de um metrónomo. Inicialmente, quando o peão começou a saltar, o sistema de controlo encontrava-se inactivo e, depois de ocorridos alguns segundos, o ganho foi gradualmente aumentando até se atingir um valor de $K=3600$. Ao parar subitamente a excitação, foi possível observar a vibração livre da estrutura para posterior cálculo do respectivo coeficiente de amortecimento modal associado ao sistema com esse nível de controlo. Os gráficos representados nas



Figura 6.15 – Peão em salto rítmico junto ao actuador



Figura 6.16 – Peão em andamento percorrendo a ponte

Figuras 6.17a a 6.17d permitem entender o efeito da acção de controlo sobre a estrutura. É perceptível que, à medida que o ganho aumenta (Figura 6.17a), a resposta estrutural diminui (Figura 6.17b), correspondendo a um aumento do coeficiente de amortecimento de um valor inicial 1,76% (medido em ensaios anteriores) para um valor de 2,54%. A redução da resposta estrutural é acompanhada por um crescente aumento da força de controlo (Figura 6.17c), a qual origina o movimento forçado da massa activa. De facto, o actuador age inicialmente como uma massa passiva ligada à estrutura, mas, quando a força de controlo é aplicada, a massa entra em movimento forçado absorvendo a energia do sistema principal (Figura 6.17d).

Mantendo o actuador na mesma secção, realizou-se uma outra experiência excitando a ponte com um peão em andamento ao longo da estrutura com uma frequência da passa de 2,42Hz, induzindo novamente uma situação de ressonância. Tal como no caso anterior, a resposta dinâmica do sistema foi dominada pela vibração harmónica do 4º modo de vibração, com a diferença da amplitude da resposta ser naturalmente inferior à obtida com o salto rítmico. Por esta razão, foi possível adoptar um ganho de controlo mais elevado permitindo a obtenção de um maior desempenho do sistema em termos do aumento do coeficiente de amortecimento desse modo. A Figura 6.18a representa a comparação entre a resposta da

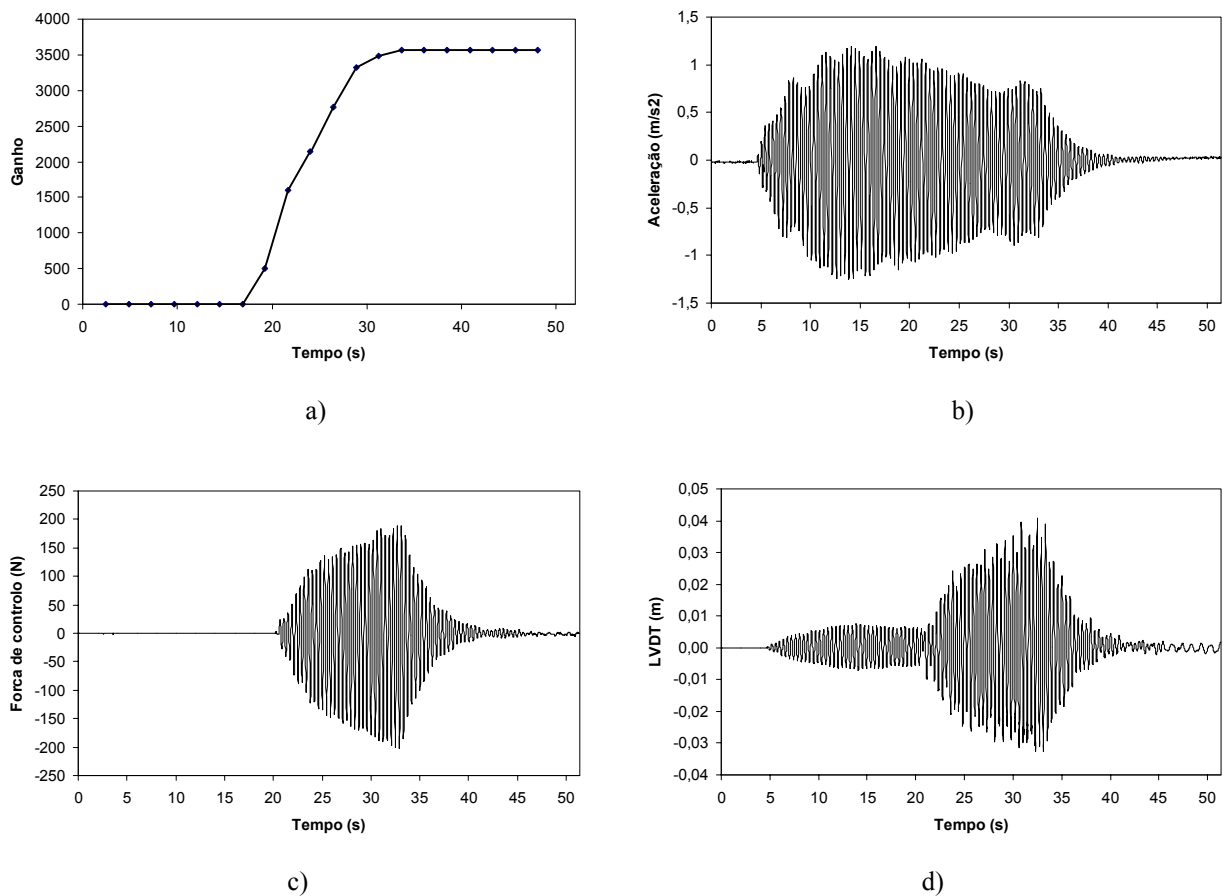


Figura 6.17 – a) Evolução do ganho; b) Resposta estrutural na secção 52; c) Medição da Força de controlo; d) Deslocamento relativo da massa activa

estrutura na secção 52 obtida sem e com controlo utilizando um ganho de $K=11900$. Pode observar-se uma redução significativa da amplitude da resposta do sistema de $0,30\text{m/s}^2$ para $0,20\text{m/s}^2$, correspondendo a um aumento do coeficiente de amortecimento do 4º modo de vibração de 1,76% para 4,15%.

Este resultando revela as potencialidades do sistema de controlo activo desenvolvido, principalmente se se tiver em conta que o quociente da massa activa face à massa modal da estrutura é de apenas 0,15%. Salienta-se, no entanto, que o nível de redução da amplitude da resposta estrutural obtido não é inversamente proporcional ao aumento do amortecimento, isto porque este princípio é válido para respostas estacionárias, o que não corresponde ao presente caso. De facto, modos de vibração com mais baixo nível de amortecimento levam mais tempo a atingir uma resposta estacionária que os modos com amortecimento mais elevado, conduzindo a uma situação de aparente perda de proporcionalidade no caso de respostas como a observada.

Comparando os resultados experimentais obtidos nestes testes com o estudo numérico desenvolvido anteriormente pode observar-se uma boa aproximação entre as estimativas analíticas dos coeficientes de amortecimento do sistema e os valores efectivamente medidos na estrutura controlada. No caso desta experiência, a estimativa do coeficiente de amortecimento analítico do 4º modo de vibração, utilizando o ganho máximo, é de 3,49%, tendo-se assumido um valor inicial de 1%, sendo este valor coerente com o valor medido de 4,15%, tendo em conta que o amortecimento inicialmente efectivamente medido foi de 1,76%. Isto significa que o amortecimento introduzido no sistema cresceu na mesma proporção prevista pelo estudo analítico.

Foi visto também que a utilização de valores de ganho superiores ao máximo admissível pode induzir problemas de estabilidade no sistema, o que veio de facto a confirmar-se. De facto, o ganho adoptado nesta experiência foi ligeiramente superior ao valor máximo previsto de $K=11700$, podendo constatar-se através da análise da Figura 6.18b a presença de alguma instabilidade no comportamento da massa activa.

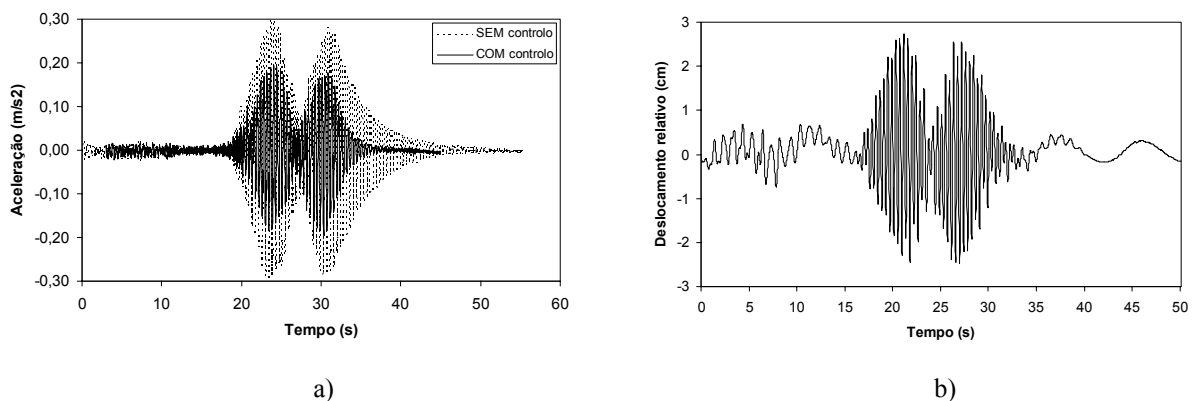


Figura 6.18 – a) Comparação entre a resposta controlada e não controlada na secção 13; b) Resposta da massa activa

Após a conclusão dos testes na secção 52, o sistema de actuação foi posicionado noutras duas secções, nomeadamente nas secções 45 e 49. A ponte foi então excitada com diversas acções pedonais como o andamento e o salto rítmico e, em cada caso, o ganho do sistema de controlo foi ajustado de forma a obter a máxima eficiência possível. A Tabela 6.2 sintetiza os resultados obtidos nesse teste, bem como os resultados anteriores já previamente discutidos. Verifica-se que em todos os testes realizados a resposta estrutural foi sempre melhorada quando comparada com a resposta sem controlo. Também se pode observar que o sistema de controlo é geralmente mais eficiente em reduzir a resposta da estrutura provocada por acções exteriores de menor intensidade, como o andar, do que a provocada por acções mais intensas, como a corrida. Isto porque quando os níveis de excitação são menores, é possível adoptar um valor de ganho mais elevado na tentativa de explorar a máxima amplitude da massa activa. Salienta-se também o facto de em muitos casos se ter conseguido adoptar níveis de ganho superiores aos ganhos máximos permitidos no estudo numérico. A justificação para esta situação é que, em condições de ressonância, a resposta do sistema é dominada pelo pólo dominante, minimizando-se a participação do 1º modo na resposta como potencial causador de instabilidade.

Posição do actuator	Tipo de acção	Sem controlo		Com controlo				
		Coef. amort. (%)	Acel. máxima (m/s ²)	$K \times 10^3$	Coef. amort. (%)	Acel. máxima (m/s ²)	F. controlo máxima (N)	Desl. rel. máximo (cm)
45	Salto rítmico 2,08Hz	1,44	0,63	3,7	1,87	0,48	150	-
	Andamento 2,08Hz	1,44	0,28	5,2	2,23	0,19	77	-
49	Salto rítmico 2,08Hz	1,44	0,82	4,0	1,95	0,60	155	4,8
	Andamento 2,08Hz	1,44	0,31	7,0	2,31	0,21	82	2,9
	Salto rítmico 2,42Hz	1,76	0,96	6,4	2,43	0,73	269	5,2
	Andamento 2,42Hz	1,76	0,30	10,4	2,75	0,25	130	3,1
52	Salto rítmico 2,42Hz	1,76	1,30	3,6	2,54	0,86	195	3,7
	Andamento 2,42Hz	1,76	0,30	11,9	4,15	0,19	140	2,6

Tablela 6.2 – Resumo dos resultados obtidos nos testes

6.2.6 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Após a realização desta experiência de controlo, que envolveu a implementação de um sistema activo para atenuação de uma ponte pedonal flexível localizada no campus da FEUP, é possível resumir algumas conclusões relativamente ao trabalho desenvolvido. Em primeiro lugar, tendo-se observado que a ponte possui modos de vibração locais, concluiu-se que o controlo global da estrutura só é possível se se utilizarem múltiplos actuadores, sendo desejável a utilização de pelo menos um dispositivo em cada tramo. Havendo a possibilidade da estrutura apresentar respostas de carácter hamónico resultantes da ocorrência de fenómenos de ressonância induzidos pelas acções dos peões, a opção por um controlador derivativo parece ser a mais adequada, pois, associado ao funcionamento de AMDs, pode implementar-se uma solução baseada em “sky-hooke dampers” comandados descentralizadamente.

Porém, existindo a possibilidade de apenas se implementar um aparelho deste género, o sistema teve de ser limitado ao controlo de apenas um dos tramos, havendo ainda assim a necessidade de o posicionar em secções específicas de acordo com os modos de vibração mais condicionantes. Estudos realizados indicaram que a possibilidade do sistema estar preparado para controlar simultaneamente vários modos de vibração conduziria a um modesto desempenho do AMD existente na FEUP, pelo que se decidiu concentrar a acção de controlo sobre apenas um modo, tentando por este processo obter melhores resultados com o equipamento disponível.

Apesar do AMD ter uma frequência própria superior à frequência fundamental da estrutura, o que desde logo inviabiliza o controlo deste modo, foi possível ainda assim observar um desempenho aceitável do sistema em alguns cenários de posicionamento do actuador. Num caso em particular, correspondente ao posicionamento do aparelho na secção 52, conseguiu-se aumentar o coeficiente de amortecimento do 4º modo de vibração de 1,76% para 4,15% e reduzir a resposta dinâmica máxima da estrutura de $0,30\text{m/s}^2$ para $0,19\text{m/s}^2$.

Este resultado evidencia as potencialidades dos sistemas activos face aos sistemas passivos, pois, apesar da relação entre a massa do AMD utilizado e a massa modal da estrutura ser neste caso de apenas 0,15%, o sistema activo de 34kg produz o mesmo efeito que um TMD passivo equivalente cuja massa teria de ascender os 160kg, ou seja, 5 vezes superior. Isto deve-se ao facto de, apesar do sistema activo ter menor massa, a amplitude de deslocamento ser cerca de 3 vezes superior à do sistema passivo, conseguindo desta forma absorver a mesma quantidade de energia.

Além deste aspecto, os sistemas activos em geral apresentam outras vantagens pertinentes, nomeadamente porque podem ser adaptativos e responder em várias gamas de frequências, estando imunes a problemas de sintonização, podendo controlar vários modos de vibração utilizando um único actuador.

6.3 IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA DE CONTROLO E MONITORIZAÇÃO DAS VIBRAÇÕES NA PONTE PEDONAL PEDRO E INÊS

6.3.1 ENQUADRAMENTO E OBJECTIVOS

A nova ponte pedonal sobre o rio Mondego (ver Figura 6.19), em Coimbra, está localizada no centro do Parque da Cidade, que se desenvolveu recentemente ao longo das duas margens do rio. Esta nova infraestrutura, que constitui uma marca de inovação e modernidade, foi projectada por Adão da Fonseca [44], liderando uma equipa de Projectistas da AFAssociados, em colaboração com Cecil Balmond, responsável por uma equipa de arquitectos da Ove Arup.

Estudos preliminares inicialmente desenvolvidos pela AFAssociados e posteriormente pelo ViBest/FEUP indicaram a vulnerabilidade da ponte a vibrações induzidas por peões, quer na direcção lateral, quer na vertical. Por essa razão, foi implementado um sistema de controlo passivo de vibrações composto por um conjunto de TMDs destinados a reduzir as vibrações verticais, bem como as laterais da estrutura, tendo sido desenvolvido um programa de observação do comportamento dinâmico da ponte, o qual compreendeu uma série de ensaios de vibração ambiental, de vibração livre e de vibração forçada, efectuados antes, durante e após a instalação dos TMDs.

Neste contexto, as próximas secções têm como primeiro objectivo descrever os trabalhos realizados em torno desta ponte pedonal em termos da identificação dos parâmetros modais da estrutura antes e depois da introdução dos dispositivos de controlo, bem como descrever a metodologia seguida para o dimensionamento, implementação e avaliação da eficiência dos TMDs. Seguidamente, expõe-se detalhadamente o sistema de monitorização dinâmica da estrutura, que foi desenvolvido para avaliar os níveis de vibração na ponte durante os primeiros 12 meses da fase de serviço. Para o efeito, foram instalados 6 acelerómetros distribuídos ao longo do tabuleiro, destinados a colher os sinais que subsequentemente são enviados para um servidor localizado na FEUP a fim de serem processados e disponibilizados numa página Web. Finalmente, descreve-se um conjunto de aplicações que foram desenvolvidas tendo em vista a análise automática e visualização de dados e resultados obtidos durante longos períodos de tempo.

A primeira parte deste trabalho, relativa ao estudo, dimensionamento, implementação e avaliação da eficiência do sistema de controlo, foi conduzida por Caetano e Cunha, estando devidamente publicada nas referências [25] e [26]. Embora o autor desta tese de Doutoramento tenha colaborado pontualmente na realização de alguns destes estudos, a sua principal responsabilidade centrou-se porém ao nível da concepção e implementação do sistema de monitorização, tendo procedido à instalação dos sensores e equipamentos na ponte, à montagem do sistema de comunicações e ao desenvolvimento da página Web [91]. A última parte do trabalho, referente às aplicações de análise e visualização de dados e resultados colhidos durante longos períodos, foi levada a cabo pelo estudante Wei-Hua Hu no âmbito da sua tese de Doutoramento [131].

6.3.2 BREVE DESCRIÇÃO DA PONTE

A ponte pedonal tem um comprimento total de 275m e é composta por um arco central parabólico com um vão de 110m e dois meios arcos laterais em aço, apoiando com total continuidade um tabuleiro misto de aço e betão com 4m de largura. A secção transversal dos arcos é em forma de caixão, com uma secção transversal de 1,35m×1,80m, dando a forma de “L” às secções de intersecção com o tabuleiro. Devido ao desalinhamento em planta dos eixos do tabuleiro (Ver Figura 6.20), surge a meio vão da ponte uma praça central de dimensões 8m×8m, a qual proporciona uma agradável vista panorâmica sobre a cidade. As fundações dos arcos são formadas por maciços de estacas verticais que atingem 35m de profundidade, atravessando solo de fraca qualidade, o que lhes confere um apoio elástico da direcção horizontal. Como consequência, o funcionamento estrutural da ponte passa a ser caracterizado por um comportamento intermédio entre o de um arco e o de uma viga.



Figura 6.19 – Vista da ponte pedonal Pedro e Inês

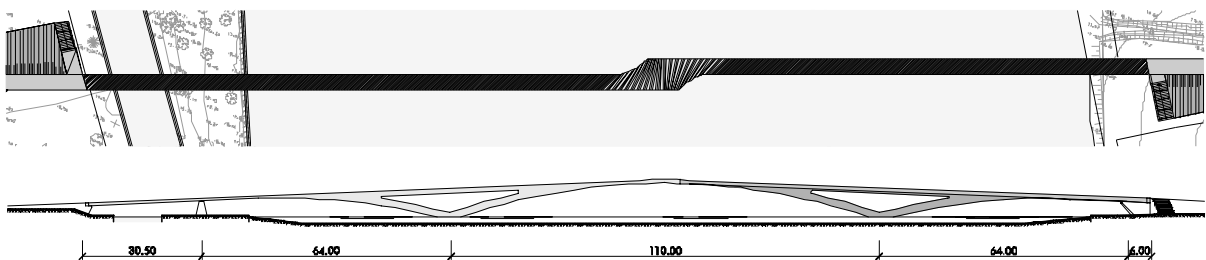


Figura 6.20 – Planta e alçado

6.3.3 CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DOS PARÂMETROS MODAIS

6.3.3.1 ENSAIOS REALIZADOS

A caracterização experimental da ponte foi realizada através de ensaios de vibração ambiental e livre [80], cujos principais resultados se encontram sintetizados na referência [81]. O ensaio de vibração ambiental permitiu a identificação de um elevado número de frequências naturais e modos de vibração, enquanto que os ensaios de vibração livre permitiram obter com maior rigor estimativas dos coeficientes de amortecimento associados aos modos de vibração mais importantes.

6.3.3.2 FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO

O ensaio de vibração ambiental foi realizado em Abril de 2006, tendo-se utilizado quatro sismógrafos triaxiais de elevada sensibilidade dotados de acelerómetros do tipo “force-balance” e conversor analógico-digital de 18 bit, devidamente sincronizados através de sensores externos de GPS. Instrumentaram-se as 20 secções indicadas na Figura 6.21, tendo sido realizadas medições a montante e a jusante nas secções 9, 10 e 11, e medições na zona central do tabuleiro nas restantes secções.

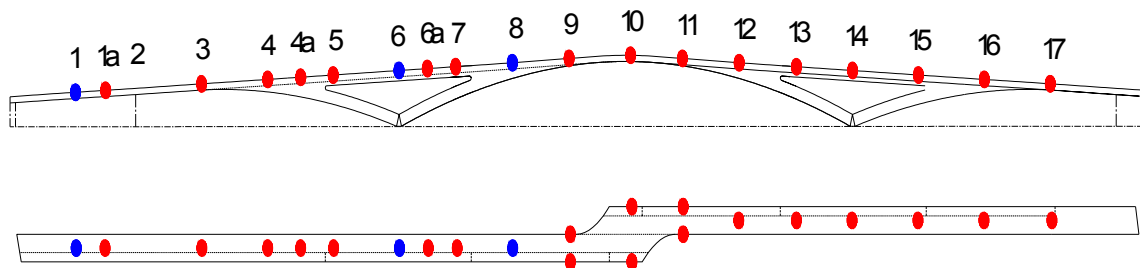


Figura 6.21 – Secções instrumentadas no ensaio de vibração ambiental

Atendendo a que vários dos modos verticais de vibração possuíam características locais, e tendo por objectivo identificar o maior número possível de modos de vibração, utilizaram-se três das unidades de medida como referência, tendo estas ficado permanentemente estacionadas nas secções 1, 6 e 8, enquanto a quarta foi colocada sucessivamente nos restantes pontos de medida. Em cada “setup” foram recolhidas séries temporais de 16 minutos com uma frequência de amostragem de 100 Hz. As frequências naturais e os modos de vibração foram determinados usando o Método de Decomposição Modal no Domínio da Frequência (“Frequency Domain Decomposition”, FDD), estando resumidos na Tabela 6.3 os valores das frequências naturais identificadas de doze dos primeiros catorze modos de vibração, definidos no intervalo 0 – 4,3Hz.

Modo n°	Frequência calculada (Hz)	Frequência medida (Hz)	Coefficiente de amortecimento (%)	Configuração modal
1	0,93	0,91	0,58	transversal
2	1,55	1,54	0,53	vertical/ transversal
3	1,97	1,95	1,04	vertical
4	1,99	1,88		vertical
5	2,15	2,05		transversal
6	2,48	2,54	1,90	vertical
7	2,93	2,88		transversal
8	2,98		0,90	vertical
9	3,07	3,36	0,28	vertical
10	3,34	3,57	0,38	vertical
11	3,62	3,83	0,86	vertical
12	4,21			vertical
13	4,26	4,44		vertical/ torção
14	4,29	4,28		vertical/ torção

Tabela 6.3 – Parâmetros modais calculados e identificados (pavimento de madeira e vidros do guarda-corpos ainda não colocados)

Indicam-se nesta Tabela as características dos modos de vibração e apresentam-se igualmente os valores das frequências obtidas após calibração do modelo numérico, referindo-se que estas frequências não correspondem verdadeiramente à fase final após a construção da ponte, mas a uma situação anterior à colocação do pavimento em madeira e dos painéis de vidro nos guarda-corpos, o que foi considerado no modelo numérico, para efeito de comparação com valores medidos, através de uma correcção de massa. Apresentam-se na Figura 6.22 as componentes transversais (t) e verticais (v) das configurações modais dos primeiros dois modos de vibração identificados, que se comparam igualmente com as correspondentes componentes calculadas, podendo verificar-se uma excelente aproximação entre as configurações modais e frequências naturais identificadas e calculadas. Note-se contudo que esta excelente concordância só pôde ser alcançada mediante o desenvolvimento de um novo modelo numérico, realizado com uma malha muito refinada de elementos finitos de casca reproduzindo a geometria da ponte, na qual foram modeladas todas as aberturas no tabuleiro e simuladas através de elementos de viga as nervuras de rigidez transversais, tendo sido também ajustadas iterativamente as constantes de rigidez das molas nas fundações dos arcos [23].

