

MARIA TERESA DO VALLE MOURA DA COSTA

Novas abordagens ao  
Posicionamento Periódico de  
Figuras Irregulares

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para obtenção do grau de Doutor em Ciências de Engenharia e realizada sob a orientação científica do Professor Doutor José Fernando da Costa Oliveira, Professor Associado da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e co-orientação do Professor Doutor António Miguel da Fonseca Fernandes Gomes, Professor Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES  
FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO

2007



AO ANDRÉ,  
À JOANA E À SOFIA



# Resumo

Esta tese considera o problema de posicionamento periódico de figuras irregulares numa placa de dimensões finitas. O posicionamento periódico surge naturalmente em aplicações industriais onde há a necessidade de compatibilizar o aproveitamento das matérias-primas com a eficiência do processo produtivo. Nestes casos justifica-se um posicionamento periódico sempre que, embora elevado o número de figuras a posicionar, seja reduzida a variedade de formas geométricas distintas. Num posicionamento periódico, tal como o nome indica, as figuras são replicadas de uma forma regular ou periódica, conduzindo, em grande parte dos casos, a um melhor aproveitamento da matéria-prima e a padrões de posicionamento que facilitam o processo automático de corte.

O trabalho realizado pode, em síntese, ser separado em duas partes principais: o caso em que existe apenas uma figura e o caso em que há um grupo de figuras que se pretende replicar numa placa rectangular de dimensões finitas. Em ambas, foi contemplada a possibilidade de as figuras rodarem.

Na primeira parte do trabalho considerou-se o posicionamento periódico de uma única figura dentro de uma placa. Numa fase introdutória mostrou-se que o modelo matemático proposto na literatura, torna impraticável a sua resolução numa perspectiva de optimização, razão pela qual se adoptaram abordagens heurísticas. Foram desenvolvidos três algoritmos que exploram a existência de fronteiras da placa, isto é, que têm em consideração esta limitação física, impossível de ignorar nos problemas reais. No primeiro algoritmo aprofundou-se a pesquisa da orientação apropriada de cada peça, a partir da análise das características geométricas das instâncias a resolver, rodando as peças de um ângulo tal que lhes permita “encostar” melhor às fronteiras da placa quando devidamente rodadas. O segundo algoritmo proposto considera a possibilidade de as peças serem rodadas de um ângulo múltiplo de um valor fixo. No terceiro algoritmo procurou-se explorar o potencial das

novas técnicas de otimização, em particular da meta-heurística ILS.

Na segunda parte do trabalho considerou-se o posicionamento periódico de múltiplas réplicas de um grupo de figuras. Foram adoptadas duas abordagens sequenciais distintas: na primeira, a placa rectangular é dividida em rectângulos idênticos e estes preenchidos da melhor forma com as figuras constituintes do grupo. Ou seja, inicialmente é determinada uma forma rectangular para o grupo que, quando replicada, aproveita totalmente a placa. Na segunda abordagem, o problema é separado em dois sub-problemas, i.e., o grupo é gerado sem uma forma específica e posteriormente replicado. Foram desenvolvidos algoritmos para encontrar a melhor orientação de cada figura, a ordem pela qual devem ser seleccionadas para serem posicionadas dentro do grupo e finalmente, o melhor local de posicionamento dentro do grupo. O grupo é depois replicado por recurso aos algoritmos de posicionamento periódico de uma única figura desenvolvidos na primeira parte deste trabalho.

As experiências computacionais realizadas demonstraram as potencialidades das abordagens apresentadas neste trabalho. Relativamente à primeira parte, foram utilizadas instâncias de problemas descritas em artigos da área encontrados na literatura e foram criadas novas instâncias baseadas em instâncias existentes na biblioteca de problemas de posicionamento de figuras irregulares, disponível no site do Grupo Europeu de Interesse em Problemas de Posicionamento [ESICUP]. Os resultados obtidos através das abordagens propostas ultrapassaram os resultados publicados.

Para a segunda parte, não havendo resultados publicados para possível comparação, foram criadas novas instâncias baseadas na mesma biblioteca, ficando os resultados disponíveis para futuras comparações.

# Abstract

This thesis considers the Lattice Packing Problem in a limited sheet. Some industries frequently need to cut big quantities of a few different types of pieces. In these situations, the regular packing of the pieces proved to be a very competitive approach. The main advantage of a lattice packing is that not only good cutting patterns with very small waste are build but also the automatic cutting process becomes easier.

The work carried out can, in synthesis, be divided into two main parts: the case where only one shape exists and the case where a group of shapes is intended to be replicated on a rectangular plate of fixed dimensions, therefore a finite plate. In both cases, rotations are allowed.

In the first part of this work it is considered the lattice of a single shape on a plate. In an introductory phase it is shown that the mathematical model resolution is impracticable from an optimisation point of view, which motivated the use of heuristic approaches. Three algorithms that explore the existence of borders on the plate have been developed, which deal with this physical limitation, impossible to ignore in real problems. In the first algorithm, we have invested on the search of an appropriate orientation for the parts, from the analysis of the geometric characteristics of the instances, that leads to a better positioning against the borders. In the second algorithm multiples of a fixed rotation angle were considered. In the third algorithm we have tried to explore the potential of new optimisation techniques, in particular of the ILS meta-heuristic.

In the second part of the work we have tackled the periodic positioning of a group of shapes. Two distinct approaches have been adopted: in the first one, the rectangular plate is divided into identical rectangles and these filled with all the shapes of the group. This approach deals with the problem of positioning the group of shapes in a simultaneous way. In the second approach, the problem is solved in a sequential way, as the group is firstly

formed and secondly positioned, in a lattice way. Algorithms have been developed to find the best orientation for each part, the order by which the next part must be chosen to be joined to the rest of the group and, finally, the best point to position it inside the group. The group is then placed by using the algorithms proposed in the first part of this work.

Computational experiments demonstrated the potentialities of the approaches presented in this work. In what concerns the first part, instances of problems described in literature have been used, and our results have outperformed published results. Also new instances have been created, based on instances from the library of Irregular Packing Problems, available at the site of *EURO Special Interest Group on Cutting and Packing* [ESICUP]. For the second part, as there are no published results to compare against, our own instances' results are presented for future comparisons.



# Resumé

Cette dissertation considère le placement périodique de formes irrégulières. Quelques industries fréquemment coupent de grandes quantités de quelques formes différents. Quand le numéro de formes différents n'est pas grand, le placement périodique des formes devient intéressant. Aussi qu'une bonne utilisation de la plaque, le processus automatique de découpage devient plus facile.

Le travail développé peut se diviser en deux parties principales: le cas où il n'existe qu'une seule forme et le cas où un groupe de formes sera reproduit dans une plaque rectangulaire de dimensions limitées. Dans tous les deux, on permet des rotations.

Dans la première partie de ce travail on considère le placement périodique d'une seule figure à l'intérieur d'une plaque rectangulaire. Dans une phase préliminaire, on montre que le modèle mathématique trouvé en littérature résulte impraticable dans une perspective d'optimisation, laquelle a motivé l'utilisation des approches heuristiques. Trois algorithmes qui explorent l'existence des frontières de la plaque ont été développés, en considérant cette limitation physique, impossible d'ignorer dans des problèmes réels. Dans le premier algorithme, nous avons investi dans la recherche d'une orientation appropriée pour chaque figure, d'après l'analyse de ses caractéristiques géométriques, en tournant les pièces selon un certain angle, de façon à trouver un meilleur positionnement contre les frontières. Dans le deuxième algorithme, on a considéré un angle de rotation multiple d'une valeur fixée. Dans le troisième algorithme nous avons essayé d'explorer le potentiel des nouvelles techniques d'optimisation, en particulier de la méta-heuristique ILS.

Dans la deuxième partie du travail nous avons abordé le positionnement périodique d'un groupe de figures. Deux approches distinctes ont été adoptées: dans la première, la plaque rectangulaire a été divisée en rectangles

identiques et ceux-ci ont été remplis le mieux possible avec toutes les figures du groupe. Cette approche traite le problème de placer le groupe de figures d'une façon simultanée et interactive. Dans la deuxième approche, le problème est résolu en séquence, tout d'abord en constituant le groupe et en le reproduisant ensuite, de façon périodique. Des techniques ont été développées pour trouver la meilleure orientation de chaque figure, l'ordre du choix de la prochaine figure à joindre le reste du groupe et finalement, le meilleur point pour la placer à l'intérieur du groupe. Le groupe est alors placé par l'utilisation des algorithmes proposés dans la première partie de ce travail.

Les expériences sur l'ordinateur ont démontré les potentialités des approches présentées dans ce travail. Dans la première partie, des exemples de problèmes édités en littérature ont été employés. Les résultats obtenus ont surpassé les résultats édités. D'autres nouveaux exemples ont été créés, basés sur des exemples existant dans la bibliothèque à propos de problèmes irréguliers de placement, disponibles dans le site [ESICUP]. Dans la deuxième partie, en tant qu'il n'y a aucun résultat édité pour rivaliser avec, des résultats sont présentés pour des futures comparaisons.

# Prefácio

Posso neste momento fazer um balanço positivo dos últimos anos da minha vida, durante os quais tive a honra de trabalhar com o grupo de Cortes e Empacotamentos da FEUP. Quando me inscrevi no doutoramento, o meu orientador teve uma conversa comigo de orientador para orientanda, da qual retive uma frase: “a dada altura, depois de andares meia perdida, vais acabar por sentir paixão por aquilo que fazes. Nessa altura, tens uma tese de doutoramento. Tenho a certeza que vais conseguir!”. Eu nunca tive tanta certeza, assim. Tinha razão, o meu orientador, mas acrescento um pormenor que descobri posteriormente: é que um doutoramento, ora se ama, ora se odeia, nunca se lhe é indiferente!

Aprendi muito, ao longo destes anos. Aprendi a trabalhar num projecto, a fazer investigação, a pesquisar. Passei por muitas dificuldades, mas nunca desisti. As vitórias sabem melhor, depois de ultrapassadas pequenas derrotas.

Não resisto a transcrever parte de um texto que me marcou definitivamente, e que tento manter presente sempre que o desânimo tenta apoderar-se de mim:

“Viver é subir uma escada rolante pelo lado que desce. ”...”. Mesmo que pareça quase uma condenação, a ideia de que viver é subir uma escada rolante pelo lado que desce é que nos permite sentir que afinal não somos assim tão insignificantes e tão incapazes. Então, vamos à escada rolante: aqui e ali até conseguimos saltar degraus de dois em dois, como quando éramos crianças e muito mais livres, mais ousados e mais interessantes. E porque não? Na pior das hipóteses, caímos, magoamo-nos por dentro e por fora, e podemos ainda uma vez... recomeçar.”

Lya Luft in *Pensar é transgredir*

Gostaria de agradecer publicamente a todos aqueles que, directa ou indirectamente, me ajudaram a tornar possível a execução deste trabalho.

- Não é possível traduzir em palavras a gratidão que sinto pelo Zé Fernando: meu orientador científico e meu amigo. Por sempre ter confiado em mim, mesmo nos piores momentos. Por me ter dado liberdade sempre que senti que não precisava dele, mas também apoio incondicional sempre que o procurei. Por nunca ter desesperado. Enfim, por me conhecer melhor do que eu própria, às vezes.
- Ao André, agradeço a família que me ajudou a construir, por vezes no meio de um relvado sob um sol radioso, doutras vezes por entre os escombros de vários meses de tempestade. Maior prova da solidez de um casamento não é possível: sobreviveu a dois doutoramentos!
- As minhas filhas, que cresceram debaixo da minha tensão constante, e com ela aprenderam a conviver, espero que um dia possam entender e perdoar o pouco tempo que lhes dediquei. Cheguei a ouvir perguntas deste tipo: “Mamã, quando acabares o teu doutoramento, brincas comigo?” Ou então: “Quando eu for grande, não tenho que fazer doutoramento, pois não?” Quero que elas saibam, contudo, que qualquer que tenha sido o algoritmo aplicado, a escolha do ponto de posicionamento passou sempre por elas. Embora nos momentos pacíficos ficasse pelos bastidores, estive sempre atenta e saltava logo com as garras de fora mal alguma coisa as perturbava. Elas fazem parte de mim, nem o doutoramento conseguiu alargar as amarras.
- À mãe do André, agradeço todo o apoio prestado ao longo deste último ano do meu doutoramento. Cheguei a “esquecer” como se cozinha, tantas foram as vezes que me mandou o jantar prontinho a comer. Graças a esta avó, as minhas filhas puderam manter uma vida normal. E nunca esquecerei como foi avó, mãe e pai durante os últimos quinze dias da elaboração da tese.
- Aos meus pais, sobretudo à minha mãe, agradeço os sacrifícios que fizeram por mim. Só se dá valor quando também se é mãe.
- Ao meu avô, dedico aqui umas linhas para lhe afirmar, publicamente, que o seu exemplo de tenacidade, sacrifício, coragem, me acompanharam ao longo de todo este tempo. Aos seus 92 anos de idade, ainda

a ler sem óculos e a gostar de aprender, espero que sinta um orgulho especial porque, afinal, pode ser que sempre tenha uma neta “doutora” (embora não “médica”, que era o seu sonho. Paciência, avô!).

- À Ana, agradeço-lhe a amizade que nos une, que lhe permite ter a franqueza de me criticar e a humildade de aceitar uma crítica. A frontalidade é o nosso melhor defeito. Sei que posso contar sempre com ela, qualquer que seja a situação, qualquer que seja o motivo. Sei que sabe que pode contar sempre comigo, onde quer que esteja.
- À Helena, agradeço as palavras amigas nos momentos difíceis, que sempre me ajudaram a ultrapassá-los.
- Agradeço à Betina as suas histórias à sexta-feira, que me fizeram libertar o espírito e despertar os sentimentos.
- Ao Rui, agradeço todo o trabalho de retaguarda para que a visualização dos padrões de corte se tornasse “userfriendly”.
- À Susana e ao João, agradeço a preciosa ajuda no estudo estatístico que estive na base do planeamento das experiências.
- À Ayana e à Carmo, agradeço a psicoterapia por telefone, lá da capital. Só quem também passou pelo cabo das tormentas sabe na realidade como é, e que por vezes, é preciso arranjar coragem para continuar.
- Agradeço a todos os que passaram pelo LabIO durante os últimos anos, por terem contribuído para que o ambiente fosse sempre fabuloso.
- Durante três anos usufruí de uma bolsa de doutoramento, no âmbito do programa PRODEP, medida 5, acção 5.3. Esta bolsa permitiu-me dedicar a tempo inteiro ao doutoramento durante esse período e participar em conferências internacionais, que me abriram os horizontes e impulsionaram o desenvolvimento do trabalho de forma determinante. Agradeço ao ISEP, em particular ao Departamento de Matemática, o ter-me facilitado o acesso a esta bolsa e a todos os colegas que me apoiaram nos últimos meses da escrita da tese.
- “The last, but not the least” é, propositadamente, o Miguel. Meu co-orientador científico, papel que sem dúvida nenhuma desempenhou como ninguém, e meu amigo. Sem ele, eu não teria conseguido levar

este barco a bom porto. Obrigada, Miguel, por fazeres parte deste meu projecto. E por me teres convencido a usar  $\LaTeX$ . E por teres tido tanta paciência comigo (desculpa ter-me “passado” algumas vezes).

- A todos os outros, muito obrigada.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação e âmbito da dissertação . . . . .	1
1.2	Objectivos . . . . .	3
1.3	Organização da tese . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Descrição do Problema e Revisão Bibliográfica</b>	<b>9</b>
2.1	Problemas de Posicionamento . . . . .	10
2.2	Problemas de Posicionamento de Figuras Irregulares – PFI .	13
2.2.1	Variantes do Problema de PFI . . . . .	16
2.2.2	Envolvente Industrial . . . . .	18
2.3	Posicionamento Periódico . . . . .	18
2.3.1	Posicionamento Periódico de Figuras Regulares e Ir- regulares Convexas . . . . .	22
2.3.2	Posicionamento Periódico de Figuras Irregulares - PPF	25
2.3.3	Posicionamento Periódico de Conjuntos de $n$ Figuras Irregulares - $PP_nFI$ . . . . .	28
2.4	Posicionamento Periódico numa placa Limitada . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Modelos Geométricos e Matemáticos</b>	<b>35</b>
3.1	Introdução . . . . .	36
3.2	Representação geométrica . . . . .	38
3.2.1	Considerações geométricas preliminares . . . . .	38
3.2.2	Posicionamento periódico de uma figura . . . . .	40
3.2.3	Posicionamento periódico de um conjunto de $n$ figuras	42
3.3	Modelo matemático do problema . . . . .	45
3.3.1	Posicionamento periódico simples de uma figura convexa	46
3.3.2	Posicionamento periódico duplo de uma figura convexa	50
3.3.3	Posicionamento periódico de uma figura não convexa .	53

3.4	Modelo matemático <i>versus</i> aplicação de heurísticas . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Algoritmos de PPF1</b>	<b>59</b>
4.1	Posicionamento Periódico Simples e Duplo . . . . .	59
4.2	Estrutura geral do problema de PPF1 . . . . .	61
4.2.1	Critérios de posicionamento periódico . . . . .	63
4.2.2	Escolha do ponto inicial . . . . .	67
4.2.3	A lista de ângulos . . . . .	67
4.2.4	Posicionamento periódico duplo . . . . .	68
4.3	Abordagens heurísticas propostas . . . . .	70
4.3.1	Abordagens iniciais . . . . .	70
4.3.2	Heurística Ângulos Paralelos (HAP) . . . . .	71
4.3.3	Heurística Ângulos Constantes (HAC) . . . . .	73
4.3.4	Heurística Ângulos Livres (HAL) . . . . .	74
4.4	Experiências Computacionais . . . . .	76
4.4.1	Instâncias utilizadas . . . . .	77
4.4.2	Resultados . . . . .	78
4.4.3	Evolução do desempenho da heurística HAC em função da dimensão da placa . . . . .	84
4.4.4	Análise crítica dos resultados . . . . .	86
4.4.5	Visualização dos melhores resultados encontrados . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Algoritmos de PP<math>n</math>FI</b>	<b>93</b>
5.1	Posicionamento Periódico Rectangular (PPR) . . . . .	94
5.1.1	Heurística de posicionamento . . . . .	97
5.1.2	Experiências Realizadas . . . . .	99
5.2	Posicionamento Periódico Multiforme (PPM) . . . . .	100
5.2.1	Abordagem em duas fases . . . . .	100
5.2.2	Orientação das figuras dentro do grupo . . . . .	103
5.2.3	Algoritmo de formação do grupo . . . . .	104
5.2.4	Planeamento das experiências computacionais . . . . .	110
5.2.5	Experiências realizadas . . . . .	117
5.3	PPR <i>versus</i> PPM . . . . .	120
5.3.1	Evolução do desempenho dos algoritmos PPR e PPM em função da dimensão da placa . . . . .	120
5.3.2	Resultados finais por aplicação do algoritmo PPM . . . . .	122
5.4	Visualização de alguns resultados . . . . .	127



---

<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>135</b>
6.1	Conclusões do trabalho . . . . .	135
6.2	Desenvolvimentos futuros . . . . .	136
<b>A</b>	<b>Planeamento de Experiências</b>	<b>139</b>
A.1	Primeiro conjunto de experiências . . . . .	140
A.1.1	Estrutura das experiências . . . . .	140
A.1.2	Verificação dos pressupostos . . . . .	140
A.1.3	Testes ANOVA e Análise post-hoc . . . . .	141
A.1.4	Discussão de resultados . . . . .	147
A.2	Segundo conjunto de experiências . . . . .	149
A.2.1	Estrutura das experiências . . . . .	149
A.2.2	Verificação dos pressupostos . . . . .	149
A.2.3	Testes ANOVA e Análise post-hoc . . . . .	150
A.2.4	Discussão de resultados . . . . .	152
	<b>Referências</b>	<b>155</b>



# Lista de Figuras

1.1	Posicionamento periódico de uma figura. . . . .	4
1.2	Posicionamento periódico de um grupo de figuras. . . . .	5
2.1	Exemplo de posicionamento periódico no plano. . . . .	21
2.2	Exemplo de posicionamento periódico numa placa de dimensões finitas. . . . .	21
2.3	Exemplo de posicionamento periódico duplo, conduzindo a uma densidade de 1 no plano. . . . .	24
3.1	Cálculo do NFP do polígono orbital $O$ face ao polígono estacionário $E$ $NFP_{E,O}$ . . . . .	39
3.2	Posicionamento do polígono orbital $O$ face ao polígono estacionário $E$ . . . . .	39
3.3	Posicionamento de um polígono $A$ face a uma placa rectangular. . . . .	40
3.4	Posicionamento periódico de uma figura. . . . .	41
3.5	A maximização do aproveitamento de uma placa não corresponde forçosamente à densidade máxima no plano. . . . .	41
3.6	Posicionamento periódico simples e duplo de uma única figura. . . . .	42
3.7	Posicionamento periódico de um grupo de figuras. . . . .	43
3.8	Figura a replicar: um triângulo. . . . .	46
3.9	Posicionamento do segundo triângulo face ao primeiro. . . . .	47
3.10	NFP de $P + v_0$ em relação a $P$ . . . . .	47
3.11	Situação de colinearidade dos vectores geradores do posicionamento periódico. . . . .	49
3.12	Uma possível solução do problema de PPFI. . . . .	50
3.13	A figura dada e a sua rotação de $180^\circ$ . . . . .	50
3.14	NFP de $P_2$ em relação a $P_1$ . . . . .	51
3.15	NFP de $P_1$ em relação a $P_2$ . . . . .	51

3.16	NFP de $P_1$ em relação a $P_1$ . . . . .	51
3.17	NFP de $P_2$ em relação a $P_2$ . . . . .	52
3.18	Solução do problema não admissível, pois apresenta sobreposição. . . . .	52
3.19	Uma possível solução do problema de PFI <i>duplo</i> . . . . .	53
3.20	Figura não convexa escolhida. . . . .	54
3.21	NFP de $P + v_0$ em relação a $P$ . . . . .	54
3.22	Possível solução. . . . .	57
4.1	Estrutura geral da heurística de posicionamento periódico. . . . .	62
4.2	Diferentes orientações de uma dada figura conduzem a diferentes qualidades de utilização da placa. . . . .	63
4.3	Algumas iterações da aplicação do critério de posicionamento $\diamond$ , escolhida uma das arestas do $NFP_{1,2}$ . $NFP_{1,2}$ é igual a $NFP_{1,3}$ uma vez que $P_2$ é igual a $P_3$ . $P_3$ é colocado num dos pontos de intersecção entre $NFP_{1,3}$ e $NFP_{2,3}$ . . . . .	65
4.4	Passos do posicionamento periódico simples de uma figura segundo o critério de posicionamento $X//$ . . . . .	66
4.5	Área restrita do IFP onde deverá ser posicionado $P_0$ . . . . .	67
4.6	Regras de agrupamento usadas no problema de posicionamento periódico duplo. . . . .	69
4.7	Estrutura geral do primeiro algoritmo desenvolvido . . . . .	71
4.8	Estrutura geral do primeiro algoritmo desenvolvido - após alteração . . . . .	71
4.9	Como construir a lista de ângulos utilizada pela HAP. . . . .	72
4.10	Estrutura geral da abordagem HAP . . . . .	74
4.11	Estrutura geral da meta-heurística <i>ILS</i> . . . . .	75
4.12	Instâncias utilizadas. . . . .	78
4.13	Evolução do desempenho da heurística HAC em função da dimensão da placa, para a instância <i>Cheng</i> , segundo um posicionamento periódico simples. . . . .	85
4.14	Melhores resultados de posicionamento periódico simples e duplo obtidos para a instância <i>Cheng</i> . . . . .	89
4.15	Melhores resultados de posicionamento periódico simples e duplo obtidos para a instância <i>Stoyan</i> . . . . .	90

---

4.16	Melhores resultados de <i>posicionamento periódico duplo</i> obtidos para a instância <i>Swim1</i> . 247 figuras (Utilização de 67.87%). Valores obtidos com a abordagem HAP e o critério X//. . . . .	90
4.17	Melhores resultados de <i>posicionamento periódico duplo</i> obtidos para a instância <i>Swim2</i> . 116 figuras (Utilização de 86.28%). Valores obtidos com a abordagem HAL e o critério X//. . . . .	90
4.18	Melhores resultados de <i>posicionamento periódico duplo</i> obtidos para a instância <i>Swim3</i> . 116 figuras (Utilização de 87.26%). Valores obtidos com a abordagem HAC e o critério X//. . . . .	91
4.19	Melhores resultados de <i>posicionamento periódico duplo</i> obtidos para a instância <i>Swim4</i> . 247 figuras (Utilização de 79.53%). Valores obtidos com a abordagem HAC e o critério X//. . . . .	91
4.20	Melhores resultados de <i>posicionamento periódico duplo</i> obtidos para a instância <i>Swim5</i> . 240 figuras (Utilização de 88.19%). Valores obtidos com a abordagem HAC e o critério Y//. . . . .	91
5.1	Esquema de funcionamento da abordagem PPR. . . . .	96
5.2	Estrutura geral do algoritmo. . . . .	97
5.3	Instâncias utilizadas. . . . .	99
5.4	<i>Primeiro sub-problema</i> : formação de um grupo a partir da instância <i>data_7b</i> . . . . .	101
5.5	<i>Segundo sub-problema</i> : posicionamento periódico simples do conjunto de figuras constituinte da instância <i>data_7b</i> . . . . .	102
5.6	Formação de um grupo com a instância <i>data_7b</i> , comparando diferentes critérios como medida da qualidade do grupo. . . . .	109
5.7	Evolução do desempenho dos algoritmos PPR e PPM em função da dimensão da placa, para a instância <i>data_4t</i> . . . . .	121
5.8	Instâncias utilizadas (i). . . . .	122
5.9	Instâncias utilizadas (ii). . . . .	123
5.10	Instâncias utilizadas (iii). . . . .	124

- 
- 5.11 Melhor solução de posicionamento periódico de grupos rectangulares (algoritmo PPR) para a instância *data\_4t* (78 grupos = 312 figuras posicionadas - 65.0% de Utilização). . . . . 127
- 5.12 Melhor solução de posicionamento periódico de *data\_4t*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (85 grupos = 340 figuras posicionadas - 70.8% de Utilização). . . . . 128
- 5.13 Melhor solução de posicionamento periódico da instância *data\_7b* segundo posicionamento ortogonal - obtida por aplicação do algoritmo PPR (48 grupos = 336 figuras posicionadas - 72.0% de Utilização). . . . . 128
- 5.14 Melhor solução de posicionamento periódico de *data\_7b*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (49 grupos = 343 figuras posicionadas - 73.5% de Utilização). . . . . 129
- 5.15 Melhor solução de posicionamento periódico duplo de *data\_7b*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (48 grupos = 336 figuras posicionadas - 72.0% de Utilização). . . . . 130
- 5.16 Possível solução de posicionamento periódico simples de *data\_7f*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (299 grupos = 2093 figuras posicionadas). . . . . 130
- 5.17 Possível solução de posicionamento periódico simples de *data\_8f*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (299 grupos = 2392 figuras posicionadas). . . . . 131
- 5.18 Melhor solução de posicionamento periódico de *data\_8f*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (354 grupos = 2832 figuras posicionadas - 88.4% de Utilização). . . . . 132
- 5.19 Melhor solução de posicionamento periódico simples de *data\_8sb*, sem qualquer rotação das figuras, decorrente da aplicação do algoritmo PPM. (45 biquínis = 360 figuras posicionadas - 63.6% de Utilização). . . . . 132
- 5.20 Melhor solução de posicionamento periódico simples de *data\_8sb*, permitindo rotação do grupo formado com as figuras na orientação original, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (48 biquínis = 384 figuras posicionadas - 67.8% de Utilização). 133

---

5.21	Melhor solução de posicionamento periódico simples de <i>data_8sa</i> , sem qualquer rotação das figuras, decorrente da aplicação do algoritmo PPM. (42 fatos de banho completos = 336 figuras posicionadas - 43.9% de Utilização). . . . .	134
5.22	Melhor solução de posicionamento periódico simples de <i>data_8sa</i> , permitindo rotação do grupo formado com as figuras na orientação original, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (63 fatos de banho completos = 504 figuras posicionadas - 66.9% de Utilização). . . . .	134
A.1	Esquema de funcionamento do algoritmo PPM. . . . .	140
A.2	Variável <i>Num_Grupos</i> versus <i>Tipo_de_Posic</i> . . . . .	142
A.3	Variável <i>Num_Grupos</i> versus <i>Ordem_do_Grupo</i> . . . . .	143
A.4	Efeito conjunto dos dois factores na variável dependente . . .	144





# Lista de Tabelas

3.1	Restrições impostas para garantir que não há sobreposição das duas figuras $(P + v_0)$ e $P$ . . . . .	48
3.2	Restrições impostas para garantir que as duas figuras $(P + v_0)$ e $P$ estão em contacto. . . . .	49
3.3	Restrições impostas para garantir que não há sobreposição das duas figuras $(P + v_0)$ e $P$ . . . . .	55
3.4	Linearização das restrições apresentadas na tabela anterior .	55
3.5	Restrições impostas para garantir que as duas figuras $(P + v_0)$ e $P$ estão em contacto. . . . .	56
3.6	Linearização das restrições apresentadas na tabela anterior .	56
4.1	Comparação de desempenho entre diferentes regras e critérios, utilizando a abordagem HAP . . . . .	80
4.2	Comparação de desempenho entre diferentes regras e critérios, utilizando a abordagem HAC . . . . .	81
4.3	Comparação de desempenho entre diferentes regras e critérios, utilizando a abordagem HAL . . . . .	82
4.4	Resultados computacionais: instâncias <i>Cheng</i> e <i>Stoyan</i> . . . .	83
4.5	Resultados computacionais: instâncias <i>Swim1</i> a <i>Swim5</i> . . . .	84
5.1	Resultados computacionais: instâncias <i>data_4t</i> e <i>data_7b</i> . . . .	100
5.2	Número de sequências geradas . . . . .	106
5.3	Resultados de <i>data_4t</i> : Posicionamento Periódico Simples sem Pesquisa Local . . . . .	112
5.4	Resultados de <i>data_4t</i> : Posicionamento Periódico Simples com Pesquisa Local . . . . .	113

5.5	Resultados de <i>data_4t</i> : Posicionamento Periódico Duplo com critério para a junção da figura dupla MIN_AREA e sem Pesquisa Local . . . . .	114
5.6	Resultados de <i>data_4t</i> : Posicionamento Periódico Duplo com critério para a junção da figura dupla MIN_AREA e com Pesquisa Local . . . . .	114
5.7	Resultados de <i>data_4t</i> : Posicionamento Periódico Duplo com critério para a junção da figura dupla MIN_AREA_CH e sem Pesquisa Local . . . . .	115
5.8	Resultados de <i>data_4t</i> : Posicionamento Periódico Duplo com critério para a junção da figura dupla MIN_AREA_CH e com Pesquisa Local . . . . .	115
5.9	Resultados computacionais da aplicação do algoritmo PPM .	119
5.10	Resultados da aplicação do algoritmo PPM à instância <i>data_4t</i> , por variação da <i>targetDim</i> . . . . .	120
5.11	Comparação de características das instâncias usadas . . . . .	124
5.12	Resultados computacionais da aplicação do algoritmo PPM .	125
5.13	Resultados computacionais da aplicação do algoritmo PPM .	126
5.14	Resultados computacionais da aplicação do algoritmo PPM .	126
A.1	Teste à normalidade dos dados . . . . .	141
A.2	Teste à homogeneidade das variâncias das células . . . . .	141
A.3	Tabela ANOVA . . . . .	143
A.4	Comparação entre níveis do factor <i>Angulos</i> . . . . .	145
A.5	Comparação entre níveis do factor <i>Ordem_do_Grupo</i> . . . . .	146
A.6	Comparação entre níveis do factor <i>Ordem_do_Grupo</i> . . . . .	147
A.7	Comparação entre níveis do factor <i>Ordem_do_Grupo</i> . . . . .	148
A.8	Teste à normalidade dos dados . . . . .	150
A.9	Teste à homogeneidade das variâncias das células . . . . .	150
A.10	Tabela ANOVA . . . . .	151
A.11	Teste à normalidade dos dados . . . . .	151
A.12	Teste à homogeneidade das variâncias das células . . . . .	151
A.13	Tabela ANOVA . . . . .	152
A.14	Comparação entre níveis do factor <i>Tipo_de_Posic</i> . . . . .	152

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e âmbito da dissertação

O problema de Posicionamento Periódico de Figuras Irregulares (PPFI) faz parte de uma classe de problemas mais abrangente, os problemas de posicionamento de figuras irregulares. Estes, por sua vez, são um caso particular do problema genérico de posicionamento, também designado por problema de cortes e empacotamentos. Nesta tese será abordada a vertente bi-dimensional.

A resolução de um problema de posicionamento consiste na colocação de um conjunto de figuras pequenas (items, formas ou peças) num objecto finito de maiores dimensões (placa) de forma que não exista sobreposição de figuras, que seja minimizado o espaço desperdiçado e que as figuras sejam integralmente colocadas no interior da placa. No caso de ser elevado o número de figuras a posicionar, mas reduzida a variedade de formas geométricas distintas, justifica-se um posicionamento periódico onde, tal como o nome indica, as figuras são replicadas de uma forma regular ou periódica. Nestes casos, o PPFI tem mostrado ser uma abordagem bastante competitiva, ao conduzir, em grande parte dos casos, a um melhor aproveitamento da matéria-prima e a padrões de posicionamento que facilitam o processo automático de corte.

Os problemas de posicionamento são de grande interesse prático, surgindo com frequência em contextos industriais onde se procure a minimização de desperdícios na utilização de matérias-primas. Nestes contextos, as figuras a posicionar tanto podem ser rectangulares, como não. A título de exemplo, na indústria têxtil – confecção de lençóis, as formas são rectangu-

lares, enquanto na mesma indústria – confecção de vestuário, as formas são irregulares e de formatos muito diversos. Do ponto de vista científico, mesmo na sua vertente mais simples, estes problemas têm carácter combinatório, sendo classificados como NP-difíceis. Na resolução de problemas de posicionamento de figuras irregulares, à complexidade decorrente do seu carácter combinatório, acresce a dificuldade de manipulação e análise geométrica das figuras.

Uma forma do problema especialmente importante para algumas indústrias (e.g. componentes sintéticas do calçado, algumas aplicações de metalomecânica) é aquela que reúne duas características especiais: há apenas uma figura (ou um reduzido número de figuras diferentes) a posicionar em elevadas quantidades e a sua orientação pode ser qualquer (contrariamente ao que se verifica na indústria têxtil, onde, tipicamente, ou não é permitida qualquer rotação ou a única rotação permitida é a de  $180^\circ$  por razões que se prendem apenas com o tipo de matéria-prima). Neste caso, o problema de posicionamento poderá ser resolvido como um problema de posicionamento periódico.

Existindo alguns resultados científicos para o problema sob um ponto de vista teórico, dificilmente implementáveis em casos reais, existem, no entanto, muito poucas abordagens ao problema na sua vertente mais prática. Na generalidade dos trabalhos publicados, apenas são considerados problemas que contemplam figuras convexas, ou apenas uma figura. Também, mas muito raramente, são considerados os efeitos fronteira introduzidos pelo facto de o objecto onde são posicionadas as figuras ser de dimensões fixas (logo, finitas), sendo normalmente estudada a situação (teórica) do problema não limitado.

