

ESTUDO EXPERIMENTAL E NUMÉRICO DE PROBLEMAS DE PERCOLAÇÃO EM MODELO REDUZIDO

MÁRIO SÉRGIO PEREIRA UNAS

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do grau de
MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL — ESPECIALIZAÇÃO EM GEOTECNIA

Orientador: Professor Doutor José Manuel Mota Couto Marques

JULHO DE 2010

MESTRADO INTEGRADO EM ENGENHARIA CIVIL 2009/2010

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Tel. +351-22-508 1901

Fax +351-22-508 1446

✉ miec@fe.up.pt

Editado por

FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Rua Dr. Roberto Frias

4200-465 PORTO

Portugal

Tel. +351-22-508 1400

Fax +351-22-508 1440

✉ feup@fe.up.pt

🌐 <http://www.fe.up.pt>

Reproduções parciais deste documento serão autorizadas na condição que seja mencionado o Autor e feita referência a *Mestrado Integrado em Engenharia Civil - 2009/2010 - Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2009.*

As opiniões e informações incluídas neste documento representam unicamente o ponto de vista do respectivo Autor, não podendo o Editor aceitar qualquer responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões que possam existir.

Este documento foi produzido a partir de versão electrónica fornecida pelo respectivo Autor.

À minha mulher

O sábio não se exhibe e vejam como é notado. Renuncia a si mesmo e jamais é esquecido.
Lao-Tsé

AGRADECIMENTOS

Ao Professor José Couto Marques o autor agradece reconhecidamente as inúmeras ajudas prestadas na fase de execução e de revisão do trabalho tendo sido uma fonte de conhecimento, de organização e de entrega cujo exemplo servirá seguramente de inspiração para o futuro. A citação deste trabalho é lhe inteiramente dedicada.

O autor deve também uma palavra de reconhecimento ao Professor António Viana da Fonseca pela gentileza em ter disponibilizado todos os recursos do Laboratório de Geotecnia necessários à boa condução dos trabalhos experimentais.

À Engenheira Cláudia Pinto, à Engenheira Daniela Coelho e ao Sr. Pinto pelas contribuições valiosas na fase experimental do estudo.

À Professora Maria de Lurdes Lopes e ao Luís Miguel Morais do Laboratório de Geossintéticos é também devido um gesto de gratidão.

Finalmente, o autor dirige uma palavra de apreço para a sua instituição, a Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, pelas condições proporcionadas para a realização deste trabalho.

RESUMO

Pretende-se utilizar um equipamento experimental, anteriormente desenvolvido, para a realização de estudos em modelo reduzido de percolação em cenários em que este fenómeno possa condicionar a segurança de estruturas geotécnicas. Entre outras situações em que os efeitos da percolação possam ser gravosos, refira-se por exemplo o cenário de pleno armazenamento em barragens de aterro homogéneas e zonadas. Em complemento do estudo experimental, será efectuada a análise numérica pelo Método dos Elementos Finitos através do recurso a ferramentas computacionais existentes na FEUP.

PALAVRAS-CHAVE: Percolação, Modelo reduzido, Estudo experimental, Análise numérica, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

The aim of this work is to use a previously developed experimental device in order to proceed at the seepage analysis in a scaled model on scenes that this phenomenon may be restrictive such in geotechnical structures safety. Among other situations that the seepage effects can be grave, it will be referred the full storage scene of homogeneous and nonhomogeneous earth dams. In complement of the experimental study, it will be done a numerical analysis using the Finite Element Method with the computational resources available on FEUP.

KEYWORDS: Seepage, Scaled Model, Experimental study, Numerical analysis, Finite Element Method.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	i
RESUMO	iii
ABSTRACT	v
1. INTRODUÇÃO	1
2. ÁGUA NOS SOLOS	3
2.1. INTRODUÇÃO	3
2.2. ESTADO FÍSICO DOS SOLOS	4
2.2.1. INTRODUÇÃO	4
2.2.2. GRANDEZAS BÁSICAS	4
2.2.3. RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS BÁSICAS.....	5
2.3. CAPILARIDADE	6
2.4. CARACTERIZAÇÃO HIDRÁULICA DOS SOLOS	8
2.4.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	8
2.4.2. CONSERVAÇÃO DA ENERGIA	8
2.4.3. REGIME DE ESCOAMENTO	11
2.4.4. LEI DE DARCY.....	12
2.4.5. DETERMINAÇÃO DA PERMEABILIDADE DOS SOLOS	15
2.4.6. ESTIMATIVA DO COEFICIENTE DE PERMEABILIDADE PARA SOLOS GRANULARES	16
2.4.7. ANISOTROPIA DE PERMEABILIDADE	18
2.4.7.1. Variação direccional	18
2.4.7.2. Solos estratificados	20
2.4.8. FACTORES QUE AFFECTAM A PERMEABILIDADE	22
2.4.8.1. Proposta de Taylor	22
2.4.8.2. Viscosidade do fluído induzida pela variação da temperatura	23
2.4.8.3. Dimensão das partículas sólidas	25
2.4.8.4. Índice de vazios.....	25
2.4.8.5. Composição mineralógica	26
2.4.8.6. Arranjo estrutural das partículas sólidas.....	26
2.4.8.7. Grau de saturação.....	26

2.5. ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS BIDIMENSIONAIS EM REGIME PERMANENTE.....	27
2.5.1. ENQUADRAMENTO GERAL.....	27
2.5.2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE CONTINUIDADE	27
2.5.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GOVERNATIVAS DE ESCOAMENTOS.....	31
2.5.3.1. Meios Porosos Homogéneos e Isotrópicos	31
2.5.3.2. Meios Porosos não Homogéneos e Isotrópicos.....	33
2.5.3.3. Meios Porosos Homogéneos e Anisotrópicos.....	35
2.5.4. CONDIÇÕES DE FRONTEIRA	37
2.5.4.1. Noções Gerais	37
2.5.4.2. escoamentos confinados	38
2.5.4.3. escoamentos não confinados	38
2.5.5. TRAÇADO GRÁFICO DA LINHA DE SATURAÇÃO EM ESCOAMENTOS NÃO CONFINADOS	39
2.6. INSTABILIDADE DE ORIGEM HIDRÁULICA	45
2.6.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	45
2.6.2. FORÇA DE PERCOLAÇÃO	45
2.6.3. GRADIENTE HIDRÁULICO CRÍTICO. QUICK CONDITION.....	46
2.6.4. LEVANTAMENTO HIDRÁULICO.....	48
2.6.5. SEGURANÇA À ROTURA HIDRÁULICA	49
3. ENSAIOS DE CARACTERIZAÇÃO	51
3.1. INTRODUÇÃO	51
3.2. ANÁLISE GRANULOMÉTRICA.....	51
3.3. PESO VOLÚMICO DO SOLO	54
3.4. DETERMINAÇÃO DO TEOR EM ÁGUA	55
3.5. DETERMINAÇÃO DO PESO VOLÚMICO DAS PARTÍCULAS SÓLIDAS	57
3.6. ESTIMATIVA EXPEDITA DO ÂNGULO DE ATRITO	58
3.7. DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE PERMEABILIDADE	59
4. MODELAÇÃO EXPERIMENTAL.....	63
4.1. INTRODUÇÃO	63
4.2. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DO TANQUE DE PERCOLAÇÃO	63
4.3. APLICAÇÕES DIDÁCTICAS	65
4.4. VISUALIZAÇÃO DOS ESCOAMENTOS.....	66

4.5. MODELOS EXPERIMENTAIS	67
4.5.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	67
4.5.2. BARRAGEM HOMOGÊNEA COM DRENO HORIZONTAL.....	68
4.5.3. BARRAGEM HOMOGÊNEA COM DRENO DE PÉ DE TALUDE	70
4.5.4. BARRAGEM HOMOGÊNEA COM DRENO DE CHAMINÉ	71
4.5.5. BARRAGEM ZONADA	72
5. MODELAÇÃO NUMÉRICA	75
5.1. INTRODUÇÃO	75
5.2. APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS	75
5.2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	75
5.2.2. PRINCÍPIOS VARIACIONAIS.....	78
5.2.3. MÉTODO DOS RESÍDUOS PESADOS.....	79
5.2.4. MÉTODO DA COLOCAÇÃO PONTUAL.....	80
5.2.5. MÉTODO DA COLOCAÇÃO NO SUBDOMÍNIO.....	80
5.2.6. MÉTODO DE GALERKIN.....	80
5.2.7. CONVERGÊNCIA.....	81
5.2.8. ESTADOS PLANOS	82
5.2.8.1. Noções Gerais.....	82
5.2.8.2. Estado Plano de Tensão	82
5.2.8.3. Estado Plano de Deformação	82
5.2.9. FUNÇÕES DE FORMA DOS ELEMENTOS	83
5.2.10. FAMÍLIAS DA CLASSE DE CONTINUIDADE C_0	85
5.2.10.1. Subdomínios unidimensionais	85
5.2.10.2. Subdomínios bidimensionais	85
5.2.10.3. Elementos bidimensionais de Lagrange	86
5.2.10.4. Elementos bidimensionais Serendipity	89
5.2.10.5. Elementos triangulares.....	94
5.2.11. MAPEAMENTO DOS ELEMENTOS	97
5.2.12. CONFORMABILIDADE GEOMÉTRICA DOS ELEMENTOS	99
5.2.13. ESPECIFICAÇÕES DOS ELEMENTOS.....	99
5.2.14. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS	100
5.2.15. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	104

5.3. ANÁLISE DE ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS BIDIMENSIONAIS EM REGIME PERMANENTE ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	106
5.3.1. GENERALIDADES	106
5.3.2. FORMULAÇÃO GERAL DOS PROBLEMAS COM BASE NA FUNÇÃO POTENCIAL	107
5.3.3. MÉTODO DOS RESÍDUOS PESADOS E APROXIMAÇÃO EXACTA EM PARTE DA FRONTEIRA.....	108
5.3.4. DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS. MÉTODO DE GALERKIN	109
5.3.5. INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA	112
5.3.6. POSIÇÃO DA LINHA DE SATURAÇÃO EM ESCOAMENTOS NÃO CONFINADOS	113
5.4. FERRAMENTAS DE DISCRETIZAÇÃO DOS DOMÍNIOS CONTÍNUOS	113
5.4.1. INTRODUÇÃO	113
5.4.2. PROGRAMA GMSH.....	114
5.4.2.1. Considerações iniciais.....	114
5.4.2.2. Módulo de geração de malha	114
5.4.3. PROGRAMA GiD.....	124
5.4.4. PÓS-PROCESSAMENTO DE RESULTADOS	129
5.5. MODELOS NUMÉRICOS	132
5.5.1. FUNÇÃO DE CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA	132
5.5.2. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO HORIZONTAL	135
5.5.3. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE PÉ DE TALUDE.....	136
5.5.4. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE CHAMINÉ.....	137
5.5.5. BARRAGEM ZONADA.....	137
6. ANÁLISE DE RESULTADOS	139
6.1. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO HORIZONTAL	139
6.1.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS, NUMÉRICOS E GRÁFICOS.....	139
6.1.2. EFEITO DO COMPRIMENTO DO DRENO.....	143
6.1.3. EFEITO DA ESPESSURA DO DRENO	144
6.2. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE PÉ DE TALUDE	146
6.2.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS, NUMÉRICOS E GRÁFICOS.....	146
6.2.2. EFEITO DA AVARIA DO SISTEMA DE DRENAGEM	150
6.3. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE CHAMINÉ	151
6.3.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS	151
6.3.2. EFEITO DA INCLINAÇÃO DO DRENO DE CHAMINÉ	155

6.4. BARRAGEM ZONADA	156
6.4.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS	156
6.4.2. EFEITO DA PERMEABILIDADE DO NÚCLEO CENTRAL.....	160
6.4.3. ESTIMATIVA DO COEFICIENTE DE PERMEABILIDADE.....	162
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	165
BIBLIOGRAFIA.....	167

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig.2.1 – Evolução da fase líquida num solo acima do nível freático	6
Fig.2.2 – Tensão superficial de um fluído em tubo capilar	7
Fig.2.3 - Carga hidráulica num ponto A para velocidades do escoamento consideráveis	9
Fig.2.4 – Carga hidráulica num ponto A para velocidades desprezáveis	10
Fig.2.5 - Perda de carga hidráulica entre dois pontos genéricos de um escoamento.....	10
Fig.2.6 – Trajectória de uma partícula de água à escala microscópica (a azul) e à escala macroscópica (a laranja)	12
Fig.2.7 - Experiência de Darcy.....	12
Fig.2.8 – Permeâmetro de carga constante	15
Fig.2.9 - Trecho genérico de fluxo com anisotropia de permeabilidade	18
Fig.2.10 – Variação da permeabilidade com anisotropia direcciona.....	19
Fig.2.11 - Variação da permeabilidade com isotropia direcciona	19
Fig.2.12 – Percolação normal à estratificação do solo	20
Fig.2.13 - Percolação segundo a direcção da estratificação do solo.....	20
Fig.2.14 – Anisotropia de permeabilidade de um maciço formado por duas camadas com a mesma espessura e com isotropia de permeabilidade.....	22
Fig.2.15 - Distribuição genérica dos grãos de solos sem e com partículas finas	25
Fig.2.16 – Evolução das linhas de fluxo com o grau de saturação.....	26
Fig.2.17 - Percolação através de um elemento de volume de um solo	27
Fig.2.18 – Esquema genérico de uma barragem zonada.....	34
Fig.2.19 - Tubo de corrente de um escoamento na interface entre dois solos.....	34
Fig.2.20 – Transformação de coordenadas em solos anisotrópicos	36
Fig.2.21 - Modelo de uma ensecadeira em meio homogéneo e isotrópico	38
Fig.2.22 – Modelo de uma barragem de aterro homogénea	38
Fig.2.23 - Rede de escoamento genérica numa barragem homogénea	39
Fig.2.24 – Condição de entrada com resistência mobilizável ao escoamento	39
Fig.2.25 - Condição de entrada sem resistência mobilizável ao escoamento.....	40
Fig.2.26 – Condições de entrada no domínio	40
Fig.2.27 - Escoamento à entrada de meios porosos para ângulos α superiores a 90°	40
Fig.2.28 – Condições de saída do domínio.....	41
Fig.2.29 - Traçado gráfico do nível freático de uma barragem homogénea.....	42

Fig.2.30 – Traçado gráfico do nível freático de uma barragem homogénea com dreno horizontal de jusante	43
Fig.2.31 - Relação entre α e $\Delta a/(a+\Delta a)$ proposta por Casagrande	43
Fig.2.32 – Traçado gráfico do nível freático da barragem homogénea com dreno de pé do talude	44
Fig.2.33 - Transição de saída junto do pé de jusante	44
Fig.2.34 – Faseamento construtivo simplificado de uma cortina impermeável.....	45
Fig.2.35 - Componentes da força exercida pela água sobre o meio poroso	46
Fig.2.36 – Forças aplicadas sobre um volume unitário de solo submerso	47
Fig.2.37 - Bloco potencialmente instável, bpi, por levantamento hidráulico	48
Fig.2.38 – Mecanismo de formação dos blocos potencialmente instáveis	49
Fig.3.1 – Colocação do agregado na série de peneiros (ACI, 1978)	51
Fig.3.2 – Resultados obtidos na peneiração de uma amostra (ACI, 1978)	52
Fig.3.3 - Curva granulométrica do solo B (produzida pelo laboratório de Geotecnia da F.E.U.P.)	54
Fig.3.4 – Dimensões do amostrador de solo (mm)	55
Fig.3.5 - Pesagem das amostras dos solos A e B	56
Fig.3.6 - Montagem laboratorial para a estimativa do ângulo de atrito efectivo	58
Fig.3.7 – Vista frontal da pilha de material e ângulos de repouso	58
Fig.3.8 - Vista lateral da pilha de material e ângulos de repouso	59
Fig.3.9 – Esquematização do circuito do permeâmetro de carga constante	60
Fig.3.10 - Esquematização do permeâmetro	60
Fig.4.1 – Planta do tanque de percolação.....	63
Fig.4.2 – Alçado posterior do tanque de percolação.....	64
Fig.4.3 - Circuito hidráulico tipo para modelos de barragens de aterro	64
Fig.4.4 – Circuito hidráulico tipo para modelos de barragens de aterro	65
Fig.4.5 - Visualização de linhas de corrente em meio poroso.....	66
Fig.4.6 – Processo de injeção do produto corante	66
Fig.4.7 - Disposição do núcleo da barragem: a) do lado do paramento de montante; b) de eixo inclinado; c) de eixo vertical	68
Fig.4.8 – Geometria da barragem homogénea com dreno horizontal [mm]	68
Fig.4.9 - Modelo físico da barragem homogénea com dreno horizontal.....	69
Fig.4.10 – Detalhe do dreno horizontal	69
Fig.4.11 - Geometria da barragem homogénea com dreno de pé do talude [mm].....	70

Fig.4.12 – Modelo físico da barragem homogénea com dreno de pé do talude	70
Fig.4.13 - Detalhe do dreno de pé de talude.....	71
Fig.4.14 – Geometria da barragem homogénea com dreno de chaminé [mm]	71
Fig.4.15 - Modelo físico da barragem homogénea com dreno de chaminé	72
Fig.4.16 – Detalhe do dreno de chaminé	72
Fig.4.17 - Geometria da barragem zonada [mm].....	73
Fig.4.18 – Modelo físico da barragem zonada.....	73
Fig.4.19 - Detalhe do núcleo e dos órgãos de drenagem.....	74
Fig.5.1 – Domínio Ω delimitado pela fronteira Γ de um meio contínuo.....	75
Fig.5.2 – Discretização do domínio Ω em subdomínios Ω_e	76
Fig.5.3 - Técnicas iterativas de resolução de problemas.....	77
Fig.5.4 – Domínio Ω e fronteira Γ de um meio contínuo 3D.....	82
Fig.5.5 - Geração de funções de forma normalizadas, com o refinamento da malha	84
Fig.5.6 – Coordenadas normalizadas de um elemento rectangular	85
Fig.5.7 - Triângulo de Pascal até à expansão polinomial de 4ª ordem.....	86
Fig.5.8 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 1ª ordem	87
Fig.5.9 - Elemento lagrangiano de 1ª ordem	87
Fig.5.10 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 2ª ordem	87
Fig.5.11 - Elemento lagrangiano de 2ª ordem	88
Fig.5.12 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 3ª ordem	88
Fig.5.13 - Elemento lagrangiano de 3ª ordem	88
Fig.5.14 – Termos em excesso, t_{exc} , para $n=1:10$ por passos de 1	89
Fig.5.15 - Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 2ª ordem	90
Fig.5.16 – Elemento serendipitiano de 2ª ordem	90
Fig.5.17 - Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 3ª ordem	91
Fig.5.18 – Elemento serendipitiano de 3ª ordem	91
Fig.5.19 - Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 4ª ordem	92
Fig.5.20 – Elemento serendipitiano de 4ª ordem	92
Fig.5.21 - Termos em excesso, $t_{exc,n}$ para $n=1:5$ por passos 1	94
Fig.5.22 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 1ª ordem	95
Fig.5.23 - Elemento triangular de 1ª ordem	95
Fig.5.24 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 2ª ordem	96

Fig.5.25 - Elemento triangular de 2ª ordem.....	96
Fig.5.26 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 3ª ordem.....	96
Fig.5.27 - Elemento triangular de 3ª ordem.....	97
Fig.5.28 – Mapeamento de um elemento bidimensional.....	98
Fig.5.29 - 1ª Regra para unicidade de mapeamento	98
Fig.5.30 – 2ª Regra para unicidade de mapeamento.....	99
Fig.5.31 – Conformabilidade geométrica dos elementos.....	99
Fig.5.32 - Elementos isoparamétricos.....	100
Fig.5.33 – Elementos superparamétricos.....	100
Fig.5.34 - Elementos subparamétricos.....	100
Fig.5.35 – Integração de Newton-Cotes.....	104
Fig.5.36 - Condições de fronteira tendo como variável dependente a função ϕ	112
Fig.5.37 – Procedimento genérico de resolução de um problema.....	114
Fig.5.38 - Geometria do modelo A	114
Fig.5.39 – Geometria do modelo B.....	115
Fig.5.40 - Malha gerada com o algoritmo Transfinite.....	115
Fig.5.41 – Malha gerada com o algoritmo Transfinite associado à opção Recombine	116
Fig.5.42 - Algoritmo Transfinite associado à opção Recombine.....	116
Fig.5.43 – Malha gerada através do algoritmo MeshAdapt.....	117
Fig.5.44 - Malha gerada através do algoritmo Delaunay	117
Fig.5.45 – Malha gerada através do algoritmo Frontal.....	117
Fig.5.46 - Função Attractor com os nós 2 e 6 em NodesList	118
Fig.5.47 – Função Sigmóide.....	119
Fig.5.48 - Malha gerada através da função Threshold associada à função Attractor.....	119
Fig.5.49 – Função Attractor com a linha 5 em EdgesList.....	120
Fig.5.50 - Malha gerada através da função Threshold associada à função Attractor.....	120
Fig.5.51 – Modelo B com malha gerada por defeito	120
Fig.5.52 - Função Attractor com os nós 3 e 4 em NodesList	121
Fig.5.53 – Malha gerada através da função Threshold associada à função Attractor.....	121
Fig.5.54 - Malha gerada através da função Box	122
Fig.5.55 – Função MathEval com $F=x^2-3.5y^2$	122
Fig.5.56 - Malha gerada através da função Threshold associada à função MathEval	123
Fig.5.57 – Malha gerada pelas funções Threshold, MathEval e Restrict.....	123

Fig.5.58 - Malha gerada pela função Mean associada à função Attractor.....	124
Fig.5.59 – Malha cartesiana	125
Fig.5.60 – Malha estruturada com elementos triangulares.....	125
Fig.5.61 - Malha estruturada com elementos quadriláteros.....	126
Fig.5.62 – Malha estruturada com concentração preferencial dos elementos quadriláteros	126
Fig.5.63 - Malha não estruturada com o algoritmo RFast.....	126
Fig.5.64 – Malha não estruturada com o algoritmo RJump	127
Fig.5.65 - Malha não estruturada com o algoritmo RSurf	127
Fig.5.66 – Concentração preferencial dos elementos no ponto 1	127
Fig.5.67 - Concentração preferencial dos elementos na linha 9.....	128
Fig.5.68 – Mínimo jacobiano para verificação da qualidade da malha	128
Fig.5.69 - Elementos com mínimo jacobiano menor ou igual a 3.....	129
Fig.5.70 – Geometria e condições hidráulicas de um filtro (dimensões em mm)	129
Fig.5.71 - Malha de elementos finitos do domínio do escoamento em meio poroso.....	129
Fig.5.72 – Dados do ficheiro MSH do programa Gmsh	130
Fig.5.73 - Dados do ficheiro de cálculo do programa GiD	130
Fig.5.74 – Dados do ficheiro para o cálculo através do programa Quasar	131
Fig.5.75 - Carga hidráulica (m).....	131
Fig.5.76 – Tubos de fluxo.....	132
Fig.5.77 - Função de condutividade hidráulica do solo A (Phase2).....	134
Fig.5.78 – Função de condutividade hidráulica do solo B (Phase2).....	134
Fig.5.79 - Modelo numérico da barragem homogénea com dreno horizontal (Phase2)	135
Fig.5.80 – Encontro da superfície livre da água com o paramento de montante (Phase2)	135
Fig.5.81 - Encontro da superfície livre da água com o paramento de jusante (Phase2).....	136
Fig.5.82 – Modelo numérico da barragem homogénea com dreno de pé de talude (Phase2)	136
Fig.5.83 - Encontros da superfície livre da água com o paramento de montante e jusante (Phase2)	136
Fig.5.84 – Modelo numérico da barragem homogénea com dreno de chaminé (Phase2).....	137
Fig.5.85 - Encontros da superfície livre da água com o paramento de montante e jusante (Phase2)	138
Fig.5.86 – Modelo numérico da barragem zonada (Phase2).....	138
Fig.5.87 - Encontros da superfície livre da água com o paramento de montante e jusante (Phase2)	138
Fig.6.1 – Trajectória do produto corante no meio poroso	139
Fig.6.2 – Caudal percolado pelo corpo da barragem. Posição do nível freático (Phase2).....	140

Fig.6.3 - Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Phase2).....	141
Fig.6.4 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Ensaio experimentais)..	141
Fig.6.5 - Traçado gráfico do nível freático da barragem homogénea com dreno horizontal	142
Fig.6.6 – Solução experimental, numérica e gráfica para a posição da linha de saturação.....	142
Fig.6.7 - Posição da linha de saturação em função da condutividade hidráulica (Phase2).....	143
Fig.6.8 – Evolução da capacidade de vazão em função do comprimento do dreno horizontal.....	143
Fig.6.9 - Evolução da posição do nível freático em função do comprimento do dreno horizontal.....	144
Fig.6.10 – Evolução da capacidade de vazão em função da espessura do dreno horizontal.....	145
Fig.6.11 - Evolução da posição do nível freático em função da espessura do dreno horizontal.....	145
Fig.6.12 – Trajectória do produto corante ao longo do escoamento.....	146
Fig.6.13 - Trajectória do produto corante ao longo do escoamento	146
Fig.6.14 – Condição de saída do escoamento no meio poroso.....	147
Fig.6.15 - Caudal percolado pelo corpo da barragem. Posição do nível freático (Phase2).....	147
Fig.6.16 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação. Posição do nível freático (Phase2)	148
Fig.6.17 - Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Ensaio experimentais).	149
Fig.6.18 – Fenómeno de ressurgência da água no paramento de jusante.....	149
Fig.6.19 - Traçado gráfico do nível freático do modelo da barragem homogénea com dreno de pé de talude	149
Fig.6.20 – Solução experimental, numérica e gráfica para a posição da linha de saturação.....	150
Fig.6.21 - Evolução da capacidade de vazão em função da condutividade hidráulica do dreno	150
Fig.6.22 – Posição do nível freático em função da redução da permeabilidade do dreno	151
Fig.6.23 - Trajectória do produto corante no meio poroso	151
Fig.6.24 – Transferência do escoamento do solo granular para o dreno de chaminé.....	152
Fig.6.25 - Caudal percolado pelo corpo da barragem. Posição do nível freático (Phase2).....	152
Fig.6.26 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Phase2).....	153
Fig.6.27 - Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Ensaio experimentais).	154
Fig.6.28 – Altura piezométrica associada às aberturas comunicantes (Ensaio experimentais)	154
Fig.6.29 - Solução experimental e numérica para a posição do nível freático.....	154
Fig.6.30 – Posição do nível freático e da linha de corrente associada ao ponto de injeção do corante (Phase2)	155
Fig.6.31 – Evolução da capacidade de vazão em função da inclinação do dreno de chaminé.....	156
Fig.6.32 - Posição do nível freático em função da inclinação do dreno de chaminé (Phase2)	156
Fig.6.33 – Caudal percolado pelo corpo da barragem. Posição do nível freático (Phase2).....	157

Fig.6.34 - Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação. Posição do nível freático (Phase2)	158
Fig.6.35 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação. (Ensaio experimental) ...	159
Fig.6.36 - Altura piezométrica associada às aberturas comunicantes (Ensaio experimental).....	159
Fig.6.37 – Solução experimental e numérica da posição do nível freático.....	159
Fig.6.38 - Posição do nível freático e da linha de corrente associada ao ponto de injeção do corante (Phase2)	160
Fig.6.39 – Evolução do caudal percolado com a diminuição do coeficiente de permeabilidade do núcleo central	161
Fig.6.40 - Posição do nível freático em função da diminuição do coeficiente de permeabilidade do núcleo central	161
Fig.6.41 – Variação do coeficiente de permeabilidade do núcleo central com o índice de vazios.....	162

ÍNDICE DE QUADROS (OU TABELAS)

Quadro 2.1 – Valores típicos da permeabilidade	14
Quadro 2.2 - Permeabilidade em função da temperatura.....	23
Quadro 2.3 – Desvio da permeabilidade em função da temperatura da água	24
Quadro 2.4 - Erro na avaliação do caudal em relação à temperatura padrão.....	24
Quadro 3.1 – Fração do solo B retida no peneiro de 2.00mm (n.º 10)	53
Quadro 3.2 - Fração do solo B passada no peneiro de 2.00mm (n.º 10)	53
Quadro 3.3 – Estimativa do peso volúmico dos solos	55
Quadro 3.4 - Teor em água do solo A.....	56
Quadro 3.5 – Teor em água do solo B.....	56
Quadro 3.6 - Calibragem.....	57
Quadro 3.7 – Peso volúmico das partículas sólidas	57
Quadro 3.8 – Proposta de Hough para o ângulo de atrito efectivo de solos não coesivos	59
Quadro 3.9 - Duração do tempo para a recolha da água na proveta graduada.....	61
Quadro 3.10 – Parâmetros para o cálculo do coeficiente de permeabilidade	61
Quadro 3.11 - Determinação do coeficiente de permeabilidade.....	61
Quadro 5.1 – Abcissas e pesos das regras de Gauss-Legendre no intervalo [-1,1]	105
Quadro 5.2 - Formulário de integração	106
Quadro 6.1 – Medição experimental do caudal percolado	140
Quadro 6.2 - Comparação dos resultados da carga hidráulica	141
Quadro 6.3 – Capacidade de vazão em função do comprimento do dreno horizontal.....	143
Quadro 6.4 - Capacidade de vazão em função da espessura do dreno horizontal.....	145
Quadro 6.5 – Medição experimental do caudal percolado	147
Quadro 6.6 - Comparação dos resultados da carga hidráulica	148
Quadro 6.7 – Capacidade de vazão em função da permeabilidade do dreno	150
Quadro 6.8 - Medição experimental do caudal percolado	152
Quadro 6.9 – Comparação dos resultados da carga hidráulica.....	153
Quadro 6.10 - Capacidade de vazão em função da inclinação do dreno de chaminé	155
Quadro 6.11 – Medição experimental do caudal	157

Quadro 6.12 - Comparação dos resultados da carga hidráulica.....	158
Quadro 6.13 – Capacidade de vazão do núcleo central em função da sua permeabilidade.....	160
Quadro 6.14 - Estimativa da permeabilidade proposta por Hazen	162
Quadro 6.15 – Estimativa da permeabilidade proposta por Casagrande	162
Quadro 6.16 - Avaliação da permeabilidade proposta por Chapuis	162

1

INTRODUÇÃO

Em termos dos conteúdos programáticos da disciplina de Mecânica dos Solos 1, do Mestrado Integrado em Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, o tema relacionado com a presença de água nos solos, em particular quando se verifica o fenómeno de percolação através dos meios porosos, será aquele para o qual os alunos revelam menor sensibilidade na sua fase inicial da aprendizagem. Repare-se que os conceitos anteriormente adquiridos da Mecânica dos Sólidos e da Mecânica dos Fluidos foram leccionados de forma compartimentada não tendo havido desse modo uma preparação prévia que permitisse a imediata percepção do comportamento mecânico de um solo quando a água se movimenta através dos poros.

Com o intuito de adicionar novos equipamentos didácticos ao Laboratório de Geotecnia, reforçando a componente experimental que estes proporcionam, foi desenvolvido um equipamento laboratorial para o estudo de problemas de percolação em modelo reduzido por C. Romão Ferreira (2008). No âmbito da unidade curricular Projecto em Geotecnia, por proposta do Professor Doutor José Couto Marques, decidiu-se utilizar o equipamento experimental para a realização de estudos em modelo reduzido em cenários em que o fenómeno da percolação pode condicionar a segurança das estruturas geotécnicas. Espera-se que no final do estudo seja possível comprovar inequivocamente a importância do tanque de percolação como meio de sensibilização para o estudo dos escoamentos em meios porosos. Repare-se que este dispositivo permite a modelação de secções transversais de barragens de aterro, homogéneas e zonadas, de enscadeiras e de cortinas impermeáveis. A realização dos ensaios experimentais no contexto das aulas práticas será certamente fonte de motivação e de conhecimento dos alunos relativamente ao tema em apreço.

No estudo apresentado decidiu-se dividir a informação em seis componentes nomeadamente a presença de água nos solos, a caracterização dos solos, a modelação experimental, a modelação numérica, a análise de resultados e as considerações finais.

No capítulo referente à presença de água nos solos será discutido o estado físico destes meios como forma de estimar pela via semiempírica os seus parâmetros de condutividade hidráulica, serão efectuadas considerações sobre o fenómeno da capilaridade nos meios porosos, será efectuada a caracterização hidráulica dos solos, serão comentados os aspectos que afectam a permeabilidade, serão deduzidas as equações diferenciais que governam os escoamentos da água através dos solos, serão apresentadas algumas soluções gráficas para o traçado da posição das linhas de saturação de algumas estruturas geotécnicas e será efectuada uma breve referência aos fenómenos de instabilidade de origem hidráulica.

Relativamente aos ensaios de caracterização dos solos será efectuada a análise granulométrica dos materiais utilizados no âmbito dos ensaios experimentais, será determinado o peso volúmico e o peso

volúmico das partículas sólidas, será quantificado o teor em água dos solos, será estimado o ângulo de atrito efectivo de um solo granular e será ainda estimado o coeficiente de permeabilidade em condições saturadas dos solos.

No capítulo relativo à modelação experimental serão discutidos os aspectos técnicos relacionados com o tanque de percolação, serão referidas algumas possibilidades de utilização do dispositivo para fins didácticos, será evidenciado o método adoptado para a visualização dos escoamentos e serão apresentados os modelos experimentais analisados no presente estudo.

Em termos da modelação numérica serão discutidas questões relacionadas com a discretização dos meios contínuos e a formulação dos problemas com base no método dos elementos finitos. No final serão ainda mostrados os diversos modelos numéricos em correspondência com os modelos experimentais previamente apresentados.

Na análise de resultados serão inevitavelmente efectuadas comparações entre os resultados numéricos e experimentais. Em alguns casos concretos serão também efectuadas as devidas comparações com as soluções gráficas relativas à posição do nível freático em escoamentos não confinados. Efectuou-se ainda uma breve análise de sensibilidade relativamente a questões que porventura serão mais preocupantes em termos da segurança das estruturas geotécnicas.

Finalmente, serão tecidas algumas considerações finais que evidenciem resumidamente os resultados discutidos referentes aos temas que se entenderam mais pertinentes.

2

ÁGUA NOS SOLOS

2.1. INTRODUÇÃO

Os maciços terrosos observados em condições naturais contêm geralmente água que pode ser designada conforme a sua origem e modo de interacção com as forças de natureza gravítica e electroquímica.

Quanto à origem da água nos solos, é habitual designá-la por água de sedimentação, de infiltração ou de condensação. A água de sedimentação é própria dos solos sedimentares e neles ficou incorporada no processo de formação dos depósitos. A água de infiltração tem origem nas fronteiras do maciço considerado e é normalmente proveniente das águas pluviais, linhas de água ou lagos. A água de condensação forma-se por efeito da diminuição da temperatura do meio exterior. Esse gradiente térmico faz condensar, regra geral nos horizontes situados mais à superfície, o vapor de água existente nos interstícios do solo.

Relativamente ao modo de interacção com as forças de natureza gravítica e electroquímica, a água poderá denominar-se por adsorvida ou livre. A água adsorvida, própria dos solos finos, fica retida na vizinhança da superfície das partículas do solo por forças atractivas de natureza electroquímica e, normalmente, a força gravítica perde influência no seu comportamento à medida que a superfície específica das partículas do solo aumenta. Por outro lado, a água livre está submetida quase exclusivamente aos efeitos da força gravítica e, por isso, o seu movimento nos meios porosos é devido sobretudo à variação da energia potencial imposta ao sistema, natural ou artificialmente. Para o estudo em apreço, que pretende centrar-se nos problemas de percolação em modelo reduzido de algumas estruturas geotécnicas, será dado realce à interacção física da água com o solo.

Refira-se ainda a possibilidade do escoamento da água em meios porosos se poder efectuar em condições saturadas e não saturadas. Com efeito, os maciços terrosos poderão ser constituídos por três fases (sólida, líquida e gasosa). As fases líquida e gasosa estão adstritas exclusivamente à porção que constitui o volume de vazios do solo. Quando os vazios estão completamente preenchidos por água o solo diz-se saturado. Pelo contrário quando os vazios contêm ar e água o solo diz-se não saturado. A superfície que limita superiormente a massa de água, gravítica ou livre, separando as regiões saturadas das não saturadas (a menos de eventuais pequenos volumes de ar presos na massa líquida), designa-se por nível freático ou linha de saturação e, ao longo dessa superfície, a pressão da água é igual à pressão atmosférica. Nos casos extremos, pela ausência manifesta da fase líquida nos poros, o solo diz-se seco.

2.2. ESTADO FÍSICO DOS SOLOS

2.2.1. INTRODUÇÃO

Mais adiante, a propósito da variação da condutividade hidráulica em função do estado físico dos solos, se verá a pertinência de caracterizar cada uma das fases de modo a tornar possível a devida calibração dos modelos numéricos relativos aos modelos físicos propostos.

Os volumes referentes às três fases que constituem um solo e os respectivos pesos permitem definir completamente o estado físico dos solos. Refira-se no entanto que sem causar erro apreciável nos resultados finais o peso da fase gasosa pode considerar-se desprezável.

2.2.2. GRANDEZAS BÁSICAS

A razão entre o volume de vazios, V_V , e o volume da fase sólida, V_S , designa-se por índice de vazios, e , sendo de acordo com a equação 2.1.

$$e = \frac{V_V}{V_S} \quad (2.1.)$$

À relação entre o volume de vazios e o volume total do solo, V , dá-se o nome de porosidade, n , devendo o resultado ser apresentado em percentagem.

$$n = \frac{V_V}{V} \quad (2.2.)$$

O grau de saturação, S , expresso em percentagem, traduz a razão entre o volume de água, V_W , e o volume de vazios do solo.

$$S = \frac{V_W}{V_V} \quad (2.3.)$$

Obviamente que, em condições saturadas o volume de água é igual ao volume de vazios e portanto o grau de saturação vale 100%.

O teor em água, w , deve ser apresentado em percentagem e é calculado pela razão entre o peso da fase líquida, W_W , e o peso da fase sólida, W_S .

$$w = \frac{W_W}{W_S} \quad (2.4.)$$

2.2.3. RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS BÁSICAS

Admita-se que o volume ocupado pelas partículas sólidas é unitário. Observando atentamente as equações 2.1 e 2.2, verifica-se que estas se podem relacionar através do termo comum a ambas, que é o volume de vazios.

$$n = \frac{V_V}{V} = \frac{V_V}{V_S + V_V} \quad (2.5.)$$

Como $V_S=1$, então $V_V=e$, portanto:

$$n = \frac{e}{1+e} \quad (2.6.)$$

Ou então, escrevendo em função do índice de vazios:

$$e = \frac{n}{1-n} \quad (2.7.)$$

O teor em água pode ser relacionado com o índice de vazios, o grau de saturação e a densidade das partículas sólidas, G , que, por sua vez, é dada pela razão do peso volúmico das partículas sólidas, γ_s , e o peso volúmico da água, γ_w .

$$w = \frac{V_W \cdot \gamma_W}{V_S \cdot \gamma_S} \quad (2.8.)$$

Atendendo também à equação 2.3, pode escrever-se o teor em água da seguinte forma:

$$w = \frac{S \cdot V_V \cdot \gamma_W}{V_S \cdot \gamma_S} \quad (2.9.)$$

De acordo com o exposto na equação 2.1, resulta finalmente:

$$w = \frac{S \cdot e}{G} \quad (2.10.)$$

2.3. CAPILARIDADE

Caso não existisse nenhum mecanismo de resistência à tracção de um fluido o nível freático representaria a fronteira entre uma região saturada e uma região seca sem qualquer fenómeno de transição entre estes dois estados físicos. Note-se porém que a realidade é bem distinta pois existem evidências de que a superfície de um líquido resiste a tensões tangenciais por efeito da atracção, para o interior da massa líquida de moléculas adjacentes à superfície. Assim, de acordo com M. M. Fernandes (2006), dado que a superfície de um líquido se comporta como uma membrana elástica tensa em todas as direcções, gera-se uma tensão superficial, grandeza escalar expressa em força por unidade de comprimento, cuja consequência se traduz no fenómeno de capilaridade. Devido ao processo de ascensão capilar torna-se possível a existência de condições saturadas e parcialmente saturadas acima do nível freático.

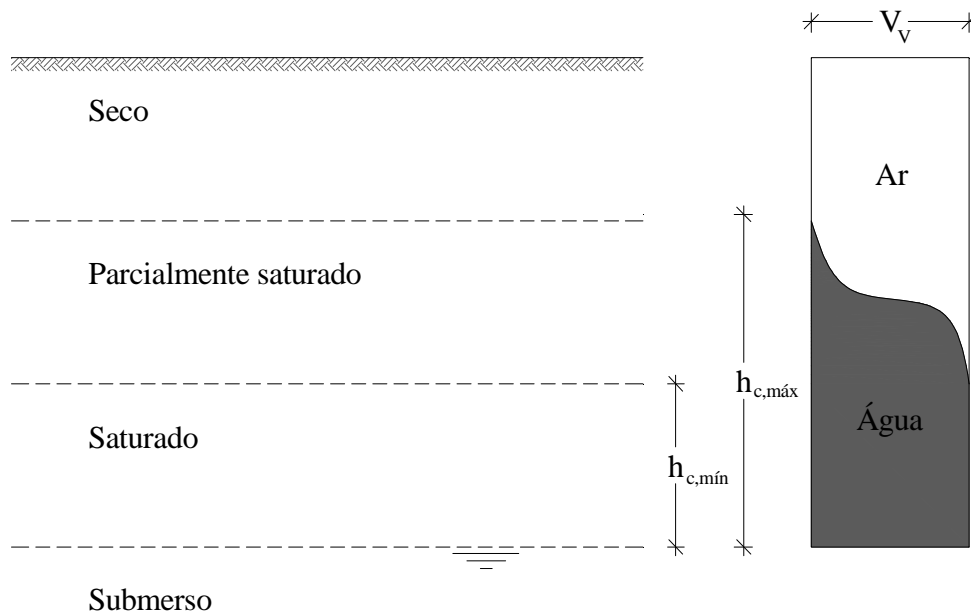


Fig.2.1 – Evolução da fase líquida num solo acima do nível freático

A ascensão capilar da água em meios porosos é análoga à verificada num tubo com diâmetro suficientemente pequeno, em que se possa perceber na parte superior do líquido um menisco côncavo, mergulhado num recipiente nas condições expostas na Fig.2.2. Esta ascensão será devida à atracção entre a água e as paredes do tubo e a tensão superficial que se desenvolve na interface água-ar no topo da coluna de água. A componente vertical da tensão superficial, T , deverá equilibrar o peso da coluna de água que sobe no tubo.

$$2 \pi r T \cos \alpha = \pi r^2 h_c \gamma_w \quad (2.11.)$$

O raio do menisco, r_m , poderá ser escrito em função do raio do tubo capilar, r , na forma que se segue:

$$r_m = \frac{r}{\cos \alpha} \quad (2.12.)$$

A altura de ascensão capilar, h_c , pode assim ser calculada de acordo com a equação 2.13. Para água em contacto com o ar, o valor da tensão superficial é aproximadamente igual a $7,3 \times 10^{-2} \text{N/m}$.

$$h_c = \frac{2T}{r_m \gamma_w} \quad (2.13.)$$

A equação anterior traduz a lei de Jurin escrita em função do raio do menisco. Daqui se percebe facilmente que a altura de ascensão capilar é tanto maior quanto menor for o raio do tubo capilar.

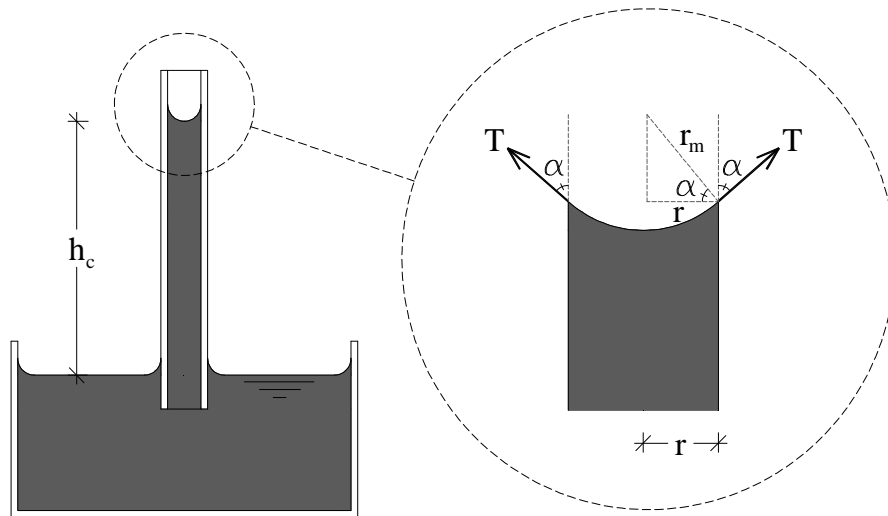


Fig.2.2 – Tensão superficial de um fluido em tubo capilar

Repare-se contudo que o fenómeno da capilaridade nos solos tem um comportamento mais complexo do que o observado na Fig.2.2, pois os espaços vazios assumem formas e dimensões irregulares à medida que estes se interligam em todas as direcções. Compreende-se assim que a lei de Jurin não tem aplicação directa no estudo da capilaridade em solos, permitindo no entanto facilitar o entendimento dos parâmetros que afectam o comportamento dos solos na presença de água acima do nível freático e determinar a ordem de grandeza da ascensão capilar em função do tipo de solo. Como se pode observar na Fig.2.1, a altura de ascensão capilar nos solos varia de ponto para ponto e está compreendida entre um valor mínimo, $h_{c,mín}$, associada aos canalículos de maiores dimensões, e um valor máximo, $h_{c,máx}$, associada aos canalículos mais finos. Terzaghi e Peck (1948) propõem a avaliação da altura de ascensão capilar num solo em função do índice de vazios, do diâmetro efectivo em milímetros, D_{10} , e de uma constante, C , que depende da forma dos grãos e das impurezas podendo variar entre 10 a 50mm^2 .

$$h_c = \frac{C}{e \cdot D_{10}} \quad (2.14.)$$

A água situada acima do nível freático está sujeita a pressões negativas e por isso nessa região ocorre o fenómeno de sucção. A sucção da água no solo representa a força a que a água está submetida e varia com o teor da fase líquida sendo nula quando o solo está submerso. A água que não forma canais contínuos e cujo menisco toca as partículas do solo origina, por efeito da tensão superficial, uma pressão intergranular denominada pressão capilar. Estas forças capilares conferem uma determinada coesão ao solo e por isso favorecem a resistência tangencial. Note-se contudo que este efeito capilar não é permanente e considerá-lo para efeitos de resistência mobilizável pelo solo seria erro grosseiro contra a segurança, pois, quando a água capilar desaparece, devido à evaporação ou descida do nível freático, a parcela coesiva anula-se. Refira-se ainda que, como na região acima do nível freático se geram pressões neutras negativas, de acordo com o princípio da tensão efectiva, tal traduz-se em tensões efectivas mais elevadas.

2.4. CARACTERIZAÇÃO HIDRÁULICA DOS SOLOS

2.4.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

De modo a dar resposta aos problemas que envolvem a determinação da taxa de fluxo, da resistência e da deformabilidade de um solo, é necessário conhecer os princípios que governam o escoamento de fluidos e o fluxo da água em meios porosos.

Devido à forma irregular das partículas sólidas que o constituem um solo contém inúmeros espaços vazios entre os grãos. Em geral todos os vazios de um solo estão ligados na sua vizinhança a outros espaços vazios. De acordo com Sam Helwany (2007), recentes métodos de identificação como a micrografia electrónica sugerem que mesmo no caso das argilas todos os espaços vazios estão interligados. Inevitavelmente estes espaços interligados formam pequenos tubos que possibilitam o escoamento da água. A dimensão média desses tubos depende da porosidade do solo que, por sua vez, determina a capacidade que a água tem de percolar pelo solo. No domínio das estruturas geotécnicas, tais como as barragens de aterro, as ensecadeiras e as cortinas impermeáveis, é imperioso que o projectista seja capaz de avaliar a quantidade de água de percolação num solo e as forças associadas a esse fluxo.

No domínio da Mecânica dos Solos, o coeficiente de permeabilidade é uma medida que permite avaliar a capacidade que um fluido tem de escoar num meio poroso. De acordo com M. M. Fernandes (2006), de entre os parâmetros físicos e mecânicos no domínio da Engenharia Civil, o coeficiente de permeabilidade será aquele que varia numa gama mais lata de valores: oito a nove ordens de grandeza para os solos correntes. A experiência tem demonstrado que os cascalhos são mais permeáveis do que as areias, as areias são mais permeáveis do que os siltes e os siltes são mais permeáveis do que as argilas. Refira-se ainda que, a introdução de uma pequena fracção fina num solo grosseiro pode conduzir a uma redução significativa da sua permeabilidade, ou seja, a relação entre a granulometria de um solo e a sua condutividade hidráulica é não linear.

2.4.2. CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Considerando um escoamento em regime permanente de um fluido incompressível e não viscoso, a carga hidráulica total num dado ponto, h , é calculada pela soma de três componentes: a altura geométrica, h_e , a altura piezométrica, h_p , e a altura cinética, h_v .

$$h = h_e + h_p + h_v \quad (2.15.)$$

A altura geométrica representa a distância do ponto considerado ao referencial horizontal adoptado. Admitindo que o fluido que escoo é a água, a altura piezométrica e a altura cinética são calculadas através das seguintes equações:

$$h_p = \frac{u}{\gamma_w} \quad h_v = \frac{v^2}{2g} \quad (2.16.)$$

em que u representa a pressão neutra, v é a velocidade de escoamento e g corresponde à aceleração da gravidade. A equação de Bernoulli toma então a forma que se apresenta na equação 2.17.

$$h = z + \frac{u}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g} \quad (2.17.)$$

Na Fig.2.3, pode-se observar a carga hidráulica que se espera registrar na leitura de um piezômetro com abertura inferior à cota do ponto genérico A e incluído no domínio de um certo escoamento.

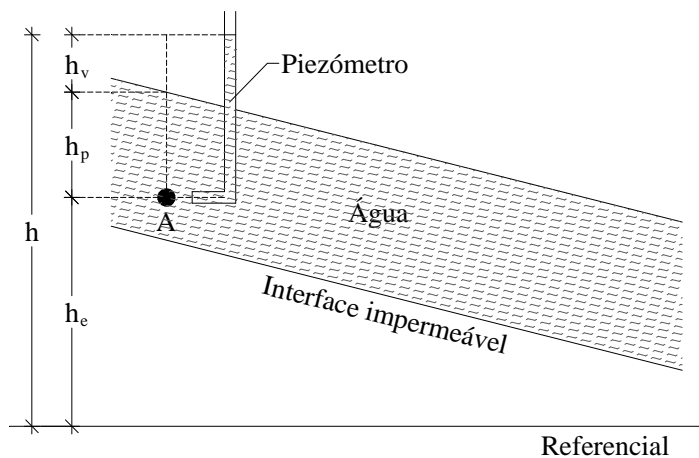


Fig.2.3 – Carga hidráulica num ponto A para velocidades do escoamento consideráveis

Note-se contudo que o fenómeno da percolação nos solos caracteriza-se pelo movimento da água a muito baixas velocidades, donde, neste contexto a parcela cinética pode ser desprezada. No entanto, facilmente se pode confirmar a validade deste pressuposto pela leitura do nível da água no piezômetro. Observando a Fig.2.3, se a velocidade do escoamento num determinado ponto A for considerável, verifica-se que o nível da água no piezômetro será visivelmente superior ao nível da superfície livre da água relativamente a um plano vertical que passa por esse ponto. Por outro lado, observando a Fig.2.4, quando a velocidade do escoamento for suficientemente baixa tal que seja possível desprezar a altura cinética, o nível da água no piezômetro deverá coincidir com o nível da superfície livre da água relativamente a um plano vertical que passa pelo ponto considerado.

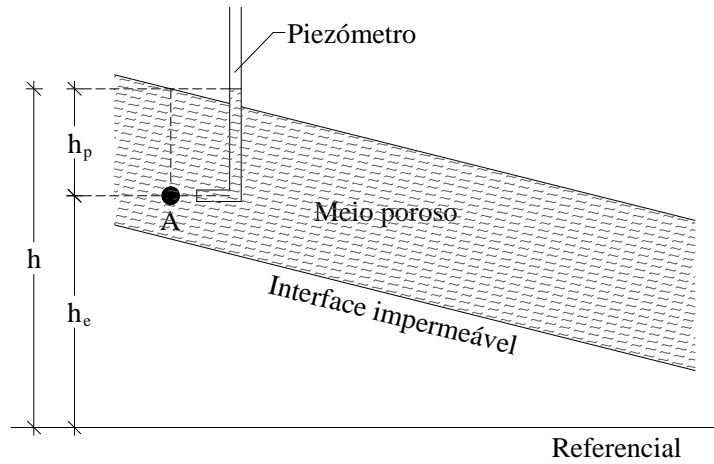


Fig.2.4 – Carga hidráulica num ponto A para velocidades desprezáveis

De acordo com o exposto, para o fenómeno da percolação da água, a equação 2.17 simplifica-se nos termos da equação 2.18.

$$h = z + \frac{u}{\gamma_w} \quad (2.18.)$$

A carga hidráulica total refere-se à energia por unidade de peso escoado e tem as dimensões de um comprimento. A altura ou cota geométrica representa a energia potencial de posição e a altura piezométrica é uma energia potencial de pressão associada ao estado de compressão. À soma da cota com a altura piezométrica dá-se também a designação de cota piezométrica.

À medida que a água percola pelos canalículos de um solo, de um ponto com maior carga hidráulica para outro ponto de carga hidráulica inferior, a água perde alguma energia devido à resistência das partículas sólidas ao movimento do líquido. Para o caso da equação 2.18, a perda de energia, ou perda de carga hidráulica, Δh , corresponde à diferença entre os níveis da água relativos aos pontos considerados.

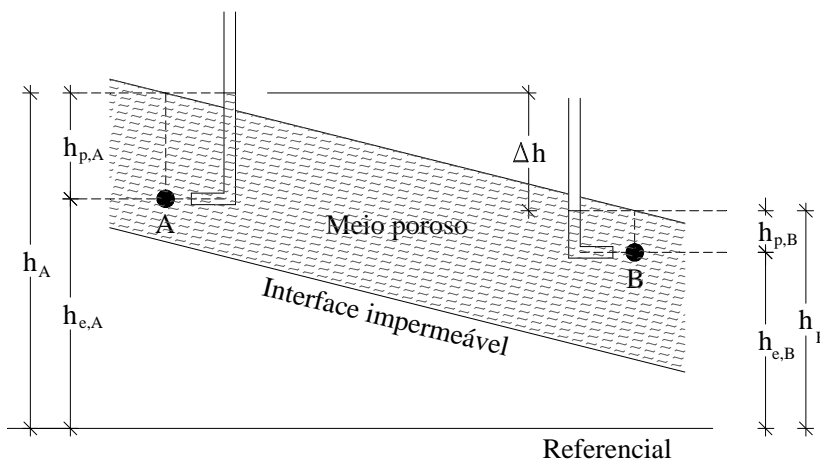


Fig.2.5 – Perda de carga hidráulica entre dois pontos genéricos de um escoamento

Como se pode observar pela Fig.2.5, o balanço energético entre dois pontos de um escoamento pode ser apresentado de acordo com a equação 2.19.

$$h_A = h_B + \Delta h \quad (2.19.)$$

O gradiente hidráulico, i , ou perda média de carga ao longo do comprimento, L , da linha de corrente restringida às secções de controlo que contêm os pontos **A** e **B**, é calculado através da equação 2.20.

$$i = \frac{\Delta h}{L} \quad (2.20.)$$

2.4.3. REGIME DE ESCOAMENTO

O movimento de um fluido pode ser efectuado em regime laminar ou turbulento. Em regime laminar, as partículas de água movimentam-se ao longo de uma trajectória bem definida e nunca intersectam as trajectórias de outras partículas de água. Pode-se imaginar nestes casos que existem camadas de fluido que deslizam umas sobre as outras. Em regime turbulento, as partículas de água circulam em trajectórias irregulares e até aleatórias. A partir dos seus ensaios experimentais do fluxo de fluidos em tubos, Osborne Reynolds estabeleceu que existe um limite mínimo da velocidade do escoamento a partir do qual este passa de laminar para turbulento, designando-a por velocidade crítica mínima, v_c . Em regimes laminares, a resistência ao movimento do fluido é principalmente devida à viscosidade do líquido e as condições de fronteira não assumem grande significado. Em regimes turbulentos passa-se exactamente o contrário.

Para o caso da percolação da água em meios porosos, a velocidade crítica mínima é governada por uma grandeza adimensional designada por número de Reynolds que é função da viscosidade cinemática, ν , do diâmetro dos canalículos, D , do peso volúmico da água, da viscosidade da água, μ , e da aceleração da gravidade. Note-se que o coeficiente de viscosidade cinemática, ν , é o quociente entre a viscosidade da água, μ , e a massa específica, ρ .

$$R_e = \frac{v D \gamma_w}{\mu g} = \frac{\mu D \gamma_w}{\mu \rho g} = \frac{D \gamma_w}{\rho g} \quad (2.21.)$$

Reynolds constatou ainda que a velocidade crítica mínima é governada através da seguinte igualdade:

$$R_e = \frac{v_c D}{\nu} = 2000 \quad (2.22.)$$

O estudo dos escoamentos em meios porosos assume uma complexidade muito grande quando efectuado exaustivamente pelo que geralmente a análise incide sobre condições médias. Como os interstícios da maioria dos solos têm dimensões reduzidas, conduzindo a velocidades baixas, o fluxo

pode ser considerado laminar à escala macroscópica. Note-se contudo que pela disposição aleatória das partículas do solo, à escala microscópica o percurso das partículas de água é tortuoso e errático e os princípios que regem o regime laminar perdem aplicabilidade.



Fig.2.6 – Trajectória de uma partícula de água à escala microscópica (a azul) e à escala macroscópica (a laranja)

Refira-se ainda que no caso dos solos grosseiros, como as areias grossas e cascalhos, pode acontecer que o fluxo se efectue em regime turbulento.

2.4.4. LEI DE DARCY

Darcy desenvolveu um dispositivo experimental, semelhante ao representado na Fig.2.7, para o estudo das propriedades do escoamento da água através de um solo granular. Este regime de percolação é conseguido à custa da imposição de uma diferença de carga hidráulica nos extremos do escoamento.

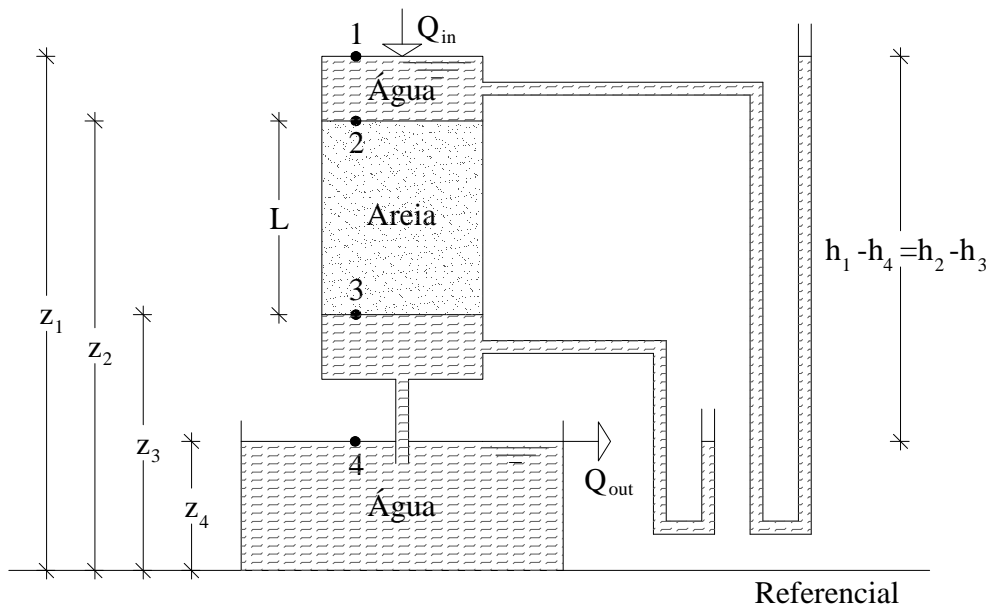


Fig.2.7 – Experiência de Darcy

Facilmente se percebe pela Fig.2.7 que o trajecto da água entre as secções transversais 1 e 2 e as secções transversais 3 e 4 se realiza sem perdas de carga. Tal facto permite afirmar que as perdas de carga se concentram no percurso da água pelo meio poroso.

Através da realização de vários ensaios experimentais com um dispositivo semelhante ao mostrado na Fig.2.7, utilizando diferentes valores do comprimento da amostra de solo, L , da perda de carga hidráulica e determinando em cada caso o caudal resultante, conclui-se que o fluxo é directamente proporcional à perda de carga e inversamente proporcional ao comprimento da amostra.

$$Q = k \cdot \frac{h_1 - h_4}{L} \cdot S \quad (2.23.)$$

sendo S a área da secção transversal da amostra e k a constante de proporcionalidade definida como o coeficiente de permeabilidade do solo em condições saturadas. Tendo presente a equação 2.20 pode escrever-se a equação 2.23 de outro modo:

$$Q = k \cdot i \cdot S \quad (2.24.)$$

Dividindo ambos os membros da equação 2.24 pela secção transversal S , resulta a expressão da lei de Darcy que relaciona a velocidade de percolação, v , com o coeficiente de permeabilidade, k , e o gradiente hidráulico, i .

$$v = k \cdot i \quad (2.25.)$$

A propósito da discussão efectuada no ponto 2.4.3 convém salientar o carácter macroscópico da velocidade obtida pela lei de Darcy. Observando a Fig.2.6 é perceptível que a velocidade real de uma partícula de água é superior à calculada pela equação 2.25 pois, dada a sinuosidade dos canalículos do solo, a trajectória microscópica é superior à trajectória média. C. Venkatramaiah (2006) refere que tal se deve ao facto da área média dos canalículos de escoamento através do solo se reduzir por efeito da presença dos grãos do solo.

A velocidade de percolação das partículas de água pode ser relacionada com a velocidade média do fluxo pois o caudal em ambos os casos é igual.

$$Q = S v = S_v v_p \quad (2.26.)$$

em que S_v é a área da secção transversal dos canalículos e v_p é a velocidade de percolação das partículas de água. Assim, v_p pode ser calculada através da seguinte equação:

$$v_p = v \frac{S}{S_v} \quad (2.27.)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da equação 2.27 pelo comprimento da amostra, L , resulta:

$$v_p = v \frac{S}{S_v} \cdot \frac{L}{L} = v \frac{V}{V_v} \quad (2.28.)$$

Atendendo à equação 2.2 constata-se que a velocidade de percolação de uma partícula de água é dada pela razão da velocidade média do escoamento pela porosidade.

$$v_p = \frac{v}{n} \quad (2.29.)$$

Refira-se no entanto que a secção transversal S_v deve ser entendida como um valor médio e consequentemente a velocidade v_p é também um valor médio. Como se assumiu que as partículas de água se deslocam em regime laminar e que a velocidade é constante ao longo do percurso, a velocidade v_p deve ser encarada, tal como no caso da velocidade da lei de Darcy, como um valor fictício.