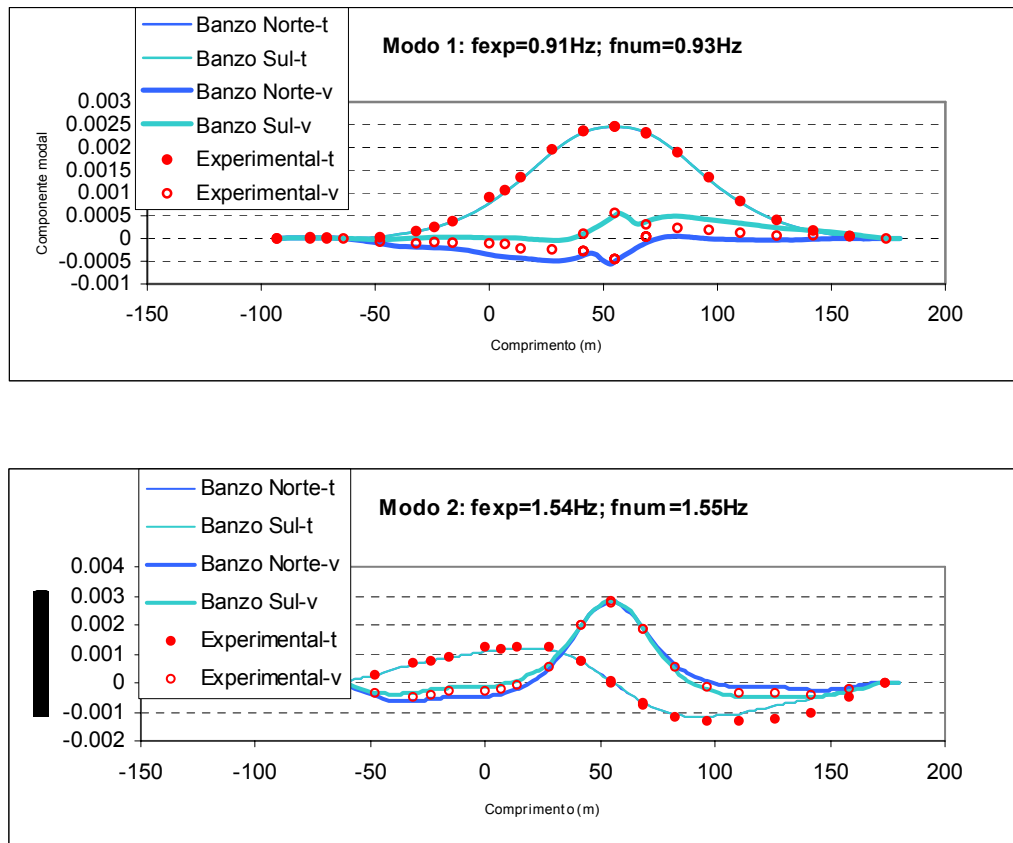


Figura 6.22 – Exemplos de modos de vibração identificados e calculados

6.3.3.3 COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO

Os ensaios de vibração livre consistiram na libertação súbita de massas suspensas do tabuleiro a partir de pontos devidamente escolhidos de forma a estimular os modos de vibração mais relevantes. A libertação súbita das massas provoca forças impulsivas que dão origem a decaimentos, a partir dos quais é possível obter estimativas dos coeficientes de amortecimento modais. A resposta da estrutura foi medida nos pontos 1, 6, 8 e 10 indicados na Figura 6.21, utilizando para o efeito os sismógrafos já anteriormente usados no ensaio de vibração ambiental. Representa-se na Figura 6.23 a montagem utilizada para a libertação de uma massa de 3ton segundo a direcção transversal, assim como uma série temporal colhida nessa direcção na secção de meio-vão, a partir da qual foi identificado o coeficiente de amortecimento de 0,55% do modo de vibração transversal de frequência natural 0,91Hz. Na Tabela 6.3 incluem-se os valores médios dos coeficientes de amortecimento identificados com base nos ensaios de vibração livre, podendo constatar-se que são particularmente baixos, localizando-se na ordem de 0,5% a 0,6% para os dois primeiros modos de vibração da estrutura.

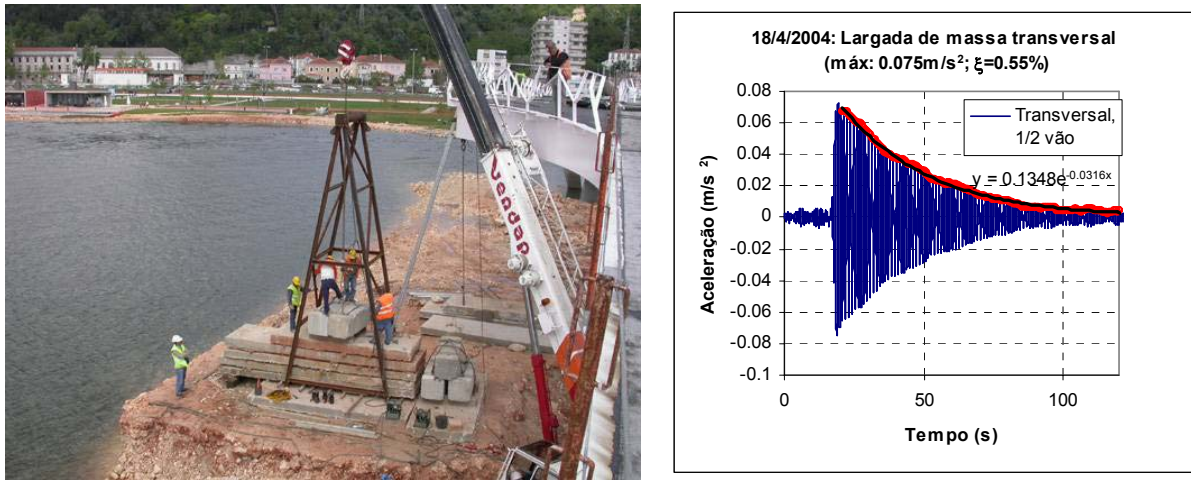


Figura 6.23 – Libertação súbita de massa segundo a direcção transversal

6.3.4 RESPOSTA TRANSVERSAL À ACÇÃO DOS PEÕES

Com o propósito de analisar experimentalmente o comportamento lateral da ponte, foi realizado um ensaio medindo-se a resposta da estrutura à acção de um fluxo contínuo de peões gradualmente crescente até se atingir um máximo de 147 pessoas. Este ensaio foi possível devido à participação de alunos das Universidades do Porto e de Coimbra, que atravessaram a ponte permanentemente em circulação contínua entre as marcas 5 e 15 indicadas na Figura 6.21, sem qualquer preocupação de sincronização ou controlo da frequência de passagem. Este percurso iniciou-se com um grupo de 50 pessoas, que foi crescendo de forma controlada até 147 indivíduos. Nas Figuras 6.24 e 6.25 estão representadas as envolventes das acelerações laterais medidas a meio-vão ao longo do tempo e a variação da aceleração lateral máxima com o número de pessoas presente na ponte, respectivamente. Nessa secção registaram-se valores extremos de aceleração e de deslocamento de $\pm 1,2 \text{ m/s}^2$ e $\pm 4 \text{ cm}$, respectivamente, quando se encontravam a caminhar sobre a ponte 147 peões.

A Figura 6.25 mostra ainda que o crescimento da aceleração com o número de pessoas na ponte não é linear, mas antes exhibe um “salto” para valores do número de pessoas da ordem de 70. Esta situação é concordante com a estimativa retirada da aplicação da fórmula proposta por Dallard [35], a qual, quando aplicada a esta estrutura, indica que este acréscimo súbito da resposta lateral da ponte pode ocorrer para um fluxo de 73 pessoas. Esta fórmula, dada por $N_L = 8\pi\zeta Mf / k$ em que f , M e ζ são respectivamente a frequência natural, a massa e o coeficiente de amortecimento modais e k é uma constante de valor igual a 300 N/m na gama de frequência entre 0,5 e 1 Hz, foi desenvolvida no contexto dos estudos realizados em torno da ponte do Millenium em Londres, permitindo estimar o número de pessoas N_L para o qual se inicia o fenómeno de “lock-in”, caracterizado por oscilações laterais significativas do tabuleiro.

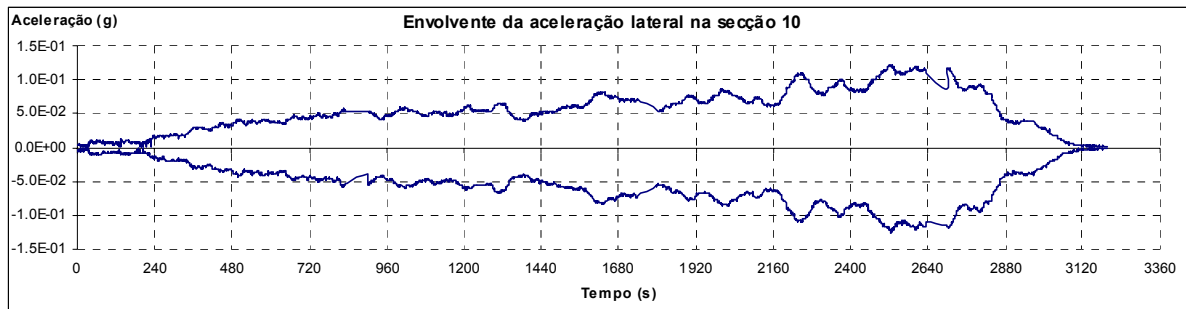


Figura 6.24 – Envoltório da aceleração lateral na secção 10

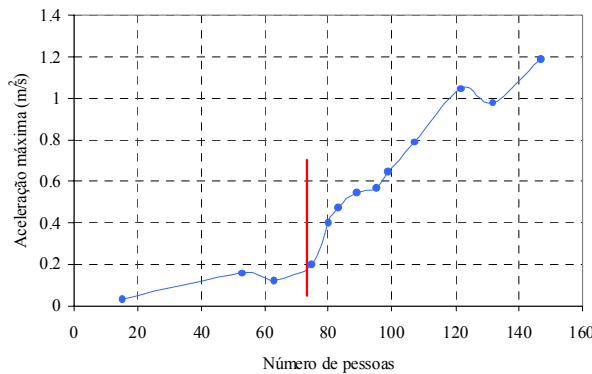


Figura 6.25 – Variação da amplitude das acelerações laterais a meio-vão com o número de peões

6.3.5 SISTEMA DE CONTROLO DE VIBRAÇÕES

6.3.5.1 DIMENSIONAMENTO DOS TMDs

O dimensionamento dos TMDs necessários para controlar os modos de vibração críticos, susceptíveis de serem excitados por fenómenos de ressonância induzidos pela acção dos peões e conduzirem a níveis de aceleração excessivos, foi baseado nos estudos desenvolvidos por Bachmann e Weber [5]. De acordo com a metodologia sugerida, é necessário fixar o valor da massa passiva do TMD, m_T , de valor situado habitualmente no intervalo de 1% a 10% da massa associada ao modo de vibração em estudo, e em seguida proceder à avaliação das constantes de rigidez e de amortecimento das molas e do amortecedor linear viscoso que o constituem, k_T e c_T , respectivamente. Estas constantes deverão ter um valor óptimo, que é definido de modo a minimizar e igualar as amplitudes dos picos que caracterizam a função de resposta dinâmica em frequência, expressa em termos de deslocamentos, do sistema de dois graus de liberdade em que é transformado o sistema de um grau de liberdade idealizado com base nas características do modo de vibração a sintonizar, sendo definidas pela massa m_H , pela rigidez k_H e pela constante de amortecimento c_H .

Dado que a escolha da massa do TMD é determinante para o valor do amortecimento alcançado pelo novo sistema de 2 graus de liberdade, formado pelo sistema estrutural idealizado como um oscilador simples e pela adição do dispositivo, é possível calcular qual o valor da massa que conduz a um nível de amortecimento pretendido para o sistema controlado. No caso das vibrações laterais, querendo reduzir a possibilidade de ocorrência de fenómenos por “lock-in”, pode assumir-se a validade da fórmula de Dallard atrás referida e fixar-se qual o amortecimento que é necessário introduzir mediante instalação de um amortecedor de massas sintonizadas para que não ocorra este fenómeno em face de um determinado número de peões na ponte.

Seguindo este procedimento, na Tabela 6.4 mostram-se os resultados obtidos tendo-se considerado densidades de atravessamento da ponte de 1,0pessoa/m², 1,3pessoa/m² e 1,5 pessoa/m², considerando ou não a influência da massa dos peões na massa modal. Na primeira situação (1,0pessoa/m²), que na ponte de Coimbra exigiria a presença simultânea de 560 peões, a concentração de pessoas leva já a alguma restrição ao movimento. No último caso (1,5pessoa/m²), que só ocorrerá em ocasiões excepcionais, a circulação de pessoas torna-se extremamente difícil, pelo que a própria ocorrência de “lock-in” fica comprometida. Dadas as dimensões da ponte, considera-se que a primeira situação tem já um carácter excepcional, tendo-se no entanto fixado em 6% o valor do coeficiente de amortecimento a atingir após instalação de um TMD sintonizado para este modo de vibração lateral.

Densidade de peões (pessoa/m ²)	Número de peões	Amortecimento requerido ξ (%)
1,0	560	3,7 - 4,0
1,3	730	4,8 - 5,2
1,5	845	5,6 - 6,1

Tabela 6.4 – Factor de amortecimento requerido para a não-ocorrência de “lock-in”

Considerando a necessidade de acomodar o TMD no interior da secção de meio vão (antinodo do modo a controlar), constituída por um caixão de 8m×0,90m dividido interiormente por nervuras transversais espaçadas de 2m, foi necessário segmentar o TMD em várias unidades de características iguais, cada qual com uma massa de 2465kg (Figura 6.26). A opção de utilizar 6 unidades, com uma massa total de 14970kg, correspondente a uma relação de massas $\mu = mT / mH = 7,3\%$, foi determinada pelo projectista e proporciona um amortecimento teórico mínimo de 7,8%. Esta opção resultou essencialmente do conhecimento da sensibilidade que os TMDs têm à sintonização em frequência, pois, mesmo um ligeiro desvio da frequência do TMD do valor óptimo determinado pela frequência do modo de vibração a controlar resulta numa significativa perda de eficiência do dispositivo. Este desvio pode dever-se à variação das características dinâmicas da estrutura ou ao efeito da massa adicional dos peões sobre a estrutura, a qual pode ser relativamente importante na parcela da massa total do sistema [25].



Figura 6.26 – TMD horizontal instalado na secção de meio vão

Relativamente ao dimensionamento dos TMDs para controlo de vibrações na direcção vertical, estudos realizados comprovaram a necessidade de instalar igualmente estes dispositivos para atenuar os efeitos produzidos pelas diversas acções de actividades humanas, tal como o andar, a corrida ou o salto rítmico. Provou-se ainda que existe a probabilidade de ocorrência de vibrações excessivas associadas a diversos cenários de dimensionamento, tal como grupos de pessoas em andamento sincronizado ou um fluxo contínuo de peões. Este estudo está detalhado na referência [23].

6.3.5.2 FUNCIONAMENTO DOS TMDs NO CONTROLO DAS VIBRAÇÕES LATERAIS

O controlo de vibrações laterais através de um TMD é substancialmente mais complexo do que o controlo de vibrações verticais, já que a oscilação transversal da massa do TMD implica o deslizamento ao longo de dois veios, o que significa que o dispositivo deve ser concebido de forma a que se mobilize o menor nível de atrito e a que exista uma tolerância apertada de nivelamento. Não sendo possível eliminar a força de atrito, compreende-se que a mobilização do TMD em vibrações laterais não seja instantânea, mas antes ocorra para determinados níveis de vibração da estrutura. Pelo contrário, numa montagem vertical, a força de atrito mobilizada nos veios é facilmente superada por uma muito ligeira oscilação da massa do TMD e a activação deste sistema é quase instantânea. Assim, no caso específico das vibrações transversais, importa garantir que a activação dos TMDs seja conseguida para acelerações situadas dentro do limite de conforto fixado na ordem de $0,1\text{m/s}^2$.

No entanto, dada a dificuldade em mobilizar de imediato a oscilação lateral destes dispositivos, no funcionamento real do sistema de controlo verifica-se uma activação intermitente dos TMDs, o que faz com que a ponte apresente características dinâmicas variáveis, dependendo se os TMDs estão a funcionar ou não. Este efeito é visível no registo colhido na secção de meio vão da ponte durante o atravessamento por um grupo de 140 pessoas (Figura 6.27), tendo-se observado uma aceleração máxima de $0,067\text{m/s}^2$ e

um deslocamento lateral máximo de 2,8mm. Embora o grupo estivesse distribuído uniformemente sobre o tabuleiro, no registo colhido verifica-se que, próximo do instante 100s, há uma clara atenuação da resposta, sinal de activação dos TMDs e uma consequente alteração da frequência natural da estrutura que se traduz num “batimento”. De novo os TMDs são desactivados pelo instante 170s, originando nova amplificação da resposta e redução progressiva, correspondente ao fim do atravessamento pelo grupo.

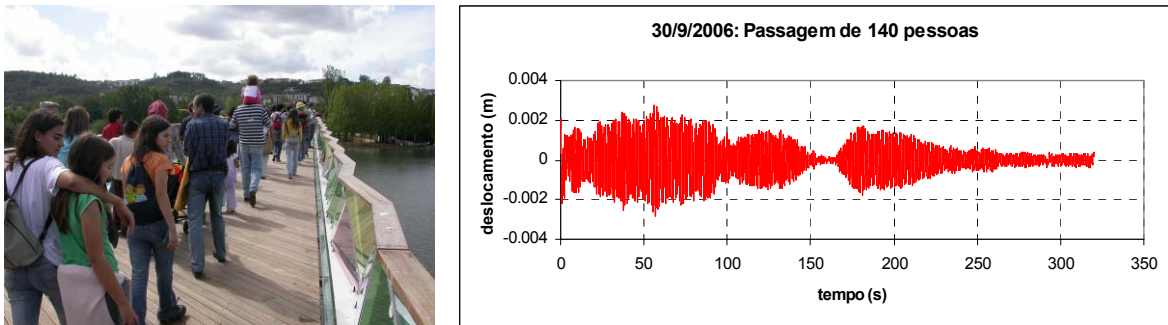


Figura 6.27 – Activação intermitente dos TMDs durante o atravessamento por um grupo de peões

Ainda relativamente ao funcionamento do sistema de controlo para vibrações laterais, a segmentação de um TMD em várias unidades instaladas num mesmo ponto não colocaria, em princípio, qualquer questão, já que, dadas as tolerâncias de construção das massas e molas, não é susceptível de ocasionarem uma significativa variação das suas frequências naturais. Da mesma forma, sendo utilizado o mesmo fluido na composição do amortecedor, não se justifica uma diferença de comportamentos dinâmicos dos diferentes TMDs. Porém, na prática verifica-se que as diferentes unidades exibem diferentes níveis de atrito e, como tal, não são activadas em simultâneo e não atingem níveis idênticos de vibração, o que significa que 6 unidades do TMD não proporcionam uma atenuação da resposta igual à proporcionada por um TMD equivalente com uma massa igual à massa das 6 unidades referida.

Por este motivo, e no sentido de avaliar experimentalmente a eficiência individual das várias unidades que formam o TMD e a eficiência global do dispositivo de controlo, efectuou-se um conjunto de ensaios de vibração forçada. Para o efeito recorreu-se a um excitador construído no Departamento de Engenharia Mecânica da FEUP, baseado num actuador hidráulico que, mediante o deslocamento sinusoidal de frequência variável de uma massa deslizante de 1200kg, aplicou à estrutura uma força horizontal sinusoidal com amplitude máxima de 1300N. O dispositivo mecânico foi instalado na praça central da ponte (ver Figuras 6.28a e 6.28b), tendo-se realizado varrimentos sinusoidais no intervalo de frequências de 0,58Hz-0,99Hz com incremento de 0,01Hz e duas amplitudes diferentes, de 200N e de 1300N, aplicando para cada frequência 30 ciclos de força. De modo a caracterizar o comportamento da ponte com e sem TMD, e ainda o comportamento individual de cada unidade do TMD, os ensaios foram realizados nas seguintes situações: *i*) todas as unidades do TMDs fixas; *ii*) todas as unidades do TMD livres; e *iii*) 1 unidade do TMD livre, e as restantes fixas, para cada uma das 6 unidades testadas.

Nas Figuras 6.29a e 6.29b mostra-se a amplitude das Funções de Resposta em Frequência (FRFs) obtidas experimentalmente, relacionando a aceleração registada a meio vão do tabuleiro e, nas diferentes unidades do TMD, com a força aplicada, considerando amplitudes de 200N e 1300N. Claramente a força de 200N não é suficiente para activar o TMD, pelo que a FRF obtida é caracterizada pela frequência e amortecimento do sistema não amortecido, $f = 0,86\text{Hz}$ e $\zeta = 0,55\%$. A FRF obtida com a força de 1300N diz respeito a um sistema completamente distinto, influenciado pela presença do TMD, com dois modos de vibração de características $f_1 = 0,79\text{Hz}$ e $\zeta_1 = 6,5\%$, e $f_2 = 0,88\text{Hz}$ e $\zeta_2 = 4,0\%$.

Posteriormente, considerando todas as unidades do TMD livres, repetiu-se o varrimento em frequência no intervalo 0,58Hz-0,99Hz. Na Figura 6.30 representa-se um registo temporal colhido simultaneamente ao nível do tabuleiro e de cada unidade do TMD durante a excitação sinusoidal a uma frequência de 0,82Hz com uma força de 1300N. Pode observar-se que as diferentes unidades que formam o TMD apresentam respostas desfasadas e com amplitude distinta, o que evidencia os diferentes níveis de amortecimento que lhes estão associados.



Figura 6.28 – a) Dispositivo mecânico para ensaio de vibração forçada; b) Instrumentação de TMD durante varrimento sinusoidal

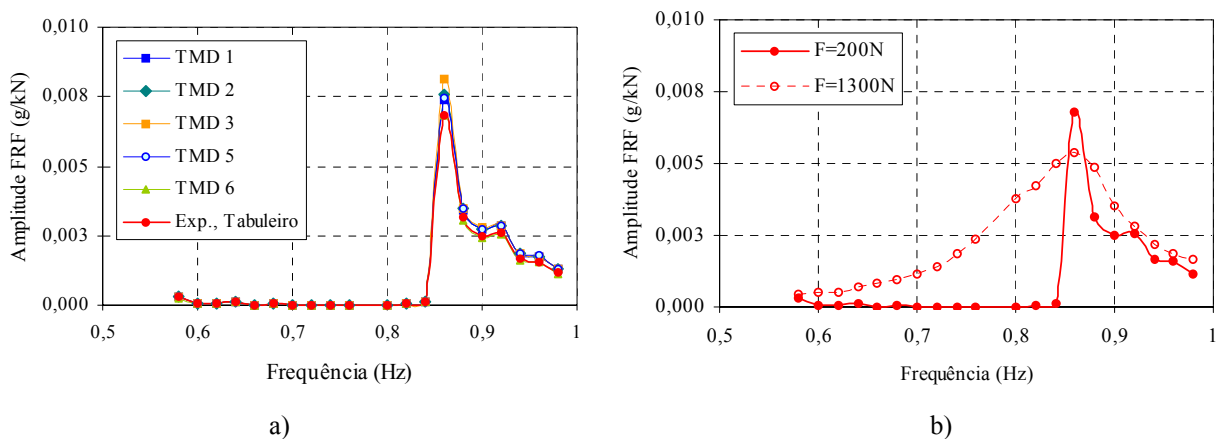


Figura 6.29 – Comparação entre FRFs com diferentes amplitudes da força aplicada: a) tabuleiro e TMD para F=200N; b) tabuleiro para F=200N e F=1300N

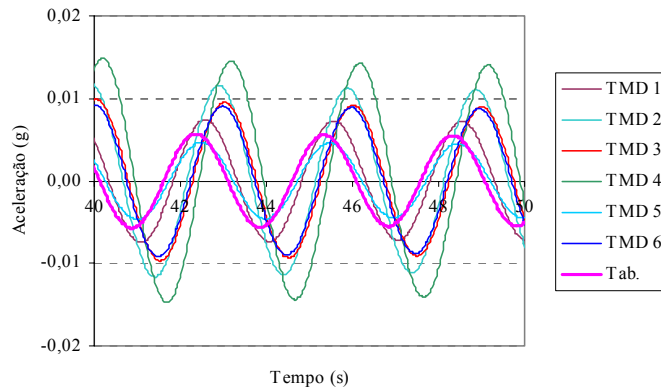


Figura 6.30 – Evolução temporal de acelerações laterais do tabuleiro e dos TMDs para a frequência de excitação de 0,82Hz

Finalmente, a libertação individual de cada uma das unidades que formam o TMD permitiu melhor caracterizar as suas propriedades dinâmicas. A Tabela 6.5 resume os valores máximos de deslocamentos e acelerações esperados tendo por base as constantes de projecto e medidos no tabuleiro e em cada uma das unidades do TMD quando libertadas individualmente, considerando um varrimento em frequência no intervalo de 0,80Hz-0,85Hz com incremento de 0,01Hz e amplitude de força de 1100N. Verifica-se que, em termos teóricos, a variação da constante de amortecimento de 50% não afecta muito a resposta ao nível do tabuleiro ou do próprio TMD. Contudo, verifica-se sistematicamente que, mesmo após activação, os níveis de oscilação das diferentes unidades que formam o TMD são próximos dos valores de projecto enquadrados pelas duas constantes de amortecimento ensaiadas, mas não ocasionam a redução da resposta esperada ao nível do tabuleiro. Comparando os níveis máximos de aceleração do tabuleiro em correspondência com cada unidade de TMD com a resposta do sistema não amortecido, de valor máximo igual a 0,55m/s², conclui-se que, relativamente ao valor de projecto, a eficiência de cada unidade do TMD é da ordem de 60% da esperada. Esta perda de eficiência decorre essencialmente das diferentes características de amortecimento das seis unidades e do facto de esse amortecimento não ser efectivamente viscoso linear.