No trabalho descrito nesta dissertação considerou-se o problema de posicionamento periódico 2D tendo por base a situação encontrada na indústria da metalomecânica, por razões que se prendem com a anterior ligação do grupo de trabalho onde se insere a autora à indústria referida. As dificuldades encontradas na resolução de problemas com as características especiais descritas no parágrafo anterior, por utilização de algoritmos preexistentes de posicionamento de figuras irregulares vocacionados para a variante do problema encontrada na indústria têxtil, levaram a uma análise do tipo de dificuldades e à decisão de tratar tais problemas seguindo uma abordagem distinta. Além disso, há um tipo de matéria-prima especial que é frequente-

mente utilizado nesta indústria, uma liga metálica de custos muito elevados da qual são cortadas “ferramentas de corte”, sendo de extrema importância para a empresa qualquer melhoria principalmente a nível da diminuição do tempo de corte dos padrões: cerca de 18 horas para uma patela com 10cm por 10cm. Esta situação constituiu a maior motivação para a realização deste trabalho: procurar desenvolver técnicas inovadoras de posicionamento de figuras irregulares que permitam resolver o problema descrito de uma forma mais adequada do que as actualmente existentes.

Muito embora tenha estado subjacente ao desenvolvimento deste trabalho a indústria da metalomecânica, os algoritmos desenvolvidos são genéricos, podendo ser aplicados em qualquer situação que apresente as mesmas características. Aliás, e por esse motivo, nem todas as instâncias utilizadas para teste dos algoritmos desenvolvidos são oriundas desta indústria, sendo algumas criadas ou pertencendo a outras indústrias, nomeadamente, a têxtil e a do calçado.

## 1.2 Objectivos

O trabalho realizado ao longo desta dissertação pode, em síntese, ser separado em duas partes principais: o caso em que existe apenas uma figura e o caso em que há um grupo de figuras que se pretende posicionar numa placa um número elevado de vezes.

Na primeira parte considerou-se o posicionamento periódico de uma única figura (PPFI) dentro de uma placa rectangular de dimensões fixas, logo, finitas. Numa fase introdutória mostrou-se que o modelo matemático proposto na literatura para o problema de PPFI com uma só figura, torna impraticável a sua resolução numa perspectiva de optimização. Para estes problemas, o tempo de resolução cresce exponencialmente com o número de figuras a posicionar e com o número de vértices de cada figura, pelo que esta abordagem está, por isso, restringida à resolução de problemas de pequena dimensão, sem interesse prático. Além disso, o modelo matemático proposto na literatura “ignora” o facto de em termos práticos se considerar normalmente a existência de limites físicos e pré-definidos da placa de matéria-prima onde deverão ser posicionadas as figuras dadas, o que obriga à inclusão de novas restrições que garantam que as figuras fiquem integralmente contidas dentro da placa de dimensões fixas.

Tendo em conta a pouca referência da comunidade científica a problemas de posicionamento periódico em placas de dimensões finitas, foram desenvolvidos algoritmos que exploram a existência de fronteiras, isto é, que têm em consideração esta limitação física, impossível de ignorar nos problemas reais. Neste sentido, aprofundou-se a pesquisa da orientação apropriada de cada figura, levando em consideração precisamente o facto de as figuras posicionadas poderem “encostar” melhor às fronteiras da placa quando devidamente rodadas. Procurou-se também explorar o potencial das novas técnicas de optimização, em particular das meta-heurísticas, a partir da análise das características geométricas das instâncias a resolver, desenvolvendo assim novos algoritmos mais adaptados às aplicações concretas (industriais) desta classe de problemas. A figura 1.1 é um exemplo de um posicionamento periódico de uma única figura.

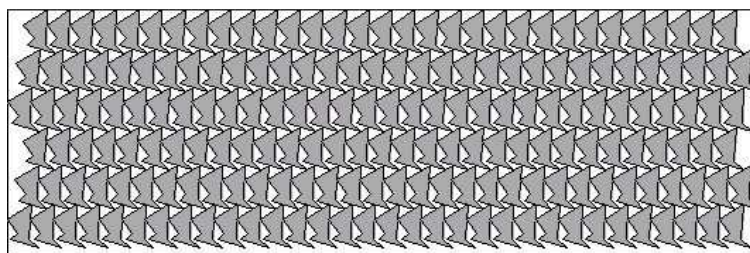


Figura 1.1: Posicionamento periódico de uma figura.

Na segunda parte deste trabalho considerou-se o posicionamento periódico de múltiplas réplicas de um grupo de figuras. Para distinguir do caso anterior, em que apenas existe uma figura, daqui em diante passará a designar-se este segundo caso pela sigla  $PPnFI$  (posicionamento periódico de  $n$  figuras irregulares). Se já existem poucas referências na literatura ao posicionamento periódico de uma única figura em placas de dimensões finitas, a escassez de referências é ainda mais notória quando se fala em posicionamento periódico de grupos de figuras dentro de uma placa limitada. Foram desenvolvidas técnicas para encontrar a melhor orientação de cada figura, a ordem pela qual devem ser escolhidas para serem posicionadas dentro do grupo e finalmente, o melhor local de posicionamento dentro do grupo. O grupo (ou *cluster*, na versão inglesa) é depois replicado por recurso aos algoritmos de posicionamento periódico simples de uma figura desenvolvidos na primeira parte deste trabalho ou a novos algoritmos, tendo em conta o tipo de grupo formado. A figura 1.2 é um exemplo de um posicionamento

periódico de um pequeno conjunto de figuras, depois de agrupadas.

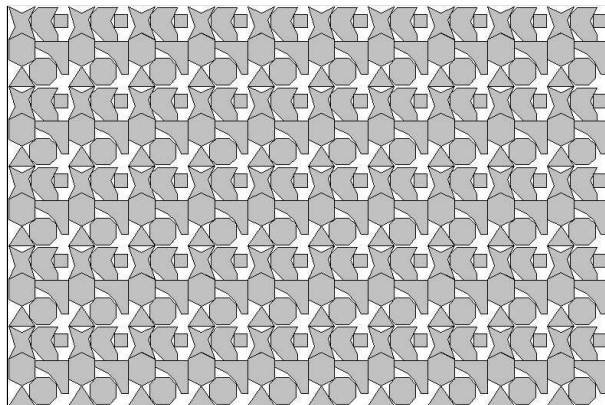


Figura 1.2: Posicionamento periódico de um grupo de figuras.

Ao longo de todo o trabalho foram desenvolvidos novos algoritmos, adoptando-se a reutilização, sempre que possível, de algumas funções já existentes desenvolvidas durante os últimos anos pelo grupo onde a autora se insere, inerentes ao problema genérico de posicionamento de figuras irregulares e comuns a esta variante.

Foram utilizadas instâncias de problemas descritas em artigos da área encontrados na literatura e foram criadas novas instâncias baseadas em instâncias existentes na biblioteca de problemas de posicionamento de figuras irregulares, disponível no site do Grupo Europeu de Interesse em Problemas de Posicionamento [ESICUP]. A criação de novas instâncias deveu-se ao facto de ser reduzido o número de problemas semelhantes tratado na literatura passíveis de comparação.

Tal como já foi referido anteriormente, neste trabalho considerou-se o problema de posicionamento periódico tendo por base a situação encontrada na indústria da metalomecânica, por razões que se prendem com a anterior ligação do grupo de trabalho onde a autora se insere a este tipo de indústria, facto que levou à percepção de certo tipo de dificuldades e necessidades. As dificuldades encontradas na resolução de problemas com as características especiais anteriormente descritas, por utilização de algoritmos pre-existentes de posicionamento de figuras irregulares vocacionados para a variante do problema encontrada na indústria têxtil, levaram a uma análise do tipo de dificuldades e à decisão de tratar tais problemas seguindo uma abordagem distinta. Muito embora tenha estado subjacente ao desenvolvimento deste

trabalho a indústria da metalomecânica, os algoritmos desenvolvidos são suficientemente genéricos para poderem ser aplicados em qualquer situação que apresente as mesmas características. Aliás, e por esse motivo, nem todas as instâncias utilizadas para teste dos algoritmos desenvolvidos são oriundas desta indústria, sendo algumas genéricas ou pertencendo a outras indústrias, nomeadamente, têxtil e calçado.

### 1.3 Organização da tese

Esta tese divide-se em seis capítulos, consistindo este primeiro numa breve introdução do problema que se pretendeu resolver, assim como na descrição das motivações que estiveram na base da escolha do tema e dos objectivos a atingir.

No segundo capítulo, os problemas de PPF<sub>I</sub> e de PP<sub>*n*</sub>FI são enquadrados no problema genérico de posicionamento, como uma variante dos problemas de posicionamento de figuras irregulares. É também apresentada uma revisão bibliográfica dos problemas deste tipo encontrados na literatura.

No terceiro capítulo, são descritos modelos geométricos e matemáticos de resolução do problema proposto. Começando-se com uma breve explicação da forma como se lidou com o problema geométrico, apresenta-se o modelo matemático do problema de posicionamento de figuras irregulares e a descrição do estudo efectuado o qual, após constatadas e justificadas as suas limitações, levou ao abandono desta abordagem. Depois, são classificados e separados os diferentes tipos de problemas de PPF<sub>I</sub> estudados e descritas as ideias subjacentes às heurísticas de resolução apresentadas nos capítulos seguintes.

O quarto capítulo aborda o problema de posicionamento periódico de uma só figura (PPFI). Descrevem-se os algoritmos criados, os testes efectuados, os resultados computacionais e, por último, apresenta-se uma análise crítica dos resultados obtidos.

O quinto capítulo dedica-se ao problema de posicionamento periódico de um conjunto de figuras (PP<sub>*n*</sub>FI). Numa primeira abordagem, assume-se rígida a envolvente do grupo, sendo a placa rectangular repartida em pequenos rectângulos iguais e resolvendo-se um problema de posicionamento de figuras irregulares numa sub-placa da original. Numa segunda abordagem, o conjunto de figuras a replicar é agrupado, sendo descritos os algoritmos de



agrupamento e, posteriormente, aplicados alguns dos algoritmos desenvolvidos no quarto capítulo que replicam uma figura (que neste caso irão replicar o grupo como um todo).

Por último, no sexto capítulo resumem-se os assuntos abordados nesta tese, apresentam-se as principais contribuições, faz-se uma apreciação global do trabalho efectuado e sugerem-se algumas ideias de possíveis desenvolvimentos futuros.



## Capítulo 2

# Descrição do Problema e Revisão Bibliográfica

A resolução de um problema de posicionamento implica a colocação de um conjunto de itens (objectos de pequena dimensão) num (ou mais) objecto(s) de maiores dimensões, limitado(s) ou não, de forma que não exista sobreposição de itens, que seja minimizado o espaço desperdiçado (ou maximizado o espaço utilizado) e, no caso de o objecto maior ter dimensões finitas, que os itens sejam integralmente colocados no seu interior. Se for elevado o número de itens a posicionar, mas reduzida a variedade de formas geométricas diferentes, poderá justificar-se um posicionamento periódico onde, tal como o nome indica, os itens são replicados de uma forma regular ou periódica.

O problema de posicionamento periódico de figuras irregulares, objecto de estudo desta dissertação, é uma variante do problema genérico de posicionamento. Neste capítulo faz-se um enquadramento desta variante nos problemas de posicionamento, apresentando-se uma descrição sucinta do caso geral e partindo para certas características específicas que o distinguem.

Sendo assim, a primeira secção deste capítulo é dedicada aos problemas de Posicionamento. Para além de uma breve descrição dos vários tipos de problemas, baseada na recente tipologia para problemas de posicionamento de Wäscher *et al.* [2007], são enquadrados os problemas de posicionamento de figuras irregulares, cuja descrição é deixada para a segunda secção. Dentro dos problemas de posicionamento de figuras irregulares, há ainda a distinguir a situação de o posicionamento ser feito de forma periódica, sendo esta vertente pormenorizadamente descrita na terceira secção. Por último, dis-

tingue-se na quarta secção o caso do posicionamento periódico numa placa limitada, visto que apenas uma pequena parte dos problemas referidos na literatura considera a existência de fronteiras da placa, sendo adoptadas abordagens em que estão ausentes esses limites físicos.

## 2.1 Problemas de Posicionamento

Os problemas de Posicionamento, também designados por Problemas de Cortes e Empacotamentos<sup>1</sup>, apresentam uma estrutura comum [Wäscher *et al.*, 2007], que pode ser resumida da seguinte forma:

- dado um conjunto de itens pequenos,
- a posicionar num conjunto de objectos grandes,

seleccionar alguns deles (ou todos), isolados ou agrupados em pequenos conjuntos, para posicionar cada um desses conjuntos em cada um dos objectos grandes, tal que:

- não haja sobreposição de itens pequenos,
- se o objecto grande for limitado, todos os itens pequenos fiquem integralmente posicionados no seu interior

sendo que uma determinada função objectivo deve ser optimizada.

A resolução de um problema de posicionamento consiste, então, em determinar quais dos itens pequenos devem ser posicionados (se não todos), em que orientação, em que objecto grande e qual a sua disposição. A disposição dos itens pequenos no objecto grande designa-se por *padrão de corte*.

Formalmente, a resolução de um problema de posicionamento implica a resolução simultânea de até 5 sub-problemas:

- dois problemas de selecção (um de objectos grandes e um de itens pequenos);
- um problema de agrupamento (de itens pequenos);
- um problema de alocação (de itens pequenos a objectos grandes);

---

<sup>1</sup>*Cutting and Packing*

- um problema geométrico (o item pequeno é posicionado dentro do objecto grande, respeitando a orientação e as restrições geométricas impostas pela admissibilidade da solução).

Como tal, os problemas de posicionamento, são problemas combinatórios, com uma forte componente geométrica. Enquadram-se, por isso, na área da Optimização Combinatória e do ponto de vista da sua resolução, são considerados NP-difíceis [Garey e Johnson, 1979]. A componente combinatória está presente em questões tais como a selecção dos itens pequenos a serem posicionados no objecto grande, a selecção do objecto grande (quando há mais do que um), a determinação da orientação do item pequeno, o lugar onde vai ser posicionado o item pequeno escolhido, etc. A componente geométrica está subjacente ao problema sempre que um item pequeno é posicionado, uma vez que há que garantir que os itens pequenos não se sobrepõem e que, no caso de o objecto grande ser limitado, as suas fronteiras não são ultrapassadas.

Um número elevado de investigadores na área dos Cortes e Empacotamentos, excedendo as seis centenas, faz parte do grupo europeu de interesse em problemas deste tipo, designado por *EURO Special Interest Group on Cutting and Packing* [ESICUP]. O número de publicações na área também cresceu consideravelmente nas duas últimas décadas (de acordo com Wäscher *et al.* [2007], 445 na década 1995-2004), sendo por isso frequente aparecerem novas variantes aos problemas de posicionamento tradicionais, propostas novas abordagens ou desenvolvidos novos algoritmos capazes de lidar com instâncias de cada vez maior dimensão ou restrições adicionais. A dificuldade de anteriores tipologias em contemplar novas variantes dos problemas de Cortes e Empacotamentos motivou o surgimento da recente tipologia para problemas de cortes e empacotamentos de Wäscher *et al.* [2007]. Alguns dos defeitos apontados consistiam na existência de situações conflituosas (como um mesmo problema poder ser categorizado como pertencendo a dois tipos diferentes) e na não garantia de criação de grupos de problemas homogéneos (frequentemente, situações que requerem abordagens e metodologias distintas são classificadas de modo a resultarem na mesma categoria de problemas). A organização sistemática de um problema em categorias homogéneas permite, assim, distinguir e enquadrar diferentes variantes encontradas, dando relevo ao essencial e permitindo uma normalização de conceitos, definições e notações. Ou seja, ajuda a encontrar problemas

do mesmo tipo publicados na literatura, com vista a estruturar o estudo, a comparação e o desenvolvimento de novos modelos ou algoritmos, aplicados a um mesmo tipo de problema.

Há que distinguir, então, os vários tipos de problemas de posicionamento. A resolução de um problema de posicionamento implica a identificação de algumas questões, que estão na base da tipologia sugerida. Foram definidos 5 critérios os quais, combinados, permitem definir os vários tipos de problemas básicos:

1. Dimensionalidade (1D, 2D, 3D ou n-dimensionais);
2. Tipo de objectivo (maximização dos itens produzidos ou minimização dos recursos utilizados);
3. Sortido de itens pequenos a posicionar (idênticos, diferentes mas fracamente heterogéneos ou diferentes e fortemente heterogéneos);
4. Sortido de objectos grandes (um único objecto grande ou vários objectos grandes);
5. Forma dos itens pequenos (no caso 2D, 3D ou nD, os itens a posicionar poderão ser considerados regulares ou irregulares (convexos ou não-convexos));

No caso de um único objecto grande, pode ainda subdividir-se em duas situações: todas as dimensões do objecto grande são fixas ou uma ou mais são variáveis (eventualmente, infinitas, se for considerado o plano como objecto grande).

As categorias básicas de problemas de posicionamento surgem por combinação do 2º e 3º critérios, o tipo de objectivo e o sortido de itens pequenos. As restantes características do problema servem para subdividir as categorias básicas em subcategorias de problemas de posicionamento mais homogéneas. A categorização de problemas de posicionamento encontrados em literatura recente efectuada por Wäscher *et al.* [2007], permite constatar a existência de uma grande diversidade de tipos de problemas. Esta diversidade origina grandes diferenças a vários níveis: nas técnicas de resolução utilizadas, na dimensão das instâncias dos problemas resolvidos e, obviamente, na qualidade dos resultados obtidos.

## **2.2 Problemas de Posicionamento de Figuras Irregulares – PFI13**

---

O problema tratado nesta dissertação – posicionamento periódico de figuras irregulares – faz parte de uma classe de problemas mais abrangente, os problemas de posicionamento de figuras irregulares, que por sua vez, são um caso particular do problema genérico posicionamento. Ou seja, o problema de PFI pode ser considerado um subtipo deste último tipo de problema, pelo que foi tratado em separado na terceira secção, deixando para a próxima secção uma breve descrição dos problemas de posicionamento de figuras irregulares. Será tratada a vertente bi-dimensional.

## **2.2 Problemas de Posicionamento de Figuras Irregulares – PFI**

No início deste capítulo apresentou-se uma definição genérica de um problema de posicionamento, sendo necessário acrescentar alguma característica específica que distinga os vários tipos. Naturalmente, a característica principal que caracteriza um problema de Posicionamento de Figuras Irregulares – PFI – e os distingue de outros tipos de problemas de posicionamento, é o facto de os itens pequenos terem formas irregulares (não-regulares). O facto de serem irregulares implica uma maior complexidade relativa à componente geométrica do problema. Se a componente geométrica existe em qualquer problema de posicionamento, no caso de as formas serem irregulares obviamente se torna computacionalmente mais pesada a tarefa de garantir que dois itens pequenos não se sobrepõem, sempre que um item é colocado num objecto grande onde outros itens já foram colocados. Para a resolução deste tipo de problemas, podem ser aplicadas:

- simples técnicas de enumeração ou técnicas optimizantes – programação linear, programação dinâmica ou pesquisa em árvore – para instâncias de pequena dimensão e figuras “pouco” irregulares;
- heurísticas ou métodos de pesquisa local baseados em meta-heurísticas para problemas 2D e 3D irregulares, de média ou grande dimensão.

Neste contexto, é raro encontrar abordagens de resolução exactas, sendo normalmente preferidas as abordagens heurísticas. Em todo o caso, quando são aplicadas técnicas optimizantes, normalmente são-no a simplificações ou relaxações do problema original, ou assumindo certos pressupostos que reduzam o seu grau de complexidade. No caso mais comum, que é o recurso a

heurísticas e meta-heurísticas, mesmo num problema de dimensão reduzida, é essencial a existência de funções geométricas eficientes.

Quanto à dimensionalidade de problemas de PFI, é habitual cingirem-se a 2D. Isto deve-se, não só, à reduzida aplicação de problemas irregulares em 3D, mas também ao excessivo grau de dificuldade em lidar com a componente geométrica em problemas desta dimensão. A representação das formas é normalmente feita através de regiões poligonais, podendo ou não conter buracos (também raramente abordado, dada a complexidade acrescida). É também obrigatório que o polígono que descreve a fronteira não tenha pontos de multiplicidade superior a um, i.e. o polígono não passa duas ou mais vezes pelo mesmo ponto. As linhas curvas são aproximadas por segmentos de recta exteriores, que garantem que a curva é totalmente contida por essa região poligonal.

A maior dificuldade a nível geométrico leva, naturalmente, à simplificação dos problemas abordados do ponto de vista combinatório. Uma dessas simplificações é a resolução de problemas com apenas um objecto grande de cada vez ou, no caso de existirem mais do que um, resolver consecutivamente um problema para cada um dos objectos grandes de forma independente. Outra simplificação habitual é a imposição ao objecto grande de uma forma regular (rectangular), com ambas as dimensões fixas ou uma delas infinita. Desta forma, é eliminado o problema de seleccionar que items pequenos posicionar, resumindo-se o problema a minimizar o comprimento necessário para que todos sejam posicionados. Este último caso é conhecido na literatura como *Irregular Strip Packing problem* ou *Nesting problem*, sendo talvez o mais comum. Segundo a tipologia adoptada, é um problema de Posicionamento com Dimensões Variáveis.

Não serão descritas as muitas técnicas de resolução encontradas na literatura para resolver um problema de PFI, por não se tratar concretamente do problema objecto deste trabalho. Destacam-se, no entanto, um pequeno conjunto de publicações nesta área, por apresentarem alguma afinidade com as abordagens propostas na segunda parte deste trabalho.

Whelan e Batchelor [1996] propõem um sistema de posicionamento de figuras irregulares, o qual pode ser decomposto em dois módulos principais: o “Heuristic Packer” (HP) e o “Geometric Packer” (GP). O módulo HP determina, para cada figura, a sua orientação e posição na sequência. O GP decide, para a próxima figura na sequência e na orientação pré-definida, qual



## 2.2 Problemas de Posicionamento de Figuras Irregulares – PFI15

---

o melhor ponto de posicionamento.

Em [Lamousin e Waggenpack Jr, 1997] é descrita uma técnica de posicionamento de figuras irregulares numa placa com forma geométrica arbitrária, sendo o principal objectivo o posicionamento de figuras em formas complementar não ocupadas da placa. Não é imposta qualquer restrição à orientação das figuras colocadas. Os autores apresentam uma solução construtiva para o problema que descrevem, definindo critérios para seleccionar um item, orientá-lo e posicioná-lo na placa, até que não seja possível posicionar mais nenhum. O critério utilizado para rodar uma figura é semelhante ao utilizado por Adamowicz e Albano [1972], ou seja, a figura é rodada de modo que um dos seus lados fique alinhado com algum lado de uma outra figura ou fronteira da placa.

Uday *et al.* [2001] propõem também uma heurística de posicionamento baseada nas características das formas geométricas das figuras a posicionar. Recorrendo a algoritmos genéticos, determinam a sequência pela qual as figuras deverão ser posicionadas, para decidirem qual a melhor orientação de cada figura e o ponto onde deverá ser posicionada face às restantes.

[Gomes e Oliveira, 2002] propõem uma nova heurística de posicionamento baseada numa estratégia de pesquisa sobre o espaço de soluções, a troca entre figuras contíguas na sequência pela qual vão ser posicionadas. Este mecanismo de orientação da pesquisa assenta, posteriormente, numa heurística de posicionamento que garante a admissibilidade da solução obtida. A heurística de posicionamento é baseada na técnica “bottom-left” (a próxima figura é colocada no ponto disponível mais abaixo e à esquerda possível), o que garante o preenchimento de buracos.

Recentemente, Bouganis e Shanahan [2007] propõem um sistema de posicionamento de formas irregulares. O método determina, de uma forma dinâmica, a orientação de cada figura e a sequência pela qual devem ser posicionadas. Ou seja, tendo em consideração que, de cada vez que uma nova figura é posicionada, um novo arranjo das figuras passa a existir, novas orientações e reformulação da sequência de figuras restantes poderão ocorrer. Inicialmente, o sistema segue uma abordagem baseada no objecto a posicionar, cuja orientação e posição (na sequência) assentam apenas em características geométricas das figuras. À medida que as figuras vão sendo posicionadas, essas orientações e sequência inicialmente definidas podem ser alteradas, tomando em consideração não apenas as características das figu-

ras a posicionar, mas também os potenciais encaixes das figuras sobran- tes face às regiões não ocupadas da placa. Trata-se de uma abordagem orientada pelo posicionamento. A interligação das duas abordagens conduz a um posicionamento dinâmico. Este sistema é semelhante ao proposto por Whelan e Batchelor [1996], com a grande diferença de apresentar uma característica dinâmica e não estática.

### 2.2.1 Variantes do Problema de PFI

O problema de PFI tal como descrito, é a forma habitualmente encontrada na literatura. Existem, no entanto, variantes deste problema base, das quais algumas nos interessam em particular no âmbito do trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação:

#### Rotação livre dos itens a posicionar

Em algumas aplicações concretas, admitem-se rotações no posicionamento das formas irregulares, o que origina uma variante ao problema base. A consideração de rotações no posicionamento das formas irregulares aumenta bastante a dificuldade dos problemas, quer ao nível da componente combina- tória, por aumento no número de combinações possíveis, quer da componente geométrica, pela existência de maior diversidade de formas geométricas. As situações onde são admitidas rotações no posicionamento das formas irregu- lares agrupam-se nos seguintes casos típicos:

- rotações de ângulos específicos —  $\{0^\circ, \{90^\circ, 180^\circ\}$ ;
- pequenas variações em torno de um ângulo —  $\alpha \pm 3^\circ$ ;
- ângulos de rotação num certo intervalo —  $[30^\circ, 60^\circ]$ ;

Esta variante surge em indústrias muito específicas, onde a matéria- -prima a cortar não apresenta um sentido de posicionamento obrigatório, sendo disso um bom exemplo alguns casos encontrados na indústria meta- lomecânica.

#### Posicionamento periódico de figuras irregulares

Quando o número de figuras a posicionar é muito elevado, mas reduzido o número de figuras diferentes (ou apenas um único), pode tornar-se vantajoso

## **2.2 Problemas de Posicionamento de Figuras Irregulares – PFI17**

---

“perseguir” dois objectivos: não só maximizar o número de itens pequenos posicionados, mas também obter padrões de corte que sejam fáceis e rápidos de cortar. A variante de posicionamento periódico de figuras irregulares surge em situações onde a operação de corte é crítica para o processo produtivo global.

### **Agrupamento de figuras**

Um outro tipo de variante com interesse para este trabalho, é o agrupamento de figuras, tratado na literatura sob diferentes designações, sendo a formação de *clusters* a mais comum ou, simplesmente, *clustering*. Este problema tem sido abordado sob diferentes perspectivas, das quais se salientam duas em particular. A primeira delas encara o agrupamento de figuras como um acto isolado e apresenta como objectivo final a minimização da área de uma qualquer envolvente do conjunto de figuras agrupadas:

- é imposta uma forma geométrica rígida ao grupo das figuras (por exemplo, um rectângulo), sendo o principal objectivo a minimização da área da envolvente (rectangular, neste caso) do grupo;
- não é imposta nenhuma forma geométrica em particular ao grupo das figuras, sendo a principal preocupação a formação de um grupo eficaz. Um grupo “eficaz” pode ser obtido, por exemplo, por minimização da área da envolvente convexa do grupo.

Numa segunda perspectiva, o problema de agrupamento é encarado sob a égide de um posicionamento periódico. Ou seja, mais importante do que a qualidade do grupo formado por si só, é a eficácia do posicionamento obtido quando o mesmo é replicado periodicamente. Será considerado eficaz um grupo que conduza a uma maior densidade de posicionamento, no caso de posicionamento no plano ou a um maior aproveitamento da placa, no caso do posicionamento numa placa de dimensões finitas. A maior parte dos casos publicados refere um posicionamento periódico no plano.

### **Matéria-prima de origem natural**

Quando a matéria-prima onde deverão ser posicionadas as figuras irregulares é um produto de origem natural, nomeadamente, uma pele de animal (indústria do calçado) ou uma tábua de madeira, é frequente a existência de

objectos grandes não homogêneos ou com forma irregular. Nesta variante o objecto grande pode apresentar zonas defeituosas no seu interior, i.e. que não podem ser utilizadas, ou então zonas com diferentes níveis de qualidade e onde objectos pequenos têm de ser posicionados em zonas com um determinado nível de qualidade.

### 2.2.2 Envolvente Industrial

Os problemas de PFI poderão surgir em variadíssimos contextos industriais, associados a processos produtivos onde o corte de matérias-primas seja necessário. São disso exemplo a indústria das confecções, a indústria do calçado, a indústria vidreira, a indústria de mobiliário em madeira ou aglomerados de madeira e a indústria de metalomecânica. Em todas estas indústrias há processos de corte semelhantes em certos aspectos e diferentes noutros, devido a cada processo produtivo apresentar características próprias que os diferenciam. No entanto, é comum a todas as indústrias a necessidade de reduzir aos desperdícios, sendo tanto mais necessário prover a essa necessidade quanto mais cara for a matéria-prima. A indústria metalomecânica, particularmente os seus sub-sectores da construção naval, automóvel e aeronáutica, caracteriza-se também pela utilização intensiva das mais avançadas tecnologias de produção. A maioria das aplicações comerciais destinam-se a esta indústria. O recurso a ferramentas de CAD/CAM nestes casos é também frequente para determinar os padrões de corte.

É comum a todas as indústrias que necessitem de posicionar e cortar formas irregulares a existência de apoio informático em três fases do processo produtivo: concepção e desenho das figuras, determinação de padrões de corte e, por fim, na determinação do percurso de corte e no controlo automático da máquina de corte. A área menos desenvolvida, e também a de maior complexidade, é claramente a de determinação de padrões de corte, ou seja a resolução de problemas de PFI.

## 2.3 Posicionamento Periódico

O posicionamento periódico surge na literatura sob diferentes designações, nomeadamente, *lattice packing*, *lattice nesting*, *periodic packing*, *regular placement*, *regular packing*, entre outras. Há poucos artigos na literatura sobre aplicações industriais. O tipo de indústrias onde o posicionamento periódico

dico tem aplicação é extremamente diversificado, desde a indústria têxtil, o calçado, a metalomecânica, passando pela construção naval, etc.

O caso tratado nesta dissertação é do tipo bi-dimensional. Por isso, os “items” são chamados de “figuras” e o objecto maior chamado de “placa”. As figuras são formas poligonais, pois, mesmo que apresentem partes curvas, estas são aproximadas por segmentos de recta exteriores à curva.

No respeitante ao número de items, distinguem-se dois tipos de problemas:

- quando há um único tipo de item a replicar periodicamente (PPFI);
- quando há um conjunto reduzido de items diferentes, a partir do qual é formado um grupo que deverá ser replicado periodicamente (PPnFI).

Ambas as formas do problema são contempladas neste trabalho.

Quanto à natureza do item, o posicionamento periódico pode considerar:

- forma regular;
- forma irregular convexa;
- forma irregular.

Uma forma poligonal é considerada regular se apresentar todos os lados e ângulos iguais. Logo, uma forma regular é, também, convexa. É irregular convexa se, embora não sendo regular, for convexa. É irregular nos restantes casos. O caso genérico de posicionamento de figuras irregulares foi considerado nesta dissertação.

Relativamente ao tipo de objecto maior, onde os items pequenos deverão ser posicionados, pode dividir-se em três tipos de problemas:

- o objecto maior possui dimensões finitas, sendo o objectivo a maximização da sua utilização;
- o objecto maior é um rectângulo de comprimento infinito, sendo o objectivo o posicionamento de um determinado número fixo de items pequenos, por forma a minimizar o comprimento do objecto maior utilizado;

- o posicionamento é feito no espaço  $k$ -dimensional específico do problema tratado, pretendendo-se neste caso maximizar a densidade de posicionamento dos itens colocados, uma vez que não existem fronteiras.

O objecto maior é, em contexto industrial, a matéria-prima. O problema abordado e descrito nesta dissertação considera a existência de limites fixos e pré-definidos do objecto de maior dimensão, designado por “placa”, visto tratar-se de um problema 2D. O segundo tipo designado para a apresentação da matéria-prima, surge com frequência associado a problemas de posicionamento genéricos, i.e., não periódicos, sendo menos habitual encontrar-se associado a problemas de posicionamento periódico.

Consoante o tipo de aplicação industrial, podem (ou não) ser admitidas rotações. A consideração de rotações, além de aumentar consideravelmente a dificuldade de resolução dos problemas, nem sempre é possível para uma dada matéria-prima. Por exemplo, e utilizando a indústria têxtil como referência, se a matéria-prima for malha, para serem posicionadas partes de uma camisola, nenhuma rotação pode ser considerada, enquanto no caso do corte de lençóis (de uma só côr, considerando que não existem padrões desenhados), uma rotação de  $180^\circ$  é aceite e pode ser considerada. Se nos reportarmos à indústria de metalomecânica, uma chapa não tem uma orientação pré-definida, as figuras poderão ser posicionadas numa orientação qualquer. É este último caso, cuja orientação dos itens a posicionar em certas condições pode ser qualquer, que foi abordado nesta dissertação.

Dada uma figura que se pretende replicar segundo um posicionamento periódico, esse posicionamento fica completamente definido quando são conhecidos os valores dos dois vectores geradores,  $v_0$  e  $v_1$ , no caso de o objecto maior onde vão ser posicionadas as réplicas da figura dada ser o plano (figura 2.1). Neste caso, pode ainda acrescentar-se que o resultado do posicionamento periódico é independente da orientação da figura dada, tudo se resume a uma mudança do sistema de coordenadas, i.e., após uma dada rotação, é possível obter novos parâmetros a partir dos parâmetros anteriores já conhecidos para uma dada orientação, tal como é provado em [Segenreich, 1988].

Se o objecto maior tiver dimensões finitas, a placa, esta última afirmação já não é válida. Ou seja, é necessário saber exactamente a orientação da figura dada. Além disso, para além da determinação do par de vectores

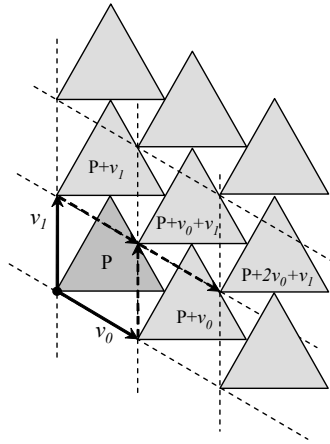


Figura 2.1: Exemplo de posicionamento periódico no plano.

geradores do posicionamento periódico,  $v_0$  e  $v_1$ , é ainda necessário conhecer um ponto qualquer de posicionamento de uma figura dentro da placa,  $P_0$ , pois a partir desse ponto e por combinação linear dos dois vetores (coeficientes inteiros), fica automaticamente determinado o posicionamento das restantes figuras (figura 2.2).

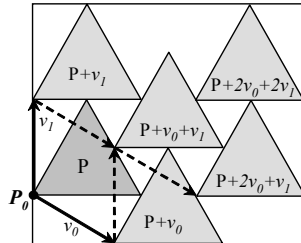


Figura 2.2: Exemplo de posicionamento periódico numa placa de dimensões finitas.

Uma medida habitual da qualidade do posicionamento regular é a densidade do posicionamento. Há que distinguir duas situações: posicionamento no plano e posicionamento numa placa limitada. No caso do posicionamento no plano, a densidade de posicionamento é dada por  $A/|v_0 \times v_1|$ , representando  $A$  a área da figura a replicar e  $|v_0 \times v_1|$  a área do paralelogramo fundamental formado pelo par de vetores geradores do posicionamento periódico  $v_0$  e  $v_1$ . No caso da existência de uma placa limitada, onde as figuras são replicadas na condição de ficarem dentro da placa, a densidade de posicionamento é dada por  $A_t/A_p$ , representando  $A_t$  a soma total das áreas das

figuras integralmente posicionadas dentro da placa e  $A_p$  a área da placa. Ou seja, neste último caso, a densidade é directamente proporcional ao número de figuras posicionadas.

Os próximos três pontos serão dedicados, respectivamente, ao posicionamento periódico de figuras regulares, irregulares e grupos de figuras. O primeiro ponto serve apenas de enquadramento e referência aos seguintes dois, os quais constituem a base do trabalho desenvolvido nesta dissertação.