A equação 2.29 pode ser escrita da forma que se segue:

$$v_p = \frac{k i}{n} \quad (2.30.)$$

resultando então:

$$v_p = k_p i \quad (2.31.)$$

em que k_p representa o coeficiente de percolação e é obtido pela razão do coeficiente de permeabilidade com a porosidade.

Os valores típicos da permeabilidade dos solos podem ser consultados no Quadro 2.1.

Quadro 2.1 – Valores típicos da permeabilidade

Descrição do Solo	k [cm/s]	Grau de permeabilidade
Grossoiro	$> 10^{-1}$	Alto
Cascalhos finos a areias médias a finas	$10^{-1} - 10^{-3}$	Médio
Areias finas a siltes soltos	$10^{-3} - 10^{-5}$	Baixo
Siltes compactos a siltes argilosos	$10^{-5} - 10^{-7}$	Muito baixo
Argilas siltosas a argilas	$< 10^{-7}$	Praticamente impermeável

Refira-se que o grau de permeabilidade referido no Quadro 2.1 é de acordo com a proposta de Terzaghi e Peck (1948).

2.4.5. DETERMINAÇÃO DA PERMEABILIDADE DOS SOLOS

A avaliação da permeabilidade dos solos pode ser realizada em laboratório ou *in situ*. A determinação da permeabilidade *in situ* poderá ser preferível nos casos em que o processo de amostragem provoque alteração significativa no arranjo inicial das partículas sólidas quando se trate de um maciço estratificado e nas situações em que a recolha de amostras seja difícil. Por outro lado, os ensaios de laboratório permitem relacionar a permeabilidade com o índice de vazios e, em geral, são sempre efectuados. No caso particular das obras de aterro como os solos são previamente manipulados para ficarem com as características de resistência e deformabilidade impostas na fase de projecto, os ensaios *in situ* poderão ser aqui pouco significativos.

A determinação em laboratório do coeficiente de permeabilidade pode ser realizada através de três tipos de ensaios, nomeadamente, o ensaio com permeâmetro de carga constante, o ensaio com permeâmetro de carga variável e o ensaio edométrico. De acordo com Braja M. Das (2008), os ensaios de carga constante, apesar de teoricamente poderem ser usados em todo o tipo de solos, são mais adequados para materiais granulares com maior permeabilidade, ao passo que os ensaios de carga variável são melhores para solos finos e os ensaios edométricos são usados frequentemente em solos argilosos.

No âmbito da presente análise serão realizados estudos experimentais e numéricos com base em materiais granulares cuja permeabilidade se enquadra no domínio do ensaio com permeâmetro de carga constante. Neste método a amostra de solo é colocada dentro de um molde cilíndrico e a perda de carga hidráulica é mantida constante por ajuste do nível da água a montante. A água que sai do sistema é recolhida para um recipiente cilíndrico graduado e a duração do tempo que essa recolha demorou é anotada. A figura seguinte representa esquematicamente o ensaio a efectuar.

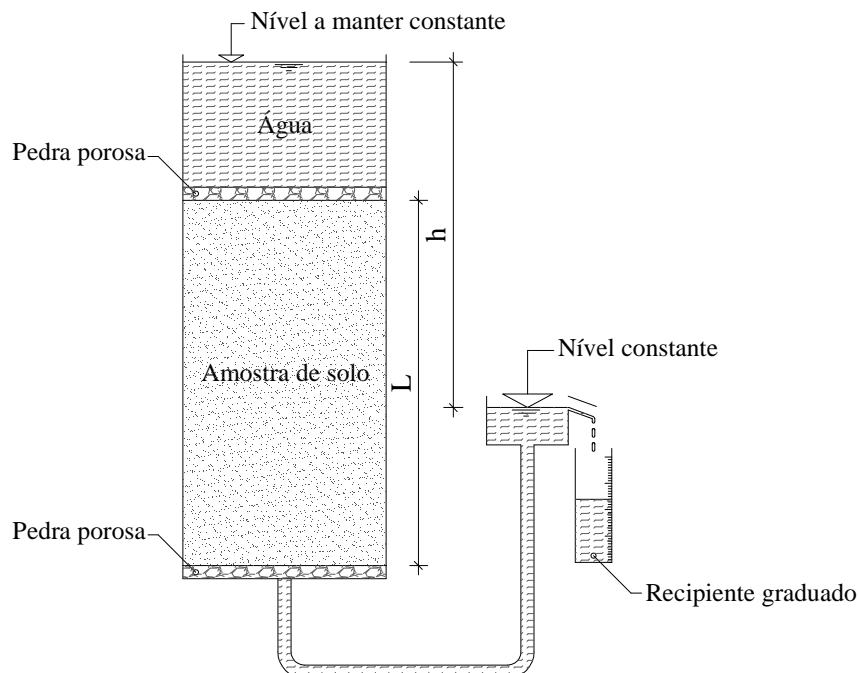


Fig.2.8 – Permeâmetro de carga constante

Na Fig.2.8 é possível observar que o nível superior de água deve ser mantido constante. Este requisito serve o propósito de garantir que o escoamento no meio poroso, assumidamente laminar, se realiza em regime permanente considerando-se deste modo válida a lei de Darcy expressa na equação 2.25.

2.4.6. ESTIMATIVA DO COEFICIENTE DE PERMEABILIDADE PARA SOLOS GRANULARES

Com o objectivo de avaliar a ordem de grandeza do coeficiente de permeabilidade dos solos granulares, existem expressões semiempíricas que relacionam este parâmetro com outras características físicas do solo.

Para areias razoavelmente uniformes, ou seja, com baixo coeficiente de uniformidade, Hazen (1911) estabelece o valor de **k** em função do quadrado do diâmetro efectivo, **D₁₀**.

$$k = C \cdot D_{10}^2 \quad (2.33.)$$

De acordo com T. W. Lambe, R. V. Whitman (1979), o valor do parâmetro **C** pode variar num intervalo de 100 a 4200 com média de 1600. Refira-se ainda que Braja M. Das (2008) afirma que a presença de pequenas quantidades de silte ou argila nos solos granulares pode alterar substancialmente o valor do coeficiente de permeabilidade. Pelo exposto, a equação 2.33 deverá ser utilizada com algumas reservas, podendo no entanto servir como uma primeira aproximação ao valor exacto.

Casagrande propõe a avaliação do coeficiente de permeabilidade para areias finas a médias de acordo com a equação 2.34.

$$k = 1.4 \cdot e \cdot k_{0,85} \quad (2.34.)$$

sendo **k_{0,85}** o coeficiente de permeabilidade em correspondência com o índice de vazios igual a 0.85 e **e** o índice de vazios associado a **k**.

Kozeny (1927) e Carman (1956) sugerem a estimativa do coeficiente de permeabilidade à custa da relação com o factor de forma **C_S**, da área da superfície por unidade de volume das partículas sólidas, **S_S**, do factor de tortuosidade dos canalículos do solo, **T**, do peso volúmico da água, da viscosidade da água e do índice de vazios.

$$k = \frac{1}{C_S \cdot S_S^2 \cdot T^2} \cdot \frac{\gamma_w}{\mu} \cdot \frac{e^3}{1+e} \quad (2.35.)$$

em que:

$$S_S \cdot V_S = S_V \cdot V \quad (2.36.)$$

sendo S_v a área da superfície por unidade de volume do solo, V_s o volume das partículas sólidas e V o volume de solo. Para solos granulares os factores de forma e de tortuosidade valem aproximadamente 2.5 e $2^{1/2}$, respectivamente. Refira-se que a utilização da equação 2.35 é vivamente desaconselhada para a avaliação de k nos solos argilosos pois têm-se observado resultados discrepantes.

Utilizando a equação 2.35 e os seus resultados experimentais em areias uniformes de Madison, Amer, Awad (1974) propõem a seguinte relação:

$$k = C_1 \cdot D_{10}^{2.32} \cdot C_u^{0.6} \cdot \frac{e^3}{1+e} \quad (2.37.)$$

em que C_1 é uma constante e C_u é o coeficiente de uniformidade do solo que é calculado pela razão entre o valor de D_{60} e D_{10} obtidos a partir da curva granulométrica do material. O valor em índice destes dois parâmetros representa a percentagem em peso das partículas com dimensões inferiores a D_{60} ou D_{10} , conforme o caso.

Chapuis (2004) propõe a relação de k com D_{10} e o índice de vazios de acordo com a equação 2.38, sendo válida para areias uniformes e cascalhos naturais numa gama de valores de k compreendidos entre 10^{-3} a 10^{-5} m/s.

$$k = 2.4622 \cdot \left[D_{10}^2 \cdot C_u^{0.6} \cdot \frac{e^3}{1+e} \right]^{0.7825} \quad (2.38.)$$

A equação anterior poderá ainda ser aplicada em areias siltosas naturais sem plasticidade e não é recomendada para materiais alterados ou que tenham alguma plasticidade.

Através da realização de ensaios laboratoriais sobre amostras com granulometria compreendida entre 0.074 e 25.4mm e com coeficientes de uniformidade com valores de 1.04 a 12, Kenney *et al.* (1984) relacionam a permeabilidade absoluta, K , com o parâmetro D_5 , cujo significado é análogo ao dos parâmetros D_{10} e D_{60} .

$$K = (0.05 - 1) \cdot D_5^2 \quad (2.39.)$$

Carrier (2003) sugere a modificação da equação 2.35 admitindo para a temperatura de 20°C que a razão de γ_w por μ vale $9.33 \times 10^4 \text{ Scm}^{-1}$ e que $C_s T^2$ é aproximadamente igual a 5.

$$k = 1.99 \times 10^4 \cdot \left(\frac{100}{\sum \frac{f_i}{D_{li}^{0.404} \times D_{si}^{0.595}}} \right)^5 \cdot \left(\frac{1}{SF} \right)^2 \cdot \frac{e^3}{1+e} \quad (1.40.)$$

sendo f_i a fracção de partículas em percentagem entre os peneiros s_i de menor abertura e os peneiros l_i com maior abertura. D_{li} e D_{si} representam a dimensão máxima das partículas retida nos peneiros e SF é o factor de forma que, dependendo das características angulosas das partículas, pode variar entre 6 e 8.

2.4.7. ANISOTROPIA DE PERMEABILIDADE

2.4.7.1. Variação direccional

Geralmente os solos naturais apresentam variação direccional da permeabilidade cujo grau de anisotropia é função do tipo de solo e da natureza da deposição das suas partículas sólidas. Na maioria dos casos a anisotropia de permeabilidade é mais importante nos solos argilosos, em particular quando a forma das partículas se aproxima da laminar, afastando-se da “esférica”. As direcções de permeabilidades máxima e mínima formam geralmente ângulos rectos entre si, sendo a máxima permeabilidade associada à direcção horizontal. Na figura seguinte mostra-se um trecho genérico de um escoamento no qual se intersectam uma linha de fluxo com uma linha equipotencial. Note-se que nos solos anisotrópicos as linhas de corrente não são ortogonais às linhas equipotenciais.

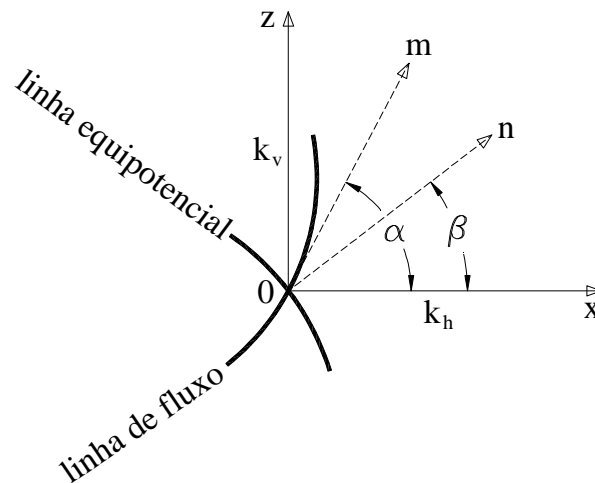


Fig.2.9 – Trecho genérico de fluxo com anisotropia de permeabilidade

A direcção m é dada pela tangente à linha de fluxo na origem do eixo das coordenadas definindo assim a direcção da velocidade de percolação. A direcção n é dada pela normal à linha equipotencial coincidindo desse modo com a direcção do gradiente hidráulico. O coeficiente de permeabilidade máximo é k_h , k_v é o coeficiente de permeabilidade mínimo e os coeficientes de permeabilidade k_α e k_β estão em correspondência com as direcções m e n , respectivamente.

O valor de k_α pode ser calculado através da equação 2.41.

$$k_\alpha = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{k_h} + \frac{\sin^2 \alpha}{k_v}} \quad (2.41.)$$

Por outro lado, a permeabilidade segundo a direcção n pode ser avaliada através da equação 2.42.

$$k_{\beta} = k_h \cos^2 \beta + k_v \sin^2 \beta \quad (2.42.)$$

Admitindo uma razão de permeabilidades horizontal e vertical igual a 1.5, é possível observar a natureza da variação de k_{α} e de k_{β} em função dos ângulos α e β , respectivamente.

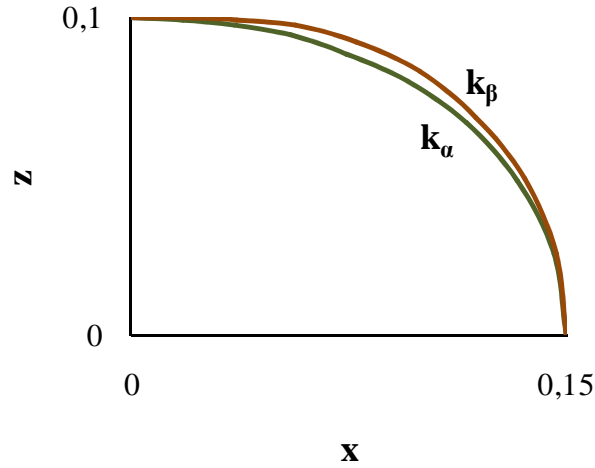


Fig.2.10 – Variação da permeabilidade com anisotropia direccional

Na Fig.2.10 observa-se que os resultados produzidos pelas equações 2.41 e 2.42 são ligeiramente diferentes. Braja M. Das (2008) afirma que a máxima diferença nos valores de k_{α} e de k_{β} não será superior a 25%. Nos solos granulares será de esperar encontrar diferenças menos discrepantes pois as partículas sólidas assumem geralmente a forma rolada.

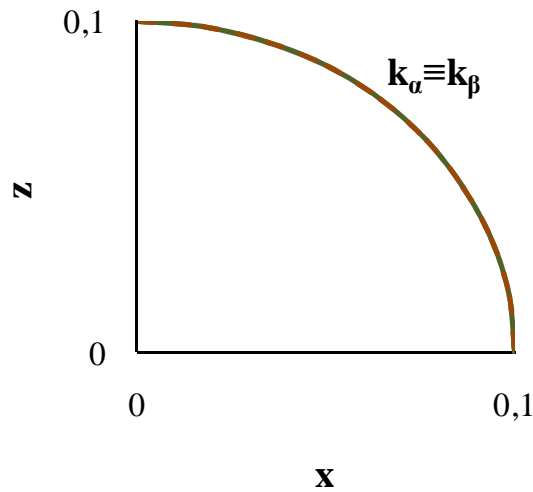


Fig.2.11 – Variação da permeabilidade com isotropia direccional

Observando a Fig.2.11 conclui-se que no limite, quando as partículas sólidas assumam a forma “esférica” havendo portanto isotropia direccional da permeabilidade, os valores de k_{α} e de k_{β} serão coincidentes e de valor igual ao coeficiente de permeabilidade que é constante em todas as direções.

2.4.7.2. Solos estratificados

De acordo com M. M. Fernandes (2006), a estratificação dos solos será o factor que mais contribui para a anisotropia dos maciços terrosos. A figura seguinte mostra um maciço terroso atravessado por um caudal na direcção vertical, Q_v , para o qual se pode designar um coeficiente de permeabilidade equivalente, k_v^e .

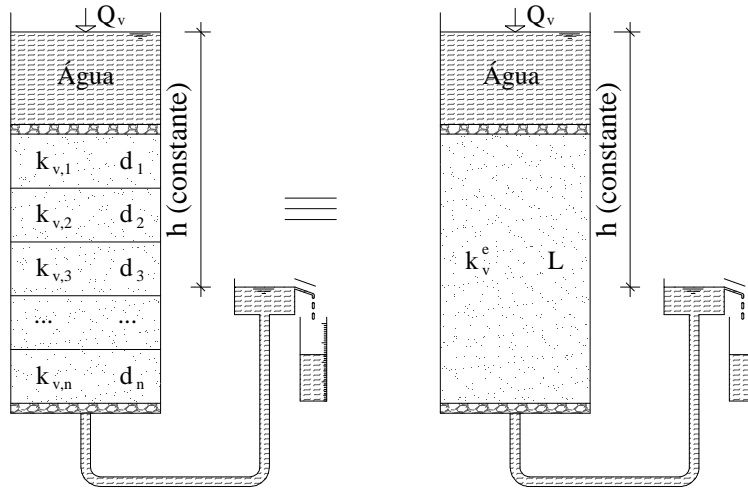


Fig.2.12 – Percolação normal à estratificação do solo

$$k_v^e = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{k_{v,i}}} \quad (2.43.)$$

O coeficiente de permeabilidade equivalente segundo a direcção horizontal pode ser calculado de forma análoga ao exposto na Fig.2.12.

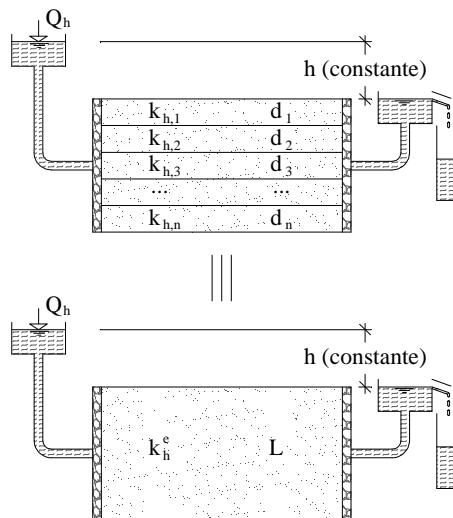


Fig.2.13 – Percolação segundo a direcção da estratificação do solo

Assim:

$$k_h^e = \frac{\sum_{i=1}^n k_{h,i} \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n d_i} \quad (2.44.)$$

Admita-se agora um maciço terroso constituído por dois horizontes com igual espessura, \mathbf{d} , e cada um deles isotrópico em termos de permeabilidade. Seja χ a razão do coeficiente de permeabilidade da segunda camada pelo da primeira.

$$\chi = \frac{k_2}{k_1} \quad (2.45.)$$

Através da equação 2.44 vem que:

$$k_h^e = \frac{k_1 d + k_2 d}{2d} \quad (2.46.)$$

Observando a equação 2.45 é possível reformular a expressão anterior da seguinte forma:

$$k_h^e = \frac{d(k_1 + k_1 \chi)}{2d} \quad (2.47.)$$

E então:

$$k_h^e = \frac{k_1(1 + \chi)}{2} \quad (2.48.)$$

Com toda a generalidade, o coeficiente de permeabilidade vertical é conforme a equação 2.49.

$$k_v^e = \frac{2 \chi k_1}{1 + \chi} \quad (2.49.)$$

A razão das permeabilidades expostas nas equações 2.48 e 2.49 é mostrada em seguida.

$$\frac{k_h^e}{k_v^e} = \frac{(1 + \chi)^2}{4\chi} \quad (2.50.)$$

Fazendo variar os coeficientes de permeabilidade dos horizontes 1 e 2 de modo que estes sejam a princípio iguais e depois uma e duas ordens de grandeza diferentes, surgem os resultados que se apresentam na Fig.2.14, verificando-se que apesar das camadas de solo serem isotrópicas em termos de permeabilidade, o maciço terroso apresenta anisotropia de permeabilidade, sendo tanto maior quanto maior for a discrepância de permeabilidades dos horizontes.

A este propósito M. M. Fernandes (2006) refere que o conceito de maciço estratificado pode ser estendido ao caso de estrato único pois situações há em que se verifica uma sucessão de camadas delgadas granulometricamente uniformes, com escala centimétrica ou milimétrica, com características granulométricas algo distintas. Como o valor do coeficiente de permeabilidade varia substancialmente com a granulometria do solo, então variações do tamanho das partículas relativamente modestas poderão induzir alterações significativas da permeabilidade entre subcamadas.

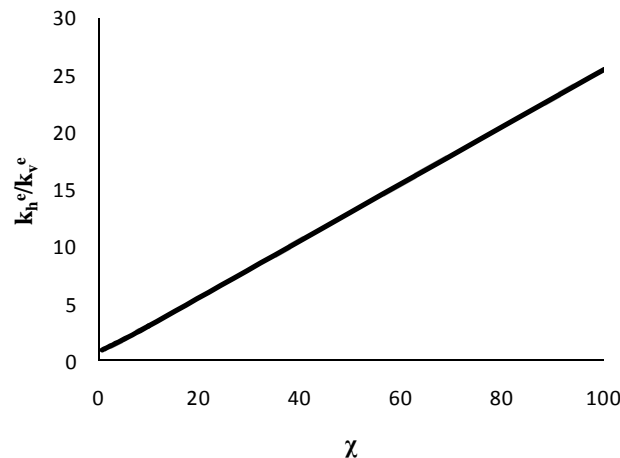


Fig.2.14 – Anisotropia de permeabilidade de um maciço formado por duas camadas com a mesma espessura e com isotropia de permeabilidade

Estas variações, designadas também por macrofábrica, conferem anisotropia de permeabilidade aos estratos macroscopicamente homogéneos.

2.4.8. FACTORES QUE AFECTAM A PERMEABILIDADE

2.4.8.1. Proposta de Taylor

A permeabilidade depende das características do fluido que atravessa o meio poroso bem como das propriedades do solo. Com base na lei de Poiseuille para escoamentos em regime laminar através de um tubo capilar de secção circular, Taylor (1948) propõe uma equação que pretende reflectir a influência destas características. A equação 2.51 permite analisar as diferentes variáveis que afectam a permeabilidade. As características do fluido deverão ser consideradas em primeiro lugar e só depois se deverá analisar as propriedades do solo.

$$k = D_s^2 \cdot \frac{\gamma}{\mu} \cdot \frac{e^3}{1+e} \cdot C \quad (2.51.)$$

em que, k é o coeficiente de permeabilidade de acordo com a lei de Darcy, D_s é a dimensão efectiva das partículas, γ é o peso volúmico do fluido, μ é a viscosidade do fluido, e representa o índice de vazios e C é um factor de forma.

2.4.8.2. Viscosidade do fluido induzida pela variação da temperatura

Pela equação 2.51 percebe-se que a viscosidade e o peso volúmico do fluido têm influência na permeabilidade. Para o caso da água o peso volúmico não constitui qualquer problema pois o seu valor não apresenta variação significativa. Braja M. Das (2008) refere que a temperatura tem influência na permeabilidade dos solos pelo seu efeito sobre a viscosidade da água. Tomando como referência a temperatura de 20°C, a relação de permeabilidades a diferentes temperaturas é mostrada na equação 2.52.

$$k_{20} = k_T \cdot \frac{\mu_T}{\mu_{20}} \quad (2.52.)$$

No âmbito deste trabalho serão realizados diversos modelos reduzidos de estruturas geotécnicas cuja experimentação será diferida no tempo pelo que a variação das condições térmicas da água nos modelos parece bastante provável. Pelo exposto, afigura-se adequado investigar a importância da variação da permeabilidade em função da temperatura da água nos modelos. Admitindo que pode ocorrer uma variação de 5°C em torno da temperatura de referência e adoptando a gama de permeabilidades em mm/s para k_{20} , apresentada no Quadro 2.1, obtiveram-se os valores que podem ser observados no Quadro 2.2. Alguns valores da razão entre a viscosidade da água para uma temperatura genérica e aquela que corresponde à temperatura padrão podem ser consultados no Quadro 2.2, estando estes de acordo com os dados publicados por Braja M. Das (2008).

Quadro 2.2 – Permeabilidade em função da temperatura

T [°C]	μ_T/μ_{20}	k_T [mm/s]			
		10^2	10	10^{-1}	10^{-2}
15	1.135	88.106	8.811	0.881	0.088
16	1.106	90.416	9.042	0.904	0.090
17	1.078	92.764	9.276	0.928	0.093
18	1.051	95.147	9.515	0.951	0.095
19	1.025	97.561	9.756	0.976	0.098
20	1.000	100.000	10.000	1.000	0.100
21	0.975	102.564	10.256	1.026	0.103
22	0.952	105.042	10.504	1.050	0.105
23	0.930	107.527	10.753	1.075	0.108
24	0.908	110.132	11.013	1.101	0.110
25	0.887	112.740	11.274	1.127	0.113

No quadro seguinte mostram-se os desvios da permeabilidade em conformidade com os resultados do Quadro 2.2.

Quadro 2.3 – Desvio da permeabilidade em função da temperatura da água

T [°C]	$k_T - k_{20}$ [mm/s]			
	10^2	10	10^{-1}	10^{-2}
15	11.894	1.189	0.119	0.012
16	9.584	0.958	0.096	0.010
17	7.236	0.724	0.072	0.007
18	4.853	0.485	0.049	0.005
19	2.439	0.244	0.024	0.002
20	0.000	0.000	0.000	0.000
21	-2.564	-0.256	-0.026	-0.003
22	-5.042	-0.504	-0.050	-0.005
23	-7.527	-0.753	-0.075	-0.008
24	-10.132	-1.013	-0.101	-0.010
25	-12.740	-1.274	-0.127	-0.013

No Quadro 2.4 pode-se observar o erro em que se incorre na avaliação de k por não se considerar o efeito da temperatura da água nos ensaios experimentais.

Quadro 2.4 – Erro na avaliação do caudal em relação à temperatura padrão

T [°C]	E[%]			
	10^2	10	10^{-1}	10^{-2}
15	11.89	11.89	11.89	11.89
16	9.58	9.58	9.58	9.58
17	7.24	7.24	7.24	7.24
18	4.85	4.85	4.85	4.85
19	2.44	2.44	2.44	2.44
20	0.00	0.00	0.00	0.00
21	2.56	2.56	2.56	2.56
22	5.04	5.04	5.04	5.04
23	7.53	7.53	7.53	7.53
24	10.13	10.13	10.13	10.13
25	12.74	12.74	12.74	12.74

Analisando o quadro anterior conclui-se que o efeito da temperatura na avaliação do coeficiente de permeabilidade poderá ser significativo. Repare-se que uma diferença de temperatura unitária conduz *grosso modo* a um coeficiente de permeabilidade 2.5% superior ou inferior ao correspondente à temperatura padrão. Para os casos considerados, a pior das hipóteses conduz a um erro na estimativa de k que pode atingir 12.74%. Observando o Quadro 2.4 verifica-se ainda que de acordo com a equação 2.52, o efeito da temperatura do fluido no coeficiente de permeabilidade faz-se sentir com a mesma importância independentemente das propriedades físicas do solo.

A utilização de valores da permeabilidade obtidos previamente num determinado ensaio experimental, em modelos numéricos de ensaios experimentais subsequentes, pode ser efectuada tomando algumas

providências no sentido de controlar e medir a temperatura da água nos modelos e efectuar o respectivo ajuste do coeficiente de permeabilidade às novas condições nos termos expressos pela equação 2.52.

2.4.8.3. Dimensão das partículas sólidas

Em praticamente todas as equações expostas no ponto 2.4.6 é sugerida a variação do coeficiente de permeabilidade com o quadrado da dimensão das partículas sólidas. Exceptuando a proposta de Carrier (2003), em todas as expressões que consideram a granulometria do solo dá-se especial atenção às partículas com menores dimensões. No limite, Kenney *et al.* (1984) sugerem a avaliação do coeficiente de permeabilidade absoluta com o quadrado de D_5 . O facto da estimativa de k ser em função de fracções granulométricas mais finas parece ser bastante razoável, pois os grãos com dimensões mais reduzidas terão mais facilidade para ocupar os espaços vazios existentes entre as partículas maiores e assim reduzir a secção transversal dos canalículos por onde a água terá de escoar.

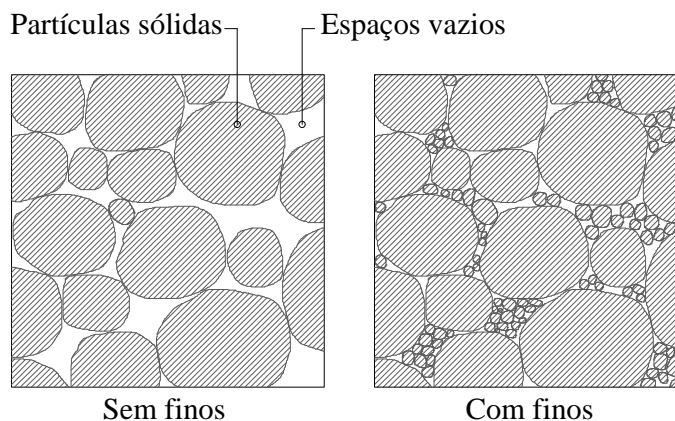


Fig.2.15 – Distribuição genérica dos grãos de solos sem e com partículas finas

De acordo com C. Venkatramaiah (2006) a relação entre a permeabilidade e a granulometria dos solos é mais apropriada para materiais granulares e siltosos. A propósito dos solos argilosos M. M. Fernandes (2006) afirma que a configuração das partículas e a forma como estas se podem agrupar dificultam a relação entre as suas dimensões e as dos canalículos.

2.4.8.4. Índice de vazios

Grande parte das expressões semiempíricas apresentadas escrevem a equação de k em função de $e^3/(1+e)$. C. Venkatramaiah (2006) afirma que esta relação é mais adequada para solos granulares grosseiros pois, nesses casos, a forma das partículas não se altera significativamente com a variação do índice de vazios desses solos. É sugerido ainda que o logaritmo de k varia linearmente com e , para diversos tipos de solos e numa vasta gama de valores da permeabilidade. Mantendo constantes os restantes parâmetros com influência na permeabilidade e conhecendo os valores da permeabilidade de um determinado solo para dois ou mais índices de vazios, é possível conhecer por interpolação linear a permeabilidade desse solo para um índice de vazios genérico.

2.4.8.5. Composição mineralógica

A influência da composição mineralógica na permeabilidade tem geralmente pouco significado nos cascalhos, areias e siltes. C. Venkatramaiah (2006) refere que poderão ocorrer perturbações no valor da permeabilidade nos solos mais grosseiros quando haja presença de mica ou matéria orgânica. No entanto, a composição mineralógica afecta sobretudo a condutividade hidráulica de solos argilosos. A este propósito M. M. Fernandes (2006) afirma que quanto maior a actividade da argila, A_t , ou seja, quanto maior o declive da recta que estabelece a proporcionalidade entre o índice de plasticidade e a fracção de argila do solo, menos permeável ela é. Sabendo que a Montmorilonite é cerca de vinte vezes mais activa do que a Caulinite (M. M. Fernandes, 2006) e que a permeabilidade da Caulinite é cem vezes maior do que a Montmorilonite (C. Venkatramaiah, 2006), percebe-se também que a variação da permeabilidade com a composição mineralógica não segue uma lei linear.

2.4.8.6. Arranjo estrutural das partículas sólidas

A forma como as partículas sólidas de um solo estão orientadas e distribuídas designa-se por *estrutura* ou *fábrica* do solo. Trata-se de um factor com particular influência na permeabilidade dos solos finos. Para o mesmo índice de vazios é expectável que num solo com estrutura floclada, caracterizada pelo pronunciado paralelismo entre as partículas, a permeabilidade seja maior do que nos casos em que as partículas se apresentem dispersas num padrão aleatório.

2.4.8.7. Grau de saturação

Quanto maior o grau de saturação maior a permeabilidade dos solos. Nas regiões do escoamento onde se verificarem pressões negativas o valor da admissão de ar é excedido e este vai preenchendo os poros de tal forma que os transforma em meios não condutores, fazendo aumentar desse modo a tortuosidade das linhas de corrente. Repare-se que o ar desloca-se das altas pressões para as baixas pressões. Como na vizinhança das regiões não saturadas o regime de pressões é igual ou superior à pressão atmosférica, a fase gasosa fica aprisionada nos canalículos fazendo com que o solo perca capacidade para transportar a água. O aumento das pressões negativas provoca a obturação progressiva dos poros e portanto a condutividade hidráulica diminui, podendo, no limite, atingir valores tais que nessa região o solo se comporte como um meio quase impermeável.

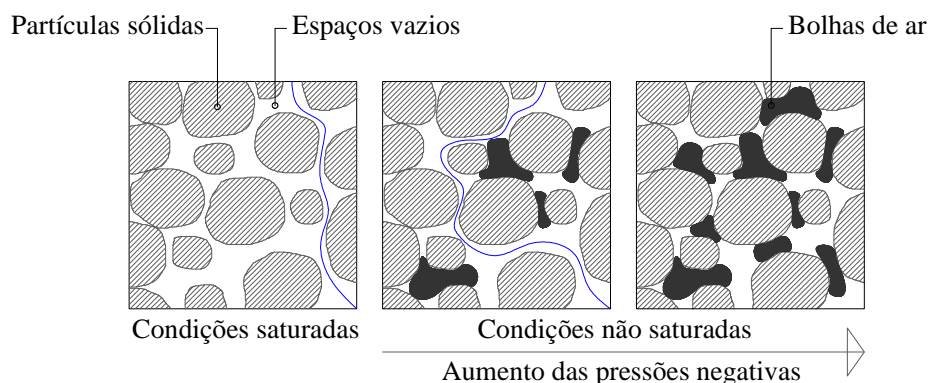


Fig.2.16 – Evolução das linhas de fluxo com o grau de saturação

Refira-se também que as bolhas de ar aprisionadas na região não saturada fazem com que o volume de água existente nos poros seja inferior ao verificado em condições saturadas.

2.5. ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS BIDIMENSIONAIS EM REGIME PERMANENTE

2.5.1. ENQUADRAMENTO GERAL

A dedução das equações diferenciais que governam os escoamentos da água através dos solos será realizada no pressuposto de que é lícito considerar os domínios planos e bidimensionais. Repare-se que em termos microscópicos os domínios percolados assumem uma natureza tridimensional porém, de acordo com João Marado (1993), como todos os fenómenos que se processam durante o escoamento se repetem de modo similar em planos paralelos que intersectam o domínio tridimensional a hipótese dos domínios planos e bidimensionais pode considerar-se válida. Assume-se ainda que é válida a lei de Darcy, as condições de fronteira hidráulicas à entrada e à saída do sistema são conhecidas e as fases, líquida e sólida, do solo são incompressíveis.

As equações diferenciais associadas à percolação nos meios porosos só terão solução se estiverem devidamente identificadas as condições de fronteira dos problemas em apreço. Pelo exposto, afigura-se adequado discutir os diferentes tipos de condições de fronteira e enquadrá-los nos diversos modelos reduzidos de estruturas eminentemente geotécnicas.

Um dos objectivos fundamentais do presente estudo prende-se com a inevitável comparação dos resultados obtidos nos modelos numéricos e nos modelos experimentais. No final do séc. XIX e início do séc. XX, época em que existiam evidentes restrições à execução do cálculo numérico, pela inexistência ou debilidade das ferramentas computacionais, diversos autores propuseram soluções gráficas para resolver os problemas de percolação não confinada em regime permanente. Essas propostas incluem a localização da linha do nível freático e a representação da rede de fluxo, através de linhas de corrente e de superfícies equipotenciais, possibilitando a avaliação de parâmetros hidráulicos como o caudal, o gradiente hidráulico e as pressões da água nos poros. Estabelecer a ponte entre os modelos numéricos do presente com as soluções do passado, tendo como base orientadora os ensaios dos modelos experimentais, dará a possibilidade de confirmar o salto evolutivo dado com a implementação dos métodos numéricos aplicados à Geotecnia e de reconhecer a validade excepcional das soluções gráficas tendo presente que os instrumentos de cálculo disponíveis naquela altura seriam pouco mais do que rudimentares.

2.5.2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE CONTINUIDADE

Considere-se um elemento de volume de um solo no qual o escoamento da água se efectua em regime laminar.

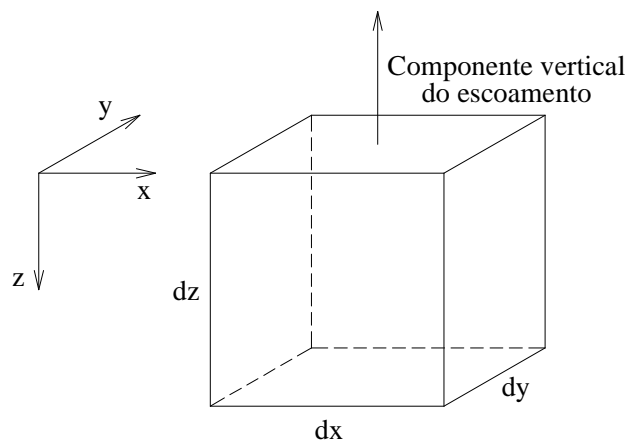


Fig.2.17 – Percolação através de um elemento de volume de um solo

Seja \mathbf{q} o caudal percolado no elemento de volume, cujas componentes segundo as direcções \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} , são q_x , q_y e q_z , respectivamente. C. Venkatramaiah (2006) refere que \mathbf{q} é dado pela equação 2.53.

$$q = q_x + q_y + q_z \quad (2.53.)$$

Repare-se que, como se admite um escoamento plano e bidimensional, a componente do caudal segundo a direcção \mathbf{y} é nula. Aplicando a lei de Darcy na face inferior do elemento de volume resulta:

$$q_z = k_z \cdot \left(-\frac{\partial h}{\partial z} \right) \cdot dx dy \quad (2.54.)$$

sendo k_z a permeabilidade segundo a direcção \mathbf{z} e h a carga hidráulica total. O fluxo que passa pela face superior do elemento de volume é dado pela equação 2.55.

$$q_z + \Delta q_z = \left(k_z + \frac{\partial k_z}{\partial z} dz \right) \cdot \left(-\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz \right) dx dy \quad (2.55.)$$

O balanço entre o caudal que entra e o caudal que sai do sistema, segundo a direcção vertical, pode ser calculado através da equação 2.56.

$$\Delta q_z = k_z \cdot \left(-\frac{\partial h}{\partial z} \right) \cdot dx dy - \left(k_z + \frac{\partial k_z}{\partial z} dz \right) \cdot \left(-\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz \right) dx dy \quad (2.56.)$$

E portanto:

$$\Delta q_z = \left(k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial k_z}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial k_z}{\partial z} \cdot dz \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dx dy dz \quad (2.57.)$$

Admitindo que não há variação da permeabilidade em todos os pontos segundo a direcção considerada, ou seja, que o solo é homogéneo:

$$\frac{\partial k_z}{\partial z} = 0 \quad (2.58.)$$

$$\Delta q_z = \left(k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dV \quad (2.59.)$$

Com toda a generalidade, o balanço entre o caudal que entra e o caudal que sai do sistema, segundo a direcção horizontal é de acordo com a equação seguinte:

$$\Delta q_x = \left(k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) dV \quad (2.60.)$$

De acordo com a equação 2.53 resulta:

$$\Delta q = \left(k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dV \quad (2.61.)$$

A variação do caudal, Δq , pode ser escrita também da seguinte forma:

$$\Delta q = \frac{\partial}{\partial t} dV_w \quad (2.62.)$$

Observando as equações 2.9 e 2.10 tem-se que:

$$G \cdot w = S \cdot e \Leftrightarrow \frac{\gamma_s}{\gamma_w} \cdot \frac{dV_w \cdot \gamma_w}{dV_s \cdot \gamma_s} = S \cdot e \quad (2.63.)$$

Simplificando e substituindo dV_w em conformidade com a equação 2.1:

$$dV_w \cdot \frac{e}{dV_s} = S \cdot e \quad (2.64.)$$

A equação 2.64 pode ainda ser escrita de outra forma com o auxílio da equação 2.2.

$$\frac{dV_w}{n \cdot dV} = S \Leftrightarrow dV_w = n \cdot S \cdot dV \quad (2.65.)$$

Sabendo que a porosidade se relaciona com o índice de vazios de acordo com a equação 2.6, resulta:

$$dV_W = \frac{e}{1+e} \cdot S \cdot dV \quad (2.65.)$$

Substituindo a equação 2.65 na equação 2.62 e escrevendo a equação 2.61 em função destes novos resultados surge a equação 2.66.

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\frac{e}{1+e} \cdot S \cdot dV \right) = \left(k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dV \quad (2.66.)$$

O volume elementar de partículas sólidas pode ser escrito do seguinte modo:

$$dV_S = \frac{dV_V}{e} = \frac{n \cdot dV}{e} = \frac{e}{1+e} \cdot \frac{1}{e} \cdot dV = \frac{dV}{1+e} \quad (2.67.)$$

Como dV_S é uma parcela constante, logo não varia com o tempo, portanto:

$$\frac{dV}{1+e} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot (S \cdot e) = \left(k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dV \quad (2.68.)$$

Finalmente, aplicando a regra do produto das derivadas ao primeiro membro da equação 2.68:

$$\frac{dV}{1+e} \cdot \left(e \cdot \frac{\partial}{\partial t} S + S \cdot \frac{\partial}{\partial t} e \right) = \left(k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dV \quad (2.69.)$$

A equação 2.69 corresponde à equação básica para escoamentos laminares bidimensionais em meios porosos. C. Venkatramiah (2006) refere ainda possíveis cenários susceptíveis de ocorrer em termos da variação do índice de vazios, e , e do grau de saturação, S . Nos casos em que o índice de vazios e o grau de saturação são constantes o escoamento diz-se em regime permanente. Quando apenas o índice de vazios é variável significa que durante o escoamento ocorre um processo de consolidação, se e diminui, ou de expansão, se e aumenta. Se apenas varia o grau de saturação quer dizer que ocorre a drenagem ou embebição, consoante S diminua ou aumente, respectivamente. No casos em que ambos os parâmetros considerados variam está-se perante problemas de compressão ou expansão. A este propósito, C. Venkatramiah (2006) refere ainda que nos dois últimos cenários as condições de escoamento são bastante complexas não tendo sido ainda encontradas soluções satisfatórias para a

resolução desses problemas. Para o estudo em apreço admite-se que ambos os parâmetros, o índice de vazios e o grau de saturação, permanecem constantes no decorrer dos escoamentos pelo que a equação 2.69 pode simplificar-se da forma como se apresenta em seguida.

$$k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2.70.)$$

E então:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.71.)$$

Aplicando a lei de Darcy às componentes do escoamento segundo as direcções consideradas, resulta finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0 \quad (2.72.)$$

A expressão anterior designa-se por Equação Diferencial de Continuidade para escoamentos bidimensionais em regime permanente através de meios porosos homogéneos.

2.5.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GOVERNATIVAS DE ESCOAMENTOS

2.5.3.1. Meios Porosos Homogéneos e Isotrópicos

Para meios porosos com isotropia de permeabilidade, $\mathbf{k}_x = \mathbf{k}_z$, donde, de acordo com a equação 2.71:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2.73.)$$

A expressão anterior designa-se por equação de Laplace para espaços bidimensionais e representa a variação do gradiente hidráulico nas direcções \mathbf{x} e \mathbf{z} , cuja soma deverá ser igual a zero.

Uma rede de escoamento consiste em dois conjuntos de curvas definidoras do fluxo e da energia potencial que são obtidas à custa da equação de Laplace. A este respeito refira-se que o facto da equação de continuidade para escoamentos bidimensionais em regime permanente através de meios porosos homogéneos satisfazer a equação de Laplace sugere que as linhas de corrente e as linhas equipotenciais se intersectam fazendo entre si ângulos rectos, originando uma rede de fluxo ortogonal.

A velocidade potencial é uma função escalar de espaço e tempo tal que a sua derivada em ordem a qualquer direcção indica a velocidade do escoamento nessa direcção.

A função potencial é escrita em termos de carga hidráulica e de uma constante de integração determinável pelo estabelecimento das condições de fronteira, adiante discutidas.

$$\phi(x, z) = -k \cdot h(x, z) + C \quad (2.74.)$$

Então:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -k \frac{\partial h}{\partial x} = v_x \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -k \frac{\partial h}{\partial z} = v_z \quad (2.75.)$$

De acordo com a equação 2.72 tem-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.76.)$$

A equação anterior traduz a equação diferencial que governa os escoamentos em regime permanente através de meios porosos homogêneos e com isotropia de permeabilidade, formulada com base na função potencial. Repare-se que como se trata de uma equação do tipo $\nabla^2 \phi = 0$, esta satisfaz a equação de Laplace.

Como o próprio nome indica, as equipotenciais são linhas com igual valor de potencial. Sempre que o escoamento for governado por equações diferenciais de acordo com a equação 2.76, a direcção do escoamento fará sempre ângulos rectos com as linhas equipotenciais.

A função de corrente, ψ , é uma função escalar de espaço e tempo tal que as derivadas parciais em ordem às direcções consideradas dão as componentes da velocidade do escoamento numa direcção normal à direcção original no sentido dos ponteiros do relógio.

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = v_x \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_z \quad (2.77.)$$

Comparando as equações 2.75 com as equações 2.77, facilmente se percebe que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.78.)$$

As expressões 2.78 são conhecidas como equações de *Cauchy-Riemann*. Substituindo os termos de corrente na equação de continuidade, resulta:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = 0 \quad (2.79.)$$

Repare-se que os termos cruzados da equação 2.79 poderão ser escritos da forma que se segue:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.80.)$$

Com toda a generalidade:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (2.81.)$$

Substituindo as equações 2.80 e 2.81 na equação 2.79, obtém-se a equação diferencial governativa da percolação em regime permanente através de solos homogêneos e com isotropia de permeabilidade, formulada com base na função potencial. Verifica-se deste modo que, tal como no caso da função potencial, a função de corrente satisfaz a equação de continuidade e a equação de Laplace. De acordo com C. Venkatramaiah (2006), as funções ϕ e ψ dizem-se harmónicas conjugadas. Nos casos em que $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{a}$, sendo \mathbf{a} um valor constante, as curvas descreverão trajectórias ortogonais entre si.

Conforme já foi referido anteriormente, as redes de fluxo têm utilidade na determinação de parâmetros hidráulicos como o caudal, o gradiente hidráulico e as pressões na água dos poros. Para concretizar tais objectivos é necessário ter presente algumas propriedades associadas às redes de fluxo em regime permanente e para meios homogêneos e isotrópicos:

- Nos pontos de intersecção das linhas de fluxo com as linhas equipotenciais o ângulo formado entre si é recto;
- Os espaços entre linhas de fluxo ou de equipotenciais formam quadrados elementares, ou seja, é possível inscrever uma circunferência tocando as quatro linhas;
- A queda de carga hidráulica é constante entre equipotenciais sucessivas e o fluxo em cada tubo de corrente é sempre o mesmo;
- As transições são suaves, tomando a forma parabólica ou elíptica;
- Quanto menores as dimensões dos elementos quadrados, maior será a velocidade e, consequentemente, maior será o gradiente hidráulico.

2.5.3.2. Meios Porosos não Homogêneos e Isotrópicos

Para os casos em o escoamento se realize na normal aos planos definidos pela estratificação dos solos, a perda de carga e o caudal percolado serão controlados principalmente pelas camadas menos permeáveis. Pelo contrário, quando o escoamento se efectua paralelamente aos planos de

estratificação, o caudal percolado e a perda de carga serão influenciados sobretudo pelas camadas mais permeáveis.

De certo modo, o conceito de meio poroso não homogêneo e isotrópico será aplicável, por exemplo, ao estudo da percolação de barragens de aterro zonadas. Com efeito, observando na Fig.2.18 a trajectória genérica de uma linha de corrente numa barragem zonada, percebe-se que é o solo B que condiciona o escoamento pela indução de maior perda de carga ao escoamento e, de acordo com a lei de Darcy, pela redução do caudal percolado.

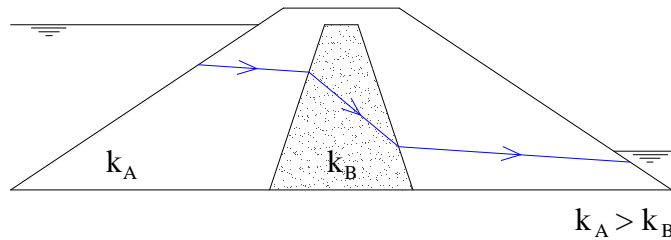


Fig.2.18 – Esquema genérico de uma barragem zonada

A figura seguinte mostra um trecho de uma rede de fluxo na vizinhança de uma interface genérica entre o solo A e o solo B.

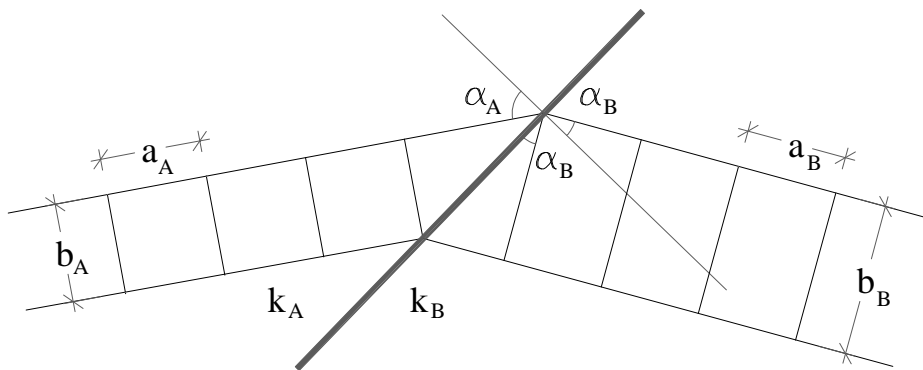


Fig.2.19 – Tubo de corrente de um escoamento na interface entre dois solos

Repare-se que através da equação da continuidade o caudal percolado no tubo de corrente associado ao solo A é igual ao caudal percolado associado ao tubo de corrente do solo B. Assim, é possível relacionar os ângulos de incidência das linhas de corrente relativamente à linha de interface.

$$q_A = q_B \quad (2.82.)$$

Note-se também que, pelas diferentes características hidráulicas dos solos A e B, a direcção do escoamento altera-se e a rede de fluxo toma formas distintas, no entanto, a lei de Darcy permanece válida. Refira-se ainda que a perda de carga hidráulica entre duas linhas equipotenciais é a mesma para os dois solos.

$$k_A \cdot \frac{\Delta h}{a_A} \cdot b_A = k_B \cdot \frac{\Delta h}{a_B} \cdot b_B \quad (2.83.)$$

Os lados dos elementos quadriláteros do tubo de corrente podem ser relacionados com os ângulos de incidência da forma que se segue:

$$\frac{a_A}{b_A} = \tan \alpha_A \quad \frac{a_B}{b_B} = \tan \alpha_B \quad (2.84.)$$

Substituindo na equação 2.83, tem-se que:

$$k_A \cdot \frac{b_A}{b_A \cdot \tan \alpha_A} = k_B \cdot \frac{b_B}{b_B \cdot \tan \alpha_B} \quad (2.85.)$$

donde:

$$\tan \alpha_A = \frac{k_A}{k_B} \cdot \tan \alpha_B \quad (2.86.)$$

2.5.3.3. Meios Porosos Homogêneos e Anisotrópicos

Grande parte dos solos exibem anisotropia direccional de permeabilidade. Considere-se um solo no qual o coeficiente de permeabilidade na direcção horizontal, \mathbf{k}_h , é superior ao coeficiente de permeabilidade na direcção vertical, \mathbf{k}_v . Lembra-se que a equação de Laplace válida para espaços bidimensionais, foi deduzida no pressuposto de que o solo apresenta isotropia direccional de permeabilidade. Para este caso, dividindo ambos os termos da equação 2.70 por \mathbf{k}_z , resulta:

$$\frac{k_x}{k_z} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2.87.)$$

Então:

$$\frac{\partial^2 h}{\left(\frac{k_z}{k_x}\right) \partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2.88.)$$

Para escrever a equação 2.88 no formato da equação de Laplace, recorre-se a uma variável fictícia tal que:

$$x_T = x \cdot \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \quad (2.89.)$$

donde:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2.90.)$$

Através da equação 2.90 consegue-se obter redes de escoamento para meios anisotrópicos. É possível agora determinar o caudal percolado tomando a escala horizontal transformada e adoptando um coeficiente de permeabilidade equivalente, k_e .

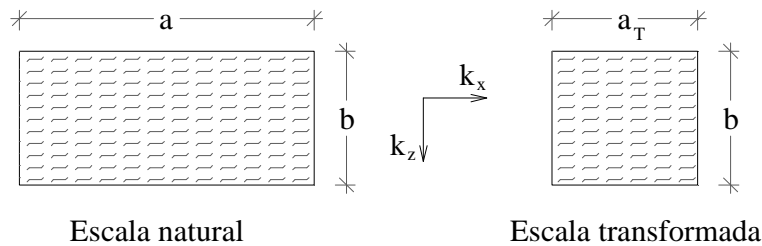


Fig.2.20 – Transformação de coordenadas em solos anisotrópicos

Note-se que a vale:

$$a = a_T \cdot \sqrt{\frac{k_x}{k_z}} \quad (2.91.)$$

Apesar da mudança de escala segundo uma determinada direcção o caudal não se altera, donde:

$$q_N = q_T \quad (2.92.)$$

e portanto:

$$k_x \cdot i_N \cdot S = k_e \cdot i_T \cdot S \quad (2.93.)$$

Então:

$$k_x \cdot \frac{\Delta h}{a} = k_e \cdot \frac{\Delta h}{a_T} \quad (2.94.)$$

donde:

$$k_e = \frac{a_T}{a_T \cdot \sqrt{\frac{k_x}{k_z}}} k_x \Rightarrow k_e^2 = \frac{k_x^2}{\left(\sqrt{\frac{k_x}{k_z}}\right)^2} \Leftrightarrow k_e^2 = k_x^2 \cdot \frac{k_z}{k_x} \quad (2.95.)$$

Finalmente:

$$k_e = \sqrt{k_x \cdot k_z} \quad (2.96.)$$

A secção transformada permite também o cálculo da carga hidráulica em qualquer ponto, no entanto, na determinação do gradiente hidráulico as dimensões transformadas deverão ser corrigidas à medida que se toma a distância sobre a qual ocorre a perda de carga e a distância entre linhas equipotenciais será obviamente aquela em correspondência com a escala natural.

2.5.4. CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

2.5.4.1. Noções Gerais

Conforme já foi referido, para ser possível solucionar as equações diferenciais governativas dos escoamentos é necessário especificar as condições do escoamento da fronteira do domínio considerado. Essas condições de fronteira podem ser *essenciais*, ou de *Dirichlet*, e *secundárias*, ou de *Cauchy*.

As condições de fronteira de *Dirichlet*, impostas em locais específicos do domínio através de valores prescritos na equação diferencial governativa do escoamento, podem ser do tipo $\phi = \bar{\phi}$ ou do tipo $\psi = \bar{\psi}$, consoante a variável dependente seja a função potencial ou a função de corrente, respectivamente.

Quando as condições de fronteira são função da variável dependente da equação diferencial governativa, por exemplo, a prescrição de caudais nulos em determinados locais da fronteira, as condições de fronteira dizem-se naturais.

Para concretizar, considerem-se duas típicas estruturas geotécnicas, uma barragem de aterro e uma ensecadeira realizadas em meio homogéneo e isotrópico em termos de permeabilidade.

2.5.4.2. Escoamentos confinados

Através da Fig.2.21 é possível perceber que as linhas de corrente que limitam o escoamento têm posições conhecidas. Nestes casos os escoamentos dizem-se confinados. Com efeito, como a linha **AB** é uma fronteira impermeável com caudal nulo abaixo desta, então ela representa a linha de corrente que limita inferiormente o escoamento.

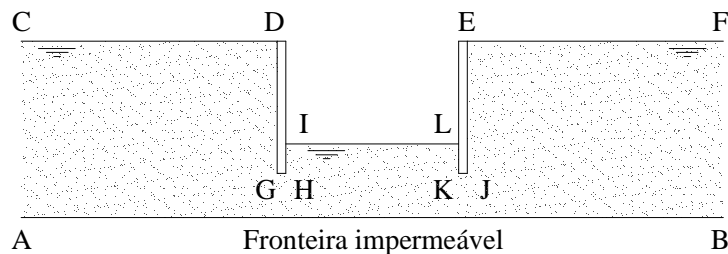


Fig.2.21 – Modelo de uma ensecadeira em meio homogêneo e isotrópico

Por outro lado, como as linhas **CD** e **EF** representam as linhas equipotenciais de valor máximo e a linha **IL** a linha equipotencial de valor mínimo e as linhas de fluxo são normais às linhas equipotenciais, então as linhas **DGHI** e **EJKL** representam as linhas de corrente que limitam o escoamento superiormente.

2.5.4.3. Escoamentos não confinados

Observando a Fig.2.22, relativa a uma barragem homogênea e com isotropia de permeabilidade, verifica-se que as linhas **AC** e **EB** representam as linhas equipotenciais de valor máximo e mínimo, respectivamente, donde a função potencial, $\phi(\mathbf{x},\mathbf{z})$, permanece constante ao longo delas.

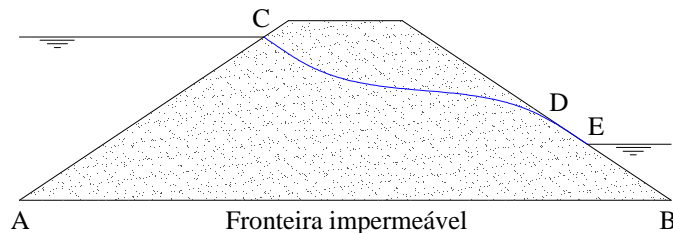


Fig.2.22 – Modelo de uma barragem de aterro homogênea

A linha **AB** representa a fronteira abaixo da qual o caudal percolado é nulo e portanto corresponde à linha de corrente que limita o escoamento inferiormente. A linha **CD** é a linha de corrente que limita superiormente o domínio do escoamento e cuja posição é à partida desconhecida. Nestes casos, como a posição de uma das linhas de corrente que delimitam o domínio não é conhecida inicialmente, os escoamentos dizem-se não confinados. A linha **DE** representa um troço da fronteira do domínio no qual a componente da velocidade de percolação normal à fronteira tem valor não nulo. Ao longo da linha **DE** a função potencial varia linearmente e toma o valor da cota geométrica.

Para determinar a posição final da linha de saturação, a linha de corrente que delimita o escoamento superiormente, existem duas alternativas que são o recurso a métodos de malha variável e métodos de malha constante. Este assunto será mais adiante retomado a propósito da aplicação do Método do Elemento Finitos ao estudo da percolação.

2.5.5. TRAÇADO GRÁFICO DA LINHA DE SATURAÇÃO EM ESCOAMENTOS NÃO CONFINADOS

Conforme já foi referido no ponto 2.5.4.3, nos escoamentos não confinados a linha de saturação, ou nível freático, ocupa uma posição do domínio que é à partida desconhecida. Sabe-se no entanto que ao longo da linha de saturação a pressão é igual à atmosférica e, por isso, nessa linha a carga hidráulica é igual à cota geométrica. Este facto faz como que as perdas de carga hidráulica sejam iguais entre linhas equipotenciais sucessivas, conforme se ilustra na Fig.2.23.

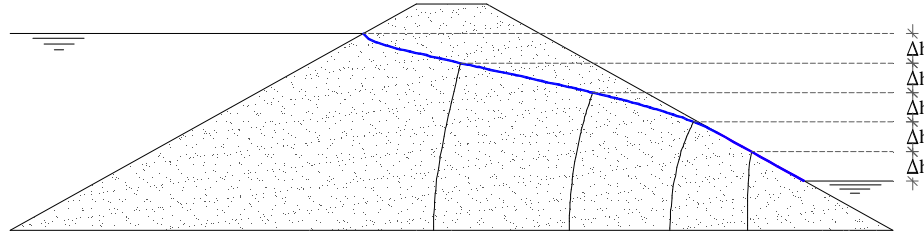


Fig.2.23 – Rede de escoamento genérica numa barragem homogénea

Facilmente se demonstra pela via analítica que de facto assim é. Observando a equação 2.74 e sabendo que a altura piezométrica ao longo da linha de saturação é nula, pois a pressão nela instalada é igual à pressão atmosférica, resulta:

$$\phi_{NF} = -k \cdot h + C = -k \cdot \left(z + \frac{u}{\gamma_w} \right) + C = -k \cdot \left(z_{NF} + \frac{0}{\gamma_w} \right) + C = -k \cdot z_{NF} + C \rightarrow cqd \quad (2.97.)$$

Como se verifica pela demonstração anterior, a função potencial varia linearmente com a cota geométrica ao longo do nível freático.

Em termos de condições de entrada, a linha de saturação deverá ser normal ao paramento de montante. Repare-se que, como a linha de saturação é uma linha de fluxo, o paramento de montante é uma linha equipotencial desde o pé até à intersecção com o nível freático e se o meio poroso é isotrópico em termos de permeabilidade, a equação de Laplace deverá ser respeitada.

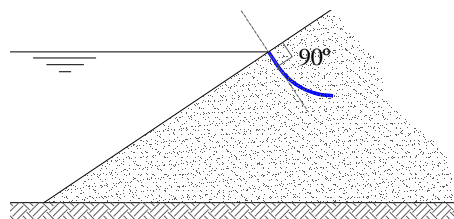


Fig.2.24 – Condição de entrada com resistência mobilizável ao escoamento

De acordo com C. Venkatramaiah (2006), as condições de entrada poderão ser distintas da ilustrada na Fig.2.24 nos casos em que se utilizem solos grosseiros cuja permeabilidade seja tão elevada que não se mobilize resistência apreciável do meio poroso ao escoamento da água. Nesta situação, os modelos apresentados na Fig.2.25 serão hidraulicamente equivalentes.