Unidade	Projecto, C=3568,5Ns/m	C=1790Ns/m	TMD 1	TMD 2	TMD 3	TMD 4	TMD 5	TMD 6
Deslocamento máx. tabuleiro (mm)	5,3	4,5						
Aceleração máx. tabuleiro (cm/s ²)	14,3	12,4	25	20	22	25	32	21
Deslocamento máx. TMD (mm)	16,2	19,3						
Aceleração máx. TMD (cm/s ²)	43,1	53	45	55	48	49	36	49

Tabela 6.5 - Resumo da resposta esperada e medida dos TMDs horizontais

6.3.6 IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA DE MONITORIZAÇÃO DE VIBRAÇÕES

6.3.6.1 DESCRIÇÃO DA INSTRUMENTAÇÃO UTILIZADA

Com o objectivo de monitorizar permanentemente os níveis de vibração da ponte durante os primeiros 12 meses de funcionamento da estrutura, foi desenvolvido um sistema de monitorização dinâmica no sentido de detectar eventuais episódios de vibrações excessivas. Para o efeito, a ponte foi instrumentada com 6 acelerómetros piezoeléctricos triaxiais instalados junto aos TMDs, ou seja em correspondência com a localização dos antinodos dos modos de vibração críticos. Cinco desses sensores medem acelerações verticais, enquanto o outro mede acelerações laterais a meio-vão (Figura 6.31). Na Figura 6.32 mostra-se um detalhe referente à colocação dos sensores 5 e 6 junto a esta secção.

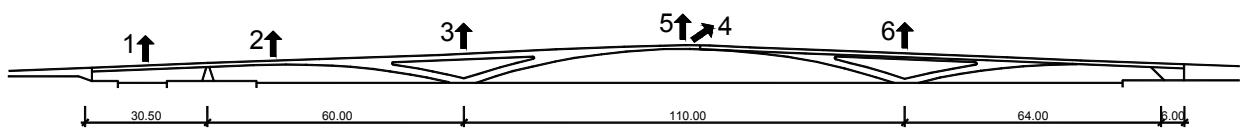


Figura 6.31 – Localização dos acelerómetros

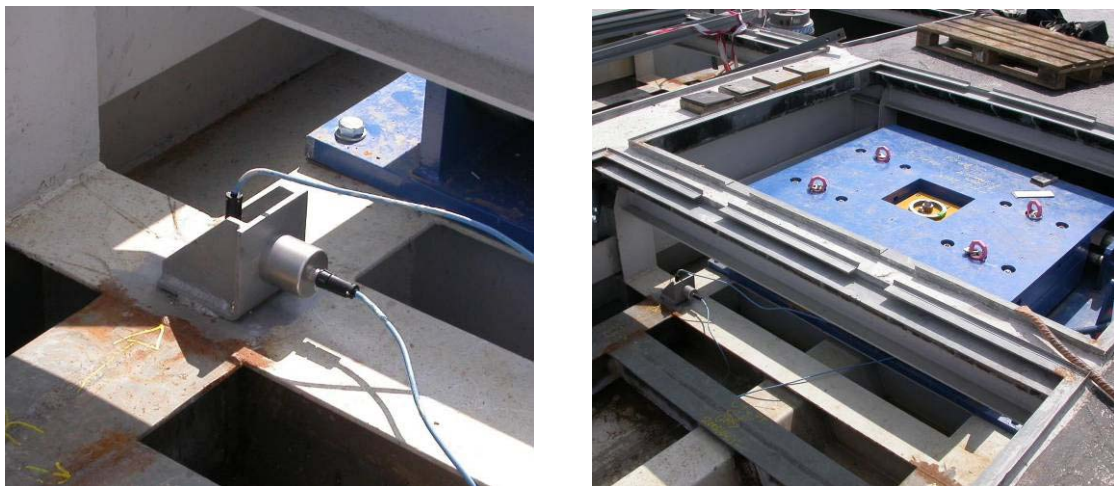


Figura 6.32 – Colocação de acelerómetros para medição de acelerações laterais e verticais a meio vão

Os acelerómetros, tal como os TMDs, foram instalados no interior do tabuleiro, encontrando-se ligados por cabos eléctricos a um sistema de aquisição situado num posto de observação no encontro do lado de Coimbra. A Figura 6.33 mostra uma imagem deste posto de observação, no qual se podem identificar alguns armários contendo os equipamentos correspondentes aos sistemas de monitorização estática e dinâmica da ponte, bem como equipamentos para transmissão de dados. Como se pode observar, estes equipamentos encontram-se devidamente protegidos em relação a factores externos indesejáveis, como humidade e poeiras, aumentando-se também a segurança relativamente a acções de vandalismo.

O sistema de aquisição utilizado para a monitorização dinâmica da ponte é composto por um condicionador de sinal, um computador digital incorporando um board de conversão A/D (analógica-digital) e um sistema UPS. O condicionador de sinal alimenta os acelerómetros integrados num circuito

ICP e realiza algumas operações básicas de sinal, como filtragem analógica. A aquisição de dados é conduzida pelo computador digital com base em software desenvolvido em LABVIEW da National Instruments. O sistema UPS melhora o desempenho do sistema de monitorização, estabilizando a corrente eléctrica e colmatando eventuais faltas de alimentação eléctrica. Os equipamentos estão preparados para fazer face a quebras prolongadas de alimentação eléctrica, pela ligação de alguns mecanismos automáticos de shutdown, complementados pela re-inicialização automática, quando se verifique a normalização da situação. Paralelamente ao funcionamento do sistema de aquisição, há também um sistema de comunicação responsável pela transmissão de dados para a FEUP via Internet, com base numa ligação ADSL. Este sistema de comunicação trabalha permanentemente, enviando regularmente os dados mais actualizados para serem processados, o que torna possível uma observação do comportamento dinâmico quase em tempo real.



Figura 6.33 – Vista geral do sistema de monitorização (esq.) e do condicionador de sinal, computador e UPS (dir.)

6.3.6.2 ARQUITECTURA DO SISTEMA DE MONITORIZAÇÃO

A arquitectura básica do sistema de monitorização dinâmica encontra-se ilustrado na Figura 6.34, a qual divide o sistema em três módulos distintos, correspondentes aos diferentes estados do processo de monitorização. O primeiro módulo envolve a aquisição e o condicionamento de sinal, efectuados localmente na Ponte em Coimbra, e o respectivo armazenamento numa base de dados local. É importante combinar estas componentes porque, no caso de perda de comunicação, o sistema de aquisição de dados permanece em funcionamento coligindo sinais na base de dados. Após o restabelecimento de comunicações, os dados correspondentes a esse período são enviados para a FEUP, de modo a não haver qualquer perda de informação.

O segundo módulo do sistema de monitorização dinâmica inclui todas as operações relacionadas com o processamento de sinal realizado na FEUP. Após chegada da informação proveniente da ponte, os sinais são organizados numa base de dados principal, a qual pode ser acedida em qualquer instante para aplicação de ferramentas de pós-processamento. Com o objectivo de satisfazer o principal objectivo do sistema de monitorização dinâmica foi desenvolvida uma página Web em ambiente LABVIEW, a qual possibilita a visualização dos sinais temporais associados aos 6 acelerómetros e a observação dos níveis de vibração atingidos (Figura 6.35). Complementarmente, encontram-se também disponíveis subrotinas de cálculo de espectros de potência médios normalizados (ANPSD), as quais permitem caracterizar o conteúdo em frequência dos sinais colhidos. Estes gráficos possibilitam distinguir claramente as frequências naturais relevantes da estrutura.

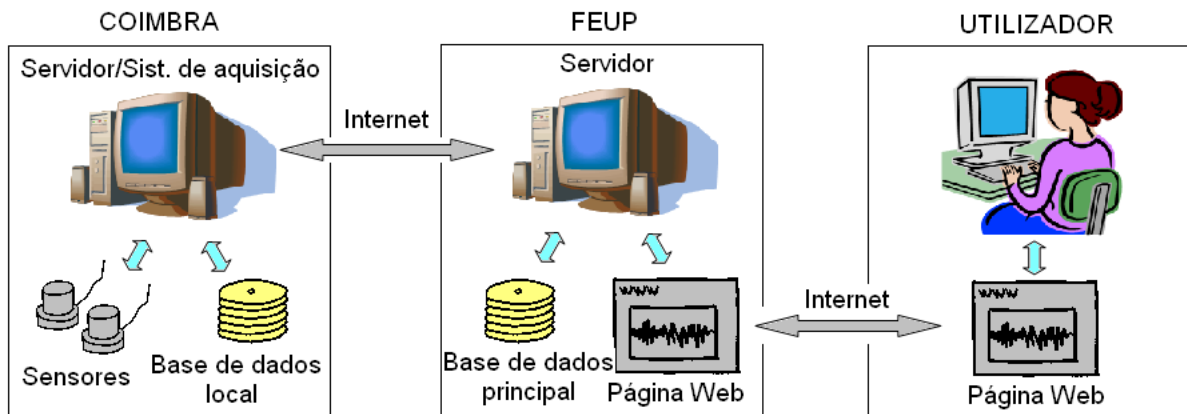


Figura 6.34 – Representação esquemática da arquitectura do sistema de monitorização

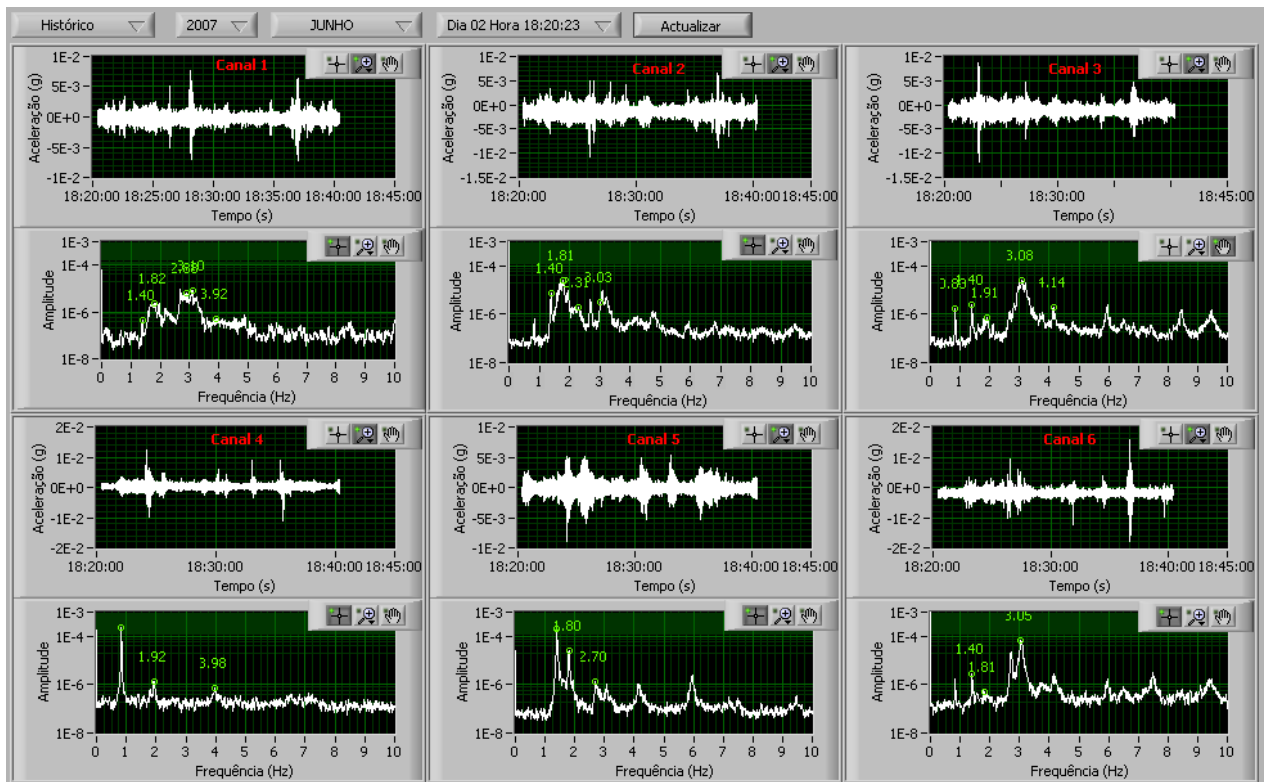


Figura 6.35 – Página Web para visualizar os registos temporais da aceleração e respectivos espectros (ANPSD)

6.3.6.3 ANÁLISE AUTOMÁTICA DE DADOS E VISUALIZAÇÃO DE RESULTADOS

Tendo em vista a análise automática de dados colhidos durante longos períodos de tempo, correspondentes a um volume considerável de informação, e a possibilidade de facilmente visualizar os respectivos resultados, foram desenvolvidas duas ferramentas em ambiente LABVIEW que seguidamente se descrevem [131].

O primeiro programa dedica-se exclusivamente à análise e processamento dos sinais colhidos na ponte por períodos diários e períodos mensais, tomando por base os ficheiros enviados pelo sistema de monitorização em “pacotes” de 20 minutos amostrados a uma frequência de 20Hz, resultantes de uma operação de decimação de sinais medidos a 100Hz. Após o processamento, os resultados são armazenados numa base de dados para posterior consulta. Na análise e processamento de dados, este programa permite a:

- Eliminação de picos espúrios contidos nos sinais induzidos pelo sistema de iluminação da ponte. Para o efeito recorre a técnicas baseadas na análise de “wavelets” [49];
- Detecção e avaliação dos picos de aceleração relacionados com as vibrações laterais e verticais da ponte;
- Avaliação dos valores máximos da aceleração média obtida em curtos períodos de tempo sucessivos (usualmente 5 segundos)
- Representação no domínio da frequência todas as séries temporais utilizando FFTs;
- Caracterização estatística de todos os dados colhidos durante cada dia e cada mês;
- Identificação automática das primeiras frequências naturais, modos de vibração e coeficientes de amortecimento do sistema com base nos métodos de “Peak-Picking” (PP), “Enhanced Frequency Domain Frequency” (EFDD) e “Covariance-driven Stochastic Subspace Identification” (SSI-COV);
- Representação de diagramas “waterfall” para detectar eventuais variações na frequência natural da estrutura ao longo de 1 dia ou de 1 mês;
- Armazenagem dos resultados analisados, incluindo dados e gráficos, ambos no domínio do tempo e da frequência, numa complexa base de dados alojada num servidor.

A segunda aplicação desenvolvida destina-se exclusivamente à visualização dos resultados obtidos pelo anterior programa, podendo ser acedida por um qualquer computador através da Internet. Nas Figuras 6.36 à 6.48 estão representados alguns dos gráficos produzidos por esta aplicação referentes aos meses de Junho e Julho de 2007, podendo constatar-se que a aceleração máxima lateral observada na ponte nesse período não ultrapassa o limite crítico que evita situações de “lock-in”, estimado em $0,1\text{m/s}^2$ [25], sendo na direcção vertical a situação ainda mais confortável.

6.3.7 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Neste trabalho, referente à implementação de um sistema de controlo e monitorização das vibrações na ponte pedonal Pedro e Inês, começou-se por identificar os parâmetros modais da estrutura em termos de frequências naturais, configuração dos modos de vibração e respectivos coeficientes de amortecimento.

Após a realização de ensaios com um grupo de 147 pessoas, observou-se o fenómeno de “lock-in” a partir de um conjunto de cerca de 70 pessoas em andamento sobre a ponte, ficando a estrutura a oscilar na direcção transversal com uma frequência igual à primeira frequência lateral avaliada em cerca de 0,9Hz. Quando o grupo ascendeu a 147 pessoas, registaram-se valores de pico da aceleração e de deslocamento laterais de $\pm 1,2$ m/s² e ± 4 cm, respectivamente.

Por este motivo, instalou-se um conjunto de 6 TMDs a meio vão para atenuação das vibrações laterais, procurando com estes dispositivos aumentar o coeficiente da estrutura para um valor superior a 6%. No entanto, o controlo de vibrações laterais é mais complexo que o controlo de vibrações verticais, em resultado da dificuldade em vencer as forças de atrito mobilizadas no deslizamento das massas ao longo dos veios. Além disso, ao segmentar o TMD em várias unidades, cada qual com um comportamento dinâmico distinto, quer em termos de fase e amplitude de oscilação, quer em termos do nível de amortecimento, marcado ainda por um significativo grau de não-linearidade, obtém-se uma perda adicional de eficiência. Neste caso, a divisão em várias unidades do dispositivo resultou num amortecimento global da estrutura de cerca de 4%. Este amortecimento não está contudo disponível à partida, sendo necessário que a ponte experimente vibrações laterais de amplitude mínima de 1mm para que gradualmente seja mobilizado [25].

O sistema de monitorização dinâmica encontra-se num fase estabilizada do seu funcionamento, possibilitando uma observação via Web, e quase em tempo real, do comportamento dinâmico da ponte. Uma análise sistemática de toda a informação experimental recolhida durante 2 meses (Junho e Julho de 2007) evidencia que as acelerações laterais máximas não ultrapassam o limite de $0,1\text{m/s}^2$ a partir do qual se torna susceptível a ocorrência de um fenómeno de “lock-in”. No que respeita às acelerações verticais máximas a situação é ainda mais confortável, não se tendo observado valores acima de um limite aceitável estimado na ordem de $0,5\text{m/s}^2$.

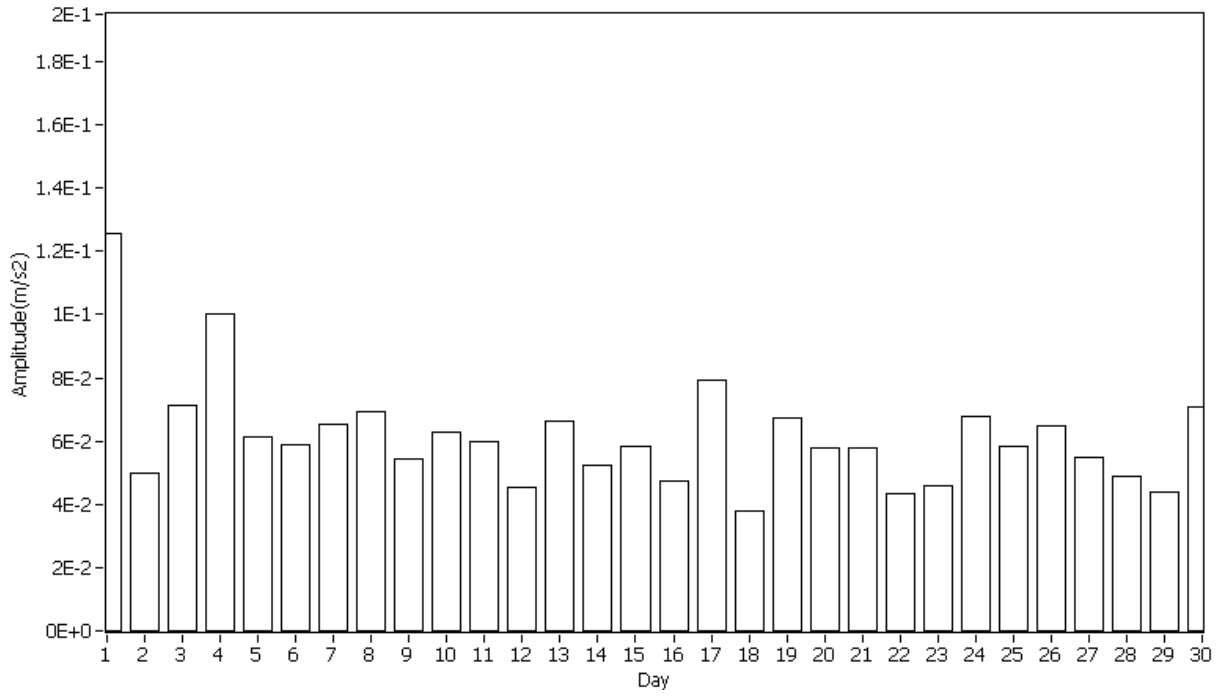


Figura 6.36 – Acelerações verticais máximas ocorridas no mês de Junho

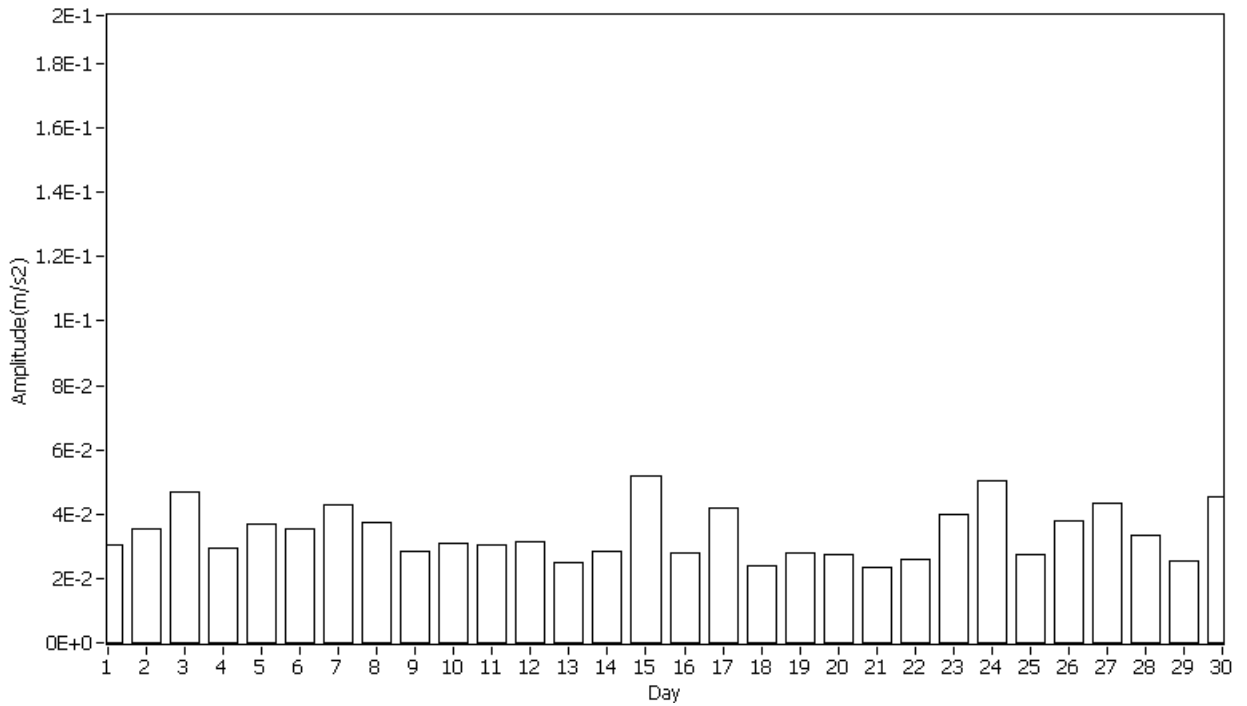


Figura 6.37 – Acelerações laterais máximas ocorridas no mês de Junho

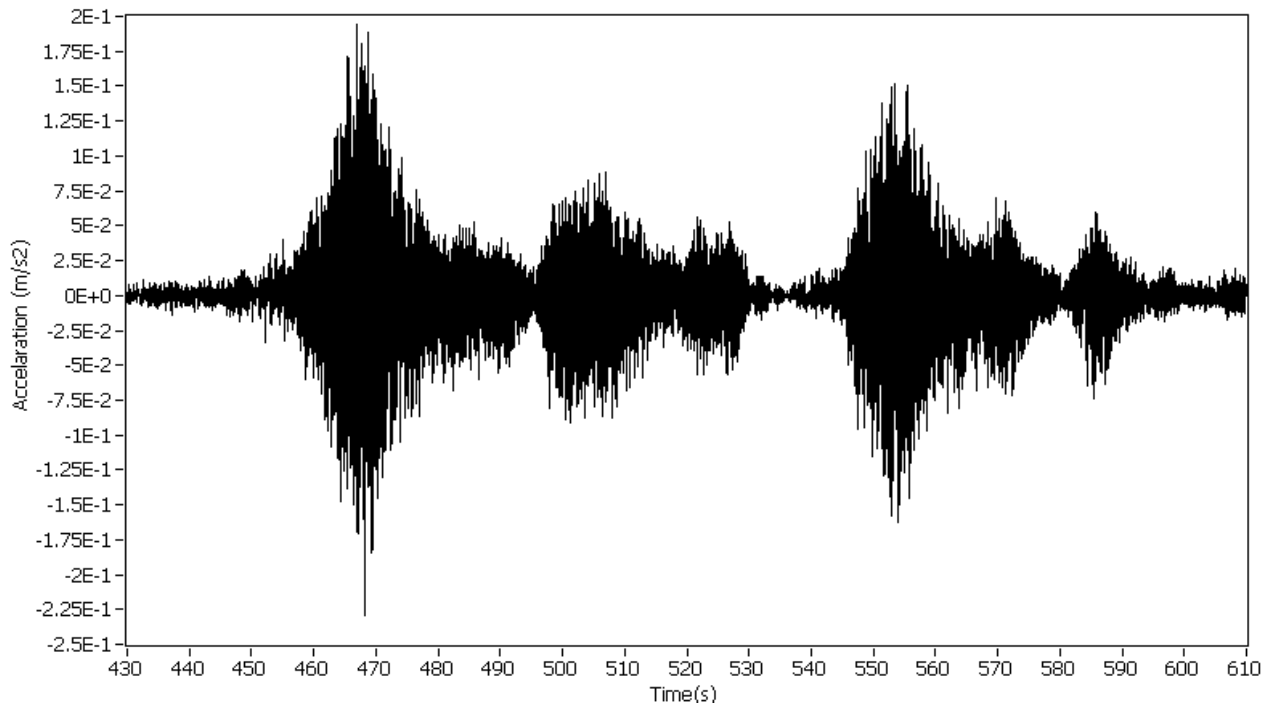


Figura 6.38 - Registro correspondente à aceleração vertical máxima observada no mês de Junho (1 de Junho)