### 2.3.1 Posicionamento Periódico de Figuras Regulares e Irregulares Convexas

Os primeiros resultados publicados sobre o problema de posicionamento periódico reportam-se ao problema de posicionamento periódico de uma figura convexa no plano, segundo abordagens matemáticas [Rogers, 1964a]. Neste artigo, o autor demonstra que a maximização da densidade de posicionamento de réplicas de uma figura convexa no plano é conseguida utilizando um posicionamento periódico. Quatro décadas mais tarde, Tóth [1995] contradiz parte desta afirmação, mostrando que se  $P$  for um polígono convexo e não apresentar lados paralelos, então, a maximização da densidade de posicionamento no plano de réplicas de  $P$  não é conseguida através de um posicionamento periódico.

Durante muito tempo, trabalhos publicados, directa ou indirectamente relacionados com o problema de posicionamento periódico, consideram apenas polígonos convexos. Só uns anos mais tarde começa a ser considerado o problema de posicionamento de polígonos irregulares não convexos, cujas primeiras abordagens transformam em problemas de posicionamento de polígonos convexos, ou mesmo regulares. Uma abordagem habitual é a substituição do polígono dado por um polígono circunscrito convexo, muitas das vezes, um polígono regular. Mesmo no caso de polígonos convexos constituídos por um elevado número de lados, poderão ser substituídos por polígonos circunscritos ainda convexos, mas com menor número de lados. Um polígono regular com um número par de lados tem a particularidade de preencher totalmente o plano.

Em [Dori e Ben-Bassat, 1983] é descrito o problema de circunscrever um polígono convexo por outro polígono convexo com menor número de lados, com um acréscimo mínimo de área. Os mesmos autores apresentam em [Dori e Ben-Bassat, 1984] o problema de posicionamento periódico de uma



figura convexa. Decompõem o problema original em dois sub-problemas, cuja combinação de resultados conduz à solução do problema dado:

1. dado um polígono convexo original  $P_n$ , deverão ser calculados todos os polígonos “ladrilho” (em inglês *paver*) possíveis que o circunscrevam. Um “ladrilho” é um polígono convexo regular cujas réplicas preenchem completamente o plano, sem espaços livres ou sobreposições, i.e., a densidade obtida é igual a 1. Os “ladrilhos” considerados neste trabalho são o hexágono e o pentágono;
2.  $P_n$  deverá ser circunscrito no “ladrilho” que melhor se ajuste,  $P_n^*$ , em termos de eficácia conseguida para o posicionamento.

Os autores acrescentam que os algoritmos propostos poderão ser aplicados a uma figura não convexa, desde que seja previamente calculada uma sua envolvente convexa que minimize o desperdício. Quase uma década mais tarde, esta técnica foi utilizada e melhorada por Koroupi e Loftus [1991] ao aplicarem a ideia base descrita em [Dori e Ben-Bassat, 1984] a polígonos não-convexos. É encontrada a envolvente convexa cujo acréscimo de área seja mínimo, seja um polígono regular ou não. O polígono convexo encontrado é então posicionado por recurso a “ladrilhos” que preencham completamente o plano.

Considerando ainda o posicionamento periódico de uma única figura, surge entretanto uma abordagem diferente ao problema: posicionamento periódico duplo (ou *double-lattice*). Consiste no posicionamento de uma única figura, posicionada alternadamente na rotação dada e rodada de  $180^\circ$  (figura 2.3). O que se consegue é que as duas figuras, a original e a sua rotação de  $180^\circ$ , normalmente encaixem bem e consigam, quando replicadas, um aproveitamento melhor do espaço do que o posicionamento periódico simples. No exemplo da figura 2.3, as figuras encaixam perfeitamente, conduzindo a uma densidade máxima (no plano). São vários os trabalhos publicados considerando esta abordagem.

Em [Kuperberg e Kuperberg, 1990] este problema é abordado, considerando formas convexas. Os autores começam por referir dois resultados que serviram de base ao seu trabalho: o primeiro resultado deve-se a Mahler [1946] e a Tóth [1948], que provaram que qualquer forma 2D convexa e simétrica admite um preenchimento do plano com uma densidade de pelo menos  $\sqrt{3}/2$ ; o segundo deve-se também a Tóth [1950] e a Rogers [1964b], que

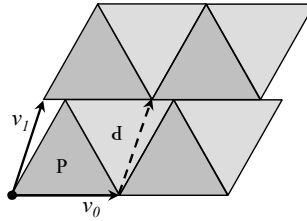


Figura 2.3: Exemplo de posicionamento periódico duplo, conduzindo a uma densidade de 1 no plano.

provaram que polígonos regulares com  $n$  arestas, sendo  $n$  par, conseguem um preenchimento máximo do plano mediante um posicionamento periódico. Com base nestes resultados, os autores demonstram que é possível posicionar periodicamente qualquer polígono convexo (seja ou não regular ou simétrico) com uma densidade não inferior a  $\sqrt{3}/2$ , desde que a colocação das figuras seja feita segundo um posicionamento periódico duplo.

Mais tarde, em [Mount e Silverman, 1990] e [Mount, 1991] é demonstrado que, dado um polígono convexo  $P$  com  $n$  vértices, o posicionamento periódico de densidade máxima no plano (solução ótima) é um posicionamento duplo. Os autores descrevem um algoritmo, baseado numa redução efectuada em [Kuperberg e Kuperberg, 1990], onde mostram que a resolução do problema dado passa por encontrar um determinado paralelogramo de área mínima, inscrito no polígono. O algoritmo descrito encontra esse paralelogramo em tempo  $O(n)$ .

Em [Duparcmeur *et al.*, 1995] os autores demonstram, matematicamente, que é possível construir posicionamentos periódicos de elevada densidade a partir de qualquer polígono convexo regular. A densidade média das simulações que apresentam é da ordem de 0.9. Os mesmos autores estudam ainda [Duparcmeur *et al.*, 1997], por simulação numérica, a progressiva densificação do posicionamento periódico de polígonos regulares idênticos, tendo-se debruçado sobre pentágonos e heptágonos. Uma vez que estes polígonos não preenchem totalmente o plano, i.e., não conseguem conduzir a uma densidade máxima de 1, estudam a evolução da densidade com base na alteração do ponto de contacto com os polígonos adjacentes.

Os exemplos apresentados são os mais relevantes encontrados na literatura, para ilustrar a importância dada pela comunidade científica durante quatro décadas ao estudo do posicionamento periódico de uma única figura

regular ou irregular convexa. Na generalidade dos trabalhos publicados, o problema foi abordado numa perspectiva matemática de optimização e o posicionamento considerado no plano, i.e., não há uma aplicabilidade directa ao mundo real em que a matéria-prima é finita e limitada.

### 2.3.2 Posicionamento Periódico de Figuras Irregulares - PPF I

Neste ponto descreve-se o problema de PPF I e apresenta-se uma revisão bibliográfica e o estado da arte sobre os problemas de PPF I encontrados na literatura.

#### Caracterização do Problema de PPF I

O problema de PPF I define-se de forma em tudo semelhante ao problema apresentado na secção anterior, com a particularidade de as figuras não serem convexas. Caracteriza-se e distingue-se pela existência de um único tipo de figura, neste caso, irregular. Segundo a tipologia proposta por Wäscher *et al.* [2007], trata-se de um problema de posicionamento bi-dimensional de itens irregulares idênticos<sup>2</sup>.

O primeiro problema resolvido nesta dissertação enquadra-se neste ponto. Dada uma figura irregular e uma placa rectangular de dimensões fixas, pretende-se maximizar o número de figuras a posicionar de forma periódica na placa.

#### Revisão Bibliográfica do Problema de PPF I

Embora o problema de posicionamento periódico de múltiplas réplicas de uma figura venha sendo estudado desde o final dos anos 40, apenas nos anos 90 surge trabalho publicado considerando o posicionamento periódico de figuras irregulares. Dada a dificuldade acrescida da parte geométrica, normalmente não é considerada a possibilidade de rotação das figuras e raramente é considerada uma placa de dimensões finitas.

As primeiras abordagens consideram o problema de posicionamento de figuras irregulares separado em dois sub-problemas: primeiro, calculam uma determinada envolvente convexa da figura e só depois replicam essa envolvente convexa. Ou seja, transformam um problema de figuras irregulares num problema de figuras convexas. Tradicionalmente, há duas aproximações

---

<sup>2</sup> *2-dimensional irregular Identical Item Packing Problem*

preferenciais: a hexagonal e a rectangular, pois ambas conseguem preencher completamente o plano. No entanto, estas técnicas dependem fortemente da figura que se está a aproximar, pois se a sua envolvente preenche completamente o plano, a figura em si pode ser muito mal aproximada por tal polígono e o desperdício do posicionamento pode ser enorme.

Em [Freeman e Shapira, 1975] é determinada a envolvente rectangular de menor área para uma curva fechada qualquer. Este trabalho serve de base a alguns problemas de posicionamento de uma só figura ou de um conjunto de figuras, agrupadas de forma a que a área da sua envolvente rectangular seja mínima.

Koroupi e Loftus [1991] aplicam a mesma ideia base de Dori e Ben-Bassat [1983], já descrita aquando do posicionamento de figuras regulares, a polígonos não-convexos, convertendo-os em hexágonos que, replicados periodicamente, preenchem completamente o plano.

Em [Martynov, 1999] são resumidos certos fundamentos teóricos sobre a construção racional de um posicionamento periódico. Reporta-se ao posicionamento periódico simples e duplo e, quanto ao local onde as figuras são posicionadas, consideram o plano, uma placa rectangular de dimensões finitas e uma placa de altura pré-definida e de comprimento infinito (*strip*). O artigo aborda muitos assuntos com pouca profundidade e detalhe e, embora o autor termine o artigo apresentando alguns resultados comparativos, relativos às três possíveis localizações (plano, placa, *strip*), posiciona figuras diferentes em cada um dos exemplos, não fazendo sentido comparar densidades obtidas em cada caso.

Em [Stoyan e Pankratov, 1999], os autores abordam o problema de posicionamento periódico simples e duplo de uma figura irregular numa placa rectangular. O modelo matemático do problema geral é formulado, sendo depois simplificado, de forma a reduzir a sua complexidade. A simplificação introduzida implica o posicionamento das figuras na placa por forma a constituírem linhas (ou colunas) paralelas à aresta horizontal (ou vertical) da placa. A orientação original da figura a posicionar pode ser alterada com o intuito de permitir aumentar o número de figuras a posicionar integralmente na placa, i.e., não constitui uma restrição do problema. Os autores propõem um método para a resolução do problema simplificado, mostrando que a solução encontrada é óptima nesta situação. Neste artigo é ainda completamente definida a instância utilizada e as dimensões da placa, per-

mitindo a sua posterior utilização para comparação de resultados obtidos através de novos métodos desenvolvidos. A instância utilizada foi retirada de um problema real da indústria do calçado.

Já em [Stoyan e Patsuk, 2000], os autores abordam o problema de posicionamento periódico de uma figura irregular no plano. Por ser no plano, e tal como já foi referido antes, é irrelevante o facto de a figura poder ser rodada, pois a sua rotação apenas representa uma mudança do sistema de coordenadas. É demonstrado pelos autores que, para que a densidade de posicionamento seja maximizada, é necessário que uma qualquer figura esteja em contacto com duas figuras obtidas por translacção dos vectores geradores do posicionamento periódico. Também demonstram que o conjunto de condições que garantem a não-sobreposição entre todos os pares de figuras pode ser resumido ao conjunto de restrições que envolve apenas quatro figuras posicionadas, encontrando-se implicitamente contempladas todas as restantes condições de não-sobreposição. O modelo matemático assenta na identificação do lugar geométrico dos pontos onde é possível colocar uma figura face a outra, garantindo a obtenção da solução óptima.

Cheng e Rao [1999] apresentam um algoritmo de compactação da “vizinhança” (no sentido de figuras contíguas), para procederem ao posicionamento periódico de réplicas de uma figura irregular numa placa quadrangular. Na sua abordagem definem diferentes estratégias para o posicionamento das restantes figuras em redor da primeira figura posicionada, umas conduzindo a posicionamentos mais compactos (densos) do que outras. O algoritmo que desenvolvem tem em conta a relação entre o número de “vizinhos” de uma figura e o espaço partilhado entre eles. Definem uma medida da compactação obtida pelo conjunto formado pela primeira figura colocada e as restantes que a envolvem. Replicam este conjunto, seguindo a estrutura que melhor aproveita a placa. No entanto, não permitem qualquer rotação da figura dada, i.e., impõem a manutenção da orientação original da figura. Os autores fornecem todos os dados necessários para posterior comparação de resultados. Apresentam ainda uma melhoria dos resultados obtidos pelo algoritmo proposto de acordo com a variação do lado de uma placa quadrangular.

Os mesmos autores apresentam, mais tarde [Cheng e Rao, 2000], uma evolução desse mesmo algoritmo de compactação da vizinhança, dotando-o de flexibilidade ao permitirem que a figura possa ser rodada antes de

ser posicionada. Para isso, começam por determinar uma primeira solução de posicionamento, obtida após atribuição de valores a dois parâmetros: o ponto de colocação de uma primeira figura na placa e o ângulo de rotação da figura. Recorrendo à aplicação de algoritmos genéticos, melhoram o preenchimento da placa por variação destes dois parâmetros, apenas.

### 2.3.3 Posicionamento Periódico de Conjuntos de $n$ Figuras Irregulares - PP $n$ FI

Neste ponto descreve-se o problema de PP $n$ FI e apresenta-se uma revisão bibliográfica e o estado da arte sobre os problemas de PP $n$ FI encontrados na literatura.

#### Caracterização e enquadramento do Problema de PP $n$ FI

Quando se pretende posicionar repetidamente numa placa um reduzido número de figuras irregulares ( $n$ ), estamos perante um problema de PP $n$ FI. Embora a revisão bibliográfica revele um reduzido número de publicações reportando-se ao problema de PP $n$ FI no geral, a abordagem seguida que é praticamente comum a todas, considera o problema dividido em dois sub-problemas: o conjunto de figuras é primeiro agrupado e posteriormente replicado. Ou seja, o problema original vê o seu grau de complexidade reduzido, ao ser dividido em dois sub-problemas que serão resolvidos de forma sequencial. No entanto, poderá ser dada uma outra interpretação que considere o posicionamento periódico figura a figura, sem haver a formação explícita de um grupo.

O problema de agrupar um reduzido número de figuras tem sido abordado na literatura, associado ou não a um posicionamento periódico. O facto de agrupar duas figuras, tirando partido das suas concavidades e reentrâncias, pode ser visto como uma forma de diminuir a dimensão do problema original, pois se de  $n$  figuras,  $k$  forem posicionadas já agrupadas, em vez de  $n$  figuras para posicionar, restam  $n - k$ . O mesmo se pode dizer se as  $n$  figuras forem agrupadas duas a duas, restando apenas  $n/2$  figuras para posicionar. Em último caso, se das  $n$  figuras, existir apenas um reduzido número de figuras diferentes ( $k$ ), que se pretende posicionar replicando o maior número de vezes possível, poderão essas  $k$  figuras ser agrupadas numa única – formando um grupo – resumindo-se então o problema de PP $n$ FI a um problema de PFI para uma única figura (o grupo).

Encontram-se descritas na literatura diversas formas de agrupamento, das quais se salientam dois aspectos que as diferenciam:

- quando é imposta uma forma geométrica ao grupo (por exemplo, um retângulo), pretendendo-se neste caso agrupar parte ou todo o conjunto de figuras de modo a minimizar a envolvente rectangular do grupo;
- quando não é imposta qualquer forma geométrica ao grupo das figuras, sendo a principal preocupação a formação de um grupo eficaz. Um grupo “eficaz” é normalmente obtido por minimização da área da envolvente convexa do grupo.

Mais uma vez, há ainda a considerar quatro possibilidades, quanto à orientação permitida para as figuras que constituem o grupo:

- a orientação original das figuras é mantida;
- um conjunto discreto de orientações;
- as figuras podem ser rodadas apenas de um ligeiro ângulo de ajuste;
- as figuras podem ser rodadas livremente dentro de um intervalo.

Se se pretender replicar periodicamente o grupo, dependendo de se tratar de um posicionamento no plano ou numa placa de dimensões finitas, fará ou não sentido permitir a rotação do grupo formado, tal como já foi referido para o posicionamento de uma única figura.

Considerando que a orientação original das figuras é mantida, o problema de construir um grupo eficaz é já de si uma tarefa de cariz altamente combinatorio, pois há que determinar que figuras vão ser contíguas no grupo, em que ponto relativamente uma à outra devem ser colocadas, qual deverá ser a próxima figura a colocar, por forma que no final, o grupo resulte num “todo” coeso e conduza a pouco desperdício interno. Quando se dá total liberdade à orientação das figuras, como as figuras podem ser de qualquer tipo (regulares ou não, ter muitos ou poucos vértices, concavidades pronunciadas, etc.), a natureza combinatoria do problema aumenta de forma exponencial. Por este motivo, não são muitos os trabalhos publicados que permitam a rotação das figuras a posicionar.

O segundo problema resolvido nesta dissertação enquadra-se neste ponto. Dado um reduzido conjunto de figuras irregulares e uma placa rectangular de dimensões fixas e finitas, pretende-se maximizar o número de figuras a posicionar, tendo em consideração que cada conjunto de figuras deve ser posicionado idêntico número de vezes. Serão propostas duas abordagens, enquadrando-se uma delas no âmbito da descrição acabada de fazer e a outra de cariz completamente diverso.

### Revisão Bibliográfica do Problema de $PP_nFI$

Sendo os problemas de posicionamento periódico de uma figura irregular, numa placa de dimensões finitas, de natureza combinatória NP-difícil, mesmo sem considerar a possibilidade de rotação da figura dada, o grau de dificuldade aumenta quando a orientação das figuras pode ser qualquer. Naturalmente, se em vez de uma figura existir um conjunto de figuras que se pretende posicionar periodicamente, o grau de dificuldade aumenta drasticamente. Por esta razão, o problema de posicionamento periódico de grupos de figuras tem sido normalmente tratado para uma orientação das figuras inalterável. Ou então, algumas regras ou considerações são impostas, para diminuição da componente combinatória do problema a resolver.

Como o número de artigos publicados que directamente resolve o problema de  $PP_nFI$  é reduzido, são também referidos trabalhos afins. Os primeiros trabalhos publicados que abordam o problema de agrupamento de figuras reportam-se à década de 70. Nomeadamente, Adamowicz e Albano [1972] resolvem um problema de PFI através do agrupamento de figuras. Descrevem um problema de cortes encontrado na indústria de construção naval, onde tipicamente, uma ordem de fabrico contém cerca de 80% de figuras rectangulares e as restantes são irregulares. O corte é feito numa placa rectangular limitada e as figuras podem ser colocadas segundo uma dada rotação adequada. O problema é resolvido em duas fases: na primeira, são criados grupos rectangulares com as figuras irregulares e na segunda, é resolvido um problema de cortes de rectângulos, pois todas as figuras a posicionar são já rectangulares. A técnica usada para a formação dos grupos é referida neste artigo e posteriormente descrita em [Adamowicz e Albano, 1976]. A abordagem heurística proposta traduz-se basicamente num conjunto de opções de formação de grupos de figuras, que se resumem no seguinte:

- encontrar envolventes rectangulares de uma figura irregular;



- encontrar envolventes rectangulares de pares de figuras irregulares, por vezes duas figuras iguais rodadas uma relativamente à outra de  $180^\circ$ ;
- dentro das envolventes rectangulares formadas, encaixar figuras mais pequenas que aí possam preencher buracos.

As figuras são rodadas de modo que uma aresta seja paralela a um dos lados do rectângulo envolvente. Os autores propõem uma heurística onde várias tentativas para encontrar envolventes rectangulares são experimentadas para ser escolhida a de menor área.

Em [Prasad *et al.*, 1995], os autores consideram o posicionamento periódico de um conjunto de 2 figuras, considerando um problema real da indústria metalomecânica. O algoritmo começa por simplificar as figuras dadas, substituindo-as por linhas poligonais. É escolhida a figura que apresenta o maior número de vértices, como figura fixa. De cada um dos polígonos, é escolhida a maior aresta, rodando-se o polígono orbital de um ângulo que permita que as duas arestas, uma de cada polígono, fiquem paralelas. Faz-se deslizar o polígono orbital em redor da fronteira do polígono fixo, até que volte à posição original, mantendo as duas figuras encostadas sem sobreposição. O posicionamento do polígono orbital face ao polígono fixo que conduzir a uma menor área de envolvente rectangular do grupo formado pelos dois polígonos, vai determinar as dimensões ideais a considerar para a placa nessa situação e a percentagem de utilização conseguida. O grupo é sucessivamente rodado de um ângulo de  $1^\circ$ , terminando quando atingir os  $180^\circ$ . No final, é identificado o grupo que conduziu à melhor percentagem de utilização, sendo indicada a solução encontrada: a orientação das figuras que constituem o grupo, a orientação do grupo, para determinadas dimensões da placa (também indicadas), e a percentagem de utilização obtida.

Já Cheng e Rao [1997] reportam o caso do posicionamento periódico de grupos de figuras, apresentando resultados relativos a um grupo formado por 8 figuras. Os autores utilizam um processo de deslizamento para encaixe das figuras semelhante ao proposto em [Prasad *et al.*, 1995], embora sem permitirem a rotação das figuras, incorporando uma técnica adicional para melhorar a eficácia do agrupamento conseguido. A técnica baseia-se em minimizar as distâncias entre centróides das figuras constituintes do grupo. Pretendem formar um grupo coeso, utilizando como medida da qualidade do grupo formado a sua envolvente convexa. No entanto, não é avaliada

a qualidade do posicionamento periódico do grupo formado, cingindo-se os resultados apresentados ao grupo como um fim e não como um meio para atingir um fim. Comparam resultados com Grinde e Cavalier [1995].

Os mesmos autores referem em [Cheng e Rao, 1999] e em [Cheng e Rao, 2000], artigos já referido aquando do problema de PPFI, que a heurística aí proposta pode ser igualmente aplicada ao grupo formado segundo relatado em [Cheng e Rao, 1997]. No entanto, nenhuns resultados computacionais são apresentados.

Já o trabalho publicado em [Milenkovic, 2002], que considera o posicionamento periódico de um conjunto de  $k$  figuras irregulares no plano, recorre a um misto de modelos de Programação Matemática e aplicação de heurísticas. O problema original é separado em sub-problemas mais simples, sendo cada sub-problema resolvido por uma abordagem matemática ou heurística. Os resultados apresentados referem-se a uma instância formada por duas figuras diferentes, cada uma delas existindo em duas rotações suplementares, i.e., na realidade, o grupo formado é constituído por 4 figuras. A qualidade dos resultados aplicados deve-se, em parte, a esse facto, uma vez que é sabido que o posicionamento periódico duplo consegue normalmente aproveitar bem os encaixes entre as partes côncavas e convexas de uma figura e a mesma figura rodada de  $180^\circ$ . Por outro lado, a densidade da solução diminuiria se considerassem a existência de limites físicos da placa, o que não fazem. Ou seja, embora o resultado final seja um posicionamento periódico numa placa, é visível que as fronteiras da placa não estão devidamente aproveitadas. A consequência não é grave porque a placa é grande quando comparada com a dimensão das figuras envolvidas.

Por último, falta referir o trabalho recentemente apresentado por Nielsen [2007]. Existe um conjunto de  $n$  figuras que se pretende posicionar repetidas vezes, tal como nos casos anteriormente descritos. No entanto, uma abordagem completamente diferente de posicionamento é descrita. Consideram a existência de uma placa de largura fixa e comprimento infinito, sendo por isso natural que um problema de posicionamento de figuras irregulares, normalmente designado de “nesting”, possa ser “continuado” sem interrupção se se pretender voltar a posicionar o mesmo conjunto de figuras. Ou seja, o fim de um problema de “nesting” pode ser “encaixado” no início do problema seguinte, idêntico ao primeiro. As figuras não podem sofrer rotações. Esta abordagem ainda dá os seus primeiros passos, sendo de referir que alguns

aspectos ainda não foram contemplados, nomeadamente: o início e o fim do processo ainda não são contemplados (tal como no posicionamento periódico no plano), pelo que as fronteiras não são devidamente aproveitadas.

## 2.4 Posicionamento Periódico numa placa Limitada

Na resolução do problema de posicionamento periódico de uma única figura no plano, o resultado do posicionamento é independente da orientação da figura dada [Segenreich, 1988]. O mesmo já não pode afirmar-se no caso do posicionamento periódico de um grupo de figuras, pois, quer se trate do plano, quer de uma placa de dimensões finitas, cada uma das figuras constituintes do grupo poderá ser rodada independentemente das restantes e o resultado obtido é um grupo diferente.

Embora a origem da investigação nesta área remonte há mais de 50 anos, durante muitos anos incidiu apenas na resolução matemática de problemas de posicionamento no plano. E mesmo de entre estes, inicialmente apenas eram consideradas figuras regulares. Alguns anos mais tarde, também as figuras irregulares foram contempladas, sendo aproximadas pelas suas envolventes convexas ou circunscritas por polígonos regulares. O posicionamento continuava a considerar a ausência de fronteiras. Ou seja, o objectivo passava apenas pela maximização da densidade do posicionamento das figuras entre si, no sentido de minimizar os espaços livres deixados entre elas.

Só mais recentemente, é comum encontrarem-se trabalhos publicados dedicados ao posicionamento das próprias figuras irregulares e não de uma sua envolvente geométrica. De entre estes, aqueles cuja abordagem de resolução passa pela formulação do modelo matemático do problema de posicionamento periódico, na sua grande maioria também não consideram a existência de uma placa, mas sim o próprio plano. Quando não é o caso, normalmente o problema original é simplificado e uma sua aproximação resolvida [Stoyan e Pankratov, 1999].

Existem, no entanto, poucos trabalhos publicados que resolvam o problema de PFFI, considerando simultaneamente possíveis orientações das figuras a posicionar e a existência de uma placa limitada. Refira-se como exemplo o trabalho devido a Cheng e Rao [1999], onde uma figura é posicionada periodicamente na rotação original. Os mesmos autores apresentam,

mais tarde [Cheng e Rao, 2000], uma evolução do algoritmo anteriormente publicado, dotando-o de flexibilidade ao permitirem que a figura possa ser rodada antes de ser posicionada. No entanto, em ambos os artigos o posicionamento é obtido tendo como objectivo apenas a maximização da sua densidade no plano, o que ignora a existência de fronteiras da placa. Por essa razão, numa evolução dos resultados do algoritmo em função da dimensão da placa, que apresentam, os resultados são maus quando a placa é pequena. Embora os autores apresentem o resultado do posicionamento periódico obtido dentro de uma placa limitada, a mesma não foi contemplada na determinação de uma boa densidade de posicionamento, o mesmo se passando em [Milenkovic, 2002]

A consideração da existência de placa é comum sempre que se trate de problemas reais (industriais), sendo, contudo, raros os casos descritos na literatura. Nessa situação, apenas no caso de a placa ser muito grande quando comparada com a dimensão das figuras a posicionar, é que fará sentido não considerar a existência de fronteiras da mesma.

O trabalho desenvolvido nesta tese aborda dois problemas: o problema de PPFi e o problema de PP*n*Fi, ambos 2D e considerando uma placa limitada. O objectivo, em ambos, é a maximização do número de figuras integralmente posicionadas dentro na placa. Refira-se que, no problema PP*n*Fi, apenas o posicionamento de grupos completos é contemplado.

No primeiro problema, as figuras poderão rodar de um ângulo qualquer, que se mostre adequado à estratégia usada. É considerado o posicionamento periódico simples e o posicionamento periódico duplo da figura dada.

No segundo problema, duas abordagens são consideradas. Na primeira, cada figura a agrupar poderá ser rodada de um ângulo qualquer, mas o grupo formado mantém a rotação ao ser replicado. Na segunda, cada figura a agrupar poderá ser rodada apenas de um ângulo fixo estipulado, podendo o próprio grupo, quando replicado, ser rodado livremente, no sentido de maximizar o aproveitamento da placa.

## Capítulo 3

# Modelos Geométricos e Matemáticos para o Problema de PPF

O problema de PPF consiste em posicionar de forma regular, dentro de uma placa de dimensões fixas, uma única figura irregular ou um pequeno conjunto de figuras irregulares, sendo habitualmente elevado o número de réplicas. Além disso, as figuras poderão ainda sofrer qualquer tipo de rotação que venha a mostrar-se vantajosa para maximizar o aproveitamento da matéria-prima, o que requer a utilização de ferramentas geométricas apropriadas. Caracteriza-se por apresentar dificuldades não apenas de índole combinatória, mas também de índole geométrica, dada a natureza irregular das formas geométricas. Ou seja, a acrescentar às dificuldades de natureza combinatória inerentes a qualquer problema de posicionamento, há que ter em consideração a forma geométrica irregular das figuras a posicionar. Estas dificuldades traduzem-se em, por um lado, decidir onde posicionar os objectos pequenos de forma a minimizar o desperdício do objecto maior e, por outro lado, garantir a admissibilidade das soluções obtidas do ponto de vista geométrico, segundo um posicionamento regular. Comparativamente aos problemas de posicionamento de figuras regulares ou irregulares convexas, o problema geométrico intrínseco aos problemas de PPF é, naturalmente, de maior complexidade.

A primeira secção deste capítulo consiste numa breve descrição da forma como se lidou com a geometria, visto ser este um dos problemas cruciais para

o bom funcionamento das abordagens de resolução desenvolvidas. É referida a forma como as figuras são representadas, de que modo se consegue garantir a não sobreposição de figuras e como é garantido o posicionamento das figuras integralmente dentro da placa. Embora sem se entrar em detalhes de implementação, pretende-se explicar, de forma sucinta, a estratégia utilizada para lidar com a componente geométrica por detrás de todas as abordagens de resolução descritas e propostas nesta tese, essencial para uma correcta compreensão das mesmas.

Na segunda secção apresenta-se o modelo matemático do problema de PPFÍ relaxado, isto é, considerando o posicionamento no plano (a inexistência de limites fixos da placa). É descrito o modelo matemático genérico, o qual é aplicado a três situações concretas – o posicionamento de uma figura convexa simples, o posicionamento de duas figuras convexas iguais, mas rodadas de  $180^\circ$  e o posicionamento de uma figura simples não convexa. No entanto, facilmente se conclui que a resolução de problemas de âmbito industrial através desta metodologia se torna impraticável. Daí advém a necessidade de se resolver o problema pretendido por recurso a métodos aproximados, nomeadamente técnicas heurísticas e meta-heurísticas.

Na última secção deste capítulo são descritas as ideias subjacentes às novas abordagens propostas para a resolução do problema de PPFÍ descrito nesta dissertação, abordagens essas baseadas em heurísticas e meta-heurísticas. Essas abordagens separam-se em dois grandes grupos: as que se referem ao posicionamento periódico de uma só figura e as que se referem ao posicionamento periódico de um conjunto de figuras. A sua descrição detalhada será apresentada, respectivamente, nos dois capítulos seguintes.

### 3.1 Introdução

Um problema de posicionamento tal como o descrito nesta tese caracteriza-se por possuir dois tipos de dados:

- uma única figura ou um reduzido número de figuras a replicar em quantidades elevadas;
- uma placa de dimensões finitas onde as figuras deverão ser posicionadas, sem sobreposição, integralmente dentro da placa e gerando um padrão periódico.

No primeiro caso, trata-se do posicionamento periódico de uma só figura, cuja resolução consiste basicamente:

- na determinação de uma orientação aconselhável para a figura dada;
- na determinação do padrão de repetição dessa figura, uma vez que se trata de um posicionamento periódico (o par de vectores geradores do posicionamento periódico);
- na determinação de um ponto de posicionamento na placa (pois, consecutivamente, todos os restantes estão automaticamente determinados pelo par de vectores geradores do posicionamento periódico).

No segundo caso, trata-se do posicionamento periódico de um conjunto de figuras, cuja resolução consiste basicamente:

- na determinação de uma orientação aconselhável para cada figura dada;
- na determinação do ponto de contacto de cada figura relativamente às que lhe são adjacentes, para formar um grupo que seja eficazmente replicável;
- na determinação do padrão de repetição desse grupo, uma vez que se trata de um posicionamento periódico (o par de vectores geradores do posicionamento periódico);
- na determinação de um ponto de posicionamento na placa (pois, consecutivamente, todos os restantes estão automaticamente determinados).

Quer no caso mais simples de posicionamento de uma única figura, quer no caso de posicionamento de um conjunto de figuras, a resolução do problema é de índole fortemente combinatória, não podendo dissociar-se do problema geométrico de garantir que as figuras não se sobrepõem entre si nem intersectam a placa. A agravar o grau de dificuldade, acresce o facto de as figuras a posicionar não estarem “agarradas” a uma orientação inicial, podendo ser rodadas livremente de forma a maximizar o aproveitamento da placa. Dada a complexidade inerente ao tipo de problema proposto, é óbvio que a sua resolução não pode passar por uma abordagem matemática. Por esse motivo, optou-se por uma abordagem heurística de resolução, a qual

permite lidar com problemas de índole prática, normalmente de grande dimensão. Para a resolução do problema de posicionamento por esta via, foi dado especial ênfase à existência de fronteiras da placa, dado esta ter dimensões pré-definidas e finitas. Esta é, sem dúvida, a grande diferença entre a resolução de problemas no plano ou numa placa. Para tal, foram consideradas diferentes regras e critérios que, tendo em conta as fronteiras da placa, conjugam em simultâneo o problema de posicionar as figuras mantendo a maior densidade possível com o problema de maximizar o número de figuras (ou de grupos de figuras) colocadas. Será mostrado, seguidamente, com um exemplo claro, que por vezes estes dois objectivos são contraditórios.

## 3.2 Representação geométrica

### 3.2.1 Considerações geométricas preliminares

Todas as figuras são representadas por polígonos simples. Partes curvilíneas são aproximados por um conjunto de segmentos de recta tangentes e exteriores à curva e buracos dentro das figuras não foram contemplados. Um polígono é representado por uma lista de  $k$  vértices ordenada no sentido dos ponteiros do relógio. A cada polígono encontra-se associado um ponto de referência. Um problema de posicionamento numa placa de dimensões finitas implica a colocação das figuras sem que haja sobreposição e integralmente dentro da placa, de modo a preencher o melhor possível a placa. Para garantir que dois polígonos não se sobrepõem, foi usado o conceito de *invólucro de posicionamento* (cujo termo anglo-saxónico *no-fit polygon* (NFP) servirá, daqui por diante, para identificação da sigla utilizada), que é o lugar geométrico do caminho traçado pelo ponto de referência do polígono orbital, quando este “desliza” em torno do polígono estacionário, sem nunca perder o contacto nem o intersectar e mantendo a mesma orientação. Este polígono assim gerado encontra-se representado na figura 3.1.

Considerando o invólucro de posicionamento da figura  $O$  (orbital) relativamente à figura  $E$  (estacionária) ( $NFP_{E,O}$ ), se o ponto de referência da figura  $O$  for colocado em (ver figura 3.2):

- $P_1$  —> os dois polígonos sobrepõem-se,
- $P_2$  —> os dois polígonos não se sobrepõem entre si mas estão em contacto,



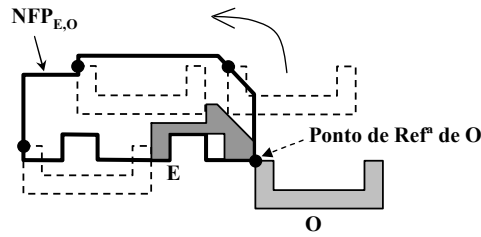


Figura 3.1: Cálculo do NFP do polígono orbital  $O$  face ao polígono estacionário  $E$   $NFP_{E,O}$ .

- $P_3$   $\rightarrow$  os dois polígonos não se sobrepõem nem estão em contacto.

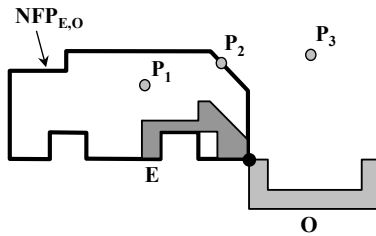


Figura 3.2: Posicionamento do polígono orbital  $O$  face ao polígono estacionário  $E$ .