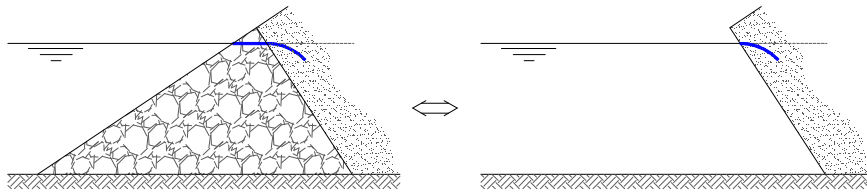


Fig.2.25 – Condição de entrada sem resistência mobilizável ao escoamento

Neste contexto, C. Venkatramaiah (2006) sugere que a linha equipotencial de valor máximo, associada às condições de escoamento ilustradas na Fig.2.25, passa a ser a fronteira de jusante do material grosseiro. Assim, a linha de saturação deixa de ser normal à linha equipotencial de valor máximo. Para garantir a perpendicularidade, a linha de corrente teria de assumir uma trajectória ascendente e partir desse modo para valores da função potencial superiores às prescritas pelas condições de fronteira. Na realidade, o nível freático parte horizontalmente do paramento de montante e comporta-se como se estivesse em regime de superfície livre, ou seja, com velocidade nula e portanto com gradiente hidráulico inicial nulo. De acordo com o mesmo autor, esta subtileza permite disfarçar de certo modo a aparente inconsistência relativamente à intersecção em ângulo recto das linhas de corrente com as linhas equipotenciais.

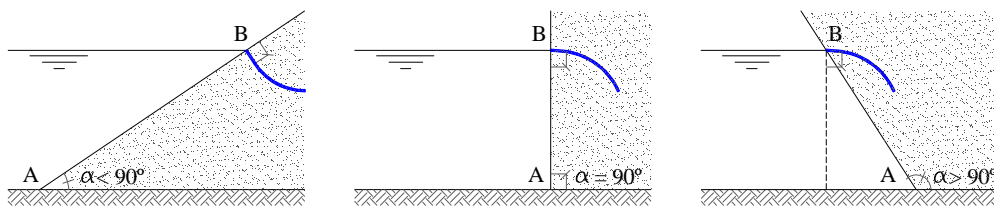


Fig.2.26 – Condições de entrada no domínio

Repare-se no entanto que, para o caso expresso na Fig.2.25, parece existir alguma incongruência no facto de se assumir que a fronteira de jusante do material grosseiro, traduzida pela linha AB que se mostra na Fig.2.26, é uma linha equipotencial. Para demonstrar este facto observe-se a Fig.2.27 que representa o escoamento em meio poroso junto do paramento de montante para valores do ângulo α superiores a 90° .

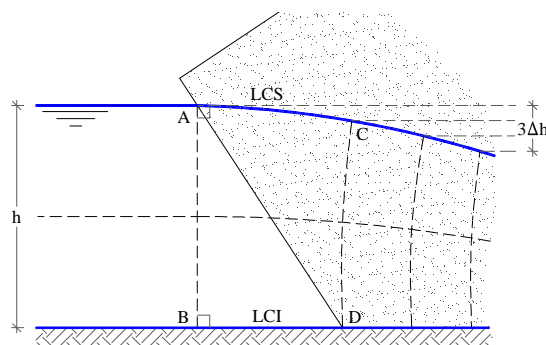


Fig.2.27 – Escoamento à entrada de meios porosos para ângulos α superiores a 90°

Com base na equação 2.18 percebe-se facilmente que o ponto A pertence à linha equipotencial de valor máximo. Note-se no entanto que o escoamento para jusante do ponto A e acima da linha AD se

efectua em meio poroso donde, pelo efeito da fricção entre os grãos do solo e as partículas de água nessa região, haverá uma certa perda de carga associada e por isso a posição do nível freático baixará. Ainda que de forma indirecta, este abaixamento do nível freático produzirá uma perda de potencial ao longo da linha **AD** pois, para montante desta, a água escoar sem estar submetida a forças dissipativas. Com base no exemplo mostrado na Fig.2.27, percebe-se que os pontos **A** e **D** estão sujeitos a uma carga hidráulica de valor **h** e **h-Δh**, respectivamente. Observando novamente a Fig.2.27, sendo **LCS** e **LCI** as linhas de corrente superior e inferior, respectivamente, e atendendo à lei de Laplace mostrada na equação 2.73, sugere-se que a linha equipotencial seja antes representada pelo segmento **AB**. No âmbito da modelação numérica, para estabelecer as condições de fronteira na linha **AB**, deve-se considerar um material fictício que preencha a região delimitada pelos segmentos **AB**, **BD** e **DA** e que tenha permeabilidade muito elevada.

Nas condições apresentadas na Fig.2.26, parece também razoável afirmar que a linha equipotencial de valor máximo coincide com o paramento de montante apenas quando o valor do ângulo α é igual ou inferior a 90° .

Relativamente às condições de transferência do escoamento através de meios porosos não homogêneos, considera-se suficiente a informação prestada no ponto 2.5.3.2.

Em termos de condições de saída, o nível freático tende a seguir uma trajectória tão próxima quanto possível da direcção da força gravítica.

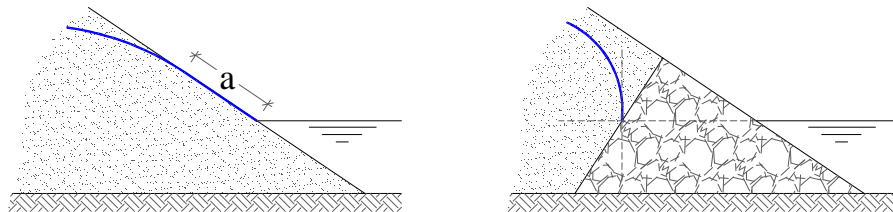


Fig.2.28 – Condições de saída do domínio

Note-se que a discussão a propósito da posição da linha equipotencial à entrada do meio poroso é generalizável à condição de saída para valores de α superiores a 90° . Neste caso, apenas o ponto de intersecção do nível freático com o paramento de jusante pertence à linha equipotencial de valor mínimo e os restantes pontos desta linha estarão sujeitos a valores de carga hidráulica superiores.

Note-se que o caso com dreno de pé de talude, mostrado na Fig.2.28, é generalizável ao do dreno horizontal. Quando a barragem é homogênea, a linha de saturação tende a tangenciar o paramento de jusante.

De acordo com Couto Marques *et al.* (2006) e tomando em consideração a Fig.2.29, o traçado da superfície livre numa barragem de terra homogênea, com isotropia direccional de permeabilidade e fundação impermeável, deverá seguir o procedimento que se apresenta em seguida.

- Desenhar à escala a secção recta da barragem. Nos casos em que o meio apresentar anisotropia direccional de permeabilidade, a secção transversal da barragem deverá ser desenhada tomando uma escala horizontal transformada de acordo com a discussão no ponto 2.5.3.3. Quando o traçado da linha de saturação estiver concretizado será necessário recorrer à transformação inversa da escala, transferindo, desse modo, o resultado para a secção real;
- Definição de um ponto **A'** que dista 0.3Δ para montante de **A**. O valor Δ é a projecção horizontal da parte imersa da superfície do talude de montante;
- Marcação de um ponto **C'** em que o segmento **CC'** é igual a **p**.

$$p = \frac{\sqrt{d^2 + h^2} - d}{2} \quad (2.98.)$$

- Traçar a parábola **A'B'C'** com foco em **C** e directriz vertical dada pela equação 2.99 e em que os eixos (x,z) têm origem em **C** com **x** positivo para a esquerda.

$$x = \frac{y^2 - 4p^2}{4p} \quad (2.99.)$$

- Definição do ponto de ressurgência **B** que, para inclinações de α inferiores a 30° , dista **L** do ponto **C**.

$$L = \frac{d}{\cos \alpha} - \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{h^2}{\sin^2 \alpha}} \quad (2.100.)$$

- Desenhar a transição de entrada **AE**, perpendicular em **A** à equipotencial coincidente com o talude de montante e concordante com a parábola em **E**;
- Desenhar a transição de saída **FB**.

Casagrande (1937) refere também que as transições de entrada e de saída do escoamento poderão ser efectuadas a sentimento.

Com base na metodologia gráfica preconizada para o traçado do nível freático de uma barragem homogénea, é possível, com as devidas correcções, representar o traçado da linha de saturação para os casos em que a barragem homogénea é dotada com drenos horizontais ou de pé de talude.

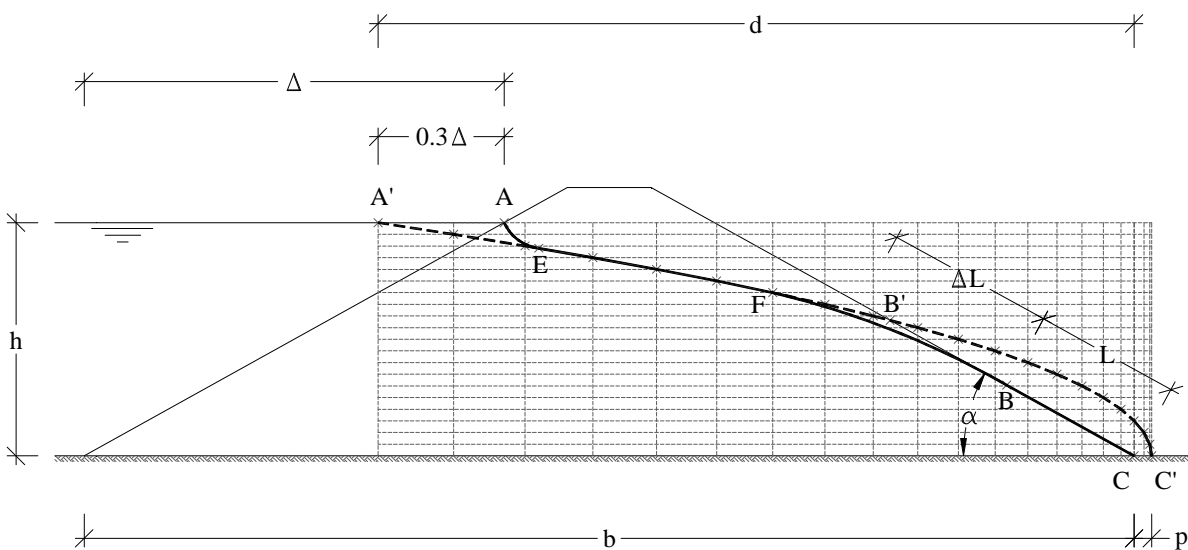


Fig.2.29 – Traçado gráfico do nível freático de uma barragem homogénea

Para o traçado gráfico da linha de saturação numa barragem homogénea com dreno horizontal, a metodologia é em tudo semelhante à ilustrada na Fig.2.29 sendo apenas necessário localizar o foco da parábola no vértice interior do dreno. Através da Fig.2.30 percebe-se que este órgão de drenagem permite que o escoamento se afaste do paramento de jusante evitando assim o fenómeno de ressurgência observado no caso anterior.

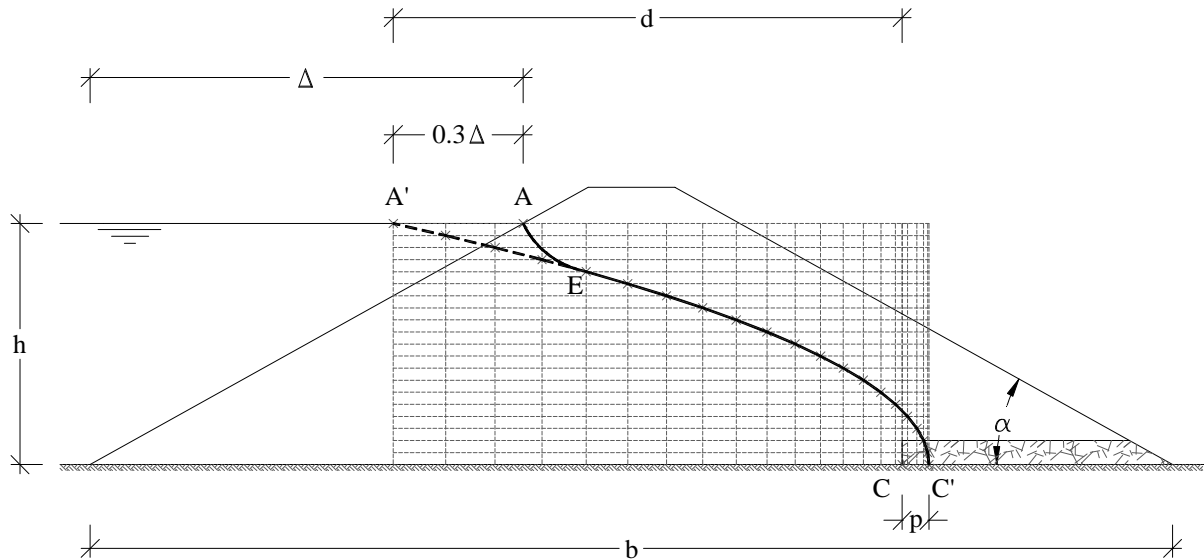


Fig.2.30 – Traçado gráfico do nível freático de uma barragem homogénea com dreno horizontal de jusante

A transição de entrada **AE**, nas condições da Fig.2.30, é tal como no caso anterior desenhada a sentimento, tendo no entanto presente a equação de Laplace na sua representação.

Quando a parábola não intersecta o paramento de jusante, conforme o caso mostrado na Fig.2.30, a determinação do ponto de ressurgência e o acerto da linha de saturação na transição de saída deixam de fazer sentido.

Para o traçado gráfico de uma barragem homogénea com dreno de pé de talude será preciso localizar o foco da parábola no vértice inferior do paramento de montante do material drenante e calcular a posição do ponto de saída da linha de saturação de acordo com a proposta de Casagrande (1937) para valores do ângulo α superiores a 30° .

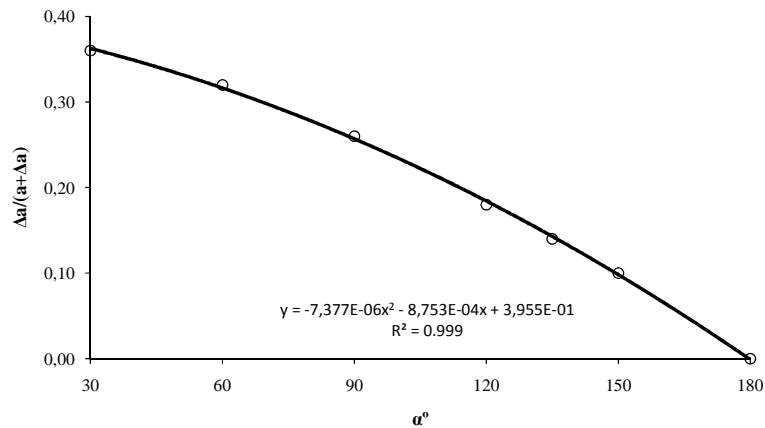


Fig.2.31 – Relação entre α e $\Delta a/(a+\Delta a)$ proposta por Casagrande

Nesta proposta o valor de $a+\Delta a$ representa a distância ao ponto de intersecção da parábola com o paramento de montante do dreno de pé do talude medida a partir do foco da parábola.

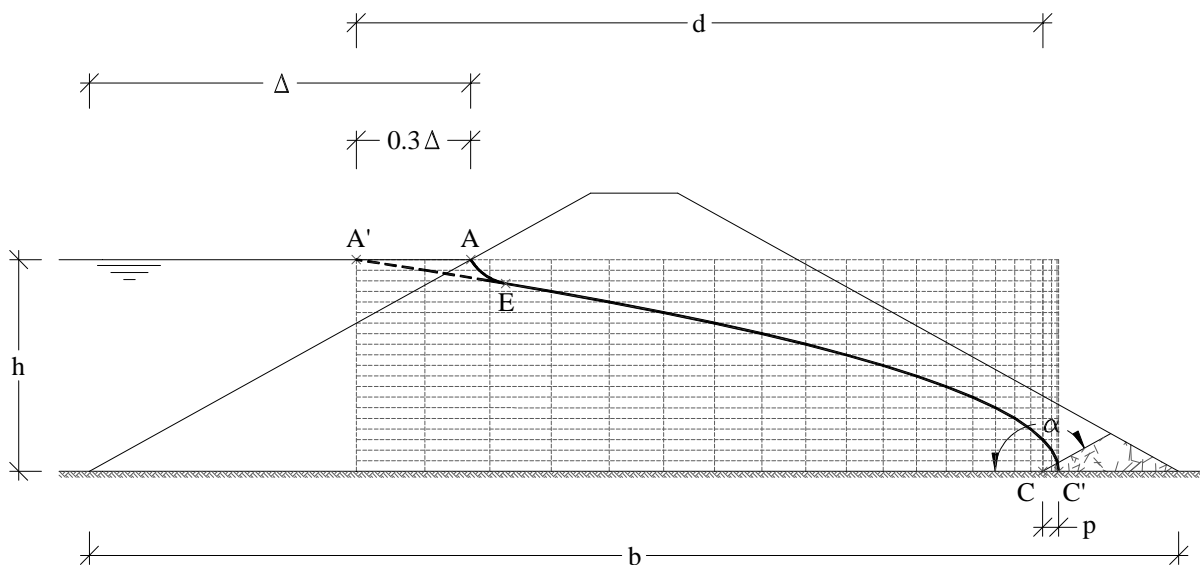


Fig.2.32 – Traçado gráfico do nível freático de uma barragem homogénea com dreno de pé do talude

Tal como nos casos anteriores, o traçado do troço de transição de entrada **AE** é efectuado a sentimento. Repare-se que, tal como no caso anterior, a linha de saturação não intersecta o paramento de jusante. Para mostrar mais detalhadamente a metodologia do traçado da transição de saída, será efectuada a ampliação da zona do pé de jusante mostrada na figura anterior.

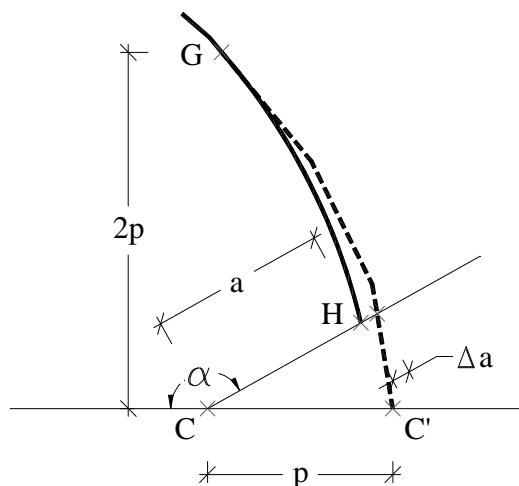


Fig.2.33 – Transição de saída junto do pé de jusante

À semelhança da transição de entrada, a transição de saída **GH** mostrada na Fig.2.33 foi representada a sentimento.

Couto Marques *et al.* (2006) referem que, para meios com anisotropia direccional de permeabilidade ou para secções transversais não homogéneas, a aplicabilidade do método de Casagrande apresenta sérias desvantagens relativamente à utilização de métodos numéricos. Mais adiante, será discutida com mais detalhe a implementação do Método dos Elementos Finitos aplicado ao estudo da percolação.

2.6. INSTABILIDADE DE ORIGEM HIDRÁULICA

2.6.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O desenvolvimento dos espaços urbanos, associado à escassez de solo disponível para a construção, provoca geralmente a necessidade de recorrer à construção de escavações profundas para a instalação de infraestruturas e para a execução de cortinas de retenção para construção de caves e túneis. Como nestas soluções construtivas ocorre a perturbação do nível freático na zona de escavação, normalmente pela necessidade de drenagem da água na zona de trabalhos, podem gerar-se escoamentos verticais ou subverticais com gradientes hidráulicos elevados susceptíveis de provocar acidentes graves.

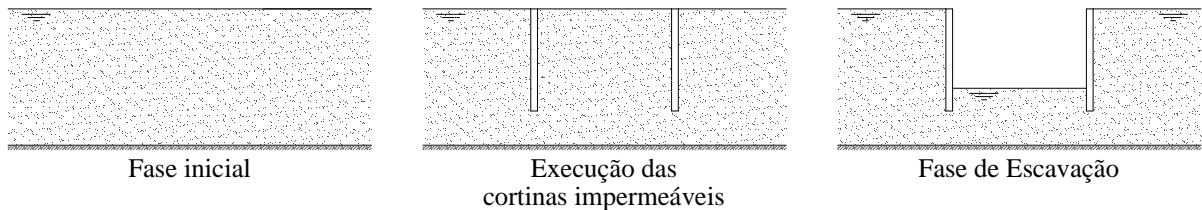


Fig.2.34 – Faseamento construtivo simplificado de uma cortina impermeável

Como a percolação induzida pelo abaixamento do nível freático tem influência na estabilidade global das cortinas de retenção e da própria escavação, no dimensionamento das escavações profundas será necessário tomar em consideração a segurança aos modos de instabilização hidráulica.

De acordo com M. M. Fernandes (2006), o fenómeno de *quick condition* e o *levantamento hidráulico* são basicamente as duas formas de instabilização associadas à percolação da água nos solos. No fenómeno de *quick condition* ocorre um escoamento vertical de sentido ascendente que pode afectar a estabilidade do solo junto da fronteira de jusante. No caso de levantamento hidráulico, geram-se forças de percolação induzidas por elevados gradientes hidráulicos que podem originar roturas catastróficas. Apoiados em diversas experiências numéricas, N. Benmebarek *et al.* (2005) referem que a forma dos mecanismos de rotura hidráulica e a perda de carga na rotura são significativamente afectados pelas características do solo e da interface solo-cortina.

2.6.2. FORÇA DE PERCOLAÇÃO

Observe-se atentamente a experiência de Darcy ilustrada na Fig.2.7. Supondo que num determinado momento a água não circula no sistema por obturação do tubo entre as secções 3 e 4, as pressões que existiriam na base da amostra de solo seriam em regime hidrostático dando origem a uma força de impulsão, **I**, em correspondência com o princípio de Arquimedes, com sentido ascendente e com valor determinável pela equação 2.101.

$$I = S \cdot \gamma_w \cdot (z_2 - z_3) = S \cdot \gamma_w \cdot L \quad (2.101.)$$

Desimpedindo o escoamento da água pelo tubo referido, estabelece-se a percolação no meio poroso gerando-se agora um regime de pressões em condições hidrodinâmicas. A força aplicada pela água sobre o solo em condições hidrodinâmicas, **U**, pode ser avaliada pela resultante das pressões da água

nas fronteiras da amostra de solo. Repare-se que neste caso, o sentido da força **U** é descendente, em conformidade com o sentido do escoamento na experiência tomada em consideração.

$$U = S \cdot \gamma_w \cdot [(z_1 - z_4) - (z_2 - z_3)] \quad (2.102.)$$

A diferença entre as forças **I** e **U** permite distinguir, em termos de forças aplicadas, a situação hidrodinâmica da situação hidrostática.

$$J = U - I = S \cdot \gamma_w \cdot (h_1 - h_4) \quad (2.103.)$$

Dividindo a equação 2.103 pelo volume da amostra de solo, resulta uma força por unidade de volume, **j**, designada por força de percolação.

$$j = \frac{S \cdot \gamma_w \cdot (h_1 - h_4)}{S \cdot L} = \frac{\gamma_w \cdot (h_1 - h_4)}{L} = i \cdot \gamma_w \quad (2.104.)$$

Como se observa pela equação 2.104, a força de percolação é uma grandeza proporcional ao gradiente hidráulico e toma a direcção e o sentido do escoamento. A este propósito M. M. Fernandes (2006) refere que a força de percolação é a força que a água aplica à unidade de volume do solo em consequência exclusiva do seu movimento.

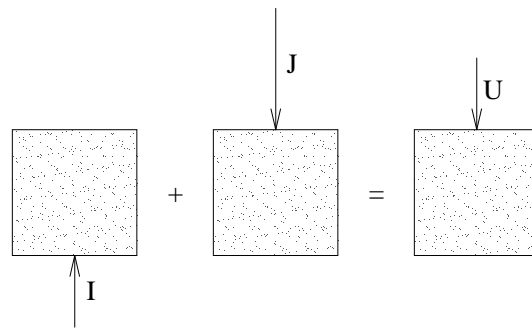


Fig.2.35 – Componentes da força exercida pela água sobre o meio poroso

Repare-se que a energia da água em movimento é transferida para o esqueleto sólido do solo por atrito. Esta transferência de tensões da componente neutra para a componente efectiva poderá assumir contornos preocupantes nos escoamentos ascensionais.

2.6.3. GRADIENTE HIDRÁULICO CRÍTICO. QUICK CONDITION

Observe-se a Fig.2.36 que mostra uma unidade de volume de solo submerso sujeita a três solicitações distintas devidas à presença de água.

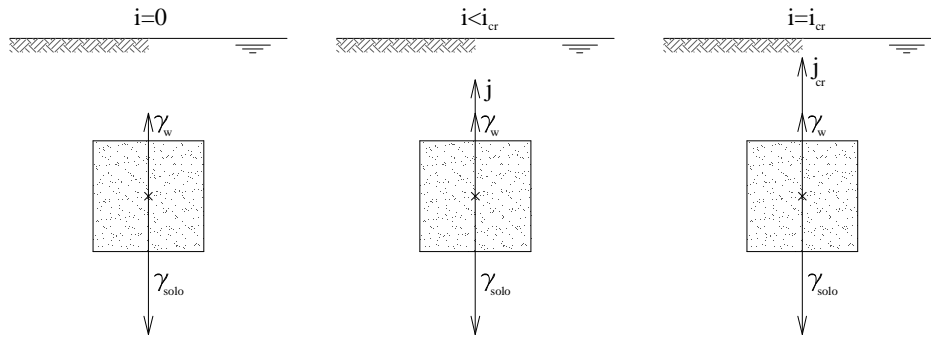


Fig.2.36 – Forças aplicadas sobre um volume unitário de solo submerso

Na situação hidrostática, $i=0$, o volume de solo é solicitado pela força gravítica e pela impulsão. À resultante das duas forças dá-se o nome de peso volúmico submerso, γ' . Num caso hidrodinâmico genérico, $i < i_{cr}$, o balanço de forças conta agora com uma componente devida à força de percolação. Quando a força de impulsão somada com a força de percolação anularem o efeito da força gravítica atinge-se a situação crítica ou *quick condition* e o gradiente hidráulico respectivo designa-se por *gradiente hidráulico crítico*.

$$j_{cr} + \gamma_w = \gamma \Leftrightarrow i_{cr} \cdot \gamma_w + \gamma_w = \gamma \Leftrightarrow i_{cr} = \frac{\gamma - \gamma_w}{\gamma_w} \quad (2.105.)$$

donde:

$$i_{cr} = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \quad (2.106.)$$

M. M. Fernandes (2006) refere que como o peso volúmico de areias saturadas soltas ou compactas varia *grosso modo* entre 18 e 22 kN/m³ o valor de i_{cr} varia geralmente entre 0.8 e 1.2.

Como na situação crítica a força total aplicada pela água sobre o solo iguala as forças gravíticas, anulando desse modo as tensões efectivas, nos solos arenosos, cujo comportamento resistente se deve à fricção das partículas sólidas, a situação de *quick condition* implica a anulação da resistência, comportando-se o solo como um líquido denso.

Nos casos em que ocorra um escoamento vertical ou subvertical ascendente junto da fronteira de jusante de obras hidráulicas, o coeficiente de segurança em relação à condição crítica pode ser definido pela equação 2.107.

$$F = \frac{i_{cr}}{i_{máx}^{jus}} \quad (2.107.)$$

em que o termo no denominador representa o gradiente hidráulico máximo junto da fronteira de jusante.

2.6.4. LEVANTAMENTO HIDRÁULICO

O fenómeno de instabilidade por levantamento hidráulico ocorre quando os gradientes hidráulicos dão origem a forças de percolação que anulam as tensões efectivas do solo numa determinada secção e manifesta-se pelo levantamento do solo acima da secção referida.

Tendo em consideração estruturas tipicamente geotécnicas, como as ensecadeiras ou cortinas impermeáveis, sabe-se que os maiores gradientes hidráulicos ocorrem a profundidades próximas do pé da cortina e portanto, de acordo com a equação 2.104, será aí que as forças de percolação serão máximas. Neste casos particulares Terzaghi (1922) concluiu que a zona mais crítica em termos de levantamento hidráulico é um bloco de terras adjacente à cortina de largura aproximadamente igual a metade da altura enterrada, nas condições ilustradas na Fig.2.37. M. M. Fernandes (2006) refere que, em ensecadeiras de largura reduzida, a geometria do bloco potencialmente instável, **bpi**, poderá corresponder à largura da escavação.

Relativamente à verificação de segurança ao levantamento hidráulico, a maioria dos autores considera mais correcto calcular o coeficiente de segurança através da razão do peso submerso do bloco potencialmente instável, **W'**, pela resultante das forças de percolação nele aplicadas.

$$F = \frac{W'}{J} = \frac{\gamma' \cdot V}{i_{med}^{bpi} \cdot \gamma_w \cdot V} = \frac{i_{cr}}{i_{med}^{bpi}} \quad (2.108.)$$

em que, o termo em denominador representa o gradiente hidráulico médio no bloco potencialmente instável. Por análise da rede de fluxo numa cortina impermeável em meio homogéneo, constata-se que o gradiente hidráulico médio considerado é sempre superior ao gradiente hidráulico máximo de jusante, pelo que o factor de segurança por levantamento hidráulico é, desse modo, sempre inferior ao factor de segurança por *quick condition* e, por isso, o modo de rotura condicionante em meios homogéneos será à partida o de levantamento hidráulico.

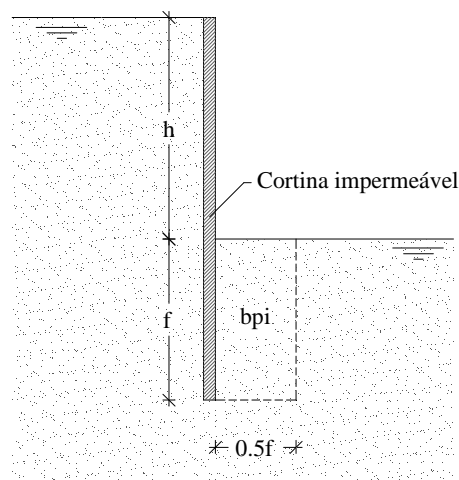


Fig.2.37 – Bloco potencialmente instável, **bpi**, por levantamento hidráulico

Note-se porém que o levantamento hidráulico de um prisma rectangular nas condições que Terzaghi preconiza ocorre apenas em casos muito específicos. Através da análise das condições de equilíbrio

relativamente aos excessos de pressões neutras, Davidenkoff (1954) demonstrou que o levantamento hidráulico de um prisma rectangular só é possível se as tensões tangenciais mobilizáveis na interface solo-cortina forem desprezáveis e se a sua espessura for inferior à apontada por Terzaghi. No âmbito desta discussão, N. Benmebarek *et al.* (2005) parecem demonstrar que, para um certo estado de tensão de confinamento, o efeito conjugado da força de percolação ascensional, do ângulo de dilatância do solo, ψ , e do ângulo de atrito da interface solo-cortina, δ , permite a mobilização de tensões tangenciais responsáveis pela alteração geométrica do bloco potencialmente instável.

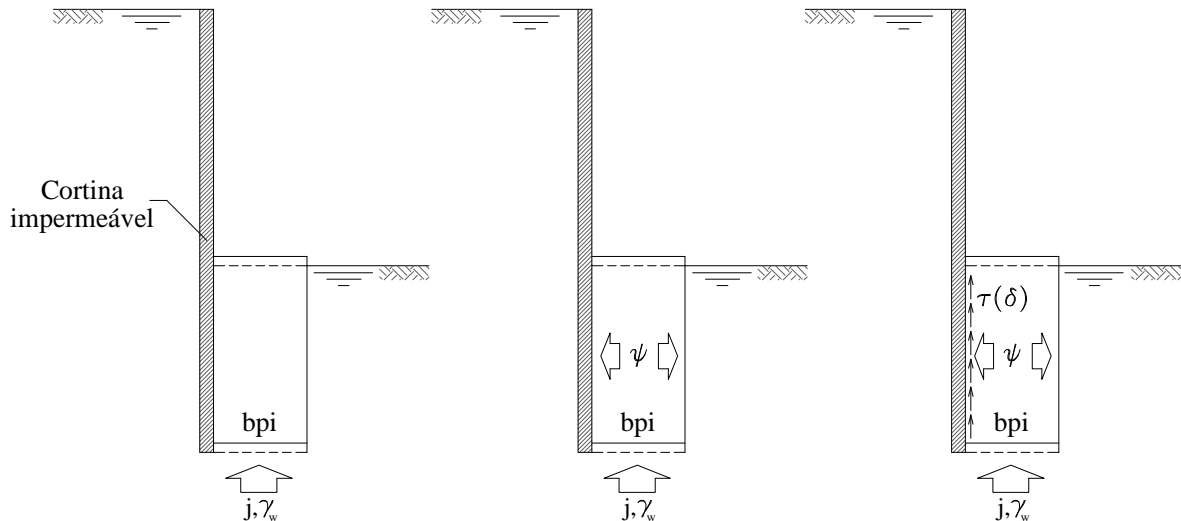


Fig.2.38 – Mecanismo de formação dos blocos potencialmente instáveis

Para ângulos de atrito do solo, ϕ , compreendidos entre 20° e 35° e com moderados a elevados valores do ângulo de dilatância, os mesmos autores sugerem a formação de uma cunha de solo potencialmente instável. Por outro lado, só para $\phi=40^\circ$ é que o fenómeno de condição crítica, localizado junto da fronteira de jusante, parece ter lugar.

2.6.5. SEGURANÇA À ROTURA HIDRÁULICA

Os processos de maximização da segurança à rotura hidráulica são o aumento do caminho de percolação e a instalação de filtros. Note-se que estas medidas poderão ser encaradas como soluções que se complementam mutuamente.

O aumento do caminho de percolação provoca o aumento da energia dissipada pela água antes desta atingir a zona hidráulicamente mais sensível e, em simultâneo, faz reduzir o caudal percolado. Para o caso de cortinas impermeáveis e ensecadeiras, o aumento do caminho de percolação é conseguido à custa da altura enterrada da cortina. Já no caso das barragens, tal objectivo consegue-se com o auxílio de cortinas *corta-águas* parciais, de montante ou de jusante, instaladas no maciço de fundação e de *tapetes impermeáveis* colocados sobre a superfície do maciço de fundação. A propósito da eficiência destas soluções construtivas em termos de garantias de segurança hidráulica, M. M. Fernandes (2006) conclui que, à parte as questões de exequibilidade, a instalação de tapetes impermeáveis merece ser ponderada pois esta conduz, relativamente às demais técnicas, a menores distribuições de pressões da água na base das barragens.

A instalação de filtros permite evitar o transporte das partículas de solo pela água e desse modo aumentar a segurança à erosão interna. Os filtros deverão ser instalados sobre a superfície do maciço

do lado de jusante sendo constituídos tradicionalmente por materiais granulares suficientemente finos para impedir a passagem das partículas do solo a proteger, mas também suficientemente grossas para que a permeabilidade deste meio não afecte o normal percurso do escoamento, devendo ser assegurados no seu seio gradientes hidráulicos muito baixos.

3

ENSAIOS DE CARACTERIZAÇÃO

3.1. INTRODUÇÃO

Para ser possível avaliar a qualidade das diversas expressões semiempíricas de determinação do coeficiente de permeabilidade dos solos mostradas previamente no ponto 2.4.6 e para efectuar o estudo numérico dos problemas de percolação em modelo reduzido, que serão oportunamente discutidos, será necessário introduzir determinados parâmetros de natureza física, mecânica e hidráulica.

No âmbito dos ensaios de caracterização será efectuada a análise granulométrica dos solos para dela obter os valores de D_{10} e D_{60} . A estimativa do índice de vazios será conseguida à custa da determinação do peso volúmico das amostras “indeformadas” de solo, da determinação do peso volúmico das partículas sólidas e da quantificação do teor em água. Para comparar os resultados obtidos pelas vias experimental e numérica, será ainda determinado o coeficiente de permeabilidade dos solos em condições saturadas. Quanto aos fenómenos de instabilidade de origem hidráulica pareceu adequado efectuar a estimativa do ângulo de atrito efectivo.

3.2. ANÁLISE GRANULOMÉTRICA

De acordo com M. M. Fernandes (2006) a composição granulométrica constitui uma característica de identificação do solo sendo, de todas as propriedades necessárias definir num estudo, a mais básica e deve ser em qualquer circunstância definida antes de quaisquer outras.

Para a determinação das fracções granulométricas presentes nos solos, será utilizado o método de peneiração que consiste em fazer passar as amostras de solo por uma série de peneiros de malha quadrada de abertura decrescente.



Fig.3.1 – Colocação do agregado na série de peneiros (ACI, 1978)

Nesta análise será utilizada a série principal de peneiros, em conformidade com a norma americana ASTM (American Society for Testing Materials), compreendida entre o peneiro n.º 4, que separa os cascalhos finos das areias grossas, e o peneiro n.º 200, que convencionalmente separa as areias finas dos siltes grossos. Saliente-se que o procedimento de peneiração é válido no pressuposto que as partículas da amostra têm o mesmo peso volúmico. A peneiração, manual ou mecânica, deverá sujeitar as amostras a movimentos de rotação e de translação com sentidos alternados várias vezes e sem manipulação das partículas ou fragmentos de solo. O material retido num dado peneiro será pesado para aferir a sua representatividade face à amostra global e representará a fracção de solo com dimensões compreendidas entre as dimensões desse peneiro e o de abertura imediatamente inferior.

A análise granulométrica pretendida deve ser realizada sobre uma amostra representativa das propriedades do agregado no seu todo e a amostra em causa deve ser recolhida utilizando um método de redução adequado. Para o caso utilizou-se o método de fraccionamento com pá. A recolha das amostras será efectuada de tal modo que estas tenham sensivelmente o mesmo tamanho, sejam tomadas de pontos a diferentes alturas ou profundidades e distribuídas em toda a pilha do agregado.

Os provetes deverão ser secos a cerca de 110°C até massa constante e a sua massa deve ser proporcional à máxima dimensão do agregado a ensaiar. Para o caso em apreço, uma amostra de solo com cerca de 0.2Kg resultante do esquartelamento de 1.0Kg de solo foi considerado suficiente.

Os resultados obtidos serão registados sob a forma de tabela sendo indicada a massa retida e a percentagem retida em cada peneiro, a percentagem total que passa através do peneiro e a percentagem total que fica retida no peneiro.



Fig.3.2 – Resultados obtidos na peneiração de uma amostra (ACI, 1978)

No presente estudo serão utilizados dois solos distintos, A e B, para a constituição dos modelos experimentais.

Para ter uma ideia da variedade de dimensões das partículas dos solos pode-se recorrer ao conceito de coeficiente de uniformidade que é dado pela equação 3.1.

$$C_U = \frac{D_{60}}{D_{10}} \quad (3.1.)$$

De acordo com M. M. Fernandes (2006), os solos podem ser considerados bem graduados quando o valor de C_U for maior do que 4 a 6. Quando C_U é próximo da unidade o solo diz-se uniforme.

A análise granulométrica e respectiva curva do solo A foram efectuadas por C. Romão Ferreira (2008). Por consulta dos dados referidos conclui-se que o diâmetro efectivo, D_{10} , vale 0.412mm e o valor de D_{60} é cerca de 1.509mm. Através da equação 3.1 constata-se que o coeficiente de uniformidade, C_U , vale 3.7 e portanto este solo deve ser considerado medianamente graduado.

O solo B, que constituirá o material de execução do núcleo da barragem zonada, foi analisado nos termos acima indicados no Laboratório de Geotecnia da F.E.U.P. tendo sido obtida a análise granulométrica que se mostra em seguida.

Quadro 3.1 – Fracção do solo B retida no peneiro de 2.00mm (n.º 10)

Peneiros	Massa Retida	% Retida	% Acumulada	% Acumulada
ASTM	(gf)		Retida	Passada
N.º [mm]	(m_x)	$[N_x=m_x/m_t \times 100]$	(N'_x)	($N''_x=100-N'_x$)
3"	76.10	0.00	0.00	100.0
2"	50.80	0.00	0.00	100.0
1.5"	38.10	0.00	0.00	100.0
1"	25.40	0.00	0.00	100.0
3/4"	19.00	0.00	0.00	100.0
3/8"	9.51	0.00	0.00	100.0
4	4.76	0.00	0.00	100.0
10	2.00	0.33	0.15	99.9
Resíduo	0.00	0.00		
Total	0.33	0.15		

Facilmente se percebe pelo Quadro 3.1 que o solo B é constituído por uma fracção quase desprezável de cascalho fino.

Quadro 3.2 – Fracção do solo B passada no peneiro de 2.00mm (n.º 10)

Massa da amostra a ensaiar (gf)		$m_a=91.91$			
$N''_{10} = (m'_{10}/m_t) \times 100 = 99.8545$					
Peneiros	Massa Retida	% Retida	% Acumulada	% Acumulada	
ASTM	(gf)	Total	Retida Total	Passada Total	
N.º [mm]	(m_x)	$[N_x=m_x/m_t \times 100]$	(N'_x)	($N''_x=100-N'_x$)	
20	0.840	1.66	1.80	1.95	98.1
40	0.425	12.31	13.37	15.32	84.7
60	0.250	45.45	49.38	64.70	35.3
80	0.180	23.45	25.48	90.18	9.8
140	0.106	5.57	6.05	96.23	3.8
200	0.075	0.34	0.37	96.60	3.4
<200	<0.075	3.13	3.40		
Total	91.91	99.85			

Através dos dados disponíveis no Quadro 3.2 verifica-se que o valor de D_{10} vale 0.181mm e o valor de D_{60} vale 0.338mm. Recorrendo à equação 3.1 verifica-se que C_U vale 1.9 concluindo-se então que se trata de um solo mal graduado.

De acordo com o triângulo de Feret, tendo em conta que a percentagem de material arenoso é de 96.45% e que a percentagem de finos é bastante inferior a 20%, o solo B poderá ser classificado como uma areia.

Os resultados da análise granulométrica apresentados no Quadro 3.1 e Quadro 3.2, podem ser representados em gráficos cujas dimensões das partículas, apresentadas em milímetros, estão representadas em escala logarítmica. A classificação das partículas do solo será efectuada por ordem crescente em função das suas dimensões, podendo essas partículas ser classificadas como *argilas*, *siltos*, *areias* e *cascalhos*. Os *siltos*, *areias* e *cascalhos* podem ainda dividir-se em *finos*, *médios* e *grossos*.

Na Fig.3.3 é mostrada a curva granulométrica referente ao solo B.

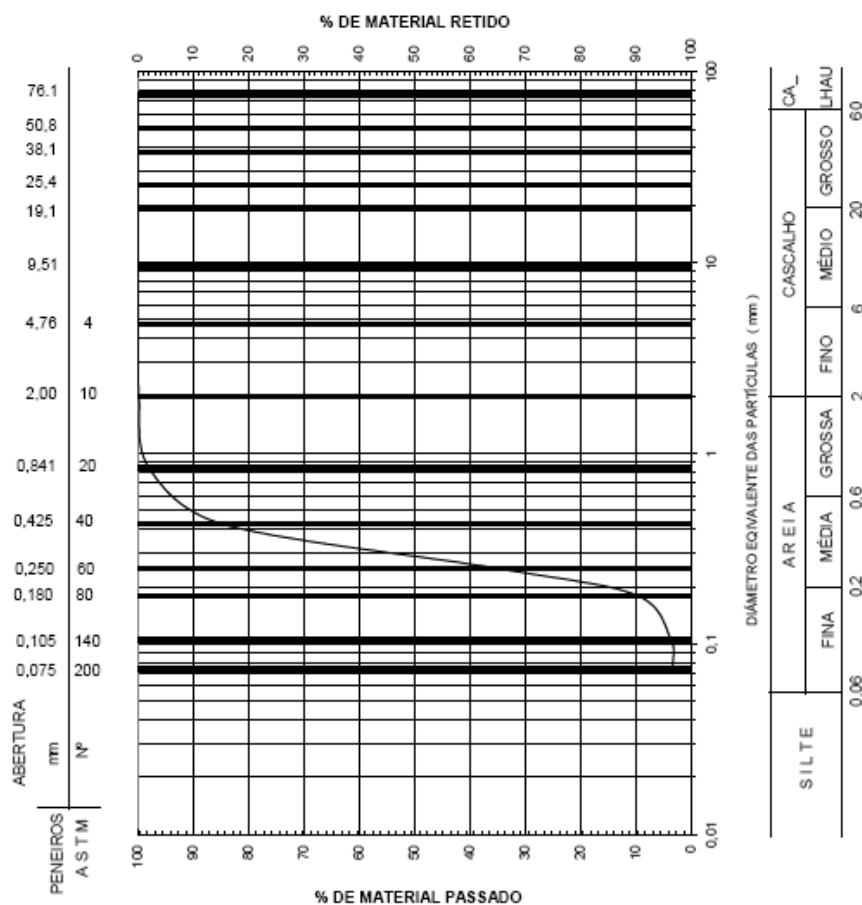


Fig.3.3 – Curva granulométrica do solo B (produzida pelo laboratório de Geotecnia da F.E.U.P.)

3.3. PESO VOLÚMICO DO SOLO

A determinação do peso volúmico do solo será realizada através da obtenção de amostras “indeformadas” à custa de um amostrador com peso de 38.80g. Este utensílio, constituído por material plástico rígido, terá paredes finas e será cravado cuidadosamente nos materiais empregues no modelo experimental da barragem zonada e de modo a englobar uma amostra de solo cilíndrica.

A retirada das amostras junto com o acessório de cravação será conseguida com auxílio de uma pá inserida na base do amostrador que permitirá evitar a perda de material e de água do solo. Estando o material dentro do amostrador devidamente acondicionado pela pá, a pesagem deverá ser imediata. A

medição da altura e do diâmetro interior do amostrador, para o cálculo do volume do solo, foi efectuada com craveira, podendo as suas dimensões ser visualizadas na Fig.3.4.

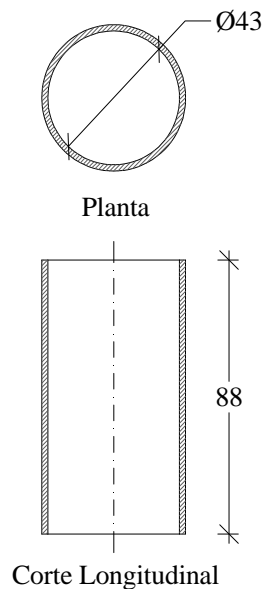


Fig.3.4 – Dimensões do amostrador de solo (mm)

Em seguida mostram-se os resultados obtidos para as duas amostras de solo.

Quadro 3.3 – Estimativa do peso volúmico dos solos

Solo	Tara [g]	V_{amostra} [cm ³]	m_{bruta} [g]	m [g]	P [N]	γ [kN/m ³]
A	38.80	127.79	284.45	245.65	2.41	18.9
B	38.80	127.79	334.46	295.66	2.90	22.7

Após o processo de pesagem das amostras, os materiais representativos dos solos A e B deverão ser vazados imediatamente para as cápsulas de pesagem que servirão para calcular o teor em água nas condições descritas em seguida.

3.4. DETERMINAÇÃO DO TEOR EM ÁGUA

A determinação do teor em água será efectuada pelo método de secagem em estufa e consiste fundamentalmente nos seguintes passos:

- Determinação do peso húmido das amostras do solo cujo teor em água se quer determinar;
- Secagem das amostras em estufa;
- Pesagem das amostras secas.

Note-se que, a diferença de pesos das amostras em condições húmidas e secas, respectivamente, representa o peso da água na amostra nas condições iniciais. Repare-se também que o peso das amostras secas mais não é do que o peso da fase sólida. O cálculo do teor em água será conforme se mostrou na equação 2.4.



Fig.3.5 – Pesagem das amostras dos solos A e B

Na Fig.3.5 é possível observar que, para o procedimento acima descrito foram utilizadas duas cápsulas por solo. O teor em água resultante será obtido pela média dos dois valores.

Quadro 3.4 – Teor em água do solo A

Cápsula	Massa da cápsula	Massa da cápsula mais amostra húmida	Massa da cápsula mais amostra seca	Massa da amostra húmida	Massa da amostra seca	Peso da fase líquida	Peso da fase sólida	Teor em água
[Ref.]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[N]	[N]	[%]
14M	27.85	148.40	135.34	120.55	107.49	0.13	1.05	12.1
30M	29.09	151.02	138.97	121.93	109.88	0.12	1.08	11.0

Conforme se pode observar no Quadro 3.4, o teor em água médio do solo A é aproximadamente igual a 11.6%.

Quadro 3.5 – Teor em água do solo B

Cápsula	Massa da cápsula	Massa da cápsula mais amostra húmida	Massa da cápsula mais amostra seca	Massa da amostra húmida	Massa da amostra seca	Peso da fase líquida	Peso da fase sólida	Teor em água
[Ref.]	[g]	[g]	[g]	[g]	[g]	[N]	[N]	[%]
9M	31.23	181.69	163.48	150.46	132.25	0.18	1.30	13.8
26M	30.20	174.14	156.13	143.94	125.93	0.18	1.24	14.3

Através dos dados que se mostram no Quadro 3.5, conclui-se que o teor em água médio do solo B é aproximadamente igual a 14.0%.

3.5. DETERMINAÇÃO DO PESO VOLÚMICO DAS PARTÍCULAS SÓLIDAS

A determinação do peso volúmico das partículas sólidas será efectuada sobre amostras húmidas e consiste no seguinte procedimento:

- Determinação do peso do picnómetro cheio de água destilada;
- Pesagem do picnómetro com a amostra de solo no interior e preenchido com água destilada;
- Secagem da amostra em estufa e determinação do seu peso seco.

Repare-se que a diferença dos pesos entre a amostra húmida e a amostra seca diz respeito ao peso do picnómetro acrescido do peso da água relativo ao volume do picnómetro a menos do volume das partículas sólidas. Descontando o peso do picnómetro cheio de água destilada nesta diferença de pesos obtém-se então o peso em água de um volume coincidente com o volume das partículas sólidas da amostra. A densidade das partículas sólidas, G , é dada pela razão do peso volúmico das partículas sólidas, γ_s , e o peso volúmico da água, γ_w .

Os resultados dos ensaios laboratoriais levados a efeito no laboratório de Geotecnia da F.E.U.P. serão apresentados em seguida. No Quadro 3.6 mostram-se os dados relativos ao processo de calibragem.

Quadro 3.6 – Calibragem

Picnómetro [Ref.]	T_1 [°C]	m_1 [gf]	m_2 [gf]
5	19.0	54.08	153.79
11	19.0	49.81	149.50

em que, T_1 é a temperatura de calibragem do picnómetro, m_1 é o peso do picnómetro e m_2 é o peso do picnómetro acrescido da água destilada.

A determinação do peso volúmico das partículas sólidas pode ser consultada no Quadro 3.7.

Quadro 3.7 – Peso volúmico das partículas sólidas

Picnómetro [Ref.]	m_3 [gf]	m_5 [gf]	m_A [gf]	m_B [gf]	m_4 [gf]	t_x [°C]	k []	γ_s [kN/m ³]
5	153.79	171.56	260.91	289.55	28.64	25.8	0.999	25.82
11	149.50	167.42	212.49	241.47	28.98	25.7	0.999	25.68

em que, m_3 é o peso do picnómetro acrescido da água destilada, m_5 é igual ao peso m_3 acrescido do peso do provete, m_A é o peso da cápsula A, m_B é o peso da cápsula B, m_4 é o peso do provete seco, t_x é a temperatura de ensaio, k é a razão entre a densidade da água à temperatura t_x e a temperatura do ensaio a 20°C e γ_s é o peso volúmico das partículas sólidas.

Dos dados mostrados no Quadro 3.7 conclui-se que, o peso volúmico das partículas sólidas do solo B é aproximadamente igual a 25.8kN/m³.

3.6. ESTIMATIVA EXPEDITA DO ÂNGULO DE ATRITO

A estimativa do ângulo de atrito efectivo do solo A será efectuada com base na medição do ângulo de repouso ou de talude natural. Note-se que, num material granular verifica-se que o ângulo de talude natural coincide com o ângulo de atrito crítico. Deste modo, a formação de uma pilha de solo em laboratório poderá constituir um processo eficiente de estimar o ângulo de atrito estritamente necessário para assegurar o equilíbrio. Saliente-se que o material a utilizar será previamente seco em estufa para desse modo eliminar o efeito da coesão aparente deturpando os resultados. Note-se que essa coesão aparente é devida às pressões capilares que originam ligações entre as partículas sólidas gerando forças que se somam às do peso próprio aumentando artificialmente as tensões efectivas. Naturalmente que o raciocínio desenvolvido neste ponto parte do pressuposto que o ângulo de dilatância é nulo o que poderá não corresponder à realidade. Para este caso concreto, em que se trata de uma areia solta, admite-se que a variação volumétrica por efeito de tensões tangenciais é desprezável e não constituirá erro apreciável nos resultados obtidos.

Para levar a cabo o referido ensaio fixou-se um funil num suporte nas condições mostradas na Fig.3.6.



Fig.3.6 – Montagem laboratorial para a estimativa do ângulo de atrito efectivo

O procedimento de formação da pilha consistiu em colocar gradualmente a areia previamente seca em estufa num funil colocado a uma distância muito pequena do topo da pilha de material para minimizar o efeito da queda das partículas do solo na pilha de material.

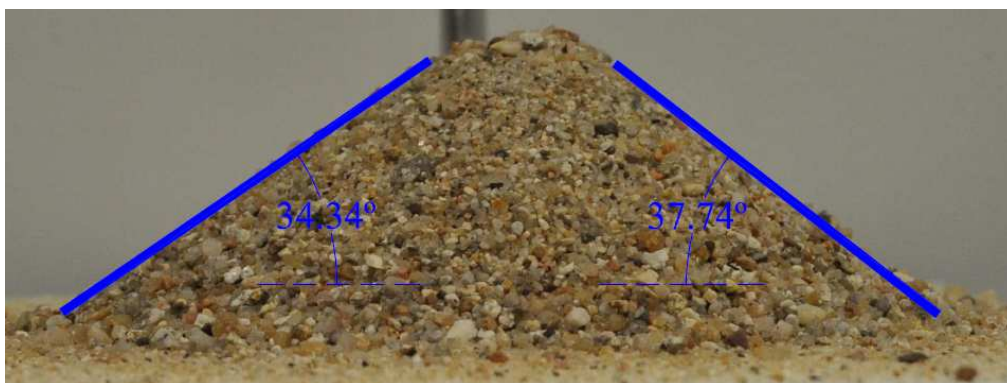


Fig.3.7 – Vista frontal da pilha de material e ângulos de repouso

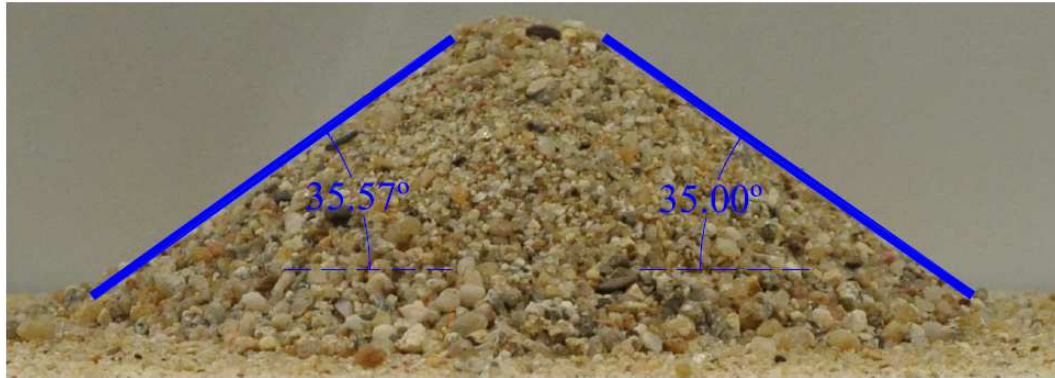


Fig.3.8 – Vista lateral da pilha de material e ângulos de repouso

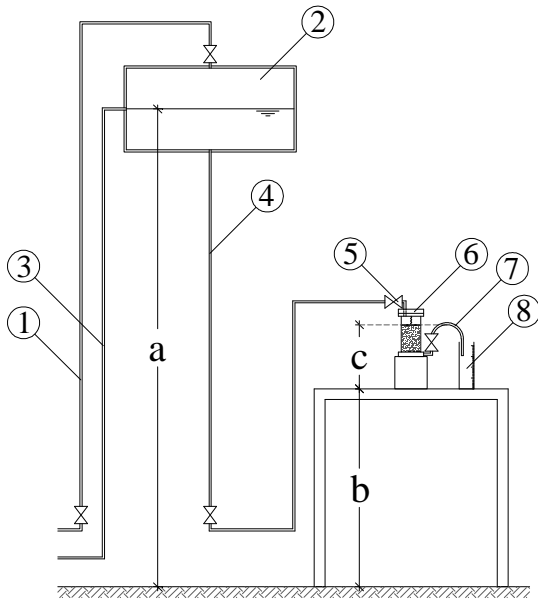
Efectuando a média dos quatro valores do ângulo de repouso mostrados nas Fig.3.7 e 3.8 conclui-se que o ângulo de atrito efectivo deverá ser aproximadamente igual a 36° . Hough (1957) propôs valores indicativos dos ângulos de atrito de pico e de volume constante para solos granulares que se enquadram razoavelmente no resultado obtido.

Quadro 3.8 – Proposta de Hough para o ângulo de atrito efectivo de solos não coesivos

Tipos de solos	Ângulo de atrito efectivo de pico, ϕ'		
	Soltos	Medianamente	Compactos
Siltes (não plásticos)	26 a 30°	28 a 32°	30 a 34°
Areias uniformes finas a médias	26 a 30°	30 a 34°	32 a 36°
Areias bem graduadas	30 a 34°	34 a 40°	38 a 46°
Misturas de areias com cascalhos	32 a 36°	36 a 42°	40 a 48°

3.7. DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE DE PERMEABILIDADE

Conforme já foi referido no ponto 2.4.5, o ensaio de determinação da permeabilidade com permeâmetro de carga constante é o mais indicado para materiais granulares com permeabilidade considerável. A amostra de solo será colocada dentro de um molde cilíndrico nas condições de compactação semelhantes às efectuadas nos modelos experimentais e a perda de carga hidráulica será mantida constante por ajuste do nível da água do reservatório. A água que sai do sistema é recolhida para um recipiente cilíndrico graduado e a duração do tempo que essa recolha demorou é registada. A Fig.3.9 pretende esquematizar o dispositivo disponível no laboratório de Geotecnia da F.E.U.P no qual foram realizados os ensaios de permeabilidade dos solos A e B.



Legenda

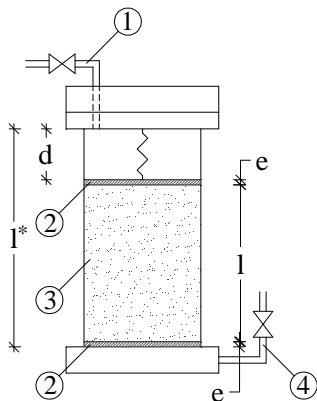
- 1 - Ramal de admissão de água ao reservatório
- 2 - Reservatório de água
- 3 - Ramal de drenagem de água do reservatório
- 4 - Ramal de ligação do reservatório ao permeâmetro
- 5 - Válvula de seccionamento
- 6 - Permeâmetro
- 7 - Ramal de descarga do permeâmetro
- 8 - Proveta graduada

Fig.3.9 – Esquemática do circuito do permeâmetro de carga constante

Para que o escoamento se efectue em regime permanente é necessário que o nível de água no reservatório permaneça constante no período de medição do caudal. Observando a Fig.3.9 percebe-se que a diferença de carga, Δh , deverá permanecer constante.

$$\Delta h = a - (b + c) \quad (3.2.)$$

Desprezando o atrito da água com as paredes dos tubos de admissão, admite-se desse modo que a perda de carga hidráulica se verifica apenas no trecho do escoamento que passa pela amostra de solo.



Legenda

- 1 - Ramal de ligação do reservatório ao permeâmetro
- 2 - Pedra porosa
- 3 - Amostra de solo
- 4 - Ramal de descarga do permeâmetro

Fig.3.10 – Esquemática do permeâmetro

Através da Fig.3.10 é possível constatar que, na aplicação da lei de Darcy ao escoamento é a distância **I** que importa para o cálculo do gradiente hidráulico. Tal como no caso do diâmetro interior do amostrador cilíndrico, **D**, no final de cada ensaio as distâncias marcadas na Fig.3.10 serão medidas

com o auxílio de craveira. Devido ao modo como a pedra porosa é instalada no topo, esta poderá ficar ligeiramente inclinada e por isso achou-se por bem calcular a distância **d** pela média da medição efectuada em três pontos equidistantes entre si.

Quadro 3.9 – Duração do tempo para a recolha da água na proveta graduada

Solo A			Solo B		
V [ml]	Tempo [s]	Tempo [s]	V [ml]	Tempo [s]	Tempo [s]
200	20	20	10	28	28
	40	20		57	29
	60	20		87	30
	80	20		116	29
	99	19		146	30
	120	21		176	30
	140	20		206	30
	161	21		236	30
	181	20		265	29
	202	21		296	31

Com os dados que constam no Quadro 3.8 e aplicando a lei de Darcy facilmente se poderá então determinar o coeficiente de permeabilidade em condições saturadas dos solos A e B.

Quadro 3.10 – Parâmetros para o cálculo do coeficiente de permeabilidade

Solo	V [ml]	t _{médio} [s]	D [cm]	a [cm]	b [cm]	c [cm]	Δh [cm]	l* [cm]	d [cm]	e [cm]	l [cm]
A	200	20.2	7.35	224.00	92.00	28.00	104.00	16.70	2.78	0.40	13.12
B	10	29.6	7.35	222.00	92.00	34.50	95.50	16.70	3.93	0.40	11.97

Com o auxílio dos dados disponíveis no Quadro 3.9, os resultados obtidos podem ser consultados no Quadro 3.10.

Quadro 3.11 – Determinação do coeficiente de permeabilidade

Solo	Q [m ³ /s]	S [cm ²]	i [m/m]	k [m/s]
A	9.90E-06	42.43	7.93	2.94E-04
B	3.38E-07	42.43	7.98	9.98E-06

C. Romão Ferreira (2008) verificou que, o coeficiente de permeabilidade do solo A é da ordem de grandeza 10^{-3} . A discrepância que se observa nos dois resultados pode ser explicada pelo facto da pedra porosa ser menos permeável do que o solo A. Assim, neste caso a permeabilidade medida será referente à pedra porosa e não à amostra de solo propriamente dita. Note-se também que os valores dos coeficientes de permeabilidade podem não coincidir exactamente com os obtidos na fase experimental. Este facto pode dever-se a diversos factores tais como: a temperatura da água não ser igual, a má representatividade da amostra e o índice de vazios diferente. No entanto, percebe-se desde já que o solo B apresenta um valor de **k** uma a duas ordens de grandeza inferior ao do solo A, tornando desse modo exequível a modelação, numérica e experimental, da barragem de aterro zonada.

4

MODELAÇÃO EXPERIMENTAL

4.1. INTRODUÇÃO

No âmbito deste capítulo pretende-se efectuar uma breve descrição das características técnicas do equipamento de percolação disponível e suas possíveis aplicações didácticas, mencionar o procedimento adoptado para a visualização dos escoamentos nos ensaios experimentais e efectuar a descrição física e geométrica dos estudos de percolação em modelo reduzido levados a cabo no presente trabalho.