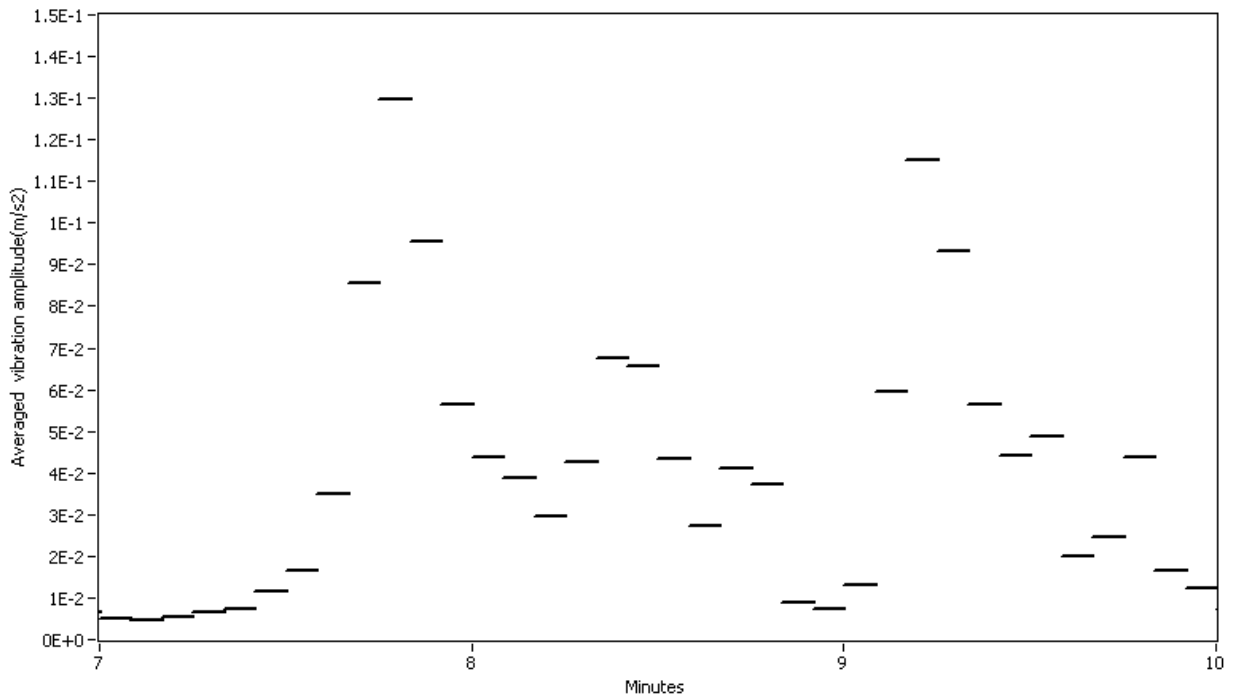


Figura 6.39 - Valores médios dos máximos consecutivos da aceleração vertical em períodos de 5 segundos (1 de Junho)

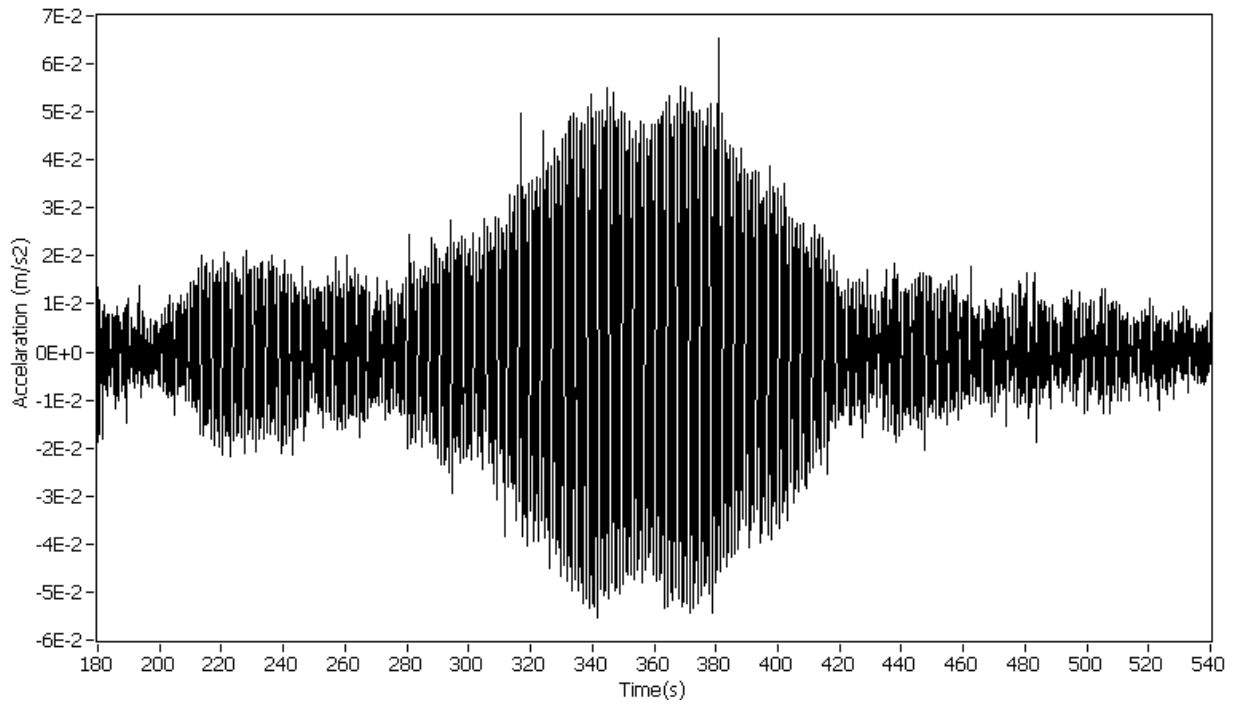


Figura 6.40 – Registo correspondente à aceleração lateral máxima observada no mês de Junho (15 de Junho)

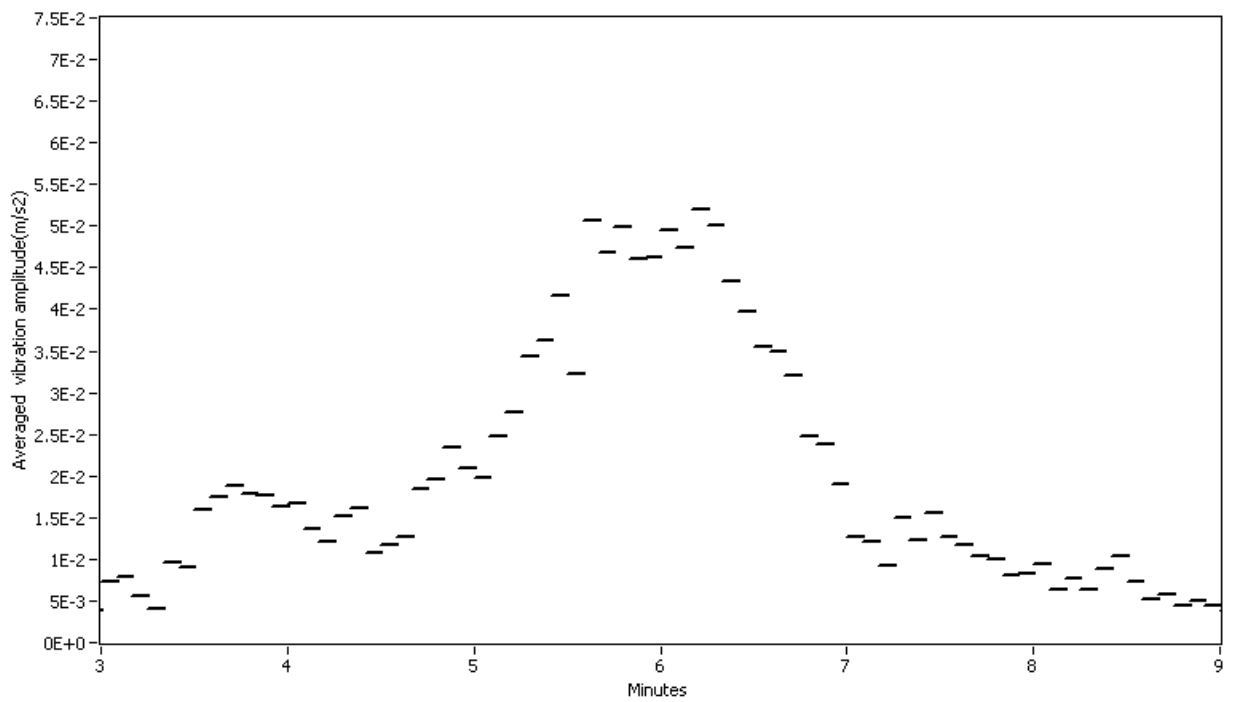


Figura 6.41 – Valores médios dos máximos consecutivos da aceleração lateral em períodos de 5 segundos (15 de Junho)

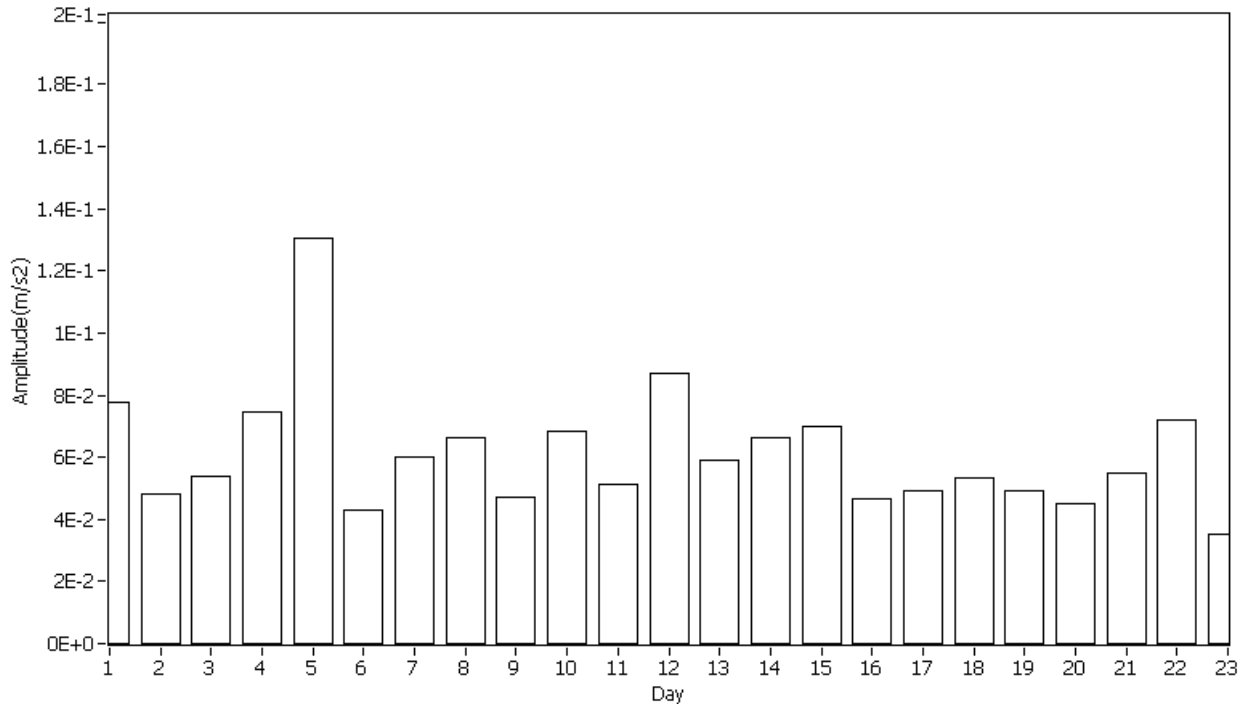


Figura 6.42 – Acelerações verticais máximas ocorridas no mês de Julho

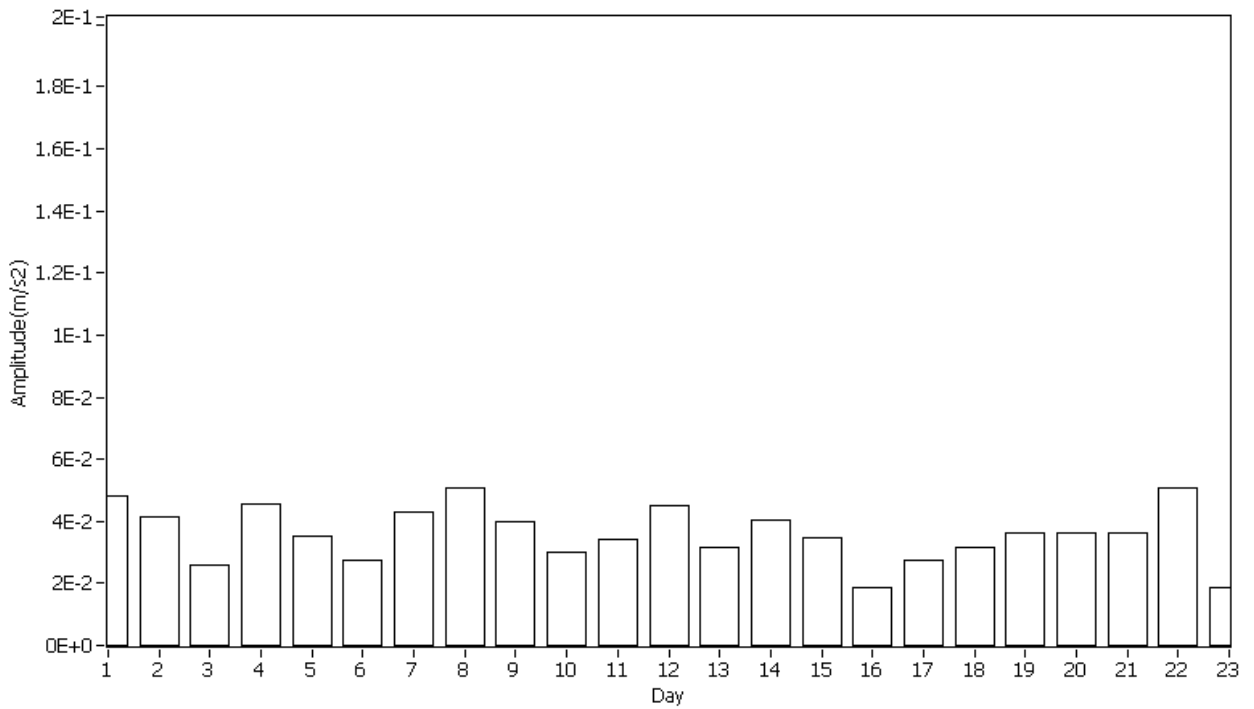


Figura 6.43 – Acelerações laterais máximas ocorridas no mês de Julho

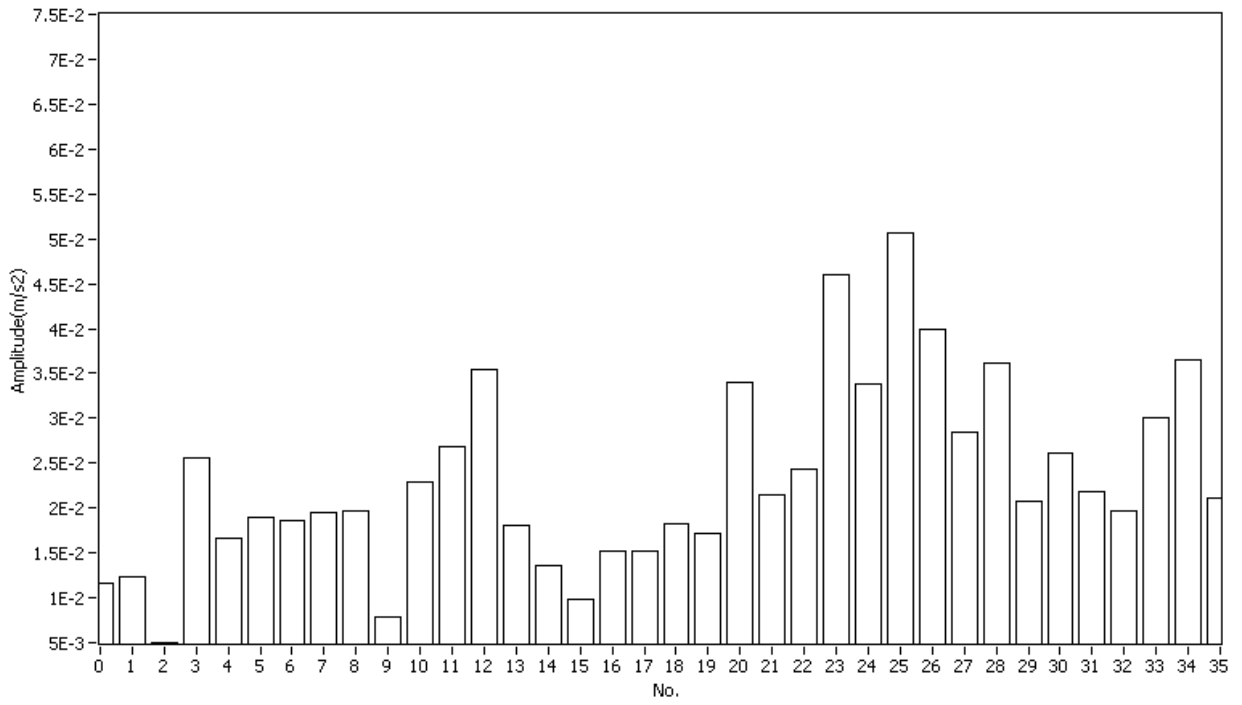


Figura 6.44 – Acelerações laterais máximas ocorridas ao longo do dia 22 de Julho

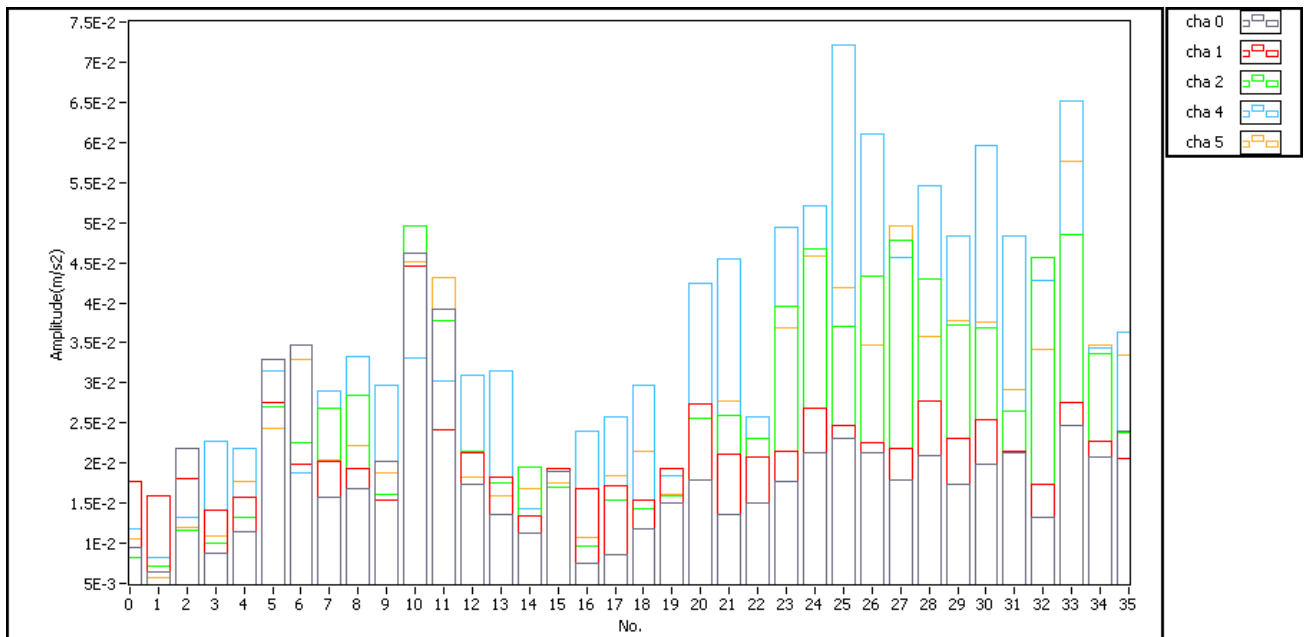


Figura 6.45 – Acelerações verticais máximas ocorridas, em cada canal, ao longo do dia 22 de Julho

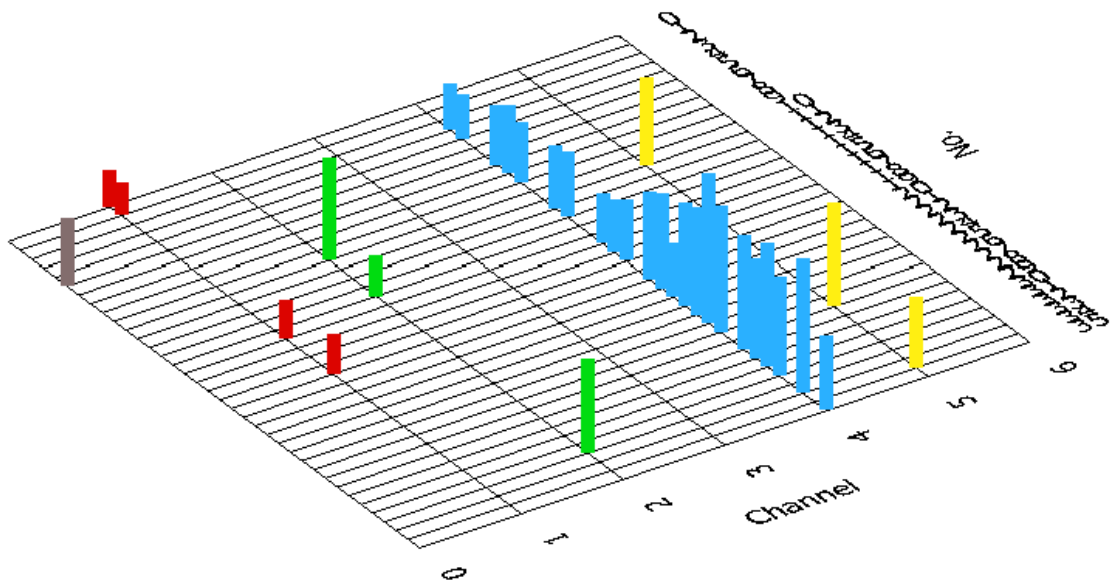


Figura 6.46 – Acelerações verticais máximas ocorridas ao longo do dia 22 de Julho

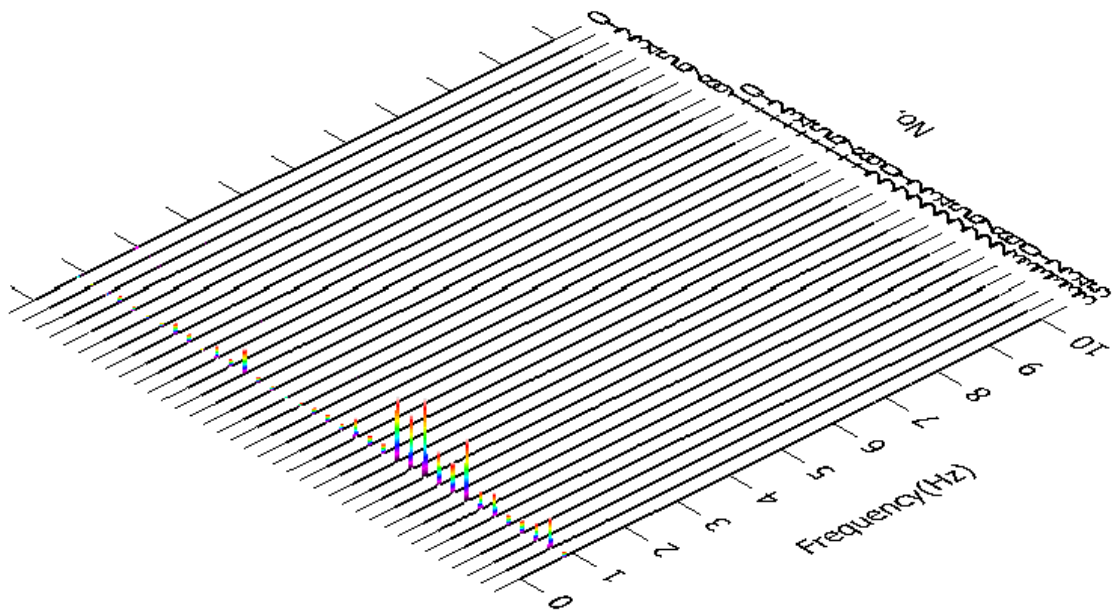


Figura 6.47 – Evolução de densidade espectral de potência relativa a acelerações laterais ao longo do dia 22 de Julho

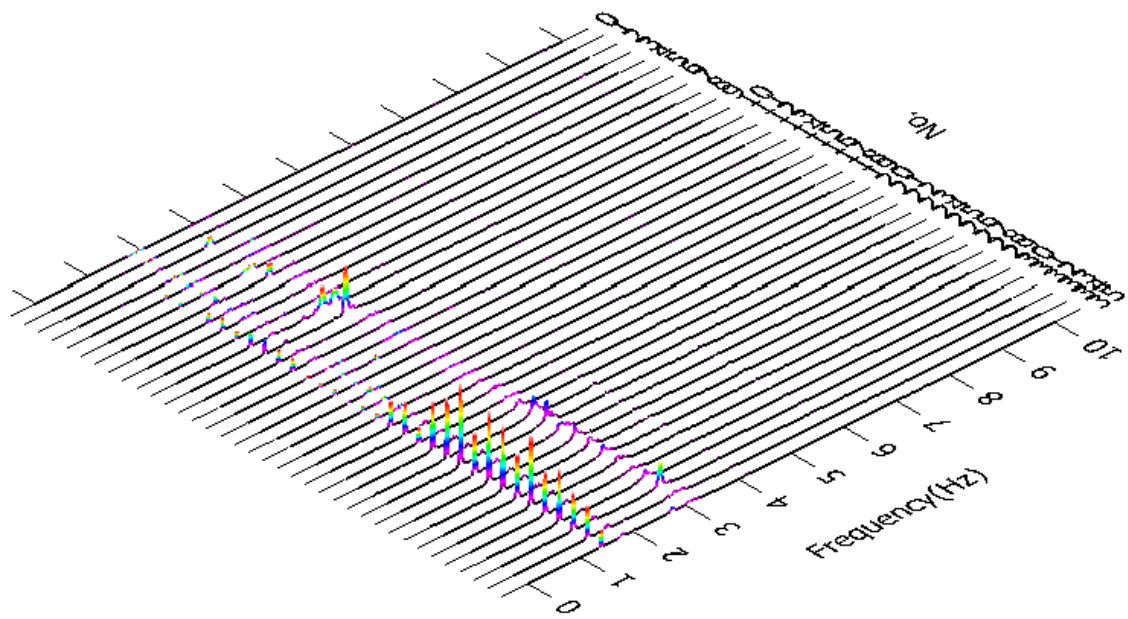


Figura 6.48 – Evolução de densidade espectral de potência relativa a acelerações verticais ao longo do dia 22 de Julho

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 APRECIACÃO GLOBAL DO TRABALHO

Neste trabalho procurou-se fazer uma abordagem aos problemas de controlo de vibrações em Estruturas de Engenharia Civil. A área do controlo de sistemas está ligada tradicionalmente a outros domínios da Engenharia, como é o caso da Engenharia Mecânica, Electrotécnica, Aeronáutica ou Espacial, verificando-se que os assuntos relacionados com este tema não integram em geral o conteúdo programático de disciplinas na área da Engenharia de Estruturas. Quando muito, abordam-se por vezes alguns aspectos básicos relacionados como o controlo, dando ênfase essencialmente à caracterização de sistemas passivos.