Usando o invólucro de posicionamento para garantir a não-sobreposição das figuras, consegue-se transformar comparações entre polígonos em comparações entre um ponto e um polígono (o ponto de referência da figura orbital face ao invólucro de posicionamento), o que simplifica bastante o problema, já de si complexo, de lidar com figuras irregulares. No entanto, a computação do NFP é uma operação que consome muito tempo, no caso de polígonos não-convexos. Uma vez que um novo NFP necessita de ser recalculado sempre que uma rotação relativa entre dois polígonos é alterada, esta questão não deve ser descuidada aquando do desenvolvimento de heurísticas que permitem a rotação livre das figuras a colocar. Voltar-se-á a esta questão quando for oportuno.

Para se assegurar que a figura seja posicionada integralmente dentro da placa, foi usado o conceito de *invólucro de posicionamento interior* (cujo termo anglo-saxónico *inner-fit polygon* (IFP) servirá, daqui por diante, para identificação da sigla utilizada), que é, relativo a cada figura, o lugar geométrico do caminho traçado pelo ponto de referência de um polígono ao "deslizar" dentro da placa sem nunca perder o contacto nem a intersectar.

Uma vez que a placa é um retângulo, também o IFP é um retângulo (figura 3.3). Desde que o ponto de referência da figura a posicionar fique dentro ou sobre o IFP, há garantias de que o posicionamento é válido, no respeitante a esta restrição. Convém realçar que, contrariamente ao NFP, o IFP poderá nem sempre existir, caso não seja possível posicionar um polígono integralmente no interior de outro.

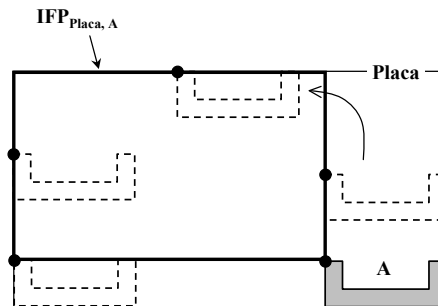


Figura 3.3: Posicionamento de um polígono A face a uma placa rectangular.

A descrição completa de como aqueles polígonos são gerados pode ser encontrada em [Oliveira, 1995].

### 3.2.2 Posicionamento periódico de uma figura

O posicionamento periódico de uma só figura consiste na colocação dessa figura mediante um determinado padrão que se repete, sendo gerado por dois vectores linearmente independentes,  $v_0$  e  $v_1$ , cuja combinação linear  $L(v_0, v_1) = i_0v_0 + i_1v_1 \mid i_0, i_1 \in \mathbb{Z}$ , produz uma rede (ou grelha) em cujos nós será posicionada uma réplica da figura dada (figura 3.4). Os vectores  $v_0$  e  $v_1$  são chamados vectores geradores do posicionamento periódico. Tal posicionamento implica o preenchimento do plano com múltiplas réplicas da figura dada, já na orientação pretendida (isto é, a figura original rodada de um determinado ângulo  $\alpha$ ).

Os dois vectores não colineares geradores da rede,  $v_0$  e  $v_1$ , juntamente com o vector nulo e o vector  $v_0 + v_1$ , formam os vértices de um paralelogramo. Os vectores têm que ser escolhidos de forma a garantir que as figuras posicionadas não se sobrepõem. Se se considerar que as figuras são colocadas no plano (um objecto não limitado), a minimização do espaço desperdiçado implica directamente a minimização da área do paralelogramo  $|v_0 \times v_1|$ , à qual corresponde a maximização da densidade do posicionamento. O mesmo

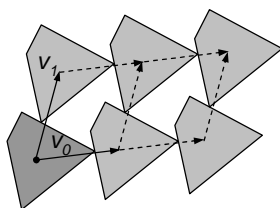


Figura 3.4: Posicionamento periódico de uma figura.

não é forçosamente verdade no caso de o objecto ter dimensões finitas, tal como pode ver-se no exemplo apresentado na figura 3.5. Neste exemplo, e assumindo que a orientação que se pretende para a figura é a apresentada, a menor área do paralelogramo (a maior densidade de posicionamento) não permite, por a placa ser limitada, que as figuras sejam colocadas integralmente no seu interior. E, tal como pode constatar-se por simples visualização da mesma figura, o caso em que a área do paralelogramo é máxima (na situação de as figuras manterem o contacto), é a única solução admissível para este exemplo. A figura escolhida para exemplificação foi um triângulo por ser imediato, através de simples visualização, comparar as duas áreas. No entanto, é de referir que o exemplo apresentado é uma situação extrema, pois a dimensão da figura é muito grande comparativamente à dimensão da placa. Quanto menor for a figura face à dimensão da placa, maior é o número de figuras que podem ser posicionadas e mais se dilui esta influência das fronteiras da placa.

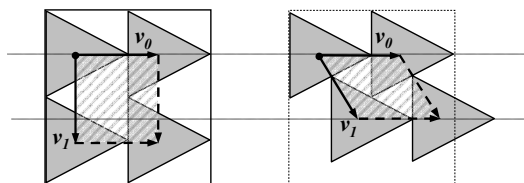
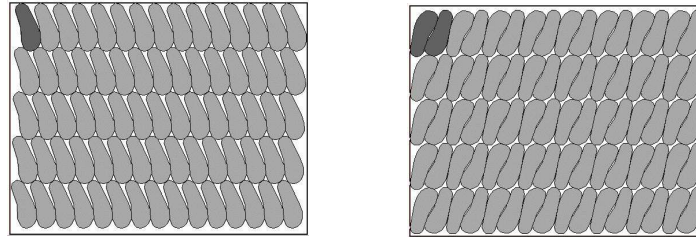


Figura 3.5: A maximização do aproveitamento de uma placa não corresponde forçosamente à densidade máxima no plano.

Ora, sendo esta a abordagem considerada habitualmente na resolução do problema não limitado, a minimização da área do paralelogramo, não poderá ser o único e muito menos o principal critério a ter em conta na resolução do problema de PPF1.

Considerando ainda o posicionamento de uma única figura, há uma variante ao problema descrito, que permite, normalmente, obter melhores re-

sultados no respeitante ao aproveitamento da placa (já descrito na secção anterior). Embora exista igualmente uma única figura a replicar, após escolhida a orientação para essa figura considera-se uma nova figura obtida da primeira por rotação de  $180^\circ$ . Estas duas figuras são “agrupadas”, segundo determinado critério, de modo a formarem um par normalmente bastante coeso e que permite obter melhores resultados. A este caso, vamos chamar de *posicionamento periódico duplo* (figura 3.6(b)) em contraste ao caso inicialmente descrito de apenas serem replicadas figuras numa única rotação (*posicionamento periódico simples* - figura 3.6(a)). Estas últimas imagens escolhidas não foram criadas para o efeito, mas propositadamente retiradas de entre o grupo de resultados obtidos no capítulo 4, com o intuito concreto de ir clarificando melhor o problema que se pretende resolver.



(a) Posicionamento periódico simples

(b) Posicionamento periódico duplo

Figura 3.6: Posicionamento periódico simples e duplo de uma única figura.

### 3.2.3 Posicionamento periódico de um conjunto de $n$ figuras

A resolução de um problema de posicionamento periódico de um conjunto de  $n$  figuras geométricas implica não só uma escolha prévia da orientação de cada uma das  $n$  figuras, mas também a determinação do posicionamento óptimo de cada figura dentro do grupo  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  e a melhor forma de reproduzir todo o grupo  $(v_0$  e  $v_1)$ , sem que haja sobreposição entre figuras nem com a placa. A resolução destes vários sub-problemas não é sequencial, mas simultânea, pois a “melhor” ou “pior” forma como o conjunto de figuras é agrupado vai condicionar a sua conseqüente replicação. E, uma vez que existe uma placa limitada onde devem ser posicionados os grupos de figuras, tem que haver um compromisso entre a forma como as figuras deverão ser agrupadas e o resultado final, para que o número de grupos que cabem efectivamente na placa seja maximizado. Ou seja, por vezes um bom

agrupamento no plano não conduzirá a uma boa solução na placa, tal como já referido no caso do posicionamento de uma única figura, pelo que também neste caso, as abordagens heurísticas desenvolvidas puseram grande ênfase na existência física de fronteiras da placa.

Para ilustrar esta ideia, escolheu-se um conjunto de três figuras as quais foram rodadas e agrupadas de duas formas diferentes, conforme pode ser visualizado nas figuras 3.7(a) a 3.7(d).

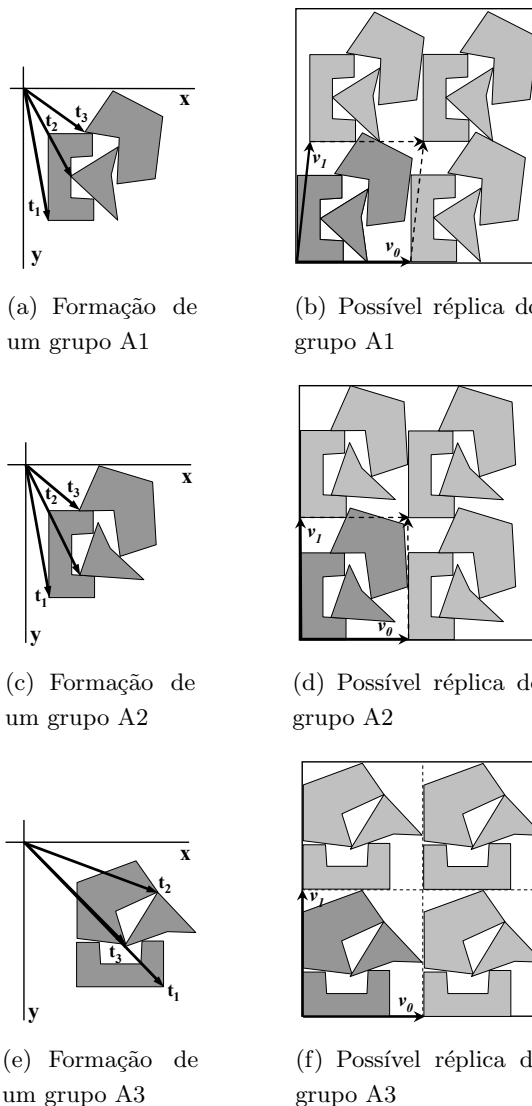


Figura 3.7: Posicionamento periódico de um grupo de figuras.

Em contrapartida, nas figuras 3.7(e) e 3.7(f), cada uma das figuras foi

novamente rodada e o grupo foi novamente posicionado, obtendo-se um posicionamento periódico ortogonal, cujos rectângulos replicados não se intersectam. Resta acrescentar que a placa é a mesma em todas as situações retratadas, sendo facilmente perceptível que a qualidade da solução de posicionamento apresentada, no que diz respeito à percentagem de utilização da placa, depende fortemente da orientação das figuras e da forma como são posteriormente agrupadas. Conforme pode verificar-se na segunda opção de agrupamento apresentada (figuras 3.7(c) e 3.7(d)), para a mesma orientação das figuras escolhida no primeiro caso (figuras 3.7(a) e 3.7(b)), a forma mais eficiente como as figuras foram agrupadas conduziu a um melhor aproveitamento da placa. No entanto, como a placa é de dimensão muito reduzida comparativamente à dimensão das figuras a posicionar, essa diferença não foi suficiente para permitir posicionar mais algum grupo, notando-se apenas que o grupo é mais compacto e que há um grande desperdício junto das fronteiras da placa. No último caso retratado, a orientação das figuras e o seu posterior agrupamento permitem um posicionamento na placa de forma que os grupos não aproveitem as reentrâncias uns dos outros.

Este exemplo, embora sem qualquer característica real, dado o reduzido número de grupos de figuras que conseguem ser posicionados dentro da placa, consegue ilustrar bem a problemática inerente à total liberdade permitida para a orientação das figuras. Serve ainda para ilustrar duas possíveis abordagens ao problema de posicionamento periódico de um conjunto de  $n$  figuras. Uma das abordagens refere-se ao primeiro e segundo casos ilustrados e mais não faz do que separar o problema em dois sub-problemas: primeiro formar o grupo e segundo posicionar esse grupo visto como um todo por um algoritmo de posicionamento periódico de uma única figura. Outra possível abordagem é ilustrada pelo terceiro caso apresentado, onde uma placa rectangular é separada em secções rectangulares mais pequenas, ficando cada grupo integralmente confinado a uma secção. Estas e outras abordagens e estratégias consideradas para a resolução do problema de posicionamento periódico de grupos de figuras serão devidamente descritas no capítulo dedicado ao posicionamento de um conjunto de figuras.

### 3.3 Modelo matemático do problema

O problema de posicionamento periódico de um conjunto de  $n$  polígonos  $(P_1, \dots, P_n)$ , considerando a situação não limitada, isto é, assumindo que o objecto onde as figuras são colocadas é infinito, pode resumir-se basicamente no seguinte: determinar o posicionamento de cada polígono  $(P_i)$  dentro do grupo  $(t_1, t_2 \dots t_n)$  e determinar a forma como o grupo de figuras assim criado vai ser replicado  $(v_0$  e  $v_1)$ , por forma a garantir que não existe qualquer tipo de sobreposição e que a densidade do posicionamento seja a maior possível.

Determinar os vectores  $t_1, t_2 \dots t_n$ , assim como de  $v_0$  e  $v_1$  tal que:

- seja minimizada a “Área do paralelogramo”,
- e sejam respeitadas as seguintes condições:
  - os  $n$  polígonos não se sobrepõem entre si,
  - as réplicas, formadas pelo grupo dos  $n$  polígonos, não se sobrepõem.

De um modo mais formal:

$$\text{minimizar } (|v_0 \times v_1|)^1$$

sujeito a:

$$P_i \text{ e } P_j \text{ não apresentam sobreposição, } \forall i \neq j$$

$$P_i \text{ e } (P_j + mv_0 + nv_1) \text{ não apresentam sobreposição, } \forall i, j \in \mathcal{N}_0 \\ \text{ e } \forall m, n \in \mathcal{Z}$$

A não-sobreposição entre polígonos foi imposta para cada par de polígonos relevantes, isto é, polígonos que não estejam demasiado longe na grelha de repetição. A consideração apenas de polígonos relevantes deve-se apenas a uma questão de eficiência na resolução do modelo [Milenkovic, 2002]. Para garantir a não-sobreposição, recorreu-se à definição do invólucro de posicionamento [Gomes, 2005].

Foi considerado o estudo analítico do posicionamento periódico de:

- uma única figura convexa (um triângulo);

---

<sup>1</sup> $|v_0 \times v_1| = |v_{0x} \cdot v_{1y} - v_{0y} \cdot v_{1x}|$

- uma figura convexa e a sua rotação de  $180^\circ$  (dois triângulos);
- uma figura não convexa (composta por 6 vértices);

numa perspectiva de optimização, isto é, recorrendo à modelação matemática de cada problema e à sua resolução através do SOLVER do EXCEL. O facto de a função objectivo ser *não linear, não quadrática e não convexa*, não permitiu a utilização do CPLEX <sup>2</sup>. Além disso, a função objectivo é *não convexa*, pelo que também não foi possível utilizar ferramentas que resolvem de forma óptima certos casos particulares de problemas de Programação Não Linear. O motivo pelo qual não se considerou o estudo de figuras mais complexas, ou em maior quantidade, foi apenas porque no último caso os tempos de resolução são já demasiado elevados.

### 3.3.1 Posicionamento periódico simples de uma figura convexa

A figura a replicar é um triângulo, com os vértices  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$  e  $(2, 3)$  (figura 3.8). Assume-se que o ponto de referência do triângulo é o ponto de coordenadas nulas para facilitar a escrita das equações e tornar mais simples a interpretação.

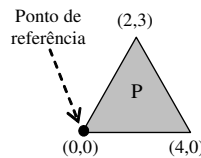


Figura 3.8: Figura a replicar: um triângulo.

O posicionamento periódico de uma única figura implica a escolha do ponto de colocação da primeira figura (neste exemplo, considerou-se o ponto de coordenadas nulas) e a determinação dos vectores que vão criar a rede onde serão colocadas as réplicas ( $v_0$  e  $v_1$ ). Pretende-se colocar a segunda figura ( $P + v_0$ ) em relação a  $P$  de forma que as duas figuras não se sobreponham (ver figura 3.9). Isso é conseguido por recurso ao cálculo do invólucro de posicionamento de  $(P + v_0)$  face a  $P$  (o NFP), polígono esse que delimita o lugar geométrico de todos os pontos onde é possível posicionar o segundo polígono (fora desse polígono).

<sup>2</sup>Software disponível no âmbito do grupo de investigação



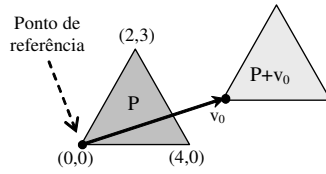


Figura 3.9: Posicionamento do segundo triângulo face ao primeiro.

Na figura 3.10 encontra-se o NFP da segunda figura a colocar (um triângulo) face à primeira (o triângulo colocado na origem). Na mesma figura, ao lado do NFP encontram-se as equações das rectas suporte das arestas ( $a_1 \dots a_6$ ) do polígono. Neste exemplo concreto, o NFP é um polígono convexo, constituído por 6 arestas, com a particularidade de ser simétrico, situação que se verifica sempre que se trate do posicionamento de um determinado polígono face a um polígono igual.

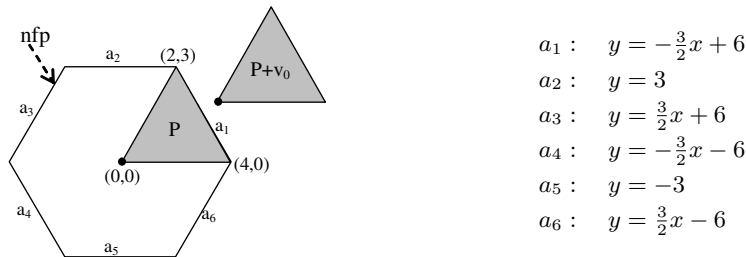


Figura 3.10: NFP de  $P + v_0$  em relação a  $P$ .

Para garantir que não existe sobreposição dos dois triângulos, é necessário impor que o ponto de referência do segundo triângulo:  $(0 + v_{0x}, 0 + v_{0y})$  se encontre fora do polígono NFP (as figuras estão afastadas). Em termos matemáticos, e uma vez que o NFP é um polígono convexo, isso corresponde à disjunção de 6 restrições, uma por cada aresta, cujo objectivo é obrigar o ponto de referência a estar *fora de*  $a_1$  ou *fora de*  $a_2$  ou  $\dots$

Conforme se pode ver na tabela 3.1:

- as variáveis existentes até ao momento são 8:

$v_{0x}, v_{0y}$  – as coordenadas do ponto de colocação da segunda figura;

$\delta_1$  a  $\delta_6$  – variáveis binárias necessárias para descrever linearmente a disjunção;

- as restrições até ao momento são 7:

Tabela 3.1: Restrições impostas para garantir que não há sobreposição das duas figuras  $(P + v_0)$  e  $P$ .

Disjunção das 6 restrições:		Linearização da disjunção
$y \geq -\frac{3}{2}x + 6 \rightarrow v_{0y} \geq -\frac{3}{2}v_{0x} + 6$	$r_1:$	$-v_{0y} - \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \leq \delta_1 M$
$y \geq 3 \rightarrow v_{0y} \geq 3$	$r_2:$	$-v_{0y} + 3 \leq \delta_2 M$
$y \geq \frac{3}{2}x + 6 \rightarrow v_{0y} \geq \frac{3}{2}v_{0x} + 6$	$r_3:$	$-v_{0y} + \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \leq \delta_3 M$
$y \leq -\frac{3}{2}x - 6 \rightarrow v_{0y} \leq -\frac{3}{2}v_{0x} - 6$	$r_4:$	$v_{0y} + \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \leq \delta_4 M$
$y \leq -3 \rightarrow v_{0y} \leq -3$	$r_5:$	$v_{0y} + 3 \leq \delta_5 M$
$y \leq \frac{3}{2}x - 6 \rightarrow v_{0y} \leq \frac{3}{2}v_{0x} - 6$	$r_6:$	$v_{0y} - \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \leq \delta_6 M$
	$r_7:$	$\sum_{i=1}^6 \delta_i = 5$

$r_1$  a  $r_7$ .

O mesmo tipo de restrições vai surgir para cada par de polígonos relevantes. Considerando apenas os polígonos  $(P + v_0$  e  $P)$ ,  $(P + v_1$  e  $P)$ ,  $(P + v_0$  e  $P + v_1)$ , seria resolvido o seguinte problema:

minimizar  $(|v_0 \times v_1|)$

sujeito a:

$P$  e  $P + v_0$  não apresentam sobreposição,  $\forall i \neq j$

$P$  e  $P + v_1$  não apresentam sobreposição,  $\forall i \neq j$

$P + v_0$  e  $P + v_1$  não apresentam sobreposição,  $\forall i, j \in \mathcal{N}_0$  e  $\forall m, n \in \mathcal{Z}$

O resultado traduziu-se em vectores  $v_0$  e  $v_1$  colineares. Uma possível solução apresentada (depende da solução inicial facultada) foi  $v_0 \approx (3.1, 1.3)$  e  $v_1 \approx (7, 3)$ , isto é, vectores colineares que naturalmente conduzem a uma área mínima (nula) mas que claramente não resolvem o problema, conforme pode ser visualizado na figura 3.11. Ou seja, para que dois vectores consigam ser uma base de um sistema de coordenadas, têm que ser linearmente independentes, caso contrário, não será possível preencher todo o plano, em qualquer direcção.

Conclusão, as restrições impostas não são suficientes. É necessário impor que as figuras “toquem” umas nas outras, senão, vai ser gerada uma solução não admissível. Para isso, e sabendo que  $[(A \geq B) \wedge (A \leq B)] \equiv (A = B)$ , para cada par de polígonos é acrescentado um conjunto de 6 restrições (por

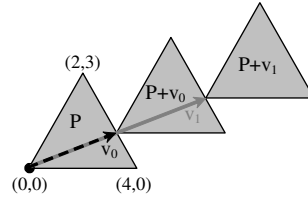


Figura 3.11: Situação de colinearidade dos vetores geradores do posicionamento periódico.

cada conjunto de 7), garantindo o total das 13 restrições que o ponto de referência da segunda figura se encontra **sobre** o NFP da primeira (e não **no exterior** – ver tabela 3.2), ou seja, os dois polígonos apresentam pelo menos um ponto de contacto. Exemplificando mais uma vez para o caso da não sobreposição de  $P$  e  $P + v_0$  (ver tabela 3.2):

Tabela 3.2: Restrições impostas para garantir que as duas figuras ( $P + v_0$ ) e  $P$  estão em contacto.

$(P + v_0)$ no exterior ou sobre o NFP		$(P + v_0)$ no interior ou sobre o NFP	
$r_1:$	$-v_{0y} - \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \leq \delta_1 M$	$r_8:$	$-v_{0y} - \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \geq 0$
$r_2:$	$-v_{0y} + 3 \leq \delta_2 M$	$r_9:$	$-v_{0y} + 3 \geq 0$
$r_3:$	$-v_{0y} + \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \leq \delta_3 M$	$r_{10}:$	$-v_{0y} + \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \geq 0$
$r_4:$	$v_{0y} + \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \leq \delta_4 M$	$r_{11}:$	$v_{0y} + \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \geq 0$
$r_5:$	$v_{0y} + 3 \leq \delta_5 M$	$r_{12}:$	$v_{0y} + 3 \geq 0$
$r_6:$	$v_{0y} - \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \leq \delta_6 M$	$r_{13}:$	$v_{0y} - \frac{3}{2}v_{0x} + 6 \geq 0$
$r_7:$	$\sum_{i=1}^6 \delta_i = 5$		

Acrescentando as restrições necessárias para os restantes pares de polígonos, desta vez, sim, a solução óptima é encontrada e poderá ser dada, por exemplo, por:  $v_0 = (3, -1.5)$  e  $v_1 = (0, 3)$ , solução apresentada na figura 3.12.

O valor mínimo obtido para a área ( $|v_0 \times v_1|$ ) é 9, quando a área da figura que se pretende replicar é 6, o que significa que o aproveitamento máximo do espaço que se consegue é de  $6/9 = 66.7\%$ .

Resumindo: o posicionamento periódico de um simples triângulo implica resolver um modelo com 22 variáveis de decisão ( $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$ ,  $v_{1x}$ ,  $v_{1y}$  e  $\delta_i$ ,  $i = 1 \dots 18$ ), 39 restrições ( $3 * (7 + 6)$ ) e uma função objectivo não linear e não convexa.

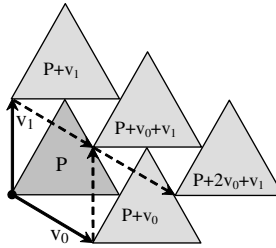


Figura 3.12: Uma possível solução do problema de PPF1.

### 3.3.2 Posicionamento periódico duplo de uma figura convexa

Neste caso, as figuras a replicar são duas: um triângulo, com os vértices  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$  e  $(2, 3)$  e a mesma figura rodada de  $180^\circ$ , tal como pode ser visualizado na figura 3.13. Mais uma vez se assume que o ponto de referência do primeiro triângulo colocado ( $P_1$ ) é o ponto de coordenadas nulas para facilitar a interpretação.

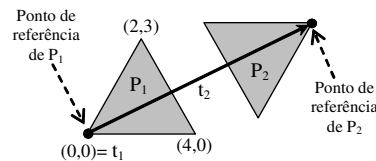


Figura 3.13: A figura dada e a sua rotação de  $180^\circ$ .

A escolha destas duas figuras deve-se ao facto de a solução óptima ser intuitiva: é possível um aproveitamento a 100% do plano, ou seja, as duas figuras são posicionadas de tal forma que a área do paralelogramo ( $|v_0 \times v_1|$ ) é precisamente igual à área total das duas figuras a replicar (normalmente é maior, como foi dado verificar-se no caso anterior).

O posicionamento periódico de um conjunto de  $n$  ( $n = 2$ , neste exemplo) figuras geométricas implica não só a determinação do posicionamento óptimo de cada figura dentro do grupo  $(t_1 \dots t_n)$  mas também a melhor forma de reproduzir todo o grupo  $(v_0$  e  $v_1)$ , sem que haja sobreposição de qualquer tipo. A resolução destes dois problemas tem que ser simultânea. O posicionamento de  $P_2$  face a  $P_1$  implica a determinação das coordenadas do ponto de colocação de  $P_2$  face a  $P_1$ , i.e., do vector  $t_2$  (admite-se, para simplificação, que  $t_1$  é o vector nulo). As réplicas desse recém-criado grupo implicam a determinação das coordenadas dos vectores  $v_0$  e  $v_1$ . A determinação destes valores não é independente, antes deve ser tal que, não havendo

sobreposição, seja minimizada a área do paralelogramo  $|v_0 \times v_1|$ .

Nas figuras seguintes encontram-se os NFP de cada figura em relação à outra e em relação a si própria. Para que não haja sobreposição, o ponto de referência da segunda figura deverá encontrar-se fora do NFP da primeira, ou sobre este, no caso de as figuras estarem encostadas.



Figura 3.14: NFP de  $P_2$  em relação a  $P_1$ .

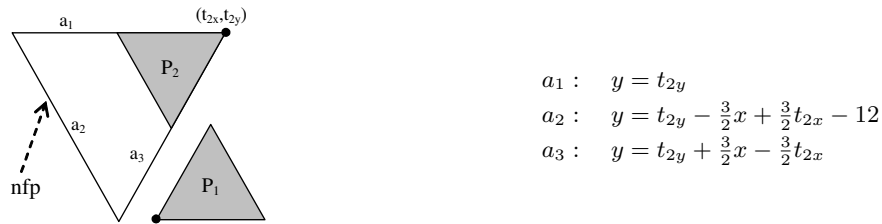


Figura 3.15: NFP de  $P_1$  em relação a  $P_2$ .

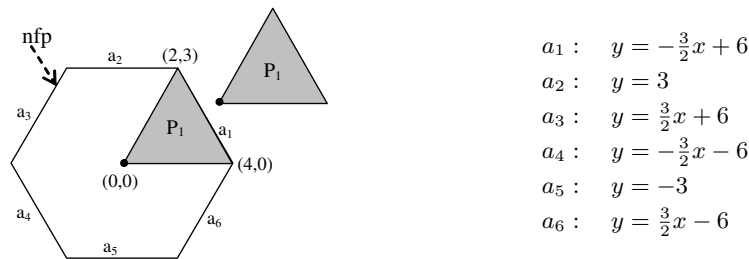


Figura 3.16: NFP de  $P_1$  em relação a  $P_1$ .

Depois de resolvido o problema, considerando as restrições referidas, inclusivé as que garantem pelo menos um ponto de contacto entre  $P_1$  e  $P_2$ , concluiu-se que ainda não estavam contemplados todos os pares de polígonos relevantes, pois a solução apresentava sobreposição (3.18): faltava considerar  $(P_1 + v_0$  e  $P_1 + v_1)$ ,  $(P_1 + v_0$  e  $P_2 + v_1)$  e  $(P_1 + v_1$  e  $P_2 + v_0)$ . Mesmo contemplando estas últimas restrições, a resolução do problema não conduziu

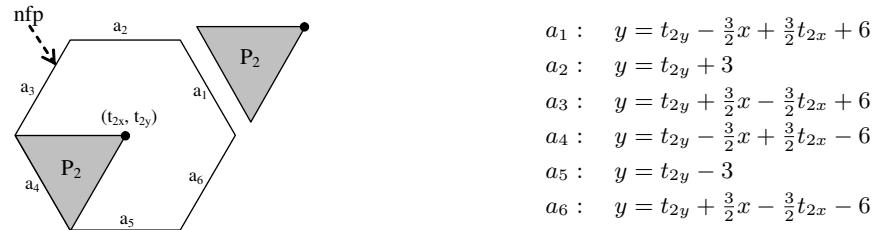


Figura 3.17: NFP de  $P_2$  em relação a  $P_2$ .

a uma solução aceitável: o valor de  $|v_0 \times v_1|$  apresentado como solução ora era zero, o que corresponde a vectores  $v_0$  e  $v_1$  colineares, ora tomava valores inferiores à área total das duas figuras envolvidas, o que implica obrigatoriamente sobreposição. Isto deve-se ao seguinte facto: ao não se garantir que um grupo está encostado à sua réplica, pois apenas se obrigou a que as figuras dentro do grupo estejam encostadas, é sempre possível para o conjunto de pares de polígonos relevantes considerado, apresentar uma resposta que satisfaça todas as restrições apresentadas, minimizando a área inclusivé até ao limite mínimo que é zero, no caso de os vectores serem colineares. Como a área total das duas figuras é 12, sabe-se que a solução apresentada não tem cabimento, pois deverá ser sempre pelo menos 12. A título de exemplo, transcreve-se na figura 3.18 uma dessas soluções, que apresenta sobreposição.

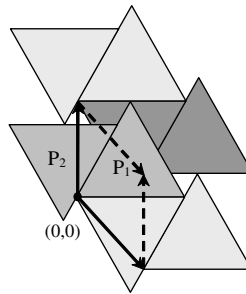


Figura 3.18: Solução do problema não admissível, pois apresenta sobreposição.

É sabido [Milenkovic, 2002] que  $v_0$  e  $v_1$  não devem ser procurados fora de determinadas gamas, nomeadamente  $v_0 \in [-30^\circ \dots 30^\circ]$  e  $v_1 \in [-60^\circ \dots 120^\circ]$ , mas impor restrições relativas a ângulos implica acrescentar restrições não lineares, o que dificultaria ainda mais a resolução do problema. De qualquer forma, foram feitas várias experiências:

- impondo valores limite às funções trigonométricas dos ângulos (restrições não lineares)

- para eliminar a não linearidade das restrições anteriores, foram substituídas por restrições lineares delimitando os valores a tomar pelas coordenadas de  $v_0$  e  $v_1$

- acrescentou-se ainda à lista de restrições a obrigatoriedade de a função objectivo ser, no mínimo, igual à área do conjunto de figuras que compõe o grupo.

Após várias tentativas, com um ou outro tipo de restrições, conseguiu-se chegar a uma solução óptima (de entre as muitas possíveis) do problema (ver figura 3.19):

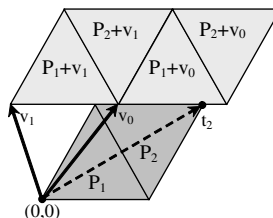


Figura 3.19: Uma possível solução do problema de PPFÍ *duplo*.

De notar que esta solução é óptima, mas não única, uma vez que qualquer alteração simultânea dos vectores  $v_0$  e  $v_1$ , tal que as figuras continuem a deslizar sobre as restantes, é ainda uma solução óptima, na medida em que a densidade de posicionamento continua a ser de 100%.

Como comentário final ao estudo analítico do posicionamento de mais do que uma figura, parece-nos que o grau de dificuldade na resolução deste simples problema, com apenas duas figuras (triângulos), evidencia que a abordagem é impraticável quando o número de figuras a replicar for superior e/ou o número de vértices aumentar bastante, caso dos problemas reais. De qualquer modo, para sustentar esta nossa opinião, foi ainda tratado o caso de uma figura única, mas não convexa, que é o estudo que se apresenta de seguida.

### 3.3.3 Posicionamento periódico de uma figura não convexa

A figura escolhida para a realização deste estudo foi a seguinte (ver 3.20):

O estudo deste caso é semelhante ao estudo de um só triângulo, com a dificuldade acrescida de o NFP ser um polígono não convexo, conforme pode

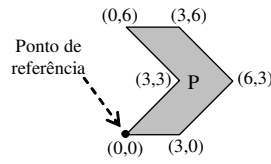
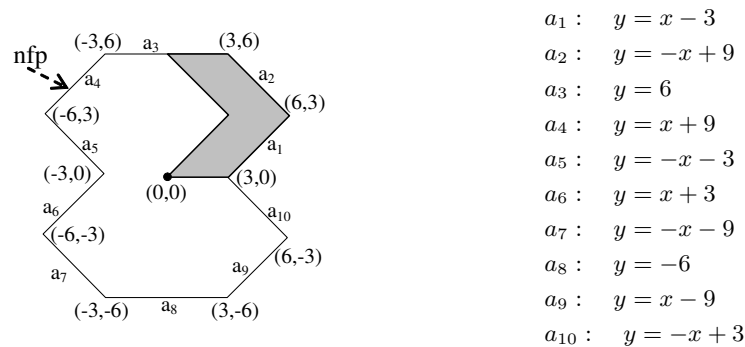


Figura 3.20: Figura não convexa escolhida.

ser visualizado na figura 3.21:

Figura 3.21: NFP de  $P + v_0$  em relação a  $P$ .

Vamos considerar como exemplo o par de polígonos relevantes  $P$  e  $(P + v_0)$ . Para que não haja sobreposição, o ponto de referência de  $P + v_0$  ( $v_{0x}, v_{0y}$ ) deverá estar fora (ou sobre) o NFP relativo a  $P$ . Em termos matemáticos, e uma vez que o NFP é desta vez um polígono não convexo, terão que ser distinguidas duas situações: uma, diz respeito às arestas que constituem as partes convexas do polígono ( $a_2, a_3, a_4, a_7, a_8, a_9$ ) e a outra diz respeito às partes côncavas do mesmo polígono [ $(a_5$  e  $a_6)$  e  $(a_{10}$  e  $a_1)$ ]. Para garantir que o ponto de referência se encontra fora (ou sobre) o NFP, é efectuada uma disjunção de 8 restrições: 6, relativas a cada uma das 6 arestas que constituem as partes convexas do polígono (*fora de  $a_2$  ou fora de  $a_3$  ou ...*) e 2 relativas aos 2 conjuntos de arestas que formam partes côncavas (cada uma destas restrições é uma conjunção) (*fora de  $a_5$  e fora de  $a_6$  ou fora de  $a_{10}$  e fora de  $a_1$* ). O conjunto de restrições resultante ( $10 + 1$ ) encontra-se na tabela 3.3.