4.2. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DO TANQUE DE PERCOLAÇÃO

O tanque de percolação, equipamento laboratorial de carácter didáctico, permite o estudo da percolação em modelo reduzido de escoamentos bidimensionais e foi anteriormente desenvolvido por C. Romão Ferreira (2008). Este dispositivo é essencialmente constituído por um tanque em material acrílico, por um circuito hidráulico e por um suporte móvel. Interiormente, o tanque acrílico tem 2000mm de comprimento, 585mm de altura e 200mm de largura. As paredes do tanque têm espessura de 12mm. Conforme se pode observar na Fig.4.1, este aparelho dispõe ainda de duas calhas onde se podem colocar duas placas acrílicas separadoras de altura ajustável e com 8mm de espessura.

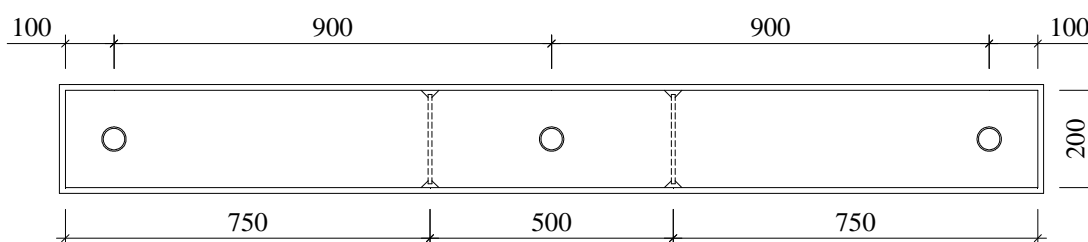


Fig.4.1 – Planta do tanque de percolação

Na Fig.4.1 mostra-se também que, o controlo dos níveis de água nas diversas divisões do tanque é garantido por um conjunto de tubos acrílicos com altura ajustável, com diâmetro exterior de 50mm e diâmetro interior de 44mm. A estanquidade tubos-tanque é garantida por duas peças roscadas e um o-ring. Para minimizar a possibilidade das ligações coladas cederem, por efeito dos impulsos gerados pelos modelos sobre as paredes do equipamento, efectuaram-se três uniões com placas acrílicas aparafusadas no topo do tanque.

Na Fig.4.2 mostra-se a forma encontrada que permite a possibilidade de efectuar a medição de pressões no seu interior. Para este efeito, foram executadas na parede traseira 48 pequenos orifícios em quincôncio protegidos com rede plástica.

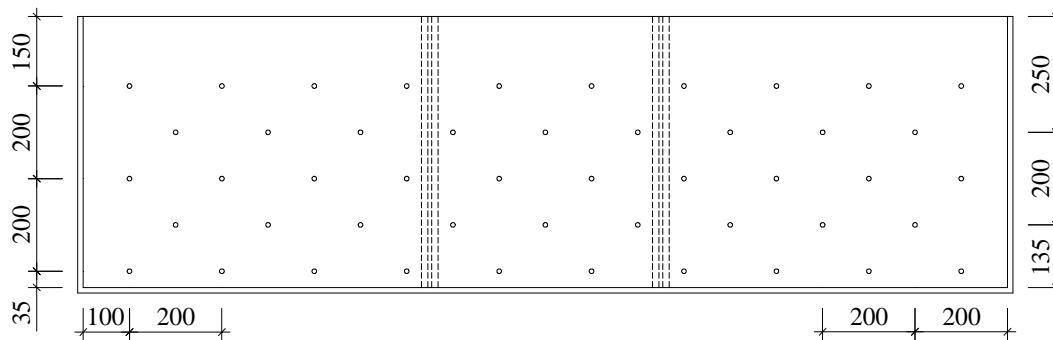


Fig.4.2 – Alçado posterior do tanque de percolação

O suporte metálico serve essencialmente para resistir aos efeitos do peso do tanque, do modelo em fase de ensaio (peso dos materiais secos acrescido do peso da água) e do peso do sistema hidráulico instalado. Este componente do equipamento laboratorial, excluindo as peças laterais, tem dimensões aproximadas de 1260x790x620mm³.

Ainda no âmbito da fase de desenvolvimento deste equipamento, entendeu-se que para as experiências em causa a quantidade de água a utilizar no circuito hidráulico seria ligeiramente inferior a 200 litros pelo que se adoptou uma solução de dois reservatórios ligados entre si com dimensões exteriores 620x403x500mm³.

A bomba submersível é monofásica, tem 300W de potência e para uma altura manométrica de 1m consegue elevar aproximadamente 5800l/h.

O circuito hidráulico é um sistema fechado tendo o seu início numa instalação elevatória situada num reservatório de água na plataforma inferior do suporte metálico, passando pelo tanque de percolação e terminando depois com o sistema de drenagem que devolve a água aos reservatórios. De acordo com o tipo de modelo a ensaiar, existirão algumas diferenças no circuito hidráulico tais como: alterações à cota dos tubos de controlo do nível de água no interior do tanque de percolação e/ou inactivação de redes de admissão e drenagem de água.

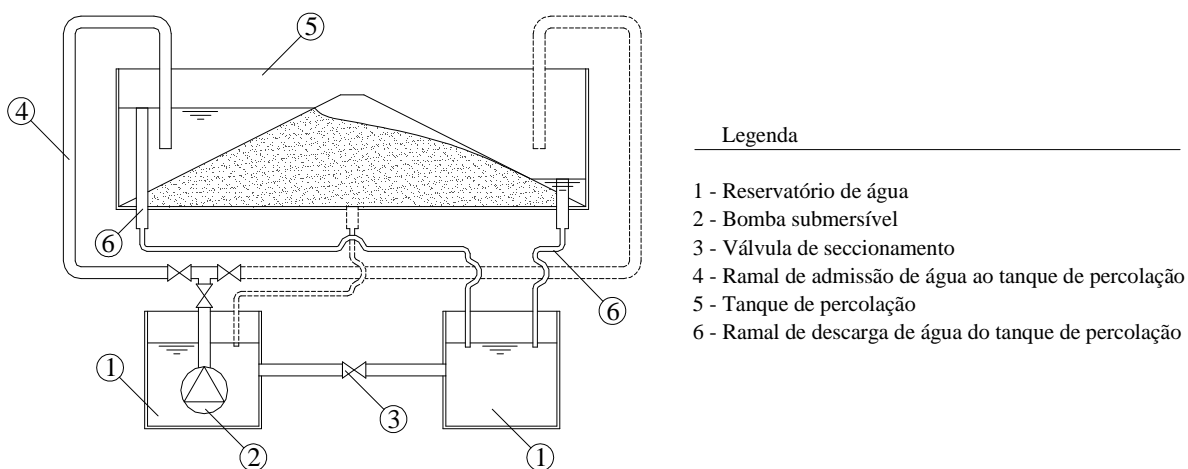


Fig.4.3 – Circuito hidráulico tipo para modelos de barragens de aterro

Os ramais a jusante dos reservatórios até às válvulas de seccionamento são em Polietileno de Alta Densidade (PEAD) da classe PN8 com 25mm. As mangueiras que constituem as redes de admissão e de drenagem do circuito hidráulico são em Policloreto de Vinilo (PVC) plastificado com 25mm de diâmetro interno. As válvulas de seccionamento são esféricas de aperto rápido em PVC.

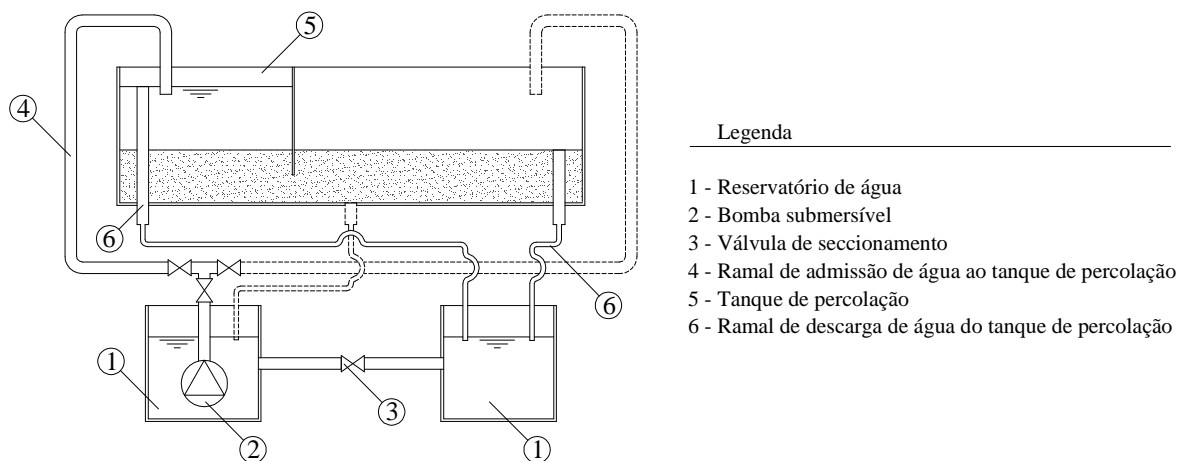


Fig.4.4 – Circuito hidráulico tipo para modelos de cortinas impermeáveis

4.3. APLICAÇÕES DIDÁCTICAS

O equipamento experimental, ferramenta aliciante e inovadora para a fácil compreensão dos fenómenos associados aos escoamentos em meios porosos, permite a observação de linhas de corrente, a medição de cotas piezométricas, a quantificação do caudal percolado e a visualização de fenómenos relacionados com a instabilidade de origem hidráulica. Note-se também que um problema de percolação pode ser resolvido através da construção de um modelo à escala reduzida efectuando a análise do fluxo no próprio modelo.

Como ferramenta de aprendizagem no âmbito do estudo da percolação, este dispositivo permite a realização de diversas experiências, das quais se destacam as seguintes:

- Dado o coeficiente de permeabilidade dos materiais que constituem os modelos, com o auxílio da injeção de produto corante no meio poroso e através da leitura das marcas dos piezómetros, efectuar o traçado gráfico do escoamento com base no critério de malha quadrada constituída pelas linhas de corrente e pelas linhas equipotenciais e estimar o caudal percolado comparando-o depois com o caudal medido experimentalmente;
- Efectuar a injeção de corante junto do limite superior do escoamento. Quando o fenómeno de percolação se efectuar em regime permanente, a região colorida pelo produto no domínio do escoamento em meio poroso deverá conter a posição real do nível freático. Determinar, pela via numérica ou gráfica, a posição do nível freático e comparar com os resultados experimentais;
- Dados os parâmetros de resistência mecânica dos materiais empregues nos modelos, prever qual a razão da carga hidráulica pela altura enterrada que conduz à rotura por instabilidade hidráulica. Efectuar o ensaio experimental nas condições previstas.

T. W. Lambe, R. V. Whitman (1969) salientam que os modelos que pretendem simular as condições de escoamento em meios porosos estão seriamente limitados em termos de solução geral de problemas de escoamento devido ao tempo e esforço requeridos para construir tal modelo e também devido às

dificuldades causadas pelo fenómeno da capilaridade. Refira-se também que, qualquer extrapolação para o protótipo a partir de resultados do modelo é sempre muito difícil pois, por exemplo, apesar do fluxo que ocorre na região não saturada não ter grande importância no protótipo, este já assume outro relevo no modelo. Esta zona de capilaridade pode mesmo representar uma boa parte da altura do modelo.

4.4. VISUALIZAÇÃO DOS ESCOAMENTOS

A visualização dos escoamentos consistiu durante muito tempo na única ferramenta disponível para a análise do movimento dos fluidos. Mais recentemente, esta técnica experimental tem sido utilizada para a interpretação do transporte de massa, quantidade de movimento e energia, contribuindo assim para a acumulação de conhecimentos no domínio da mecânica dos fluidos. Em termos didácticos, como os escoamentos laminares bidimensionais em meios porosos são estudados através do conceito de rede de percolação constituída por linhas equipotenciais e linhas de corrente, o produto injectado evidencia estas últimas e permite, desse modo, aferir o movimento da água através da região porosa.

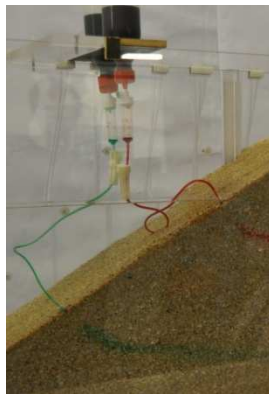


Fig.4.5 – Visualização de linhas de corrente em meio poroso

Pela sua versatilidade associada ao seu baixo custo, a injeção de traçadores líquidos tem sido amplamente utilizada no âmbito do estudo de escoamentos em meios porosos. Esta metodologia serve, de forma particularmente elucidativa para conhecer melhor o fenómeno da percolação nos solos e melhorar os processos de minimização do risco da ocorrência de instabilidade de origem hidráulica que, como é sabido, pode provocar roturas catastróficas.



Fig.4.6 – Processo de injeção do produto corante

Para levar a cabo a visualização das linhas de corrente, o processo de injeção será conseguido à custa de agulhas posicionadas no interior do escoamento e a injeção do líquido corante ocorrerá de forma a minimizar a perturbação induzida no escoamento que se pretende estudar. A nitidez e a estabilidade do filamento de produto corante serão conseguidas pelo controlo da velocidade e da pressão de injeção que deverão ser mantidas em valores semelhantes aos observados no escoamento.

4.5. MODELOS EXPERIMENTAIS

4.5.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Ao contrário das barragens executadas em betão, no caso das barragens de aterro, dada a sua constituição por materiais porosos com uma certa permeabilidade, estabelece-se um escoamento no seu interior, em regime saturado e não saturado, que necessita de ser investigado com o rigor indispensável de forma a prevenir eventuais anomalias de funcionamento ao longo da sua vida útil. Estas estruturas geotécnicas podem ser distinguidas quanto à forma como o fluido é conduzido pelo seu interior e tomam as seguintes designações:

- Barragens de terra homogéneas: construídas com solo que garanta as exigências de menor permeabilidade. Nestes casos, o subsolo deve ser suficientemente impermeável ou, caso não o seja, deve ser dotado de sistemas que impeçam o fluxo de água debaixo do corpo da barragem. Para evitar que o escoamento se instale no maciço estabilizador da barragem do lado de jusante, poderão ser previstos drenos de pé do talude, horizontais ou de chaminé, devendo estes órgãos ser protegidos por filtros;
- Barragens de terra zonadas: constituídas pelas zonas de estabilização de montante e de jusante, mais permeáveis, e por um núcleo de argila que deverá ser dotado com uma camada protectora na interface de jusante corpo da barragem-núcleo que garanta as exigências de estabilidade granulométrica do solo a proteger;
- Barragens de terra com camada impermeabilizadora constituída por materiais artificiais, tais como, betão asfáltico, betão, aço, etc.

As barragens de aterro homogéneas são constituídas praticamente por um único material cuja permeabilidade é suficientemente reduzida para possibilitar o estabelecimento de um regime de percolação da água no corpo da barragem de forma aceitável. Nos casos reais, quando o aterro ou a fundação não garantem a estanquidade necessária, observam-se com frequência casos de ressurgências junto da base do paramento de jusante. Quando se verifica esta ocorrência, estabelecem-se forças de percolação responsáveis pela erosão interna da barragem. No sentido de evitar este fenómeno, recorre-se frequentemente ao conceito de perfil homogéneo modificado que consiste fundamentalmente em dotar uma determinada barragem homogénea com órgãos de drenagem normalmente constituídos por material granular bem graduado e com permeabilidade acentuadamente mais elevada do que a do material predominante. Os drenos poderão ser designados quanto à sua geometria ou posição relativa como drenos de chaminé, drenos de pé do talude e drenos horizontais. O objectivo primordial dos drenos consiste em retirar a água da estrutura de terra drenada na quantidade necessária durante o período de vida útil da estrutura. O dimensionamento da capacidade de drenagem óptima baseia-se na definição do máximo fluxo susceptível de passar pelo dreno, da permeabilidade do material com que o dreno é constituído e do gradiente hidráulico.

As barragens de aterro zonadas são constituídas geralmente pelos maciços estabilizadores de montante e de jusante, por um núcleo argiloso, por um filtro de chaminé arenoso instalado na face de jusante do núcleo e, por vezes, com um enrocamento no pé do talude de jusante. Nestas obras geotécnicas, grande

parte da perda de carga efectua-se no núcleo central, portanto, é nessa região de baixa permeabilidade que ocorrem os maiores gradientes hidráulicos e consequentemente as forças de percolação mais elevadas. Assim, para evitar a erosão interna das partículas mais finas existentes no núcleo aumentando também por associação a capacidade erosiva da água é indispensável a disposição de uma zona do aterro com função de filtro na interface do núcleo com o maciço estabilizador de jusante. Na Fig.4.7 mostram-se as disposições possíveis do núcleo argiloso numa barragem zonada.

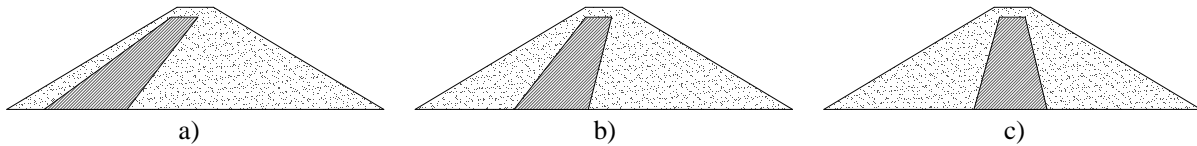
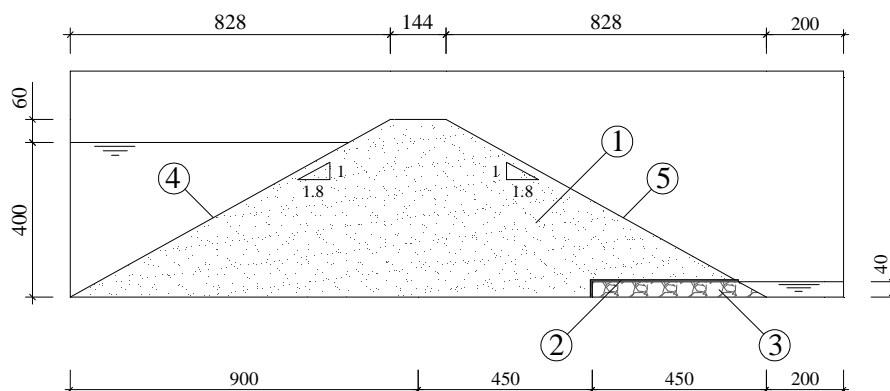


Fig.4.7 – Disposição do núcleo da barragem: a) do lado do paramento de montante; b) de eixo inclinado; c) de eixo vertical

Para o estudo em apreço, vão ser efectuados ensaios experimentais em modelo reduzido de barragens de aterro homogéneas modificadas (com dreno horizontal, dreno de pé de talude e dreno de chaminé), de uma barragem de aterro zonada com núcleo de eixo central.

4.5.2. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO HORIZONTAL

A geometria do modelo da barragem homogénea com dreno horizontal proposta pode ser observada na Fig.4.8.



Legenda

- 1 - Corpo da barragem - Solo A
- 2 - Manta Geotêxtil
- 3 - Dreno horizontal - Cascalho médio
- 4 - Paramento de montante
- 5 - Paramento de jusante

Fig.4.8 – Geometria da barragem homogénea com dreno horizontal [mm]

Numa fase prévia à montagem do modelo, procedeu-se à lavagem do solo A de modo que a água que circula no sistema esteja isenta de impurezas susceptíveis de prejudicar a visibilidade do escoamento através do meio poroso.

A marcação das pendentes e a posição do dreno horizontal foram conseguidas à custa de um fio de cor vermelha colocado na parte exterior da parede frontal do tanque de percolação. Após este passo, procedeu-se ao ajuste dos tubos de controlo dos níveis de água de montante e de jusante, para as condições que se podem observar na Fig.4.8.

Em termos da montagem do modelo propriamente dito, começou-se por colocar uma camada de solo granular ligeiramente compactado com a espessura de 4cm. Em seguida, instalou-se a manta geotêxtil de tal forma que fosse possível acondicionar o cascalho, que constitui o dreno, na interface lateral com o solo granular. A instalação da manta geotêxtil, material com interferência desprezável no escoamento, servirá essencialmente para evitar a lavagem de finos do corpo da barragem para o dreno não permitindo desse modo a evolução da permeabilidade no tempo nesse órgão. Colocando o cascalho devidamente nivelado até à espessura especificada na Fig.4.8, procedeu-se à colocação da manta geotêxtil por cima desse material. A colocação do restante material granular, que compõe o corpo da barragem, foi efectuada através de finas camadas ligeiramente compactadas. As pendentes que definem os paramentos da barragem foram rectificadas à medida que se avançou com a construção do modelo com o auxílio das marcações efectuadas com o fio na parede exterior do tanque de percolação.

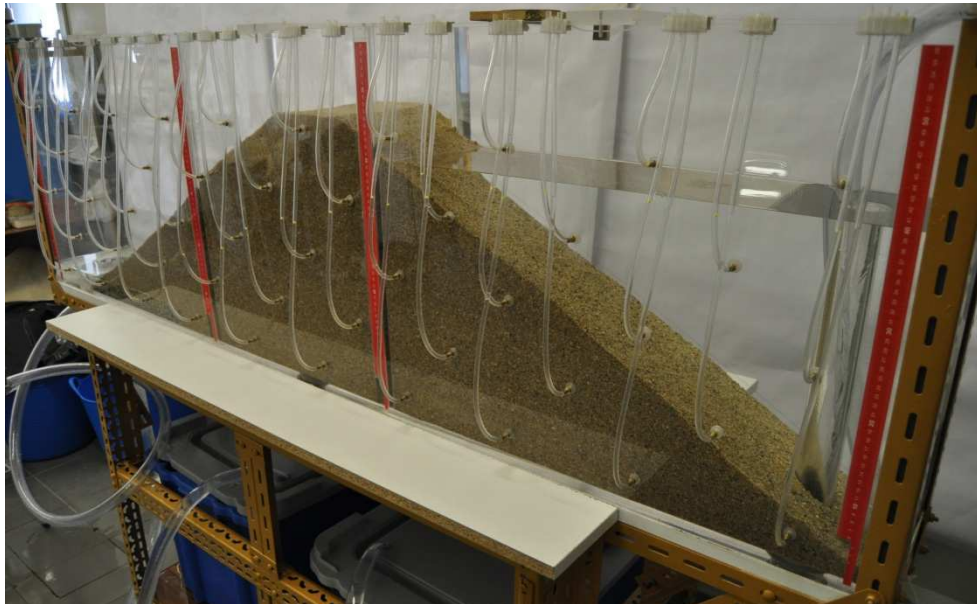


Fig.4.9 – Modelo físico da barragem homogénea com dreno horizontal

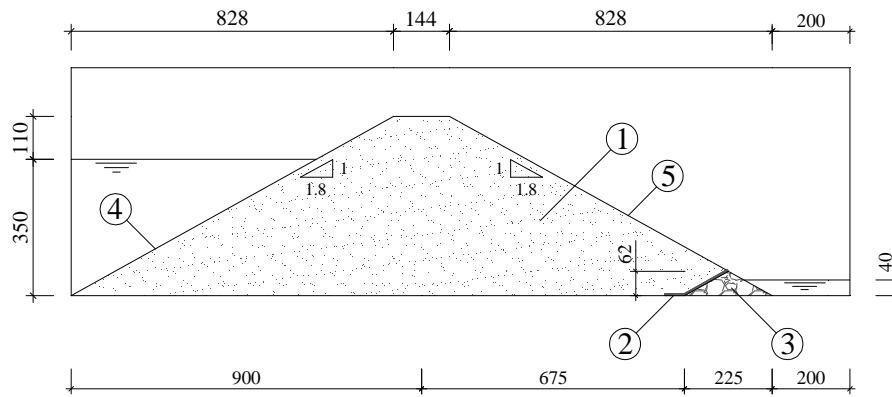
O nível de água, que se pode observar na Fig.4.9, foi conseguido à custa de um enchimento lento o suficiente para que não houvesse perturbação assinalável no modelo previamente concebido.



Fig.4.10 – Detalhe do dreno horizontal

4.5.3. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE PÉ DE TALUDE

Para concretizar o modelo da barragem homogénea com dreno de pé de talude, decidiu-se encurtar para metade o comprimento utilizado no dreno horizontal e efectuar a face de montante do dreno com a mesma pente do paramento de montante. A geometria do modelo físico resultante pode ser observada na Fig.4.11.



Legenda

- 1 - Corpo da barragem - Solo A
- 2 - Manta Geotêxtil
- 3 - Dreno de pé do talude - Cascalho médio
- 4 - Paramento de montante
- 5 - Paramento de jusante

Fig.4.11 – Geometria da barragem homogénea com dreno de pé do talude [mm]

Começou-se primeiro por montar o dreno de pé do talude de acordo com a geometria especificada. Posteriormente, colocou-se a manta geotêxtil sobre a face de montante do dreno deixando uma ligeira folga que deverá ficar assente na base do modelo. O método seguido para a construção do restante modelo é idêntico ao preconizado no modelo descrito no ponto 4.5.2.



Fig.4.12 – Modelo físico da barragem homogénea com dreno de pé do talude

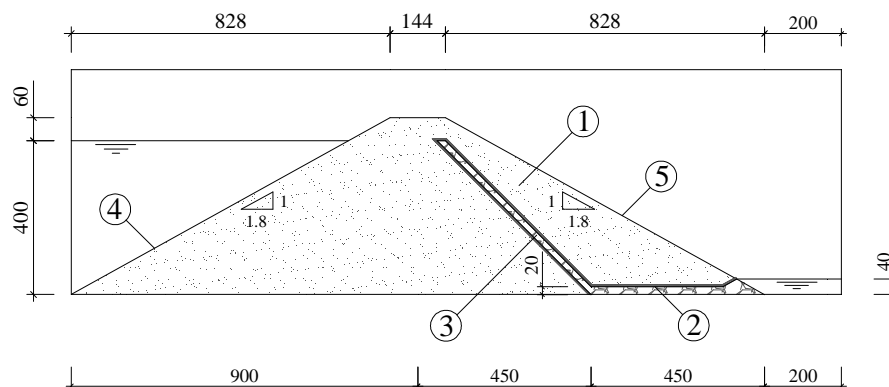
Na Fig.4.13 mostra-se o detalhe do dreno de pé do talude.



Fig.4.13 – Detalhe do dreno de pé de talude

4.5.4. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE CHAMINÉ

Neste caso, optou-se por efectuar o dreno de chaminé com 2cm de espessura. Para garantir uma eficaz condução da água a jusante do dreno de chaminé, será também executado um dreno planar com a mesma espessura. De modo a evitar o fenómeno de ressurgência no paramento de jusante da barragem, será também prevista a realização de um dreno de pé do talude com altura coincidente com o nível da superfície livre da água a jusante. A geometria do modelo da barragem homogénea com dreno de chaminé proposta é mostrada na Fig.4.14.



Legenda

- 1 - Corpo da barragem - Solo A
- 2 - Manta Geotêxtil
- 3 - Dreno de chaminé - Cascalho médio
- 4 - Paramento de montante
- 5 - Paramento de jusante

Fig.4.14 – Geometria da barragem homogénea com dreno de chaminé [mm]

O método de montagem adoptado para o modelo ilustrado na Fig.4.14 é distinto e mais elaborado do que o dos anteriores. Neste caso, começou-se por efectuar a execução da parte do corpo da barragem a montante do dreno de chaminé por compactação de finas camadas do solo granular. Quando essa parte do corpo da barragem atingiu a altura máxima do dreno de chaminé, instalou-se a manta geotêxtil ao longo da interface de montante desse órgão de drenagem. Colocou-se depois o cascalho devidamente nivelado a jusante do dreno de chaminé de modo a constituir o dreno horizontal e de pé do talude nas condições previstas na Fig.4.14. A colocação do cascalho ao longo do dreno de chaminé foi efectuada

à medida que se executaram as camadas de solo granular acima do dreno horizontal. Este processo de confinamento do cascalho com as camadas de solo granular ligeiramente compactadas permitiu a materialização do dreno de chaminé com a inclinação prevista.



Fig.4.15 – Modelo físico da barragem homogênea com dreno de chaminé

Na Fig.4.16 é possível observar com maior clareza o dreno de chaminé que se ilustra na figura anterior.

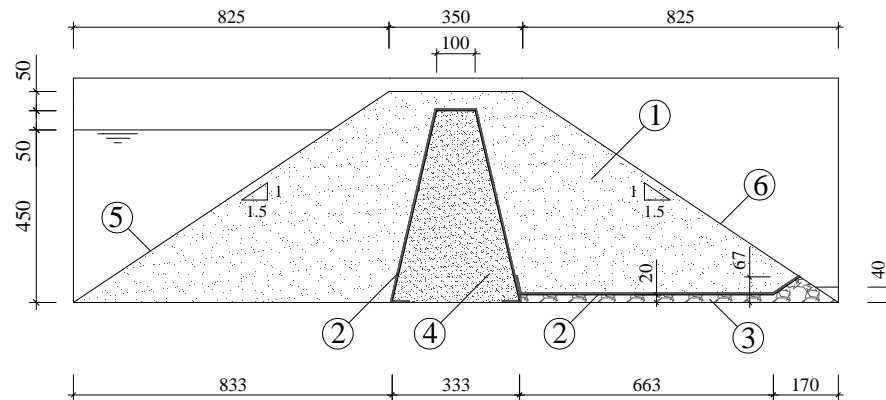


Fig.4.16 – Detalhe do dreno de chaminé

4.5.5. BARRAGEM ZONADA

Para ser possível efectuar o ensaio experimental do modelo da barragem zonada em tempo útil, não era exequível utilizar materiais argilosos na constituição do núcleo central pois, nesse caso, o escoamento ao longo dos meios porosos tomaria um período de tempo inaceitável para que nele se estabelecesse o regime permanente. Pelo exposto, o núcleo foi efectuado com o solo B, cuja análise granulométrica e respectiva curva pode ser consultada no ponto 3.2. Como já se verificou também que o coeficiente de permeabilidade do solo B é acentuadamente mais baixo do que o do solo A, as perdas de carga serão mais acentuadas no núcleo do que no corpo de montante do modelo e portanto o nível freático deverá sofrer, conforme se pretende, um abaixamento mais acentuado nessa região.

A geometria do modelo da barragem zonada pode ser observada na Fig.4.17.



Legenda

- 1 - Corpo da barragem - Solo A
- 2 - Manta Geotêxtil
- 3 - Dreno horizontal - Cascalho médio
- 4 - Núcleo central - Solo B
- 5 - Paramento de montante
- 6 - Paramento de jusante

Fig.4.17 – Geometria da barragem zonada [mm]

Para efectuar a montagem do modelo ilustrado na Fig.4.17, começou-se por posicionar correctamente as mantas geotêxteis na base do tanque de percolação. Com o auxílio das marcações efectuadas previamente no exterior da parede frontal do tanque, efectuou-se uma pequena camada ligeiramente compactada do núcleo. A jusante desta região, colocou-se o cascalho devidamente nivelado, nas condições que se podem observar na Fig.4.17, e instalou-se a manta geotêxtil por cima do órgão de drenagem. A montante e a jusante do núcleo central, colocou-se o solo granular por compactação de finas camadas até o material nele contido ficar devidamente acondicionado. A execução do restante núcleo foi conseguida com a construção de finas camadas compactadas que foram confinadas pelo solo que compõe o corpo da barragem. Só após este processo de confinamento é que se deu lugar à execução da camada seguinte do núcleo.

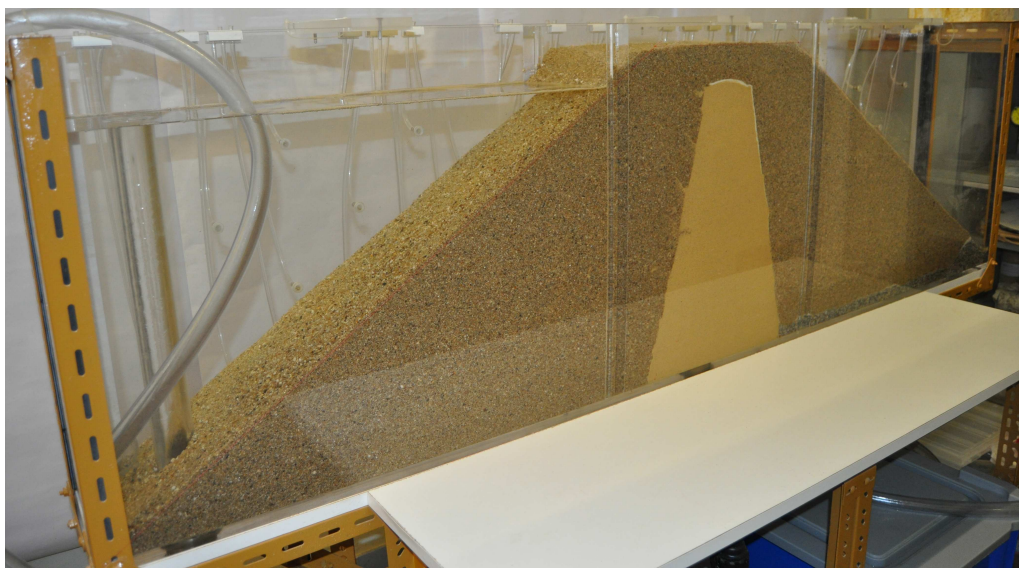


Fig.4.18 – Modelo físico da barragem zonada

As faces de montante e de jusante do núcleo foram sendo materializadas com o auxílio das marcações, retirando o excesso de material compactado através de espátula.

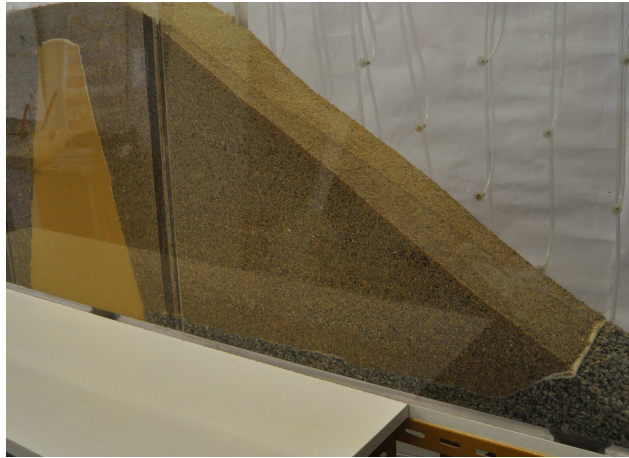


Fig.4.19 – Detalhe do núcleo e dos órgãos de drenagem

5

MODELAÇÃO NUMÉRICA

5.1. INTRODUÇÃO

A necessidade de recorrer a modelos numéricos, para interpretar e quantificar as grandezas associadas ao fenómeno da percolação de um fluido em meio poroso, surge pela dificuldade que existe em enquadrar a utilização de soluções analíticas exactas em domínios cuja geometria e condições de fronteira sejam particularmente complexas. A utilização de técnicas iterativas fundamentadas em formulações matemáticas que permitam fixar equações diferenciais (ED) governativas que relacionem as grandezas dependentes da permeabilidade do meio com o fluxo que nele se estabelece, revela-se uma alternativa cuja utilidade cresce em proporção ao advento de ferramentas computacionais mais sofisticadas.

5.2. APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

5.2.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Os métodos numéricos mais divulgados que podem, de forma mais ou menos decisiva, ser implementados no âmbito da análise de problemas de meios contínuos são os métodos clássicos (método de colocação, método dos mínimos quadrados, métodos dos resíduos pesados, etc.), os métodos baseados em formulações fracas, a formulação variacional, o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos (MEF). De entre os métodos referidos, o mais amplamente utilizado na actualidade é o MEF. Tal deve-se ao facto deste ser capaz, na generalidade dos casos, de devolver resultados aproximados à solução exacta com tanta precisão quanta a necessária e, dependendo de certas características do modelo, num pequeno intervalo de tempo.

A implementação do MEF num problema de domínio contínuo consiste na sua discretização em subdomínios, ligados entre si por nós, tal que se garantam os requisitos necessários de continuidade.

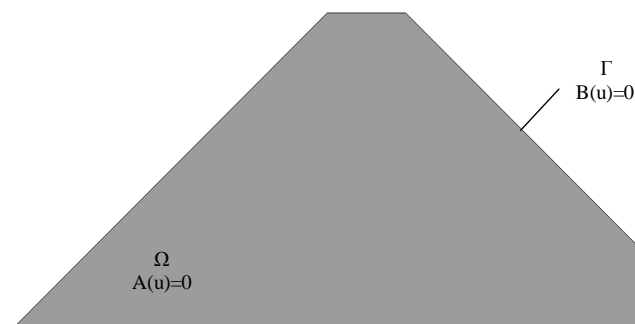


Fig.5.1 – Domínio Ω delimitado pela fronteira Γ de um meio contínuo

Explicitando o problema a ser resolvido na sua forma geral, será necessário procurar uma função \mathbf{u} , desconhecida, que satisfaça um conjunto de ED restringidas ao domínio Ω e associadas a um conjunto de condições de fronteira nos limites Γ do domínio. Esta função poderá representar uma grandeza escalar (ex: carga hidráulica) ou uma grandeza vectorial (ex: deslocamento) de inúmeras variáveis. Da mesma forma, pode-se ter apenas uma ED ou um conjunto de ED em simultâneo, lineares ou não lineares.

A discretização do domínio Ω em subdomínios Ω_e terá como consequência a partição da fronteira Γ em partes Γ_e de acordo com as dimensões dos elementos.

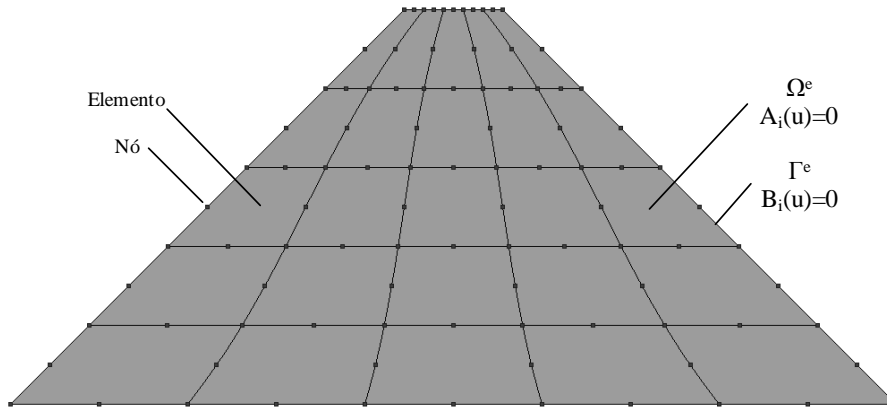


Fig.5.2 – Discretização do domínio Ω em subdomínios Ω_e

A resolução de problemas através de elementos finitos consiste em efectuar a aproximação à solução exacta nos nós dos elementos que materializam os subdomínios tomando a seguinte forma.

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i \cdot a_i = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a} \quad (5.1.)$$

em que, \mathbf{N}_i são as funções de forma em ordem a variáveis independentes, constituindo assim uma base para um espaço linear de funções, e os parâmetros \mathbf{a}_i são todos ou quase todos desconhecidos. As funções de forma são geralmente definidas localmente nos subdomínios de tal modo que as propriedades do sistema discreto são recuperadas quando as equações de aproximação forem calculadas numa forma de integral. De acordo com O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor (2005), deve-se procurar calcular a equação seguinte a partir da qual se obtenham posteriormente os parâmetros \mathbf{a}_i desconhecidos.

$$\int_{\Omega} G_j(\hat{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} g_j(\hat{u}) d\Gamma = 0 \quad \text{com } j = 1:n \quad (5.2.)$$

onde, \mathbf{G}_j e \mathbf{g}_j são funções ou operadores conhecidos e portanto integráveis. Esta forma de cálculo permite efectuar a aproximação elemento a elemento e assim concretizar a correspondente assemblagem desses elementos.

$$\int_{\Omega} G_j d\Omega + \int_{\Gamma} g_j d\Gamma = \sum_{e=1}^m \left(\int_{\Omega^e} G_j d\Omega + \int_{\Gamma^e} g_j d\Gamma \right) = 0 \quad (5.3)$$

No caso concreto de escoamentos em hidráulica, relacionam-se o fluxo e a carga hidráulica nos elementos individuais e procede-se à assemblagem do sistema assegurando a continuidade do escoamento. Note-se que o processo de assemblagem e determinação de grandezas em escoamentos de fluidos, caudal e carga hidráulica, é em tudo semelhante ao utilizado em sistemas estruturais correntes, apenas que a matriz de rigidez dos elementos estruturais é substituída por uma matriz composta por uma lista de funções de carga hidráulica. Neste caso, dada a não linearidade das grandezas envolvidas, são requeridas técnicas iterativas para solucionar os problemas. Para obter uma aproximação nesta forma de integral o método dos resíduos pesados e o método variacional destacam-se das demais técnicas.

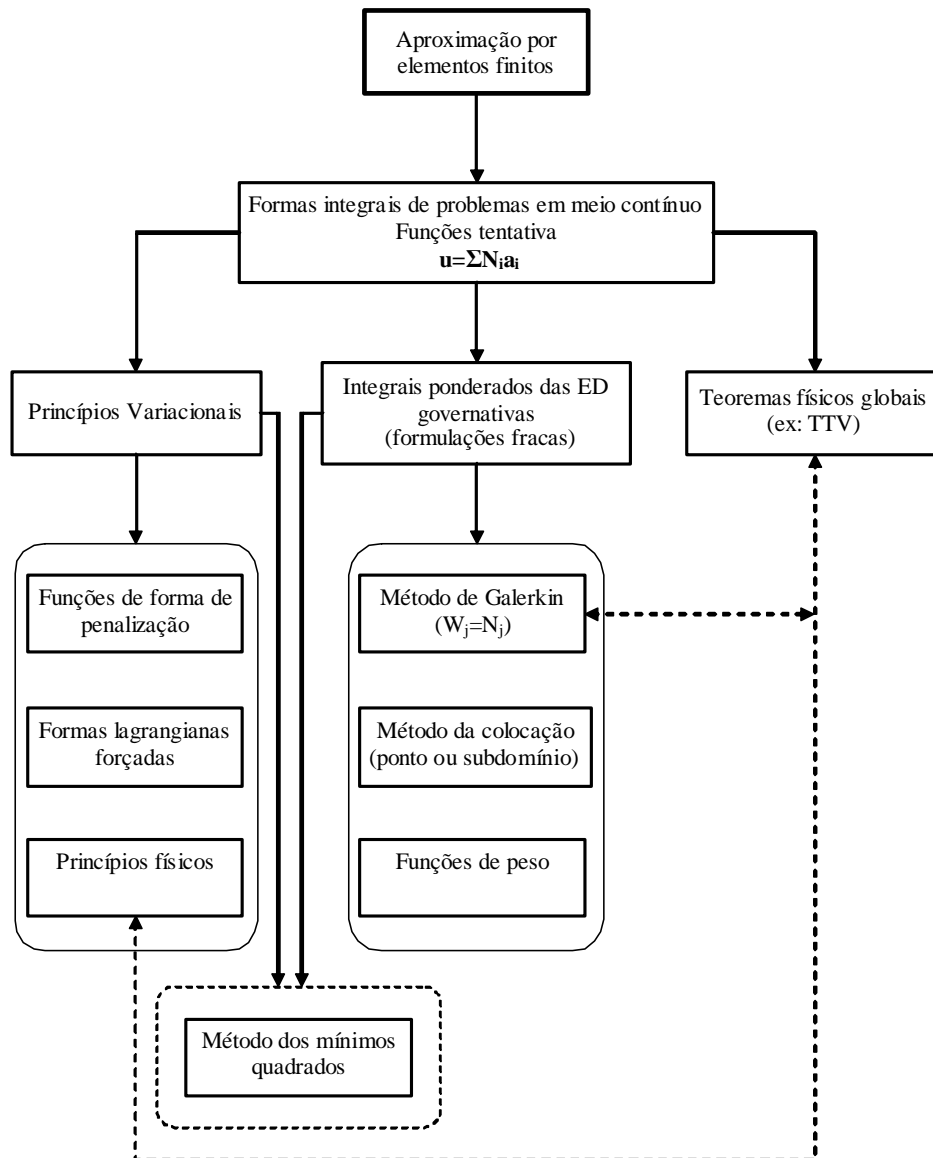


Fig.5.3 – Técnicas iterativas de resolução de problemas

5.2.2. PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

O princípio variacional especifica uma quantidade escalar Π definida pela seguinte forma integral:

$$\Pi = \int_{\Omega} F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) d\Omega + \int_{\Gamma} E\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) d\Gamma \quad (5.4)$$

em que \mathbf{E} e \mathbf{F} são operadores diferenciais e \mathbf{u} é uma função desconhecida. A função Π é assim um funcional pois depende de \mathbf{u} , variável dependente que também é uma função e, pela via dos operadores diferenciais, fica associado à ED governativa. A solução de um problema contínuo será então uma função \mathbf{u} que faça Π ficar estacionário e ser mínimo. A condição de estacionaridade deve ser garantida pela primeira variação do funcional Π em ordem a alterações arbitrárias $\delta\mathbf{u}$ e deverá ser tal que $\delta\Pi=0$. Por outro lado, a condição de mínimo deverá ser garantida pela segunda variação do funcional Π em ordem a alterações arbitrárias $\delta\mathbf{u}$ e deverá ser tal que $\delta^2\Pi>0$.

Para determinar os parâmetros \mathbf{a}_i da equação 5.1 bastará impor a condição de estacionaridade do funcional Π de acordo com a equação 5.5.

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a_1} \cdot \delta a_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} \cdot \delta a_2 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial a_n} \cdot \delta a_n = 0 \quad (5.5)$$

Quando a equação anterior é verdadeira para todo o $\delta\mathbf{a}$ gera-se o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\Pi}{\partial a_1} \\ \frac{\partial\Pi}{\partial a_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Pi}{\partial a_n} \end{array} \right\} = 0 \rightarrow a_i = \dots \quad i = 1:n \quad (5.6)$$

A determinação da estacionaridade relativa aos parâmetros \mathbf{a} está associada ao método de Rayleigh-Ritz cujo princípio consiste em proporcionar uma solução aproximada a uma equação através da minimização aproximada do funcional Π associado à equação e cujo mínimo obedece a essa equação. Para concretizar esta metodologia é necessário procurar o mínimo do funcional Π num subdomínio Ω_c do domínio Ω .

Para o caso em que o funcional Π é quadrático a equação 5.6 ficará reduzida à seguinte forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = [K]\{a\} + \{f\} = 0 \quad (5.7)$$

O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor (2005) referem que o facto da simetria da matriz $[K]$ ocorrer sempre que existam princípios variacionais é talvez o aspecto mais favorável à implementação deste método no processo de discretização do meio contínuo. Note-se ainda que, em situações de interesse físico, o funcional Π corresponde à energia do sistema e Π é designado por funcional da energia. Porém, a simetria da matriz $[K]$ surge com frequência no método de Galerkin, ou seja, o método variacional existe sem ser necessário utilizá-lo directamente. Acresce ainda que, para certos problemas contínuos os princípios variacionais não existem, ou seja, não é possível associar o funcional Π à ED governativa e conseqüentemente o método de Rayleigh-Ritz deixa de ser aplicável.

5.2.3. MÉTODO DOS RESÍDUOS PESADOS

O método dos resíduos pesados tem como princípio tornar o resíduo pequeno por anulação em “média”. Naturalmente que o resíduo será dado pela diferença entre a solução exacta e a função de aproximação.

$$A(N \cdot a) = u - \hat{u} \quad (5.8)$$

Como o resíduo está dependente de funções em ordem às coordenadas do domínio Ω então a função resíduo $A(Na)$ é também em ordem às mesmas coordenadas do domínio considerado. Devido à natureza da equação 5.8, surge a necessidade de ponderar o resíduo pois poderão ocorrer situações em que este seja nulo e, no entanto, a função de aproximação seja um mau ajuste à solução exacta. De acordo com João Marado (1993), particular atenção deve ser dada aos casos em que grandes resíduos de sinal positivo sejam compensados com grandes resíduos de sinal negativo.

$$\int_{\Omega} w_i^T \cdot A(N \cdot a) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_i^T \cdot B(N \cdot a) d\Gamma = 0 \quad (5.9)$$

sendo $B(N \cdot a)$ o resíduo das condições de fronteira. A equação 5.9 é o integral pesado dos resíduos e w_i é um conjunto de funções de ponderação linearmente independentes que se estende até ao m-ésimo ponto do domínio. Pode observar-se também que as funções de peso e as funções de resíduo pertencem ao mesmo domínio e o produto interno entre elas deverá ser nulo pelo que pode pensar-se alternativamente que o método dos resíduos pesados consiste em procurar uma função de aproximação $\hat{u} = N \cdot a$ que torne o resíduo ortogonal ao espaço gerado pelas funções de forma. Note-se ainda que o aumento do número de funções N_i e de peso w_i contribui de forma decisiva para a melhoria do ajuste à solução exacta.

Quase todos os conjuntos de funções linearmente independentes w_i podem ser usadas com o objectivo de efectuar a ponderação, sendo as escolhas mais comuns o método da colocação pontual ou no subdomínio e o método de Galerkin.

5.2.4. MÉTODO DA COLOCAÇÃO PONTUAL

O método de colocação pontual força o resíduo a anular-se num conjunto de pontos designados por nós de colocação. Deste modo tem-se que $w_i = \delta_i$ em que δ_i é tal que, para $x \neq x_i$ e $y \neq y_i$, $w_i = 0$ mas:

$$\int_{\Omega} w_i d\Omega = I \quad (5.10)$$

em que I é a matriz identidade com dimensão $m \times m$ sendo m o número de pontos do domínio. Será de esperar que, forçando o resíduo a anular-se num número cada vez maior de pontos, a solução aproximada seja convergente para a solução exacta, no entanto, O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor (2005) referem que esta ocorrência não é de fácil demonstração no caso geral. Acresce ainda que, neste contexto, a solução aproximada depende decisivamente da localização dos nós de colocação.

5.2.5. MÉTODO DA COLOCAÇÃO NO SUBDOMÍNIO

Trata-se do mesmo conceito preconizado para o método da colocação pontual apenas que neste caso se obriga o resíduo a anular-se num conjunto de elementos do domínio. Deste modo tem-se que a função de peso será tal que $w_i = I$ no subdomínio Ω_i e $w_i = 0$ nos subdomínios especificados. Note-se que esta metodologia enferma dos mesmos problemas que o método da colocação pontual pelo que se exige nesta fase um processo alternativo mais robusto.

5.2.6. MÉTODO DE GALERKIN

Trata-se de um método que procura soluções aproximadas à solução exacta via método dos resíduos pesados mediante a adopção de funções de peso w_i iguais às funções de forma N_i .

$$w_i = N_i \quad \text{com} \quad i = 1:n \quad (5.11)$$

Refira-se que, pelo facto das funções de peso serem iguais às funções de forma é habitual designar este método de Bubnov-Galerkin. Pelo contrário, quando as funções de peso são diferentes das funções de forma o método diz-se de Petrov-Galerkin. O método de Bubnov-Galerkin é de mais fácil implementação pois é necessário construir apenas uma classe de funções. O integral do resíduo pesado no domínio Ω é dado pela seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} w_i \cdot A(N \cdot a) d\Omega = \int_{\Omega} N_i \cdot \left[u - \left(\psi + \sum_{j=1}^n a_j \cdot N_j \right) \right] d\Omega \quad \text{com} \quad i = 1:n \quad (5.12)$$

dando assim origem ao seguinte sistema de equações:

$$[K] \cdot \{a\} + \{f\} = 0 \quad (5.13)$$

sendo:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} N_i \cdot N_j d\Omega \quad \text{com } i, j = 1:n \quad (5.14)$$

e também:

$$f_i = \int_{\Omega} N_i \cdot (u - \psi) d\Omega \quad \text{com } i = 1:n \quad (5.15)$$

sendo \mathbf{a} o vector dos coeficientes de aproximação e ψ uma função que na fronteira Γ assume os valores de \mathbf{u} . A verificação que a matriz $[\mathbf{K}]$ goza de propriedades de simetria reveste-se de toda a importância pois os benefícios que este facto introduz em termos de economia de espaço de memória no processamento de dados e também por não ser necessário definir qualquer função de peso, dada a igualdade imposta na equação 5.11, transforma este procedimento na escolha preferencial no âmbito da análise de um caso geral. Tem-se constatado que o método de Galerkin conduz a resultados mais aproximados à solução exacta e portanto mais precisos do que os demais.

5.2.7. CONVERGÊNCIA

No âmbito da resolução de um problema que envolva a determinação de uma solução aproximada, o principal objectivo deverá consistir na avaliação da possibilidade de melhorar sistematicamente os resultados no sentido de garantir que a convergência é no sentido da solução exacta. Atendendo à equação 5.1, a adição de novos termos representará inevitavelmente um aumento do número de termos da série incluída na análise. Em princípio, a convergência da função de aproximação à solução exacta ocorre quando o número de termos aumenta. Uma condição necessária para que a série seja convergente é que um valor constante da m -ésima derivada seja alcançável quando a dimensão dos elementos tende para zero. Note-se que este critério é naturalmente assegurado se os polinómios utilizados nas funções de forma forem completos até à m -ésima ordem.

Os modos de convergência consistem então em impor a redução das dimensões dos elementos (convergência do tipo \mathbf{h}) ou incrementar a ordem do polinómio de cada elemento (convergência do tipo \mathbf{p}). Em geral, a convergência do tipo \mathbf{p} é mais rápida do que a convergência do tipo \mathbf{h} , por grau de liberdade introduzido.

Este assunto será retomado no âmbito do estudo das funções de forma para elementos da classe de continuidade C_0 .

5.2.8. ESTADOS PLANOS

5.2.8.1. Noções gerais

Na maior parte dos casos, os problemas com que os engenheiros se deparam são de natureza tridimensional. Este facto levanta sérias dificuldades em termos da resolução dos problemas pois a sua formulação e solução é em regra bastante complexa. Deste modo implementaram-se um conjunto de conceitos simplificadores do problema no sentido efectuar a análise bidimensional de um problema tridimensional em muitos casos com razoável aproximação. Surge assim o conceito de estados planos. Para que um problema possa ser considerado plano, este deverá cumprir determinados requisitos em termos, por um lado, da sua geometria e, por outro lado, da solitação que lhe está aplicada. Existem assim dois tipos de problemas planos, o estado plano de tensão (EPT) e o estado plano de deformação (EPD).

5.2.8.2. Estado Plano de Tensão

Pode-se afirmar que, um corpo fica sujeito a um EPT quando uma das suas dimensões for constante e muito pequena quando comparada com as demais e quando a solitação exterior actua apenas no plano do corpo. Note-se que, todas as componentes que definem o estado de tensão, excepto aquelas que pertençam ao plano do corpo, são nulas e portanto não contribuem para o trabalho interno de deformação.

5.2.8.3. Estado Plano de Deformação

Um corpo fica sujeito ao EPD nos casos em que uma das suas dimensões tiver desenvolvimento infinito, a secção transversal normal a essa direcção for constante e se em todas as secções normais ao eixo do corpo a solitação exterior não variar e for normal a esse eixo. Nestas condições a deformação na direcção do eixo do corpo é nula. Tomando como exemplo a figura seguinte, que pretende representar um corpo tridimensional com as características mencionadas, a análise do problema poderá ser efectuada bidimensionalmente através de uma secção transversal de largura elementar, marcada a tracejado, que terá o aspecto da secção indicada na Fig.5.1.

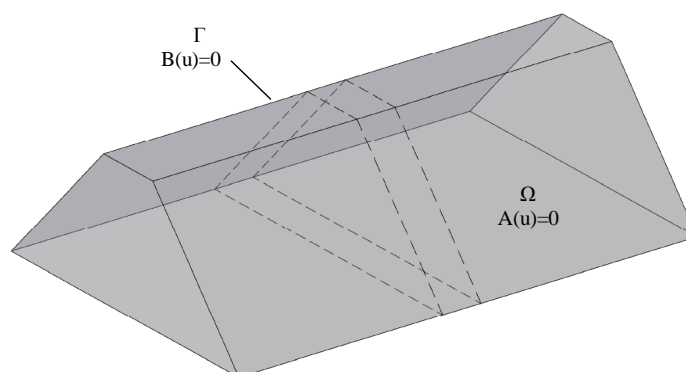


Fig.5.4 – Domínio Ω e fronteira Γ de um meio contínuo 3D

Convém salientar a importância da decisão em simplificar um problema de natureza tridimensional efectuando a análise bidimensional com base no princípio do EPD. O facto da tensão normal ao plano que define a secção transversal ser diferente de zero poderá fazer toda a diferença no âmbito dos resultados obtidos face aos reais. Em EPD puro não há deformação perpendicularmente à secção

transversal e portanto não existe nessa direcção qualquer contribuição para o trabalho interno de deformação. No entanto, se a hipótese de EPD não é adequada e se ocorre deformação nessa direcção, então os resultados poderão surgir desajustados à realidade. Sem embargo da afirmação acima efectuada, na fase de formulação do modelo numérico, deve-se garantir um compromisso entre a precisão que se pretende obter no cálculo de uma certa grandeza e o objectivo que esta pretende servir.

5.2.9. FUNÇÕES DE FORMA DOS ELEMENTOS

Uma vez que o elemento que compõe um subdomínio Ω_e e as correspondentes funções de forma N_i estão bem determinadas, as operações seguintes seguem um caminho bem definido e normalizado baseado em conceitos algébricos que não estão necessariamente associados aos aspectos físicos do problema. As funções de forma escalares N_i deverão ser tais que satisfaçam os critérios de convergência, sendo condição necessária a existência de continuidade da classe C_0 (a continuidade da incógnita deve ser assegurada entre elementos adjacentes) e a função de forma deve admitir uma forma linear qualquer para que o critério da primeira derivada constante possa ser observado.

As famílias de elementos que serão adiante discutidas têm diferentes graus de liberdade e daqui se poderão tirar dividendos em termos de vantagens económicas pelo facto de se aumentar a complexidade do elemento. Para se tirar proveitos económicos será necessário minimizar o tempo de computação e da preparação dos dados, tendo em consideração que tal proveito não está directamente relacionado com a redução total do número de variáveis.

A ordem do erro numa aproximação à função desconhecida u é:

$$O(h^{p+1}) \quad (5.16)$$

em que h é o tamanho do elemento e p é o grau do polinómio completo presente na expansão. À medida que o grau do polinómio da função de forma aumenta, também aumenta a ordem do erro e assim, a convergência para a solução exacta torna-se mais rápida. Daqui se conclui que se devem procurar funções de forma com o polinómio de grau mais elevado para um dado número de graus de liberdade.

Atendendo à equação 5.1 as variáveis a serão identificadas com os valores da função desconhecida nos nós dos elementos, resultando a igualdade:

$$u_i = a_i \quad (5.17)$$

As funções de forma definidas deste modo serão chamadas de normalizadas e são amplamente utilizadas na maior parte dos programas de elementos finitos. Utilizando expansões polinomiais e admitindo que os elementos satisfazem o critério que especifica que os movimentos de corpo rígido não provocam extensões, pode-se concluir que para um valor constante de a_i especificado em todos os nós resultará num valor constante da função de aproximação. Quando $a_i = u_0$ a função de aproximação será tal que:

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^n N_i \cdot u_0 \quad (5.18)$$

Ora como nestas circunstâncias a função de aproximação não varia, então:

$$\hat{u} = u_0 \quad (5.19)$$

resultando assim na propriedade denominada como partição da unidade.

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1 \quad (5.20)$$

Nos casos em que o refinamento da malha é efectuado, é necessário gerar novas funções de forma pelo que o cálculo computacional tem de ser repetido. Esta desvantagem acontece porque nestes casos as funções N_i dependem do número de nós da malha.

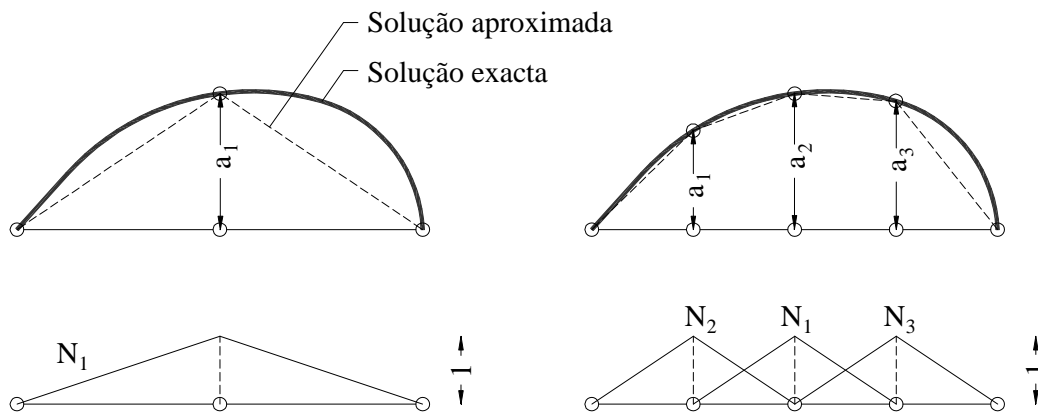


Fig.5.5 – Geração de funções de forma normalizadas, com o refinamento da malha

Na Fig.5.5 apresenta-se o processo de refinamento de um corpo unidimensional para o caso de funções de forma normalizadas, tendo em consideração que este raciocínio é válido para os meios bidimensional e tridimensional. Como facilmente se observa, à medida que o número de pontos da malha se altera, a quantidade de funções de forma também se modifica na mesma proporção. Para contornar esta adversidade, existe a possibilidade de implementar funções de forma hierárquicas que, em termos muito simples, não dependem do número de nós da malha. Com efeito, nas formas hierárquicas considera-se a malha inicial e adicionam-se novas funções de refinamento. Desta forma, os parâmetros \mathbf{a}^* das formas hierárquicas conduzem à mesma solução dos parâmetros \mathbf{a} das formas normalizadas mas adquirindo aqui um significado diferente.

5.2.10. FAMÍLIAS DA CLASSE DE CONTINUIDADE C_0

5.2.10.1. Subdomínios unidimensionais

No contexto de uma análise elástica, os elementos unidimensionais podem representar linhas de reforço ou finas camadas de revestimento de um material em corpos axissimétricos, ou ainda, no âmbito de problemas de percolação em meios porosos, órgãos de drenagem que possam estar seccionados relativamente ao meio considerado.

5.2.10.2. Subdomínios bidimensionais

Considerando o sistema de eixos coordenados cartesiano, o elemento bidimensional mais simples consiste num rectângulo cujos lados são paralelos aos eixos x e y . Considerando funções de forma do tipo $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que possam ser escritas do seguinte modo:

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (5.21)$$

em que δ_{ij} é o parâmetro de Kronecker. Utiliza-se, por conveniência, coordenadas normalizadas tal que nas faces dos elementos rectangulares os seus valores sejam ± 1 .

$$\xi = \frac{x - x_0'}{a} \quad d\xi = \frac{dx}{a} \quad \eta = \frac{y - y_0'}{b} \quad d\eta = \frac{dy}{b} \quad (5.22)$$

As coordenadas em função de ξ e η têm origem no centro geométrico do elemento considerado e têm a relação com as coordenadas globais que se pode observar na Fig.5.6 e equações 5.22.