Neste contexto, este trabalho procurou apresentar numa linguagem acessível a Engenheiros Civis alguns princípios fundamentais deste vasto tema, com particular relevância para os sistemas activos, que podem ser encarados como o caso geral dos problemas de controlo, na medida em que qualquer outro sistema pode ser dele idealizado ou deduzido. Os assuntos abordados foram tanto quanto possível acompanhados de exemplos sugestivos, envolvendo sistemas de 1 ou de vários graus de liberdade, de modo a que se possam compreender assuntos relacionados, por exemplo, com as acções básicas de controlo, com a análise do lugar das raízes, com o problema da alocação de pólos e dimensionamento de observadores de estado, e com o relacionamento entre sistemas analógicos e digitais.

Ainda assim, ficaram muitos temas de grande interesse por tratar, mas que não se enquadraram na sequência de apresentação dos assuntos abordados, tendo exigido uma selecção criteriosa das matérias de maior interesse no controlo de estruturas. Este foi sem dúvida um dos objectivos alcançados neste trabalho, o qual obrigou a uma incursão relativamente profunda nos assuntos relacionados com o controlo de sistemas para depois se extraírem os conhecimentos com aplicabilidade aos problemas da Engenharia Civil. De facto, as estruturas apresentam determinadas particularidades que sugerem uma abordagem do problema do controlo diferente daquela que é seguida em muitos outros sistemas de maior complexidade. Por exemplo, os sistemas estruturais só têm pólos e zeros imaginários, estando aproximadamente alinhados com o eixo imaginário e inseridos no semi-plano complexo estável. Além disso, com a acção de controlo, pretende-se geralmente que o sistema mantenha o campo de deslocamentos iniciais estáticos, sendo, na maior parte das vezes, suficiente actuar ao nível do amortecimento da estrutura sem necessidade de alterar as suas frequências naturais.

Além desta vertente teórica, procurou-se neste trabalho implementar diversos sistemas de controlo em modelos laboratoriais e estruturas reais, o que possibilitou a aquisição de conhecimentos e experiência necessários para a resolução de muitos dos problemas que se colocam na sua concretização real. Esta componente experimental foi bastante gratificante, na medida em que permitiu ter uma visão mais realista daquilo que é essencial e daquilo que é periférico no controlo de vibrações em estruturas de Engenharia Civil. Além disso, exigiu um esforço adicional em termos de saber lidar com equipamentos, actuadores e instrumentação, bem como com software e hardware de controlo. Também permitiu enfrentar problemas de ordem prática, como por exemplo o surgimento de não-linearidades no comportamento dos modelos

físicos e no desempenho dos sistemas de actuação, a existência e ruído nos sinais e a dificuldade em obter velocidades por derivação numérica dos deslocamentos, a minimização de problemas de tempo de atraso nos algoritmos e na resposta dos actuadores e a eliminação de erros por “spillover”.

O acompanhamento dos trabalhos envolvendo a implementação do sistema de controlo de vibrações na ponte pedonal Pedro e Inês foi igualmente uma experiência enriquecedora, na medida em que possibilitou lidar de perto com as dificuldades associadas à instalação de um sistema passivo composto por TMDs. De facto, apesar destes dispositivos terem em teoria um comportamento linear, na prática levantaram-se alguns problemas no funcionamento horizontal dos aparelhos, associados ao surgimento de atrito nos veios de deslizamento e ao comportamento não-linear dos amortecedores, fazendo reduzir significativamente o nível de eficácia esperado. A implementação do sistema de monitorização de vibrações contribuiu também para o enriquecimento de conhecimentos na área da aquisição e transmissão de sinais, bem como no desenvolvimento de ferramentas de análise e visualização de resultados em ambiente real através da Internet.

7.2 CONCLUSÕES

7.2.1 ESTRATÉGIAS DE CONTROLO

Este trabalho permitiu consolidar e arrumar ideias sobre a concepção e funcionalidade de um sistema de controlo nas suas diversas vertentes. Nesta secção descrevem-se algumas conclusões relativas à implementabilidade de diferentes estratégias de controlo, começando-se por referir que uma boa estratégia para resolver grande parte dos problemas de vibrações em estruturas consiste em actuar ao nível do aumento do amortecimento, sem necessidade de alterar frequências naturais do sistema. Isto porque a resposta dinâmica de uma estrutura é sempre dependente do amortecimento, com particular ênfase para as vibrações harmónicas, onde este factor condiciona sobremaneira a amplitude do movimento, e porque as forças envolvidas no amortecimento da estrutura são de menor amplitude do que as forças de rigidez.

Por conseguinte, estratégias como a realimentação directa da velocidade (DVF), correspondente a um controlador derivativo, funcionam bem na generalidade das situações de controlo de vibrações, sendo efectivamente utilizada por uma grande parte dos sistemas activos em funcionamento. Estratégias que envolvem a alteração simultânea da rigidez e do amortecimento da estrutura só devem ser utilizadas depois de se comprovar que estratégias mais simples, como a referida, não resolvem eficazmente o problema em análise. Por este motivo, a estratégia de alocação de pólos estudada neste trabalho apenas deve ser adoptada nos casos onde se demonstre que os sistemas compostos por pares sensor-actuador colocados não apresentam o desempenho pretendido. Isto porque, apesar desta estratégia ser mais poderosa que a anteriormente referida, é mais complexa, exigindo o desenvolvimento de um modelo numérico rigoroso do sistema, a medição do vector de estado (se não puder ser medido directamente

exige ainda o desenvolvimento de um observador de estado devidamente calibrado), por não garantir a estabilidade incondicional do sistema e por ser vulnerável a problemas de “spillover”. Estes aspectos menos positivos podem todavia ser atenuados se se pretender alocar os pólos em correspondência com a variação apenas do amortecimento do sistema, sem alterar frequências naturais.

A utilização de estratégias baseadas em procedimentos óptimos, como o controlo óptimo, é ainda menos interessante nos casos gerais de aplicação a estruturas de Engenharia Civil. Isto porque além dos inconvenientes referidos anteriormente, fornece uma solução matemática para o problema do controlo, perdendo-se por vezes a intuição e a razoabilidade relativamente a aspectos práticos da sua aplicação. Além disso, este tipo de estratégias não conduz a valores verdadeiramente óptimos, mas pseudo-óptimos, em virtude dos pressupostos que estão na base da sua formulação não serem sempre válidos, como é o caso das considerações feitas sobre o tipo de acção exterior. Nestas estratégias é ainda necessário ensaiar um conjunto alargado de matrizes de peso (usualmente designadas de Q e R) para chegar ao controlador ideal, escolha que é fortemente dependente do modelo numérico utilizado e, portanto, de legitimidade questionável. Acresce ainda o facto de que, em grande parte das aplicações, os objectivos a atingir baseiam-se na fixação de valores concretos das características dinâmicas pretendidas para a estrutura, sendo óbvio nestes casos que se está perante um problema de alocação directa dos pólos e não perante um problema de optimização.

Em resumo, pode concluir-se que, na implementação real de um sistema de controlo, é preferível utilizar estratégias mais simples e robustas que funcionem efectivamente, do que estratégias mais complexas e rebuscadas, cuja concretização real pode ser difícil, dispendiosa e por vezes impraticável. Nesse sentido, a opção por um controlador derivativo baseado num par (ou pares) de sensor-actuador colocados constitui uma boa alternativa a este tipo de estratégias, na medida em proporciona robustez da estabilidade e de desempenho na maioria dos casos práticos, sendo relativamente insensível às variações dos parâmetros dinâmicos que afectam todas as estruturas reais, assim como é imune a problemas de “spillover”. Além disso, quando integrados em sistemas que podem ser considerados lineares, como sucede na grande parte dos problemas associados a estruturas em serviço, e quando implementados em esquemas do tipo SISO, possibilitam a utilização de ferramentas poderosas de análise, como por exemplo o diagrama do lugar das raízes. Neste caso, num só gráfico é possível observar o efeito do controlo na dinâmica global do sistema, permitindo quantificar qualitativamente e quantitativamente a acção sobre cada modo de vibração, ao mesmo tempo que se retiram conclusões sobre a estabilidade do sistema.

7.2.2 SISTEMAS DE ACTUAÇÃO

Apesar dos sistemas de actuação compostos por diagonais activas e cabos activos serem potencialmente um bom sistema de aplicação de forças em estruturas de Engenharia Civil, na prática não têm sido muitos utilizados. A razão principal é porque na maioria dos casos não podem ser adaptados nas

zonas de componentes modais máximas dos modos de vibração a controlar, por razões arquitectónicas ou por não ser fisicamente viável a adaptação à estrutura. Além disso, podem ocasionar problemas de instabilidade ou de vibrações excessivas nos próprios elementos, como é o caso da possibilidade de actuadores integrados em tirantes de pontes.

Por este motivo, tem-se privilegiado a utilização de sistemas de actuação inerciais, como os actuadores de massas activas. Estes dispositivos têm a vantagem de poderem ser posicionados em qualquer ponto da estrutura, incluindo nos locais mais favoráveis em termos de componentes dos modos de vibração condicionantes, podendo também ser facilmente camuflados no interior das construções sem implicar qualquer impacto visual.

Todavia, estes sistemas de actuação constituem sistemas não-colocados, exigindo um estudo acautelado da sua integração em estruturas por conduzirem potencialmente a situações de instabilidade. Efectivamente, os AMDs introduzem um par de pólos e zeros no sistema, os quais, quando adicionados aos pólos e zeros iniciais da estrutura, podem destruir a propriedade da alternância de pólos e zeros própria dos sistemas colocados (“pole-zero flipping”). Como consequência, existe a possibilidade de, mesmo para valores de ganho pequenos, pólos da estrutura serem transportados para o semi-plano complexo direito, originando a instabilidade de alguns modos de vibração. Para minimizar este problema, é necessário que a frequência própria do AMD seja suficientemente inferior à primeira frequência natural da estrutura, de modo a que o “pole-zero flipping” apenas afecte a estabilidade do próprio aparelho e não do sistema estrutural, e que o dispositivo possua um elevado nível de amortecimento, de tal forma que se consiga obter a margem de ganho necessária para amortecer adequadamente os modos de vibração relevantes.

7.2.3 ADEQUABILIDADE DOS SISTEMAS ACTIVOS

O número de aplicações de sistemas activos é seguramente inferior ao de sistemas passivos, essencialmente porque constituem uma solução tecnologicamente mais avançada e mais complexa, e porque exigem instrumentação, equipamentos e actuadores de custos elevados. Além disso, é difícil suplantarem as vantagens dos sistemas passivos que passam pelo reduzido custo, elevada fiabilidade e pouca manutenção. No entanto, os sistemas passivos apresentam inconvenientes que fazem com que sejam uma opção ineficiente em determinados tipos de problemas, particularmente devido à falta de adaptabilidade que os caracteriza.

Nestas situações, a utilização de sistemas activos pode ser vantajosa na medida em que constitui uma solução que responde em tempo real às vibrações da estrutura, com uma acção de controlo baseada na medição da resposta efectiva do sistema. A sua implementação pode ser particularmente interessante em estruturas cuja dinâmica seja caracterizada por múltiplos modos de vibração relevantes ou estruturas que apresentem características dinâmicas sujeitas a alguma variabilidade. Por esta razão, os sistemas activos

têm sido implementados em edifícios altos, os quais possuem frequentemente diversos modos de vibração críticos de flexão ou de torção, fazendo com que o sistema de controlo actue eficazmente sobre o modo que numa determinada altura seja o preponderante, ou mesmo quando actuam diversos modos em simultâneo. Os sistemas activos também têm sido utilizados em pilares de pontes de grande vão durante a fase construtiva, durante a qual estes elementos podem apresentar uma esbelteza tal que potenciam a sua vibração em qualquer uma das suas frequências naturais, em especial quando expostos à acção de ventos fortes. Além disso, apresentam variações de frequências significativas, devido à permanente evolução em altura, de tal modo que a utilização de sistemas passivos como TMDs se torna impraticável.

Os sistemas activos poderão ser também utilizados em estruturas sujeitas à acção de cargas móveis com características de frequência variáveis, como é o caso de lajes de edifícios ou pontes pedonais flexíveis. Nestes casos, as estruturas podem vibrar em frequências distintas consoante a acção dinâmica que lhes é aplicada, podendo atingir amplitudes do movimento elevadas em especial se ocorrerem fenómenos de ressonância. Para resolver estes problemas de vibrações, a utilização de sistemas passivos como amortecedores viscosos obriga por vezes a uma alteração significativa da arquitectura da estrutura, além do facto de normalmente não se atingir o nível de eficácia desejado, por se tirar partido de velocidades relativas em vez de absolutas. A opção por TMDs pode constituir uma boa solução de controlo, na medida em que são bastante eficazes para cargas harmónicas, existindo um conjunto significativo de estruturas deste género em todo o mundo controladas com estes dispositivos. Todavia, existindo vários modos problemáticos serão necessários pelo menos tantos TMDs quanto o número desses modos, sendo corrente até a utilização de vários TMDs para o controlo de cada um deles. Além disso, estes dispositivos passivos para funcionarem correctamente têm de estar devidamente sintonizados para a frequência de vibração, perdendo um elevado nível de eficiência mesmo para pequenos desajustes. A opção por um sistema activo composto por AMDs poderia nestes casos constituir uma solução alternativa aos sistemas passivos descritos, na medida em que cada aparelho pode controlar simultaneamente vários modos de vibração, possuindo também a vantagem de serem imunes aos problemas de sintonização.

Apesar das vantagens e desvantagens referidas acerca do controlo activo de vibrações, estes sistemas apresentam o inconveniente de não serem tão fiáveis como os sistemas passivos. Efectivamente, a ocorrência de avarias ou as falhas de energia eléctrica tornam os sistemas activos inoperantes, de tal modo que a sua utilização deve restringir-se a problemas de estruturas em serviço, não devendo ser utilizados nos casos em que esteja em causa a segurança estrutural. Por esta razão, estes sistemas não devem ser empregues na sua forma pura nos problemas de Engenharia Sísmica a não ser que façam parte de uma combinação com outro sistema de controlo adicional, formando um sistema de controlo híbrido. Na realidade, é no desenvolvimento dos sistemas híbridos onde se têm observado inúmeras implementações de sistemas activos, nomeadamente na sua conjugação com TMDs constituindo os HMDs “Hybrid Mass Dampers”. Neste caso, o sistema activo ajuda a manter a sintonização adequada do aparelho para a

frequência de vibração da estrutura. Em situações esporádicas, mesmo que a componente activa falhe, pelo menos garante-se o funcionamento do sistema passivo.

7.3 PERSPECTIVAS DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Sendo a área do controlo de vibrações um tema muito vasto, não será difícil encontrar possíveis evoluções deste trabalho, seja no âmbito dos sistemas passivos, activos, semi-activos ou híbridos. No entanto, dada a ênfase e o interesse demonstrados pelos sistemas activos, uma das possibilidades será aproveitar os conhecimentos adquiridos na vertente teórica e experimental, na tentativa de implementar sistemas de controlo deste género em pequenas estruturas reais, como pontes pedonais ou lajes, procurando sempre manter a exequibilidade e bom senso exigidos neste tipo de solução.

Por outro lado, existe igualmente interesse em fazer evoluções na área do controlo semi-activo, a qual não foi devidamente explorada neste trabalho por obrigar a uma abordagem não-linear completamente distinta daquela que foi seguida. No entanto, este tipo de solução tem inúmeras potencialidades, suscitando actualmente muitos projectos de investigação por todo o mundo. No caso da investigação levada a efeito no Laboratório de Vibrações e Monitorização de Estruturas da FEUP (VIBEST), este tema é sem dúvida um dos mais promissores nesta área, na medida em que já existem os equipamentos e dispositivos semi-activos necessários para concretizar implementações de sistemas deste género.

ANEXOS

DESENHOS DE EXECUÇÃO DOS MODELOS LABORATORIAIS

ANEXO I

Modelo de 1 piso

ANEXO II

Amortecedor de massa passiva/activa

ANEXO III

Modelo de 3 pisos

ANEXO IV

Mesa vibratória

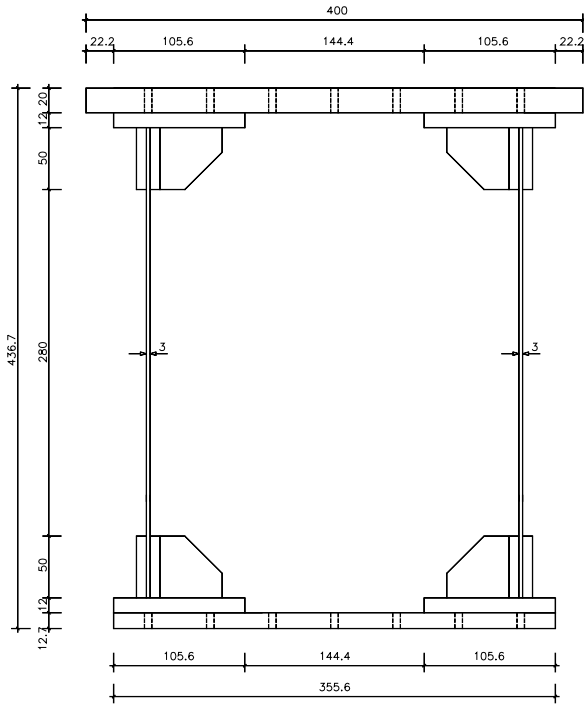
ANEXO V

Diagonal activa

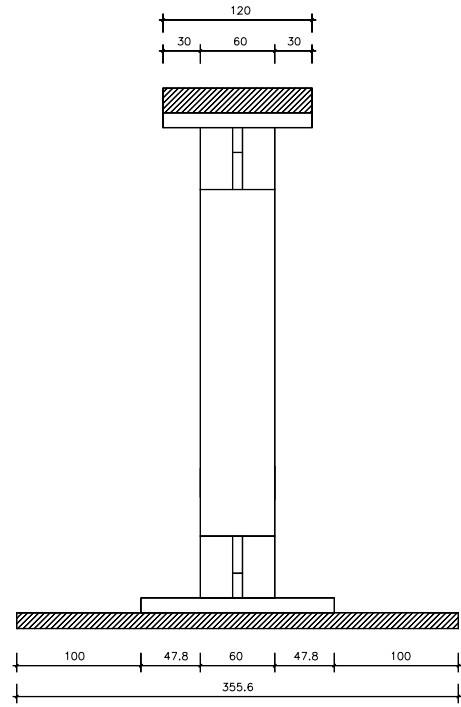
ANEXO VI

Pêndulo invertido

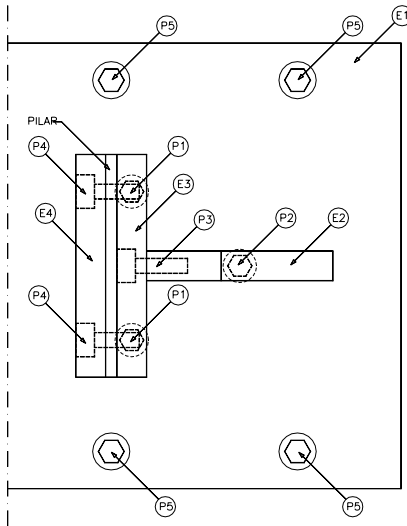
ANEXO I – Modelo de 1 piso



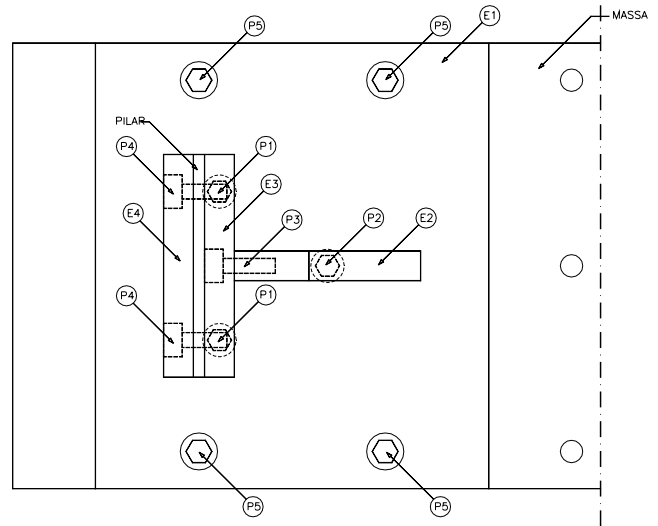
ALÇADO



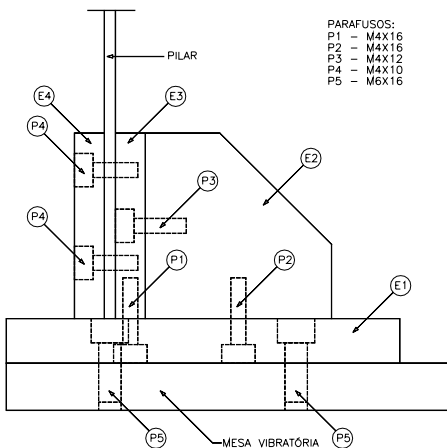
CORTE TRANSVERSAL



PORMENOR DO APOIO INFERIOR
(PLANTA)

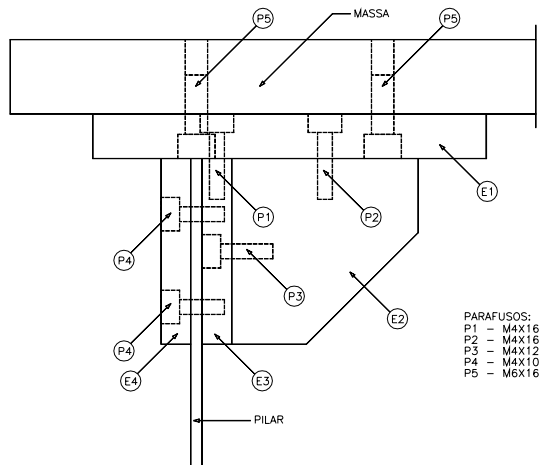


PORMENOR DO APOIO SUPERIOR
(VISTA DE BAIXO)