Dado que a disjunção de equações é não linear, mas pode ser linearizada, representa-se na tabela 3.4 o conjunto de 11 restrições lineares que garantem a não sobreposição dos polígonos ( $P$  e  $P + v_0$ ).



Tabela 3.3: Restrições impostas para garantir que não há sobreposição das duas figuras  $(P + v_0)$  e  $P$ .

$(P + v_0)$ no exterior ou sobre o NFP relativo a $P$	
<i>fora de <math>a_2</math>:</i>	$y \geq -x + 9 \rightarrow v_{0y} \geq -v_{0x} + 9$
<b>ou</b> <i>fora de <math>a_3</math>:</i>	$y \geq 6 \rightarrow v_{0y} \geq 6$
<b>ou</b> <i>fora de <math>a_4</math>:</i>	$y \geq x + 9 \rightarrow v_{0y} \geq v_{0x} + 9$
<b>ou</b> <i>fora de <math>a_7</math>:</i>	$y \leq -x - 9 \rightarrow v_{0y} \leq -v_{0x} - 9$
<b>ou</b> <i>fora de <math>a_8</math>:</i>	$y \leq -6 \rightarrow v_{0y} \leq -6$
<b>ou</b> <i>fora de <math>a_9</math>:</i>	$y \leq x - 9 \rightarrow v_{0y} \leq v_{0x} - 9$
<b>ou</b> <i>fora de <math>(a_5</math> e <math>a_6)</math>:</i>	$\begin{cases} y \leq -x - 3 \rightarrow v_{0y} \leq -v_{0x} - 3 \\ y \geq x + 3 \rightarrow v_{0y} \geq v_{0x} + 3 \end{cases}$
<b>ou</b> <i>fora de <math>(a_1</math> e <math>a_{10})</math>:</i>	$\begin{cases} y \leq x - 3 \rightarrow v_{0y} \leq v_{0x} - 3 \\ y \geq -x + 3 \rightarrow v_{0y} \geq -v_{0x} + 3 \end{cases}$

Tabela 3.4: Linearização das restrições apresentadas na tabela anterior

Linearização das restrições:	
$r_1$ :	$-v_{0y} - v_{0x} + 9 \leq \delta_1 M$
$r_2$ :	$-v_{0y} + 6 \leq \delta_2 M$
$r_3$ :	$-v_{0y} + v_{0x} + 9 \leq \delta_3 M$
$r_4$ :	$v_{0y} + v_{0x} + 9 \leq \delta_4 M$
$r_5$ :	$v_{0y} + 6 \leq \delta_5 M$
$r_6$ :	$v_{0y} - v_{0x} + 9 \leq \delta_6 M$
$r_7$ :	$v_{0y} + v_{0x} + 3 \leq \delta_7 M$
$r_8$ :	$-v_{0y} + v_{0x} + 3 \leq \delta_7 M$
$r_9$ :	$v_{0y} - v_{0x} + 3 \leq \delta_8 M$
$r_{10}$ :	$-v_{0y} - v_{0x} + 3 \leq \delta_8 M$
$r_{11}$ :	$\sum_{i=1}^8 \delta_i = 7$

Tal como já foi referido atrás, não é suficiente garantir a não sobreposição das figuras colocadas, é necessário impor que as figuras “toquem” umas nas outras, pelo que além destas restrições é acrescentado um conjunto de 8 conjunções de restrições, 6 delas normais e as restantes 2 relativas à parte côncava (logo, resultando numa disjunção de 2 restrições). Como resultado, são acrescentadas ao modelo  $(6+3+3)$  restrições ao conjunto das 11 anteriores, impondo que o ponto de referência ou está dentro ou sobre o NFP. O total das 23 restrições garante que o ponto de referência da segunda figura se encontra *sobre* o NFP da primeira (e não *no exterior*), ou seja, os dois

polígonos apresentam pelo menos um ponto de contacto. O caso de  $P$  e  $(P + v_0)$  encontra-se exemplificado na tabela 3.5.

Tabela 3.5: Restrições impostas para garantir que as duas figuras  $(P + v_0)$  e  $P$  estão em contacto.

$(P + v_0)$ no interior ou sobre o NFP relativo a $P$	
<i>dentro de <math>a_2</math>:</i>	$y \leq -x + 9 \rightarrow v_{0y} \leq -v_{0x} + 9$
<b>e dentro de <math>a_3</math>:</b>	$y \leq 6 \rightarrow v_{0y} \leq 6$
<b>e dentro de <math>a_4</math>:</b>	$y \leq x + 9 \rightarrow v_{0y} \leq v_{0x} + 9$
<b>e dentro de <math>a_7</math>:</b>	$y \geq -x - 9 \rightarrow v_{0y} \geq -v_{0x} - 9$
<b>e dentro de <math>a_8</math>:</b>	$y \geq -6 \rightarrow v_{0y} \geq -6$
<b>e dentro de <math>a_9</math>:</b>	$y \geq x - 9 \rightarrow v_{0y} \geq v_{0x} - 9$
<b>e dentro de <math>(a_5</math> ou <math>a_6)</math>:</b>	$\begin{cases} y \geq -x - 3 \rightarrow v_{0y} \geq -v_{0x} - 3 \\ y \leq x + 3 \rightarrow v_{0y} \leq v_{0x} + 3 \end{cases}$
<b>e dentro de <math>(a_1</math> ou <math>a_{10})</math>:</b>	$\begin{cases} y \geq x - 3 \rightarrow v_{0y} \geq v_{0x} - 3 \\ y \leq -x + 3 \rightarrow v_{0y} \leq -v_{0x} + 3 \end{cases}$

Mais uma vez surgem 2 disjunções de restrições pelo que, sendo não lineares, podem ser linearizadas. Representa-se na tabela 3.6 o conjunto de 12 restrições lineares que, adicionadas às restantes, garantem que os polígonos  $P$  e  $(P + v_0)$  estão em contacto.

Tabela 3.6: Linearização das restrições apresentadas na tabela anterior

Linearização das restrições de disjunção:	
$r_{12}$ :	$v_{0y} + v_{0x} - 9 \leq 0$
$r_{13}$ :	$v_{0y} - 6 \leq 0$
$r_{14}$ :	$v_{0y} - v_{0x} - 9 \leq 0$
$r_{15}$ :	$-v_{0y} - v_{0x} - 9 \leq 0$
$r_{16}$ :	$-v_{0y} - 6 \leq 0$
$r_{17}$ :	$-v_{0y} + v_{0x} - 9 \leq 0$
$r_{18}$ :	$-v_{0y} - v_{0x} - 3 \leq \delta_9 M$
$r_{19}$ :	$v_{0y} - v_{0x} - 3 \leq \delta_{10} M$
$r_{20}$ :	$\delta_9 M + \delta_{10} M = 1$
$r_{21}$ :	$-v_{0y} + v_{0x} - 3 \leq \delta_{10} M$
$r_{22}$ :	$v_{0y} + v_{0x} - 3 \leq \delta_{11} M$
$r_{23}$ :	$\delta_{11} M + \delta_{12} M = 1$

O mesmo foi feito para a não sobreposição de  $P$  e  $(P + v_1)$  assim como

$(P + v_0)$  e  $(P + v_1)$ .

A modelização matemática do problema resulta num conjunto de 40 variáveis, 69 restrições e uma função objectivo não linear e não convexa.

O Solver apresentou a seguinte solução  $v_0 = (-3, 0)$  e  $v_1 = (-3, 6)$  (figura 3.22) que, neste caso concreto, é simples concluir tratar-se da solução óptima, pois a figura a replicar consegue preencher completamente o plano, isto é, conduz a uma densidade de 100%. No entanto, demorou 15 minutos a convergir para essa solução! Foi usado um processador Pentium Centrino a 2GHz com 1Gb de memória RAM.

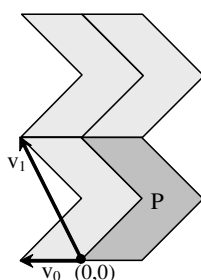


Figura 3.22: Possível solução.

### 3.4 Modelo matemático *versus* aplicação de heurísticas

A formulação matemática do problema do posicionamento periódico conduz a um modelo matemático cuja função objectivo é não linear, não quadrática e não convexa, sendo as restrições lineares. Esse modelo não pode ser facilmente resolvido recorrendo a pacotes de software que exijam a linearidade e/ou convexidade da função objectivo associada, pelo que recorreremos a um software (o Solver do EXCEL) que “tenta” resolver o problema por um processo iterativo, realizando uma pesquisa em árvore, naturalmente sem garantir a optimalidade da solução obtida.

Foram estudados 3 casos: o primeiro, onde é considerada apenas uma figura, convexa e com apenas 3 vértices, que foi resolvido rapidamente. O segundo caso, onde são consideradas duas figuras (ambas iguais à do primeiro caso, mas uma delas sujeita a uma rotação de  $180^\circ$ ) já foi de mais difícil formulação matemática, mas, depois de devidamente modelizado, a sua resolução foi relativamente rápida (inferior a um minuto). O terceiro caso,

onde se pretende exemplificar o posicionamento periódico de uma única figura não convexa (mesmo assim, constituída apenas por 6 vértices), foi demasiado moroso a nível de resolução (cerca de 15 minutos).

O grande problema encontrado não se prende com o elevado número de restrições, que aumentaria naturalmente com o maior número de vértices de figuras com aplicação real. A dificuldade encontra-se associada ao facto de a função objectivo ser não linear e não convexa, obrigando a uma pesquisa em árvore da solução óptima. E, como tem que haver um compromisso entre a busca da solução óptima e o tempo máximo permitido para essa busca, a resolução do problema poderá conduzir apenas a uma boa solução e não a uma solução garantidamente óptima. Considera-se, pois, que será impraticável resolver por este processo problemas de posicionamento de uma única figura irregular com muitos vértices ou, pior ainda, várias figuras irregulares, devido ao tempo que demorou a resolver o terceiro caso. Além disso, surgem nessa situação problemas mesmo ao nível da formulação matemática, tal como foi referido aquando do estudo do segundo caso.

Como é possível constatar, até ao momento não foi referida sequer a existência de limites fixos para o posicionamento das figuras, o que significa que as dificuldades já existem numa tentativa de resolução do modelo matemático encontrado para o posicionamento no plano, mesmo antes de se incluir a existência de limites fixos no objecto maior, onde as figuras são colocadas, problema central nesta tese. Considerando a existência de uma placa limitada para o posicionamento das figuras, outro tipo de restrições para além da não sobreposição das figuras teria de ser considerado: a garantia de que cada figura seria colocada integralmente *dentro* da placa, o que aumentaria o número de restrições a ter em conta.

Uma possível abordagem à resolução do problema proposto passa pela utilização de heurísticas. Foi essa a abordagem escolhida para resolver o problema proposto, sendo os seus fundamentos descritos na secção seguinte.

## Capítulo 4

# Algoritmos de Posicionamento Periódico de uma Figura Irregular

### 4.1 Posicionamento Periódico Simples e Duplo

O posicionamento periódico de múltiplas réplicas de uma única figura<sup>1</sup> encontra-se tratado na literatura sob diferentes designações, nomeadamente, *periodic packing*, *regular packing*, *lattice packing* ou mesmo *lattice nesting*. Pode ainda considerar o plano, ou uma placa de dimensões finitas. Quando se trata de posicionamento periódico no plano, o principal objectivo é a colocação regular da figura dada tal que a densidade de posicionamento seja maximizada. No caso considerado nesta dissertação, uma placa rectangular de dimensões finitas, a intenção é a de posicionar regularmente a figura tal que seja maximizada a percentagem de utilização da placa de matéria-prima, o que é equivalente a maximizar o número de figuras idênticas completamente colocadas dentro da placa. Em termos conceptuais, a definição de posicionamento periódico é idêntica, quer se trate de posicionamento no plano, quer se trate de posicionamento numa placa de dimensões finitas. No entanto, tal como virá a ser demonstrado ao longo deste capítulo, estes dois objectivos aparentemente idênticos, na prática, não o são. Um posicionamento periódico é gerado por dois vectores linearmente independentes,  $v_0$  e  $v_1$ , cuja combinação linear  $L(v_0, v_1) = i_0v_0 + i_1v_1 \setminus i_0, i_1 \in Z$ , produz uma

---

<sup>1</sup>*SINGLE Lattice e DOUBLE Lattice*

grelha em cujos nós será posicionada uma réplica da figura dada. No plano, os valores de  $i_0$  e  $i_1$  podem ser quaisquer, enquanto numa placa, deverão ser tais que todas as figuras posicionadas fiquem integralmente dentro da placa.

Tal como foi provado em [Segenreich, 1988], a aplicação de uma rotação qualquer a um posicionamento periódico no plano não altera a densidade do posicionamento. O mesmo não é verdade se se estiver restringido a uma placa de dimensões finitas. Ou seja, para se considerar completamente definido o posicionamento periódico, a orientação da figura a replicar é também uma variável a determinar. Uma vez que não são consideradas restrições no respeitante à orientação permitida para a figura dada, deverá ser tida em consideração a existência de fronteiras da placa para se escolher a rotação que vai conduzir a um melhor aproveitamento da mesma.

Neste capítulo são apresentados e descritos os algoritmos desenvolvidos para resolver o problema do posicionamento periódico de uma única figura irregular. Todos eles se baseiam em técnicas de pesquisa num espaço de soluções. Essa pesquisa recorre à aplicação de heurísticas que, embora não garantindo a optimalidade da solução obtida, o relativamente reduzido tempo de resolução face à boa qualidade da solução admissível encontrada permite “lidar” com problemas de dimensão e complexidade consideráveis. O trabalho foi desenvolvido sobre uma biblioteca de manipulação geométrica já existente, resultante do trabalho em Cortes e Empacotamentos desenvolvido ao longo de vários anos pelo grupo de investigação onde a autora se insere. As heurísticas desenvolvidas para o posicionamento periódico têm em consideração a existência de fronteiras da placa de dimensões finitas, um rectângulo, onde se pretende posicionar as figuras dadas.

Numa primeira fase, foi considerado apenas o posicionamento periódico de uma única figura irregular. Trata-se do *posicionamento periódico simples*, o qual consiste em preencher uma placa limitada com o maior número possível de réplicas da figura dada em determinada orientação, não necessariamente a original. Para tal, é necessário determinar os parâmetros que definem o posicionamento.

Posteriormente, foi analisado o posicionamento periódico de um grupo formado por uma figura e a sua rotação de  $180^\circ$ . Trata-se do *posicionamento periódico duplo* e consiste em preencher uma placa com o maior número possível de réplicas da figura dada, em determinada orientação, agrupada a uma figura obtida a partir de si própria por rotação de  $180^\circ$ . Estas duas figuras,

após agrupadas, passam a ser tratadas como um todo, tirando partido do bom encaixe normalmente obtido com este tipo de junção.

## 4.2 Estrutura geral do problema de PFFI

Dada uma figura a replicar, o objectivo principal de um problema de PFFI numa placa de dimensões limitadas é posicionar o maior número possível de réplicas dessa figura dentro da placa, todas com a mesma orientação e dispostas formando um padrão de repetição. A resolução deste problema implica a determinação de um conjunto de parâmetros que definem completamente o posicionamento. Uma vez que diferentes orientações são permitidas e que de uma boa orientação vai depender a qualidade do posicionamento, um ângulo de rotação  $\alpha$  é aplicado em primeiro lugar à figura a ser replicada. Definida a orientação da figura, a heurística de posicionamento calcula sucessivamente os restantes parâmetros: o par de vectores geradores do posicionamento periódico  $(v_0, v_1)$  e o ponto de posicionamento  $(P_0)$ . Isto significa que o problema original é resolvido segundo uma abordagem hierárquica, ou seja, em cada nível (para cada ângulo  $\alpha$ ) a heurística de posicionamento começa por determinar o par de vectores e só depois o ponto da placa onde vai colocar a primeira figura. No caso do posicionamento periódico duplo, existe um passo adicional intermédio, que consiste em decidir a melhor forma de agrupar as duas figuras, que passarão daí por diante a ser consideradas como um todo. A estrutura geral da heurística de posicionamento é idêntica em ambos os casos de posicionamento periódico (simples e duplo), com a excepção desse passo adicional intermédio, que apenas se verifica no segundo caso. A mesma é apresentada na figura 4.1

No caso geral do posicionamento periódico simples, sem considerar a existência de uma placa de dimensões finitas, este fica completamente definido quando forem conhecidos os seguintes parâmetros:

- a orientação da figura dada ( $\alpha$ ), i.e., o ângulo de rotação relativo à sua orientação original;
- o par de vectores geradores da grelha de posicionamento periódico  $(v_0$  e  $v_1)$ ;

Os vectores  $(v_0$  e  $v_1)$  são escolhidos de forma a garantir que, para a orientação considerada ( $\alpha$ ) as figuras não se sobrepõem. Quando há a con-

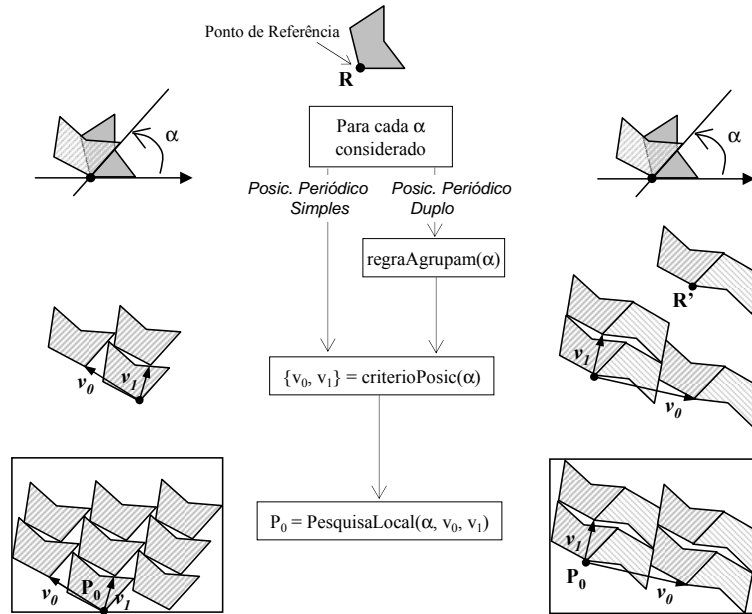


Figura 4.1: Estrutura geral da heurística de posicionamento periódico.

considerar a existência de uma placa limitada, não chega conhecer a disposição relativa das figuras colocadas, é necessário ainda localizá-las na placa, pelo que acresce um outro parâmetro:

- o ponto de posicionamento da primeira figura colocada na placa ( $P_0$ ).

No caso do posicionamento periódico duplo, é necessário previamente agrupar duas figuras. Para que o posicionamento fique completamente determinado, a acrescentar aos parâmetros anteriores existe ainda:

- o posicionamento da segunda figura face à primeira, obtida por rotação da primeira de um ângulo de  $180^\circ$ ;

O posicionamento periódico das figuras fica então definido por  $L(v_0, v_1) = i_0v_0 + i_1v_1 \setminus i_0, i_1 \in \mathbb{Z}$  sendo a primeira réplica colocada em  $P_0$  (para  $i_0 = i_1 = 0$ ) e cópias desta expandidas por combinação linear de  $v_0$  e  $v_1$ . Os vectores  $v_0$  e  $v_1$  são escolhidos tal que diferentes figuras não se sobreponham e o aproveitamento da placa seja o melhor possível, ou, equivalentemente, o número de figuras integralmente posicionadas dentro da placa seja maximizado. Duas possíveis soluções de posicionamento, obtidas para diferentes orientações da figura dada, são apresentadas na figura 4.2. O número de



figuras colocadas é superior após a rotação, pelo que se pode concluir que a solução apresentada na figura 4.2(c) é melhor.

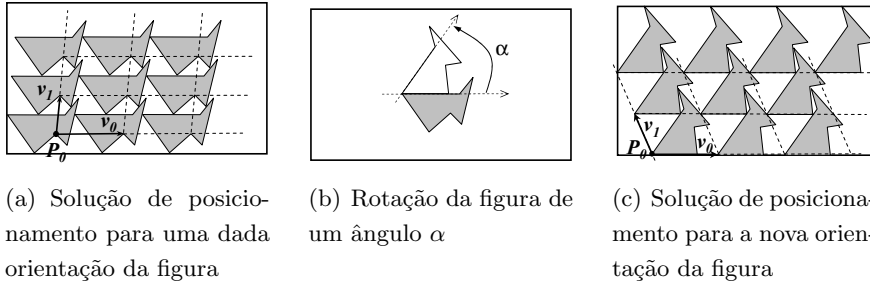


Figura 4.2: Diferentes orientações de uma dada figura conduzem a diferentes qualidades de utilização da placa.

A estrutura geral de um problema de posicionamento periódico de uma única figura é comum às três abordagens heurísticas propostas neste trabalho para a sua resolução e que se apresentam de seguida. Desta estrutura, pode ver-se que o problema principal foi decomposto hierarquicamente em vários sub-problemas e resolvido de forma sucessiva. Em cada iteração, i.e., para cada ângulo  $\alpha$ , há uma sequência de vários passos tendo cada um por objectivo a determinação de um parâmetro do problema. Cada sub-problema é resolvido mediante alguma regra ou critério, explicados nas próximas sub-seções.

#### 4.2.1 Critérios de posicionamento periódico

Considerando a existência de uma placa limitada, logo, de dimensões finitas, não pode ser utilizado como único critério de posicionamento periódico aquele que maximiza a densidade de posicionamento no plano, i.e., a minimização da área do paralelogramo resultante dos vectores  $v_0$  e  $v_1$  ( $|v_0 \times v_1|$ ). Tal como já foi referido, aliás, este critério nem se afigura à partida como adequado ao posicionamento numa placa limitada. No entanto, este critério foi incluído no conjunto de critérios a testar. Uma vez que a placa é rectangular, foram definidos mais dois critérios de posicionamento, cada um deles tendo em conta precisamente a colocação ao longo de cada lado do rectângulo. Resumem-se de seguida os três critérios testados:

- MIN\_AREA\_PARALELOGRAMO ( $\diamond$ ) — a determinação do par de vectores ( $v_0$  e  $v_1$ ) é feita como se se tratasse do plano, i.e., as fronteiras

da placa não são tidas em consideração;

- X\_PARALELO (X//) —  $v_0$  é fixado paralelo ao lado horizontal da placa;  $v_1$  é determinado tal que a terceira réplica posicionada no extremo do vector mantenha o contacto com as duas primeiras réplicas posicionadas;
- Y\_PARALELO (Y//) — idem, trocando o lado horizontal pelo vertical.

Na aplicação do primeiro critério ( $\diamond$ ), a função objectivo não-linear e não-convexa de minimização da área do paralelogramo fundamental dificulta a aplicação de técnicas exactas, pelo que foi desenvolvida uma heurística iterativa gulosa para esse fim. A heurística corre até que um pré-definido número de iterações sem melhoria do valor da função objectivo seja atingido. A primeira réplica é colocada no plano. Uma aresta do invólucro de posicionamento da segunda réplica a posicionar face à primeira ( $NFP_{1,2}$ ) é escolhida, e um ponto dessa aresta é seleccionado para posicionar a segunda réplica (o que garante que as duas figuras se mantêm em contacto). Fica determinado o vector  $v_0$ . A terceira réplica é posicionada tal que mantenha o contacto com as duas figuras já colocadas ( $v_1$  é fixado). Este ponto é facilmente encontrado numa das duas intersecções dos invólucros de posicionamento ( $NFP_{1,3}$ ) e ( $NFP_{2,3}$ ). Isto garante que as restantes réplicas a posicionar não se sobrepõem e que a área do paralelogramo formado pelos dois vectores ( $v_0$  e  $v_1$ ) não é maior do que o estritamente necessário. Na figura 4.3 é possível visualizar a posição relativa das três réplicas colocadas, a qual determina os vectores ( $v_0, v_1$ ). É então possível calcular a área do paralelogramo fundamental, que é o valor da função objectivo que se pretende minimizar. Se o seu valor for inferior ao melhor valor guardado até então, esse valor é actualizado. Caso contrário, o número de iterações sem alteração é incrementado e um novo ponto de contacto na mesma aresta sob análise é escolhido. Este processo é repetido ao longo das arestas do  $NFP_{1,2}$ . Apenas metade das arestas do invólucro de posicionamento é testada, uma vez que se trata do posicionamento de uma figura face a uma figura igual, o que implica que o invólucro de posicionamento resulte numa figura simétrica, pelo que os testes a fazer na segunda metade das arestas seriam uma repetição dos primeiros. No final da heurística, embora não se possa garantir que se encontrou o paralelogramo fundamental de área mínima, após um

devido ajuste dos valores a atribuir ao número de iterações sem alteração que a heurística vai considerar, a solução encontrada está muito próxima da óptima.

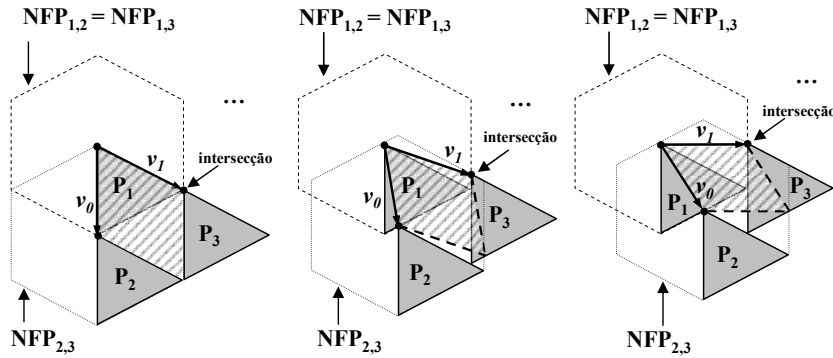
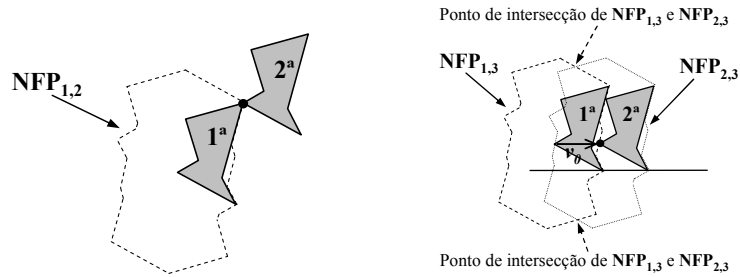


Figura 4.3: Algumas iterações da aplicação do critério de posicionamento  $\diamond$ , escolhida uma das arestas do  $NFP_{1,2}$ .  $NFP_{1,2}$  é igual a  $NFP_{1,3}$  uma vez que  $P_2$  é igual a  $P_3$ .  $P_3$  é colocado num dos pontos de intersecção entre  $NFP_{1,3}$  e  $NFP_{2,3}$

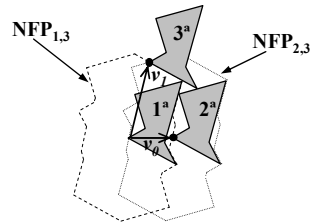
Os outros dois critérios ( $X//$  e  $Y//$ ) foram considerados tendo em atenção o facto de a placa ser rectangular e tentando tirar partido das fronteiras da placa. Tomando como exemplo o critério  $X//$ , a colocação da segunda réplica depois de colocada a primeira é imediata, uma vez que  $v_0$  é horizontal e obriga a segunda réplica a estar em contacto com a primeira. A determinação de  $v_1$  é também imediata, uma vez que a terceira réplica a ser colocada deverá estar em contacto com a primeira e com a segunda, simultaneamente. Isto é conseguido escolhendo para ponto de posicionamento da terceira réplica um dos dois pontos de intersecção dos invólucros de posicionamento da terceira réplica face à primeira ( $NFP_{1,3}$ ) e face à segunda ( $NFP_{2,3}$ ), conforme pode ser visualizado na figura 4.4, utilizando-se como exemplo o posicionamento periódico simples. A figura utilizada como exemplo é propositadamente diferente da utilizada na figura 4.3, para que uma maior diversificação permita melhor clarificar as ideias subjacentes.

Estes exemplos servem ainda para evidenciar uma afirmação feita anteriormente, de que o invólucro de posicionamento de uma figura face a uma figura idêntica é um polígono simétrico relativamente ao seu centro de massa.



(a) Lugar geométrico dos pontos de posicionamento admissíveis e em contacto da 2ª réplica face à primeira ( $NFP_{1,2}$ )

(b) Escolha do ponto de posicionamento da 2ª réplica colocada segundo o critério  $X//$ .  $v_0$  fica determinado.



(c) Escolha do ponto de posicionamento da 3ª réplica colocada numa das intersecções dos NFPs.  $v_1$  fica determinado.

Figura 4.4: Passos do posicionamento periódico simples de uma figura segundo o critério de posicionamento  $X//$ .

A aplicação do terceiro critério ( $Y//$ ) é em tudo semelhante à aplicação do critério ( $X//$ ), começando por determinar o vector  $v_0$  vertical em vez de horizontal. Tudo o resto é calculado do mesmo modo.

Devido ao processo iterativo inerente, o primeiro critério ( $\diamond$ ) é muito demorado, face aos restantes critérios cujo tempo de execução é desprezável. Como este critério é chamado de cada vez que há uma alteração no valor do ângulo de rotação da figura base, tem um peso significativo no tempo computacional final.

### 4.2.2 Escolha do ponto inicial

São pontos admissíveis para a colocação da primeira réplica na placa todos os pontos que permitam que a réplica fique posicionada integralmente dentro da placa. Para garantir que isto acontece, recorre-se ao conceito de invólucro de posicionamento interior (IFP), obrigando o ponto de posicionamento a ficar sobre a sua fronteira ou no seu interior. Uma vez que a placa é rectangular, o IFP é também um rectângulo. No entanto, uma vez que tal espaço de soluções admissíveis é demasiado grande, a busca pode ser restringida a uma área menor sem prejuízo da qualidade da solução obtida, pois, após a colocação da primeira figura, esta vai ser replicada tantas vezes quantas for possível. A busca foi então restringida a uma área que corresponde ao rectângulo envolvente da figura a posicionar, já na orientação pretendida. Esse rectângulo é dividido em 4 partes iguais, cada uma posicionada num canto do IFP (figura 4.5), uma vez que faz sentido pensar que pelo menos uma réplica deverá estar “encostada” à placa numa boa solução de posicionamento. A pesquisa será efectuada em cada canto, alterando iterativamente e aleatoriamente o valor de cada coordenada  $x$  ou  $y$  de  $P_0$ .

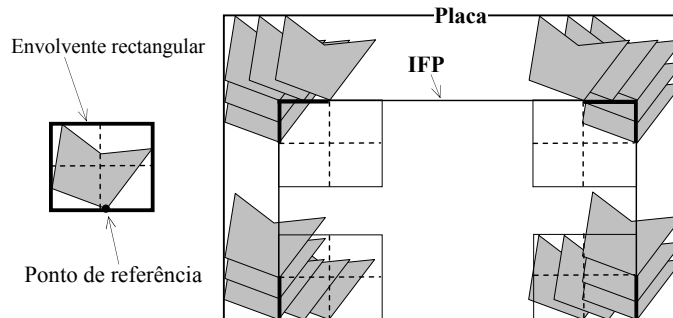


Figura 4.5: Área restrita do IFP onde deverá ser posicionado  $P_0$ .

### 4.2.3 A lista de ângulos

Na secção 4.3 apresentam-se as três abordagens heurísticas propostas para resolver o problema de PPF1. A primeira e segunda abordagens propostas consistem em procurar, numa lista de ângulos, o ângulo que resulta num posicionamento com melhor aproveitamento da placa. A forma como a lista de ângulos é criada depende da heurística subjacente, pelo que será nessa secção descrita em detalhe.

#### 4.2.4 Posicionamento periódico duplo

##### Regras de agrupamento

Estas regras apenas são aplicáveis no caso de posicionamento periódico duplo. Neste tipo de posicionamento, a figura a replicar deverá ser previamente agrupada a uma figura igual a si própria, mas rodada de  $180^\circ$ . Se o facto de “rodar” uma dada figura de  $180^\circ$  é uma tarefa trivial, já o mesmo não se pode dizer de “como as agrupar”. Um melhor ou pior “encaixe” da segunda figura relativamente à primeira vai necessariamente influenciar a qualidade do posicionamento final obtido. A filosofia seguida neste trabalho para tratar do posicionamento periódico duplo foi criar uma nova figura, à qual se passará a chamar daqui por diante “mega-figura”, seguido da aplicação do posicionamento periódico simples. Passa assim a ser transparente o facto de se tratar de posicionamento simples ou duplo, pois, desde o momento em que a mega-figura é criada, passa a ser vista como uma figura única e tratada da mesma forma num caso ou no outro, nos restantes passos do processo construtivo. No final de cada iteração, as duas figuras são novamente individualizadas para poderem ser visualizadas separadamente e não como um todo, no caso do processo iterativo ter chegado ao fim, ou pura e simplesmente para que uma nova rotação possa ser aplicada à figura base e uma nova mega-figura possa voltar a ser criada.

Várias regras, definidas por Oliveira [1995] foram consideradas como possíveis regras de criação da mega-figura (figura 4.6). Da aplicação de qualquer das regras, resulta a determinação do ponto de contacto entre a figura rodada e a figura na rotação original. A nomenclatura utilizada foi mantida, retirada dos termos anglo-saxónicos utilizados pelos autores do artigo:

- MIN\_AREA (MA) — minimização da área do rectângulo envolvente da mega-figura criada;
- MIN\_LENGTH (ML) — minimização do comprimento do rectângulo envolvente da mega-figura;
- MAX\_OVERLAP (MO) — maximização da sobreposição dos rectângulos envolventes das duas figuras individuais, sem contudo permitir que haja sobreposição das duas figuras;

- MAX\_CONTACTS (MC) — maximização do comprimento total dos contactos entre as duas figuras.

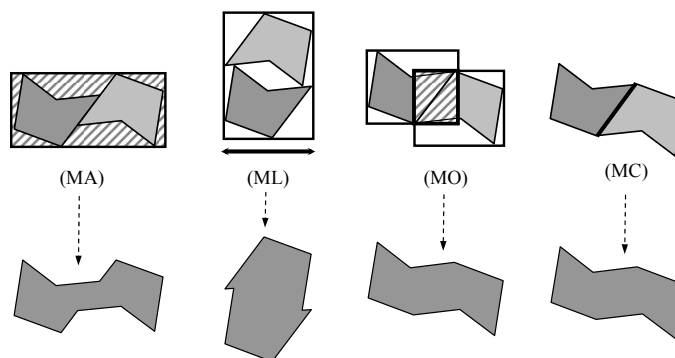


Figura 4.6: Regras de agrupamento usadas no problema de posicionamento periódico duplo.

A mega-figura resultante do agrupamento, segundo cada uma das regras, é também apresentada na figura 4.6. Mal recomece uma nova iteração, i.e., quando uma nova rotação for aplicada à figura base, a mega-figura agora criada deixa de fazer sentido e uma nova mega-figura será então criada segundo a regra escolhida. Convém salientar que a operação de agrupamento de duas figuras é complexa e, conseqüentemente, demorada, pois, dado que a figura base sofreu nova rotação, terão de ser recalculados o NFP que envolve a figura na nova rotação e a mesma figura rodada  $180^\circ$ , assim como os IFPs, para a figura nas duas rotações. De novo são comparados diferentes pontos de posicionamento entre as duas figuras para ser escolhido o ponto de contacto segundo o critério pretendido.

### Preenchimento de buracos

Ainda no caso do posicionamento periódico duplo, é possível que exista algum espaço deixado entre uma mega-figura posicionada e a fronteira onde não caiba integralmente uma mega-figura, mas caiba metade. Ora, metade de uma mega-figura é uma figura completa, pelo que faz sentido colocá-la. Este preenchimento no final do posicionamento mantém a regularidade, replicando apenas uma das duas figuras que se encontravam agrupadas, desde que replique a figura correspondente à metade que aí seria colocada no caso

de ser caber a mega-figura. Consegue-se, com isto, aumentar o aproveitamento da placa, por vezes de forma significativa.