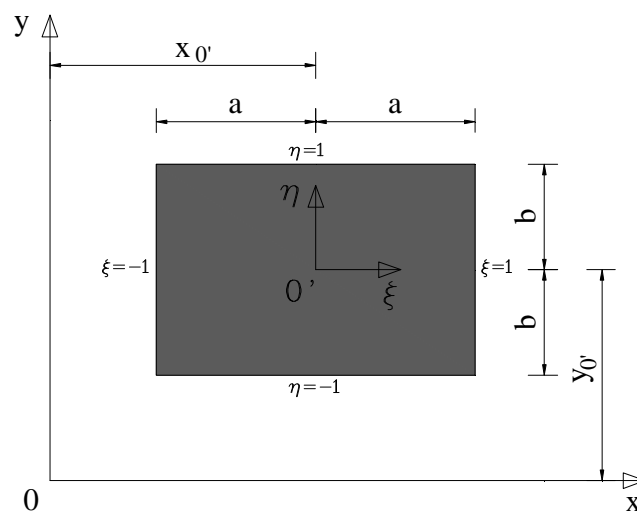


Fig.5.6 – Coordenadas normalizadas de um elemento rectangular

Em geral deve procurar-se expansões de elementos que possuam a ordem mais alta de um polinómio completo para o mínimo de graus de liberdade. No contexto de uma análise bidimensional o triângulo de Pascal é de grande utilidade para perceber o número de termos requeridos, do conjunto dos números naturais, para que um polinómio de uma dada ordem seja completo.

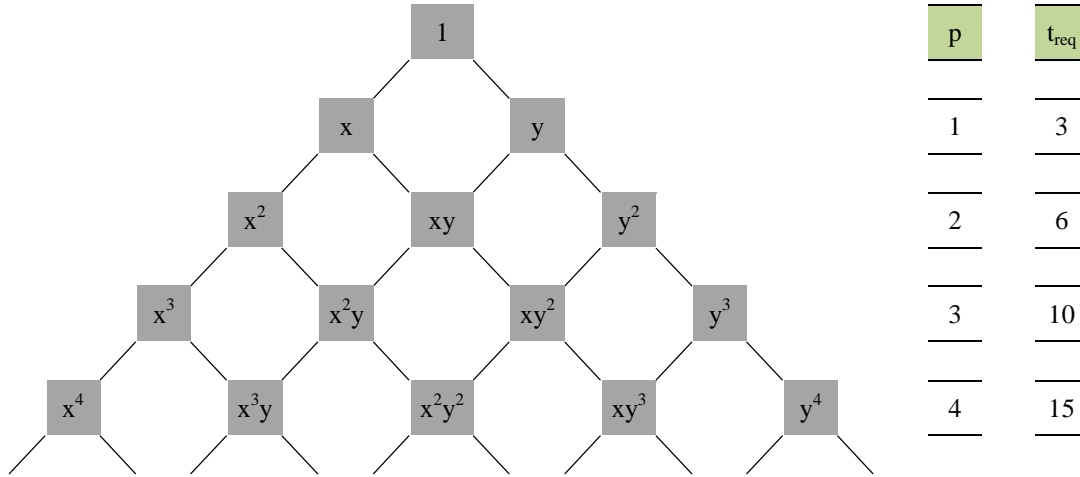


Fig.5.7 – Triângulo de Pascal até à expansão polinomial de 4ª ordem

Facilmente se observa que o número de termos requeridos, t_{req} , para um polinómio da n -ésima ordem ser completo é conforme a expressão que se apresenta em seguida:

$$t_{req} = p_1 + p_2 + \dots + p_n + p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} p_i \quad (5.23)$$

A avaliação do peso computacional e dos ganhos em precisão nos resultados, devidos à utilização de elementos de determinada família, poderá ser efectuada com base no número de termos requeridos do polinómio de ordem n .

5.2.10.3. Elementos bidimensionais de Lagrange

Considerando o caso bidimensional, marcando os nós através de linhas I e colunas J ter-se-á a seguinte relação:

$$N_i \equiv N_{IJ} = l_I^n(\xi) \cdot l_J^m(\eta) \quad (5.24)$$

em que n e m representam o número de subdivisões nas respectivas direcções ξ e η . Quando o produto da $(n-1)$ -ésima ordem polinomial em ξ , com $\xi=1$ nos nós de uma certa coluna J e $\xi=0$ nas restantes colunas, e em η , com $\eta=1$ nos nós de uma certa linha I e $\eta=0$ nas restantes, diz-se que é satisfeita a condição de continuidade e é conferido o valor nodal unitário apenas ao nó interessado. Tais elementos polinomiais dizem-se de Lagrange. Com base no triângulo de Pascal, os elementos lagrangianos de 1ª ordem são representados conforme se pode observar na seguinte figura.

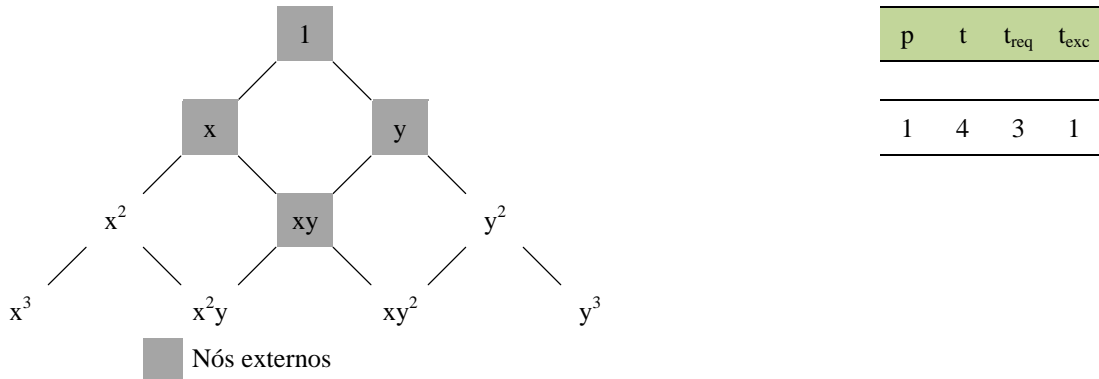


Fig.5.8 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 1ª ordem

Como se pode observar na Fig.5.8, os elementos lagrangianos de 1ª ordem são compostos por quatro nós externos cuja distribuição é conforme a ilustrada na Fig.5.9.

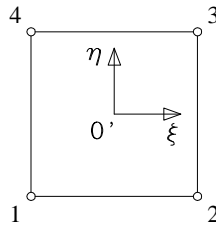


Fig.5.9 – Elemento lagrangiano de 1ª ordem

Através da Fig.5.8 é possível constatar que os elementos lagrangianos de 1ª ordem conseguem completar a expansão polinomial de grau 1, $t_{req}=3$, à custa de 1 termo acima do necessário, $t_{exc}=1$.

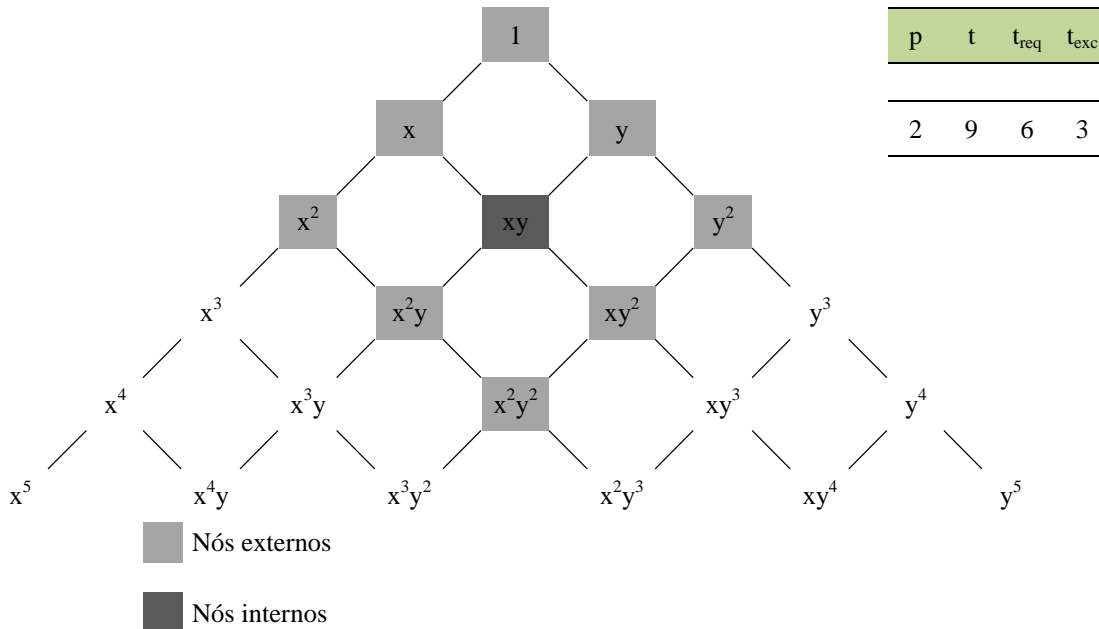


Fig.5.10 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 2ª ordem

Observando atentamente a distribuição de nós internos e externos dos elementos de 2ª ordem ilustrados na Fig.5.10, resulta a configuração nodal que se ilustra na figura seguinte.

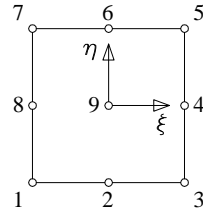


Fig.5.11 – Elemento lagrangiano de 2ª ordem

Os elementos lagrangianos de 2ª ordem conseguem completar a expansão polinomial de grau 2, $t_{req}=6$, à custa de 3 termos acima do necessário, $t_{exc}=3$.

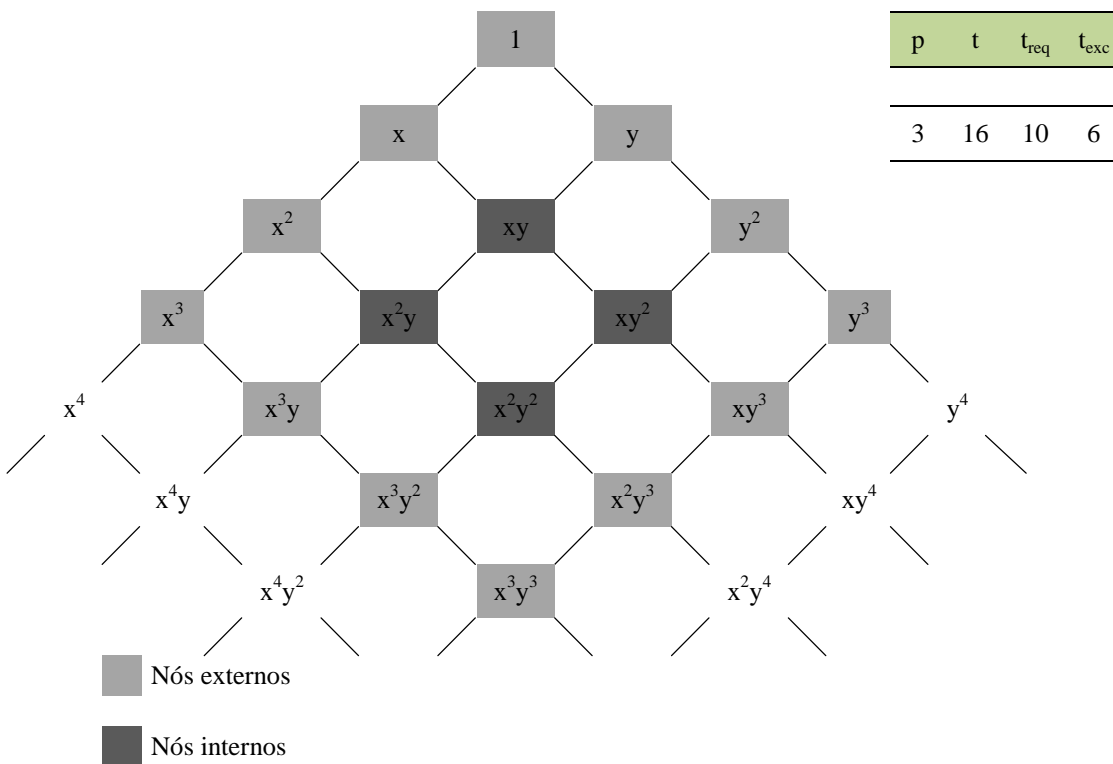


Fig.5.12 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 3ª ordem

Os elementos lagrangianos de 3ª ordem conseguem completar a expansão polinomial de grau 3, $t_{req}=10$, à custa de 6 termos acima do necessário, $t_{exc}=6$.

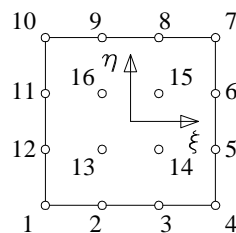


Fig.5.13 – Elemento lagrangiano de 3ª ordem

Com base nas expansões polinomiais de ordem $n=1$ até $n=3$, facilmente se percebe que o número de termos, t , dos elementos lagrangianos segue a seguinte evolução:

$$t_n = (p_n + 1)^2 \quad (5.25)$$

Por outro lado, tendo em conta as equações 5.23 e 5.25, verifica-se que o número de termos acima dos estritamente necessários, para uma expansão polinomial de n -ésima ordem, é dado pela seguinte expressão:

$$t_{exc,n} = (p_n + 1)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} p_i \quad (5.26)$$

A figura seguinte pretende traduzir a evolução dos termos polinomiais em excesso à medida que a ordem polinomial aumenta.

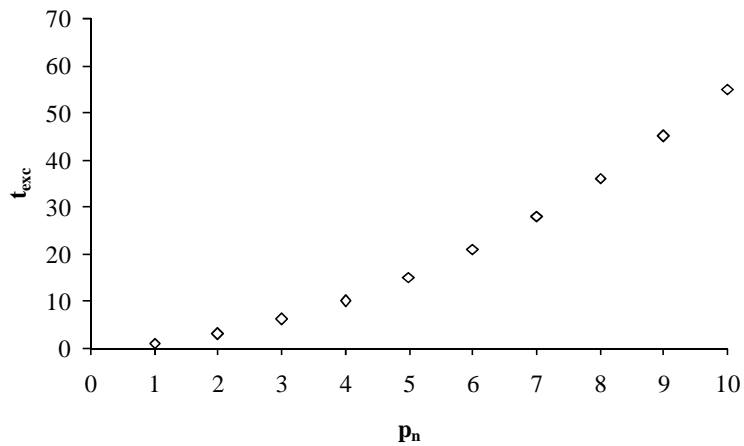


Fig.5.14 – Termos em excesso, t_{exc} , para $n=1:10$ por passos de 1

Analisando os resultados obtidos na Fig.5.14 conclui-se que os elementos lagrangianos conseguem completar a expansão polinomial da n -ésima ordem à custa de um número excessivo de termos acima dos termos mínimos requeridos, t_{req} , implicando deste modo alguma ineficiência em termos do cálculo computacional envolvido. De uma forma aligeirada pode-se afirmar que, quantos mais termos polinomiais envolvidos, maior volume de cálculo computacional será necessário realizar e, portanto, mais tempo e espaço em memória no computador serão necessários para efectuar a corrida.

5.2.10.4. Elementos bidimensionais Serendipity

Os elementos da família *Serendipity* são particularmente eficientes pois as funções de forma são dependentes de valores nodais colocados na fronteira destes elementos. Dito de outra forma, um número progressivo de nós desenvolve-se no bordo dos elementos à medida que a ordem polinomial

aumenta. Mais adiante se verá que, para expansões superiores à 3ª ordem será necessário dotar estes elementos com nós internos de modo que seja possível completar a expansão polinomial.

Recorrendo novamente ao conceito do triângulo de Pascal, serão efectuadas considerações para as expansões polinomiais dos elementos desta família. Curiosamente, os elementos da família *Serendipity* de 1ª ordem têm o mesmo formato que os elementos lagrangianos da mesma ordem polinomial. A superfície normalizada gerada pela função de forma no nó *i*, destes elementos, é conforme a expressão seguinte.

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) \cdot (1 + \eta \eta_i) \quad (5.27)$$

Os elementos ‘Serendipity’ de 2ª ordem conseguem completar a expansão polinomial de grau 2, $t_{req}=6$, à custa de 2 termos acima do necessário, $t_{exc}=2$.

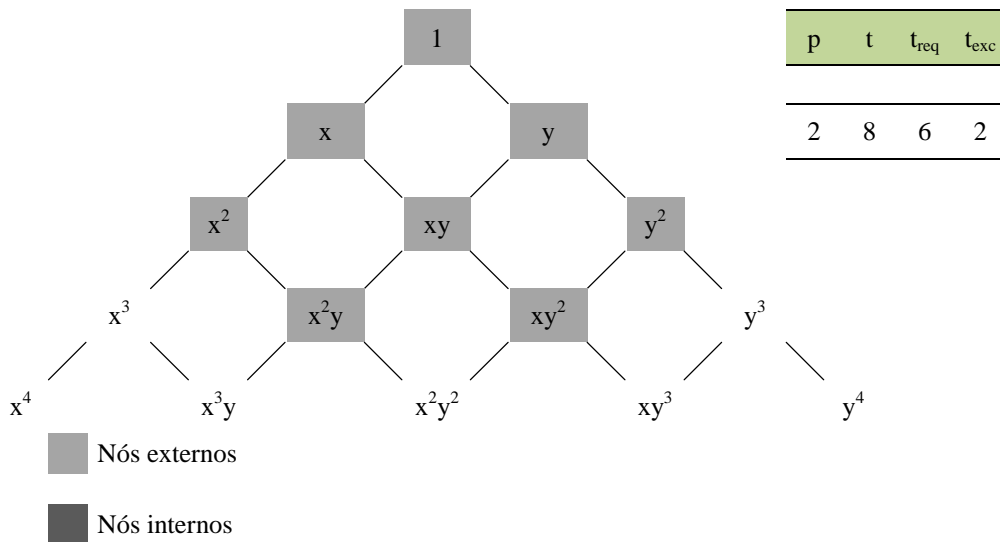


Fig.5.15 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 2ª ordem

Os elementos de 2ª ordem desta família terão então a configuração que se apresenta na Fig.5.16.

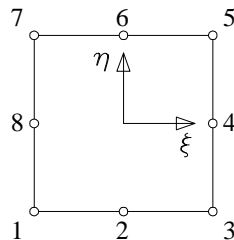


Fig.5.16 – Elemento serendipitiano de 2ª ordem

Os elementos *Serendipity* de 3ª ordem conseguem completar a expansão polinomial de grau 3, $t_{req}=10$, à custa de 2 termos acima do necessário, $t_{exc}=2$. A superfície normalizada, gerada pela função de forma nos nós de canto *i*, é conforme a equação 5.28.

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) \cdot (1 + \eta \eta_i) \cdot (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad i = 1:7 \text{ por passos 2} \quad (5.28)$$

Por outro lado, a superfície normalizada, gerada pela função de forma nos nós intermédios i , é de acordo com a expressão seguinte.

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{\xi_i^2}{2} (1 + \xi \xi_i) \cdot (1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \eta \eta_i) \cdot (1 - \xi^2) \quad i = 2:8 \text{ por passos 2} \quad (5.29)$$

A distribuição polinomial dos elementos de Serendipity de 3ª ordem pode ser observada na figura seguinte.

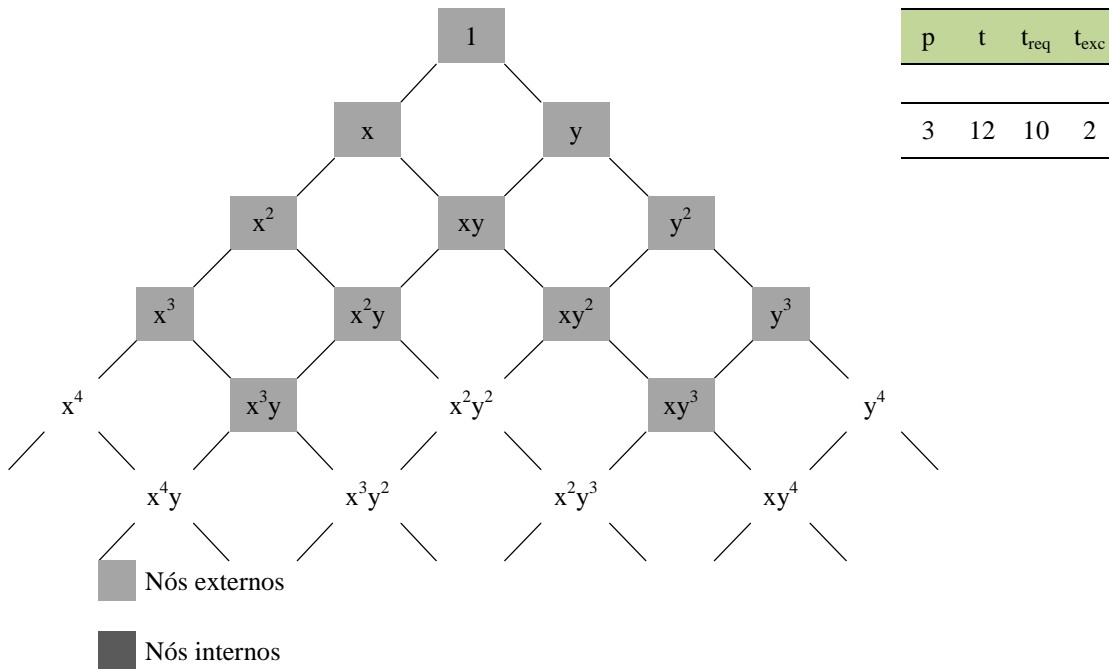


Fig.5.17 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 3ª ordem

A configuração dos elementos de 3ª ordem é conforme se ilustra na Fig.5.18.

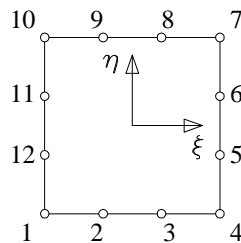


Fig.5.18 – Elemento serendipitiano de 3ª ordem

Conforme já havia sido referido, seguindo a sequência das ordens polinomiais inferiores, os elementos de ordem polinomial superior a três deixam de ser capazes de conter todos os termos da ordem do polinômio associado. Observando atentamente a Fig.5.19, verifica-se que, para $n > 3$, o número de termos em falta para completar a expansão polinomial segue a mesma sequência do número de termos requeridos a menos de 4 ordens polinomiais. Assim, a expansão polinomial de 4ª ordem consegue completar a expansão polinomial de ordem 4, $t_{req}=15$, à custa de dezasseis termos exteriores e um termo adicional interior, existindo desse modo dois termos acima do necessário, $t_{exc}=2$. Pelo número de termos em excesso obtidos ao longo desta análise, adivinha-se desde já uma característica deveras peculiar dos elementos da família *Serendipity*.

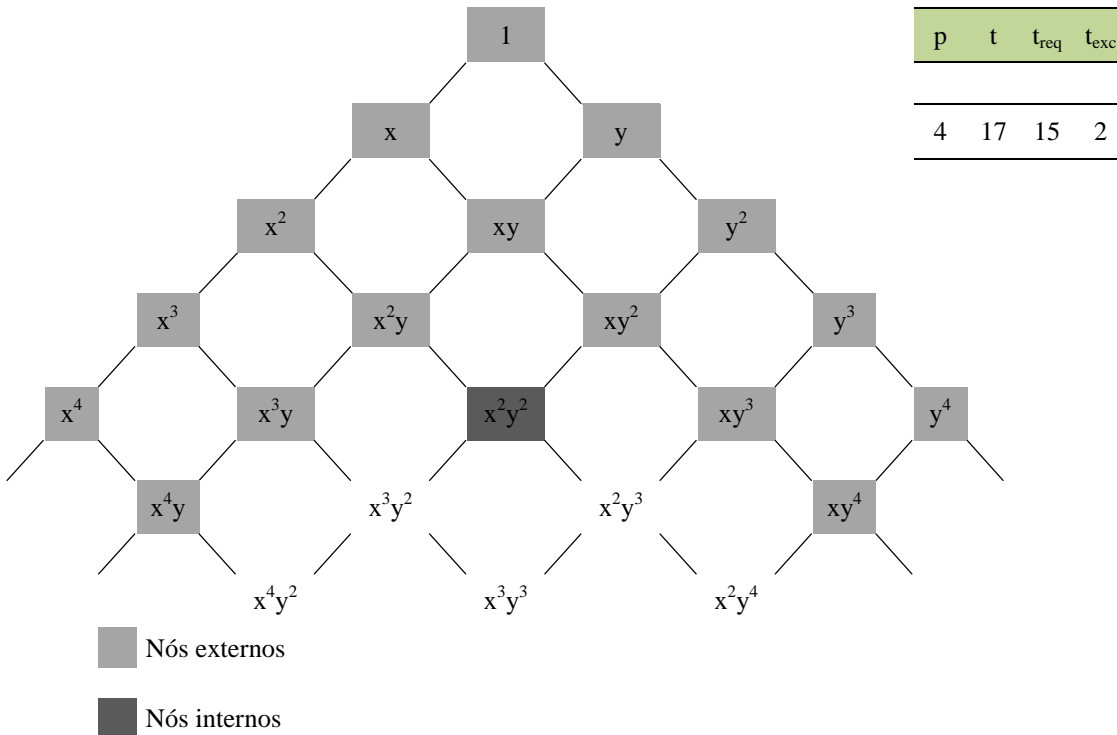


Fig.5.19 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 4ª ordem

De acordo com o exposto, a configuração dos elementos de 4ª ordem da família *Serendipity* será conforme se apresenta na Fig.5.20.

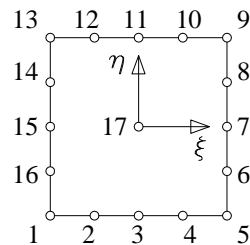


Fig.5.20 – Elemento serendipitiano de 4ª ordem

Pretende-se agora formalizar o número de termos existentes, exteriores e interiores, e o número de termos em excesso num elemento da família *Serendipity* da n-ésima ordem. Através da evolução

observada nos elementos da 1ª à 4ª ordem constata-se que o número de termos polinomiais exteriores em função do grau polinomial segue a seguinte relação:

$$t_{ext} = 4p_n \quad (5.30)$$

O número de termos interiores, t_{int} , para $n \leq 3$ é nulo e para $n > 3$ é dado pela equação 5.31.

$$t_{int} = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-4} + p_{n-3} = \sum_{i=1}^{n-3} p_i \quad (5.31)$$

Assim, para $n \leq 3$, o número de termos acima dos necessários, para que o polinómio da n-ésima ordem seja completo, é conforme se apresenta em seguida.

$$t_{exc,n} = 4p_n - \sum_{i=1}^{n+1} p_i \quad (5.32)$$

Para $n > 3$, $t_{exc,n}$, toma a seguinte forma:

$$t_{exc,n} = 4p_n + \sum_{i=1}^{n-3} p_i - \sum_{i=1}^{n+1} p_i \quad (5.33)$$

A equação 5.33 pode ser simplificada da seguinte forma:

$$t_{exc,n} = 4p_n + \sum_{i=1}^{n-3} p_i - p_{n+1} - p_n - p_{n-1} - p_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-3} p_i \quad (5.34)$$

ficando então,

$$t_{exc,n} = 4p_n - p_{n+1} - p_n - p_{n-1} - p_{n-2} \quad (5.35)$$

Escrevendo a equação 5.35 numa forma mais condensada resulta:

$$t_{exc,n} = 4p_n - \sum_{i=n-2}^{n+1} p_i \quad (5.36)$$

Uma propriedade singular da equação 5.36 é que, à exceção do polinómio de 1ª ordem, qualquer que seja a n-ésima ordem polinomial considerada, $t_{exc,n}$ é sempre igual a dois. Tal significa que todos os elementos da família *Serendipity*, a menos dos elementos de 1ª ordem, têm dois termos polinomiais em excesso.

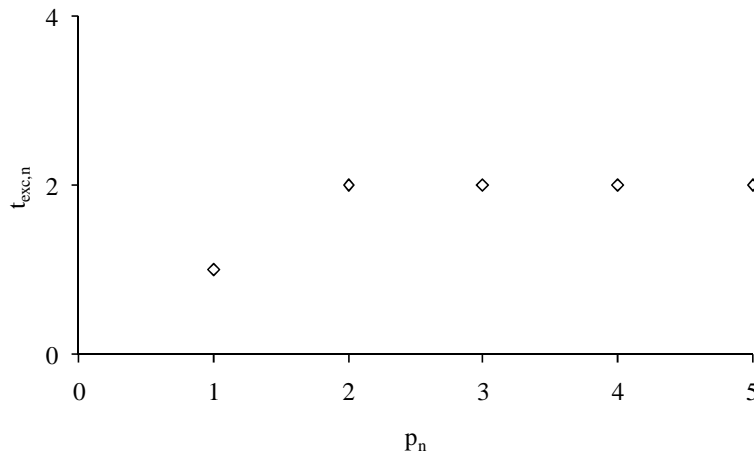


Fig.5.21 – Termos em excesso, $t_{exc,n}$ para $n=1:5$ por passos 1

5.2.10.5. Elementos triangulares

Os elementos com forma triangular, como medida de aproximação à geometria do problema, são aparentemente superiores aos elementos de geometria quadrangular. O número de nós em cada membro da família assegura sempre a expansão polinomial completa qualquer que seja a n-ésima ordem do elemento. Mais ainda, o número de nós dos elementos triangulares coincide exactamente com o valor de t_{req} , ou seja, o valor de t_{exc} é sempre nulo.

Quando a partição do domínio é efectuada com elementos triangulares, a utilização do sistema de coordenadas cartesiano, deixa de ser conveniente. Assim, um novo conjunto de coordenadas, L_1 , L_2 e L_3 para um triângulo de vértices 1, 2 e 3, passa a ser definido através da relação linear com o sistema cartesiano exposta nas equações 5.37. Note-se que, como $L_1+L_2+L_3=1$, o sistema de coordenadas de área é composto por um sistema de eixos linearmente dependente e que gera, através das outras relações, um sistema de coordenadas cartesiano único.

$$\begin{cases} x = L_1 \cdot x_1 + L_2 \cdot x_2 + L_3 \cdot x_3 \\ y = L_1 \cdot y_1 + L_2 \cdot y_2 + L_3 \cdot y_3 \\ L_1 + L_2 + L_3 = 1 \end{cases} \quad (5.37)$$

Resolvendo o sistema de equações 5.37, resulta:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{a_1 + b_1x + c_1y}{2\Delta} \\ L_2 = \frac{a_2 + b_2x + c_2y}{2\Delta} \\ L_3 = \frac{a_3 + b_3x + c_3y}{2\Delta} \end{cases} \quad (5.38)$$

sendo:

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \text{área } \Delta_{123} \quad (5.39)$$

E também:

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2 \quad (5.40)$$

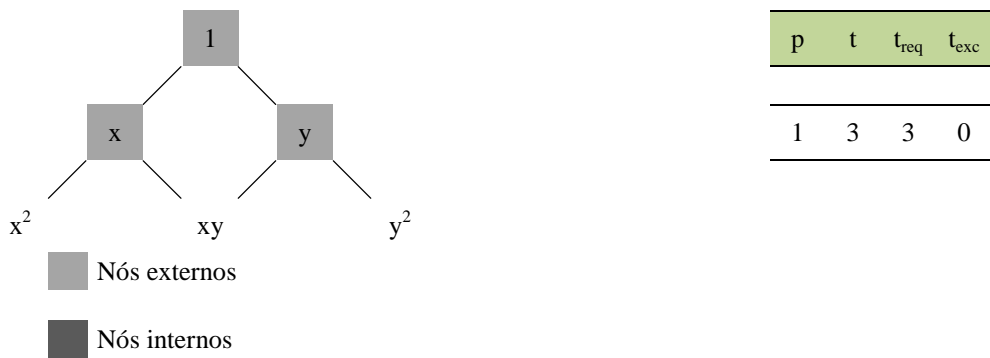


Fig.5.22 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 1ª ordem

Resultando então a configuração seguinte:

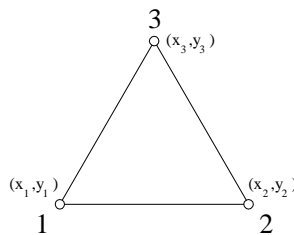


Fig.5.23 – Elemento triangular de 1ª ordem

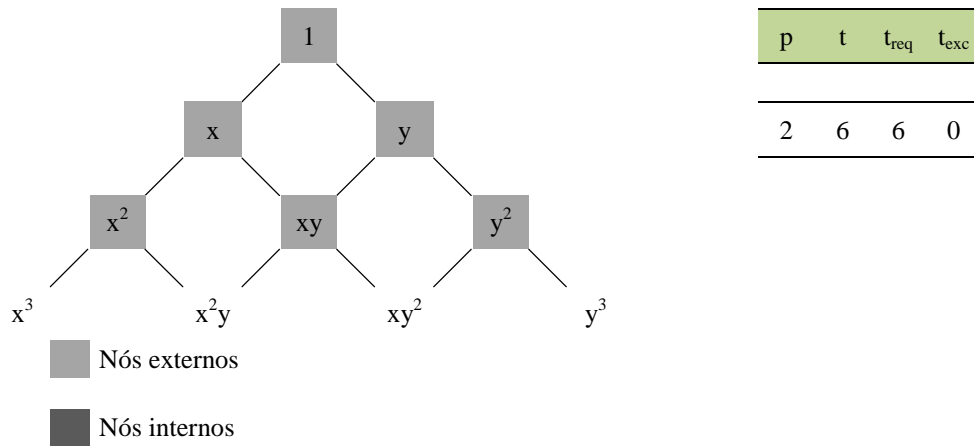


Fig.5.24 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 2ª ordem

sendo então:

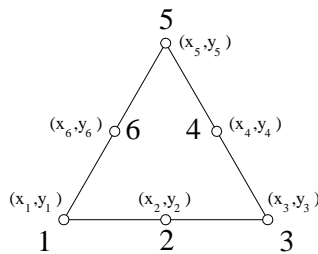


Fig.5.25 – Elemento triangular de 2ª ordem

A distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos triangulares de 3ª ordem pode ser observada na Fig.5.26.

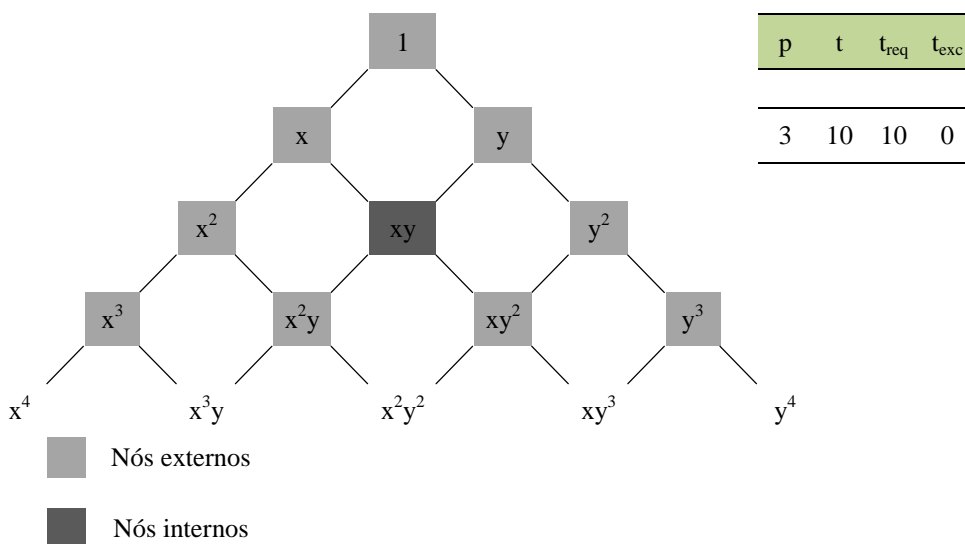


Fig.5.26 – Distribuição polinomial no triângulo de Pascal dos elementos de 3ª ordem

Os elementos com a distribuição ilustrada na Fig.5.26 tomam a forma que se mostra na figura seguinte.

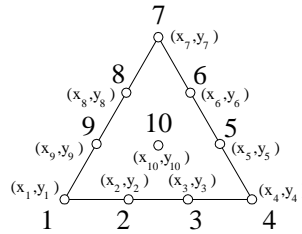


Fig.5.27 – Elemento triangular de 3ª ordem

Como se pode constatar pelas Fig.5.26 e 5.27, a partir dos elementos triangulares de 3ª ordem passa a ser necessária a inclusão de nós interiores. Assim, para $n > 2$, o número de termos interiores é dado pela seguinte expressão:

$$t_{int,n} = \sum_{i=1}^{n-2} p_i \quad (5.41)$$

Para os elementos da n -ésima ordem, o número de termos total é dado pela equação 5.23, então, para $n > 2$, o número de termos exteriores é dado pela equação 5.42.

$$t_{ext,n} = \sum_{i=1}^{n+1} p_i - \sum_{i=1}^{n-2} p_i \quad (5.42)$$

Trabalhando a equação 5.42 é possível escrever ainda:

$$t_{ext,n} = p_{n+1} + p_n + p_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} p_i - \sum_{i=1}^{n-2} p_i \quad (5.43)$$

resultando finalmente:

$$t_{ext,n} = \sum_{i=n-1}^{n+1} p_i \quad (5.44)$$

5.2.11. MAPEAMENTO DOS ELEMENTOS

Para assegurar que um pequeno número de elementos possa representar de modo aceitável formas complexas que ocorrem nos casos reais, será necessário distorcer os elementos n -dimensionais no sentido que estes tomem formas mais irregulares.

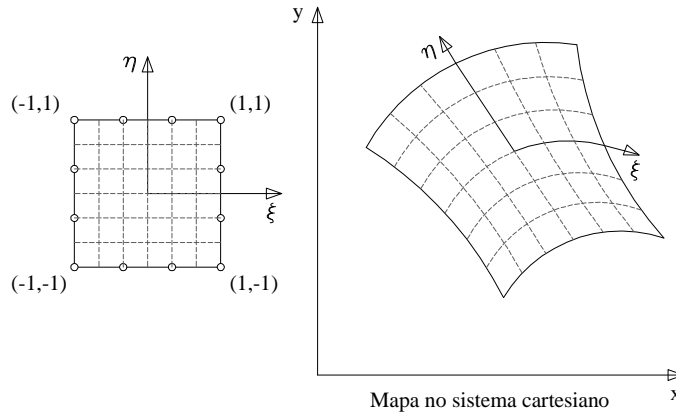


Fig.5.28 – Mapeamento de um elemento bidimensional

O princípio por detrás do mapeamento consiste em estabelecer uma correspondência directa entre o sistema de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas curvilíneas. Para o caso bidimensional, a transformação de coordenadas será feita da forma que se pode observar em seguida.

$$x = f_x(\xi, \eta) \quad y = f_y(\xi, \eta) \quad (5.45)$$

Deste modo, sempre que as relações entre os sistemas de coordenadas forem conhecidas, as funções de forma poderão ser especificadas em função do sistema de coordenadas local e, através da transformação adequada, indexadas ao sistema de coordenadas global. Facilmente se pode concluir que a distorção induzida nos elementos pode dar origem a situações em que duas ou mais coordenadas locais estejam associadas à mesma coordenada global. No sentido de garantir que tal não ocorre, será útil impor algumas condições prévias à qualidade dos elementos distorcidos. Para transformações paramétricas baseadas em funções de forma bilineares, é condição necessária que nenhum ângulo interno seja maior do que 180° .

Por outro lado, em transformações baseadas em funções parabólicas do tipo *Serendipity*, acresce ainda a necessidade de garantir que os nós intermédios estão posicionados no terço central das arestas em que estes se posicionam.

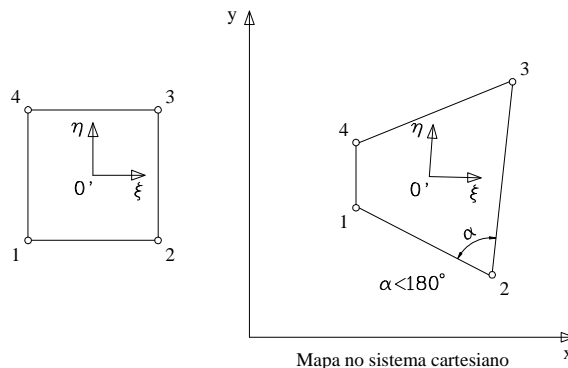


Fig.5.29 – 1ª Regra para unicidade de mapeamento: Distorção dos elementos no sistema cartesiano

Refira-se ainda que, para funções cúbicas esta análise torna-se impraticável sendo necessário efectuar uma verificação numérica do sinal do determinante da matriz jacobiana. Na prática, uma distorção do tipo parabólica é geralmente satisfatória.

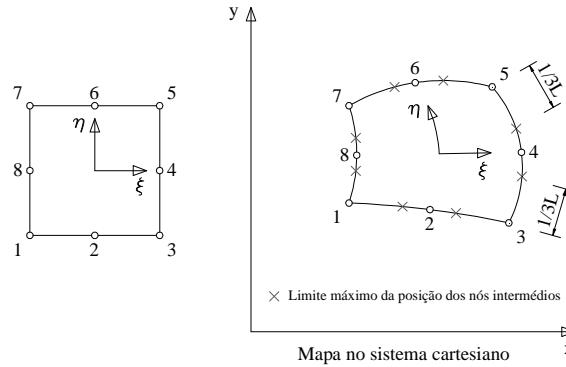


Fig.5.30 – 2ª Regra para unicidade de mapeamento: Posição dos nós intermédios

5.2.12. CONFORMABILIDADE GEOMÉTRICA DOS ELEMENTOS

Será de extrema importância que a subdivisão dos elementos, ocasionada pela transformação de coordenadas locais no referencial global, não provoque a existência de lacunas, comprometendo desse modo a compatibilidade dos elementos.

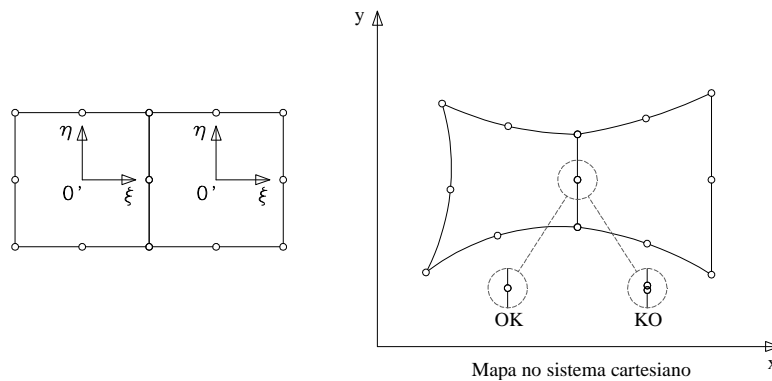


Fig.5.31 – Conformabilidade geométrica dos elementos

Se dois elementos são gerados a partir de famílias cuja função de forma satisfaz a classe de continuidade C_0 , então os elementos distorcidos permanecerão contínuos e portanto compatíveis.

5.2.13. ESPECIFICAÇÕES DOS ELEMENTOS

Se as funções de forma são tais que a classe de continuidade é preservada então os requisitos de continuidade serão satisfeitos nos elementos distorcidos. Com a forma dos elementos definida pelas funções de forma, a variação da incógnita u terá de ser especificada em termos de coordenadas locais através da seguinte expressão:

$$u = N \cdot a^e \quad (5.46)$$

em que \mathbf{a}_e representa a listagem dos valores nodais. Estes valores nodais poderão, ou não, estar associados aos nós que definem a geometria dos elementos. Quando os pontos que definem a geometria e a função de forma são os mesmos, os elementos designam-se por isoparamétricos.

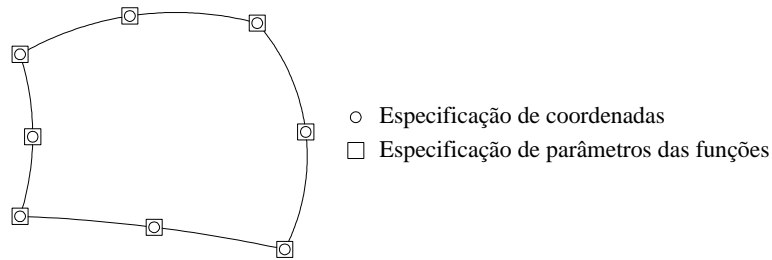


Fig.5.32 – Elementos isoparamétricos

Os elementos serão superparamétricos quando se utilizarem apenas os nós de canto para definir a variação de \mathbf{u} .

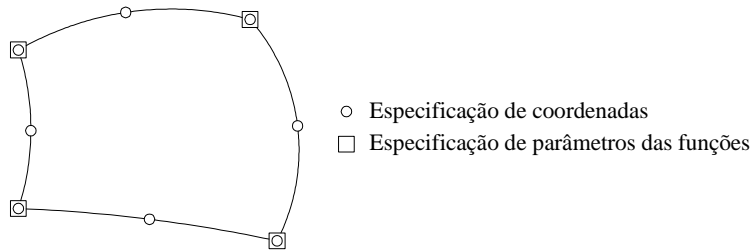


Fig.5.33 – Elementos superparamétricos

Quando os nós que especificam \mathbf{u} são em maior número que os nós que definem a geometria, tais elementos denominam-se subparamétricos.

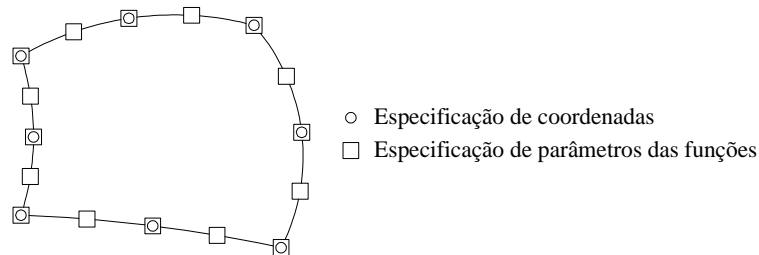


Fig.5.34 – Elementos subparamétricos

5.2.14. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Para proceder à análise via elementos finitos é necessário determinar as matrizes que definem as propriedades dos elementos tomando a forma que se apresenta em seguida.

$$\int_V G dV \quad (5.47)$$

De acordo com O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor (2005), a matriz \mathbf{G} depende das funções de forma \mathbf{N} ou das suas derivadas em ordem às coordenadas globais. Admitindo um problema de natureza linear, a transformação de coordenadas da matriz de “rigidez” será conforme se pode observar na equação 5.48.

$$\int_V [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{B}] dV \quad (5.48)$$

As matrizes \mathbf{B}_i tomam a forma que se apresenta na equação 5.49.

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Como se admite linearidade, a matriz \mathbf{G} será função das primeiras derivadas de \mathbf{N}_i e portanto a classe de continuidade C_0 deverá ser assegurada. Uma vez que as funções \mathbf{N}_i são definidas em coordenadas locais, para ser possível avaliar as matrizes \mathbf{G} será preciso efectuar a transformação de coordenadas das derivadas parciais contidas na equação 5.49 do referencial global para o referencial local.

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (5.50)$$

Com toda a generalidade e escrevendo na forma matricial, resulta a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

em que a matriz 3x3 não é mais do que a matriz jacobiana cujas derivadas parciais são em ordem às coordenadas locais. Sejam \mathbf{N} e \mathbf{N}^* os vectores coluna que representam a variação das funções de

forma em ordem às coordenadas globais e locais, respectivamente. A expressão anterior pode assim ser escrita numa forma mais condensada.

$$\{N^*\} = [J] \times \{N\} \quad (5.52)$$

Através de operações algébricas elementares, a equação 5.52 poderá ser explicitada em ordem às derivadas das funções de forma em ordem às coordenadas globais.

$$[J]^{-1} \{N^*\} = [J]^{-1} [J] \times \{N\} = [I] \times \{N\} = \{N\} \quad (5.53)$$

donde:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (5.54)$$

Para transformar as variáveis e a região em ordem à qual a integração é efectuada, recorre-se a um processo que envolve o uso do determinante da matriz jacobiana. Conforme já foi referido, a matriz jacobiana é dada pela equação 5.55.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Note-se contudo que para elementos isoparamétricos a matriz **[J]** pode ser escrita de modo mais simplificado pois a variação cruzada de coordenadas é nula.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

O determinante da matriz **[J]** pode assim ser facilmente calculado da forma que se segue:

$$\det[J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (5.57)$$

Então:

$$\det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = dx \cdot dy \cdot dz = dV \quad (5.58)$$

Atendendo à equação 5.47 e assumindo que a matriz jacobiana é determinável, a avaliação das propriedades dos elementos pode ser efectuada à custa do seguinte integral:

$$\int_V G dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.59)$$

Seja:

$$\bar{G} = G \cdot \det[J] \quad (5.60)$$

Então:

$$\int_V G dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{G} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (5.61)$$

Infelizmente, o integral referido é de difícil resolução algébrica pelo que, na maior parte das vezes, será necessário recorrer à integração numérica.

5.2.15. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Para avaliar as matrizes de rigidez ou de permeabilidade, consoante se trate de uma análise estrutural ou de percolação em meio poroso, respectivamente, e os vectores associados ao sistema de equações será necessário realizar o cálculo integral. Como já havia sido referido, as soluções algébricas são geralmente muito difíceis de obter pelo que será inevitável a utilização de meios numéricos de integração para obtenção das soluções. A integração numérica é um método de obter valores aproximados para o integral de uma certa função integrável num dado intervalo de um domínio real. O princípio comum aos numerosos métodos de integração numérica consiste em aproximar uma função por uma outra, por exemplo polinómios interpoladores, cujo integral seja mais fácil de calcular.

A quadratura de Newton-Cotes recorre a polinómios interpoladores da função integranda em nós equidistantes no intervalo de integração. A família de Newton-Cotes é constituída pelas regras do rectângulo, do ponto médio, do trapézio e de Simpson. Todas estas regras envolvem a fixação do número e localização dos nós, a determinação do polinómio interpolador e o cálculo dos pesos.

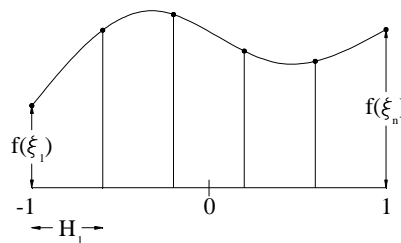


Fig.5.35 – Integração de Newton-Cotes

O integral da função interpoladora pode ser escrito do seguinte modo.

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i \cdot f(\xi_i) \quad (5.62)$$

Para n valores da função, é possível definir um polinómio de grau $n-1$ e o erro será da ordem $O(h^n)$. Assim, é possível obter um grau de exactidão igual ou superior em uma unidade ao grau do polinómio interpolador usado na construção. Note-se que uma regra de integração diz-se de grau de exactidão n se integrar exactamente todos os polinómios de grau menor ou igual a n e se existir pelo menos um polinómio de grau $n+1$ que não é exactamente integrado. Daqui surge a possibilidade de conseguir graus de exactidão iguais a $2n-1$ com fórmulas de n nós.

Para obter fórmulas de máximo grau, a solução passa por não fixar previamente a localização dos nós, mas alocá-los de tal modo que se atinja a precisão máxima. Fica-se assim com $2n$ parâmetros disponíveis, os n nós mais os n pesos, que podem ser determinados tal que a regra de integração opere de forma exacta todos os polinómios de grau inferior a $2n-1$ e portanto o erro será de ordem $O(h^{2n})$.

Devido à complexidade de resolução simultânea das equações, é frequente recorrer ao método de Gauss-Legendre que recorre explicitamente aos termos polinomiais de Legendre, cujas posições e pesos para algumas das regras podem ser consultadas no Quadro 5.1.

Quadro 5.1 – Abcissas e pesos das regras de Gauss-Legendre no intervalo [-1,1]

n	$\pm x_i$	H_i
1	0.0000000000	2.0000000000
2	0.5773502692	1.0000000000
3	0.0000000000	0.8888888889
	0.7745966692	0.5555555556
4	0.3399810436	0.6521451549
	0.8611363115	0.3478548451
5	0.0000000000	0.5688888889
	0.5384693101	0.4786286705
	0.9061798459	0.2369268851
6	0.2386191861	0.4679139346
	0.6612093865	0.3607615730
	0.9324695142	0.1713244924
	0.0000000000	0.4179591837
7	0.4058451514	0.3818300505
	0.7415311856	0.2797053915
	0.9491079123	0.1294849662
8	0.1834346425	0.3626837834
	0.5255324099	0.3137066459
	0.7966664774	0.2223810345
	0.9602898565	0.1012285363
	0.0000000000	0.3302393550
9	0.3242534234	0.3123470770
	0.6133714327	0.2606106964
	0.8360311073	0.1806481607
	0.9881602395	0.0812743883
	0.1488743390	0.2955242247
10	0.4333953941	0.2692667193
	0.6794095683	0.2190863625
	0.8650633667	0.1494513492
	0.9739065285	0.0666713443

Se, para elementos bidimensionais rectangulares, a continuidade no domínio real estiver assegurada, o modo de obter o integral consistirá na aplicação da regra de Fubini.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n H_j \cdot f(\xi_j, \eta) = \psi(\eta) \quad (5.63)$$

Admitindo que o número de pontos de integração é o mesmo nas duas direcções e avaliando o integral exterior de forma similar, obter-se-á a seguinte igualdade:

$$I = \int_{-1}^1 \psi(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^n H_i \cdot \psi(\eta_i) = \sum_{i=1}^n H_i \cdot \sum_{j=1}^n H_j \cdot f(\xi_j, \eta_i) \quad (5.64)$$

E portanto:

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i \cdot H_j \cdot f(\xi_j, \eta_i) \quad (5.65)$$

A precisão do processo de integração aumenta à medida que a ordem de integração é mais elevada, porém, o número de funções a avaliar está também dependente da ordem de integração e conseqüentemente o peso computacional envolvido no cálculo numérico. Para elementos bidimensionais e tridimensionais esta subtileza torna-se mais importante pois aí o cálculo será efectuado sobre matrizes de pontos de integração.

Refira-se ainda a pertinência da determinação dos requisitos mínimos de convergência e os requisitos mínimos necessários de integração de forma que se preserve a taxa de convergência que dê origem à integração exacta, pois, muitas vezes, torna-se desvantajoso utilizar integrais de ordens superiores devido ao problema de cancelamento subtractivo susceptível de ocorrer pela discretização e integração inexactas.

Nos problemas em que o funcional de energia define a aproximação, a convergência pode ocorrer através de um valor constante arbitrário das m-ésimas derivadas. Para o caso $m=1$ e portanto para os integrais da forma apresentada na equação 5.47 é necessário que um valor constante de \mathbf{G} seja correctamente integrado. Desse modo, o volume do elemento precisa de ser avaliado correctamente para que a convergência ocorra, donde, em coordenadas curvilíneas o integral mostrado na expressão 5.61 tem também de ser avaliado de forma exacta.

Para problemas da classe de continuidade C_0 , ou seja $m=1$, o formulário de integração deve ser:

Quadro 5.2 – Formulário de integração

Pontos integração	Elementos	Convergência
1	lineares	$O(h)$
2	quadráticos	$O(h^3)$
3	cúbicos	$O(h^5)$

De acordo com O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor (2005), para elementos lineares, triangulares ou rectangulares, um ponto de integração é adequado, para elementos quadriláteros de 2ª ordem são precisos pelo menos quatro pontos de integração e para elementos triangulares de 2ª ordem três pontos de integração são adequados.

5.3. ANÁLISE DE ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS BIDIMENSIONAIS EM REGIME PERMANENTE ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

5.3.1. GENERALIDADES

Pelas vantagens previamente referidas na resolução de problemas através do método dos elementos finitos, pretende-se estabelecer uma ligação entre a sua formulação geral e as equações diferenciais governativas dos escoamentos em meios porosos em regime permanente, deduzidas no ponto 2.5.

5.3.2. FORMULAÇÃO GERAL DOS PROBLEMAS COM BASE NA FUNÇÃO POTENCIAL

Para meios porosos homogêneos e com anisotropia de permeabilidade, o coeficiente de permeabilidade, \mathbf{k} , poderá variar em todas as direcções do plano definido pelo escoamento bidimensional, devendo portanto ser apresentado na forma matricial.

$$[D] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Admitindo que o escoamento é em regime permanente e respeitando a lei de Laplace tem-se então a seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{xz} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.67)$$

Relembre-se que, no ponto 2.5.3.1 já se tinha apresentada a dedução da equação diferencial governativa dos escoamentos em regime permanente através de meios porosos homogêneos e com isotropia de permeabilidade, formulada com base na função potencial.

A expressão 5.67 mostra a equação diferencial que será tratada pelo método dos elementos finitos. Note-se que as condições de fronteira discutidas no ponto 2.5.4 podem ser traduzidas matematicamente. As condições de fronteira *essenciais* ou de *Dirichlet* serão como se mostra na expressão 5.68.

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{em } \Gamma_{\phi} \quad (5.68)$$

As condições de fronteira *naturais* ou de *Neumann* tomarão a seguinte forma:

$$\left(k_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot n_x + \left(k_{xz} \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot n_z = -v_n \quad \text{em } \Gamma_V \quad (5.69)$$

Em que Γ_{ϕ} e Γ_V são trechos da fronteira do domínio, \mathbf{n}_x e \mathbf{n}_z são as componentes do versor da normal exterior à fronteira e \mathbf{v}_n é a componente normal da velocidade à fronteira.

5.3.3. MÉTODO DOS RESÍDUOS PESADOS E APROXIMAÇÃO EXACTA EM PARTE DA FRONTEIRA

Como se pretende efectuar a aproximação, no domínio e em parte da fronteira, à solução exacta da equação diferencial governativa dos escoamentos em meios porosos em regime permanente, formulada com base na função potencial, a equação 5.1 toma então a seguinte forma:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot N_i \quad (5.70)$$

Respeitando a equação 5.9, que considera a minimização do resíduo no domínio Ω e na fronteira do domínio Γ resulta:

$$R_{\Omega} = A(N \cdot a) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \quad (5.71)$$

$$R_{\Gamma} = B(N \cdot a) = \left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_x + \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_z + v_n \quad (5.72)$$

Substituindo as equações 5.71 e 5.72 na equação 5.9 tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w_i \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \right] \cdot d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \bar{w}_i \cdot \left[\left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_x + \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_z + v_n \right] \cdot d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (5.73)$$

Repare-se que, para a expressão 5.73 ser respeitada, possibilitando assim a aplicação do Método de Galerkin, pois as funções de forma implementadas no âmbito do método dos elementos finitos são tais que o resíduo não se anula e portanto as funções de peso \mathbf{W}_i também não se anulam em Γ_u , será preciso transferir a diferenciação para as funções de peso \mathbf{W}_i no integral do resíduo pesado estendido ao domínio, Ω . João Marado (1993) sugere que, a transferência de diferenciação deve ser efectuada através do teorema de Green, em conformidade com as equações 5.74 e 5.75.

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \beta \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha \cdot \beta \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (5.74)$$

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial z} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \beta \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha \cdot \beta \cdot n_z \cdot d\Gamma \quad (5.75)$$

Assim, resulta a equação 5.76 que traduz o integral do resíduo estendido ao domínio dado pelas parcelas do primeiro membro da equação 5.73.

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w_i}{\partial x} \cdot \left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) + \frac{\partial w_i^T}{\partial z} \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \right] \cdot d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} w_i \cdot \left[\left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_x + \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_z \right] \cdot d\Gamma + \quad (5.76) \\ & + \int_{\Gamma_V} \left[\left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_x + \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_z + v_n \right] \cdot d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

5.3.4. DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS. MÉTODO DE GALERKIN

Pelo carácter discreto dos subdomínios que compõem o domínio considerado, os integrais do resíduo, que se apresentam na equação 5.76 deverão ser desdobrados em somatórios de integrais estendidos aos elementos e respectivas fronteiras. Note-se que, a fronteira Γ do domínio Ω pode ser obtida pela composição das fronteiras dos subdomínios de fronteira e estas, por sua vez, serão compostas pelas fronteiras dos subdomínios de fronteira indexadas às condições de *Dirichlet* e de *Neumann*.

$$\Gamma = \sum_{e=1}^E \Gamma_f^e = \sum_{e=1}^E \Gamma_{\phi}^e + \sum_{e=1}^E \Gamma_V^e \quad (5.77)$$

Deste modo a equação 5.76 pode ser reformulada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & - \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w_i}{\partial x} \cdot \left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) + \frac{\partial w_i^T}{\partial z} \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \right] \cdot d\Omega + \\ & + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_{\phi}^e} w_i \cdot \left[\left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_x + \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_z \right] \cdot d\Gamma + \quad (5.78) \\ & + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_V^e} w_i \cdot \left[\left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_x + \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_z \right] \cdot d\Gamma + \\ & + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_V^e} V_i \cdot \left[\left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_x + \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_z + v_n \right] \cdot d\Gamma + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_V^e} V_i \cdot v_n \cdot d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

em que, \mathbf{V}_i são as funções de peso na fronteira. Admitindo o critério de que as funções de peso na fronteira, \mathbf{V}_i , são simétricas das funções de peso no domínio, \mathbf{W}_i , resulta a seguinte simplificação da equação 5.78.

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w_i}{\partial x} \cdot \left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) + \frac{\partial w_i^T}{\partial z} \cdot \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \right] \cdot d\Omega + \\
 & + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_\phi^e} w_i \cdot \left[\left(k_{xx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_x + \left(k_{xz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) \cdot n_z \right] \cdot d\Gamma + (5.79) \\
 & - \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_V^e} w_i \cdot v_n \cdot d\Gamma = 0
 \end{aligned}$$

Como no domínio e na fronteira a função a aproximar é a potencial, conjugando a equação 5.70 com a equação 5.79, resulta a equação com a configuração que se apresenta em seguida.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial w_i}{\partial x} \cdot \sum_{j=1}^M \phi_j \cdot \left(k_{xx} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) + \frac{\partial w_i}{\partial z} \cdot \sum_{j=1}^M \phi_j \cdot \left(k_{xz} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] \cdot d\Omega + \\
 & + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_V^e} w_i \cdot v_n \cdot d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

Colocando em evidência o somatório das j -ésimas funções potenciais aplicadas aos respectivos M -ésimos nós do domínio, pode-se escrever a expressão anterior na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^M \phi_j \cdot \left\{ \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \left[\left(k_{xx} \frac{\partial w_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial w_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) + \left(k_{xz} \frac{\partial w_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial w_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] \cdot d\Omega \right\} + \\
 & + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_V^e} w_i \cdot v_n \cdot d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{5.81}$$

Sendo então \mathbf{M} o número de nós em que é discretizado o domínio, é agora possível gerar um sistema de \mathbf{M} equações a \mathbf{M} incógnitas. A equação 5.81 poderá ser escrita na forma matricial de acordo com a equação 5.82.

$$[K] \times \{\phi\} = \{f\} \tag{5.82}$$

em que, \mathbf{K} é a matriz de permeabilidade, ϕ é o vector das incógnitas potenciais e \mathbf{f} é o vector resultante das condições de fronteira de *Neumann*.