PORMENOR DO APOIO INFERIOR
(ALÇADO)

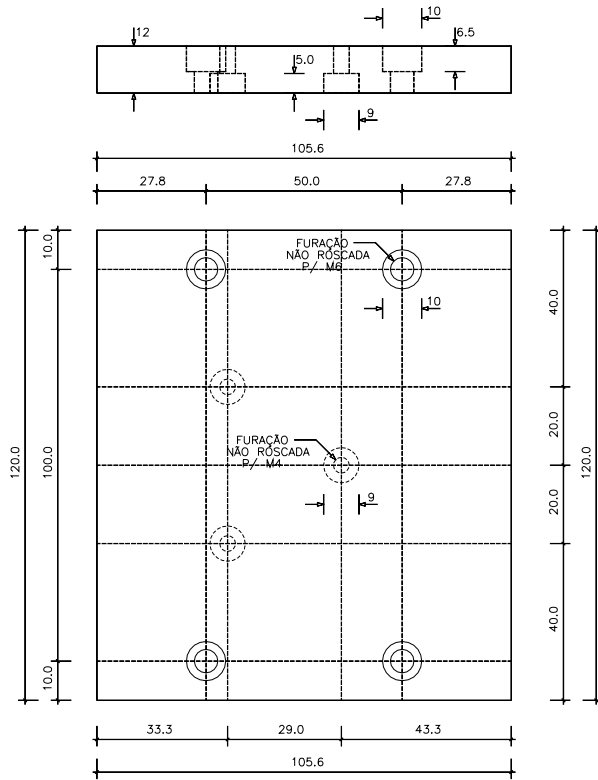
PARAFUSOS:
P1 – M4X16
P2 – M4X16
P3 – M4X12
P4 – M4X10
P5 – M6X16



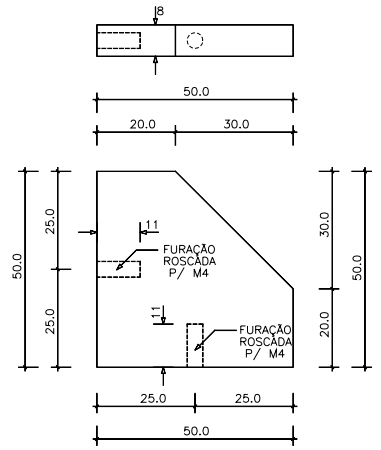
PORMENOR DO APOIO SUPERIOR
(ALÇADO)

PARAFUSOS:
P1 – M4X16
P2 – M4X16
P3 – M4X12
P4 – M4X10
P5 – M6X16

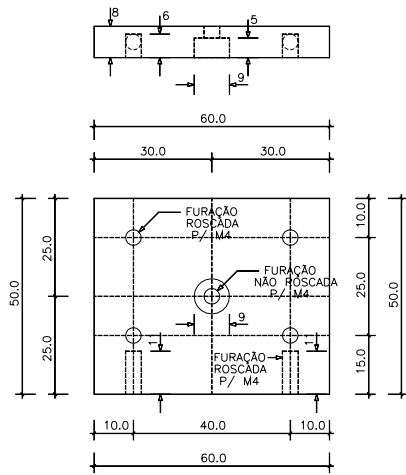
ANEXO I – Modelo de 1 piso



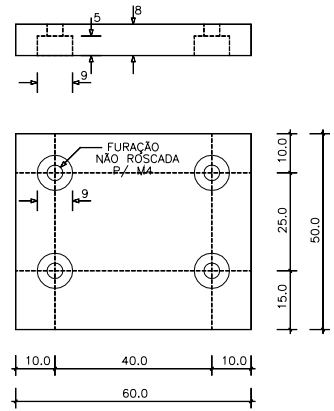
ELEMENTO E1



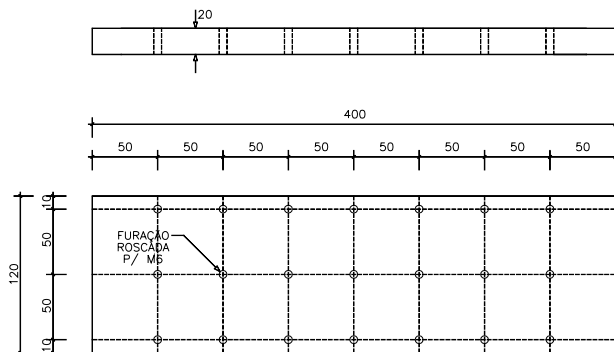
ELEMENTO E2



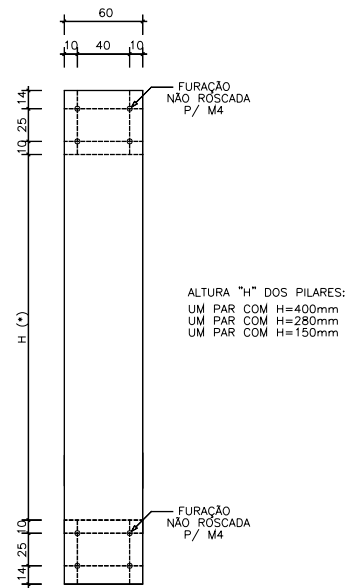
ELEMENTO E3



ELEMENTO E4

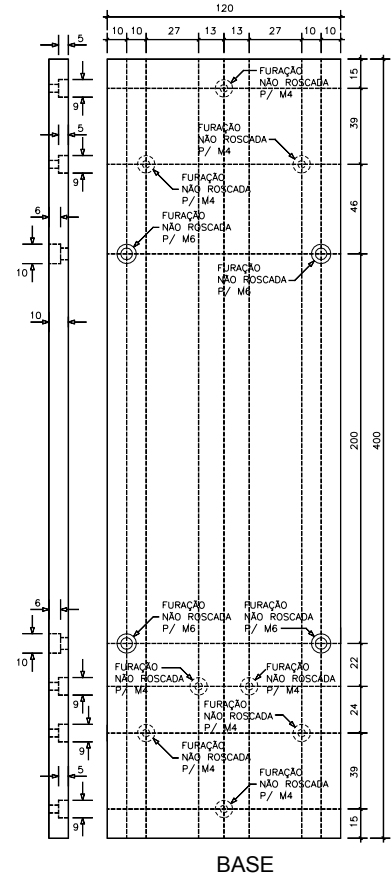
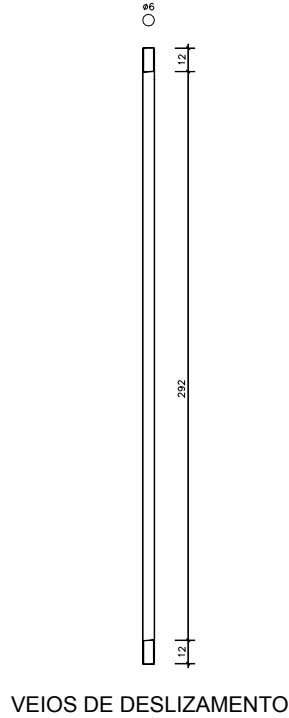
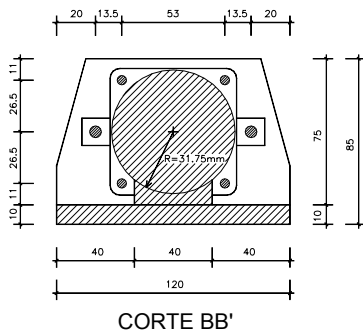
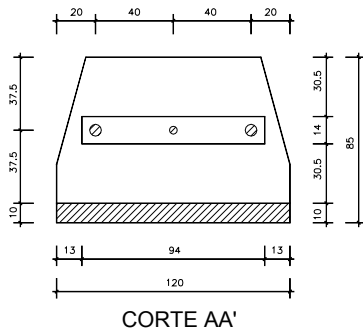
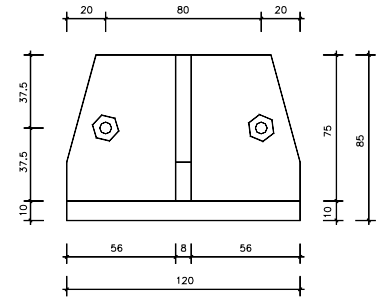
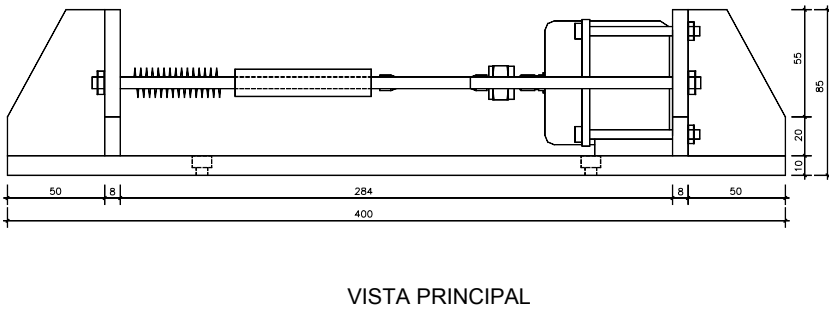
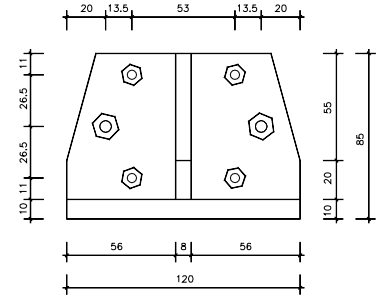
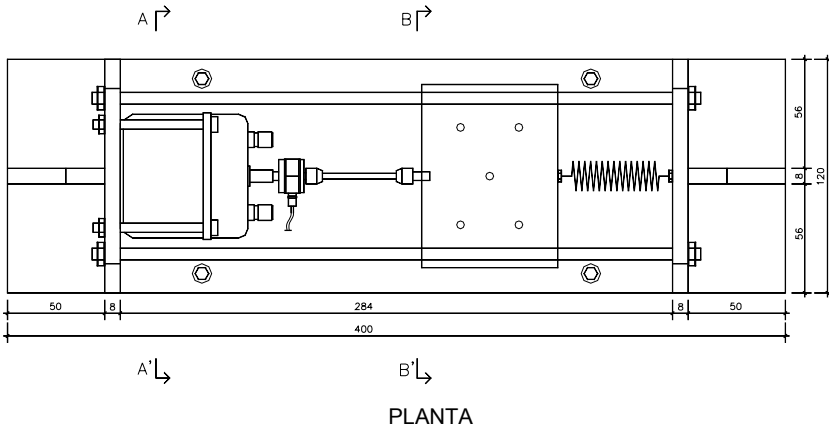


PORMENOR DA MASSA DO PISO

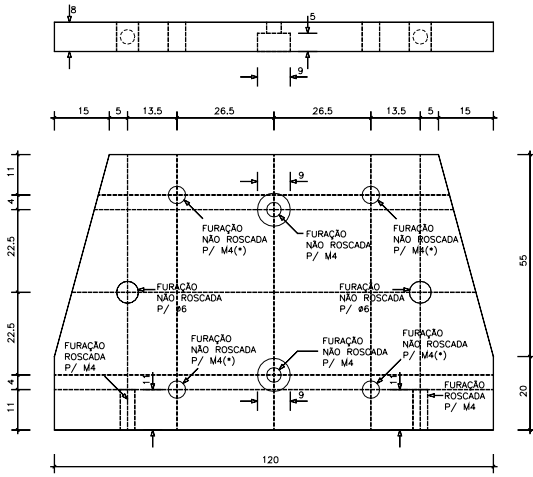


PORMENOR DOS PILARES

ANEXO II – Amortecedor de massa passiva/ativa

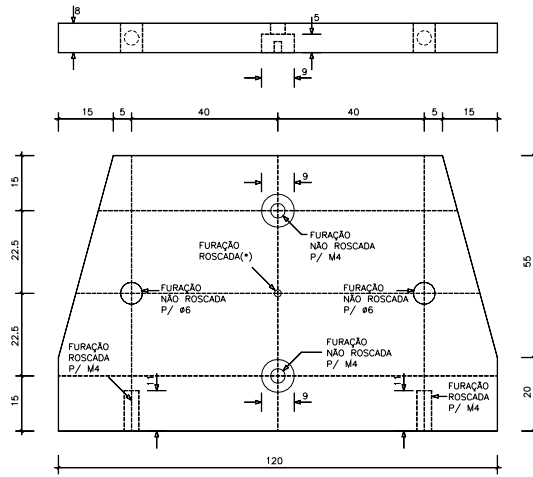


ANEXO II – Amortecedor de massa passiva/ativa



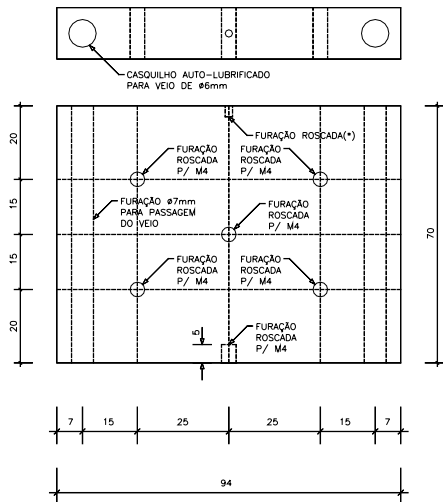
(*) A CONFIRMAR DE ACORDO COM PARAFUSOS UTILIZADOS

PLACA DE REACÇÃO (ESQ)



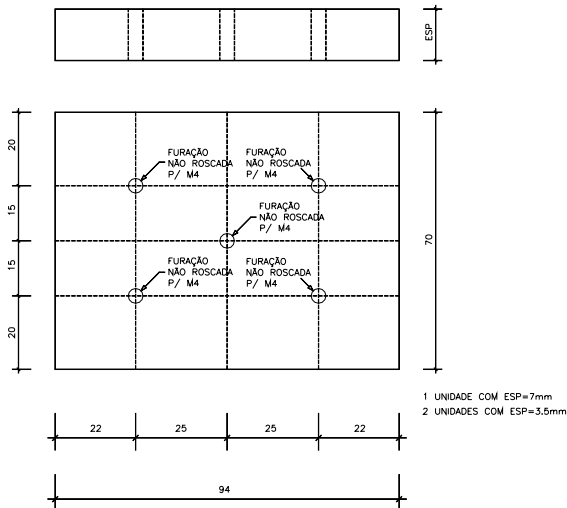
(*) A DEFINIR DE ACORDO COM PARAFUSOS A UTILIZAR NA FIXAÇÃO DA MOLLA

PLACA DE REACÇÃO (DIR)

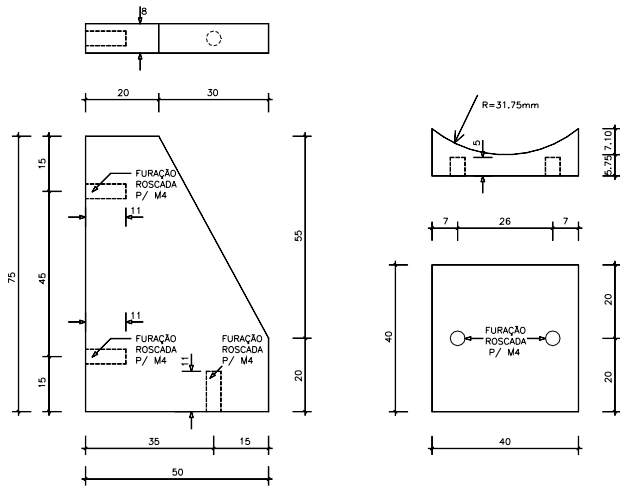


(*) A DEFINIR DE ACORDO COM PARAFUSOS A UTILIZAR NA FIXAÇÃO DA MOLLA

MASSA ACTIVA

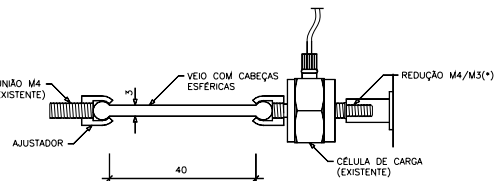


MASSAS ADICIONAIS



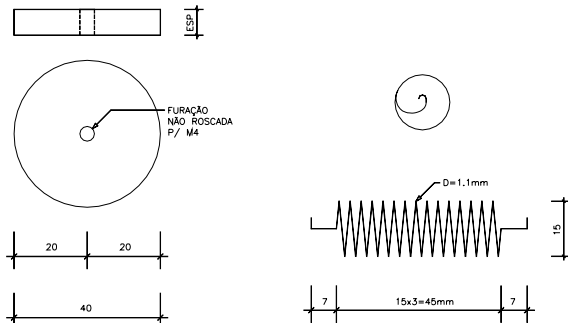
ESQUADROS

BASE DE APOIO DO EXCITADOR



(*) A CONFIRMAR

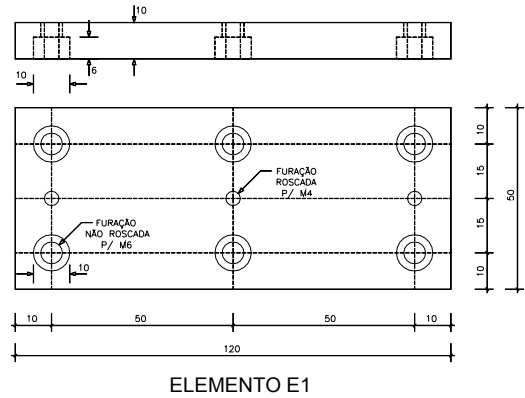
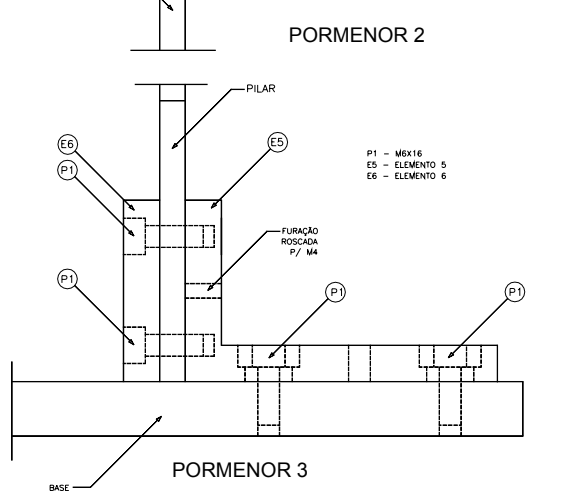
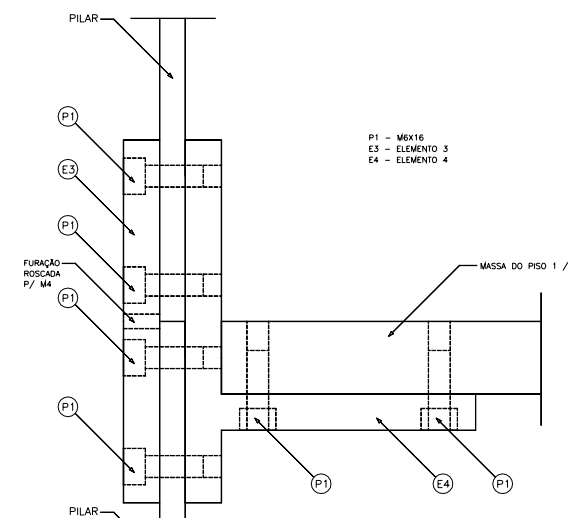
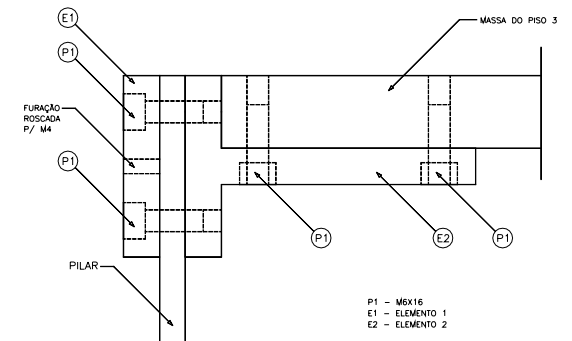
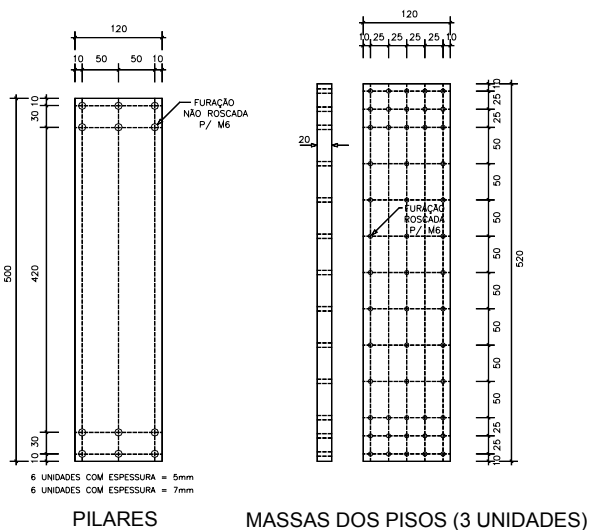
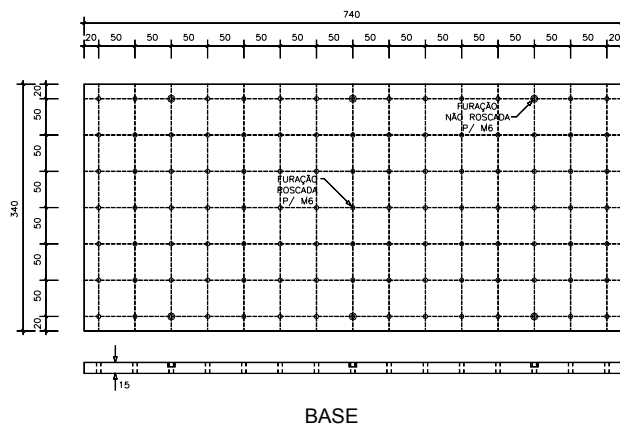
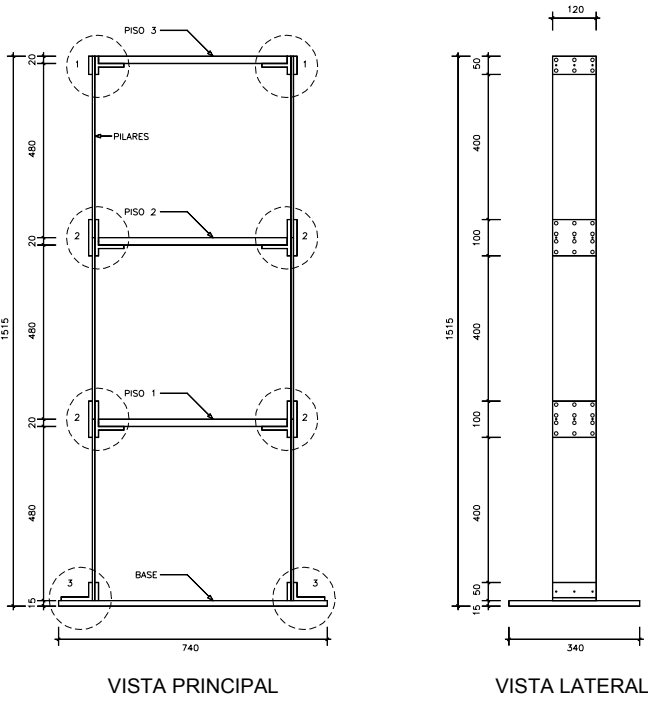
VEIO DE TRANSMISSÃO



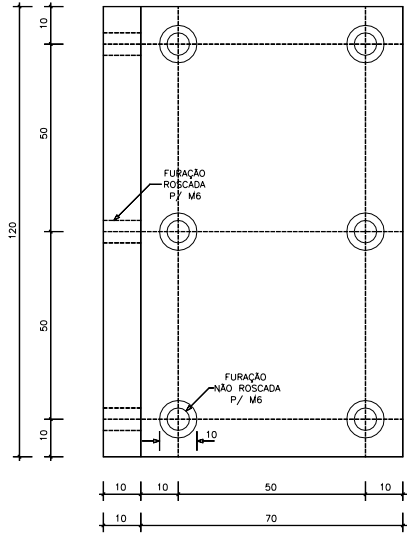
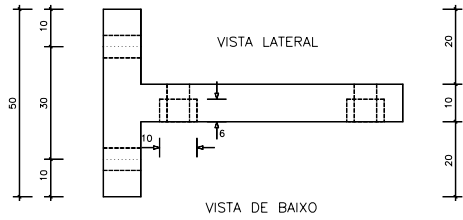
1 UNIDADE COM ESP=9mm
2 UNIDADES COM ESP=4,5mm
2 UNIDADES COM ESP=1,5mm