### 4.3 Abordagens heurísticas propostas

Um posicionamento periódico fica completamente definido após serem atribuídos valores ao conjunto de parâmetros anteriormente apresentados que o caracterizam, quer se trate de um posicionamento periódico simples ou duplo. Diferentes abordagens foram sendo desenvolvidas ao longo deste trabalho, relatando-se nos pontos que se seguem as mais relevantes. No primeiro ponto incluem-se as primeiras abordagens aplicadas, que viriam a revelar-se pouco adequadas.

#### 4.3.1 Abordagens iniciais

O primeiro algoritmo de posicionamento desenvolvido considerou uma pesquisa segundo o método de Monte Carlo puro. Desta forma, para a figura na orientação dada, é calculada uma solução admissível inicial qualquer e efectuado um conjunto de  $n$  iterações tal que, em cada iteração, aleatoriamente é escolhido um dos parâmetros a variar, mantendo-se os restantes com os mesmos valores da iteração anterior. Se o parâmetro a alterar for  $P_0$ , é escolhida uma das coordenadas para se fazer um ligeiro deslocamento, o qual é calculado segundo uma distribuição normal. Se o parâmetro a alterar for o ângulo de rotação  $\alpha$ , é calculado um valor segundo uma distribuição normal e adicionado à rotação que a figura tinha nesse momento. Se o parâmetro a alterar for o par de vectores  $v_0, v_1$ , é escolhida uma das arestas do NFP, dando igual probabilidade de ser escolhida a todas as arestas, é atribuído um peso (entre 0 e 1) que determina qual o posicionamento sobre a aresta ( $v_0$  é determinado) e, consecutivamente,  $v_1$  é calculado tal que as três primeiras réplicas colocadas estejam em contacto.

Descreve-se na figura 4.7 este algoritmo, representando-se uma solução por  $s'$ , i.e., o conjunto formado por  $(\alpha, P_0, v_0, v_1)$ . A melhor solução encontrada durante a pesquisa será representada por  $s^*$ .

A regra segundo a qual é gerada uma nova solução foi posteriormente alterada de forma a permitir uma pesquisa local do tipo “guloso”. Neste caso, escolhido um parâmetro a variar, só haverá nova escolha de parâmetro



```

procedure MonteCarlo()
   $s_0 = \text{GeraSoluçãoInicial}()$ 
   $s^* = s' = s_0$ 
  repeat
     $p = \text{EscolheParâmetroAVariar}()$ 
     $s' = \text{ActualizaSolução}(s', p)$ 
     $s^* = \text{Actualização}(s^*, s')$ 
  until Número de Iterações Pré-definido
end

```

Figura 4.7: Estrutura geral do primeiro algoritmo desenvolvido

quando a solução obtida por variações deste piorar, caso contrário, mantém-se a pesquisa em seu redor. Descreve-se na figura 4.8 este algoritmo.

```

procedure MonteCarloGuloso()
   $s_0 = \text{GeraSoluçãoInicial}()$ 
   $s^* = s' = s_0$ 
  repeat
     $p = \text{EscolheParâmetroAVariar}()$ 
    repeat
       $s' = \text{ActualizaSolução}(s', p)$ 
       $s^* = \text{Actualização}(s^*, s')$ 
    until Solução Piorar
  until Número de Iterações Sem Alteração Pré-definido
end

```

Figura 4.8: Estrutura geral do primeiro algoritmo desenvolvido - após alteração

Qualquer destas variantes, no entanto, foi abandonada por necessitar de um número de iterações demasiado elevado para conseguir, eventualmente, chegar a uma boa solução de posicionamento. Depois destas tentativas infrutíferas iniciais, surgiu posteriormente um conjunto de três abordagens cuja estrutura tem a devida fundamentação e cujos resultados assim o vieram a comprovar.

### 4.3.2 Heurística Ângulos Paralelos (HAP)

A primeira abordagem de posicionamento proposta surgiu de um processo de reflexão sobre o tipo de problema que se pretende resolver. A excessiva

liberdade permitida quando não é imposta qualquer restrição à orientação da figura a posicionar, i.e., quando a gama a pesquisar se encontra entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ , obriga a conduzir de algum modo a procura da solução. Obviamente não é possível experimentar todas as orientações numa gama contínua, por isso, o melhor seria tentar escolher uma lista de ângulos que fosse, potencialmente, mais interessante ou mais passível de sucesso. Daí, e por visualização das fronteiras da placa (rectangular) e de algumas figuras que vieram a ser utilizadas como instâncias para os testes computacionais, pensou-se que uma boa orientação seria a que coloca a figura encostada a uma fronteira da placa. Ou seja, que dois pontos contíguos estejam colocados sobre a fronteira da placa. Isto é conseguido através da utilização da envolvente convexa da figura, pois se a figura não é convexa, não serão todas as suas arestas mas apenas as arestas da sua envolvente convexa que poderão estar em contacto com as fronteiras da placa.

Então, para uma dada figura, calcula-se a sua envolvente convexa e consideram-se como ângulos candidatos todos aqueles ângulos que permitem rodar a figura para uma posição tal que alguma aresta da envolvente convexa da figura seja paralela a uma das fronteiras da placa. A lista assim criada é finita e mantém-se inalterável ao longo da execução do algoritmo (figura 4.9).

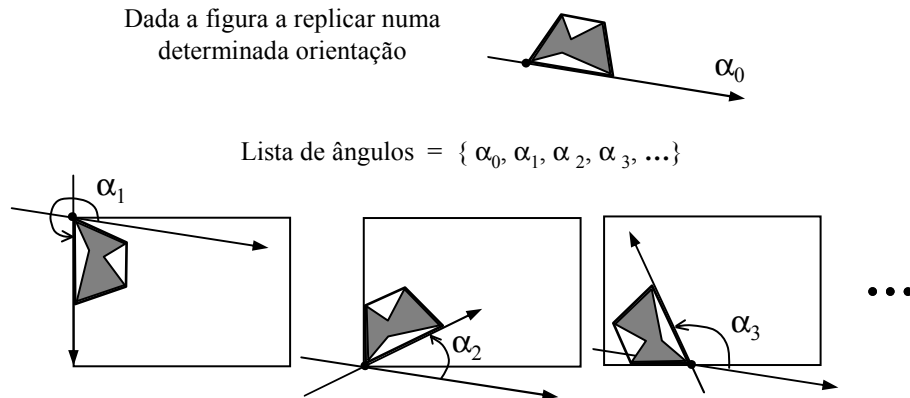


Figura 4.9: Como construir a lista de ângulos utilizada pela HAP.

São necessários uns breves comentários relativamente à composição da lista de ângulos. Em primeiro lugar, o número de arestas de uma figura não está directamente ligado ao número de ângulos que virão a ser considerados, uma vez que o que é tido em conta é a envolvente convexa da figura e,

quanto mais partes côncavas essa figura contiver, menos vértices terá a sua envolvente convexa. Em segundo lugar, é também importante ter em atenção o tipo de placa, um rectângulo, em que metade dos ângulos é equivalente à outra metade, razão pela qual do conjunto total de ângulos encontrados pelo processo descrito basta considerar a primeira metade, que se encontra entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Para melhor se compreender estes comentários, pode ver-se, numa secção posterior, aquando da apresentação das instâncias de teste utilizadas, a terceira coluna da figura 4.12, onde se indica, para cada instância, o número de ângulos que efectivamente constitui a lista de ângulos no caso da aplicação desta abordagem.

Depois da lista de ângulos ter sido totalmente percorrida, é efectuada uma pesquisa local, vista como uma pós-optimização, aos  $n\%$  ângulos da lista que conduziram aos melhores resultados em termos de aproveitamento da placa. Esta pós-optimização faz sentido na medida em que se constatou, depois de várias experiências, que nem sempre o ângulo que resultava na melhor solução de posicionamento constava da lista dos potenciais candidatos, mas normalmente, era um ângulo bastante próximo de um deles. Nesta pós-optimização, são efectuadas pequenas variações em redor do ângulo base (que faz parte da lista) e a heurística geral de posicionamento é aplicada a cada um desses novos ângulos gerados. Deve apenas ser referido que, para cada pequena variação no valor do ângulo base, a orientação da figura muda, logo, é necessário refazer todos os NFPs que envolvam essa figura. Após um número pré-definido de iterações sem alteração, a pesquisa local passa para o ângulo base seguinte e repete-se o procedimento, até se terem esgotado os  $n\%$  ângulos eleitos à partida. A estrutura do algoritmo é apresentada na figura 4.10.

### 4.3.3 Heurística Ângulos Constantes (HAC)

Esta abordagem surgiu na sequência da primeira descrita (HAP) com o intuito de ultrapassar algumas características particulares que se afiguram como desvantagens em certas situações, nomeadamente:

- a dimensão da lista de ângulos não é conhecida *a priori*, pois depende do número de arestas da envolvente convexa da figura original;
- o tempo computacional depende fortemente da dimensão da lista, uma vez que a pesquisa é exaustiva;

```

procedure HeurísticaÂngulosParalelos()
  foreach ângulo  $\alpha_i$  na Lista de ângulos do
     $s' = \text{HeurísticaDePosicionamento}(\alpha_i)$ 
     $\text{InsereOrdenadamenteNaLista}(s')$ 
     $s^* = \text{Actualização}(s', s^*)$ 
  end
  foreach ângulo dos  $n\%$  primeiros ângulos da lista ordenada do
     $s' = \text{PesquisaLocal}(s')$ 
     $s^* = \text{Actualização}(s', s^*)$ 
  end
end

```

Figura 4.10: Estrutura geral da abordagem HAP

- não há qualquer garantia de que uma lista de ângulos gerada deste modo cubra toda a gama de ângulos.

Uma lista constituída por ângulos de rotação igualmente espaçados garante que toda a gama possível de ângulos seja coberta. Adicionalmente, o tempo computacional poderá ser facilmente controlado por uma escolha adequada do passo entre os ângulos da lista.

Tal como na abordagem HAP anteriormente apresentada, uma pesquisa local tem também lugar como uma pós-optimização aos  $n\%$  ângulos da lista que conduzem às melhores soluções de posicionamento. A estrutura geral desta abordagem é semelhante à já apresentada para a anterior HAP, pois a única diferença reside na forma como a lista de ângulos é criada.

#### 4.3.4 Heurística Ângulos Livres (HAL)

Esta abordagem usa um procedimento de alto nível - a meta-heurística *Iterated Local Search (ILS)* - para orientar a pesquisa. A estrutura geral da meta-heurística *ILS* ([Lourenço *et al.*, 2002]) é apresentada na figura 4.11 e será usada para descrever os passos fundamentais da abordagem HAL.

##### Solução Inicial

A solução inicial  $s_0$  é um posicionamento admissível resultante da atribuição de valores aos vários parâmetros que o definem, incluindo a rotação da figura base de um ângulo  $\alpha_0$ .

```
procedure IteratedLocalSearch()  
   $s_0 = \text{GeraSoluçãoInicial}()$   
   $s^* = \text{PesquisaLocal}(s_0)$   
  repeat  
     $s' = \text{Perturbação}(s')$   
     $s^{*'} = \text{PesquisaLocal}(s')$   
     $s^* = \text{CritérioAceitação}(s^*, s^{*'})$   
  until condição de paragem  
end
```

Figura 4.11: Estrutura geral da meta-heurística *ILS*

### Estrutura de vizinhança

A atribuição de um valor ao ângulo de rotação  $\alpha$ , embora conduzida por um procedimento de alto nível (ILS), assenta na mesma heurística de posicionamento de baixo nível, comum a todas as abordagens propostas, para o cálculo dos restantes parâmetros: os vectores geradores  $(v_0, v_1)$  e o ponto inicial de posicionamento  $P_0$ . A estrutura de vizinhança usada baseia-se em dois tipos de movimentos sobre o ângulo de rotação  $\alpha$ : um tipo de movimento, que atribui uma grande variação ao ângulo de rotação, é usado na fase da perturbação; o outro tipo de movimento, uma ligeira variação em torno do ângulo base, é usado na fase de pesquisa local. No entanto, qualquer que seja o tipo de movimento, a sua implementação tem que ser concebida com algum cuidado, devido ao elevado tempo consumido por certo tipo de operações que garantem a admissibilidade geométrica das soluções de posicionamento obtidas. Relembrando, de cada vez que uma figura sofre uma rotação, o NFP que relaciona o seu posicionamento face à outra figura terá que ser recalculado, assim como o IFP face à placa. E, enquanto o cálculo do IFP é rápido, o mesmo não se pode dizer sobre o cálculo do NFP.

No caso do posicionamento periódico duplo, para reduzir o tempo computacional total, nem todas as operações da heurística de posicionamento são realizadas durante a fase de pesquisa local: a mega-figura é apenas calculada após cada perturbação e a sua forma mantém-se inalterada durante a fase de pesquisa local, sendo apenas rodada sempre que haja uma pequena variação na rotação, própria da pesquisa local. Ou seja, no início da pesquisa local, como acabou de haver uma perturbação, a figura original fica orientada numa nova rotação e o NFP e IFP que a envolvem são re-

calculados, assim como a mega-figura. A partir daí, até que aconteça nova perturbação, a forma da mega-figura é mantida e cada pequena variação no ângulo de rotação  $\alpha$  é efectuada directamente na mega-figura e não sobre a figura original e a sua rotação de  $180^\circ$ , para evitar o algoritmo moroso de agrupamento de duas figuras. Como nesta fase de pesquisa local o ângulo de rotação sofre ligeiras variações, em torno do ângulo base, achou-se que, na generalidade dos casos, a diferença entre a mega-figura já calculada e rodada dessa pequena variação e o cálculo de uma nova mega-figura, a partir da figura original rodada dessa pequena variação, seria desprezável. Quando uma nova perturbação acontecer, o ângulo de rotação sofre uma grande variação e a heurística de posicionamento completa é aplicada.

### **Critério de aceitação**

Numa implementação segundo a meta-heurística *ILS*, é possível aceitar todas as soluções, ou apenas parte. Após algumas experiências efectuadas, foi decidido que todas as soluções geradas pela pesquisa local efectuada seriam aceites, i.e., a perturbação é sempre aplicada sobre o último óptimo local visitado. Este critério de aceitação claramente favorece a diversificação, permitindo uma grande liberdade na selecção do ângulo de rotação  $\alpha$ .

### **Critério de paragem**

O algoritmo pára ao fim da primeira de duas ocorrências: um número pré-definido de iterações sem alteração da melhor solução é atingido ou um número fixo de iterações foi totalizado.

## **4.4 Experiências Computacionais**

O conjunto de experiências computacionais realizado dividiu-se em duas fases. Numa primeira fase, designada de testes preliminares, pretendeu-se testar e avaliar o desempenho das diferentes regras e critérios utilizados nos algoritmos desenvolvidos, assim como ajustar alguns parâmetros de baixo nível. Todas as combinações possíveis de critérios foram testadas e repetidas para diferentes valores dos parâmetros, com o único objectivo de escolher, no final, de entre cada conjunto de critérios, um que se evidencie e possa ser eleito para a realização das experiências finais. As três abordagens heurísticas foram utilizadas para a realização deste conjunto de experiências.

Na segunda fase, designada por testes computacionais, são já apresentados os resultados da aplicação das três abordagens heurísticas desenvolvidas, após escolha de alguns critérios em detrimento de outros e com os parâmetros já devidamente ajustados. O objectivo desta fase é a comparação de desempenho entre as três abordagens heurísticas propostas.

#### 4.4.1 Instâncias utilizadas

Foram utilizadas sete instâncias de problemas na realização das experiências computacionais (figura 4.12). As duas primeiras instâncias, *Cheng* e *Stoyan*, encontradas na literatura respectivamente em [Cheng e Rao, 1999] e [Stoyan e Pankratov, 1999], foram escolhidas uma vez que se trata dos únicos artigos publicados que, reportando-se ao mesmo problema tratado nesta tese, descrevem completamente os dados utilizados por forma a poderem ser comparados resultados. Outros autores, nomeadamente Milenkovic [2002], embora reportando o mesmo problema, não apresentam a descrição das figuras utilizadas, pelo que é de todo impossível utilizar como termo de comparação.

Além destas duas instâncias, foram criadas mais cinco instâncias baseadas no conjunto de dados SWIM<sup>2</sup>, definido em [Oliveira *et al.*, 2000] e disponível no site do [ESICUP]. Essas cinco instâncias serão designadas de *Swim1* a *Swim5*. A sua inclusão no conjunto de instâncias, além de permitir tirar conclusões mais robustas quanto ao desempenho das três abordagens heurísticas propostas, permitirá fazer comparações em trabalhos futuros. A dimensão das placas inspirou-se nas soluções obtidas em [Oliveira *et al.*, 2000], para o problema de *irregular strip-packing*, que tiveram origem em processos industriais reais. A largura da placa, medida em polegadas, corresponde ao valor 5752 milímetros.

Na figura 4.12, além de uma descrição visual das instâncias utilizadas, faz-se uma comparação entre características relevantes das figuras que as compõem. Nomeadamente, no caso das duas primeiras instâncias descritas (*Cheng* e *Stoyan*), sendo ambas compostas por figuras não-convexas, o número de vértices da figura irregular é cerca do dobro na primeira (35 vértices no caso de *Cheng* e 17 no caso de *Stoyan*). O quociente entre a área da placa e a área da figura (534 em *Cheng* e 93 em *Stoyan*) revela, claramente, que no primeiro caso a placa pode ser considerada grande, quando comparada

---

<sup>2</sup>Swim: instância de um problema de posicionamento de formas irregulares








Instância	nº de vértices da peça	nº de vértices da Env. Convexa	Área da placa	Área da figura	figura
			Área da figura	Área da Env. Convexa	
<b>Cheng</b>	35	$\frac{68}{2}$	534	0.88	
<b>Stoyan</b>	17	$\frac{64}{2}$	93	0.96	
<b>Swim1</b>	44	$\frac{28}{2}$	362	0.49	
<b>Swim2</b>	42	$\frac{48}{2}$	134	0.84	
<b>Swim3</b>	37	$\frac{48}{2}$	132	0.94	
<b>Swim4</b>	31	$\frac{40}{2}$	310	0.67	
<b>Swim5</b>	35	$\frac{136}{2}$	272	1.00	

Figura 4.12: Instâncias utilizadas.

com a dimensão da figura a posicionar, enquanto no segundo caso pode ser considerada pequena. Este valor, não sendo real, permite fazer uma ideia de quantas figuras poderiam ser posicionadas na placa considerada se fosse possível um aproveitamento de 100%. O quociente entre a área da figura e a área da sua envolvente convexa elucida sobre as possíveis reentrâncias que a compõem e que poderão mostrar-se vantajosas na aplicação de um posicionamento periódico duplo. O número de ângulos percorridos na abordagem HAP é metade do número de ângulos calculados a partir da envolvente convexa, pelo que se pode concluir que é semelhante nas duas instâncias.

A comparação entre características das restantes cinco instâncias propostas, revela diversidade quanto à forma geométrica, nº de vértices das figuras, nº de figuras posicionadas, entre outras.

#### 4.4.2 Resultados

Os resultados encontram-se divididos em dois grupos, em coerência com as duas fases experimentais: os resultados dos testes preliminares e os resultados finais. A medida de desempenho utilizada para comparação das abordagens propostas é o número de figuras integralmente colocadas na placa utilizada, sendo indiferente em termos conceptuais esta medida ou a per-



centagem de utilização da placa, pois a segunda é obtida directamente da primeira.

### Resultados dos testes preliminares

O objectivo principal destes testes preliminares foi a escolha da configuração do algoritmo a ser utilizado nos testes finais. Ou seja, comparar o desempenho relativo de várias regras e critérios apresentados em secções prévias, para que uns possam ser escolhidos em detrimento de outros para a realização dos testes finais. Simultaneamente, foram afinados parâmetros integrados nos procedimentos iterativos, tal como o número de iterações a realizar e o número de iterações sem alteração a considerar. Também, na aplicação da abordagem HAC, foi ajustado o número de ângulos a considerar.

Para estes testes preliminares, em que foram testadas todas as possíveis combinações de critérios, regras, valores de parâmetros, abordagens heurísticas, apenas foram usadas as instâncias *Cheng* e *Stoyan*. Os resultados comparativos, fixando todos os parâmetros num determinado valor, encontram-se resumidos nas tabelas 5.1, 4.2 e 4.3, uma para cada abordagem proposta. Estes resultados foram obtidos após 10 corridas, considerando como critério de paragem um número de iterações sem alteração igual a 10 em todos os processos iterativos. No caso das abordagens HAP e HAC, foi efectuada uma pesquisa local em torno de cada um dos 10% melhores ângulos (com melhores resultados). Para a abordagem HAC, foi considerado um espaçamento entre ângulos de 5°. Quanto aos critérios de posicionamento periódico ( $\diamond$ , X// e Y//), na instância *Cheng* apenas se aplicaram os dois primeiros, uma vez que a placa é quadrada e, neste caso, os dois critérios X// e Y// são equivalentes. Na mesma tabela são também apresentados os resultados publicados em [Cheng e Rao, 1999] e [Stoyan e Pankratov, 1999].

Por análise dos resultados obtidos após todo o conjunto de testes efectuado, podem tirar-se já algumas conclusões com interesse para o estabelecimento de uma configuração do algoritmo a ser testado na fase seguinte. A primeira conclusão diz respeito ao resultado da aplicação dos diferentes critérios de posicionamento periódico ( $\diamond$ , X//, Y//), confirmando-se a intuição inicial de que o PPFÍ numa placa limitada deverá ser abordado por um prisma completamente diferente do tradicional, i.e., tendo em conta a existência física de fronteiras da placa, forte restrição ao posicionamento livre. De facto, o critério ( $\diamond$  - minimização da área do paralelogramo fundamental)

Tabela 4.1: Comparação de desempenho entre diferentes regras e critérios, utilizando a abordagem HAP

Tipo posicion.	Instância	Critério posicion.	Regra agrup.	N° figuras colocadas				Tempo (seg.)		
				melhor	média	pioir	d.p.	média	d.p.	
SINGLE	<i>Cheng</i> (399) <sup>†</sup>	◇	—	411	408.4	404	3.0	472.2	20.8	
				<b>415</b>	406.6	400	5.8	413.2	18.2	
	<i>Stoyan</i> (75) <sup>‡</sup>	◇	—	72	70.0	69	1.3	65.1	3.6	
				<b>75</b>	75.0	75	0.0	16.9	0.5	
				<b>75</b>	75.0	75	0.0	17.6	1.0	
DOUBLE	<i>Cheng</i> (—) <sup>†</sup>	◇	MA	438	437.2	436	1.0	622.3	24.2	
			ML	448	447.2	442	1.9	649.3	47.8	
			MO	438	436.0	430	3.3	563.9	29.3	
			MC	438	436.8	436	1.0	624.1	96.5	
		X//	MA	<b>450</b>	450.0	450	0.0	453.5	17.0	
	ML		448	445.2	442	3.0	453.9	24.0		
	MO		428	426.8	424	1.7	392.0	15.3		
	MC		436	433.4	426	3.9	403.1	23.2		
		<i>Stoyan</i> (80) <sup>‡</sup>	◇	MA	<b>76</b>	73.4	70	2.8	161.2	7.5
	ML			72	70.2	70	0.6	174.2	5.5	
	MO			70	70.0	70	0.0	152.1	4.9	
	MC			<b>76</b>	73.4	70	2.8	160.3	7.2	
		X//	MA	<b>76</b>	75.6	72	1.3	42.3	1.7	
	ML		<b>76</b>	73.6	72	2.1	43.5	0.8		
	MO		74	72.6	72	1.0	42.7	1.0		
	MC		<b>76</b>	75.6	72	1.3	42.9	1.8		
		Y//	MA	72	72.0	72	0.0	44.4	1.5	
	ML		72	72.0	72	0.0	48.7	2.5		
	MO		72	70.8	70	1.0	44.4	1.9		
	MC		72	72.0	72	0.0	44.3	0.9		

<sup>†</sup> [Cheng e Rao, 2000]

<sup>‡</sup> [Stoyan e Pankratov, 1999]

raramente produziu melhores resultados do que qualquer dos restantes dois critérios e, adicionalmente, o seu cálculo é mais demorado. Esta conclusão é francamente evidente no caso da instância *Stoyan* e menos perceptível no caso da instância *Cheng*, uma vez que neste segundo caso o quociente entre a área da placa e a área da figura é muito superior, o que significa que a placa é muito “muito” grande quando comparada com a figura a posicionar e a existência de fronteiras acaba por se diluir. A diferença encontrada entre o desempenho de X// e Y// depende essencialmente da diferença entre as arestas horizontal e vertical da placa, ou seja, numa placa rectangular cujo comprimento seja superior à largura, o critério X// tenderá a obter melhores resultados.

Tabela 4.2: Comparação de desempenho entre diferentes regras e critérios, utilizando a abordagem HAC

Tipo posicion.	Instância	Critério posicion.	Regra agrup.	N° figuras colocadas				Tempo (seg.)		
				melhor	média	pior	d.p.	média	d.p.	
SINGLE	<i>Cheng</i>	$\diamond$	—	411	408.2	404	2.9	493.8	33.3	
	(399) <sup>†</sup>	<i>X//</i>	—	<b>417</b>	411.1	404	4.7	434.3	29.1	
	<i>Stoyan</i>	$\diamond$	—	72	70.2	69	1.3	71.4	6.2	
	(75) <sup>‡</sup>	<i>X//</i>	—	<b>75</b>	75.0	75	0.0	18.4	1.1	
		<i>Y//</i>	—	<b>75</b>	74.4	72	1.3	18.4	0.7	
DOUBLE	<i>Cheng</i>	$\diamond$	MA	<b>450</b>	449.0	444	2.2	580.6	21.2	
	(—) <sup>†</sup>		ML	<b>450</b>	448.0	440	3.0	595.6	19.2	
			MO	438	436.0	426	4.3	537.0	24.0	
			MC	438	436.0	434	0.9	554.0	19.3	
			<i>X//</i>	MA	<b>450</b>	450.0	450	0.0	426.5	15.3
			ML	448	440.0	436	3.3	445.5	17.8	
			MO	428	426.2	424	1.8	402.2	14.5	
			MC	436	435.4	430	1.9	399.8	12.4	
		<i>Stoyan</i>	$\diamond$	MA	76	76.0	76	0.0	181.1	4.8
		(80) <sup>‡</sup>		ML	70	70	70	0.0	185.1	16.8
				MO	76	76.0	76	0.0	192.6	13.2
				MC	76	76.0	76	0.0	182.3	10.9
			<i>X//</i>	MA	<b>80</b>	77.8	76	2.0	48.8	1.4
			ML	76	74.4	72	2.1	47.8	1.9	
			MO	<b>80</b>	76.2	72	2.6	50.1	1.9	
			MC	<b>80</b>	77.8	76	2.0	60.2	3.4	
			<i>Y//</i>	MA	<b>80</b>	79.2	72	2.5	48.1	1.1
				ML	72	72.0	72	0.0	53.6	2.7
				MO	<b>80</b>	77.4	70	4.2	49.8	1.7
				MC	<b>80</b>	79.2	72	2.5	47.7	1.1

<sup>†</sup> [Cheng e Rao, 2000]<sup>‡</sup> [Stoyan e Pankratov, 1999]

Em segundo lugar, quando se comparam as diferentes regras de agrupamento, apenas aplicável no caso do posicionamento periódico duplo (MA, ML, MO, MC), é evidente que a regra MA (minimização da área do retângulo envolvente da mega-figura) é a que conduz aos melhores resultados, pois supera quase sempre qualquer das restantes.

Finalmente, é já possível concluir que os resultados publicados em [Cheng e Rao, 1999] por aplicação de um algoritmo de compactação e posteriormente modificado por aplicação de algoritmos genéticos [Cheng e Rao, 2000], são facilmente superados por qualquer das abordagens propostas, e os resultados publicados em [Stoyan e Pankratov, 1999] são já igualados por duas das abordagens heurísticas de posicionamento propostas.

Tabela 4.3: Comparação de desempenho entre diferentes regras e critérios, utilizando a abordagem HAL

Tipo posicion.	Instância	Critério posicion.	Regra agrup.	Nº figuras colocadas				Tempo (seg.)		
				melhor	média	pior	d.p.	média	d.p.	
SINGLE	<i>Cheng</i> (399) <sup>†</sup>	◇	—	411	408.9	404	3.0	750.0	83.7	
			X//	<b>418</b>	415.3	400	5.8	564.8	47.9	
	(75) <sup>‡</sup>	◇	—	72	69.3	69	0.9	174.6	13.5	
			X//	<b>75</b>	75.0	75	0.0	37.5	4.4	
		Y//	<b>75</b>	73.5	71	1.6	35.2	2.6		
DOUBLE	<i>Cheng</i> (—) <sup>†</sup>	◇	MA	<b>450</b>	431.5	424	6.3	1242.8	118.2	
			ML	448	430.4	420	8.7	1289.6	148.0	
			MO	448	446.5	436	3.9	1292.8	117.3	
			MC	448	446.7	438	3.5	1372.6	182.8	
		X//	MA	<b>450</b>	434.4	420	11.4	868.4	67.1	
	ML		448	433.5	420	9.5	908.6	57.3		
	MO		<b>450</b>	449.7	448	0.7	821.5	71.9		
	MC		<b>450</b>	448.1	436	4.9	787.0	58.6		
		<i>Stoyan</i> (80) <sup>‡</sup>	◇	MA	76	73.6	70	2.4	554.5	51.2
	ML			72	70.3	66	2.1	542.8	45.5	
	MO			76	72.1	68	3.2	538.4	56.4	
	MC			76	73.6	70	2.4	548.5	52.2	
		X//	MA	<b>80</b>	76.0	72	3.5	147.8	12.3	
	ML		72	71.9	70	0.5	161.1	12.2		
	MO		<b>80</b>	75.3	70	3.8	136.0	10.4		
	MC		<b>80</b>	76.0	72	3.5	146.1	12.6		
		Y//	MA	<b>80</b>	73.2	72	2.8	142.7	12.5	
	ML		72	71.9	70	0.5	139.3	16.0		
	MO		<b>80</b>	74.3	72	3.2	132.3	10.8		
	MC		<b>80</b>	73.2	72	2.8	141.2	11.4		

<sup>†</sup> [Cheng e Rao, 2000]

<sup>‡</sup> [Stoyan e Pankratov, 1999]

## Resultados computacionais

Na sequência dos testes preliminares, foram seleccionados alguns critérios e rejeitados outros. Nomeadamente, no caso do posicionamento periódico duplo, apenas a regra de agrupamento (MA) foi utilizada, visto que a diferença relativamente aos restantes é significativa. Quanto aos critérios de posicionamento periódico, apenas X// e Y// foram considerados, uma vez que raramente o critério ◇ consegue igualá-los.

As tabelas 4.4 e 4.5 resumem os resultados computacionais obtidos, mostrando o melhor resultado, o pior e a média dos resultados obtidos para cada instância e considerando cada abordagem heurística proposta. Para a obtenção destes valores, foram executadas 10 corridas de cada abordagem por

cada critério de posicionamento testado, X// e Y//. No caso da abordagem HAC, o passo escolhido entre ângulos foi de 5°. O número de iterações sem alteração foi aumentado para 15 (para garantir a obtenção de resultados de boa qualidade). O melhor resultado para cada instância, em cada um dos casos de posicionamento (simples e duplo) está identificado a **negrito**, encontrando-se também indicado (na quarta coluna) o critério de posicionamento que permitiu obter esse valor. As médias foram obtidas a partir da totalidade das observações, englobando os dois critérios de posicionamento. Na aplicação das abordagens HAP e HAC, todos os testes consideraram uma pós-otimização aos 10% ângulos que conduziram aos melhores resultados. Em alguns casos, a pesquisa local não melhorou os resultados obtidos até esse momento, encontrando-se esses casos identificados na tabela com (\*). Embora a percentagem do tempo total gasta com a fase de pesquisa local seja elevada, tendo-se verificado que correspondia a uma percentagem superior a 50% do tempo total, dependendo da instância, conseguiu melhorar os resultados na maioria dos casos.

Tabela 4.4: Resultados computacionais: instâncias *Cheng* e *Stoyan*

Instância	Tipo posicion.	Abordagem heurística	Critério posicion.	N° figuras colocadas				Tempo (seg.)	
				melhor	média	pior	d.p.	média	d.p.
<i>Cheng</i>	SINGLE (399) <sup>†</sup>	HAP	X//	418	414.2	411	2.7	452.7	19.6
		HAC	X//	<b>418</b>	417.3	417	0.6	464.5	20.8
		HAL	X//	418	415.3	400	5.8	564.8	47.9
	DOUBLE (—) <sup>†</sup>	HAP	X//	<b>464</b>	452.3	450	1.2	506.1	16.52
		HAC	X//	452	450.4	450	0.8	551.8	23.5
		HAL	X//	450	448.1	436	4.9	787.0	58.6
<i>Stoyan</i>	SINGLE (75) <sup>‡</sup>	HAP	Y//(*)	75	75	75	0.0	15.3	0.7
		HAC	X//(*)	<b>75</b>	75	75	0.0	19.7	1.2
		HAL	X//	75	75	75	0.0	37.5	4.4
	DOUBLE (80) <sup>‡</sup>	HAP	X//	80	79.8	79	0.4	38.1	2.4
		HAC	X//	<b>80</b>	79.9	79	0.3	41.5	9.4
		HAL	X//	80	76.0	72	3.5	147.8	12.3

<sup>†</sup> [Cheng e Rao, 2000]<sup>‡</sup> [Stoyan e Pankratov, 1999]

(\*) A pesquisa local não melhorou os resultados obtidos previamente.

Tabela 4.5: Resultados computacionais: instâncias *Swim1* a *Swim5*

Instância	Tipo posicion.	Abordagem heurística	Critério posicion.	Nº figuras colocadas				Tempo (seg.)	
				melhor	média	pioor	d.p.	média	d.p.
<i>Swim1</i> (25000×5752) <sup>†</sup>	SINGLE	HAP	X//	192	189.2	185	2.0	174.8	7.3
		HAC	X//	<b>195</b>	194.6	194	0.5	301.4	11.9
		HAL	X//	195	193.7	184	3.4	473.8	40.1
	DOUBLE	HAP	X//	<b>247</b>	247	247	0.0	413.9	25.4
		HAC	X//(*)	245	245	245	0.0	433.8	19.7
		HAL	X//	244	226.6	216	8.7	1022.1	109.1
<i>Swim2</i> (20000×5752) <sup>†</sup>	SINGLE	HAP	Y//	96	89.9	86	4.2	62.4	10.2
		HAC	Y//(*)	<b>96</b>	96	96	0.0	86.1	4.9
		HAL	X//	96	89.1	86	4.0	352.6	25.4
	DOUBLE	HAP	X//	107	106.5	106	0.5	288.9	27.0
		HAC	Y//	106	104.8	104	0.6	308.7	31.9
		HAL	X//	<b>116</b>	109.4	98	6.9	792.8	74.1
<i>Swim3</i> (22000×5752) <sup>†</sup>	SINGLE	HAP	X//(*)	<b>100</b>	100	100	0.0	43.6	3.4
		HAC	X//(*)	100	100	100	0.0	69.8	2.7
		HAL	X//	100	100	100	0.0	255.4	21.0
	DOUBLE	HAP	X//	116	115.5	115	0.5	199.4	11.1
		HAC	X//	<b>116</b>	115.8	115	0.4	210.2	12.8
		HAL	X//	116	110.2	108	2.7	875.7	91.7
<i>Swim4</i> (17000×5752) <sup>†</sup>	SINGLE	HAP	X//	202	199.2	196	1.7	115.3	6.5
		HAC	X//	<b>202</b>	200.7	199	1.1	163.1	6.4
		HAL	X//	202	200.3	191	3.4	252.6	31.9
	DOUBLE	HAP	X//	245	241.7	240	1.4	190.8	7.7
		HAC	X//	<b>247</b>	246.7	246	0.5	191.3	4.6
		HAL	X//	246	235.0	224	7.7	379.7	40.9
<i>Swim5</i> (7000×5752) <sup>†</sup>	SINGLE	HAP	Y//(*)	234	234	234	0.0	290.1	10.6
		HAC	X//(*)	234	234	234	0.0	140.4	11.7
		HAL	X//	<b>240</b>	235.2	234	2.5	275.0	23.8
	DOUBLE	HAP	Y//	240	239.4	234	1.9	485.2	18.5
		HAC	Y//	<b>240</b>	240	240	0.0	332.3	24.3
		HAL	X//	240	235.0	234	4.3	310.7	17.1

<sup>†</sup> Dimensões da placa

(\*) A pesquisa local não melhorou os resultados obtidos previamente.