Admitindo o critério de *Bubnov-Galerkin*, descrito no ponto 5.2.6, os parâmetros da matriz \mathbf{K} serão dados através do seguinte modo:

$$k_{ij} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \left[\left(k_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{zx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) + \left(k_{xz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] \cdot d\Omega \quad (5.83)$$

Por outro lado, as grandezas \mathbf{f}_i poderão ser escritas conforme se segue.

$$f_i = - \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_V^e} N_i \cdot v_n \cdot d\Gamma = 0 \quad (5.84)$$

Analogamente à transformação de coordenadas nos sistemas estruturais, a matriz de permeabilidade pode ser referida em termos locais ou globais.

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} [B]^T \times [D] \times [B] \, d\Omega \quad (5.85)$$

A matriz \mathbf{B} será composta por submatrizes \mathbf{B}_i com $i=1:n$, sendo n o número de nós dos elementos do domínio. Estas submatrizes contêm a variação direccional das i -ésimas funções de forma segundo as direcções dos eixos coordenados.

$$[B_i] = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (5.86)$$

A matriz \mathbf{D} toma a forma mostrada na equação 5.66. A matriz \mathbf{K}^e resulta do desenvolvimento da parcela da equação diferencial governativa do escoamento através da superfície que limita o volume de controlo. Claro está que este fluxo é função da permeabilidade do solo nas condições impostas pela matriz \mathbf{D} . A matriz global \mathbf{K} será resultado do processo de assemblagem das matrizes elementares \mathbf{K}^e , designando-se por matriz de permeabilidade.

O vector \mathbf{f}^e resulta da condição de fronteira natural e traduz o fluxo de água que atravessa a fronteira dos elementos.

$$\{f^e\} = - \int_{\Gamma_V^e} [N]^T \times v_n \, d\Gamma \quad (5.87)$$

O fluxo v_n é definido pela projecção da velocidade de percolação na normal à fronteira, sendo transformado em caudal através da equação 5.87. Tendo presente que se considera válida a lei de Darcy, o campo de velocidades associado aos escoamentos bidimensionais em meios porosos toma a forma seguinte:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} - \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ - \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (5.88)$$

Assim, nos i -ésimos pontos do domínio, o vector velocidade poderá ser calculado do seguinte modo:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_z \end{Bmatrix} = [D] \times \sum_{i=1}^n \{B_i\} \cdot \phi_i \quad (5.89)$$

5.3.5. INTRODUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Como para o estudo da percolação o método dos elementos finitos se encontra formulado com base na função potencial, as condições de fronteira impostas ao domínio Ω serão também escritas em função da energia potencial.

No sentido de apresentar todas as condições de fronteira susceptíveis de ocorrer nos escoamentos em meios porosos, mostra-se em seguida o exemplo de uma barragem de aterro homogénea com anisotropia direccional de permeabilidade.

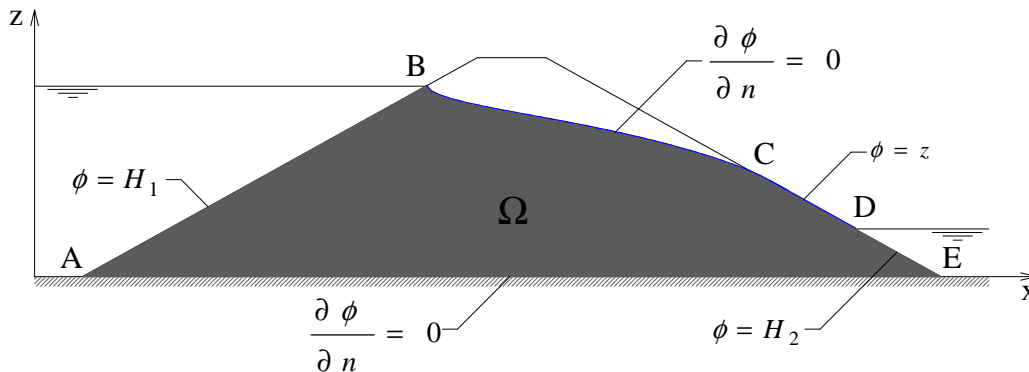


Fig.5.36 – Condições de fronteira tendo como variável dependente a função ϕ

De acordo com o exposto no ponto 5.3.2, as linhas **AB**, **CD** e **DE** estão em correspondência com as condições de fronteira de *Dirichlet*. Recordando as considerações efectuadas no ponto 2.5.4.3, nas linhas **AB** e **DE** a função potencial assume valor constante e na linha **CD** a função potencial varia linearmente.

No caso das linhas **AE** e **BC** estão associadas condições de fronteira de *Neumann* verificando-se que a componente normal à fronteira da velocidade de percolação se anula. Repare-se que, ao contrário da linha **AE**, a posição da linha **BC** não é conhecida à partida.

Já se tinha verificado que, a formulação do método dos elementos finitos conduz a um sistema de **M** equações a **M** incógnitas que é dado pelo sistema de equações 5.82. Para os casos em que a componente da velocidade normal à fronteira se anula, no exemplo citado as linhas **AE** e **BC**, a introdução das condições de fronteira de *Neumann* no sistema de equações 5.82 será efectuada à custa da anulação do vector **f**. João Marado (1993) refere que a introdução das condições de fronteira de *Dirichlet* no sistema de equações 5.82 é realizada geralmente através da adição de valores muito altos, adequadamente posicionados, na diagonal principal e no vector dos termos independentes, apenas nas linhas relativas aos pontos nodais com potenciais prescritos.

5.3.6. POSIÇÃO DA LINHA DE SATURAÇÃO EM ESCOAMENTOS NÃO CONFINADOS

No âmbito da análise numérica de problemas de percolação através do método dos elementos finitos, os procedimentos de malha variável e de malha constante permitem obter a posição do nível freático em escoamentos não confinados e, com isso, determinar o domínio do escoamento em análise.

A técnica de malha variável baseia-se num processo iterativo em que as coordenadas dos **M**-ésimos nós do domínio são alteradas em função de um critério que regula a verificação das condições de fronteira na linha de saturação. João Marado (1993) refere que esta técnica permite obter aproximações para a posição do nível freático com elevada precisão em particular quando se utilizam elementos com funções de forma não lineares. Os principais inconvenientes desta metodologia consistem na resolução de novos sistemas de equações para cada passo do processo iterativo, na dificuldade de obtenção de resultados com a mesma malha de pressões neutras e tensões em separado e na dificuldade de convergência do método quando a linha de saturação é muito inclinada ou os materiais constituintes do meio poroso apresentam permeabilidades discrepantes.

Pelos motivos invocados é habitual recorrer às técnicas de malha constante sendo o procedimento proposto por K.J. Bathe, M. R. Khoshgoftaar (1979) o mais utilizado no estudo dos escoamentos não confinados, consistindo fundamentalmente no estabelecimento de uma relação de dependência entre as características de permeabilidade do meio e o potencial em todos os nós do domínio considerado.

5.4. FERRAMENTAS DE DISCRETIZAÇÃO DOS DOMÍNIOS CONTÍNUOS

5.4.1. INTRODUÇÃO

Conforme já foi referido anteriormente, a implementação do MEF num problema de domínio contínuo consiste na sua discretização em subdomínios, ligados entre si por nós, tal que se garantam os requisitos necessários de continuidade. Para levar a cabo o processo de discretização dos meios contínuos, existem numerosas ferramentas computacionais disponíveis das quais se fará referência aos programas *Gmsh* e *GiD*. O procedimento genérico dos programas citados compreende o pré-processamento, definição da geometria do problema e construção da malha de elementos finitos, e o pós-processamento dos resultados.

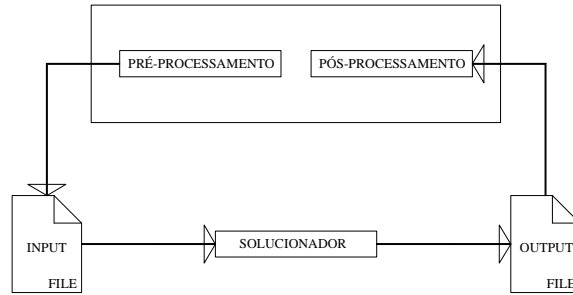


Fig.5.37 – Procedimento genérico de resolução de um problema

5.4.2. PROGRAMA GMSH

5.4.2.1. Considerações iniciais

Para a construção geométrica dos problemas, o programa *Gmsh* utiliza a representação dos limites *BRep* para descrever geometrias, devendo os modelos ser criados no sentido de baixo para cima através da definição sucessiva e convenientemente orientada de pontos, linhas, superfícies ou volumes. A linguagem preconizada por esta ferramenta computacional permite que todas as entidades geométricas sejam inteiramente parametrizadas.

Para construir o modelo geométrico dos problemas, é necessário definir os pontos geométricos. Com base nos pontos geométricos definem-se as linhas, através das linhas geram-se as superfícies e finalmente, nos problemas que assumem natureza tridimensional, com as superfícies definem-se os volumes.

Na linguagem do *Gmsh* estas entidades geométricas designam-se como elementares e a elas são associados números de identificação de tal modo que, uma vez criados, cada elemento (ponto, linha, superfície ou volume) é portador de uma designação numérica única.

5.4.2.2. Módulo de geração de malha

Para testar as diversas possibilidades de formulação da malha de elementos finitos serão utilizados dois modelos cuja geometria se descreve em seguida:

- Modelo A – Barragem de aterro zonada com base de 50m, paramentos de montante e de jusante com inclinação de 45° e núcleo da barragem com base de 10m e topo de 4m.

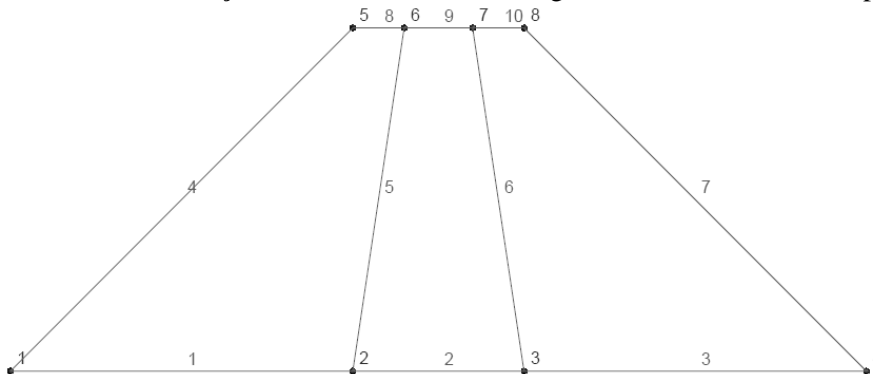


Fig.5.38 – Geometria do modelo A

- Modelo B – Ensecadeira, inserida em meio homogêneo, com 10m de largura, escavação com 10m de profundidade sendo que a cortina fica enterrada para a profundidade de 15m. A espessura do terreno até ao *Bedrock* é de 30m e o nível freático localiza-se na superfície do solo.

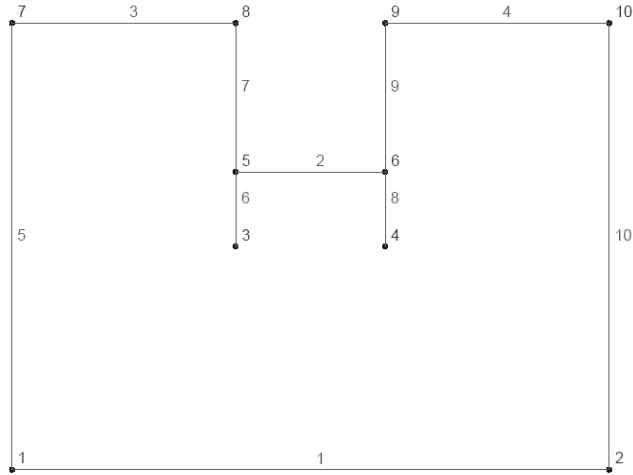


Fig.5.39 – Geometria do modelo B

O módulo *Mesh*, da ferramenta computacional em análise, agrupa vários algoritmos de geração de malha 1D, 2D e 3D que produzem grelhas adaptáveis ao âmbito dos elementos finitos. Os algoritmos 2D não estruturados geram triângulos ou, usando o comando *Recombine Surface*, triângulos e quadriláteros. Os algoritmos 2D estruturados geram triângulos por defeito, porém através de comandos de *Recombine* poderão ser obtidos também elementos quadriláteros. Dependendo do tipo de superfície a discretizar, os algoritmos 3D estruturados geram tetraedros, hexaedros, prismas e pirâmides. Os algoritmos 3D não estruturados geram tetraedros.

Para a formulação de malha de elementos finitos estruturados bidimensionais, o *Gmsh* disponibiliza os algoritmos *Transfinite* e *Extrude*. Por defeito, estes algoritmos devolvem malhas triangulares sendo necessário para obter malhas quadrangulares utilizar a opção *Recombine*. Tendo em consideração o modelo A e aplicando o algoritmo *Transfinite* com 7 nós nas linhas 1 e 8, 3 nós nas linhas 2 e 9, 5 nós nas linhas 3 e 10 e 10 nós nas linhas 4 a 7, resulta a malha da Fig.5.40.

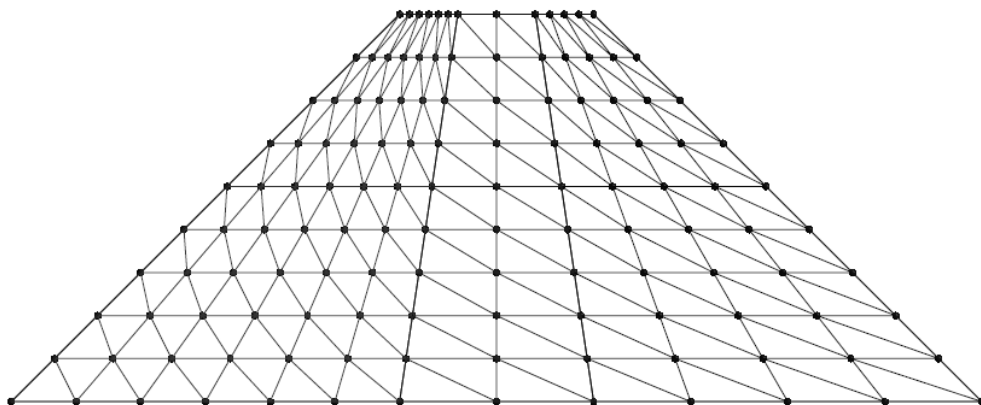


Fig.5.40 – Malha gerada com o algoritmo *Transfinite*

Implementando a opção *Recombine* a todas as superfícies do modelo resulta a malha com elementos quadriláteros como se mostra na Fig.5.41.

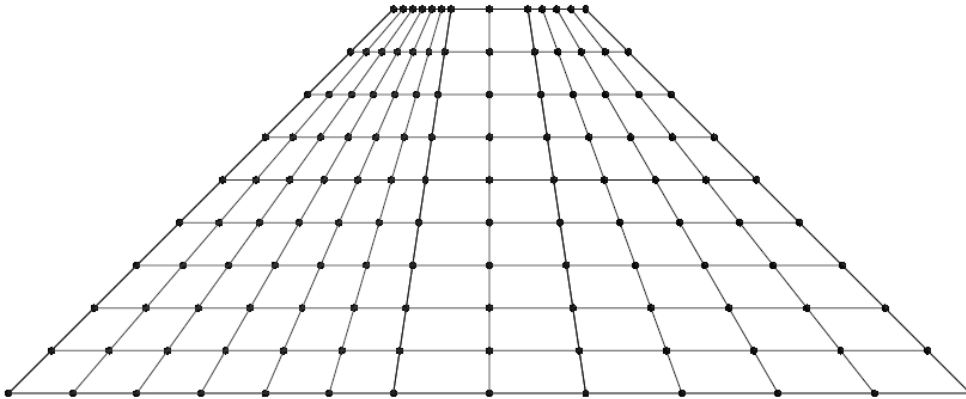


Fig.5.41 – Malha gerada com o algoritmo *Transfinite* associado à opção *Recombine*

Note-se que, a opção *Recombine* não tem necessariamente que se aplicar ao modelo na sua totalidade. Esta funcionalidade é válida para as superfícies que forem seleccionadas. Ainda no âmbito do algoritmo *Transfinite*, é possível ainda efectuar o espaçamento entre nós, de acordo com as especificações do utilizador, através da opção *Transfinite/Line/Type/Progression* ou *Bump*, especificando o passo da progressão através da opção *Parameter*. Neste exemplo o valor que *Parameter* assume nas linhas 4 a 7 é 0.8.

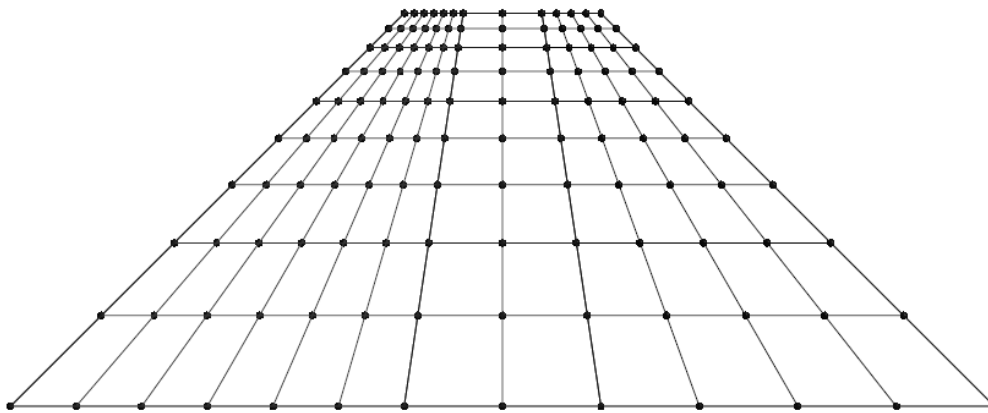


Fig.5.42 – Algoritmo *Transfinite* associado à opção *Recombine* com *Parameter* de 0.8 nas linhas 4 a 7

O programa *Gmsh* permite a escolha de três algoritmos não estruturados 2D e dois algoritmos não estruturados 3D. Para todos os algoritmos 2D não estruturados, é produzida uma malha de *Delaunay*, através do algoritmo *Divide-and-conquer*, que contém todos os pontos da malha 1D. Após este primeiro passo, estão disponíveis três algoritmos que permitem gerar a malha final, nomeadamente:

- O algoritmo *MeshAdapt* é baseado em modificações locais da malha. Esta técnica manipula as arestas através da permuta, separação e colapso. Arestas longas são separadas, arestas curtas são colapsadas e, quando exista uma configuração geométrica com melhor qualidade, as arestas são permutadas;

- Com o algoritmo de *Delaunay*, novos pontos são inseridos sequencialmente no circuncentro de elementos que tenham o maior circunraio. A malha será depois reconectada através de um critério anisotrópico de *Delaunay*.
- O algoritmo Frontal é inspirado no trabalho de S. Rebay.

C. Geuzaine e F. Remacle (2009) afirmam que o algoritmo *MeshAdapt* é particularmente indicado para superfícies curvas complexas. Por outro lado, quando a qualidade dos elementos é importante deverá ser dada preferência ao algoritmo *Frontal*. Para malhas muito extensas em superfícies planas, o algoritmo de *Delaunay* é o mais rápido. Considere-se o modelo A para testar as diferenças entre os algoritmos mencionados.

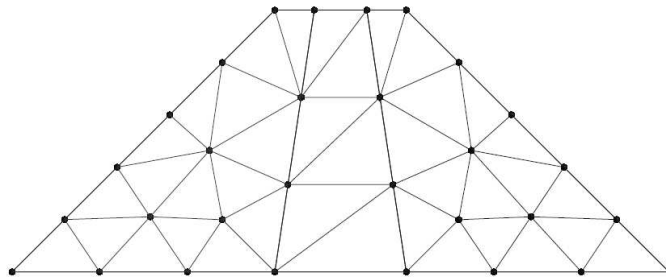


Fig.5.43 – Malha gerada através do algoritmo *MeshAdapt*

Através da funcionalidade *Tools/Statistics* é possível visualizar as informações necessárias para a correcta comparação dos três métodos em análise. A malha gerada através do algoritmo *MeshAdapt*, que pode ser observada na Fig.5.43, é constituída por 16 nós em linhas, 6 nós em superfícies, totalizando 38 elementos triangulares.

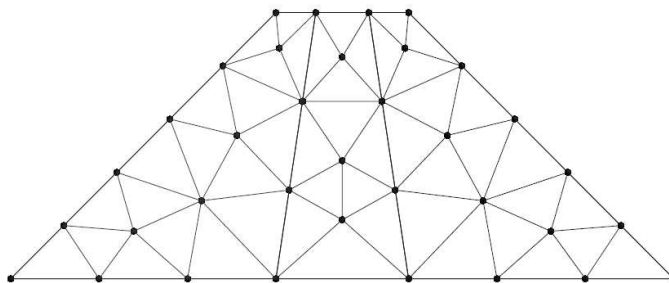


Fig.5.44 – Malha gerada através do algoritmo *Delaunay*

Como se pode confirmar na Fig.5.44, a malha produzida pelo algoritmo de *Delaunay* é constituída por 16 nós em linhas, 11 nós em superfícies, totalizando 48 elementos triangulares.

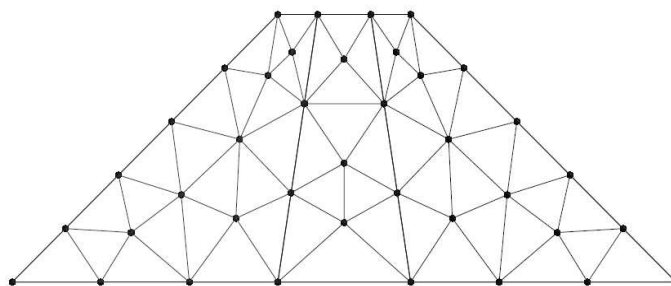


Fig.5.45 – Malha gerada através do algoritmo *Frontal*

A malha gerada através do algoritmo *Frontal* é constituída por 16 nós em linhas, 15 nós em superfícies, totalizando 56 elementos triangulares.

Em termos da sua performance, em comparação com o algoritmo *MeshAdapt*, verifica-se que os algoritmos de *Delaunay* e *Frontal* produzem malhas com mais elementos e consomem menos tempo.

Em geral, nos escoamentos em meios porosos, as grandezas de natureza mecânica e hidráulica experimentam uma variação apreciável da sua direcção, sentido e intensidade e, em certos casos, em regiões muito localizadas do domínio. Para que essas grandezas sejam bem caracterizadas, é necessário aumentar o número de elementos do domínio em particular nas regiões de variação mais acentuada. Repare-se no entanto que, o aumento generalizado do número de elementos da malha com o objectivo de descrever fenómenos localizados no domínio conduz frequentemente a malhas ineficientes em termos da quantidade de dados que serão necessários memorizar e do tempo dispendido para efectuar o cálculo computacional. Tal como na maioria dos programas disponíveis que envolvem a formulação de malha de elementos finitos, o programa *Gmsh* disponibiliza três metodologias possíveis para especificar a dimensão dos elementos.

- Especificar os comprimentos característicos nos pontos geométricos do modelo;
- Adaptar a malha em função da curvatura das entidades geométricas;
- Especificar os comprimentos característicos através das funcionalidades *Field*.

A maioria dos programas de formulação de malhas de elementos finitos recorre frequentemente à primeira possibilidade e o segundo método, pelas características geométricas das estruturas de natureza geotécnica, terá pouca aplicabilidade, donde considera-se suficiente a informação prestada a este respeito. Já a terceira hipótese constitui uma novidade interessante muito por causa da forma simples, e de certo modo inovadora, que se confere ao pré-processamento de incluir, ainda que de forma indirecta, a natureza física do problema na formulação da malha de elementos finitos.

Saliente-se que as funções *Field* são suportadas por todos os algoritmos de geração de malha exceptuando aqueles que se fundamentam no critério de *Netgen*. Para demonstrar as diversas possibilidades que a funcionalidade *Field* faculta considere-se o modelo A.

O comando *Attractor* das opções em *Field* pode ser efectuada sobre nós, linhas ou superfícies, no entanto, de acordo com C. Geuzaine e F. Remacle (2009), neste último caso podem ocorrer resultados estranhos. Escrevendo então os pontos 2 e 6 em *NodesList* o campo *Attractor* irá devolver uma região com a distância dos diversos pontos da malha aos pontos 2 e 6.

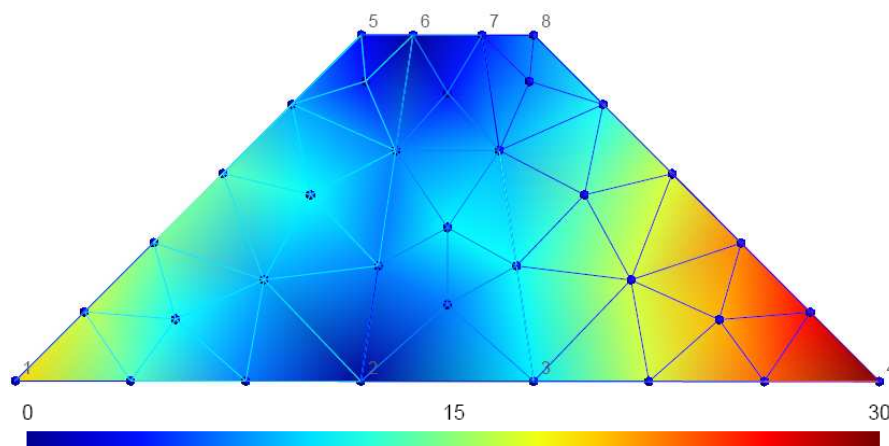


Fig.5.46 – Função *Attractor* com os nós 2 e 6 em *NodesList*

O gradiente gerado pela função *Attractor* pode ser agora aproveitado para impor um caminho ao longo do qual a malha vai mudando de dimensões, neste caso, das cores frias para as cores quentes, podendo esse caminho ser especificado através da função *Threshold*. A função *Threshold* é composta por cinco opções, nomeadamente:

- *DistMax* – Distância a partir da qual os elementos têm dimensão igual a *LcMax*;
- *DistMin* – Distância à entidade até à qual o tamanho dos elementos é igual a *LcMin*;
- *IField* – Índice do campo a avaliar;
- *LcMax* – Tamanho dos elementos fora de *DistMax*;
- *LcMin* – Tamanho dos elementos dentro de *DistMin*.

Às opções referidas acrescem ainda as funções *Sigmoid* e *StopAtDistMax*. Quando a função *Sigmoid* está inactiva a dimensão dos elementos varia linearmente entre *LcMin* e *LcMax*, por outro lado, quando se encontra activa, a interpolação é efectuada através da função Sigmóide nos termos expressos na equação 5.90.

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda x}} \quad (5.90)$$

A função Sigmóide apresentada na equação 5.90 toma a forma que se pode observar na Fig.5.47.

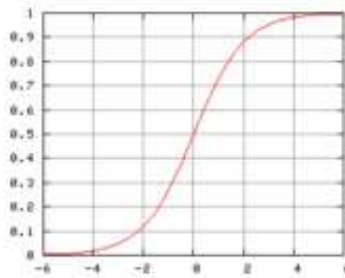


Fig.5.47 – Função Sigmóide

Quando a função *StopAtDistMax* se encontra inactiva é imposta a dimensão máxima dos elementos fora de *DistMax*. Pelo exposto resulta a seguinte configuração da malha de elementos finitos:

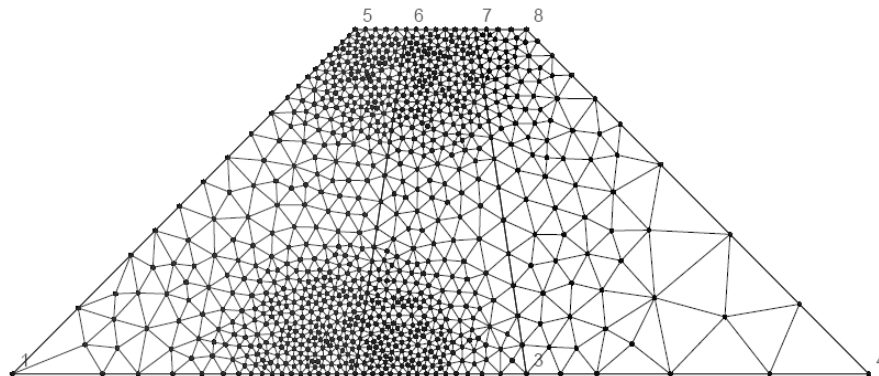


Fig.5.48 – Malha gerada através da função *Threshold* associada à função *Attractor*

Ainda no âmbito do comando *Attractor*, fixando agora em *EdgesList* a linha 5, ou seja a interface corpo de montante-núcleo, resulta o campo que se mostra na Fig.5.49.

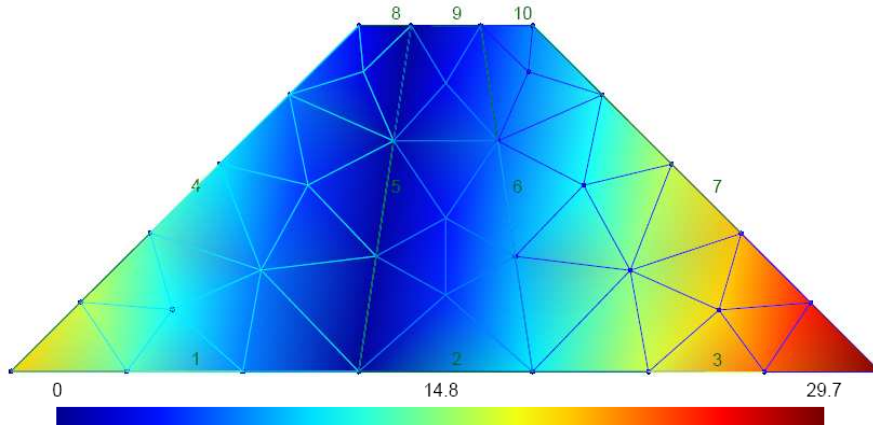


Fig.5.49 – Função *Attractor* com a linha 5 em *EdgesList*

Combinando novamente a função de campo *Attractor* com a função *Threshold* resulta a malha de elementos finitos que se mostra na Fig.5.50.

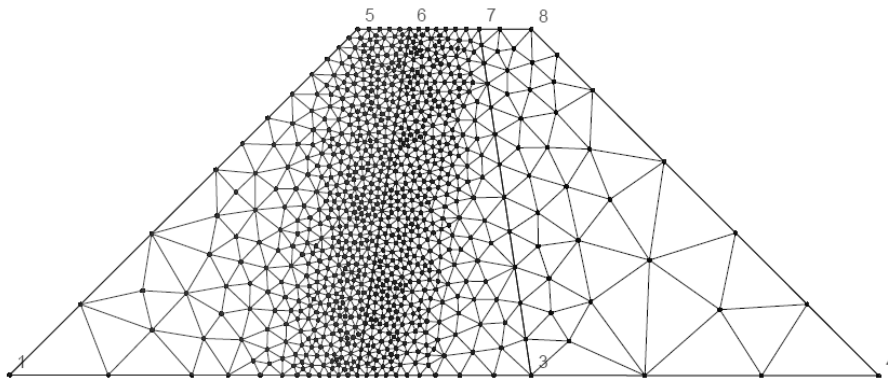


Fig.5.50 – Malha gerada através da função *Threshold* associada à função *Attractor*

Considere-se agora o modelo B, cuja malha gerada por defeito é a que se pode observar na Fig.5.51.

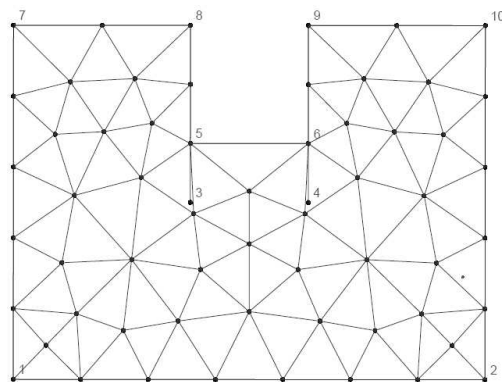


Fig.5.51 – Modelo B com malha gerada por defeito

Como se sabe, nos escoamentos susceptíveis de ocorrer nas condições mostradas na figura anterior, a velocidade de percolação, as perdas de carga hidráulica e o gradiente hidráulico assumem variações mais acentuadas junto do pé da cortina donde, para caracterizar com precisão aceitável o comportamento destas grandezas, será boa ideia aumentar o grau de refinamento da malha nessas regiões. Pelo exposto, recorrendo à função *Attractor* com os nós 3 e 4 em *NodesList* surge o campo que se pode visualizar na Fig.5.52.

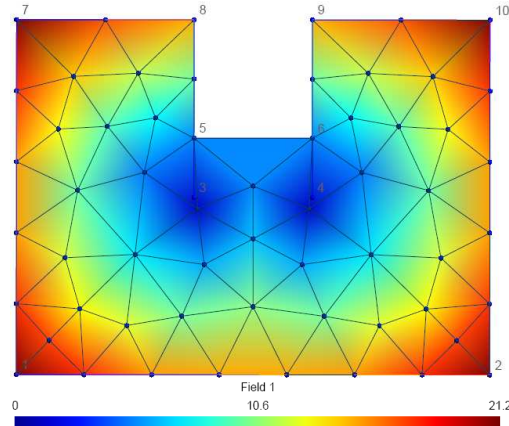


Fig.5.52 – Função *Attractor* com os nós 3 e 4 em *NodesList*

Sendo $DistMax=10$, $Distmin=0$, $IField=1$, $LcMax=1.5$, $LcMin=0.5$ e activando as opções *Sigmoid* e *StopAtDistMax* resulta a malha que se pode observar na Fig.5.53.

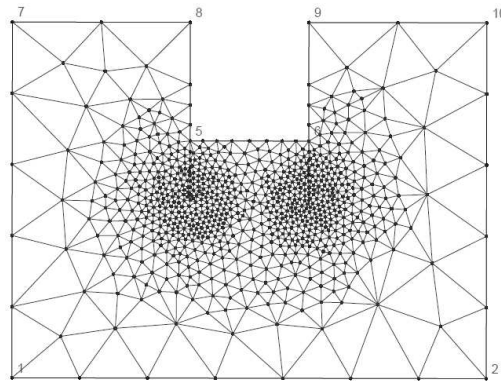


Fig.5.53 – Malha gerada através da função *Threshold* associada à função *Attractor*

Facilmente se percebe que esta metodologia de geração de malha permite de forma relativamente simples e eficiente conjugar o grau de refinamento da malha com as regiões de maior variabilidade das grandezas hidráulicas em jogo.

Outra funcionalidade particularmente interessante das opções *Field* é o comando *Box* que, como o nome indica, consiste em marcar uma caixa numa região do modelo onde se pretenda refinar a malha e impor as dimensões da malha dentro e fora dessa caixa. Considerando novamente o modelo A, admita-se agora que se pretende refinar a malha no centro da linha que representa a interface corpo de montante-núcleo. A dimensão dos elementos dentro da caixa, VIn , e fora da caixa, $VOut$, tomam os valores de 0.5 e 3, respectivamente. As coordenadas da caixa, máxima e mínima, na direcção horizontal serão tais que $XMax$ e $Xmin$ tomem os valores 25 e 18, respectivamente. As coordenadas da

caixa, máxima e mínima, na direcção vertical serão tais que Y_{Max} e Y_{Min} tomem os valores 13.5 e 6.5, respectivamente. Para o caso dos modelos numéricos tridimensionais, existe ainda a possibilidade de conferir espessura à caixa através das coordenadas Z_{Max} e Z_{Min} que, para o caso, tomam o valor nulo. Assim resulta a malha que se apresenta na Fig.5.54.

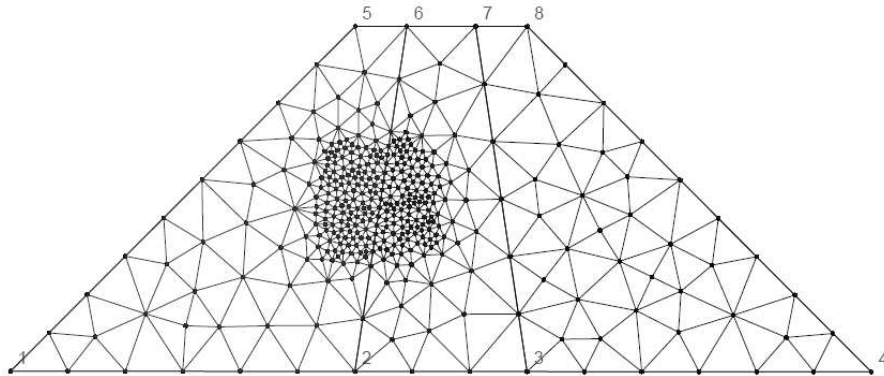


Fig.5.54 – Malha gerada através da função *Box*

O programa *Gmsh* disponibiliza também a opção *Cylinder* inserida nas funções de campo, particularmente semelhante à opção *Box* mas que será mais apropriada para a formulação de malha de elementos finitos tridimensionais.

A opção *MathEval* consiste em escrever uma função matemática explícita em ordem às coordenadas do modelo. O programa fará depois associar as coordenadas dos nós da malha gerada por defeito à função matemática dando origem assim a um campo gerador de malha com o mesmo princípio de funcionamento do comando *Attractor*. Considere-se o modelo B e admita-se que se pretende refinar a malha do topo superior do paramento de montante para o topo inferior do paramento de jusante. Em *MathEval* escreva-se por exemplo a função:

$$F = x^2 - 3.5y^2 \quad (5.91)$$

O campo resultante desta função matemática pode ser observado na Fig.5.55.

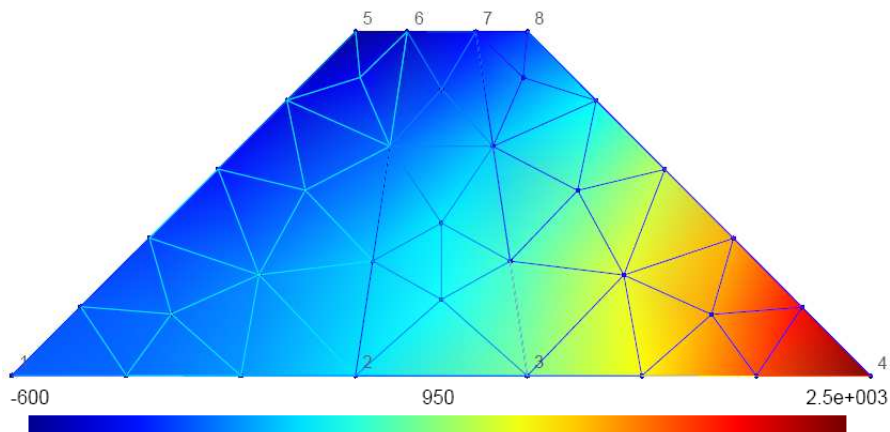


Fig.5.55 – Função *MathEval* com $F=x^2-3.5y^2$

Utilizando por exemplo a opção *Threshold* obtém-se a seguinte malha de elementos finitos:

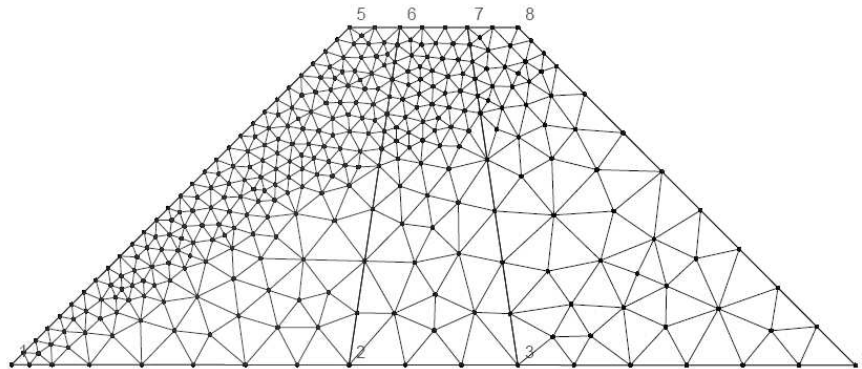


Fig.5.56 – Malha gerada através da função *Threshold* associada à função *MathEval*

Note-se que, pelo menos para o caso apresentado, a função *Attractor* parece ser mais eficiente do que a função *MathEval* pois fixando apenas o nó 5 em *NodesList* obter-se-ia o mesmo efeito ou até melhor, no entanto, a opção *MathEval* poderá ter uma palavra a dizer na geração de malhas em problemas de natureza mais complexa.

Observando a Fig.5.56 verifica-se que, a região localizada no topo do modelo à direita do núcleo, por onde normalmente o escoamento não se dá, poderá estar excessivamente refinada. Através da funcionalidade *Restrict* é possível restringir o campo de acção da função *MathEval* às superfícies desejadas. Deste modo, restringindo a função *MathEval* ao paramento de montante, a superfície 12 do modelo A, e efectuando a operação *Refine by splitting* resulta a malha de elementos finitos que se mostra na Fig.5.57.

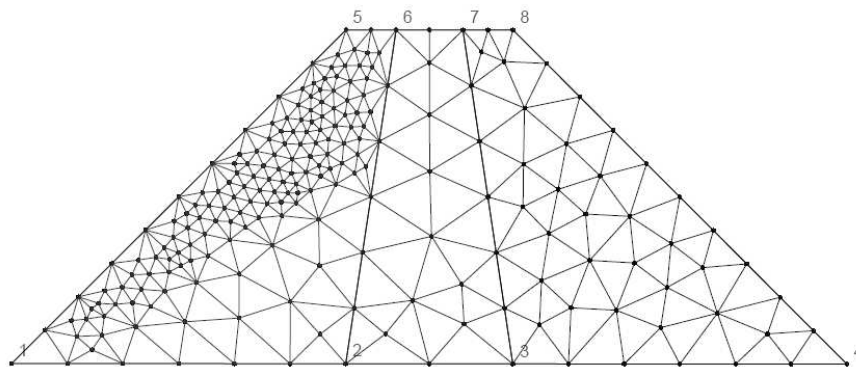


Fig.5.57 – Malha gerada pelas funções *Threshold*, *MathEval* e *Restrict*

Refira-se que a função *Restrict* é válida para qualquer função de campo, tendo esta como objectivo restringir o campo de acção das funções *Field*. Nas superfícies restringidas será gerada a malha que o programa devolve por defeito.

Outra opção de fácil aplicabilidade é a função *Mean* que, resulta do cálculo computacional da expressão que se apresenta na equação 5.92. Como se admite que as grandezas em análise não variam na normal ao plano definido pelos modelos A e B, a componente segundo a direcção z poderá ser desprezada.

$$F = G(x+d, y, z) + G(x-d, y, z) + G(x, y+d, z) + G(x, y-d, z) + G(x, y, z+d) + G(x, y, z-d) + \frac{G(x, y, z)}{7} \quad (5.92)$$

sendo:

$$G = \text{Field}[I\text{Field}] \quad (5.93)$$

Associando à opção *IField* a função *Attractor* com a linha 5 em *EdgeList* e admitindo que *Delta* é igual a 1, a malha gerada será conforme a Fig.5.58.

Não se pode deixar de reparar que, relativamente às demais opções de campo mostradas, a malha gerada pela função de campo *Mean* escapa mais rapidamente das regiões com malha mais refinada.

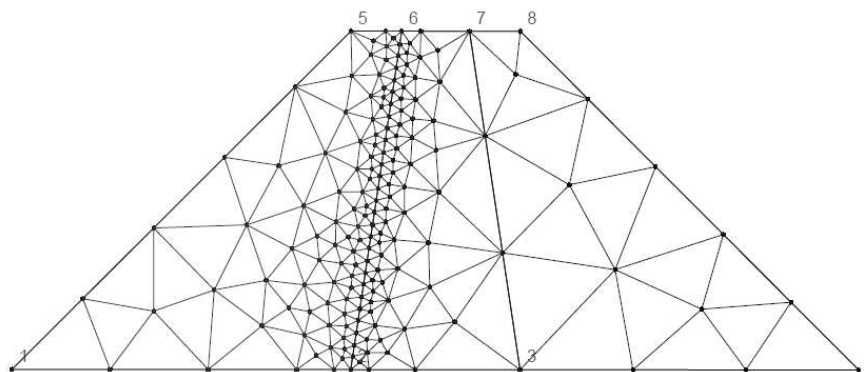


Fig.5.58 – Malha gerada pela função *Mean* associada à função *Attractor*

A opção *Field* contém ainda mais funcionalidades susceptíveis de constituir um método sofisticado de gerar uma malha de elementos finitos que tenha em conta a natureza física dos problemas, no entanto, para os casos em análise, considera-se suficiente a informação prestada.

O programa *Gmsh* permite também referir as coordenadas nodais da malha de elementos finitos a coordenadas geográficas de latitude e longitude, através da função *LonLat*, ou a coordenadas de acordo com a projecção esférica de *Mercator Transversa*, usando a função *UTM*.

5.4.3. PROGRAMA GiD

A ferramenta computacional *GiD* está particularmente vocacionada para gerar um conjunto de ficheiros devidamente configurados de modo que o programa possa preparar a informação para ser analisada. O processo de configuração dos problemas neste programa é efectuado à custa da criação de ficheiros de definição dos materiais (*. mat), de configurações gerais (*. prb), de definição das condições iniciais do problema (*. cnd), de informação formatada de acordo com as especificações do utilizador (*. bas), de programas de cálculo e de execução (*. bat).

Em termos de construção geométrica do problema o *GiD* disponibiliza uma série de funcionalidades que tornam este passo muito simples de se efectuar pois, para além se dispor um conjunto de comandos bastante intuitivo e dispostos em menu, existe ainda uma linha de comandos onde facilmente se inserem as coordenadas geométricas do modelo.

Com o comando *Create NURBS surface* geram-se as superfícies necessárias para gerar a malha através da selecção criteriosa das linhas previamente introduzidas. Uma vez concluída a geometria do problema, o *GiD* permitirá o acesso à definição dos materiais e das condições de fronteira. Em *Data/Materials* é possível criar novos materiais com características definidas pelo utilizador. Infelizmente esta funcionalidade apenas opera com as características de resistência mecânica e de deformabilidade dos materiais não existindo, pelo menos explicitamente, nenhum campo de introdução de dados relativos às características hidráulicas de meios porosos. Depois de estarem definidas as propriedades dos materiais, bastará seleccionar as entidades geométricas interessadas para que nelas fiquem associadas as propriedades pretendidas. Em *Data/Conditions* definem-se as condições iniciais do problema sobre pontos ou linhas, porém, nesta funcionalidade apenas é possível impor condições iniciais em termos de esforços e de deslocamentos, não havendo lugar a aspectos de imposições de caudal ou de carga hidráulica nos domínios considerados.

A ferramenta computacional *GiD* permite a formulação de malhas tridimensionais, no entanto, no âmbito do presente estudo, apenas se estudarão malhas bidimensionais. As malhas de elementos finitos poderão ser estruturadas, semi-estruturadas (disponível para modelos 3D), não estruturadas e cartesianas. As malhas cartesianas são particularmente vocacionadas para superfícies paralelas aos eixos coordenados. Para o caso em apreço facilmente se percebe que este algoritmo não parametriza eficientemente a geometria de problemas que tenham arestas inclinadas.

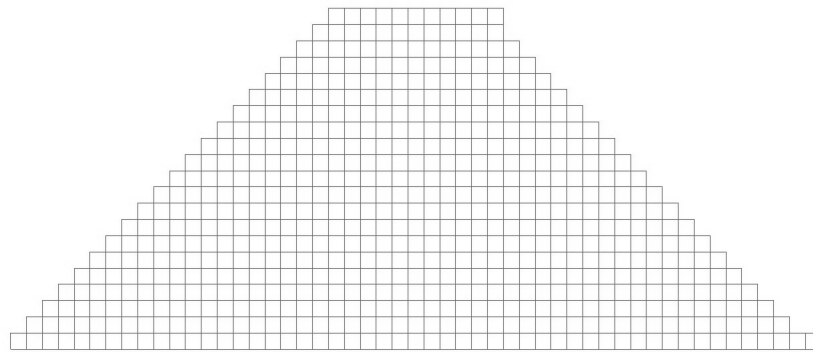


Fig.5.59 – Malha cartesiana

No caso das malhas estruturadas e não estruturadas, o programa *GiD* permite a escolha de elementos triangulares, quadrangulares e circulares. Fixando em *Utilities/Preferences* a opção *Allow automatic structured* e seleccionando a opção *Mesh/Structured/Surfaces*, onde é possível definir o número de subdivisões nas superfícies, a malha resultante é como se pode observar na Fig.5.60.

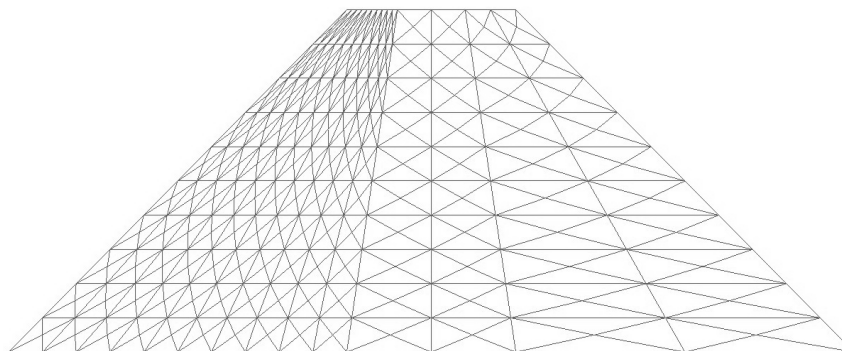


Fig.5.60 – Malha estruturada com elementos triangulares

Efectuando a subdivisão sobre linhas através da opção *Mesh/Structured/Lines* resulta a malha de elementos finitos da Fig.5.61.

Como se pode constatar na Fig.5.61, a malha está igualmente espaçada ao longo dos diversos lados das superfícies, porém, o *GiD* possibilita a concentração preferencial dos elementos da forma que se entender mais conveniente. A título de exemplo, efectuando em *Mesh/Structured/Lines/Concentrate Elements*, seleccionando todas as linhas não horizontais e efectuando *Start Weight* e *End Weight* iguais a 0.0 e 0.2, respectivamente, resulta a malha de elementos finitos que se pode observar na Fig.5.62.

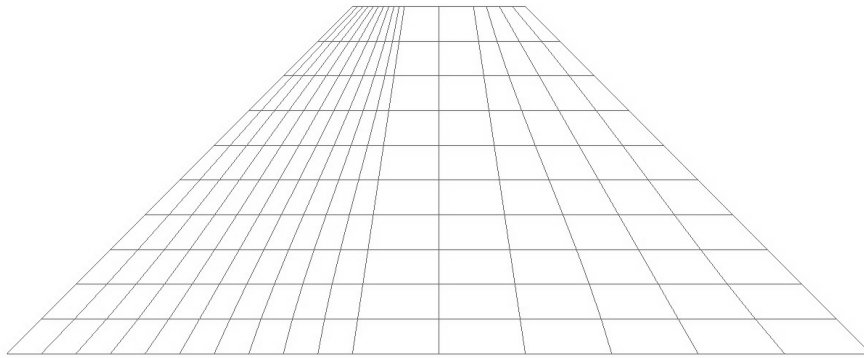


Fig.5.61 – Malha estruturada com elementos quadriláteros

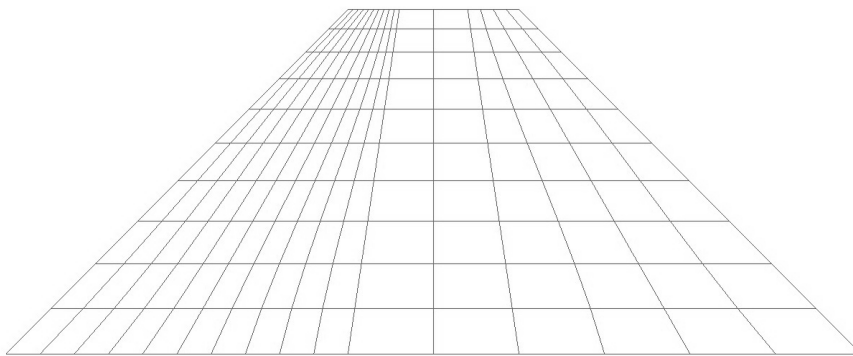


Fig.5.62 – Malha estruturada com concentração preferencial dos elementos quadriláteros

O programa *GiD* disponibiliza também os algoritmos *RFast*, *RSurf* e *RJump* para discretizar os domínios com malhas não estruturadas.

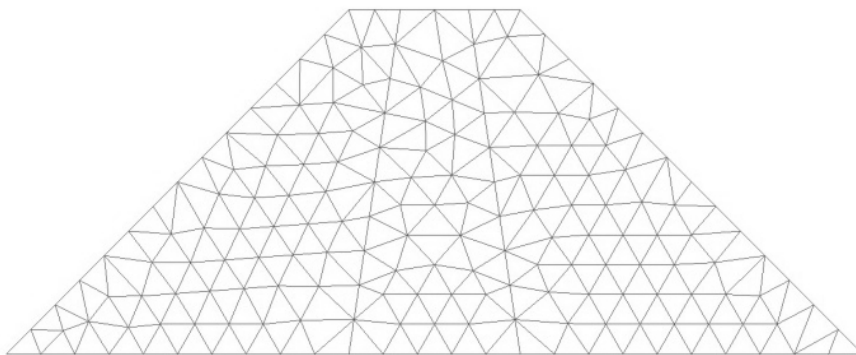


Fig.5.63 – Malha não estruturada com o algoritmo *RFast*

Na Fig.5.63 mostra-se a malha não estruturada obtida com o algoritmo *RFast*. Esta malha de elementos finitos é composta por 309 elementos e 185 nós.

A malha de elementos finitos obtida com o algoritmo *RJump* pode ser observada na Fig.5.64. Nesta malha formaram-se 311 elementos e 186 nós.

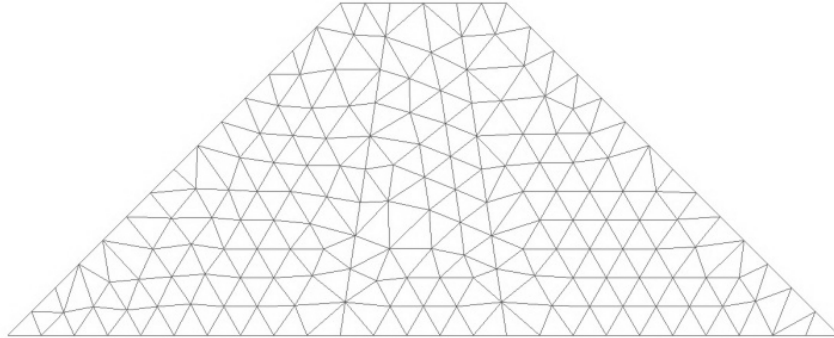


Fig.5.64 – Malha não estruturada com o algoritmo *RJump*

Através do algoritmo *RSurf* gera-se a malha de elementos finitos que se pode observar na Fig.5.65, tendo-se formados 322 elementos e 191 nós.

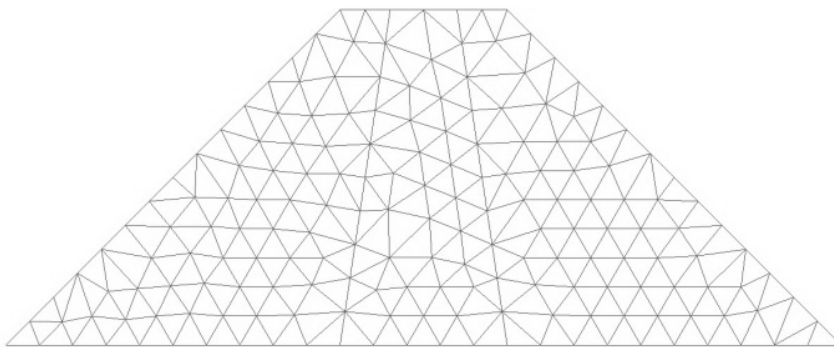


Fig.5.65 – Malha não estruturada com o algoritmo *RSurf*

O *GiD* permite ainda a concentração preferencial dos elementos em malhas não estruturadas através das opções *Mesh/Unstructured/Assign sizes on points* ou *lines*. Admitindo que no modelo A se pretende apertar a malha no pé do talude de montante resulta a discretização do domínio que se mostra na Fig.5.66.

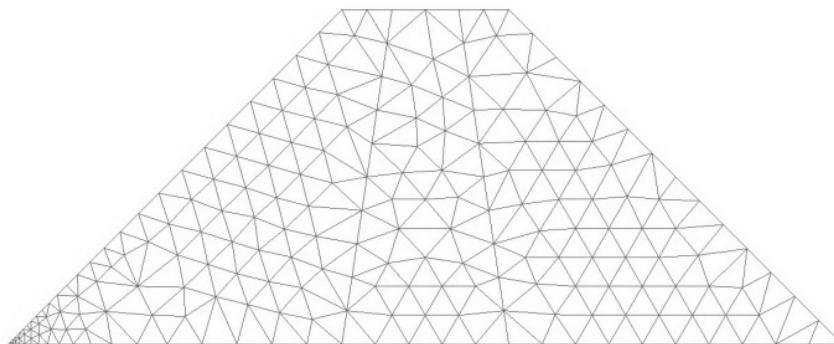


Fig.5.66 – Concentração preferencial dos elementos no ponto 1

Optando agora pelo refinamento da malha junto da interface corpo de montante-núcleo obtém-se a malha que se pode visualizar na Fig.5.67.

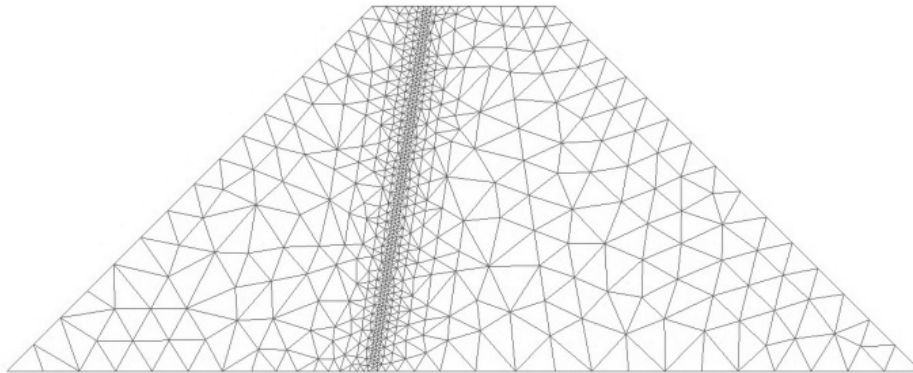


Fig.5.67 – Concentração preferencial dos elementos na linha 9

A ferramenta computacional *GiD* disponibiliza ainda a opção *Mesh Quality* que permite, com base em vários critérios, a determinação da qualidade dos elementos da malha produzida e sua respectiva localização no domínio. Os critérios de qualidade da malha poderão ser os seguintes:

- Ângulo máximo e mínimo formado pelos lados adjacentes dos elementos;
- Volume do elemento;
- Dimensão máxima e mínima dos lados dos elementos;
- Qualidade da forma dos elementos;
- Mínimo jacobiano.

Relativamente à malha que se mostrou na Fig.5.67 a qualidade dos elementos da malha de acordo com o critério do mínimo jacobiano é conforme se mostra na Fig.5.68.

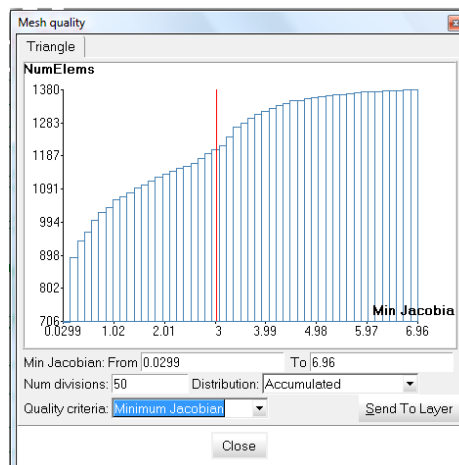


Fig.5.68 – Mínimo jacobiano para verificação da qualidade da malha

De acordo com o exposto na Fig.5.68, o mínimo jacobiano com valor menor ou igual a 3 ocorre nos elementos a vermelho que são mostrados na Fig.5.69.

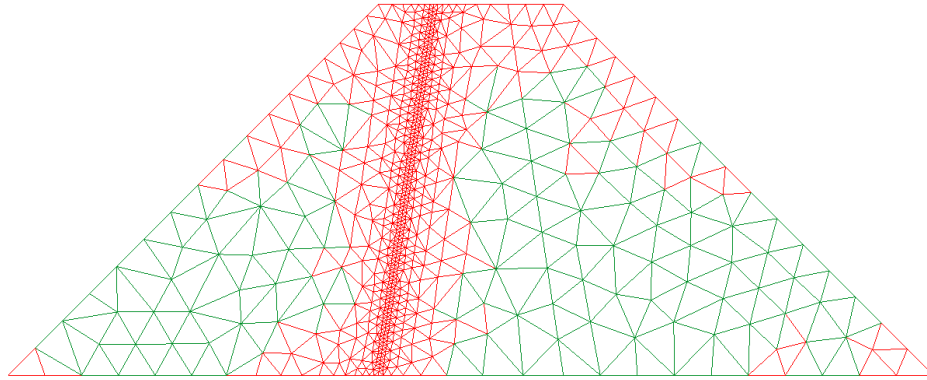


Fig.5.69 – Elementos com mínimo jacobiano menor ou igual a 3

5.4.4. PÓS-PROCESSAMENTO DE RESULTADOS

Para realizar o pós-processamento dos resultados obtidos com as malhas criadas pelos programas *Gmsh* e *GiD*, considere-se o modelo de um filtro nas condições da Fig.5.70. Admite-se que o escoamento se efectua em regime permanente e em condições saturadas.

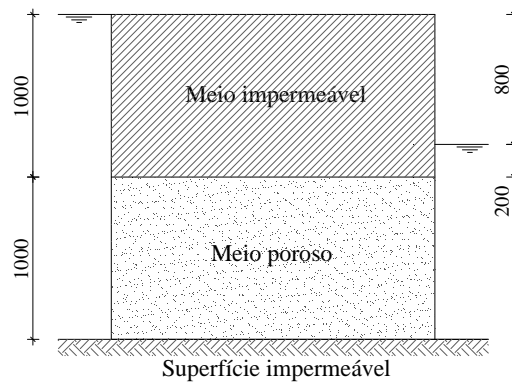


Fig.5.70 – Geometria e condições hidráulicas de um filtro (dimensões em mm)

O meio permeável que se pode observar na Fig.5.70 e que constitui o domínio do problema em análise tem um coeficiente de permeabilidade em condições saturadas igual a 10^{-5} m/s.