PORMENOR DA MOLLA

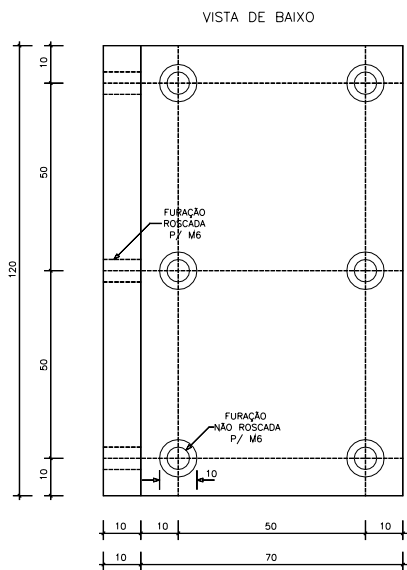
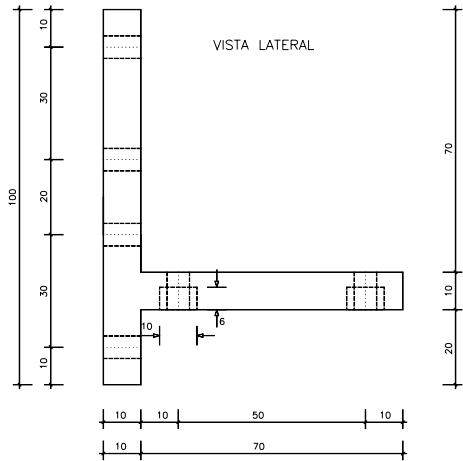
ANEXO III – Modelo de 3 pisos



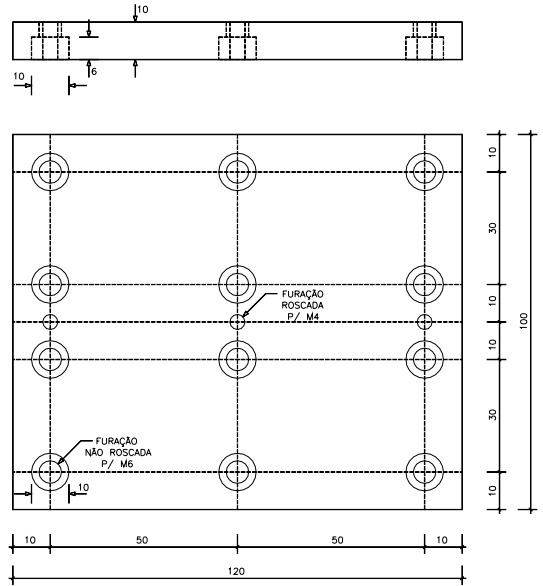
ANEXO III – Modelo de 3 pisos



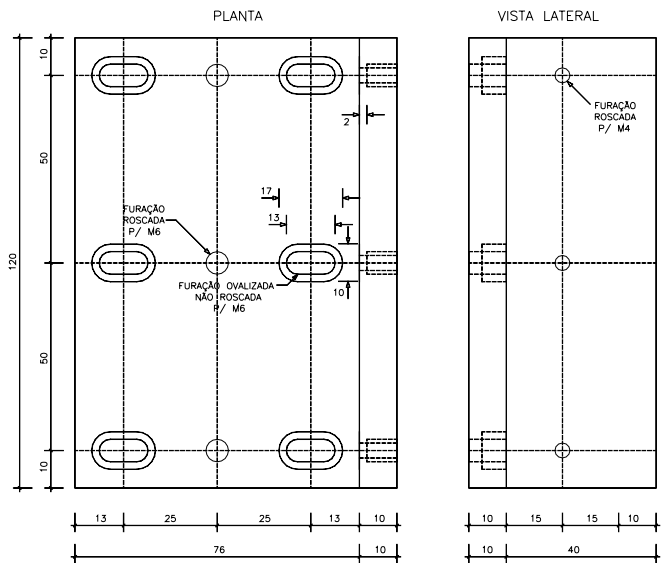
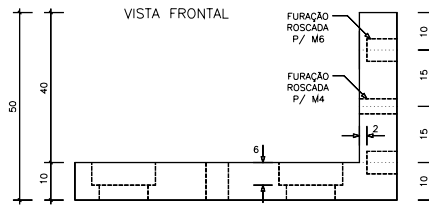
ELEMENTO E2



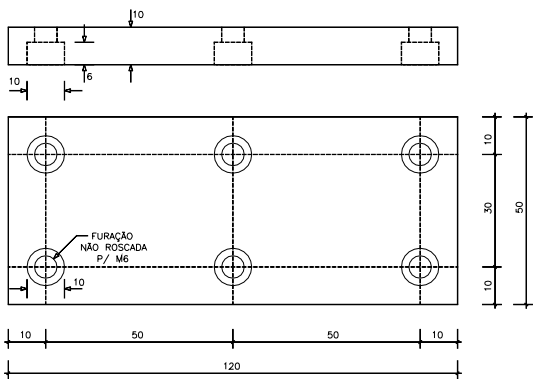
ELEMENTO E4



ELEMENTO E3

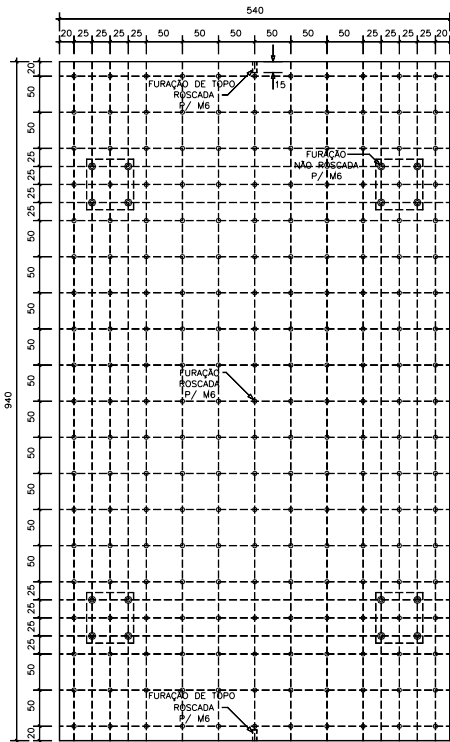


ELEMENTO E5

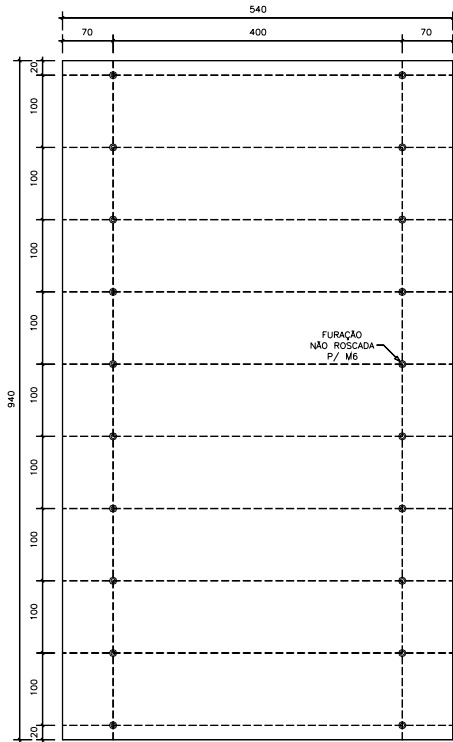


ELEMENTO E6

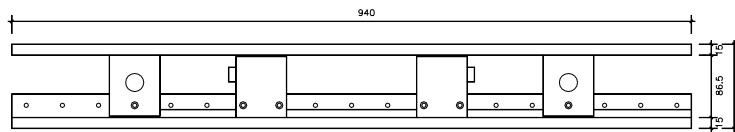
ANEXO IV – Mesa vibratória



PLANTA

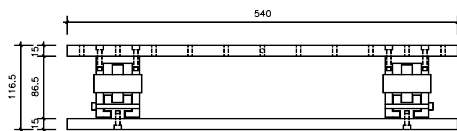


VISTA DE BAIXO

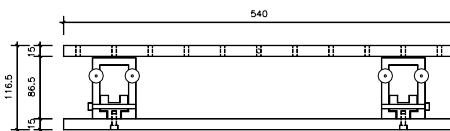


VISTA LATERAL

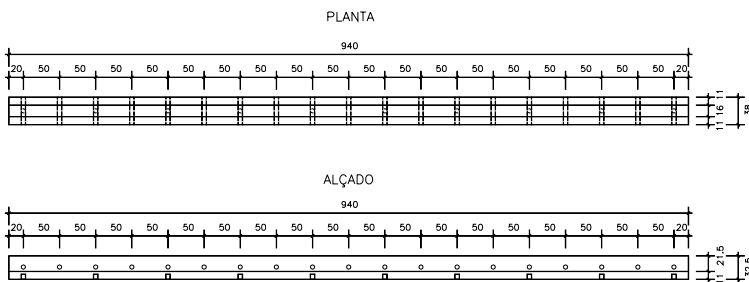
CORTE TRANSVERSAL PELOS DESLIZADORES



CORTE TRANSVERSAL PELOS LIMITADORES DE DESLOCAMENTO

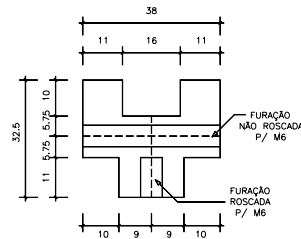


CORTES TRASVERSAIS

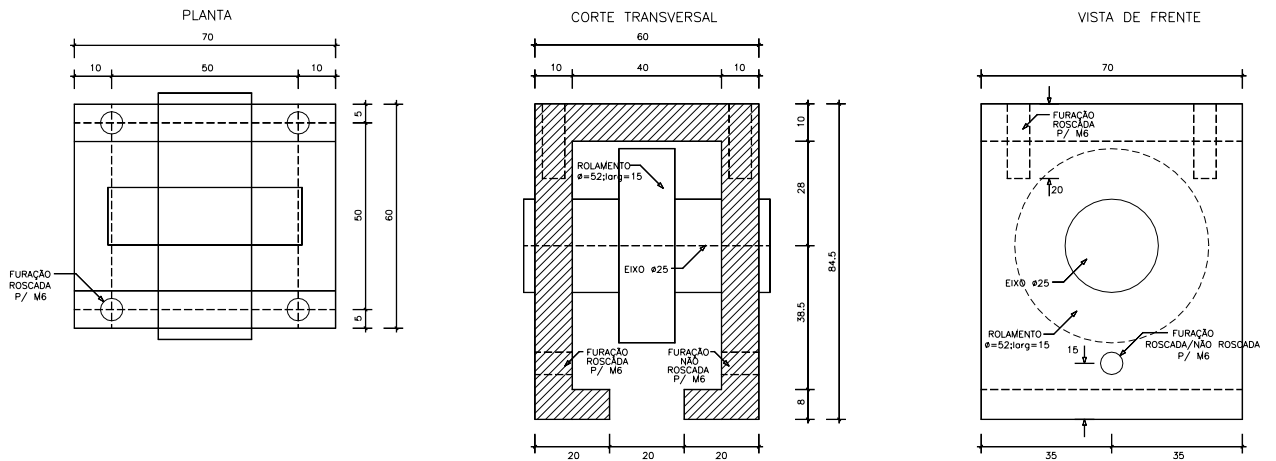


GUIAS

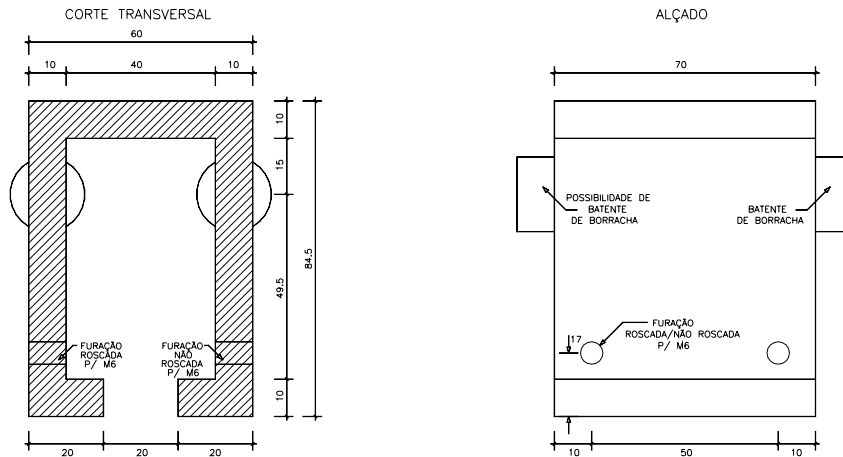
CORTE TRANSVERSAL



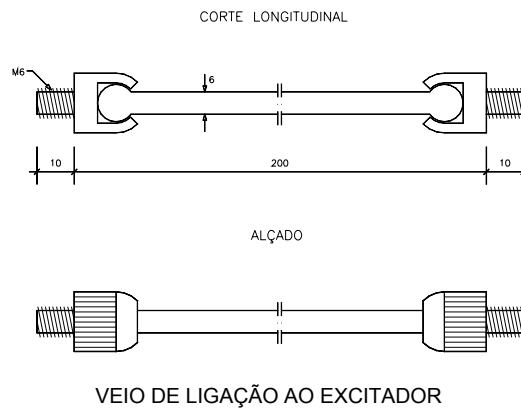
ANEXO IV – Mesa vibratória



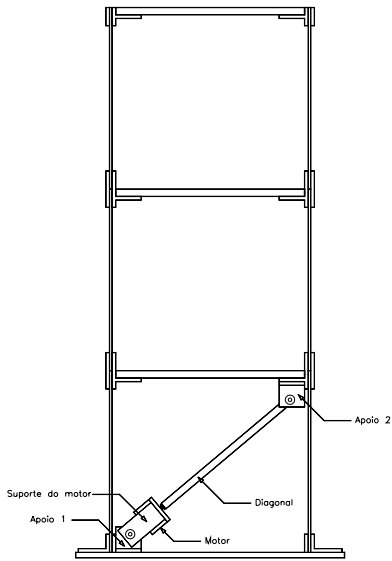
PORMENOR DOS DESLIZADORES



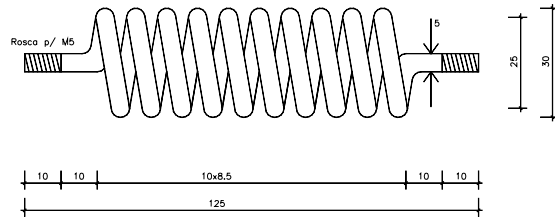
PORMENOR DOS LIMITADORES DE DESLOCAMENTO



ANEXO V – Diagonal activa

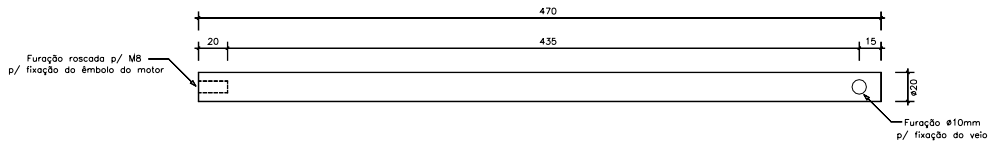


PÓRTICO COM A DIAGONAL ACTIVA

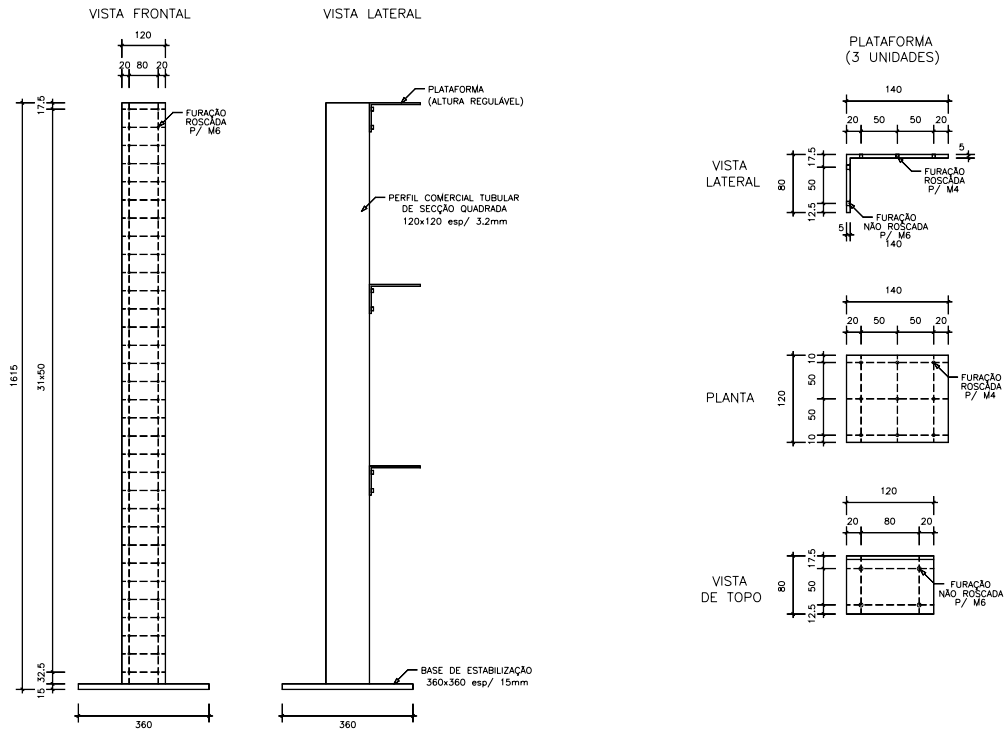


DADOS NUMÉRICOS:
 Diâmetro da secção transversal: 5mm
 Passo: 8,5mm
 N° de voltas: 10
 Diâmetro médio da mola: 25mm
 Diâmetro exterior da mola: 30mm

MOLAS ADAPTADAS À MESA VIBRATÓRIA

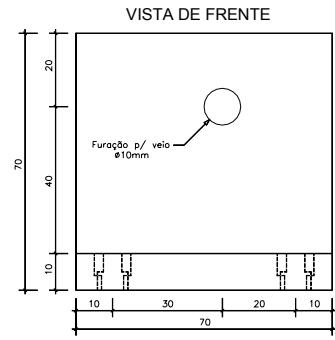
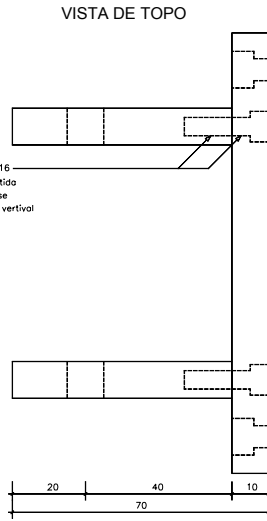
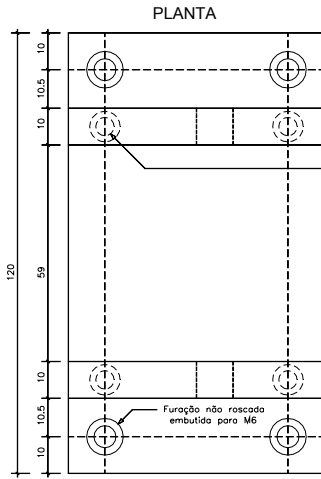


BARRA DIAGONAL

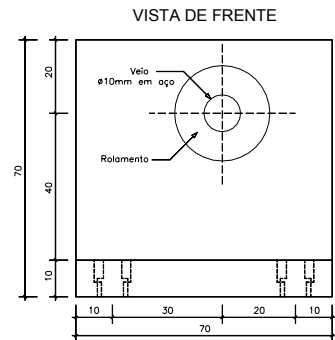
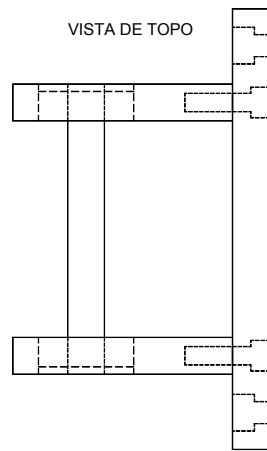
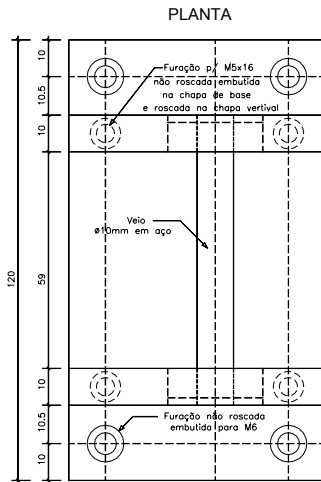


TORRE DE SUPORTE DOS SENSORES

ANEXO V – Diagonal activa

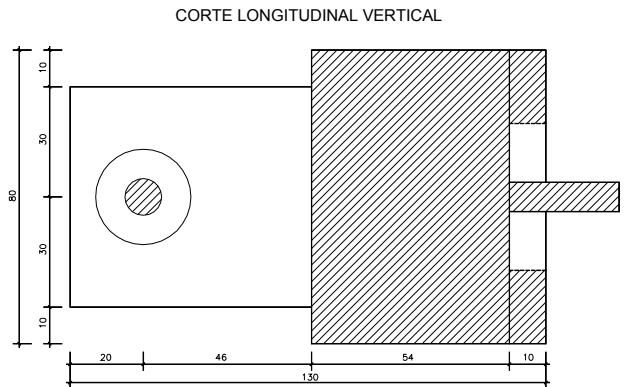
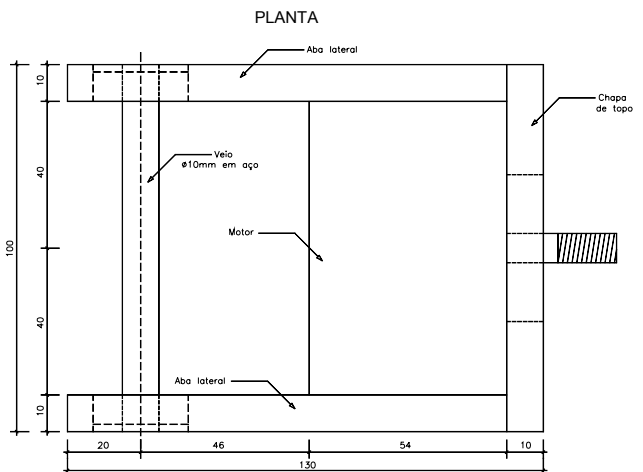
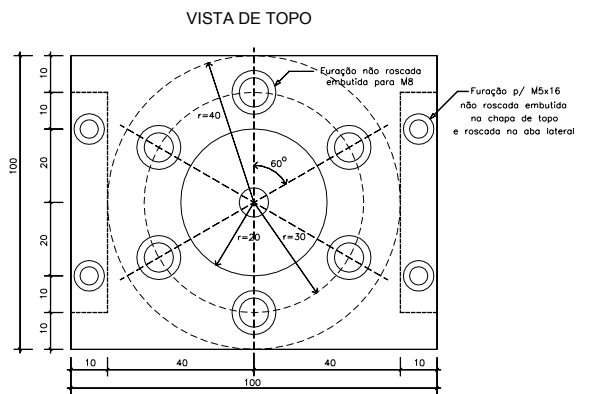
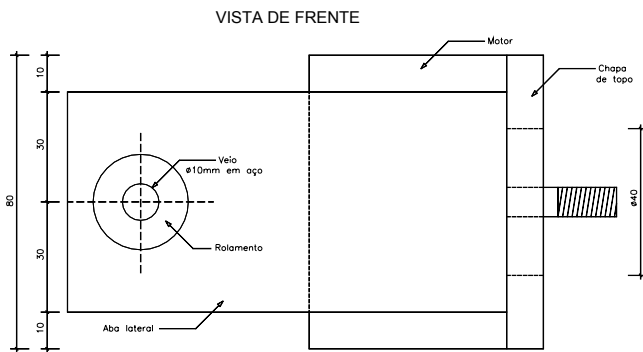


APOIO 1



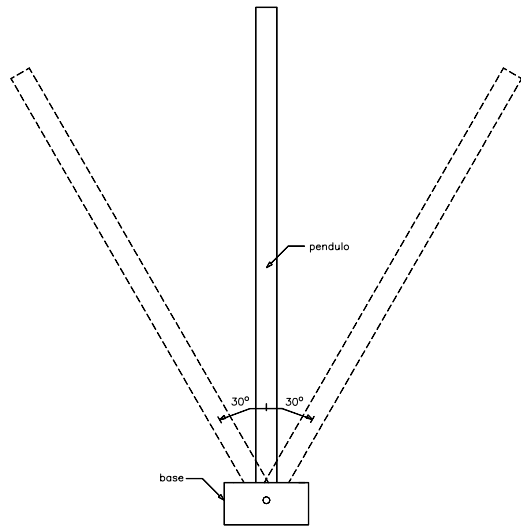
ROLAMENTOS:
 Diâmetro interior = 10mm
 Diâmetro exterior = 26mm
 Largura = 8mm