#### 4.4.3 Evolução do desempenho da heurística HAC em função da dimensão da placa

Para melhor avaliar o desempenho de qualquer algoritmo de posicionamento periódico, Cheng e Rao [1999] estabeleceram uma medida: o rendimento compacto universal (UCY do inglês *Universal Compact Yield*). Esta unidade de medida indica a compactação máxima que é possível obter com uma dada figura escolhida, quando não há qualquer restrição de dimensão da placa de posicionamento. Ou seja, mede o aproveitamento correspondente à

densidade máxima alcançável com uma figura particular quando posicionada no plano. O UCY fornece um limite superior para avaliar a qualidade do posicionamento obtido por aplicação de determinado algoritmo. Tomando em consideração o valor do UCY que os autores propõem para a instância *Cheng*, quando replicada segundo um posicionamento periódico simples (83.07 %), foi variado o comprimento do lado da placa quadrangular de 25 até 500. Os resultados comparativos são ilustrados na figura 4.13.

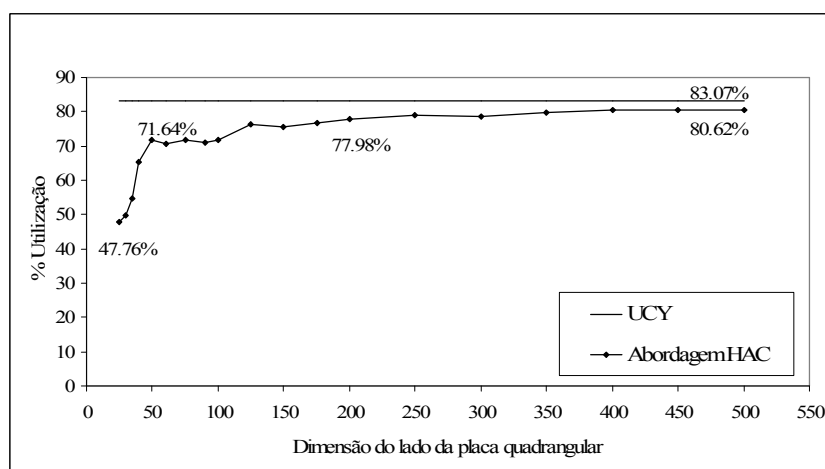


Figura 4.13: Evolução do desempenho da heurística HAC em função da dimensão da placa, para a instância *Cheng*, segundo um posicionamento periódico simples.

Infelizmente, não foi possível incluir nos mesmos gráficos a curva apresentada por Cheng e Rao [1999], pois no artigo os autores não disponibilizam os valores exactos das coordenadas dos pontos que a formam. No entanto, como os mesmos autores publicaram em [Cheng e Rao, 2000] o aproveitamento obtido com a aplicação do seu algoritmo de vizinhança compacta (CNA - do inglês *Compact Neighbourhood Algorithm*) para uma placa quadrada de 200 de lado (que resultou em 73.9% de aproveitamento contra o valor de 77.98 % obtido com a heurística HAC), é fácil concluir, por simples inspeção visual ([Cheng e Rao, 1999], figura 10), que a curva apresentada na figura 4.13 encontra-se sempre acima da curva publicada. Abaixo do valor de 200, a diferença é mais significativa, mas acima de 200 as duas curvas aproximam-se tanto mais quanto maior a dimensão. A maior diferença verifica-se para dimensões pequenas da placa. Por exemplo, considerando

um quadrado de 25 de lado, o valor obtido por HAC é próximo de 48% enquanto o valor publicado em [Cheng e Rao, 2000] é inferior a 40%. Para um quadrado de 50 de lado, o valor obtido por HAC é superior a 71% enquanto o valor publicado está abaixo dos 60%. À medida que o tamanho da placa aumenta, a diferença torna-se menos significativa e aparenta ser negligenciável próximo de 500, o que mostra que ambas as abordagens convergem para o valor de UCY.

Depois deste estudo, é possível concluir que os resultados obtidos pela abordagem HAC superam os resultados publicados em [Cheng e Rao, 1999], independentemente da dimensão da placa. Isto é conseguido devido à capacidade da abordagem HAC lidar simultaneamente com a maximização da densidade do posicionamento e a maximização da percentagem de utilização da placa.

#### 4.4.4 Análise crítica dos resultados

Qualquer das três abordagens heurísticas propostas nesta dissertação supera largamente os resultados obtidos por Cheng e Rao [1999] por aplicação de um algoritmo de compactação e posteriormente modificado por aplicação de algoritmos genéticos [Cheng e Rao, 2000]. Esta comparação teve por base experimentação sobre a mesma instância e utilizando uma placa com as mesmas dimensões fixas descrita pelos autores.

Comparativamente a [Stoyan e Pankratov, 1999], as três abordagens heurísticas conseguem igualar os resultados apresentados, que resultam da resolução de uma simplificação do modelo matemático geral. Consistindo a simplificação do modelo na obrigatoriedade de um dos vectores geradores do posicionamento periódico ser horizontal ou vertical, uma vez que a alteração deste vector aparentemente não permite a colocação de mais nenhuma figura, leva-nos a concluir que esta poderá ser também a solução óptima do problema não simplificado e, portanto, impossível de melhorar.

Tal como esperado, a consideração do posicionamento periódico duplo permite a obtenção de melhores resultados do que o posicionamento periódico simples. No entanto, também consome mais tempo, devido às operações requeridas pelo algoritmo de agrupamento das duas figuras. Pelas experiências realizadas, também se pode concluir que o agrupamento de duas figuras iguais mas rodadas uma relativamente à outra de 180°, numa perspectiva de posterior posicionamento periódico, é mais eficaz se for aplicada a regra



*minimização da área do rectângulo envolvente das duas figuras* (MA).

No que respeita à avaliação de desempenho dos vários critérios de posicionamento testados, o critério *minimização da área do paralelogramo fundamental* ( $\diamond$ ) é totalmente dominado pelos outros dois (X// e Y//), pois conduz (quase) sempre a menos figuras colocadas e a tempos computacionais muito superiores, o qual é explicado pela complexidade inerente às operações necessárias à minimização da área do paralelogramo fundamental. Esta conclusão vem ao encontro daquilo que era esperado desde o início e que diferencia este trabalho de outros trabalhos publicados que resolvem o mesmo problema: o facto de ser necessário seguir novas estratégias de posicionamento quando existe uma placa com fronteiras finitas. Pode ainda concluir-se que, aparentemente, o critério (X//) se adequa melhor a placas sobre o comprimento enquanto o critério (Y//) se adequa a placas com largura superior ao comprimento.

Comparando as três abordagens heurísticas propostas pode concluir-se que, embora a abordagem HAL seja competitiva ao nível do melhor resultado obtido, os seus resultados médios são normalmente piores. Apenas em dois casos, os melhores resultados obtidos com esta heurística são superiores aos resultados obtidos a partir da aplicação de qualquer das restantes. Também em termos de tempos computacionais, esta heurística consegue ser muito menos interessante do que qualquer das outras duas. Para aplicações industriais reais, a abordagem HAC aparenta ser a mais adequada, uma vez que o seu funcionamento é independente do número de vértices da envolvente convexa da figura a replicar, logo, é também independente da figura a replicar. Além disso, se nem sempre dá origem aos melhores resultados, em termos de valores médios é a abordagem mais equilibrada, i.e., a que apresenta o menor desvio padrão relativamente ao valor médio encontrado para todas as corridas efectuadas, o que é mais importante do que a obtenção de um excelente resultado apenas esporadicamente.

Em geral, artigos publicados ou visam a maximização da percentagem de utilização da placa (no caso de uma placa de dimensões finitas) ou a maximização da densidade do posicionamento (na situação ilimitada ou, aproximadamente, placas muito grandes). A contribuição principal deste estudo é propor heurísticas que visam ambos estes objectivos simultaneamente. Os resultados computacionais mostram um bom desempenho na resolução do problema de PFFI numa placa limitada, independentemente

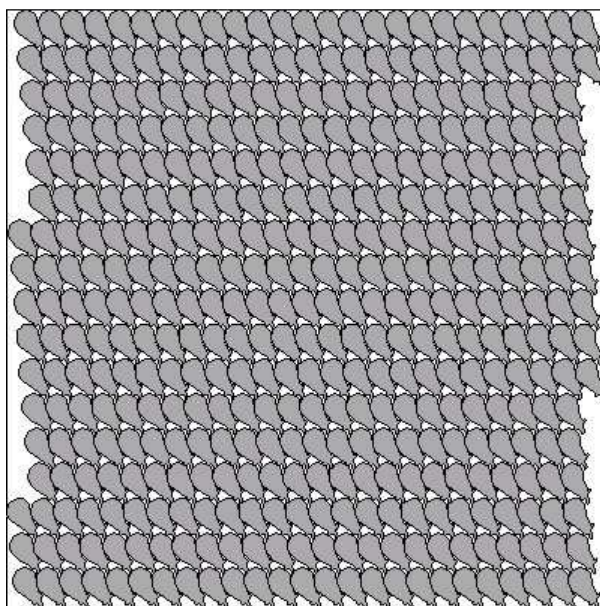
das suas dimensões.

#### 4.4.5 Visualização dos melhores resultados encontrados

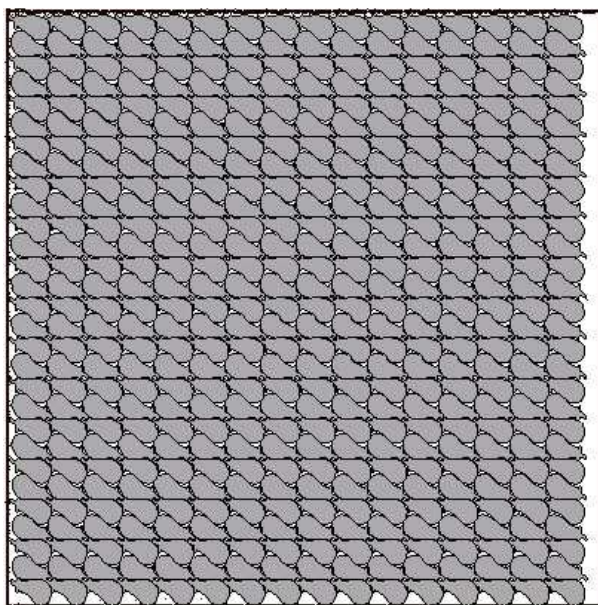
Nas figuras 4.14(a) e 4.14(b) podem visualizar-se os melhores resultados de posicionamento obtidos, para a instância *Cheng*, respectivamente nas variantes de posicionamento periódico simples e duplo.

Nas figuras 4.15(a) e 4.15(b) podem visualizar-se os melhores resultados de posicionamento obtidos, para a instância *Stoyan*, respectivamente nas variantes de posicionamento periódico simples e duplo.

Nas cinco figuras 4.16 a 4.20 podem visualizar-se os melhores resultados de posicionamento obtidos, para as instâncias *Swim1* a *Swim5*, na variante de posicionamento periódico duplo. Uma vez que a largura da placa é a mesma para todas as instâncias, para comprimentos muito diversos, foi mantida em todas as figuras uma altura de placa igual.

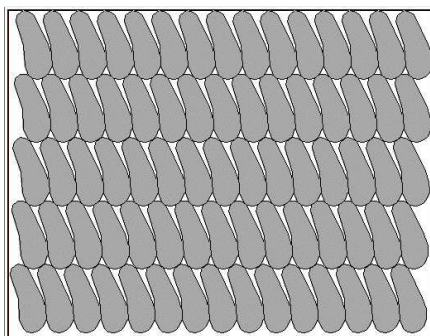


(a) *Posicionamento periódico simples*. 418 figuras (Utilização de 77.98%). Valores obtidos com a abordagem HAC e o critério X//.

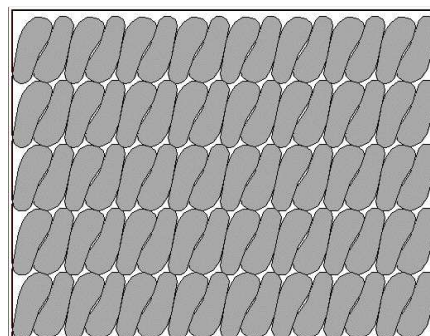


(b) *Posicionamento periódico duplo*. 464 figuras (Utilização de 86.56%). Valores obtidos com a abordagem HAP e o critério X//.

Figura 4.14: Melhores resultados de posicionamento periódico simples e duplo obtidos para a instância *Cheng*.



(a) *Posicionamento periódico simples*. 75 figuras (Utilização de 80.53%). Valores obtidos com a abordagem HAC e o critério X//.



(b) *Posicionamento periódico duplo*. 80 figuras (Utilização de 85.90%). Valores obtidos com a abordagem HAP e o critério Y//.

Figura 4.15: Melhores resultados de posicionamento periódico simples e duplo obtidos para a instância *Stoyan*.

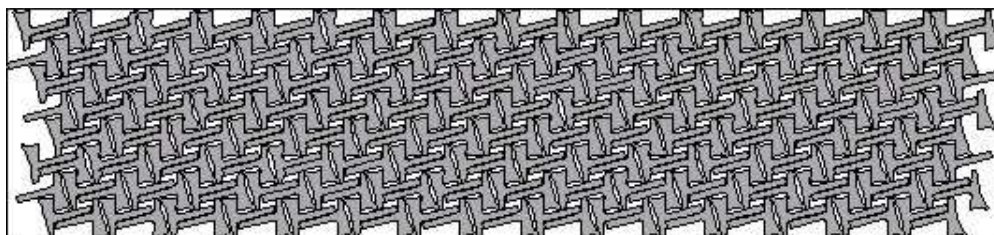


Figura 4.16: Melhores resultados de *posicionamento periódico duplo* obtidos para a instância *Swim1*. 247 figuras (Utilização de 67.87%). Valores obtidos com a abordagem HAP e o critério X//.

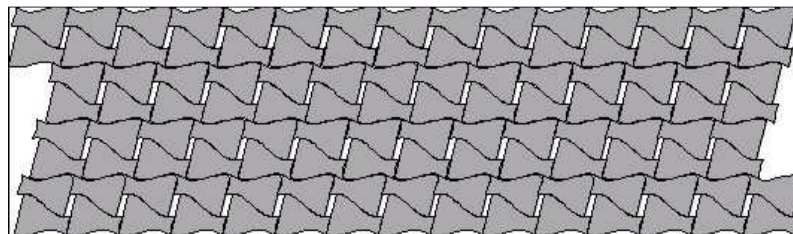


Figura 4.17: Melhores resultados de *posicionamento periódico duplo* obtidos para a instância *Swim2*. 116 figuras (Utilização de 86.28%). Valores obtidos com a abordagem HAL e o critério X//.

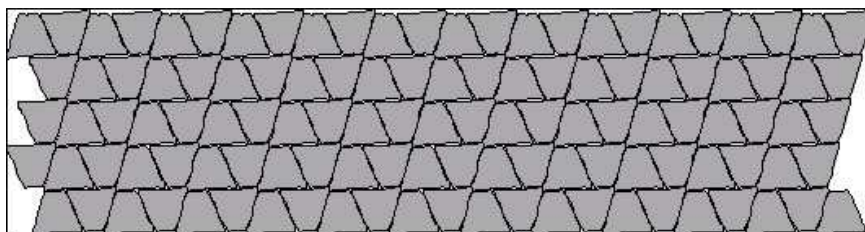


Figura 4.18: Melhores resultados de *posicionamento periódico duplo* obtidos para a instância *Swim3*. 116 figuras (Utilização de 87.26%). Valores obtidos com a abordagem HAC e o critério X//.

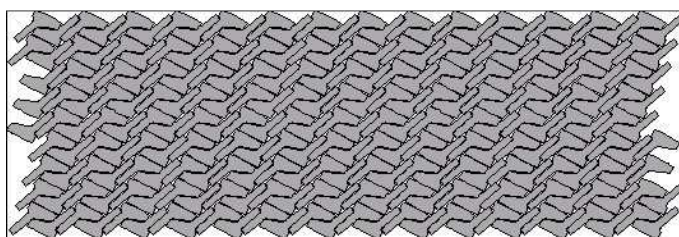


Figura 4.19: Melhores resultados de *posicionamento periódico duplo* obtidos para a instância *Swim4*. 247 figuras (Utilização de 79.53%). Valores obtidos com a abordagem HAC e o critério X//.

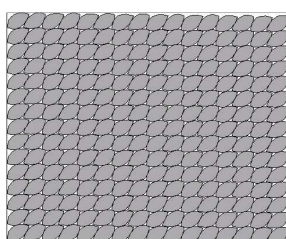


Figura 4.20: Melhores resultados de *posicionamento periódico duplo* obtidos para a instância *Swim5*. 240 figuras (Utilização de 88.19%). Valores obtidos com a abordagem HAC e o critério Y//.





## Capítulo 5

# Algoritmos de Posicionamento Periódico de $n$ Figuras Irregulares

Na sequência do posicionamento periódico de uma única figura numa placa rectangular de dimensões finitas, considerado no capítulo anterior, aborda-se neste capítulo o problema de posicionamento periódico de um conjunto de  $n$  figuras (PP $n$ FI), também numa placa limitada. O número máximo de figuras que é razoável agrupar depende da complexidade das figuras em questão. Nesta tese, foram considerados grupos desde  $n = 2$  figuras (posicionamento periódico duplo apresentado no capítulo anterior) até um máximo de  $n = 9$  figuras.

O agrupamento de figuras encontra-se tratado na literatura de problemas de posicionamento sob diferentes designações, sendo a formação de *clusters* a mais comum ou, simplesmente, *clustering*. Este problema tem sido abordado sob diferentes perspectivas, das quais se salientam duas em particular. A primeira delas encara o agrupamento de figuras como um acto isolado e apresenta como objectivo final a formação de um grupo considerado eficaz. Numa segunda perspectiva, o problema de agrupamento é encarado não como o objectivo final, mas como parte de um problema de posicionamento. Em particular, de um problema de posicionamento periódico, objecto deste trabalho. De facto, mais importante do que a qualidade do grupo formado, é a eficácia do posicionamento obtido quando o grupo é replicado periodicamente. Será considerado “eficaz” um grupo que conduza a maior densidade

de posicionamento, no caso de posicionamento no plano, e a um maior aproveitamento da placa, no caso de posicionamento numa placa de dimensões finitas.

A perspectiva do problema de agrupamento adoptada neste trabalho foi a segunda descrita. No entanto, embora a construção do grupo não seja um fim, é crucial para a resolução do problema como um todo. Consideraram-se duas formas possíveis para a construção do grupo:

- é imposta uma forma geométrica rígida ao grupo das figuras (um rectângulo), sendo o principal objectivo a minimização da área da envolvente (rectangular, neste caso) do grupo;
- não é imposta nenhuma forma geométrica em particular ao grupo das figuras, sendo a principal preocupação a formação de um grupo eficaz. Será abordado mais à frente neste capítulo de que forma se vai avaliar a qualidade de um grupo formado.

As abordagens adoptadas para a resolução do problema de  $PP_nFI$  seguem dois tipos de estratégias distintas, tendo por base a distinção atrás referida entre as estratégias mediante as quais os grupos são construídos. Na primeira e segunda secções deste capítulo são apresentados e descritos os algoritmos desenvolvidos para resolver o problema de  $PP_nFI$  por cada uma das abordagens. Na terceira secção é feita uma comparação entre as duas abordagens propostas para a resolução do problema de  $PP_nFI$ . Na última secção serão apresentados alguns resultados de posicionamento obtidos.

## 5.1 Posicionamento Periódico Rectangular (PPR)

Para se tirar partido da forma rectangular da placa, tentando aproveitar a sua totalidade, subdividiu-se esta em tiras rectangulares idênticas que a preencham por completo. As  $n$  figuras são posicionadas numa tira, por forma a ocuparem uma área mínima. Uma vez que o comprimento da tira é suficientemente grande para caberem todas as peças, trata-se de resolver um problema de posicionamento de figuras irregulares numa tira rectangular com comprimento infinito (*irregular strip-packing*), cujo objectivo é a minimização do comprimento necessário da tira para que todas as  $n$  peças sejam posicionadas. O posicionamento do grupo das  $n$  peças ocupa uma secção rectangular, a qual é repetida ortogonalmente até preencher toda a



placa. Em suma, o par de vectores geradores do posicionamento periódico é ortogonal.

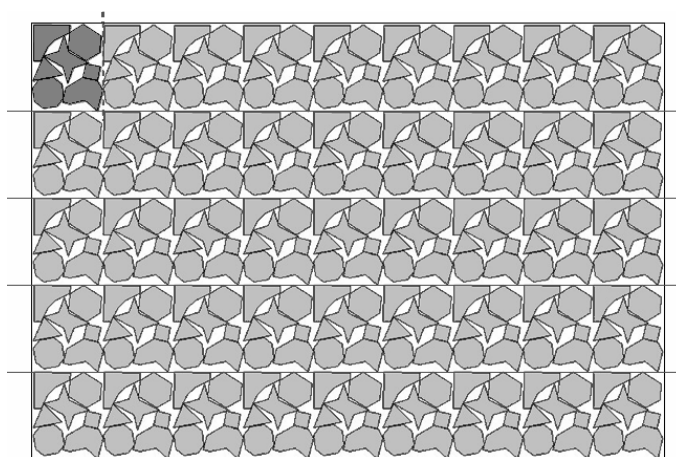
Tal como no capítulo anterior, considerou-se a possibilidade de as figuras poderem rodar. Sendo assim, para cada configuração do grupo de figuras, cada uma delas numa dada orientação, deverá ter-se em atenção a altura máxima que uma figura do grupo ocupa na determinação de uma largura mínima das tiras. Além disso, convém referir que o posicionamento periódico das secções preenche por completo a largura da placa, podendo, no entanto, sobrar alguma área ao comprimento. Quanto menor for o comprimento necessário da secção, maior será potencialmente o número de secções idênticas que caberão na placa, logo, melhor o aproveitamento obtido. Torna-se então necessário testar mais do que uma largura de tira e mais do que configuração do grupo, por forma a encontrar uma boa solução. Na figura 5.1 exemplifica-se o esquema de funcionamento.

Mediante esta abordagem, o problema de posicionamento das múltiplas réplicas do conjunto de figuras encontra-se separado em dois sub-problemas resolvidos sucessivamente:

1. Primeiro sub-problema: para o conjunto de figuras a replicar, é identificado o valor da largura mínima  $l_{min}$  de uma placa rectangular de comprimento infinito onde todas as figuras cabem, na rotação em que se encontram. Da mesma forma, é identificado o valor da largura máxima  $l_{max}$ , correspondente a posicionar todas as figuras encostadas à esquerda. A placa (de largura  $L$ ) é dividida em  $t$  tiras idênticas, de largura  $l_{min} \leq l \leq l_{max}$ , sendo  $l = L/t$ . As figuras a agrupar são posicionadas numa tira de acordo com uma heurística do tipo “*bottom-left*” (colocação o mais abaixo-à-esquerda) que minimize o comprimento necessário da tira ao maximizar a utilização da largura. A largura do grupo é igual à largura da tira. O comprimento do grupo é o valor da função objectivo, determinado após aplicação da heurística de posicionamento “*bottom-left*”.
2. Segundo sub-problema: o grupo é replicado ortogonalmente ao longo da placa. O número de colunas é determinado pela parte inteira do quociente entre o comprimento da placa e o comprimento do grupo. O número de grupos colocados é calculado pelo produto do número de tiras pelo número de colunas.



(a) Divisão da placa em tiras idênticas e posicionamento do conjunto de figuras numa tira.



(b) Posicionamento periódico ortogonal do grupo formado.

Figura 5.1: Esquema de funcionamento da abordagem PPR.

Fixada a largura das tiras, a sequência das peças e a orientação de cada uma, a estratégia acima descrita gera uma solução para o problema PPR. Para melhorar as soluções obtidas, é feita ainda uma pesquisa sobre um espaço de soluções em que varia a orientação das figuras e a ordem pela qual elas são posicionadas pela heurística “bottom-left” ([Gomes e Oliveira, 2002]). Esta pesquisa é guiada pela meta-heurística ILS (*Iterated Local Search*) ([Lourenço *et al.*, 2002]). A estrutura geral é apresentada na figura 5.2.

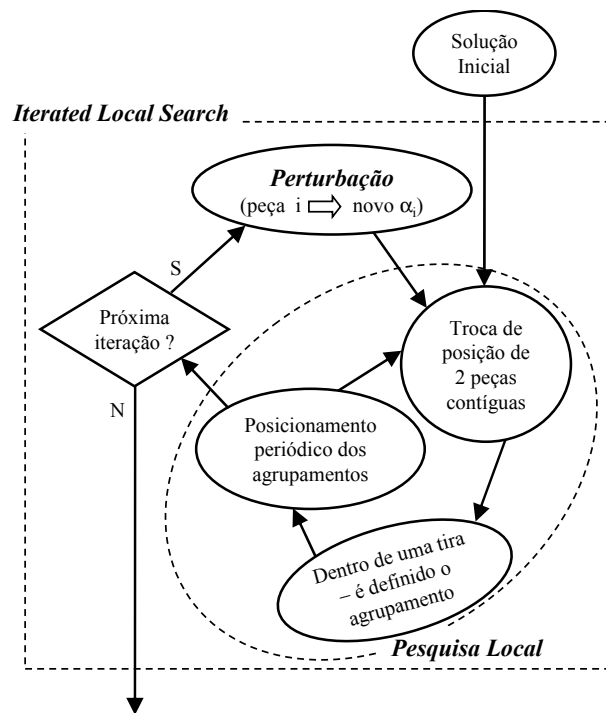


Figura 5.2: Estrutura geral do algoritmo.

### 5.1.1 Heurística de posicionamento

#### Solução inicial $S_0$

Uma solução fica completamente determinada quando se conhece:

- A orientação de cada figura  $i$ , isto é, o ângulo de rotação  $\alpha_i$  de cada figura face à sua posição original,
- A sequência ordenada das figuras que formam o conjunto, ordem pela qual as figuras serão posicionadas.

A solução inicial  $S_0$  é obtida por atribuição de uma orientação  $\alpha_i$  aleatoriamente escolhida a cada uma das figuras que formam o conjunto, ordenadas de modo aleatório.

#### Estrutura de vizinhança

A estrutura de vizinhança usada baseia-se em dois tipos de movimentos: na fase da perturbação, é imposta uma variação do ângulo de rotação  $\alpha$  de

uma das figuras; o outro tipo de movimento, uma troca entre duas figuras contíguas na sequência pela qual vão ser posicionadas, é usado na fase de pesquisa local. Qualquer que seja o tipo de movimento, a sua implementação tem que ser concebida com algum cuidado, devido ao elevado tempo consumido por certo tipo de operações que garantem a admissibilidade geométrica das soluções de posicionamento obtidas. Relembrando, de cada vez que uma figura sofre uma rotação, os NFPs que relacionam o seu posicionamento face às restantes figuras terão que ser sempre recalculados, assim como o IFP face à placa. E, enquanto o cálculo do IFP é rápido, o mesmo não se pode dizer sobre o cálculo dos NFPs. Por isso, sempre que uma nova perturbação acontece, como um ângulo de rotação de uma das figuras sofre uma variação, todos os NFPs que envolvam essa figura deverão ser recalculados. O tempo computacional não é crítico quando apenas uma rotação é considerada, mas poderá sê-lo, se milhares de rotações forem contempladas. Por esse motivo se decidiu deixar para a fase da perturbação a acção que envolve mais tempo de cálculo.

### **Crítérios de aceitação**

Numa implementação segundo a meta-heurística ILS, é possível aceitar todas as soluções, ou apenas parte. Três critérios foram aplicados:

- qualquer solução gerada após a pesquisa local é aceite, i.e., a perturbação é sempre aplicada sobre o mais recente óptimo local;
- soluções piores são aceites com probabilidade decrescente;
- apenas soluções melhores (ou equivalentes), geradas após a pesquisa local, são aceites.

O primeiro critério de aceitação claramente favorece a diversificação, permitindo uma grande liberdade na selecção do ângulo de rotação  $\alpha$ .

### **Crítérios de paragem**

Dependendo do critério de aceitação aplicado, o algoritmo pára ao fim da primeira de duas ocorrências: um número fixo de iterações foi totalizado (normalmente aplicado no caso dos primeiro e terceiro critérios) ou um número pré-definido de iterações sem alteração da solução foi atingido (normalmente aplicado no caso do segundo critério).

### 5.1.2 Experiências Realizadas

#### Instâncias utilizadas

Foram utilizadas duas instâncias de problemas na realização das experiências computacionais (figura 5.3), ambas criadas a partir de instâncias disponíveis no site do [ESICUP]. A primeira instância foi criada a partir de SHAPES0 e será designada de *data\_4t* (figura 5.3(a)). A segunda instância teve por base SHAPES2 e será designada de *data\_7b* (figura 5.3(b)). O número de figuras que compõem o grupo é identificável no nome atribuído a cada instância. Estas duas instâncias foram escolhidas por serem constituídas por um conjunto menor (figura 5.3(a)) e outro maior (5.3(b)) de figuras todas diferentes, além de apresentarem formatos variados, com algumas formas convexas e outras não-convexas.

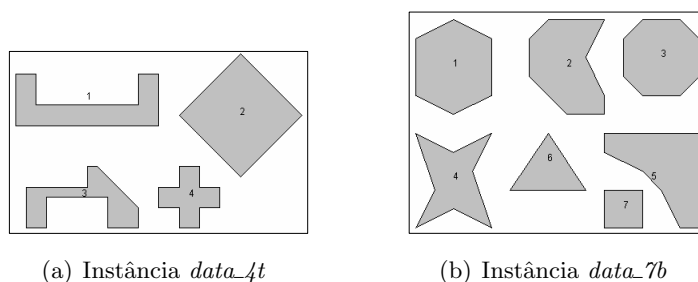


Figura 5.3: Instâncias utilizadas.

#### Resultados

Para cada instância, são indicados as dimensões da placa, o número de grupos colocados (logo, o número de figuras é calculado pelo produto do número de grupos pelo número de figuras que constituem o grupo), o número total de perturbações de algoritmo ILS, o número de perturbações do ILS ao fim das quais a solução final é encontrada e o tempo gasto. Os resultados resumidos são apresentados na tabela ??.

Tabela 5.1: Resultados computacionais: instâncias *data\_4t* e *data\_7b*

Instância	Critério Paragem	N° Iter.	Num. Grps	% Utilização				Tempo (seg.)
				melhor	média	piores	d.p.	
<i>data_4t</i>	Aceita todas as soluções	1500	<b>78</b>	65.0%	61.8%	60.0%	0.9%	586
	Aceita apenas melhores soluções	1500	<b>78</b>	65.0%	61.0%	60.0%	0.6%	800
	Aceita sol. piores com prob. decresc.	1381	<b>78</b>	65.0%	61.8%	60.0%	0.9%	583
<i>data_7b</i>	Aceita todas as soluções	400	45	67.5%	67.5%	67.5%	0	1467
	Aceita apenas melhores soluções	400	<b>48</b>	72.0%	69.2%	67.5%	1.3%	1945
	Aceita sol. piores com prob. decresc.	342	<b>48</b>	72.0%	68.7%	67.5%	0.9%	1249

## 5.2 Posicionamento Periódico Multiforme (PPM)

### 5.2.1 Abordagem em duas fases

A abordagem anterior não tira partido do possível “encaixe” de figuras que pertençam a grupos contíguos, uma vez que cada grupo fica confinado a um rectângulo e os rectângulos não se sobrepõem. Além disso, funciona bem quando a placa é rectangular, caso particular tratado neste trabalho, mas não se pode generalizar a uma placa qualquer. Para colmatar estas desvantagens, foi implementada uma segunda abordagem, tendo por base a formação livre de um grupo. Esse grupo é posteriormente replicado, recorrendo aos algoritmos de PPFI (uma só figura) descritos no capítulo anterior. Apresentando outra dinâmica, o grupo é formado e, de seguida, replicado, pelo que o par de vectores geradores do posicionamento periódico é calculado de cada vez que existe um novo grupo, podendo formar um paralelogramo qualquer e não apenas um rectângulo. Ou seja, o problema principal pode ser subdividido em dois sub-problemas independentes: a formação de um bom grupo e, posteriormente, a sua replicação, segundo um posicionamento periódico idêntico ao descrito no capítulo anterior. Esta abordagem exige uma medida da eficiência do grupo dinâmica, i.e., o conjunto de figuras é agrupado de forma a minimizar uma qualquer função do espaço ocupado.

Esta abordagem baseia-se, portanto, na formação de um grupo, podendo o mesmo estar sujeito (ou não) a qualquer forma geométrica pré-definida. Se-

gundo esta abordagem, o problema de posicionamento das múltiplas réplicas do conjunto de figuras pode ser separado em dois sub-problemas independentes:

Encontra-se na figura um esquema de funcionamento desta abordagem.

1. *Primeiro sub-problema*: dado o conjunto de figuras a replicar, é construído um grupo. É neste sub-problema que se vai centrar o trabalho descrito nesta secção.
2. *Segundo sub-problema*: é replicado o grupo ao longo da placa. Para a resolução deste problema, uma vez que o grupo é tratado como uma única figura, recorreu-se à heurística de posicionamento HAC, descrita no capítulo anterior, a qual provou apresentar bons resultados para o posicionamento de uma única figura. Uma variante a um dos critérios apresentados na altura foi introduzida neste capítulo, a qual será oportunamente apresentada.

Para uma melhor percepção de que realmente se trata de duas fases completamente independentes, apresenta-se de seguida um conjunto de figuras desde a formação do grupo até ao posicionamento final (figura 5.4).

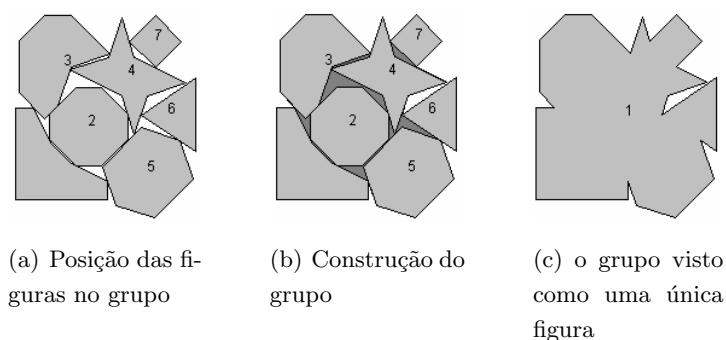
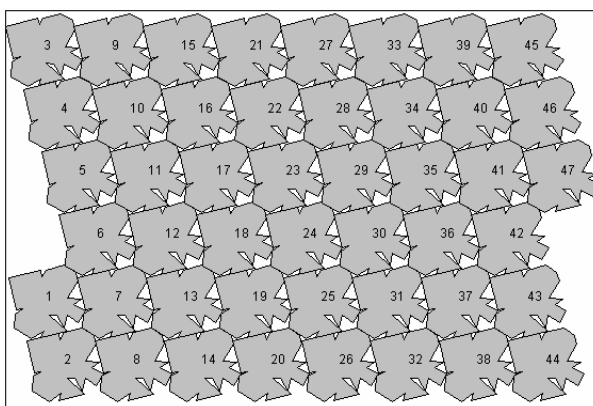


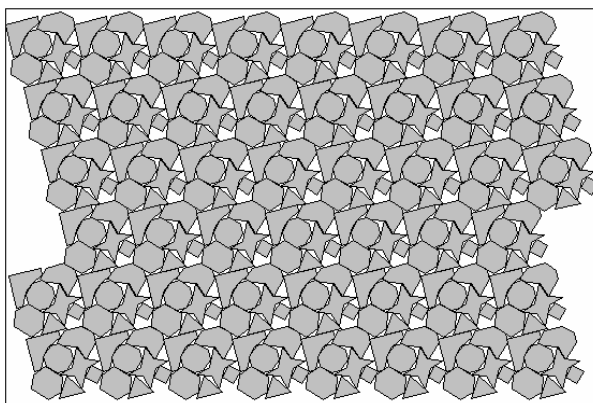
Figura 5.4: *Primeiro sub-problema*: formação de um grupo a partir da instância *data\_7b*.