A discretização do domínio, efectuada através dos programas *Gmsh* e *GiD*, foi realizada com uma malha constituída por dois elementos quadriláteros de quatro nós, conforme se mostra na Fig.5.71.

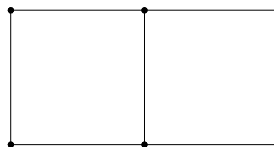


Fig.5.71 – Malha de elementos finitos do domínio do escoamento em meio poroso

O programa *Gmsh* permite efectuar a escrita dos dados em vários formatos sendo mais adequado o formato *MSH* para o cálculo computacional através do programa *Quasar*. A operação consiste em criar um *View* na opção *Plugin* que é automaticamente transferido para o módulo *Post-processing*. Efectuando *Save as/Gmsh Mesh* surge um ficheiro com as características que se apresentam na

Fig.5.72. Note-se que o texto apresentado entre parêntesis não faz parte do ficheiro gerado tendo sido adicionado apenas para dar indicações do significado de cada código numérico que consta na lista.

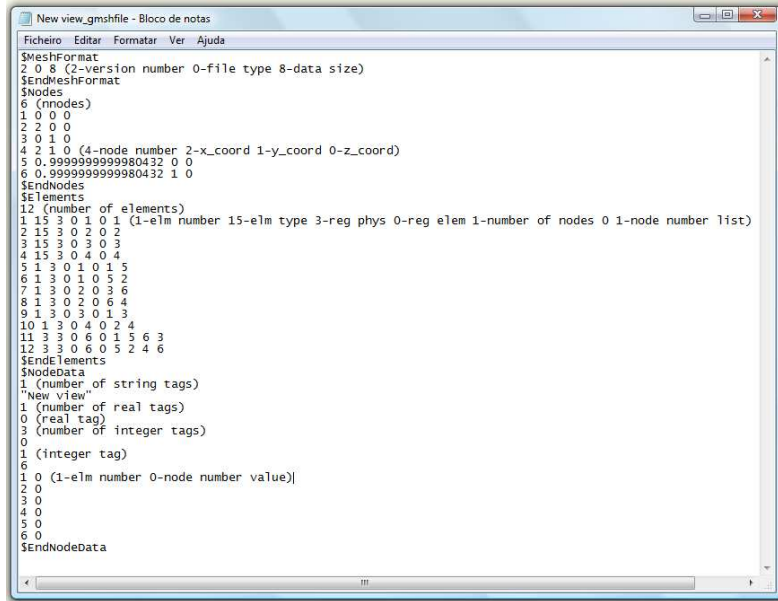


Fig.5.72 – Dados do ficheiro MSH do programa Gmsh

Observando atentamente a Fig.5.72, verifica-se que os nós 5 e 6 apresentam coordenadas de valor não inteiro segundo a direcção horizontal. Com efeito, de acordo com o mostrado na Fig.5.71, esses valores deveriam ser iguais à unidade. A existência deste erro, ainda que desprezável, pode se dever à forma como os elementos quadrangulares estruturados são gerados. Repare-se que a discretização estruturada é efectuada por defeito com elementos triangulares e a mudança para os elementos quadriláteros será provavelmente efectuada à custa da transformação de coordenadas triangulares, tal como as mostradas no ponto 5.2.10.5, para o sistema de coordenadas cartesianas.

Por outro lado, no programa GiD, os ficheiros para pós-processamento podem ser obtidos através das opções disponíveis em *File/Export*. A opção *Calculation File* gera uma base de dados pronta a ser interpretada pelo programa Ansys.

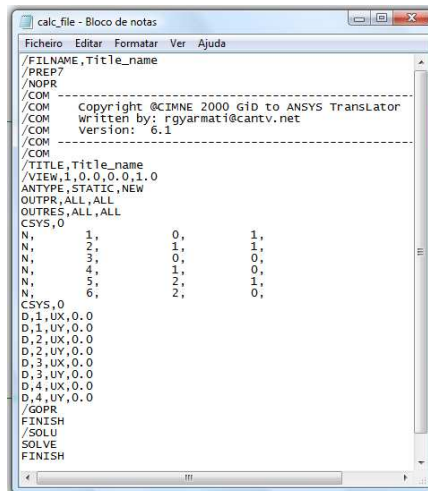


Fig.5.73 – Dados do ficheiro de cálculo do programa GiD

Refira-se que as opções *Text data report* e *GiD Mesh* geram também bases de dados viáveis à análise numérica do problema via *Quasar*.

Efectuando os acertos necessários aos ficheiros de pós-processamento gerados pelos programas *Gmsh* e *GiD*, resulta o ficheiro de entrada, que se mostra na Fig.5.75, necessário para dar início ao cálculo computacional com o programa *Quasar*.

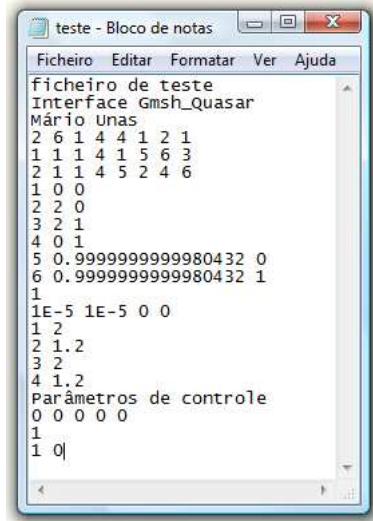


Fig.5.74 – Dados do ficheiro para o cálculo através do programa *Quasar*

Pelo exposto, mostram-se os resultados que se podem observar nas figuras seguintes:

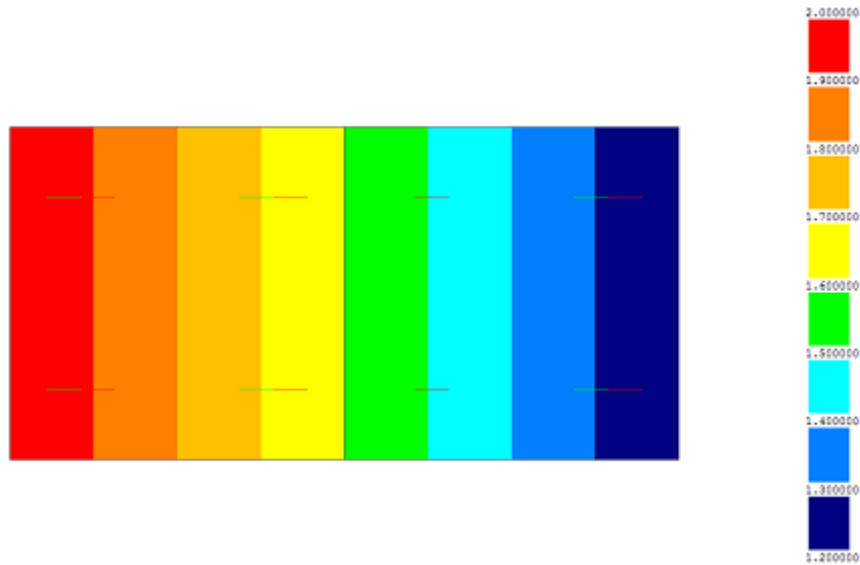


Fig.5.75 – Carga hidráulica (m)

Como se pode constatar pela Fig.5.75, a carga hidráulica nos extremos de montante e de jusante do escoamento está em concordância com as condições de fronteira que se podem visualizar na Fig.5.70.

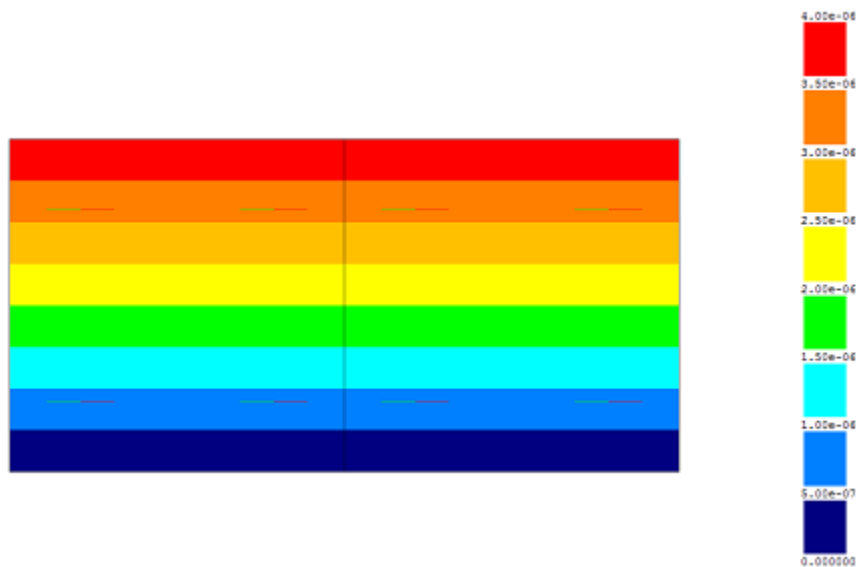


Fig.5.76 – Tubos de fluxo

Por consulta do ficheiro de resultados do programa *Quasar* observa-se que o caudal que passa pelo filtro vale $4.0E-6m^3/s$. Para confirmar o valor do caudal obtido vai-se recorrer à expressão da lei de Darcy previamente deduzida no ponto 2.4.4.

$$Q = k \cdot i \cdot S = k \cdot \frac{\Delta H}{l} \cdot S = 1 \times 10^{-5} \cdot \frac{0.8}{2} \cdot 1 \times 1 = 4.0 \times 10^{-6} m^3/s \quad c.q.d.$$

5.5. MODELOS NUMÉRICOS

5.5.1. FUNÇÃO DE CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA

A capacidade que um solo tem de conduzir a água em condições saturadas e não saturadas é traduzida pela função de condutividade hidráulica. Num solo saturado, todos os espaços vazios entre partículas sólidas estão preenchidos por água. Quando o valor de entrada de ar é excedido este vai preenchendo os poros de tal forma que os transforma em meios não condutores de água, aumentando a tortuosidade das linhas de corrente. Neste contexto, o solo perde capacidade para transportar a água, sendo que à medida que as pressões negativas aumentam em termos absolutos, mais poros vão ficando preenchidos e a condutividade hidráulica diminui. Assim, em problemas compostos por regiões saturadas e não saturadas, será necessário especificar funções de condutividade para todos os materiais. Esta medida afigura-se adequada pois, mesmo que a função seja construída por valores aproximados, o cálculo automático produzirá resultados numéricos mais realistas do que nos casos em que tal função seja omissa. Note-se também que, assumir a independência da condutividade hidráulica relativamente às pressões negativas da água nos poros, ou seja considerar uma função de condutividade hidráulica constante, conduz igualmente a resultados irrealistas pois desse modo admite-se que o escoamento se processa da mesma forma, tanto em condições saturadas como não saturadas. A este respeito, M. Unas *et al.* (2010) concluíram que considerar uma função de condutividade constante não tem influência significativa na avaliação da segurança estrutural utilizando métodos de equilíbrio limite

convencionais, mas conduz a resultados numéricos que sobrestimam o valor do caudal percolado em meios porosos.

John Krahn (2004) refere que uma função de condutividade hidráulica para solos granulares deverá ser bastante sinuosa de modo que esta represente a perda acentuada da condutividade deste material à medida que o grau de saturação diminui. No entanto deve-se evitar a verticalidade desta função para que não ocorram problemas de convergência no cálculo computacional.

A ferramenta computacional *Phase²* disponibiliza cinco métodos para definir a função de condutividade hidráulica, nomeadamente:

- Método *Simple*;
- Método de *Brooks e Corey*;
- Método de *Fredlund e Xing*;
- Método de *van Genuchten*;
- Método de *Gardner*.

O método *Simple* considera a condutividade hidráulica constante, tanto em condições saturadas como não saturadas, sendo portanto uma função apropriada para escoamentos confinados.

O método de *Gardner* é particularmente indicado para solos residuais do granito, pelo que, para o caso em apreço, não será utilizado.

A função de condutividade proposta pelo método de *Brooks e Corey* é de acordo com a equação 5.94.

$$k = k_s \cdot \left(\frac{\varphi}{\varphi_b} \right)^{-2\lambda-3} \quad (5.94)$$

sendo \mathbf{k} (m/s) o coeficiente de permeabilidade, \mathbf{k}_s (m/s) o coeficiente de permeabilidade em condições saturadas, φ (MPa) a pressão de teste, φ_b (MPa) a pressão gerada pelas bolhas de ar e λ o índice de dimensão dos poros.

O método de *Fredlund e Xing* propõe a determinação da permeabilidade através da expressão que se apresenta em seguida.

$$k = k_s \cdot \frac{1}{\left\{ \ln \left[e + \left(\frac{\varphi}{A} \right)^B \right] \right\}^C} \quad (5.95)$$

sendo, \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} parâmetros adimensionais em função do tipo de solo. De acordo com J. Krahn (2004) o parâmetro \mathbf{A} corresponde ao valor aproximado da entrada de ar no solo, o parâmetro \mathbf{B} controla a inclinação no ponto de inflexão da função do teor em água e o parâmetro \mathbf{C} está relacionado com o teor em água residual.

O método de *van Genuchten*, aparentemente mais arrojado, propõe a estimativa da permeabilidade através da função que se pode observar na equação 5.96.

$$k = k_S \cdot \left\{ \sqrt{S_e} \cdot \left[1 - \left(1 - S_e^{1/m} \right)^m \right]^2 \right\} \quad (5.96)$$

sendo, S_e o grau de saturação e m um parâmetro adimensional. De acordo com a mesma técnica, o grau de saturação pode ser determinado através da equação 5.97.

$$S_e = \frac{1}{\left[1 + (\alpha \cdot h)^n \right]^m} \quad (5.97)$$

em que α (m^{-1}) e m são parâmetros que dependem do tipo de solo, h (m) é a cota piezométrica.

A menos de pequenos ajustes nos diversos modelos numéricos ao coeficiente de permeabilidade em condições saturadas, a função de condutividade hidráulica do solo A utilizada no âmbito da modelação numérica dos problemas de percolação em modelo reduzido, será conforme se ilustra na Fig.5.77.

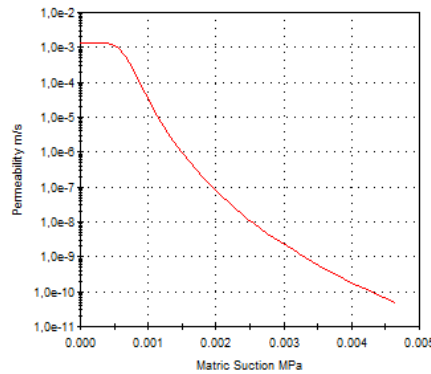


Fig.5.77 – Função de condutividade hidráulica do solo A (Phase²)

As funções de condutividade hidráulica mostradas nas Fig.5.77 e Fig.5.78 estão de acordo com o método de *van Genuchten*. Relativamente aos parâmetros da função, α é igual a 14.5, n é igual a 8 e m é igual a 0.875. De acordo com os dados publicados por T. Vogel *et al.* (2001) e que constam nos parâmetros de *van Genuchten* disponibilizados pelo programa Phase², os valores tomados para α e n são próprios de materiais granulares.

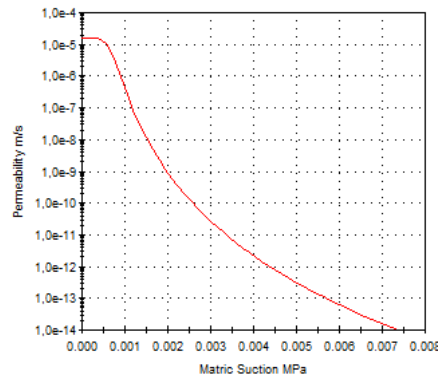


Fig.5.78 – Função de condutividade hidráulica do solo B (Phase²)

5.5.2. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO HORIZONTAL

Considere-se a origem das coordenadas no canto inferior esquerdo relativo à parede frontal do tanque de percolação.

Observando atentamente a Fig.4.8 verifica-se que, as linhas equipotenciais de valor máximo e mínimo coincidem com os paramentos de montante e de jusante tomando os valores de 0.4m e 0.04m, respectivamente. O modelo numérico da barragem homogénea com dreno horizontal é mostrado na Fig.5.79.

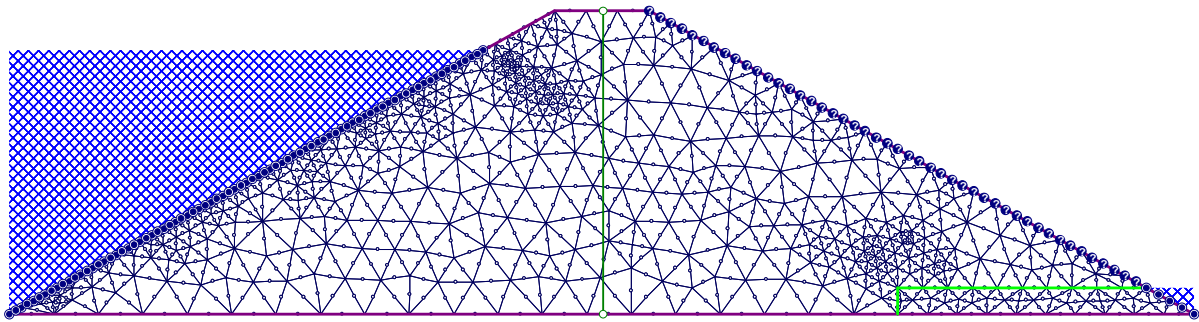


Fig.5.79 – Modelo numérico da barragem homogénea com dreno horizontal (Phase²)

Como se pode observar pelo modelo ilustrado na figura anterior, procurou-se que a discretização fosse mais refinada nas regiões onde a posição das linhas de corrente varie de forma mais nítida e também junto do dreno horizontal onde os gradientes hidráulicos serão superiores. A malha é constituída por 798 elementos triangulares de ordem polinomial dois, totalizando 1701 nós. A malha apresentada pode-se considerar aceitável pois, apenas 0.8% dos elementos têm má qualidade.

Através da Fig.5.80 pode-se confirmar que, no processo de discretização do domínio houve o cuidado de fazer coincidir o nível da superfície livre de montante com um nó de canto.

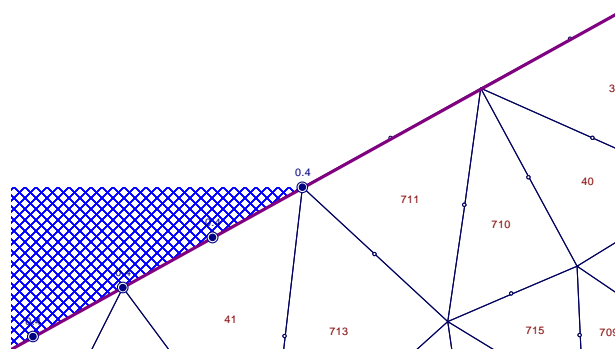


Fig.5.80 – Detalhe do encontro da superfície livre da água com o paramento de montante (Phase²)

Como a posição do nível freático é inicialmente desconhecida, em todos os nós do paramento de jusante, exceptuando aqueles cuja carga hidráulica é conhecida, neles será indexado o fluxo nulo com revisão iterativa. Tal como na situação de montante, o nível da superfície livre de jusante coincide com um nó de canto.

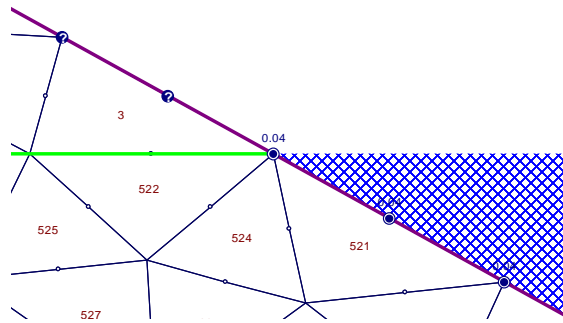


Fig.5.81 – Detalhe do encontro da superfície livre da água com o paramento de jusante (Phase²)

5.5.3. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE PÉ DE TALUDE

O modelo numérico da barragem homogénea com dreno de pé de talude ilustrado na Fig.5.82 obedece à geometria e às condições de fronteira impostas que se mostraram na Fig.4.11.

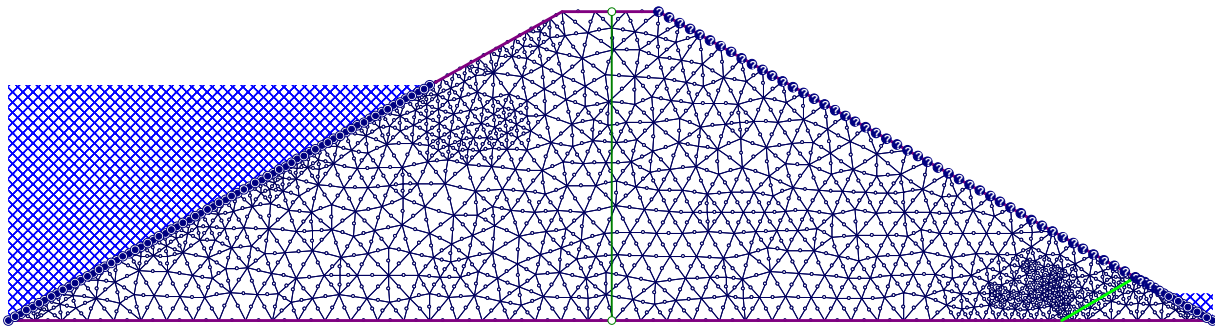


Fig.5.82 – Modelo numérico da barragem homogénea com dreno de pé de talude (Phase²)

Assim, as linhas equipotenciais de valor máximo e mínimo, que coincidem com os paramentos de montante e de jusante, tomam os valores de 0.35m e 0.04m, respectivamente.

Procurou-se também aumentar o grau de refinamento da malha nas regiões onde a posição das linhas de corrente varie mais acentuadamente e também junto do dreno de pé de talude, onde se espera que os gradientes hidráulicos sejam mais elevados do que no restante domínio. A malha é constituída por 1157 elementos triangulares de ordem polinomial dois, totalizando 2446 nós. A malha apresentada pode-se considerar aceitável pois apenas 0.6% dos elementos têm má qualidade.

A exemplo do modelo anterior, no processo de discretização do domínio houve o cuidado de fazer coincidir os níveis da superfície livre de montante e de jusante com pontos nodais de canto. Em todos os nós do paramento de jusante, exceptuando aqueles cuja carga hidráulica é conhecida, será indexado o fluxo nulo com revisão iterativa.

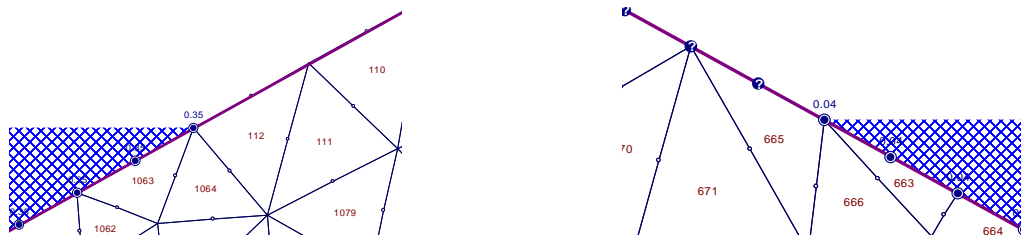


Fig.5.83 – Encontros da superfície livre da água com o paramento de montante e jusante (Phase²)

5.5.4. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE CHAMINÉ

Na Fig.5.84 mostra-se o modelo numérico da barragem homogénea com dreno de chaminé nas condições geométricas e físicas que se ilustraram na Fig.4.14.

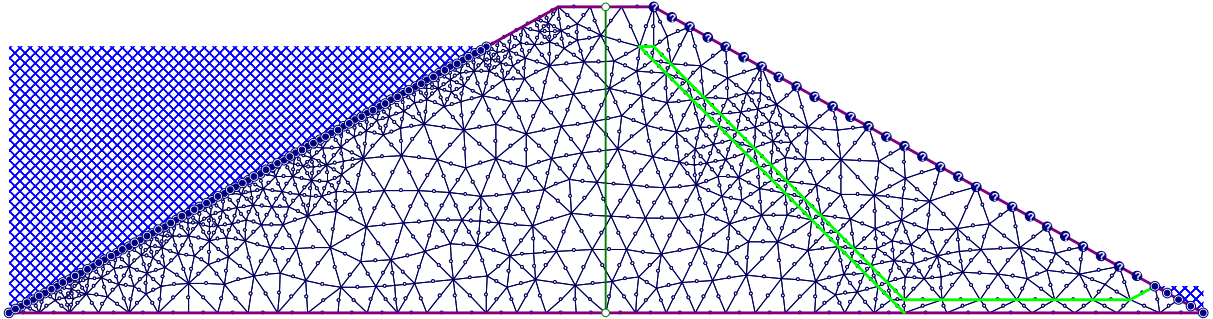


Fig.5.84 – Modelo numérico da barragem homogénea com dreno de chaminé (Phase²)

Como se pode comprovar pela figura anterior, a linha equipotencial de valor máximo coincide com o paramento de montante e vale 0.40m. Por outro lado, a linha equipotencial de valor mínimo coincide com o paramento de jusante e vale 0.04m.

A malha apresentada contém 726 elementos triangulares segunda ordem polinomial totalizando 1555 nós. Refira-se ainda que, 0.8% dos elementos têm reduzida qualidade devido sobretudo ao ângulo mínimo interior formado por arestas adjacentes dos elementos.

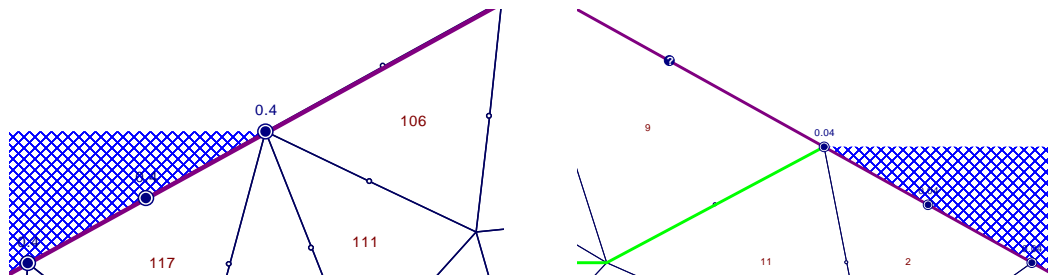


Fig.5.85 – Encontros da superfície livre da água com o paramento de montante e jusante (Phase²)

Tal como nos casos anteriores, os níveis da superfície livre da água intersectam os paramentos de montante e de jusante em nós de canto. Em todos os nós do paramento de jusante, exceptuando aqueles cuja carga hidráulica seja conhecida, será indexado o fluxo nulo com revisão iterativa.

5.5.5. BARRAGEM ZONADA

O modelo numérico da barragem zonada, em conformidade com o modelo experimental ilustrado na Fig.4.17, é mostrado na Fig.5.86. Assim, a linha equipotencial de valor máximo vale 0.45m e a linha equipotencial de valor mínimo vale 0.04m.

Facilmente se observa que o grau de refinamento da malha é substancialmente superior aos dos modelos anteriores. Tal deve-se, por um lado, ao facto de se prever a ocorrência de variações mais acentuadas da perda de carga hidráulica na região do núcleo central e, por outro lado, à necessidade de fazer coincidir o nível da superfície livre de jusante com um nó de canto. Em termos quantitativos, a malha é constituída por 2818 elementos triangulares de segunda ordem polinomial, totalizando 5919

nós. Sabe-se ainda que 0.6% dos elementos da malha apresentam qualidade deficiente. Tal é devido principalmente à amplitude do ângulo formado pelas arestas adjacentes dos elementos.

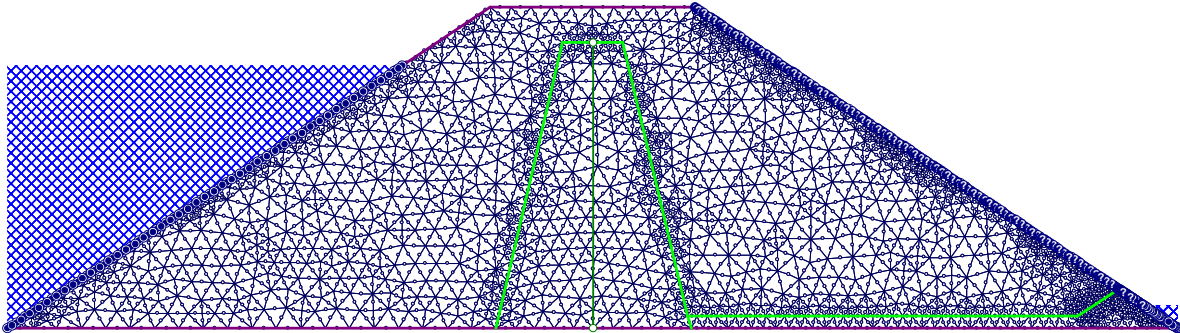


Fig.5.86 – Modelo numérico da barragem zonada (Phase²)

A exemplo dos modelos anteriores, houve a preocupação de fazer coincidir a intersecção dos níveis da superfície livre da água com os paramentos de montante e de jusante em nós de canto. Em todos os nós do paramento de jusante, exceptuando aqueles cuja carga hidráulica seja conhecida, será indexado o fluxo nulo com revisão iterativa.

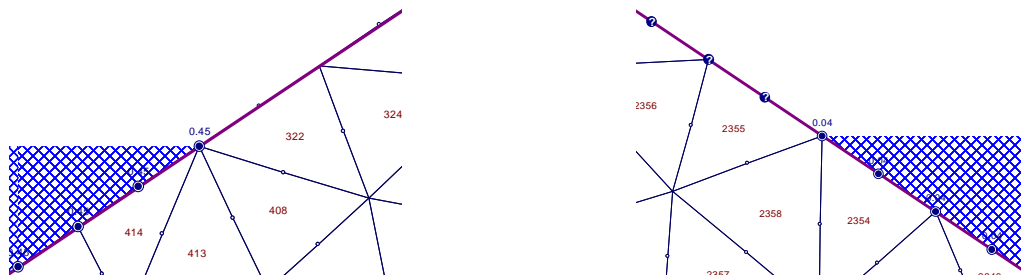


Fig.5.87 – Encontros da superfície livre da água com o paramento de montante e jusante (Phase²)

6

ANÁLISE DE RESULTADOS

6.1. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO HORIZONTAL

6.1.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS, NUMÉRICOS E GRÁFICOS

Depois de estabelecido o escoamento em regime permanente determinou-se o caudal percolado, mediu-se a carga hidráulica instalada nos diversos pontos disponíveis do domínio e efectuou-se a visualização das linhas de fluxo associadas à linha de saturação e ao nível da carga hidráulica média.

Na figura seguinte é possível observar que o trajecto do produto corante permite, conforme se esperava, perceber a forma que o escoamento toma no interior do modelo.



Fig.6.1 – Trajectória do produto corante no meio poroso

Observando atentamente a Fig.6.1 percebe-se que à medida que o corante é introduzido no sistema este dispersa-se de tal modo que a visualização das linhas de fluxo torna-se menos nítida. Repare-se que a representação do fluxo através de linhas de corrente parte do pressuposto que o escoamento é laminar, no entanto, para meios porosos a trajectória realizada pelas partículas de água ao longo dos canalículos produzidos pela porosidade do solo é bastante sinuosa dando origem a regiões coloridas em vez de linhas coloridas como seria desejável.

O escoamento no interior do modelo tem início na superfície equipotencial de maior energia e termina na superfície equipotencial com menor energia. Por efeito da maior condutividade hidráulica do

material que constitui o dreno, a linha de saturação desenvolve-se mais para montante evitando-se assim o fenómeno indesejável de ressurgência da água no paramento de jusante.

Com o auxílio de um recipiente graduado e de um cronómetro foi possível calcular o caudal percolado pelo corpo da barragem. As medições efectuadas podem ser consultadas no Quadro 6.1.

Quadro 6.1 – Medição experimental do caudal percolado

V [L]	t [s]	ΔV [L]	Δt [s]	Q [L/s]	Q [L/h]
1	27	1	27	0.0370	133.3
2	59	1	32	0.0313	112.5
3	89	1	30	0.0333	120.0
4	119	1	30	0.0333	120.0
5	149	1	30	0.0333	120.0
6	179	1	30	0.0333	120.0
7	209	1	30	0.0333	120.0
8	239	1	30	0.0333	120.0
9	269	1	30	0.0333	120.0
10	300	1	31	0.0323	116.1

O caudal médio medido experimentalmente que atravessa o corpo da barragem é igual a 120.2 l/h. Com este valor será agora possível realizar o acerto por tentativas do coeficiente de permeabilidade do solo granular para as condições de compactação, de geometria e de temperatura da água do modelo experimental.

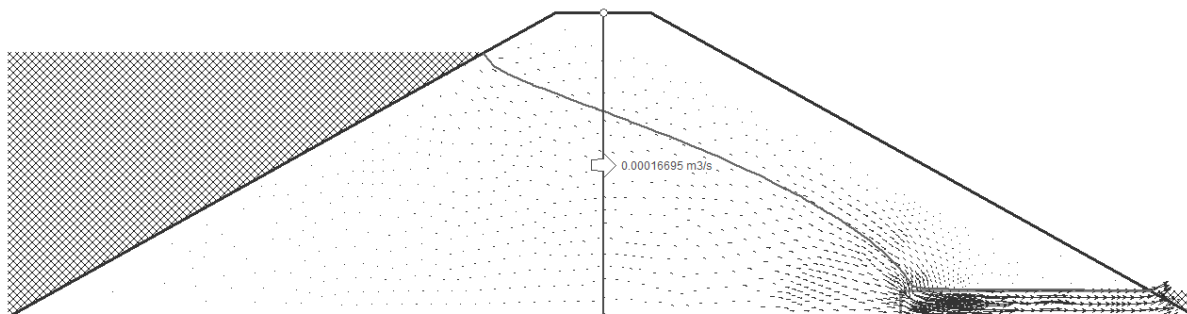


Fig.6.2 – Caudal percolado pelo corpo da barragem. Posição do nível freático (Phase²)

Conforme se mostra na Fig.6.2 garantiu-se que a secção de controlo intersecta apenas o material interessado. Deste modo resulta uma condutividade hidráulica aproximadamente igual a $1,34 \times 10^{-3}$ m/s. O coeficiente de permeabilidade do material que constitui o dreno foi acertado de modo que a linha de saturação tome a forma que se pode perceber na Fig.6.1. Com efeito, só quando se indexa uma condutividade hidráulica de 1m/s ao material do dreno é que se consegue garantir que o escoamento não se desenvolve por cima do material drenante.

Na Fig.6.3 e na Fig.6.4 mostram-se os resultados da carga hidráulica obtidos pela via numérica e experimental, respectivamente. Para além da proximidade entre os valores obtidos pelos dois métodos, é também possível verificar uma boa correspondência entre a posição do nível freático obtido pela via numérica e a relativa ao ensaio experimental.

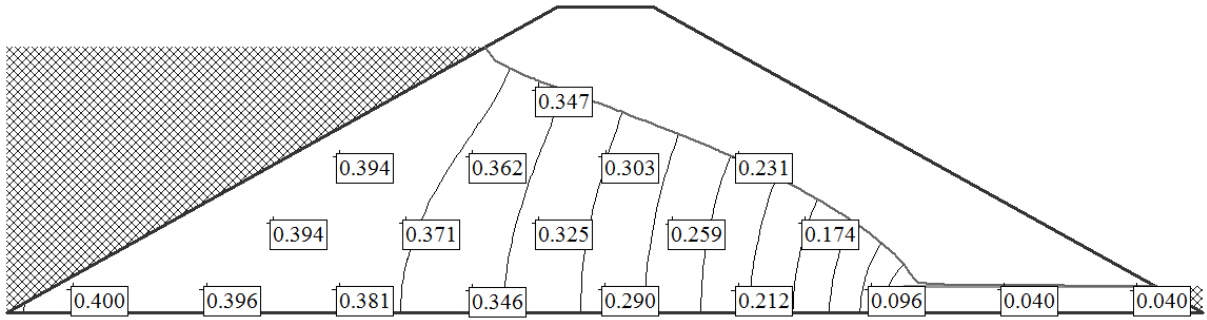


Fig.6.3 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Phase²)

Quadro 6.2 – Comparação dos resultados da carga hidráulica

Ponto	Coordenadas		Carga hidráulica		Desvio [mm]	Erro rel. [%]
	x [mm]	y [mm]	Exp. [m]	Num. [m]		
1	100	35	0.399	0.400	1.0	0.25
2	300	35	0.391	0.396	5.0	1.28
3	500	35	0.376	0.381	5.0	1.33
4	700	35	0.342	0.346	4.0	1.17
5	900	35	0.288	0.290	2.0	0.69
6	1100	35	0.213	0.212	1.0	0.47
7	1300	35	0.095	0.096	1.0	1.05
8	1500	35	0.040	0.040	0.0	0.00
9	1700	35	0.040	0.040	0.0	0.00
10	400	135	0.392	0.394	2.0	0.51
11	600	135	0.371	0.371	0.0	0.00
12	800	135	0.322	0.325	3.0	0.93
13	1000	135	0.261	0.259	2.0	0.77
14	1200	135	0.180	0.174	6.0	3.33
15	500	235	0.392	0.394	2.0	0.51
16	700	235	0.359	0.362	3.0	0.84
17	900	235	0.297	0.303	6.0	2.02
18	1100	235	0.240	0.231	9.0	3.75
19	800	335	0.343	0.347	4.0	1.17

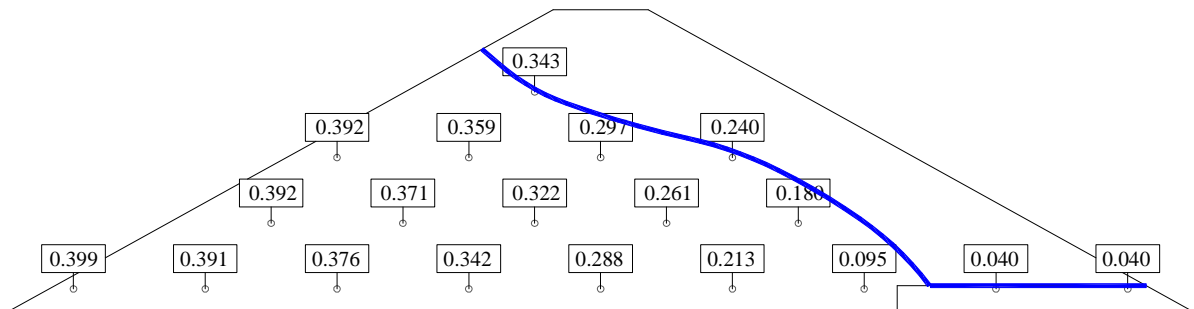


Fig.6.4 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Ensaio experimentais)

Através dos valores mostrados no Quadro 6.2 verifica-se que o desvio máximo nos resultados é de 5mm sendo o valor médio igual a 2.95mm. Constata-se também que o erro médio entre a solução experimental e a numérica é de 1.06%.

Através do exposto na Fig.2.30 é possível efectuar uma estimativa gráfica da posição do nível freático de acordo com o ilustrado na Fig.6.5.

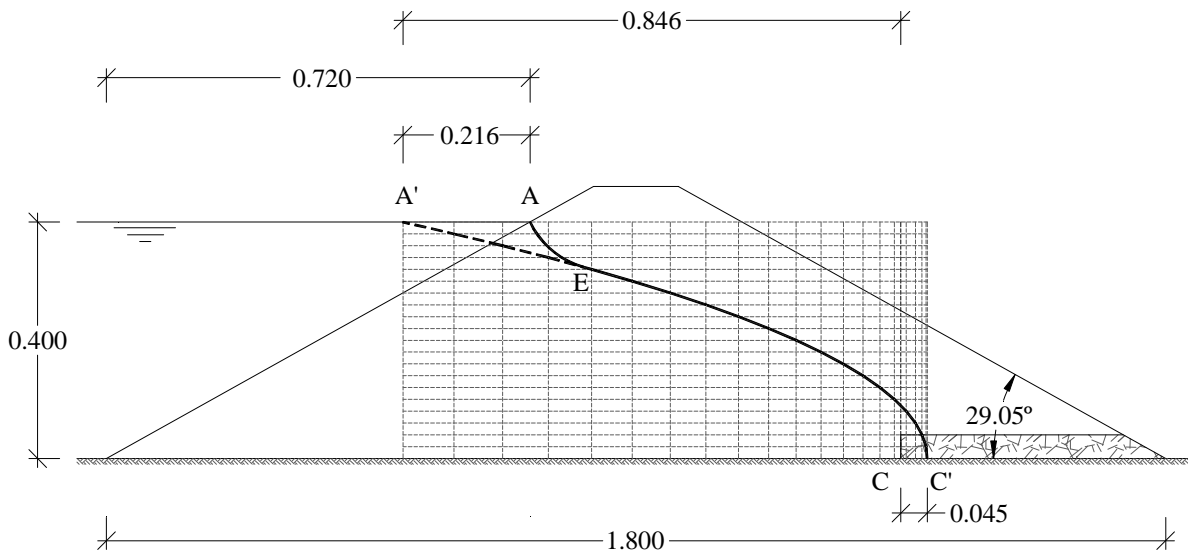


Fig.6.5 – Traçado gráfico do nível freático do modelo da barragem homogênea com dreno horizontal

A Fig.6.6 mostra a posição do nível freático obtida através das soluções: experimental, numérica e gráfica.

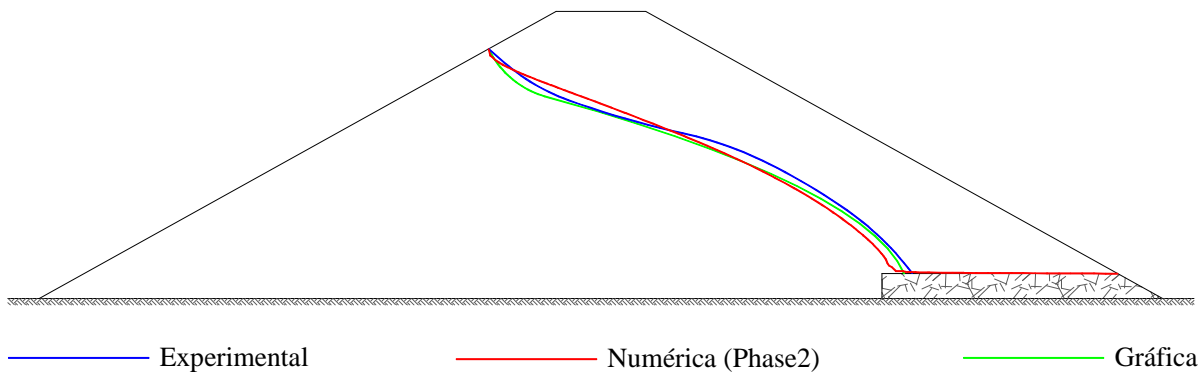


Fig.6.6 – Solução experimental, numérica e gráfica para a posição da linha de saturação

Como se percebe pela figura anterior, as posições do nível freático conseguidas pelas vias numérica e gráfica aproximam-se de forma bastante razoável à solução experimental. Neste contexto, não se pode deixar de comentar o facto da solução gráfica atingir resultados plenamente satisfatórios com muito menos recursos computacionais.

Tendo em consideração os métodos preconizados no ponto 5.5.1, para a formulação de funções de condutividade hidráulica e para a malha de elementos finitos apresentada no ponto 5.5.2, surgem os resultados que se mostram na Fig.6.7.

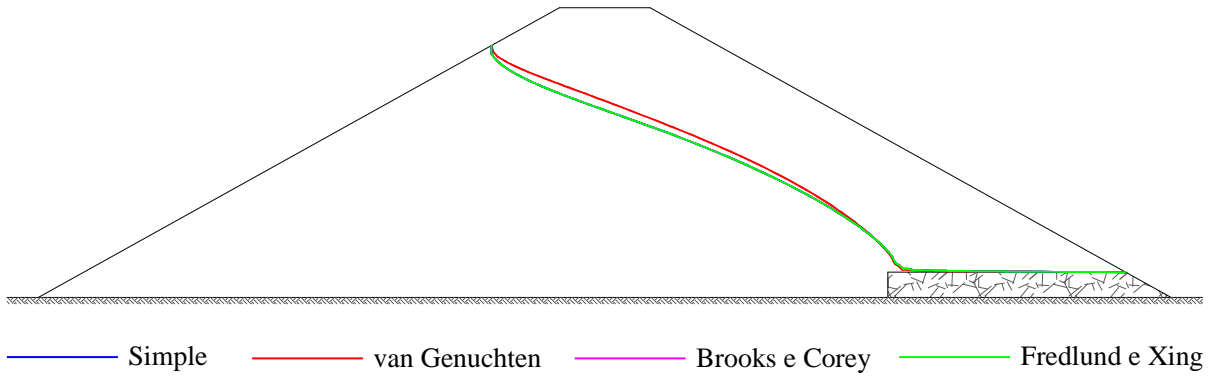


Fig.6.7 – Posição da linha de saturação em função da condutividade hidráulica (Phase²)

Do exposto na Fig.6.7 verifica-se que, a posição do nível freático é igual quando se utilizam as funções de condutividade hidráulica de *Brooks e Corey*, *Fredlund e Xing* e *Simple*. Nestes três métodos, o caudal percolado devolvido vale 144.2L/h, ou seja, nestes casos sobrestima-se a água que passa pelo meio poroso em cerca de 20%.

6.1.2. EFEITO DO COMPRIMENTO DO DRENO

Na avaliação do efeito do comprimento do dreno em termos da sua capacidade de vazão e da posição do nível freático da barragem homogénea com dreno horizontal, indexou-se aos modelos a função de condutividade hidráulica de *van Genuchten* com um coeficiente de permeabilidade em condições saturadas de $1.34 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ e mantiveram-se constantes as condições de fronteira discutidas no ponto 5.5.2, assim como, a geometria exterior dos modelos.

O valor de caudal percolado em função do comprimento do dreno horizontal, **L**, obtido por análise numérica, pode ser consultado no Quadro 6.3.

Quadro 6.3 – Capacidade de vazão do dreno em função do seu comprimento

L [mm]	Q [m ³ /s]	Q [l/h]
900	3.45E-04	248.4
450	1.67E-04	120.2
225	1.28E-04	91.8

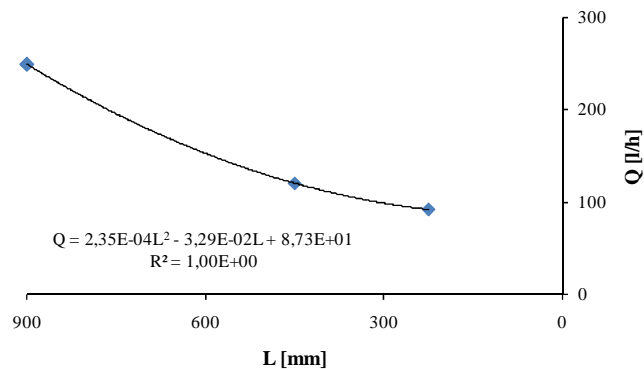


Fig.6.8 – Evolução da capacidade de vazão do dreno em função do seu comprimento

Como se pode verificar pela Fig.6.8, a capacidade de vazão do dreno diminui de forma não linear à medida que o seu comprimento diminui. Conjugando a informação prestada no Quadro 6.3 com a posição do nível freático em função do comprimento do dreno horizontal ilustrada na Fig.6.9, percebe-se que a diminuição do caudal percolado é acompanhada pela migração do escoamento para a região próxima do paramento de jusante. O facto do escoamento se prolongar mais para jusante à medida que o comprimento do dreno diminui faz com que as partículas de água tenham de efectuar um percurso maior através do meio poroso donde, pela lei de Darcy, para a mesma diferença de carga hidráulica total, os gradientes hidráulicos e consequentemente os caudais percolados vão sendo sucessivamente menores.

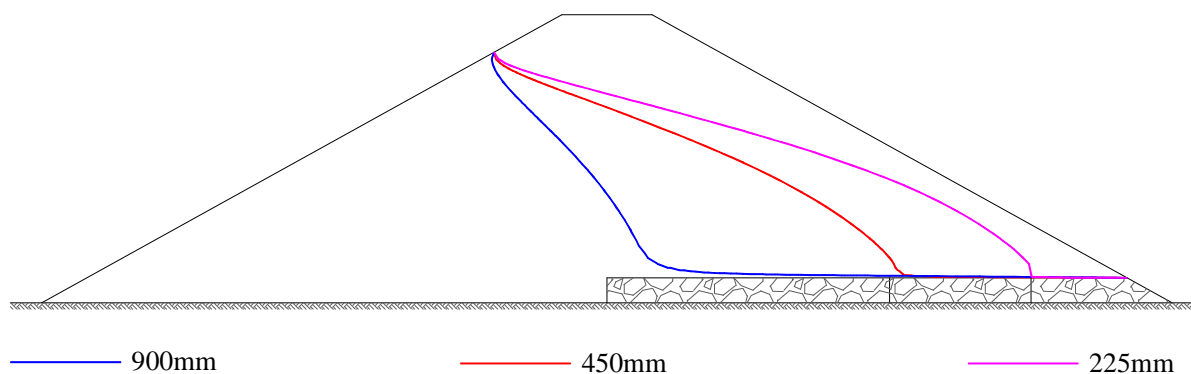


Fig.6.9 – Evolução da posição do nível freático em função do comprimento do dreno horizontal

Repare-se ainda pela Fig.6.9 que a variação do caudal percolado ilustrada na Fig.6.8 parece ser induzida pelo aumento não linear das trajetórias das linhas de fluxo na região constituída pelo solo granular.

Em última análise conclui-se que há uma clara perda de eficiência do dreno horizontal com a diminuição do seu comprimento, pois a sua capacidade de vazão diminui e por isso o escoamento estabelece-se no corpo de jusante, situação altamente indesejável pela transformação do peso volúmico do solo em peso volúmico submerso e também se aproxima perigosamente do paramento de jusante. No limite poderão ocorrer situações de ressurgência da água no paramento de jusante que geralmente são responsáveis por fenómenos de erosão interna.

6.1.3. EFEITO DA ESPESSURA DO DRENO

Na avaliação do efeito da espessura do dreno horizontal quanto à variação da sua capacidade de vazão e da posição do nível freático da barragem homogénea com dreno horizontal, associou-se aos modelos previstos a função de condutividade hidráulica de *van Genuchten* com um coeficiente de permeabilidade em condições saturadas de 1.34×10^{-3} m/s e mantiveram-se constantes as condições de fronteira, assim como, a geometria exterior dos modelos.

O valor de caudal percolado em função da espessura do dreno horizontal, e , obtido por análise numérica, pode ser consultado no Quadro 6.4. Desde já se pode constatar que em termos da capacidade de vazão do dreno, apesar de se registar uma certa diminuição com a diminuição da sua espessura, não se verificam alterações tão significativas como as observadas no ponto 6.1.2.

Quadro 6.4 – Capacidade de vazão do dreno em função da sua espessura

e [mm]	Q [m ³ /s]	Q [l/h]
40	1.67E-04	120.2
20	1.64E-04	117.8
10	1.61E-04	116.0

Como se pode observar na Fig.6.10, tal como no caso anterior, constata-se que a variação da capacidade de vazão do meio varia de forma não linear com a diminuição da espessura do dreno horizontal.

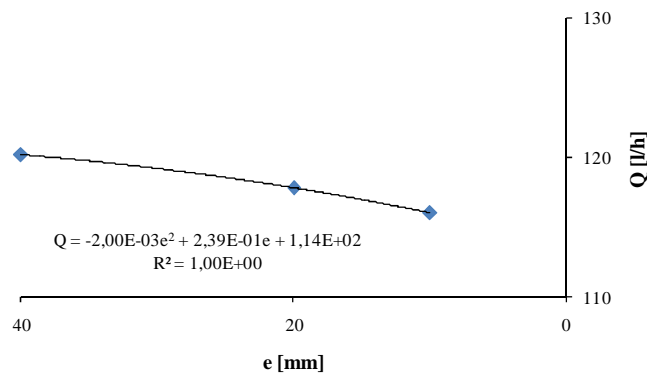


Fig.6.10 – Evolução da capacidade de vazão do dreno em função da sua espessura

Na Fig.6.11 é ilustrada a posição do nível freático em função da espessura do dreno horizontal. Como se pode constatar, à medida que se caminha mais para jusante as diferenças posicionais segundo a direcção vertical dos níveis freáticos vão sendo mais acentuadas.

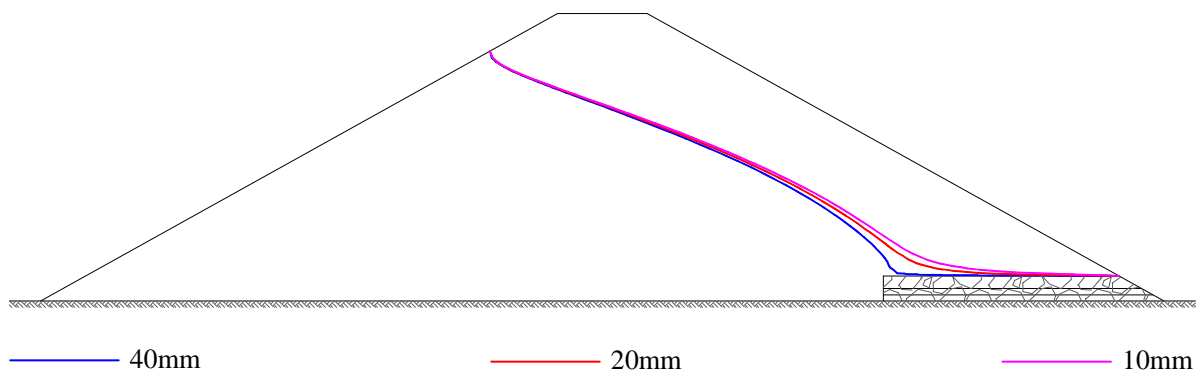


Fig.6.11 – Evolução da posição do nível freático em função da espessura do dreno horizontal

A perda de capacidade de vazão do dreno horizontal causada pela diminuição da espessura e consequentemente da sua secção, poderá ser responsável pela subida do nível freático junto deste órgão de drenagem.

6.2. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE PÉ DE TALUDE

6.2.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS, NUMÉRICOS E GRÁFICOS

Depois de proceder ao enchimento do tanque de percolação nas condições evidenciadas no ponto 4.5.3, fez-se um período de espera até que se estabelecesse o escoamento em regime permanente. Após este passo determinou-se o caudal percolado, mediu-se a carga hidráulica instalada nos diversos pontos disponíveis do domínio e efectuou-se a visualização das linhas de fluxo associadas à linha de saturação e ao nível da carga hidráulica média.

Na Fig.6.12 é possível observar com clareza a posição aproximada do nível freático ao longo do domínio poroso.

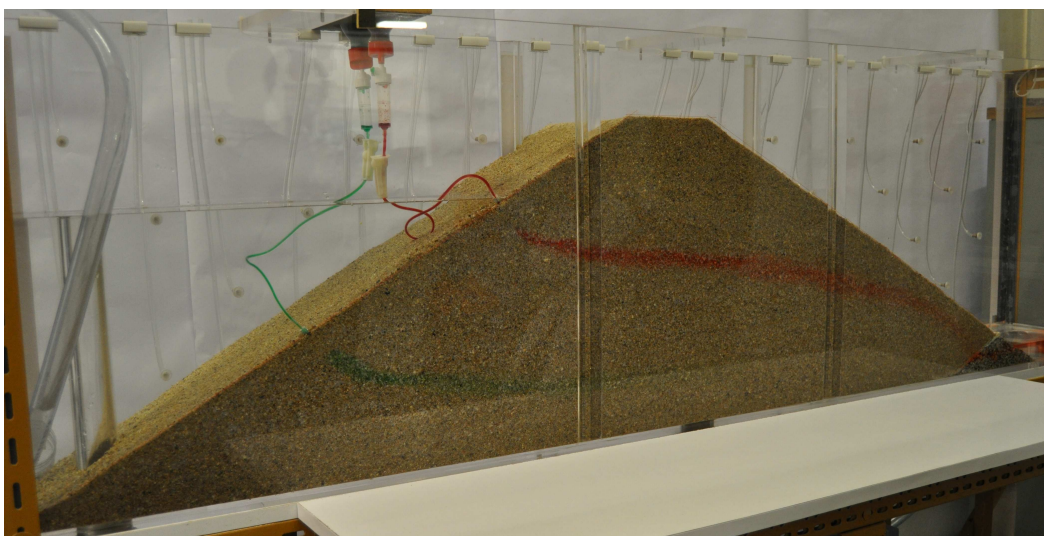


Fig.6.12 – Trajectória do produto corante ao longo do escoamento

Conforme já se esperava, por efeito do material drenante se concentrar junto do extremo de jusante do modelo, o escoamento aproxima-se de forma preocupante do paramento de jusante da barragem.

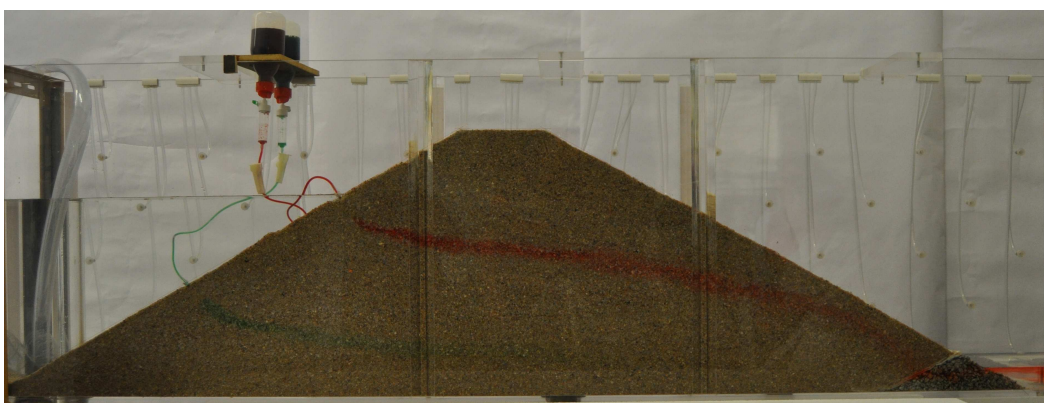


Fig.6.13 – Trajectória do produto corante ao longo do escoamento

Outro aspecto interessante relaciona-se com as condições de saída do escoamento. Tendo em consideração o discutido no ponto 2.5.5, verifica-se que escoamento através do material drenante se efectua como se a superfície livre da água se prolongasse ao paramento de montante do dreno de pé de

talude. Tal como já se afirmou, não será adequado considerar que a linha equipotencial de valor mínimo coincida com esta zona de interface. Repare-se na Fig.6.14 que a carga hidráulica associada ao nível freático assume um valor superior ao mínimo imediatamente a montante da sua intersecção com a interface do dreno de pé de talude com o corpo de jusante da barragem, donde, qualquer ponto dessa interface abaixo desse ponto de intersecção estará sujeito a uma carga hidráulica superior.



Fig.6.14 – Condição de saída do escoamento no meio poroso

Conforme se mostra no Quadro 6.5, verificou-se experimentalmente que o caudal percolado médio é igual a 65.9l/h.

Quadro 6.5 – Medição experimental do caudal percolado

V [L]	t [s]	ΔV [L]	Δt [s]	Q [L/s]	Q [L/h]
1	53	1	53	0.0189	67.9
2	109	1	56	0.0179	64.3
3	161	1	52	0.0192	69.2
4	217	1	56	0.0179	64.3
5	268	1	51	0.0196	70.6
6	332	1	64	0.0156	56.3
7	385	1	53	0.0189	67.9
8	437	1	52	0.0192	69.2
9	490	1	53	0.0189	67.9
10	549	1	59	0.0169	61.0

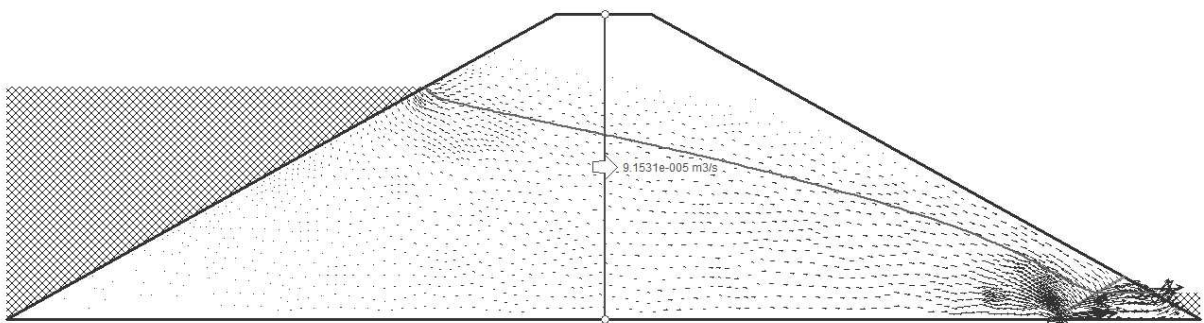


Fig.6.15 – Caudal percolado pelo corpo da barragem. Posição do nível freático (Phase²)

Com base no valor do caudal médio experimental, foi possível determinar por tentativas que o coeficiente de permeabilidade do solo granular, para as condições de compactação, de geometria e de temperatura da água do modelo experimental vale aproximadamente $1.32 \times 10^{-3} \text{ m/s}$.

Na Fig.6.16 e na Fig.6.17 mostram-se os resultados da carga hidráulica obtidos pela via numérica e experimental, respectivamente.

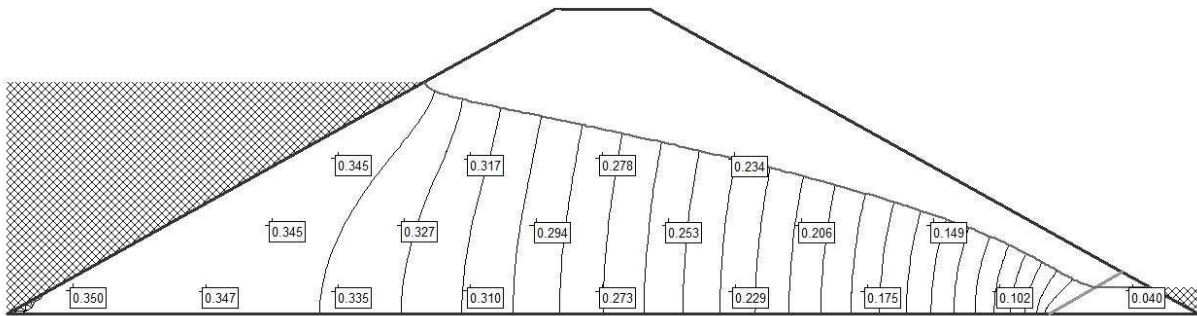


Fig.6.16 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação. Posição do nível freático (Phase²)

Verifica-se uma proximidade razoável dos valores da carga hidráulica obtidos pelas duas vias. Observa-se também uma correspondência satisfatória das posições do nível freático.