APOIO 2

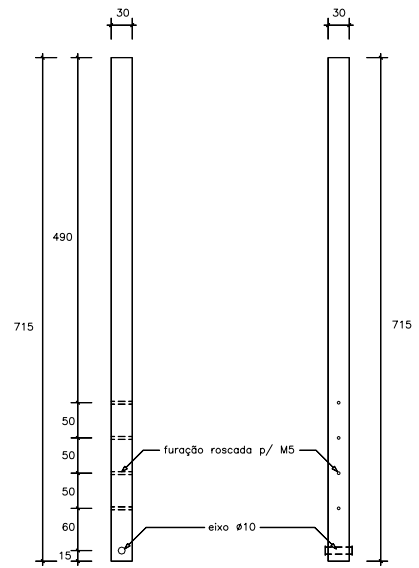


SUPORTE DO MOTOR

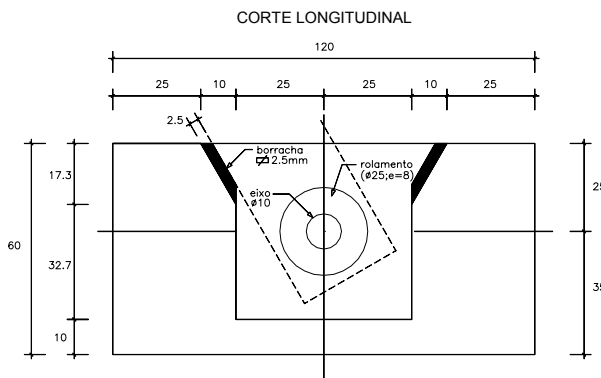
ANEXO VI – Pêndulo invertido



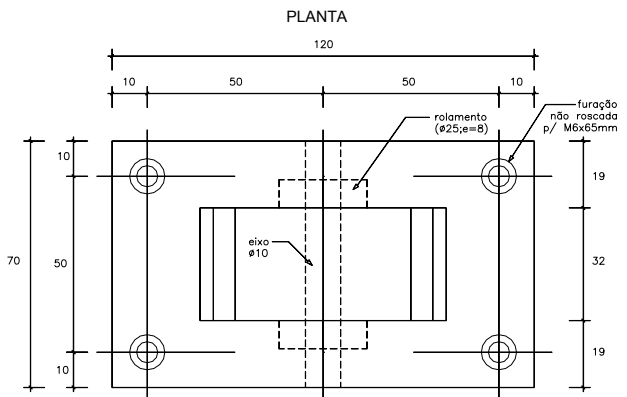
VISTA DE FRENTE



BARRA DE ALUMÍNIO



CORTE LONGITUDINAL



PLANTA

BASE

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A.F.T.E.S. Groupe de Travail (1974) – “Recommandations Concernant L’étude des Effets Sismiques de L’explosif”, Tunnels et Ouvrages Souterrains (2), pp.89-93.
- [2] Allen, D.; Rainer, J. (1976) - “Vibration Criteria for Long-span Floors”, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 3, N° 2, pp.165-173.
- [3] Allen, D.; Murray, T. (1993) – “Design Criterion for Vibrations Due to Walking”, AISC Engineering Journal, Vol.30, No.4, pp.117-129.
- [4] Bachmann, H.; Ammann, W. (1987) – “Vibrations in Structures Induced by Man and Machines”, Structural Engineering Documents, IABSE.
- [5] Bachmann, H.; Weber, B. (1995) – “Tuned Vibration Absorbers for Lively Structures”, Journal of IABSE, Structural Engineering International, vol. 5, n°1.
- [6] Bachmann, H.(1997) – “Vibration Problems in Structures, Practical Guidelines”, Birkhäuser verlag.
- [7] Balas, M. (1978) – “Feedback Control of Flexible Systems”, IEEE Transaction on Automatic Control, 1, pp.673-679.
- [8] Battista, R.; Varela, W. (2006) – “Avaliação das Vibrações Induzidas pelo Público nas Estruturas de Concreto Armado”, Relatório técnico da empresa Controllauto, Brasil.
- [9] Barros, R. C. (2007) – “Computational and Experimental Developments of Vibration Control using Liquid Tanks for Energy Dissipation Purposes in Civil Engineering Structures”, ECCOMAS Thematic Conference COMPDYN, Grécia.
- [10] Blanchard, J.; Davies, B.; Smith, J. (1977) – “Design Criteria and Analysis for Dynamic Loading of Footbridges”, Proceedings of the DOE and DOT TRRL Symposium on Dynamic Behaviour of Bridges, Crowthorne, UK, pp.90-106.
- [11] Brazil, A.; Joseph, L.; Poon, D.; Scarangelo, T. (2006) – “Designing High Rises for Wind Performance”, ASCE 2006 Structures Congress, St. Louis, Missouri, USA.
- [12] BS 5228-2 (1997) – “Noise and Vibration Control on Construction and Open Sites. Guide to Noise and Vibration Control Legislation for Construction and Demolition Including Road Construction and Maintenance”.
- [13] BS 5400 (1978) – “Steel, Concrete and Composite Bridges – Part 2, Appendix C: Vibration Serviceability Requirements for Foot and Cycle Track Bridges”.
- [14] BS 6472 (1992) – “Guide to Evaluation of Human Exposure to Vibration in Buildings (1 Hz to 80 Hz)”.
- [15] BS 6841 (1987) – “Guide to Measurement and Evaluation of Human Exposure to Whole-body Mechanical Vibration and Repeated Shock”.
- [16] BS 7385-1 (1990) – “Evaluation and Measurement for Vibration in Buildings. Guide for Measurement of Vibrations and Evaluation of Their Effects on Buildings”.
- [17] Butz, C.; Magalhães, F.; Cunha, A.; Caetano, E.; Goldack, A. (2005) – “Experimental Characterization of the Dynamic Behaviour of Lively Footbridges”, Footbridge 2005, Paris.

- [18] Cascante, A.; Rodellar, J.; Almansa, F. (1993) – “Control Predictivo en Sistemas de Protección Sísmica de Estructuras”, CIMNE, Barcelona.
- [19] Caetano, E. (1992) – “Identificação Experimental de Parâmetros Dinâmicos em Sistemas Estruturais”, Tese de Mestrado, FEUP.
- [20] Caetano, E. (2001) – “Dynamics of Cable-stayed Bridges. Experimental Assessment of Cables-Structure Interaction”, Tese de Doutoramento, FEUP.
- [21] Caetano, E., Cunha, A. (2003) – “Estudo do Comportamento Dinâmico da Ponte Pedonal e de Ciclovia Sobre o Rio Mondego”, Relatório VIBEST, FEUP (Confidencial).
- [22] Caetano, E.; Cunha, A. (2004) – “Experimental and Numerical Assessment of the Dynamic Behaviour of a Stress-ribbon Footbridge”, Journal of Structural Concrete, Vol. 5, No. 1, pp.29-38.
- [23] Caetano, E.; Cunha, A. (2006) – “Estudo Dinâmico para Avaliação das Características dos TMDs da Ponte Pedonal e de Ciclovia Sobre o Rio Mondego”, Relatório VIBEST, FEUP (Confidencial).
- [24] Caetano, E. (2007) – “Cable Vibrations in Cable-Stayed Bridges”, Structural Engineering Documents, IABSE.
- [25] Caetano, E.; Cunha, A.; Moutinho, C. (2007) – “Implementation of Passive Devices for Vibration Control at Coimbra footbridge”, International Conference on Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures EVACES'07, Porto.
- [26] Caetano, E.; Cunha, A.; Moutinho, C.; Magalhães, F. (2008) – “Lessons from the Practical Implementation of a Passive Control System at the New Coimbra Footbridge”, Footbridge 2008, Porto (submetido para aceitação).
- [27] Calçada, R.; Cunha, A.; Delgado, R. (2005) – “Analysis of Traffic Induced Vibrations in a Cable-Stayed Bridge. Part I: Experimental Assessment”, Journal of Bridge Engineering, ASCE, Vol.10, No.4, pp. 370-385.
- [28] CAN3-S16.1-M89 (1989) – “Steel Structures for Buildings - Limits States Design : Appendix G, Guide for Floor Vibration”, Canadian Standards Association, Ontario.
- [29] Carvalho, M. (1993) – “Dynamical Systems and Automatic Control”, Prentice-Hall.
- [30] Casciati, F.; Magonette, G.; Marazzi, F. (2006) – “Technology of Semiactive Devices and Applications in Vibration Mitigation”, John Wiley & Sons, Ltd.
- [31] Chopra, A. (1995) – “Dynamics of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering”, Prentice-Hall.
- [32] Clough, R.W. ; Penzien, J. (1993) – “Dynamics of Structures”, McGraw-Hill, 2ª edição.
- [33] Cunha, A (1990) – “Dinâmica Estrutural Estocástica - Aplicações à Engenharia Sísmica”, Tese de Doutoramento em Engenharia Civil, FEUP.
- [34] Cunha, A.; Caetano, E.; Moutinho, C.; Magalhães, F. (2005) – “Damping Identification in a Stress-ribbon Footbridge”, 6th European Conference on Structural Dynamics (EURODYN'2005).
- [35] Dallard, P. *et al.* (2001) – “The London Millennium Footbridge”, The Structural Engineer, Vol. 79, No. 22.

- [36] DIN 4150-2 (1975) – “Vibrações em Edifícios – Parte 2: Efeitos nos Ocupantes” (em alemão).
- [37] DIN 4150-3 (1983) – “Vibrações em Edifícios – Parte 3: Efeitos nas Estruturas” (em alemão).
- [38] EERC (2007) – “Structures Incorporating Tuned Mass Dampers”, Base de dados publicada.
- [39] Ellingwood, B.; Tallin, A. (1984) – “Structural Serviceability: Floor Vibrations”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.110 (2), pp. 410-419.
- [40] ENCIL (1998) – “U.P. Pólo 2, Passagem para Peões - Projecto de Base de Fundações e Estruturas”.
- [41] Eurocode 3 (1993) – “Design of Steel Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings”.
- [42] Eurocode 5 (1995) – “Design of Timber Structures – Part 1-1: General – Common Rules and Rules for Buildings”.
- [43] Falcó, X.; Aparício, A.; Barbat, A.; Rodellar, J. (1990) – “Control Activo de Puentes Sometidos a Cargas de Tráfico”, CINMNE N°6, Barcelona.
- [44] Fonseca, A.; Balmond, C. (2005) – “Conceptual Design of the Coimbra Footbridge”, *Footbridge2005*, Paris.
- [45] Franklin, G.; Powell, J.; Workman, M. (1998) – “Digital Control of Dynamic Systems”, Addison Wesley Longman.
- [46] Fujino, Y.; Pacheco, B.; Nakamura, S.; Pennung, W. (1993) – “Synchronization of Human Walking Observed during Lateral Vibration of a Congested Pedestrian Bridge”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol 22, pp.741-758.
- [47] Fujino, Y.; Soong, T.; Spencer Jr., B. (1996) – “Structural Control: Basic Concepts and Applications,” *Proceedings of the ASCE Structures Congress XIV*, Chicago, pp. 361-370.
- [48] Fujino, Y. (2002) – “Vibration, Control and Monitoring of Long-span Bridges - Recent Research Developments and Practice in Japan”, *Journal of Constructional Steel Research*, No.58 pp.71-97.
- [49] Goring, D.; Nikora, V. (2002) – “Despiking Acoustic Doppler Velocimeter Data”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.128(1), pp.117-126.
- [50] Grewal, M. (1993) – “Kalman Filtering: Theory and Practice”, Prentice-Hall.
- [51] Griffin, M. (1990) – “Handbook of Human Vibration”, Academic Press.
- [52] Guerreiro, L. (1996) – “Isolamento Sísmico de Edifícios”, Tese de Doutoramento em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico.
- [53] Guerreiro, L. (2007) – “Uma Aplicação de Isolamento de Base em Portugal - O Novo Hospital da Luz”, 7º Congresso Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica, Sísmica 2007, FEUP.
- [54] Hanagan, L.; Murray, M. (1997) – “Active Control Approach for Reducing Floor Vibrations”, *Journal of Structural Engineering*, pp.1497-1505.
- [55] Hartog, D. (1940) – “Mechanical Vibrations”, McGraw-Hill, New York.

- [56] Hwang, J.; Huang, Y. (2003) – “Seismic Design of Structures with Viscous Dampers”, International Training Program for Seismic Design of Structures, National Center for Research on Earthquake Engineering (NCREE).
- [57] Ikeda, Y. (2004) – “Active and Semi-active Control of Buildings in Japan”, Journal of Japan Association for Earthquake Engineering, Vol.4 No.3.
- [58] ISO 2631 (1978) – “Guide for Evaluation of Human Exposure to Whole-body Vibration”.
- [59] ISO 2631-1 (1997) – “Mechanical Vibration and Shock - Evaluation of Human Exposure to Whole-body Vibration - Part 1: General Requirements”.
- [60] ISO 2631-2 (1989) – “Evaluation of Human Exposure to Whole-body Vibration - Part 2: Continuous and Shock-induced Vibrations in Buildings (1 to 80 Hz)”.
- [61] ISO 4866 (1990) – “Mechanical Vibration and Shock - Vibration of Buildings - Guidelines for the Measurement of Vibrations and Evaluation of Their Effects on Buildings”.
- [62] ISO 6897 (1984) – “Guidelines for the Evaluation of the Response of Occupants of Fixed Structures, Especially Buildings and Off-shore Structures, to Low-frequency Horizontal Motion (0,063 to 1 Hz)”.
- [63] ISO 10137 (2007) – “Bases for Design of Structures - Serviceability of Buildings and Walkways Against Vibrations”.
- [64] Kareem, A.; Kijewski, T.; Tamura, Y. (1999) – “Mitigation of Motion of Tall Buildings with Recent Applications”, Wind and Structures 2(3), pp.201-251.
- [65] Kelly, J. (1997) – “Earthquake-Resistant Design with Rubber”, Springer-Verlag, 2ª edição.
- [66] King, P.; Vickery, B. (2006) – “Experience with Visco-Elastic and Hydraulic Dampers for Stay Cables”, Wind Induced Vibration of Cable Stay Bridges Workshop.
- [67] Kitagawa, M. (2004) – “Technology of the Akashi Kaikyo Bridge”, Structural Control and Health Monitoring, Vol. 11, pp.75-90.
- [68] Kobori, T.; Koshika, N.; Yamada, K.; Ikeda, Y. (1991) – “Seismic Response Controlled Structure with Active Mass Driver System. Part 1: Design”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.20, pp.133-149.
- [69] Kobori, T.; Koshika, N.; Yamada, K.; Ikeda, Y. (1991) – “Seismic Response Controlled Structure with Active Mass Driver System. Part 2: Verification”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.20, pp.151-166.
- [70] Kobori, T.; Takahashi, M.; Nasu, T.; Niwa, N. (1993) – “Seismic Response Controlled Structure with Active Variable Stiffness Systems”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.22, pp.925-941.
- [71] Kobori, T. (2002) – “Past, Present and Future in Seismic Response Control in Civil Engineering Structures”, 3rd World Conference on Structural Control, vol.1, pp. 9-14.
- [72] Koike, Y.; Murata, T.; Tanida, K.; Mutaguchi, M.; Kobori, T.; Takenaka, Y.; Arita, T. (1994) – “Development of V-shaped Hybrid Mass Damper and its Application to High-rise Buildings”, 1st World Conference on Structural Control, Los Angeles.

- [73] Kreuzinger, H. (2002) – “Dynamic Design Strategies for Pedestrian and Wind Actions”, Footbridge 2002, Paris.
- [74] Kumarasena, S.; Jones, N.; Irwin, P.; Taylor, P. (2007) – “Wind-Induced Vibration of Stay Cables” Report No. FHWA-HRT-05-083.
- [75] Kurata, N.; Kobori, T.; Takahashi, M.; Niwa, N.; Midorikawa, H. (1999) – “Actual Seismic Response Controlled Building with Semi-active Damper System”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.28, pp. 1427-1447.
- [76] Lenzen, K. (1966) – “Vibration of Steel Joist-Concrete Slab Floors,” Engineering Journal, AISC, n°3, pp. 133-136.
- [77] Lewis, F. (1992) – “Applied Optimal Control and Estimation”, Prentice-Hall.
- [78] Liao, W.; Mualla, I.; Lot, C. (2004) – “Shaking-table Test of a Friction-damped Frame Structure”, The Structural Design of Tall and Special Buildings, n°13, pp. 45-54.
- [79] Luenberger, D. (1964) – “Observing the State of a Linear System”, IEEE Transactions Military Electronics MIL-8, pp. 74–80.
- [80] Magalhães, F.; Caetano, E.; Cunha, A. (2006) – “Ensaios Dinâmicos da Ponte Pedonal e de Ciclovía Sobre o Rio Mondego”, Relatório VIBEST, FEUP (Confidencial).
- [81] Magalhães, F.; Cunha, A.; Caetano, E. (2007) – “Dynamic Testing of the New Coimbra Footbridge Before Implementation of Control Devices”, XXV IMAC, International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, SEM.
- [82] Mahmoodi, P. (1972) – “Structural Dampers”, Journal of Structural Engineering, ASCE, n°96, pp. 1661-1672.
- [83] MathWorks, Inc. (1992) – “Control System Toolbox – For use with Matlab”, Versão 4.1.
- [84] Moutinho, C. (1998) – “Controlo Passivo e Activo de Vibrações em Pontes Pedonais”, Tese de Mestrado, FEUP.
- [85] Moutinho, C.; Cunha, A.; Caetano, E. (2004) – “Controlo Activo de Uma Plataforma Vibratória Para Excitação Sísmica de Modelos Laboratoriais”, 6º Congresso Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica, Sísmica 2004, Univ. Minho.
- [86] Moutinho, C.; Cunha, A.; Caetano, E. (2004) – “Análise Experimental da Eficiência de TMDs Para Atenuação da Resposta Sísmica de Estruturas de Edifícios”, 6º Congresso Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica, Sísmica 2004, Univ. Minho.
- [87] Moutinho, C.; Cunha, A.; Caetano, E. (2004) – “Implementation of an Active Mass Damper for Seismic Vibration Control of a Plane Frame Physical Model”, 3rd European Conference on Structural Control, Viena, Austria.
- [88] Moutinho, C.; Cunha, A.; Caetano, E. (2005) – “Implementation of an Active Damping System to Reduce Harmonic Vibrations in a 3DOF Model”, II ECCOMAS Thematic Conference on Smart Structures and Materials, Lisboa.
- [89] Moutinho, C.; Cunha, A.; Caetano, E. (2006) – “Implementation of an Active Bracing System to Reduce Vibrations in a Physical Model Using Pole Placement Strategy”, 4th World Conference on Structural Control and Monitoring, San Diego.

- [90] Moutinho, C.; Cunha, A.; Caetano, E. (2007) – “Implementation of an Active Mass Damper to Control Vibrations in a ‘Lively’ Footbridge”, III ECCOMAS thematic Conference on Smart Structures and Materials, Gdansk.
- [91] Moutinho, C.; Wei-Hua Hu; Caetano, E.; Cunha, A. (2008) – “Implementation of a Dynamic Monitoring System at Coimbra Footbridge”, XXVI IMAC, International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, SEM (submetido para aceitação).
- [92] Murray, T. (1981) – “Acceptability Criterion for Occupant-induced Floor Vibrations”, AISC Engineering Journal, vol.18, nº2.
- [93] Murray, T. (1996) – “Control of Floor Vibrations – State-of-Art-Report”, IABSE 15th Congress.
- [94] Nakamura, S.; Fujino, Y. (2002) – “Lateral Vibration on a Pedestrian Cable-stayed Bridge”, Journal of IABSE, Structural Engineering International, vol. 12, nº4, pp. 295-300.
- [95] NBCC (1981) – “National Building Code of Canada. Part 4: Design”.
- [96] Nise, N. S. (2000) – “Control Systems Engineering”, John Wiley & Sons, Inc, 3ª edição.
- [97] NP 1673 (1980) – “Vibrações Mecânicas – Avaliação da Reacção à Excitação Global do Corpo por Vibrações”.
- [98] NP 2074 (1983) – “Avaliação da Influência em Construções de Vibrações Provocadas por Explosões ou Solicitações Similares”.
- [99] NP ISO 2631-1 (2007) – “Vibrações Mecânicas e Choque. Avaliação da Exposição do Corpo Inteiro a Vibrações. Parte 1: Requisitos Gerais”.
- [100] Ogata, K. (1996) – “Modern Control Engineering”, Prentice-Hall, 3ª edição.
- [101] Ohrai, S.; Kobori, T.; Sakamoto, M.; Koshika, N.; Nishimura, I.; Sasaki, K.; Kondo, A.; Fukushima, I. (1994) – “Development of Active-Passive Composite Tuned Mass Damper and an Application to the High Rise Building”, 1st World Conference on Structural Control, Los Angeles.
- [102] Ormondroyd, J.; Hartog, D. (1928) – “Theory of the Dynamic Vibration Absorber”, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, nº50, pp.9-22.
- [103] Pina, H. (1995) – “Métodos Numéricos”, McGraw-Hill.
- [104] Preumont, A. (1997) – “Vibration Control of Active Structures – An introduction”, Kluwer Academic Publishers.
- [105] Ramsey, K. (2006) – “Texas Experience and Retrofits for Stay-Cable Vibrations”, Wind Induced Vibration of Cable Stay Bridges Workshop, St. Louis.
- [106] Reiher, H.; Meister, F. J. (1931) – “The Sensitiveness of the Human Body to Vibrations”, Forschung, (VDI-Berlin), Vol. 2 No 11, pp. 381-386.
- [107] Rodellar, J.; Barbat, A.; Casciati, F. (2000) – “Advances in Structural Control”, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona.
- [108] Scholl, R (1990) – “Improve the Earthquake Performance of Structures with Added Damping and Stiffness Elements”, Proceedings of the fourth US National Conference on Earthquake Engineering, Vol. 3, California.

- [109] Seiler G.; Fischer, O.; Huber, P. (2002) – “Semi-active MR Dampers in TMD’s for Vibration Control of Footbridges, Part 2: Numerical Analysis and Practical Realisation”, Footbridge 2002, Paris.
- [110] SÉTRA (2006) – “Guide méthodologique – Passerelles piétonnes – Évaluation du comportement vibratoire sous l’action des piétons”.
- [111] Shimizu, K.; Teramura, A. (1994) – “Development of Vibration Control System Using U-shaped Tank”, Proceedings of the 1st International Workshop and Seminar on Behavior of Steel Structures in Seismic Areas, pp. 7.25-7.34.
- [112] SN 640312 (1978) – “Efeitos das Vibrações nas Estruturas” (em alemão).
- [113] Soong, T. (1990) – “Active Structural Control – Theory & Practice”, Longman Scientific & Technical.
- [114] Soong, T.; Dargush, G. (1997) – “Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering”, John Wiley & Sons.
- [115] Spencer Jr., B.; Sain, M. (1997) – “Controlling Buildings: A New Frontier in Feedback”, IEEE Control Systems Magazine, nº17, pp. 19-35.
- [116] Spencer Jr., B.; Nagarajaiah, S. (2003) – “State of the Art of Structural Control”, Journal of Structural Engineering, ASCE, Volume 129, pp. 845-856.
- [117] SS 4604866 (1991) – “Vibrações e Choque: Valores Recomendados para Limites de Vibração em Edifícios Originadas por Explosões” (em Sueco).
- [118] Sun, L.; Fujino, Y.; Pacheco, B. (1995) – “The Properties of Tuned Liquid Dampers using a TMD Analogy”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 24, no7, pp. 967-976.
- [119] SYNPEX Project (2005)–“Report nº3–Part 2: Footbridge Class and Comfort Level” (Confidential).
- [120] Tamura, Y.; Fujii, K.; Ohtsuki, T.; Wakahara, T.; Kohsaka R. (1995) – “Effectiveness of Tuned Liquid Dampers Under Wind Excitation”, Engineering Structures, Vol.17, Nº 9, pp. 609-621.
- [121] Tamura, Y.; Kohsaka, R.; Nakamura, O.; Miyashita K.; Modi, V. (1996) – “Wind-induced Responses of an Airport Tower - Efficiency of Tuned Liquid Damper”, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 65, Nº1, pp.121-131.
- [122] Takenaka Corporation (2001) – “From Earthquake Resistance to Vibration Control - The Most Advanced Technology for Protecting Urban Functions”.
- [123] Taylor, D. (2003) – “Damper Retrofit Of The London Millennium Footbridge - A Case Study Of Biodynamic Design Issues”, Seminar at Buffalo University.
- [124] UNI 9916 (1991) – “Criteri di Misura e Valutazione Degli Effetti Delle Vibrazioni Sugli Edifici”.
- [125] Vegte, J. V. (1993) – “Feedback Control Systems”, Prentice-Hall, 3ª edição.
- [126] Villaverde, R. (1985) – “Reduction in Seismic Response With Heavily-Damped Vibration Absorbers”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 13, pp.33-42.
- [127] VSL International Ltd (2002) – “VSL Stay Cable System – The Friction Damper”.

- [128] Vu, H.; Ramin, E. (1998) – “Dynamic Systems”, McGraw-Hill.
- [129] Wang, Y. (2002) – “Fundamentals of Seismic Base Isolation”, International Training Program for Seismic Design of Structures, National Center for Research on Earthquake Engineering (NCREE).
- [130] Weber, F.; Feltrin, G.; Huth, O. (2006) – “Guidelines for Structural Control”, SAMCO Report F05.
- [131] Wei-Hua Hu; Moutinho, C.; Caetano, E.; Cunha, A. (2008) – “A signal processing, Result management and Visualization system for Evaluation of Long Term Dynamic Behavior of Bridges”, 4th European Workshop on Structural Health Monitoring (submetido para aceitação).
- [132] Živanović, S.; Pavic, A.; Reynolds, P. (2005) – “Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review”, Journal of Sound and Vibration, Vol.279, pp. 1-74.