Quadro 6.6 – Comparação dos resultados da carga hidráulica

Ponto	Coordenadas		Carga hidráulica		Desvio [mm]	Erro rel. [%]
	x [mm]	y [mm]	Exp. [m]	Num. [m]		
1	100	35	0.350	0.350	0.0	0.00
2	300	35	0.346	0.347	1.0	0.29
3	500	35	0.342	0.335	7.0	2.05
4	700	35	0.313	0.310	3.0	0.96
5	900	35	0.278	0.273	5.0	1.80
6	1100	35	0.238	0.229	9.0	3.78
7	1300	35	0.197	0.175	22.0	11.17
8	1500	35	0.117	0.102	15.0	12.82
9	1700	35	0.040	0.040	0.0	0.00
10	400	135	0.344	0.345	1.0	0.29
11	600	135	0.326	0.327	1.0	0.31
12	800	135	0.300	0.294	6.0	2.00
13	1000	135	0.265	0.253	12.0	4.53
14	1200	135	0.223	0.206	17.0	7.62
15	1400	135	0.178	0.149	29.0	16.29
16	500	235	0.347	0.345	2.0	0.58
17	700	235	0.315	0.317	2.0	0.63
18	900	235	0.282	0.278	4.0	1.42
19	1100	235	0.251	0.234	17.0	6.77

Através do Quadro 6.6, é possível reparar em algumas discrepâncias nos resultados da carga hidráulica obtidos para os pontos 7, 8 e 15 da grelha do tanque de percolação.

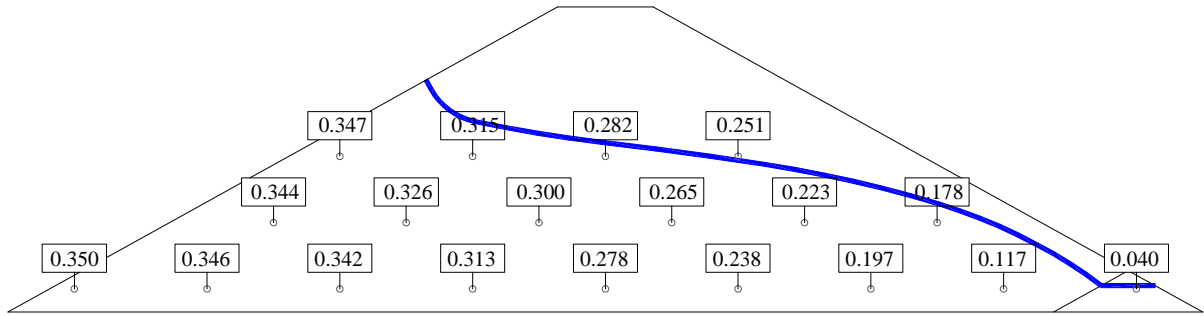


Fig.6.17 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Ensaio experimentais)

Note-se que, estes pontos situam-se junto do paramento de jusante do modelo. Observando atentamente a Fig.6.18 é possível reparar que, junto da parede onde os piezómetros de leitura da carga hidráulica estão instalados ocorreu o fenómeno de ressurgência da água. Tal significa que o nível freático intersectou o paramento de jusante e portanto os valores da carga hidráulica medidos experimentalmente serão forçosamente superiores. A ocorrência deste facto deve-se provavelmente ao deficiente nivelamento do paramento de jusante na fase de concepção do modelo experimental.



Fig.6.18 – Fenómeno de ressurgência da água no paramento de jusante

Através dos valores mostrados no Quadro 6.6 verifica-se que, o desvio máximo nos resultados é de 29mm sendo o valor médio igual a 8.10mm. Consta-se também que, o erro médio entre a solução experimental e a numérica é de 3.9%.

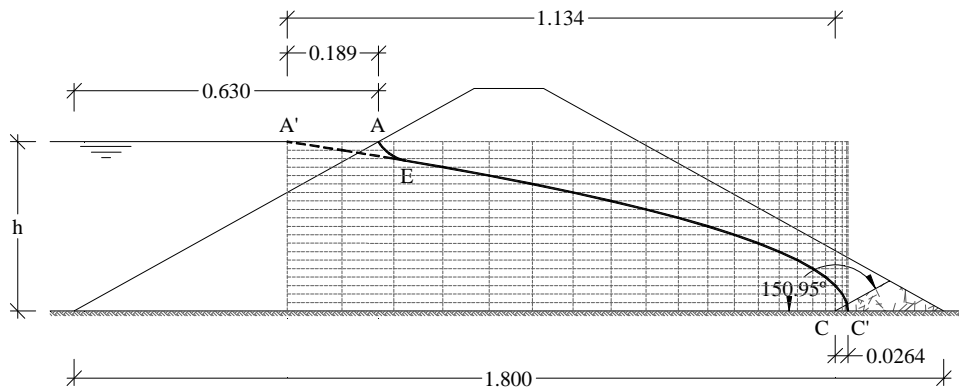


Fig.6.19 – Traçado gráfico do nível freático do modelo da barragem homogénea com dreno de pé de talude

Através da Fig.2.32 é possível efectuar uma estimativa gráfica da posição do nível freático de acordo com o ilustrado na Fig.6.19.

Como se percebe pela Fig.6.20, as posições do nível freático conseguidas pelas vias numérica e gráfica aproximam-se de forma aceitável à solução experimental, observando-se no entanto uma certa perda de significado do traçado gráfico à saída do escoamento em meio poroso.

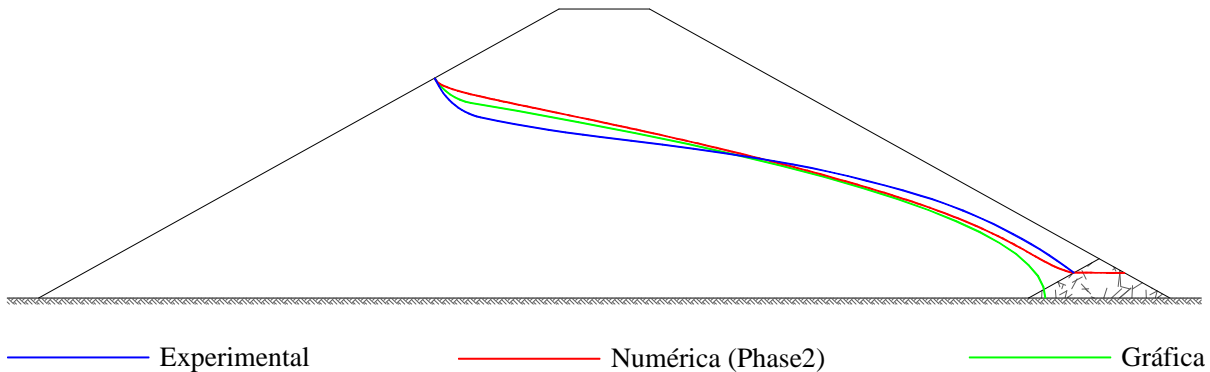


Fig.6.20 – Solução experimental, numérica e gráfica para a posição da linha de saturação

6.2.2. EFEITO DA AVARIA DO SISTEMA DE DRENAGEM

Na Fig.6.20 é possível reparar que pela posição que o escoamento assume ao longo do domínio poroso o dreno de pé de talude como órgão exclusivo de drenagem não representa uma solução viável em termos de garantias de segurança. Note-se que, em termos da sua condutividade hidráulica, o funcionamento do dreno pode ser afectado no tempo pelo simples facto da migração das partículas finas do solo granular poder ocasionar a obturação progressiva dos espaços existentes no material drenante. No limite, a permeabilidade do meio mais grosseiro poderá ver-se reduzida a níveis próximos dos verificados no solo granular.

Quadro 6.7 – Capacidade de vazão do dreno em função da sua permeabilidade

k [m/s]	Q [m ³ /s]	Q [l/h]
1.E+00	9.15E-05	65.9
1.E-01	9.10E-05	65.5
1.E-02	8.63E-05	62.1
1.E-04	7.78E-05	56.0

Através dos dados mostrados no Quadro 6.7 é possível confirmar que à medida que o dreno perde capacidade para conduzir a água para o exterior o valor do caudal percolado diminui para valores próximos daqueles que se registariam na situação de uma barragem homogénea.

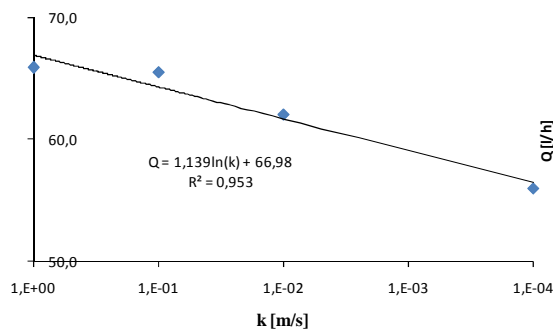


Fig.6.21 – Evolução da capacidade de vazão do dreno em função da sua condutividade hidráulica

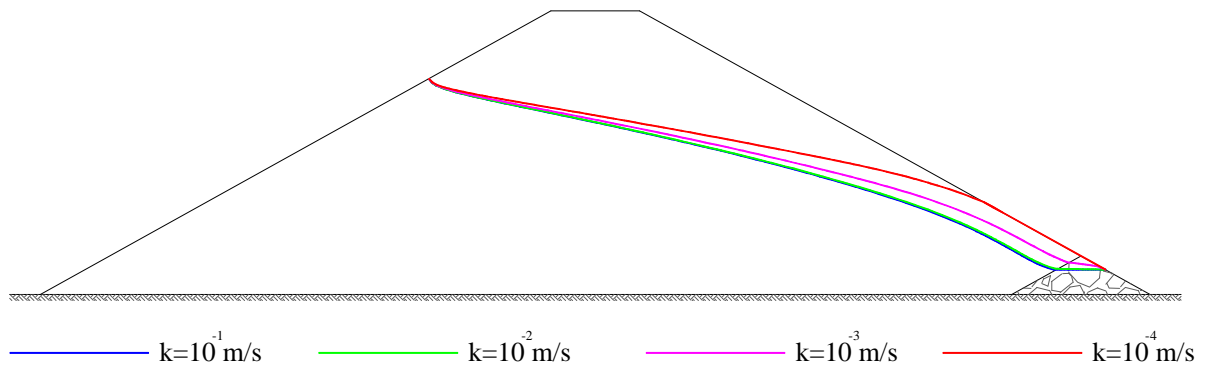


Fig.6.22 – Posição do nível freático em função da redução da permeabilidade do dreno

Como se pode constatar pela Fig.6.22, à medida que a avaria do dreno de pé de talude se agrava, o nível freático passa a ocupar posições em níveis mais elevados, em particular junto da fronteira de jusante. Devido a este facto, pode concluir-se também que a perda de condutividade hidráulica do dreno de pé do talude induz um acréscimo da carga hidráulica ao escoamento, sendo esse acréscimo mais importante junto do paramento de jusante. No caso mais extremo observa-se que o nível freático atinge a fronteira de jusante sendo nesse caso inevitável a ressurgência da água e o consequente fenómeno de erosão interna da barragem.

6.3. BARRAGEM HOMOGÉNEA COM DRENO DE CHAMINÉ

6.3.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS

A exemplo das experiências anteriores, todas as tarefas levadas a cabo na análise do modelo da barragem homogénea com dreno de chaminé foram realizadas depois de estabelecido o escoamento em regime permanente.

Na Fig.6.23 mostra-se a trajectória do produto corante através do solo granular. Parece ser evidente a capacidade que o dreno tem de captar o escoamento que nele aflui para a base da barragem. Em seguida o dreno planar de jusante encarrega-se de conduzir a água tão rapidamente quanto possível para fora do sistema.

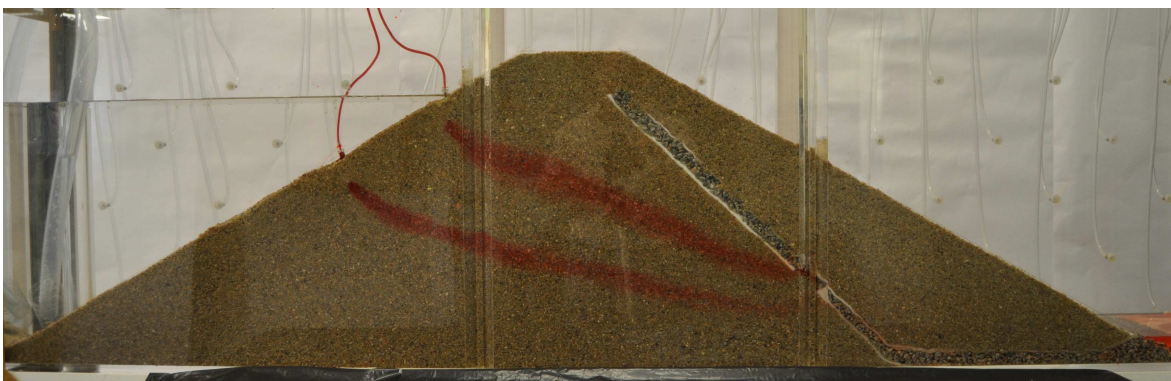


Fig.6.23 – Trajectória do produto corante no meio poroso

Na Fig.6.24 é ainda mais evidente o mecanismo de transferência da água do solo granular para o dreno de chaminé, pois observa-se uma clara alteração da direcção do escoamento quando as linhas de corrente atingem a zona de interface dos dois materiais.

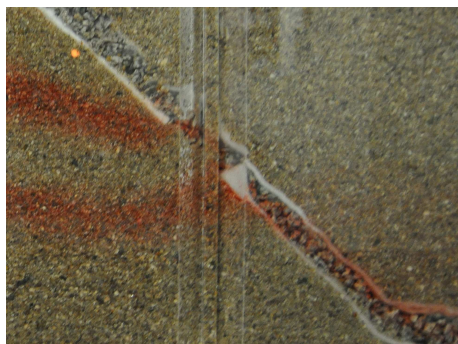


Fig.6.24 – Transferência do escoamento do solo granular para o dreno de chaminé

No Quadro 6.8 são apresentados os tempos necessários para se vazarem volumes de 2L. Pelo exposto se conclui que o caudal percolado médio no modelo da barragem homogénea com dreno de chaminé é igual a 176.8l/h.

Quadro 6.8 – Medição experimental do caudal percolado

V [L]	t [s]	ΔV [L]	Δt [s]	Q [L/s]	Q [L/h]
2	40	2	40	0.0500	180.0
4	85	2	45	0.0444	160.0
6	122	2	37	0.0541	194.6
8	166	2	44	0.0455	163.6
10	204	2	38	0.0526	189.5
12	249	2	45	0.0444	160.0
14	289	2	40	0.0500	180.0
16	329	2	40	0.0500	180.0
18	368	2	39	0.0513	184.6
20	409	2	41	0.0488	175.6

Com base no valor médio do caudal, verificou-se que o coeficiente de permeabilidade do solo granular, para as condições inerentes ao modelo vale aproximadamente $1.71 \times 10^{-3} \text{ m/s}$.

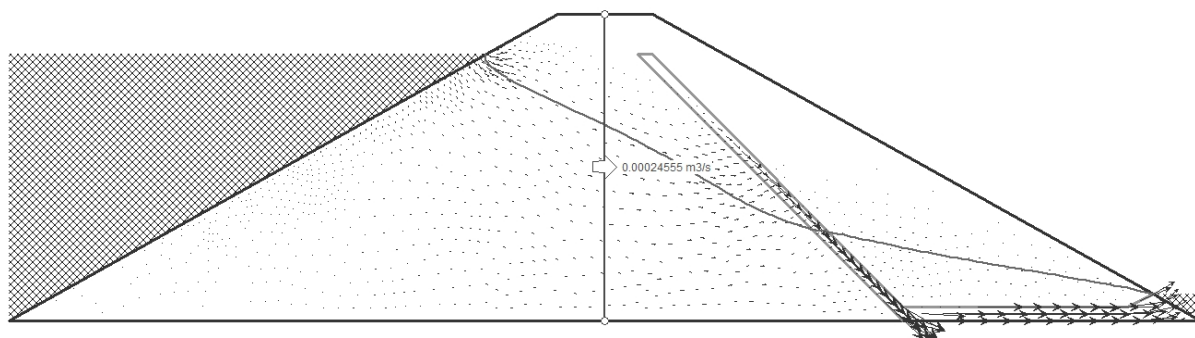


Fig.6.25 – Caudal percolado pelo corpo da barragem. Posição do nível freático (Phase²)

Na Fig.6.26 e na Fig.6.27 é possível observar os resultados da carga hidráulica obtidos pela via numérica e experimental, respectivamente.

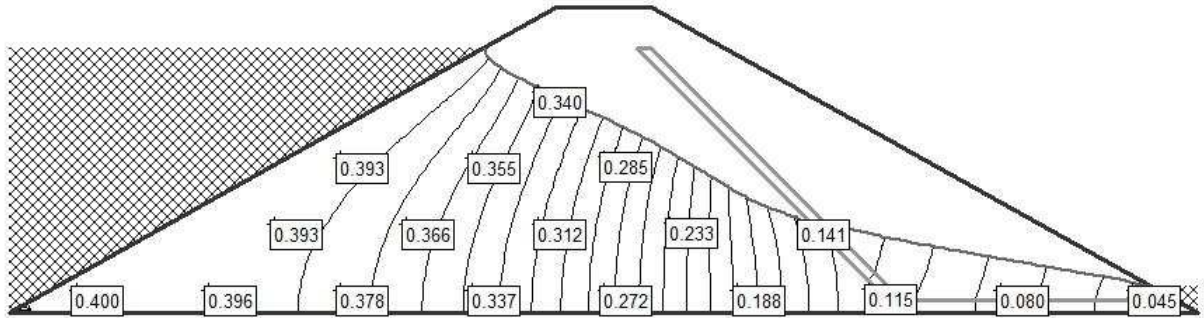


Fig.6.26 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Phase²)

Por análise do Quadro 6.9 constata-se que nas regiões com menores gradientes hidráulicos os desvios entre a solução numérica e os resultados obtidos experimentalmente estão mais controlados. Pelo contrário, junto da região de transição do material granular para o dreno, onde se verificam gradientes hidráulicos acentuadamente superiores, os desvios entre as duas soluções assumem maior importância.

Quadro 6.9 – Comparação dos resultados da carga hidráulica

Ponto	Coordenadas		Carga hidráulica		Desvio [mm]	Erro rel. [%]
	x [mm]	y [mm]	Exp. [m]	Num. [m]		
1	100	35	0.399	0.400	1.0	0.25
2	300	35	0.395	0.396	1.0	0.25
3	500	35	0.381	0.378	3.0	0.79
4	700	35	0.353	0.337	16.0	4.53
5	900	35	0.309	0.272	37.0	11.97
6	1100	35	0.199	0.188	11.0	5.53
7	1300	35	0.093	0.115	22.0	23.66
8	1500	35	0.061	0.080	19.0	31.15
9	1700	35	0.040	0.045	5.0	12.50
10	400	135	0.393	0.393	0.0	0.00
11	600	135	0.375	0.366	9.0	2.40
12	800	135	0.339	0.312	27.0	7.96
13	1000	135	0.237	0.233	4.0	1.69
14	1200	135	0.183	0.141	42.0	22.95
15	500	235	0.394	0.393	1.0	0.25
16	700	235	0.368	0.355	13.0	3.53
17	900	235	0.310	0.285	25.0	8.06
19	800	335	0.348	0.340	8.0	2.30

O nível freático representado na Fig.6.27 foi obtido por aproximação aos pontos representados na Fig.6.28, representando estes pontos a posição do nível da água registada nos tubos piezométricos e que é relativa à prumada vertical das aberturas comunicantes para o escoamento. Com os resultados

obtidos até agora, pode-se desde já alertar para as diferenças observadas entre o nível freático e a linha de fluxo associada ao ponto de partida junto da superfície livre de montante.

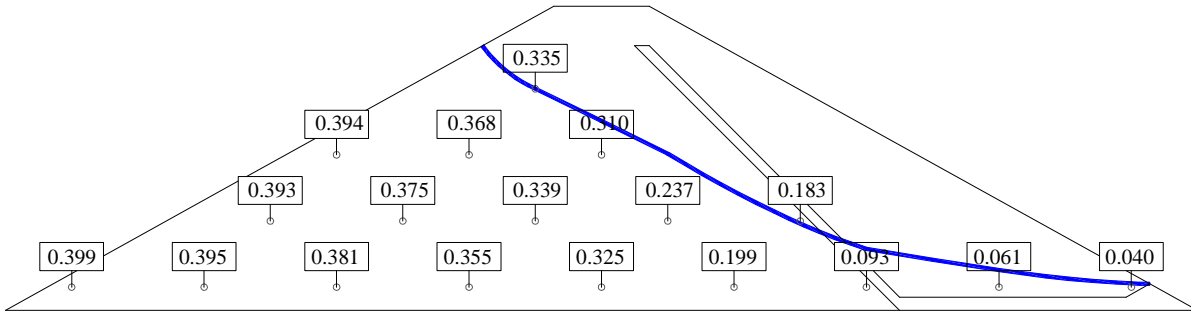


Fig.6.27 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação (Ensaio experimental)

Repare-se que, ao contrário do que se sucede nas linhas de corrente, na linha que representa o nível freático não existe variação apreciável da direcção do escoamento junto da zona de interface entre o solo granular e material drenante.

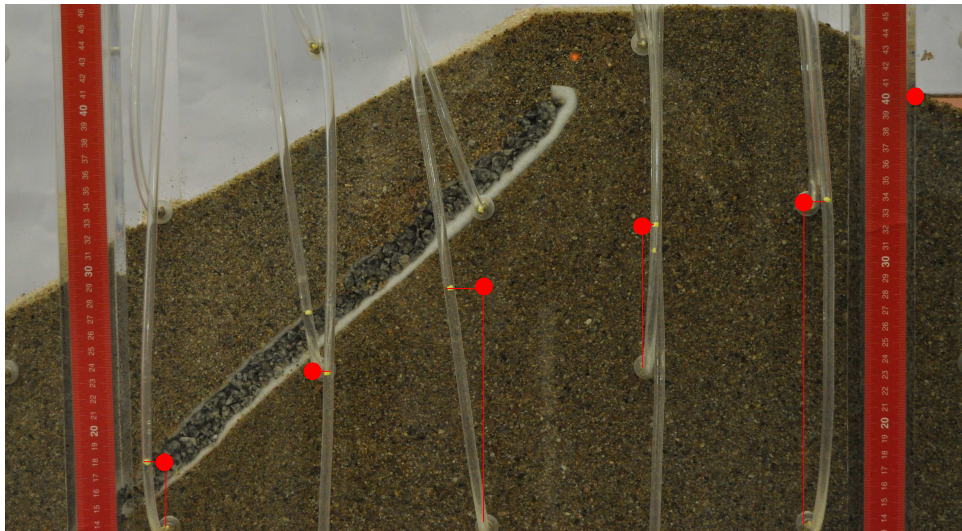


Fig.6.28 – Cota piezométrica associada às aberturas comunicantes (Ensaio experimental)

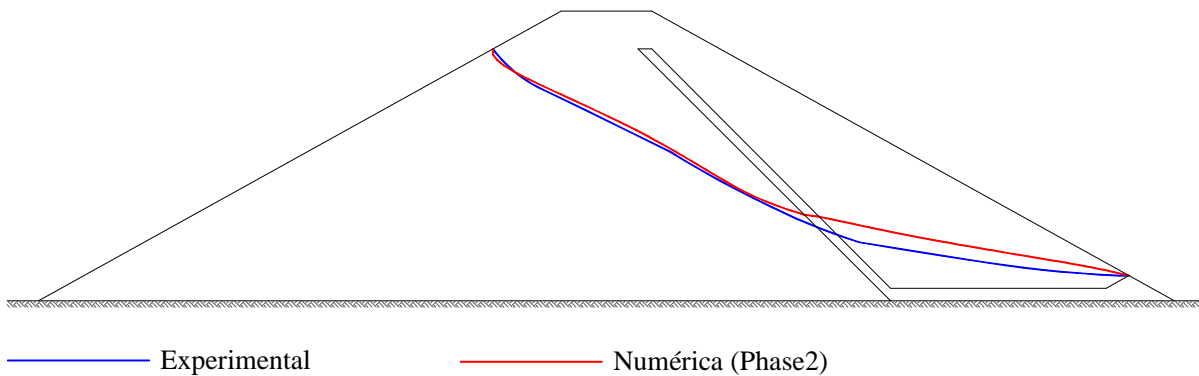


Fig.6.29 – Solução experimental e numérica para a posição do nível freático

Através da Fig.6.29 pode-se confirmar a existência de uma razoável correspondência entre a solução numérica e os resultados observados experimentalmente em termos da posição do nível freático.

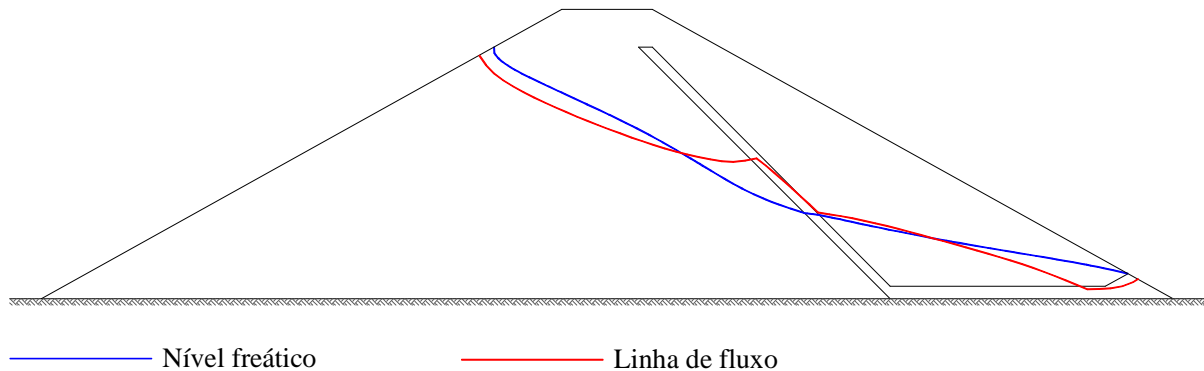


Fig.6.30 – Posição do nível freático e da linha de corrente associada ao ponto de injeção do corante (Phase²)

Os resultados ilustrados na Fig.6.30, que evidenciam as posições que o nível freático e a linha de fluxo superior assumem, servem para reforçar as primeiras evidências que surgiram na fase experimental de que o nível freático não é uma linha de corrente.

Nos casos em que se pretenda estudar os escoamentos não confinados em meios porosos cuja região em condições não saturadas seja tão pequena, comparativamente à região em condições saturadas, será lícito considerar que a primeira linha de fluxo coincide com o nível freático, pois o erro em que se incorre é pequeno. No entanto, nas situações como a ilustrada na Fig.6.30 essa simplificação do problema deixa de ser válida.

6.3.2. EFEITO DA INCLINAÇÃO DO DRENO DE CHAMINÉ

No âmbito do estudo do modelo da barragem homogénea com dreno de chaminé afigurou-se oportuno averiguar a influência da inclinação deste órgão de drenagem na posição do nível freático e na sua capacidade de vazão. Para o efeito indexou-se aos diferentes modelos numéricos a função de condutividade hidráulica de *van Genuchten* com um coeficiente de permeabilidade em condições saturadas de $1.71 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ e mantiveram-se constantes as condições de fronteira, assim como, a geometria exterior dos modelos. O centro de rotação será junto do topo do dreno de chaminé sendo necessário com isso prolongar o dreno planar até intersectar a nova posição do referido órgão de drenagem.

Quadro 6.10 – Capacidade de vazão do dreno em função da sua inclinação

α [°]	Q [m ³ /s]	Q [l/h]
45	2.46E-04	176.8
60	2.74E-04	197.0
75	2.96E-04	212.8
90	3.16E-04	227.6

Através dos resultados expostos no Quadro 6.10, constata-se que à medida que se aumenta a inclinação deste órgão de drenagem a sua capacidade de vazão aumenta.

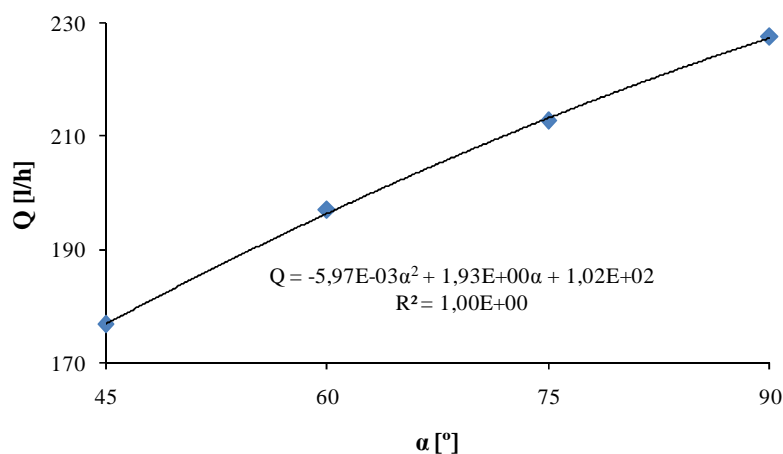


Fig.6.31 – Evolução da capacidade de vazão do dreno em função da sua inclinação

Na Fig.6.31 percebe-se que os ganhos na capacidade de vazão do dreno de chaminé para o caso em que este assume a posição vertical são substanciais. Repare-se que nas condições reproduzidas à medida que se aumenta a inclinação do dreno o percurso a efectuar pelas partículas de água diminui donde, os gradientes hidráulicos aumentam e portanto, de acordo com a lei de Darcy, o caudal percolado também aumenta conseguindo-se assim o desejado abaixamento do nível freático no corpo de jusante da barragem.

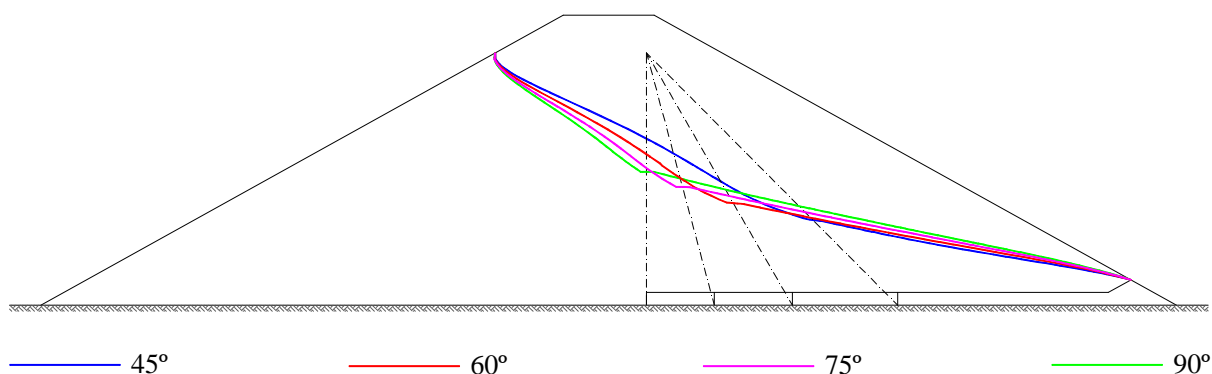


Fig.6.32 – Posição do nível freático em função da inclinação do dreno de chaminé (Phase²)

Nos resultados ilustrados na Fig.6.32 verifica-se que a montante dos órgãos de drenagem as menores inclinações conduzem a maiores valores de carga hidráulica e, por outro lado, a jusante dos drens de chaminé são as maiores inclinações que induzem valores superiores da cota piezométrica.

6.4. BARRAGEM ZONADA

6.4.1. RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS

Tal como nos casos anteriores, antes de efectuar qualquer medição ou proceder à injeção do produto corante, efectuou-se um determinado período de espera para que o escoamento se realizasse em regime permanente.

Como o material que constitui o núcleo apresenta uma permeabilidade substancialmente mais baixa do que a do material granular, o escoamento processou-se de forma muito mais lenta do que se tinha verificado até então e por isso a visualização das linhas de corrente na sua totalidade com o recurso ao produto corante mostrou-se particularmente difícil.

No Quadro 6.11 podem-se observar os tempos registados que foram necessários para que, com a capacidade de vazão do modelo concebido, se conseguissem obter volumes de 50mL de água à saída do sistema. O valor médio do caudal percolado é de 5.33l/h.

Quadro 6.11 – Medição experimental do caudal

V [L]	t [s]	ΔV [mL]	Δt [s]	Q [L/s]	Q [L/h]
1	31	50	31	0.00161	5.8
2	65	50	34	0.00147	5.3
3	99	50	34	0.00147	5.3
4	134	50	35	0.00143	5.1
5	167	50	33	0.00152	5.5
6	202	50	35	0.00143	5.1
7	236	50	34	0.00147	5.3
8	270	50	34	0.00147	5.3
9	305	50	35	0.00143	5.1
10	338	50	33	0.00152	5.5

Como neste caso é o material que compõe o núcleo central que condiciona a saída de água do sistema, a estimativa do coeficiente de permeabilidade será efectuada para o solo B. Tal como nos modelos anteriores, a condutividade hidráulica do material do núcleo será estimada por tentativas, para as condições de compactação, de geometria e de temperatura da água do modelo experimental.

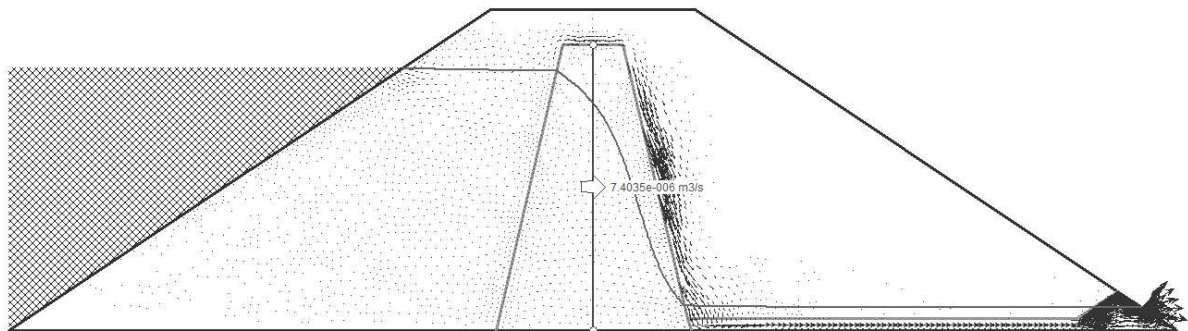
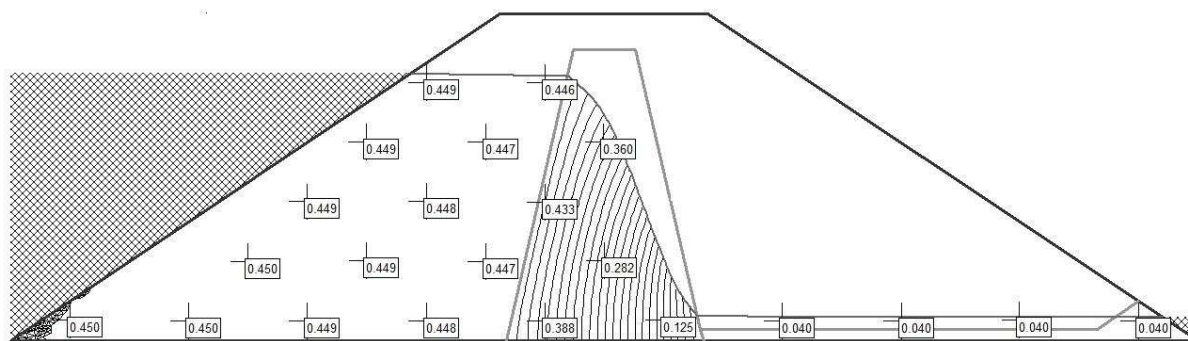


Fig.6.33 – Caudal percolado pelo corpo da barragem. Posição do nível freático (Phase²)

Observando atentamente a Fig.6.33 verifica-se que, houve o cuidado da secção de controlo intersectar apenas a região do núcleo central. Pelo exposto, resulta um coeficiente de permeabilidade aproximadamente igual a $1,50 \times 10^{-5}$ m/s.

Na Fig.6.34 e na Fig.6.35 podem-se consultar os resultados da carga hidráulica obtidos pela via numérica e experimental, respectivamente. Exceptuando os valores obtidos no ponto seis da grelha de piezómetros do tanque de percolação, verifica-se em geral uma proximidade muito estreita entre os valores obtidos pela solução numérica e pelos resultados experimentais.

Fig.6.34 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação. Posição do nível freático (Phase²)

Observando os dados mostrados no Quadro 6.12, verifica-se que o desvio máximo nos resultados é de 46mm sendo o valor médio igual a 6.45mm. Constata-se também que o erro médio entre a solução experimental e a numérica é de 3.51%.

Quadro 6.12 – Comparação dos resultados da carga hidráulica

Ponto	Coordenadas		Carga hidráulica		Desvio [mm]	Erro rel. [%]
	x [mm]	y [mm]	Exp. [m]	Num. [m]		
1	100	35	0.449	0.450	1.0	0.22
2	300	35	0.448	0.450	2.0	0.45
3	500	35	0.448	0.449	1.0	0.22
4	700	35	0.444	0.448	4.0	0.90
5	900	35	0.412	0.388	24.0	5.83
6	1100	35	0.079	0.125	46.0	58.23
7	1300	35	0.040	0.040	0.0	0.00
8	1500	35	0.040	0.040	0.0	0.00
9	1700	35	0.040	0.040	0.0	0.00
10	1900	35	0.040	0.040	0.0	0.00
11	400	135	0.448	0.450	2.0	0.45
12	600	135	0.448	0.449	1.0	0.22
13	800	135	0.446	0.447	1.0	0.22
14	1000	135	0.294	0.282	12.0	4.08
15	500	235	0.450	0.449	1.0	0.22
16	700	235	0.448	0.448	0.0	0.00
17	900	235	0.440	0.433	7.0	1.59
18	600	335	0.449	0.449	0.0	0.00
19	800	335	0.448	0.447	1.0	0.22
20	1000	335	0.375	0.360	15.0	4.00
21	700	435	0.449	0.449	0.0	0.00
22	900	435	0.444	0.446	2.0	0.45

Tal como para o caso do modelo discutido no ponto 6.3, o traçado do nível freático que se pode visualizar na Fig.6.35 foi conseguido à custa da aproximação de uma curva aos pontos representados

na Fig.6.36. Refira-se uma vez mais que estes pontos representam a posição do nível da água registada nos tubos piezométricos relativa à prumada vertical das aberturas comunicantes para o escoamento.

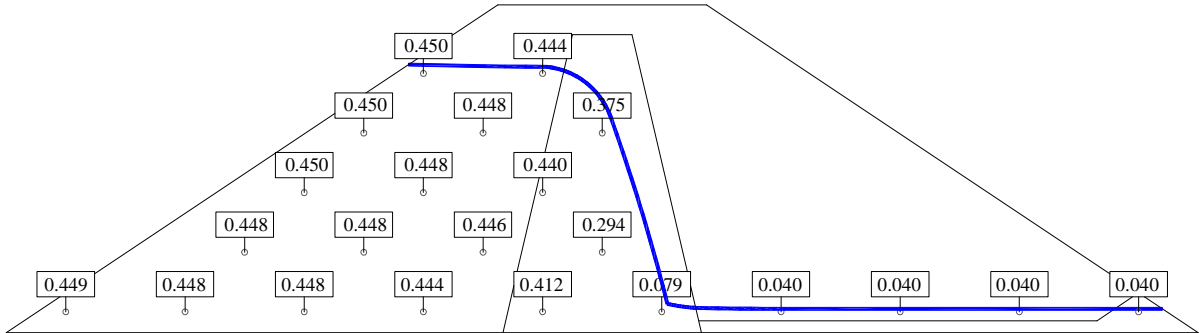


Fig.6.35 – Carga hidráulica na grelha de pontos do tanque de percolação. (Ensaio experimental)

Observando a Fig.6.36 constata-se uma vez mais que não existe qualquer correspondência entre a posição ocupada pelo nível freático e o desenvolvimento da primeira linha de corrente.

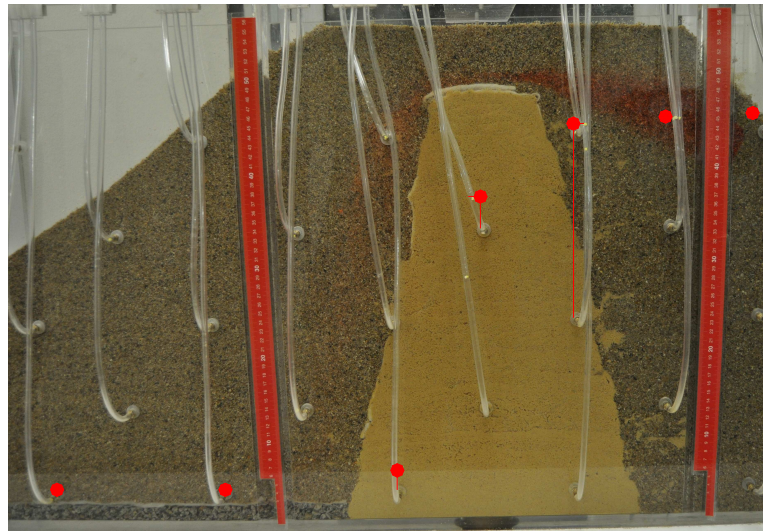


Fig.6.36 – Cota piezométrica associada às aberturas comunicantes (Ensaio experimentais)

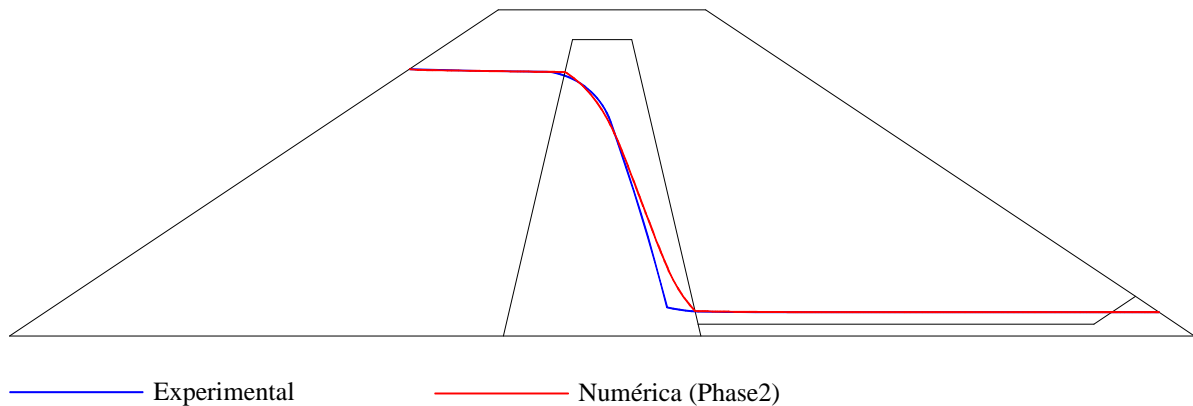


Fig.6.37 – Solução experimental e numérica da posição do nível freático

Na Fig.6.37 é possível confirmar a boa correspondência entre a solução numérica da posição do nível freático e os resultados obtidos experimentalmente.

A propósito da comparação dos valores da carga hidráulica tinha-se constatado que apenas um dos pontos de leitura das cotas piezométricas devolve um desvio considerável. Observando novamente a figura anterior é fácil de perceber que esse ponto situa-se junto da zona onde as linhas de saturação se afastam de forma mais importante, ou seja, junto ao canto inferior direito do núcleo central.

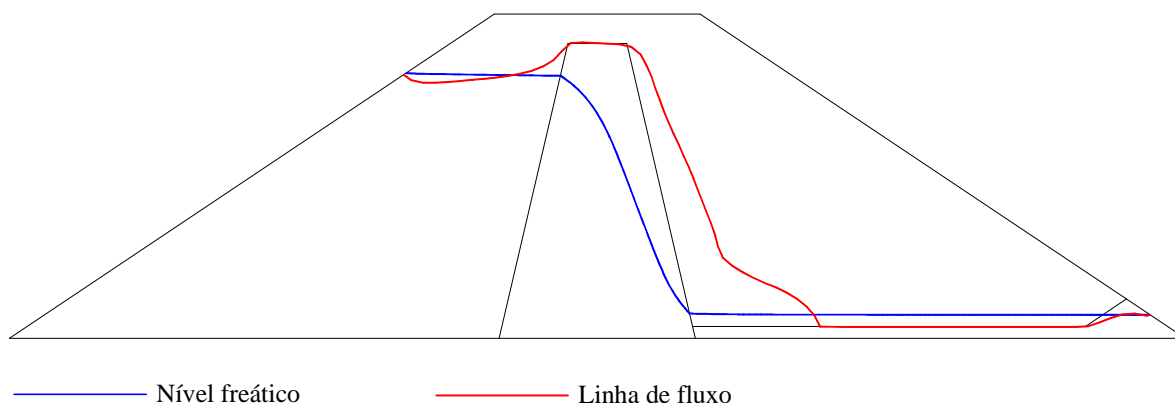


Fig.6.38 – Posição do nível freático e da linha de corrente associada ao ponto de injeção do corante (Phase²)

Tal como foi evidenciado no ponto 6.3.1, a Fig.6.38 reforça os resultados experimentais mostrados na Fig.6.36 que demonstram a inexistência de correspondência entre a posição do nível freático e a posição da primeira linha de corrente quando a região não saturada assume maior importância face à região saturada. Conforme se pode confirmar no ponto 4.5.5, houve a preocupação do nível da superfície livre de montante se situar bastante abaixo do topo do núcleo central para afastar a hipótese do fenómeno verificado na Fig.6.38 se tratar do galgamento deste órgão de dissipação de energia.

6.4.2. EFEITO DA PERMEABILIDADE DO NÚCLEO CENTRAL

A avaliação da permeabilidade do material do núcleo de uma barragem de aterro é vital para perceber a capacidade que esse elemento tem para dissipar a energia devida ao escoamento da água. Note-se que o poder de dissipação energética do núcleo central será tanto maior quanto maiores forem os gradientes hidráulicos. Tal como exemplificado na Fig.6.34 a perda de carga hidráulica nesta zona deverá ser mais acentuada do que nas restantes regiões da barragem.

Quadro 6.13 – Capacidade de vazão do núcleo central em função da sua permeabilidade

k [m/s]	Q [m ³ /s]	Q [l/h]
1.E-03	2.10E-04	151.3
1.E-04	4.51E-05	32.4
1.E-05	7.40E-06	5.3
1.E-06	5.17E-07	0.4

No Quadro 6.13 demonstra-se que o caudal percolado decresce bruscamente com a diminuição do coeficiente de permeabilidade do núcleo. Daqui se conclui que para ser possível controlar de forma adequada o caudal percolado é vital que o coeficiente de permeabilidade seja correctamente estimado.

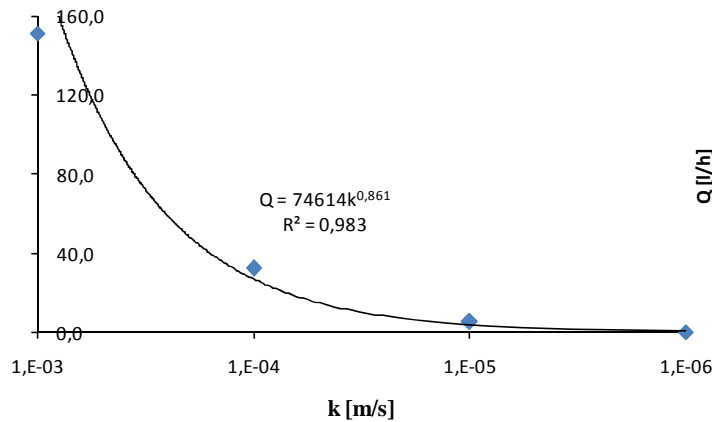


Fig.6.39 – Evolução do caudal percolado com a diminuição do coeficiente de permeabilidade do núcleo central

Relativamente à variação da posição do nível freático com o aumento da condutividade hidráulica do núcleo central, constata-se pela Fig.6.40 que para as três primeiras ordens de grandeza não se verificam alterações muito sensíveis. Já no último caso em que a permeabilidade do núcleo é superior, a posição do nível freático distingue-se das demais deixando evidências de que para valores da permeabilidade semelhantes ao do material do corpo da barragem o princípio de funcionamento por dissipação energética é posto em causa.

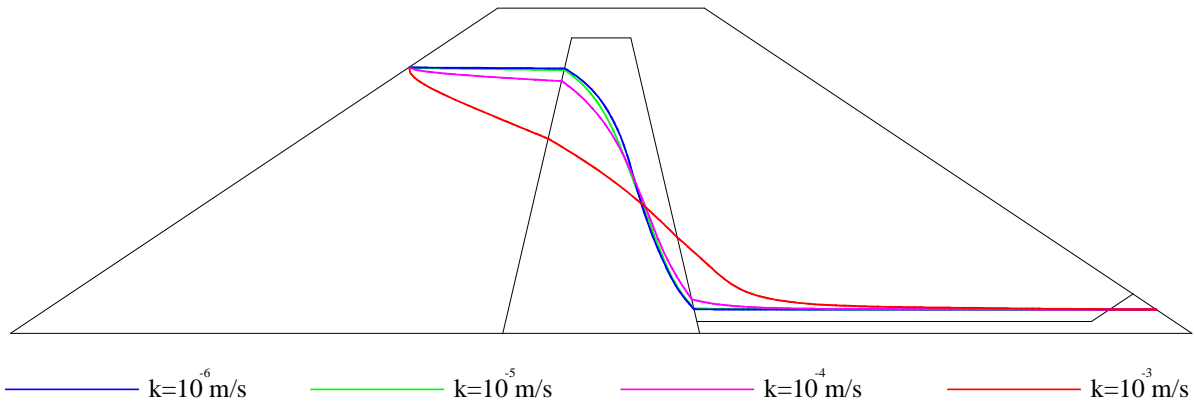


Fig.6.40 – Posição do nível freático em função da diminuição do coeficiente de permeabilidade do núcleo central

6.4.3. ESTIMATIVA DO COEFICIENTE DE PERMEABILIDADE

No ponto 2.4.6 foram apresentadas numerosas propostas para a estimativa do coeficiente de permeabilidade dos solos cujos resultados se pretendem agora avaliar. Note-se que a propósito da caracterização dos solos granulares efectuada no capítulo 4, a recolha das amostras foi realizada sobre o modelo experimental da barragem zonada.

No Quadro 6.13 apresenta-se a proposta de Hazen para a estimativa do coeficiente de permeabilidade hidráulica assumindo para o parâmetro constante o valor médio proposto por T. W. Lambe, R. V. Whitman (1979).

Quadro 6.14 – Estimativa da permeabilidade proposta por Hazen

C	D ₁₀	k
[]	[mm]	[m/s]
1600	0.181	5.24E-05

Apesar de se tratar de um valor distinto dos obtidos pela via experimental, não se pode deixar de reparar que fornece um valor da mesma ordem de grandeza.

Por outro lado, de acordo com Casagrande o coeficiente de permeabilidade para um índice de vazios igual a 0.85 será igual ao valor mostrado no Quadro 6.15.

Quadro 6.15 – Estimativa da permeabilidade proposta por Casagrande

γ _s	w	γ	γ _d	e	k _{lab}	k _{0.85}
[kN/m ³]	[%]	[kN/m ³]	[kN/m ³]	[]	[m/s]	[m/s]
25.80	14.00	22.70	19.91	0.30	9.98E-06	2.41E-05

Repare-se que diversas propostas sugerem a variação linear do logaritmo da permeabilidade com o índice de vazios do solo. Deste modo, conhecendo dois pares de valores da permeabilidade e do índice de vazios de um dado solo, é possível estimar o índice de vazios que está efectivamente associado ao modelo da barragem zonada. Saliente-se que os ensaios com o permeâmetro de carga constante foram efectuados com base em amostras cujas condições de compactação serão seguramente distintas das retiradas do modelo.

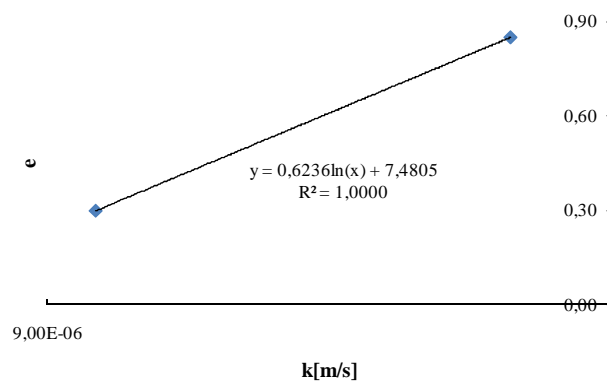


Fig.6.41 – Variação do coeficiente de permeabilidade do núcleo central com o índice de vazios

Tomando em consideração o valor da permeabilidade de $1,50 \times 10^{-5}$ m/s observado no modelo, o índice de vazios do material que compõe o núcleo será aproximadamente igual a 0.55.

Aproveitando a estimativa do índice de vazios obtida pela proposta de Casagrande é agora possível estimar o coeficiente de permeabilidade de acordo com a proposta de Chapuis.

Quadro 6.16 – Avaliação da permeabilidade proposta por Chapuis

D ₁₀	D ₆₀	C _u	e	k
[mm]	[mm]	[]	[]	[m/s]
0.181	0.338	1.87	0.55	8.13E-07

Através do resultado que se evidencia do Quadro 6.16 repara-se que pelo menos para este caso a proposta de Chapuis conduz a valores muito baixos da permeabilidade.

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Depois de efectuado o estudo da percolação em modelo reduzido convém salientar o imenso potencial didáctico do tanque de percolação. Note-se que para além da visualização das linhas de corrente, este permite também controlar a carga hidráulica instalada em diversos pontos do domínio poroso. Através da análise da percolação em modelo reduzido sobre barragens de aterro constituídas com elementos drenantes ou núcleos centrais o aluno perceberá imediatamente a diferença entre o controlo da vazão e a dissipação da energia como métodos de condução e controlo da água pelo meio poroso.

No âmbito da análise da percolação em modelo reduzido verificou-se que para além de outros factores com influência na permeabilidade, a temperatura da água deverá ser controlada sempre que os resultados determinados nos ensaios experimentais sejam utilizados em estudos numéricos diferidos no tempo e em condições térmicas da água distintas da inicial.

Relativamente à Equação Diferencial de Continuidade para escoamentos bidimensionais em meios porosos, deixa-se aqui também uma palavra de alerta no que se refere a admitir o regime permanente de forma indiscriminada. Note-se que no caso das estruturas geotécnicas, em particular nas obras de aterro, poderão ser utilizados inadvertidamente solos granulometricamente evolutivos que façam variar o índice de vazios no tempo ou então poderão existir zonas da obra mal impermeabilizadas que permitam a drenagem ou embebição da estrutura de aterro em condições tais que haja variação do grau de saturação no tempo.

Em termos das condições de entrada dos escoamentos em barragens de aterro constatou-se que a linha equipotencial máxima coincide com o paramento de montante apenas quando o valor do ângulo α é igual ou inferior a 90° . Por outro lado, a linha equipotencial mínima coincide com o paramento de jusante apenas nos casos em que o valor do ângulo α é igual ou superior a 90° .

Relativamente aos ensaios experimentais efectuados foi possível comprovar que o coeficiente de permeabilidade dos solos é realmente um parâmetro de muito difícil controlo. Repare-se que nos três ensaios de barragens homogéneas levadas a cabo com o mesmo material granular, o valor da condutividade hidráulica obtido foi sempre diferente. Conforme já discutido previamente essas diferenças, ainda que para o caso não tenham sido muito acentuadas, devem-se sobretudo às condições de compactação e porventura a eventuais diferenças da temperatura da água utilizada nos ensaios.

Refira-se que os resultados experimentais obtidos com base nos ensaios no tanque de percolação são em geral muito próximos daqueles que resultaram da modelação numérica. Em termos das soluções gráficas para o traçado da posição dos níveis freáticos constatou-se que conduzem a resultados satisfatórios quando comparados com as respectivas soluções numéricas.

No caso dos sistemas de drenagem horizontais verificou-se uma evidente perda da sua eficiência em termos do controlo da posição do nível freático à medida que o seu comprimento diminui devido à sua perda de capacidade de vazão que provoca a aproximação progressiva do escoamento em carga ao paramento de jusante. Por outro lado, à medida que a espessura do dreno é menor ocorre a sua perda de capacidade de vazão que motiva a subida da linha de saturação junto deste órgão de drenagem.

Nas barragens de aterro cujos órgãos de descarga sejam somente os drenos de pé de talude é importante averiguar o risco de perda da condutividade hidráulica no tempo do material que o constitui. Com efeito, constatou-se que a obturação progressiva à passagem da água neste órgão drenante induz um acréscimo da carga hidráulica ao escoamento, sendo esse acréscimo mais importante junto do paramento de jusante. No limite o nível freático atinge a fronteira de jusante sendo nesse caso inevitável a ressurgência da água e o conseqüente fenómeno de erosão interna da barragem.

Quanto aos drenos de chaminé concluiu-se que os ganhos na capacidade de vazão, e daí posições mais baixas do nível freático, são substanciais quando estes sejam verticais pois o percurso a efectuar pelas partículas de água é menor, donde, os gradientes hidráulicos aumentam e assim, de acordo com a lei de Darcy, o caudal percolado também aumenta.

No caso da barragem zonada percebeu-se a importância da permeabilidade do material que constitui o núcleo ter de ser acentuadamente mais reduzida do que o material do corpo da barragem de forma a potenciar o efeito de dissipação da energia do movimento da água no meio poroso.

Através dos resultados numéricos e experimentais obtidos neste estudo foi possível concluir que o nível freático não é uma linha de corrente. Quando se pretenda estudar os escoamentos não confinados em meios porosos cuja região em condições não saturadas seja tão pequena, comparativamente à região em condições saturadas, será lícito pressupor que a primeira linha de fluxo coincide com o nível freático, pois o erro em que se incorre é pequeno. Repare-se no entanto que nos casos analisados as dimensões das regiões não saturadas são da ordem de grandeza dos modelos pelo que este pressuposto perde validade. Pensando adequadamente no problema conclui-se que de facto assim é pois como se sabe, quando não se fornece energia ao sistema, os escoamentos dirigem-se das altas pressões para as baixas pressões. Ora como se sabe a zona não saturada é uma região de subpressões pelo que decerto uma partícula de água que se situe sobre a linha de saturação, à pressão atmosférica portanto, terá tendência para se encaminhar para as menores pressões.

Em termos dos fenómenos de instabilidade de origem hidráulica convém salientar a discussão a propósito da geometria do bloco potencialmente instável nos casos de levantamento hidráulico, pois, para um certo estado de tensão de confinamento, o efeito conjugado da força de percolação ascensional, do ângulo de dilatância do solo, ψ , e do ângulo de atrito da interface solo-cortina, δ , permite a mobilização de tensões tangenciais responsáveis pela alteração geométrica do bloco potencialmente instável proposto por Terzaghi (1922).

BIBLIOGRAFIA

- Barbosa, J. Novais, *Mecânica dos Flúidos e Hidráulica Geral, Vol. 1*. Porto Editora, Porto, 1985.
- Benmebarek, N., Benmebarek, S., R. Kastner, *Numerical Studies of Seepage Failure of Sand within a Cofferdam*. Elsevier, Biskra, Villeurbanne Cedex, 2005.
- Cardoso, R., Gomes, R. C., Santos, J. A., Sena Costa, V., *Novos Equipamentos Didáticos no Ensino da Mecânica dos Solos. 10.º Congresso Nacional de Geotecnia*, 22 a 26 de Maio de 2006.
- Casagrande, A., *Seepage Trough Dams*. Journal of New England Water Works Association, 1937.
- Craig, R. F., *Soil Mechanics*, Spon Press, London and New York, 1997.
- Couto Marques, J. M. M., Oliveira, P., Lopes, S., *Percolação Não Confinada, Uma Comparação de Métodos de Solução*. Jornadas de Hidráulica Recursos Hídricos e Ambiente, FEUP, 2006.
- Couto Marques, J. M. M., *Apontamentos do Método dos Elementos Finitos*. Documento no âmbito da disciplina de Métodos Numéricos em Geotecnia, FEUP, 2010.
- Das, Braja M., *Advanced Soil Mechanics, Third Edition*. Taylor & Francis, London, New York, 2008.
- Ferreira, C. Romão., *Desenvolvimento de um Equipamento Laboratorial para o Estudo de Problemas de Percolação em Modelo Reduzido*. Dissertação de Mestrado, FEUP, 2008.
- Geuzaine, C., Remacle, F., *Gmsh: A three-dimensional Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre-and Post processing Facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 79, Issue 11, pp. 1309-1331, 2009.
- Helwany, S., *Applied Soil Mechanics, with abaqus applications*. John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2007.
- Krahn, J., *Seepage Modeling with SEEP/W – An Engineering Methodology*. GEO-SLOPE – International, Ltd, 2004.
- Lambe, T. W., Whitman, R. V., *Soil Mechanics*. John Wiley and Sons, Inc, Massachusetts, 1969.
- Lencastre, A., *Hidráulica Geral*. Edição do Autor, Lisboa, 1996.
- Matos Fernandes, M., *Mecânica dos Solos – Conceitos e Princípios Fundamentais*. FEUP, Porto, 2006.
- Miranda, A. N., Malveira, Vanda T. C., *Análise de Percolação pelo Método dos Elementos Finitos*. Revista Tecnologia, Dezembro, 1991.
- Pina, H., *Métodos Numéricos*. McGraw-Hill, Lisboa, 1995.
- Pinto Marado, J. M., *Análise de Problemas de Percolação pelo Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, FEUP, 1993.
- Potts, D. M., Zdravkovic, L., *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering, Theory*. Thomas Telford, London, 1999.
- Santana, T., Lamas, P., *Modelos Simples de Apoio ao Ensino da Geotecnia. 10.º Congresso Nacional de Geotecnia*, 22 a 26 de Março de 2006.
- Unas, M., Nóbrega, S., Silva, H., Carreira, T., *Modelação de uma Barragem de Aterro para Avaliação das Condições de Percolação e Segurança e Antepiano de Observação*. Relatório no âmbito da disciplina de Obras de Aterro, FEUP, 2010.

Venkatramaiah, C., *Geotechnical Engineering*, Revised Third Edition. New Age International Publishers, New Delhi, 2006.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., *The Finite Element Method – Basic Formulation and Linear Problems, Vol. 1*. McGraw-Hill, London, 1994.