Na figura 5.5 apresenta-se o posicionamento periódico simples de uma única figura (o grupo) mediante a heurística de posicionamento HAC tal como descrita no capítulo anterior, e de seguida mostra-se o posicionamento das réplicas do grupo de 7 figuras, o que resulta no posicionamento periódico do grupo. Propositadamente, foi escolhida uma placa “pequena” face à dimensão do grupo e um posicionamento periódico simples, para que a

localização mais esparsa dos grupos na placa permita melhor entender as suas delimitações (no posicionamento periódico duplo, um dos grupos seria colocado rodado de  $180^\circ$ , o que dificultaria a percepção do essencial que se pretende mostrar neste ponto).



(a) Posicionamento periódico de uma figura, o grupo (47 grupos posicionados)



(b) Posicionamento periódico de um conjunto de figuras (47x7=329 figuras)

Figura 5.5: *Segundo sub-problema*: posicionamento periódico simples do conjunto de figuras constituinte da instância *data\_7b*.

Para cada uma das duas fases, avaliou-se as vantagens e desvantagens de se admitir a livre rotação das figuras. Sabendo-se que os problemas de posicionamento periódico de uma única figura irregular são já de resolução NP-difícil, uma vez que nesta secção se trata do mesmo problema considerando a dificuldade acrescida de cada figura ser constituída por um grupo



de figuras, é impraticável dar a cada uma das fases liberdade total na rotação permitida a cada figura. Por esse motivo, decidiu-se considerar, para a fase de construção do grupo, a possibilidade de a figura rodar de um ângulo específico apenas —  $\{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ\}$ . Além disso, como não há garantias de que o melhor resultado final seja obtido a partir do grupo mais compacto, os 10 melhores grupos formados passarão à fase seguinte.

Para a replicação do grupo na placa, considera-se a possibilidade de o mesmo rodar de 5 em 5 graus, mantendo a escolha deste parâmetro para a heurística HAC, após as conclusões tiradas no capítulo anterior. Será ainda implementada a possibilidade de aos 3 melhores resultados se aplicar uma pesquisa local, com o intuito de melhorar ainda um pouco o valor obtido após aplicação da heurística HAC. Supondo ainda a possibilidade de aplicação prática deste algoritmo a figuras que não possam ser rodadas de todo, como é o caso das malhas na têxtil, considerou-se ainda a formação de um grupo cingido às figuras na sua orientação original e a posterior replicação segundo HAC sem permissão de qualquer rotação, nem pesquisa local após.

### 5.2.2 Orientação das figuras dentro do grupo

Considerando que esta abordagem contempla a possibilidade de o grupo já formado ser rodado, situação que não fazia sentido na abordagem PPR, decidiu-se adotar uma estratégia de compromisso. Se, por um lado, uma liberdade total na escolha da orientação de cada figura seria o ideal, por outro lado, essa busca poderia facilmente tornar-se impraticável. Foi considerada a possibilidade de as figuras sofrerem rotações de ângulos específicos, concretamente:

- $0^\circ$  — as figuras dadas não podem sofrer qualquer rotação;
- $180^\circ$  — as figuras deverão manter a direção de posicionamento, i.e., poderão apresentar-se em duas orientações;
- $90^\circ$  — as figuras poderão ser rodadas de um ângulo múltiplo de  $90^\circ$ , i.e., poderão existir em quatro possíveis orientações;
- $45^\circ$  — as figuras poderão apresentar-se em 8 orientações distintas, diferindo de  $45^\circ$ .

Embora se esteja a limitar a possibilidade de encaixe de certas formas convexas de umas figuras em concavidades de outras, há a justificação de

que, depois de formado, o grupo poderá ser rodado para permitir um melhor aproveitamento da placa limitada. Deste modo, cada instância criada para o teste do algoritmo proposto, deverá corresponder a quatro instâncias distintas, de acordo com os ângulos que lhe são permitidos.

### 5.2.3 Algoritmo de formação do grupo

A heurística de formação do grupo foi baseada em regras de posicionamento desenvolvidas por Oliveira *et al.* [2000] para um problema de PFI. Essas regras definem uma solução de posicionamento a partir da ordenação das figuras numa sequência mediante a qual vão ser posicionadas uma a uma. A implementação de novos critérios e algumas adaptações foram consideradas, para contemplar certos requisitos e características relevantes, específicos da formação de um grupo. Esta heurística é constituída, basicamente, pelos seguintes módulos:

- Módulo responsável pela geração das sequências ordenadas de figuras, para o conjunto de figuras constituinte do grupo. A ordem de uma figura na sequência determina a ordem pela qual essa figura vai ser posicionada no grupo;
- Módulo responsável pela geração dos pontos de posicionamento admissíveis mais favoráveis, para uma dada figura numa dada orientação, face às restantes figuras já posicionadas no grupo;
- Módulo responsável por ordenar esses pontos de posicionamento segundo uma lista de pontos candidatos, de modo a permitir escolher um ponto para posicionar uma determinada figura, face às restantes já colocadas.

Previamente, é necessário proceder ao cálculo dos NFPs e IFPs de todas as figuras envolvidas em qualquer passo, em todas as possíveis orientações. Convém realçar que o cálculo de todos os NFPs e IFPs constituem uma operação prévia, efectuada apenas uma vez no início da execução do programa, uma vez que é independente dos pontos de posicionamento envolvidos e apenas depende das orientações relativas das figuras entre si, que estão definidas *a priori*. Esta característica é fundamental para a eficiência das abordagens baseadas em intersecções de invólucros de posicionamento. É também essencial referir que, usando esta abordagem, é possível preencher buracos

que foram sendo gerados, uma vez que, caso seja possível posicionar uma figura dentro de um buraco, o respectivo ponto de posicionamento válido será criado.

### Critérios para a formação do grupo

Dois critérios foram considerados para a forma como o grupo vai crescer em redor da primeira figura colocada.

- a forma do grupo é completamente livre.
- o agrupamento das figuras constituintes do grupo é “conduzido”, por forma a privilegiar a forma rectangular, sendo-lhe passado um rectângulo inicial (de comprimento  $W$  e largura  $H$  -  $targetDim = W \times H$ ).

A primeira figura, do conjunto de figuras com as quais se vai formar o grupo, é posicionada no plano. No caso de ter sido escolhido o primeiro critério, as figuras vão sendo acrescentadas uma a uma, ao conjunto já formado pelas que já foram agrupadas, sem qualquer outra preocupação que não seja a de construir um bom grupo. A forma como a qualidade de um grupo é avaliado será apresentada num ponto seguinte.

No caso do segundo critério, é passado como parâmetro um dado rectângulo inicial ( $W \times H$ ) designado daqui em diante de  $targetDim$ , com o intuito de tentar que o grupo seja formado dentro desse rectângulo. Se o algoritmo não conseguir colocar todas as figuras integralmente dentro, aumenta, respectivamente o comprimento e a largura do rectângulo, de uma pequena variação. Para cada par (grupo / placa), a  $targetDim$  terá que ser estipulada, garantindo, no entanto, que é suficientemente pequena para impor a forma rectangular pretendida. É preferível começar por ser ligeiramente mais pequena do que o necessário, pois, se for demasiado grande, poderá pouco ou nada restringir a formação do grupo, acabando por permitir a formação de um grupo livre.

### Critérios para a geração das sequências de figuras

Dadas  $n$  figuras a agrupar, por aplicação de regras de posicionamento figura a figura, estas deverão estar ordenadas numa sequência. Existem  $n!$  sequências possíveis de posicionamento a testar. Sendo geradas todas, o algoritmo

de formação do grupo apresenta um tempo de execução de ordem  $O(n!)$ . Considerando a formação de grupos com poucas figuras e/ou cada figura com poucos vértices, todas as possíveis sequências de posicionamento de figuras poderão ser testadas. No caso de grupos com um número de figuras elevado, o conjunto de figuras que forma o grupo foi separado em dois subconjuntos: o primeiro de figuras grandes, colocadas *sempre* em primeiro lugar, e o segundo de figuras pequenas, colocadas a seguir. O motivo prende-se com o facto de ser mais fácil posicionar figuras pequenas em espaços não utilizados pelas grandes, do que o contrário. A avaliação do tamanho de uma figura teve em conta não apenas a sua área, mas também o seu perímetro, sendo calculada através de uma média pesada de ambos:

Para uma dada figura $_i$ :

$$a_i = \text{área}(\text{figura}_i) / \text{área}(\text{maior\_figura});$$

$$p_i = \text{perímetro}(\text{figura}_i) / \text{perímetro}(\text{maior\_figura});$$

se  $(0.5 * a_i + 0.5 * p_i > 0.5)$  a figura $_i$  é considerada grande;

senão a figura $_i$  é considerada pequena;

A separação do conjunto em dois não conduzirá, necessariamente, ao mesmo número de figuras em todas as instâncias, pois depende da dimensão relativa das figuras que a constituem. Alguns valores são indicados na tabela 5.2 a título de exemplo, onde  $k_1$  e  $k_2$  se referem a duas possibilidades distintas para o número de figuras constituintes do subconjunto das grandes (as pequenas serão  $(n - k_1)$  e  $(n - k_2)$ , respectivamente).

Tabela 5.2: Número de sequências geradas

$n$	$n!$	$k_1$	$k_1!(n - k_1)!$	$k_2$	$k_2!(n - k_2)!$
4	24	—	—	—	—
5	120	—	—	—	—
6	720	1	1!5!=120	2	2!4!=48
7	5040	2	2!5!=240	3	3!4!=144
8	40320	3	3!5!=720	4	4!4!=576
9	362880	3	3!6!=4320	4	4!5!=2880

Lembrando o facto de as figuras poderem rodar  $45^\circ$  numa das quatro situações permitidas, ao acréscimo de tempo devido a um aumento no número de sequências a testar, deverá ainda ser contemplado o número de

orientações permitidas a cada figura (8, neste caso). Outra situação que faz incrementar o tempo computacional é, sem dúvida, o número de vértices médio das figuras que constituem o grupo, pois a determinação dos pontos de posicionamento candidatos disso depende. Por todos estes motivos, casos há em que para posicionar um grupo de 7 figuras simples considerando  $7!$  sequências, poderá demorar menos tempo do que para um caso com 6 figuras complexas. Deste modo, a separação em mais do que dois grupos foi deixada em aberto.

### Geração dos pontos de posicionamento candidatos

A geração dos pontos de posicionamento candidatos recorre aos conceitos de NFP e, no caso do grupo formado por recurso a uma *targetDim*, também ao conceito de IFP. Consiste, para uma dada figura numa determinada orientação, num conjunto de pontos onde o posicionamento é admissível que, segundo pode ver-se demonstrado em [Oliveira, 1995], não se encontra no interior da região de posicionamento admissível, mas sobre um seu vértice. No caso da formação de um grupo livre, os vértices da região de posicionamento são os vértices dos NFPs da figura a ser colocada face às já colocadas e as intersecções de arestas entre NFPs. Se se tratar de um grupo cuja forma é imposta por um rectângulo (*targetDim*), são incluídos ainda os vértices do IFP (calculados para um posicionamento dentro desse rectângulo) assim como os pontos de intersecção do IFP com os NFPs das figuras já colocadas.

### CrITÉRIOS para a junção de uma nova figura ao grupo - Escolha do ponto de posicionamento

Foram considerados dois critérios para escolher o melhor ponto, segundo algum critério, de entre todos os pontos de posicionamento gerados:

- MIN\_AREA (referido apenas por ER nas tabelas) — minimização da envolvente rectangular do grupo;
- MIN\_AREA\_CH (referido apenas por CH nas tabelas) — minimização da envolvente convexa do grupo.

O primeiro critério foi já definido em [Oliveira, 1995] e utilizado no capítulo 4. Surgiu neste capítulo a necessidade de se considerar o segundo critério, por se tratar da formação de um grupo livre e se considerar que apenas a minimização da envolvente rectangular do grupo seria insuficiente.

### Medida da qualidade do grupo formado

Sendo a criação de um bom grupo apenas parte do problema que se pretende resolver, é no entanto uma fase essencial para um bom resultado final em termos de posicionamento periódico de réplicas desse grupo. Quanto mais grupos couberem integralmente dentro da placa, maior é a eficiência no que concerne o aproveitamento da placa.

Contudo, surgiu a dúvida de como medir a eficácia de um grupo formado. Um grupo poderá ser considerado um bom grupo se tiver um aspecto o mais “coeso” possível? Ou, pelo contrário, se o agrupamento for tal que resulte numa figura de forma pouco homogênea, mas que tire partido de eventuais reentrâncias para conseguir um bom encaixe, quando replicado segundo um posicionamento periódico? Ou, ainda, será que apenas interessa considerar um grupo compacto, independentemente da forma?

Para tentar encontrar uma resposta a estas questões, foram definidos dois critérios diferentes para avaliar a qualidade do grupo formado:

- *valor\_CH* – dado pelo quociente entre a área da envolvente convexa do grupo e a área total das figuras do grupo;
- *valor\_MG* – dado pelo quociente entre a área da envolvente do grupo e a área total das figuras do grupo.

O critério *valor\_CH* tem por base a minimização da área da envolvente convexa do grupo face à área total das figuras envolvidas. Neste caso, está a privilegiar-se uma forma uniforme do grupo, com poucas reentrâncias. O critério *valor\_MG*, pelo contrário, privilegia um grupo com o mínimo de área interior desperdiçada, conduzindo, não raramente, a grupos pouco uniformes. Ou seja, tem por base a minimização da área da envolvente do grupo. Comparativamente, em termos de valores obtidos, este segundo critério consegue obter sem dificuldade valores muito próximos da unidade, o que significa que o desperdício interno é, nesses casos, praticamente inexistente. Na figura 5.6 exemplifica-se as diferenças resultantes da aplicação de cada um dos critérios, para a instância *data\_7b*.

Todos os exemplos foram obtidos a partir da mesma instância, com as figuras nas mesmas orientações, sendo, no entanto, colocadas segundo uma sequência diferente. A ordem pela qual foram sendo colocadas encontra-se visível na figura (indicação numérica) e o ponto de posicionamento dessa

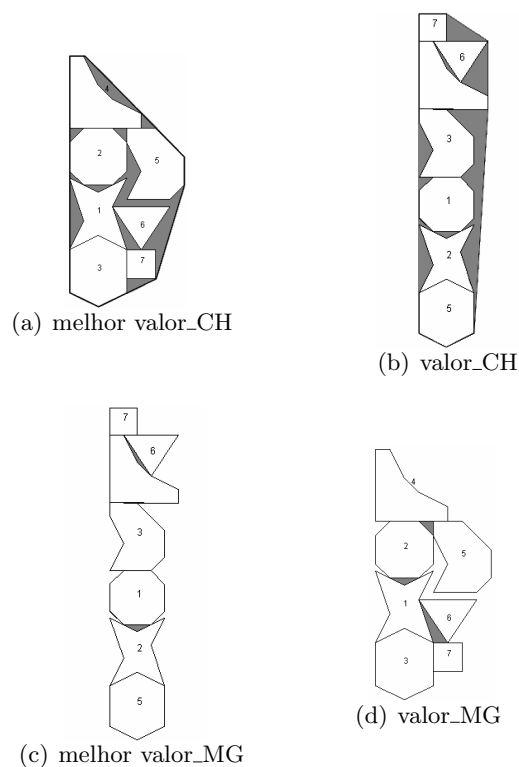


Figura 5.6: Formação de um grupo com a instância *data\_7b*, comparando diferentes critérios como medida da qualidade do grupo.

figura, face às figuras já colocadas, seguiu o critério da minimização da envolvente convexa do conjunto (MIN\_AREA\_CH).

No exemplo retratado na figura 5.6(a) foi escolhido o grupo que apresenta o menor valor de valor\_CH de entre todas as sequências testadas (1.34). Ou seja, se virmos a envolvente convexa do grupo formado, percebe-se que os buracos são reduzidos. Todos os restantes grupos formados apresentam valores superiores a 1.34 de valor\_CH. O resultado apresentado na figura 5.6(b) sobressai o excesso de área dentro da envolvente convexa, no grupo formado usando o outro critério.

No exemplo retratado na figura 5.6(c) foi escolhido o grupo que apresenta o menor valor de valor\_MG de entre todas as sequências testadas (1.06). Para este critério não importa a envolvente convexa do grupo, mas sim a envolvente exterior das figuras, que é a fronteira do próprio grupo. É possível visualizar-se que os únicos buracos (ou não aproveitamentos interiores) são dois: o primeiro encontra-se entre as figuras colocadas em 1º e

2º; o segundo encontra-se entre as figuras colocadas em 4º e 6º lugar. Todos os restantes grupos formados apresentam valores superiores a 1.06 de valor\_CH. No resultado visualizado na figura 5.6(d) identifica-se facilmente um maior desperdício interior do grupo, lembrando-se que foi formado pelo critério anterior, quando comparado com o melhor grupo formado pelo critério valor\_MG. Encontram-se buracos entre as figuras posicionadas em 1º e 2º lugar, entre as figuras posicionadas em 2º, 4º e 5º lugar e, por último, entre as figuras posicionadas em 1º, 6º e 7º.

Voltando à questão original: um *bom grupo* corresponde necessariamente a um *bom posicionamento periódico final*, quando a formação do grupo é apenas parte do problema total de posicionamento periódico? Ou maximizar o aproveitamento de uma placa quando se pretende replicar um conjunto de figuras passará apenas por escolher o melhor grupo formado? Subsistindo dúvidas, foram guardados os 10 melhores resultados da formação de grupos para serem posicionados periodicamente, tentando retirar-se algumas conclusões por avaliação do resultado final.

#### 5.2.4 Planeamento das experiências computacionais

Uma vez que o tempo de resolução do algoritmo de formação do grupo é fortemente dependente do número de figuras a posicionar e do número de vértices de cada figura, esta abordagem está restringida à resolução de problemas de pequena dimensão. Além disso, visto a formação do grupo ser apenas metade do problema que se pretende resolver, há que adicionar ainda o tempo de execução da segunda fase: a aplicação da heurística de posicionamento periódico HAC, desenvolvida no capítulo anterior. Também o tempo de execução desta heurística depende fortemente do número de vértices do grupo formado na primeira fase.

A heurística HAC – Heurística Ângulos Constantes – foi aplicada, considerando algumas configurações distintas. A primeira distingue o tipo de posicionamento periódico, sendo que poderá ainda ter interesse aplicar uma pesquisa de pós-optimização, em torno dos ângulos obtidos na solução. Nesse sentido, consideraram-se as 4 configurações: Simples, com e sem Pesquisa Local e Duplo, com e sem Pesquisa Local.

No caso de se tratar de um posicionamento periódico duplo, foi acrescentado um novo critério na fase de junção das duas figuras: a minimização da área da envolvente convexa, já referido atrás neste mesmo capítulo



(MIN\_AREA\_CH). Lembrando as regras definidas por Oliveira [1995] e apresentadas no capítulo anterior (MIN\_AREA, MIN\_LENGTH, MAX\_OVERLAP e MAX\_CONTACTS), todas elas foram construídas tendo por base o retângulo envolvente. Provou-se que a regra MIN\_AREA apresentava, na generalidade dos casos, os melhores resultados. Sendo assim, a nova regra será aplicada, juntamente com a anterior MIN\_AREA.

Desta conjugação de critérios, resultaram seis possíveis heurísticas de posicionamento periódico testadas, as quais, para simplificação, foram designadas pelas seguintes siglas:

- SINGLE – Simples, sem Pesquisa Local;
- SINGLE\_LS – Simples, com Pesquisa Local;
- DOUBLE\_CH – Duplo, com critério de agrupamento MIN\_AREA\_CH, sem Pesquisa Local;
- DOUBLE\_CH\_LS – Duplo, com critério de agrupamento MIN\_AREA\_CH, com Pesquisa Local;
- DOUBLE\_MA – Duplo, com critério de agrupamento MIN\_AREA, sem Pesquisa Local;
- DOUBLE\_MA\_LS – Duplo, com critério de agrupamento MIN\_AREA, com Pesquisa Local;

Os restantes parâmetros foram mantidos idênticos aos utilizados no capítulo anterior para a realização dos testes finais.

### Testes preliminares

Dado o número elevado de combinações possíveis dos vários critérios, foi escolhida uma instância com poucas figuras e em que cada figura tem poucos vértices para fazer um estudo preliminar exaustivo. Foi usada a instância *data\_4t* para testar a conjugação de todos os parâmetros envolvidos, considerando uma placa de 320x240. Quando o valor de um parâmetro pertence a um conjunto finito de valores, todos são testados. Quando pertence a um intervalo de valores reais, são testados alguns valores ao longo desse intervalo. Obtidos e guardados os 10 melhores grupos, foram aplicadas as seis

variantes da heurística de posicionamento periódico HAC atrás identificadas. O conjunto de testes efectuado deu origem a 12480 resultados finais. Após separação e ordenação segundo o tipo de posicionamento periódico utilizado, e, dentro deste, considerados os ângulos de rotação admissíveis, são apresentados nas tabelas 5.3 a 5.8 os melhores valores obtidos para o número total de grupos posicionados (Num Grupos). Sempre que os melhores valores tenham sido obtidos a partir de diferentes configurações de parâmetros, o mesmo é identificado na tabela.

Tabela 5.3: Resultados de *data\_4t*: Posicionamento Periódico Simples sem Pesquisa Local

Tipo de Posicionamento	Ordem do Grupo	Ângulos	Pontos Candidatos	Valor Grupo	target Dim	Num Grupos
SINGLE	0	45°	CH	CH	15 x 10	<b>367</b>
	1		CH	MG	15 x 10	
	1		CH	CH	20 x 10	
	2		CH	MG	20 x 10	
	0	90°	CH / ER	CH	∞ x ∞	329
	0		CH / ER	CH	20 x 15	
	0		CH / ER	CH	20 x 20	
	0		CH / ER	CH	20 x 25	
	0		CH / ER	CH	25 x 15	
	0		CH / ER	CH	25 x 20	
	0		CH / ER	CH	25 x 25	
	2		ER	MG	25 x 15	
	4		CH	MG	25 x 15	
	6		CH	MG	20 x 20	
	7		CH	MG	20 x 25	
	7		CH	MG	25 x 20	
	8		CH	MG	∞ x ∞ ou 25 x 25	
9	ER	MG	20 x 20 ou 25 x 20			
0	0°	CH	CH	20 x 10	327	
0	180°	CH	CH	15 x 10		
2		CH	MG	15 x 10		

Convém lembrar que o problema de PPM pode ser separado em duas fases independentes, pelo que a um mesmo grupo formado, poderão ser aplicadas diferentes versões da heurística de posicionamento periódico. Por esse motivo, uma corrida apenas do algoritmo de formação do grupo foi efectuada, gerando 10 possíveis soluções intermédias. A cada um destes grupos, foi aplicada uma heurística de posicionamento, para cada combinação de critérios.

Tabela 5.4: Resultados de *data\_4t*: Posicionamento Periódico Simples com Pesquisa Local

Tipo de Posicionamento	Ordem do Grupo	Ângulos	Pontos Candidatos	Valor Grupo	target Dim	Num Grupos
SINGLELS	0	45°	CH	CH	15 x 10	<b>369</b>
	1		CH	MG	15 x 10	
	1		CH	CH	20 x 10	
	2		CH	MG	20 x 10	
	5		CH	CH / MG	20 x 10	
	6		ER	CH	20 x 10	
	0	90°	CH / ER	CH	várias hipóteses	329
	2		ER	MG	25 x 15	
	4		CH	MG	25 x 15	
	6		CH	MG	20 x 20	
	7		CH	MG	20 x 25 ou 25 x 20	
	8		CH	MG	∞ x ∞ ou 25 x 25	
	9		ER	MG	20 x 20 ou 25 x 20	
	9		ER	MG	25 x 20	
	4		0°	CH / ER	MG	
	5	CH / ER		CH	15 x 10	
	0	180°	CH	CH	15 x 10	327
	2		CH	MG	15 x 10	

Como pode constatar-se, os critérios para a formação do grupo são muitos e mesmo os parâmetros usados para a sua posterior replicação também, embora tenham já sido seleccionados um pequeno conjunto de entre todos os que foram testados no capítulo anterior. Sendo assim, a própria apresentação de resultados considerada, mediante a separação nas 6 tabelas apresentadas, é discutível, tal como a necessidade de considerar tantos parâmetros numa e noutra fase. Como o problema escolhido pode ser considerado “pequeno” no respeitante ao tempo de formação do grupo, torna-se difícil testar todas as variantes de todos os algoritmos para todos os problemas que serão considerados para a elaboração dos resultados finais. Por todos estes motivos, recorreu-se a uma análise estatística dos resultados para planear a parte restante dos testes computacionais.

### Estudo estatístico dos resultados obtidos após testes preliminares

O estudo estatístico completo efectuado aos resultados preliminares obtidos é apresentado no apêndice A, referindo-se neste ponto do texto apenas as conclusões mais relevantes a tirar.

Tabela 5.5: Resultados de *data\_4t*: Posicionamento Periódico Duplo com critério para a junção da figura dupla MIN\_AREA e sem Pesquisa Local

Tipo de Posicionamento	Ordem do Grupo	Ângulos	Pontos Candidatos	Valor Grupo	target Dim	Num Grupos
DOUBLE_MA	0	45°	ER	CH	15 x 10	<b>368</b>
	1		ER	MG	15 x 10	
	1		ER	CH	20 x 10	
	1		ER	CH	25 x 10	
	2		CH	CH	20 x 10	
	2		ER	MG	20 x 10	
	3		ER	CH / MG	20 x 10	
	4		CH	MG	20 x 10	
	4		ER	CH	20 x 10	
	5		CH	CH / MG	20 x 10	
	6	ER	CH	20 x 10		
	1	0°	ER	CH	15 x 10	357
	3		ER	MG	15 x 10	
	5		ER	MG	20 x 10	
	0	180°	CH	CH	15 x 10	349
	2		CH	MG	15 x 10	
1	90°	CH	CH	15 x 10		
2		CH	MG	15 x 10		

Tabela 5.6: Resultados de *data\_4t*: Posicionamento Periódico Duplo com critério para a junção da figura dupla MIN\_AREA e com Pesquisa Local

Tipo de Posicionamento	Ordem do Grupo	Ângulos	Pontos Candidatos	Valor Grupo	target Dim	Num Grupos
DOUBLE_MALS	0	45°	ER	CH	15 x 10	<b>371</b>
	1		ER	MG	15 x 10	
	3		ER	CH / MG	20 x 10	
	0	0°	CH	CH	20 x 10	362
	0		180°	CH	CH	
	2	90°	CH	MG	15 x 10	
	1		CH	CH	15 x 10	
	2		CH	MG	15 x 10	

1° Na aplicação da heurística de posicionamento periódico de uma única figura, HAC, a nova regra de agrupamento MIN\_AREA\_CH introduzida neste capítulo, não produz diferença significativa relativamente à outra utilizada, MIN\_AREA (A.1.4). Esta conclusão é relevante para o planeamento das experiências a realizar, conquanto é possível reduzir para metade o número de testes a executar sobre a mesma instância.

2° É ainda possível confirmar estatisticamente os resultados obtidos no

Tabela 5.7: Resultados de *data\_4t*: Posicionamento Periódico Duplo com critério para a junção da figura dupla MIN\_AREA\_CH e sem Pesquisa Local

Tipo de Posicionamento	Ordem do Grupo	Ângulos	Pontos Candidatos	Valor Grupo	target Dim	Num Grupos
DOUBLE_CH	0	u45A	ER	CH	15 x 10	<b>368</b>
	1		ER	MG	15 x 10	
	1		ER	CH	20 x 10	
	1		ER	CH	25 x 10	
	2		CH	CH	20 x 10	
	2		ER	MG	20 x 10	
	3		ER	CH / MG	20 x 10	
	4		CH	MG	20 x 10	
	4		ER	CH	20 x 10	
	5		CH	CH / MG	20 x 10	
	6	ER	CH	20 x 10		
	1	u00A	ER	CH	15 x 10	357
	3		ER	MG	15 x 10	
	5		ER	MG	20 x 10	
	1	u90A	CH	CH	15 x 10	349
	2		CH	MG	15 x 10	
0	u99A	CH	CH	15 x 10		
2		CH	MG	15 x 10		

Tabela 5.8: Resultados de *data\_4t*: Posicionamento Periódico Duplo com critério para a junção da figura dupla MIN\_AREA\_CH e com Pesquisa Local

Tipo de Posicionamento	Ordem do Grupo	Ângulos	Pontos Candidatos	Valor Grupo	target Dim	Num Grupos
DOUBLE_CH_LS	0	45°	ER	CH	15 x 10	<b>371</b>
	1		ER	MG	15 x 10	
	3		ER	CH / MG	20 x 10	
0	90°	0°	CH	CH	20 x 10	362
1		CH	CH	15 x 10		
2		CH	MG	15 x 10		
0	180°	CH	CH	15 x 10		
2		CH	MG	15 x 10		

capítulo anterior, quanto à comparação entre o desempenho de cada um dos tipos de posicionamento, ou seja, o posicionamento periódico Simples conduz a um pior aproveitamento da placa que o Duplo e o facto de se efectuar uma pesquisa local após aplicação da heurística de posicionamento melhora significativamente o número de grupos posicionados. (A.1.4) Por esse motivo, é possível decidir já o tipo de posicionamento periódico aplicar nos testes finais a realizar. Decidiu-

-se, assim, aplicar um posicionamento periódico duplo com pesquisa local (DLS) (para todos os casos onde a rotação seja possível), um posicionamento periódico simples com pesquisa local (SLS) e um posicionamento periódico simples, sem qualquer rotação (apenas a orientação original é admissível) e sem pesquisa local (S) (justifica-se no caso de figuras que não possam sofrer qualquer tipo de rotação);

- 3° Quanto aos 10 grupos guardados, por ordem decrescente de uma medida da sua qualidade, consegue mostrar-se que, em termos de resultados finais de aproveitamento da placa, os 3 melhores grupos formados resultam melhor que qualquer dos restantes, sendo significativa essa diferença (A.1.4). Como tal, é possível garantir que os melhores resultados finais em termos de aproveitamento da placa correspondem a um dos três primeiros grupos formados (ordem 0, 1 ou 2), ordenados por ordem crescente de área (ou do próprio grupo, ou da sua envolvente convexa, conforme o critério adoptado tenha sido MG ou CH, respectivamente). Esta conclusão é bastante importante, conquanto é possível eliminar 7 de entre os 10 melhores grupos que se decidiu guardar nestes testes preliminares, mas não é conveniente ficar apenas com o melhor.
- 4° Relativamente à imposição de um rectângulo inicial (ou não), definido como *targetDim*, para a formação do grupo, não é fácil tirar conclusões a nível estatístico. Foi testada a possibilidade de o grupo ser formado livremente (sem haver uma *targetDim*, ou, equivalentemente, considerar uma *targetDim* de dimensões infinitas) e a formação do grupo consignado a diferentes rectângulos iniciais (com diferentes relações entre o comprimento e a largura). No total, foram criados 13 níveis correspondentes a diferentes relações entre o comprimento e a largura do rectângulo inicial (correspondendo uma das situações a uma *targetDim* infinita). Para os valores testados e para esta instância em particular, concluiu-se que uma das relações resulta significativamente pior do que todas as restantes. No entanto, não foi possível concluir que alguma delas fosse significativamente melhor do que todas as restantes. Além disso, o melhor valor de *targetDim* poderá depender tanto da instância como das dimensões da placa, pelo que poderá não ser válida para outra instância completamente diferente desta e com

uma placa de tamanho e proporções diferentes. Sem o apoio da Estatística para fundamentar a escolha genérica de uma *targetDim*, pode contudo considerar-se que existe diferença notória entre a construção totalmente livre do grupo, ou orientada para caber num determinado rectângulo dado pela *targetDim*: desde que encontrada a *targetDim* apropriada para a instância em causa, o resultado final é melhor do que se o grupo puder crescer livremente. Não foi possível, contudo, identificar uma regra geral pela qual a *targetDim* deverá ser escolhida.

5º Quanto ao critério segundo o qual é escolhido o ponto de posicionamento da nova figura face às restantes já posicionadas no grupo, não é significativa a diferença entre os dois critérios testados (A.2.4). Do estudo estatístico levado a cabo, conclui-se que pode ser usado um critério qualquer, tendo sido escolhido MIN\_AREA\_CH para efectuar os testes finais, em detrimento do critério MIN\_AREA\_ER. Lembrando que este último critério já existia e que MIN\_AREA\_CH foi proposto neste trabalho por se achar que poderia resultar melhor que o outro, afinal, estatisticamente, não é possível concluir que haja diferença entre ambos.

6º Relativamente à forma como se avalia a qualidade do grupo formado, com vista à sua posterior replicação há diferença estatística entre os dois critérios propostos, revelando-se valor\_CH superior a valor\_MG em termos de resultados finais de número total de grupos posicionados (A.2.4). Por esse motivo, foi escolhido valor\_CH para a realização dos testes computacionais.

### 5.2.5 Experiências realizadas

Dadas as conclusões baseadas no estudo estatístico, vão fixar-se alguns valores dos factores analisados.

Começando pela formação do grupo: não tendo sido encontrada uma regra genérica pela qual a *targetDim* deverá ser escolhida, foi decidido aplicar a todas as instâncias uma *targetDim* infinita, ou seja, em cada uma delas a formação do grupo será livre, apenas dependendo do critério considerado para a junção de uma nova figura ao resto do grupo. Embora se tenha consciência de que os resultados que se vão obter poderiam ser melhorados, interessa testar os vários critérios em termos comparativos e não absolutos,

pelo que se julga lícita esta decisão.

Para um número de figuras constituinte do grupo  $n \leq 5$ , todas as  $n!$  sequências serão testadas. Para  $n \geq 6$ , as figuras serão separadas em grandes e pequenas, mediante a classificação já apresentada.

Quanto à regra de junção da nova figura ao grupo já formado (escolha dos pontos candidatos na formação do grupo), não sendo significativa a diferença entre os resultados obtidos por uma ou por outra, foi escolhida a regra MIN\_AREA\_CH.

Da criação do grupo, serão guardados os 3 grupos que conduziram a melhores resultados, pois não há garantias de que o melhor posicionamento periódico seja obtido para o grupo melhor classificado. Como medida da qualidade do grupo formado para posterior ordenação do melhor para o pior, optou-se por aplicar valor\_CH, por ter sido estatisticamente provado que conduz a melhores resultados que valor\_MG.

Relativamente ao posicionamento periódico, decidiu-se testar, por cada grupo formado, três variantes em vez das seis inicialmente propostas:

- SINGLE (designado apenas por S nas próximas tabelas) — Simple, sem Pesquisa Local - as figuras não podem sofrer qualquer tipo de rotação em nenhuma das fases, (incluindo na formação do grupo), têm que ser colocadas na orientação original;
- SINGLE\_LS (apenas SLS) — Simple, com Pesquisa Local - é aplicada a heurística de posicionamento periódico HAC, com um espaçamento entre ângulos de  $5^\circ$  e uma pesquisa local em torno dos 3 ângulos que conduziram aos melhores resultados;
- DOUBLE\_MA\_LS (apenas DLS) — Duplo, com Pesquisa Local - é aplicada a heurística de posicionamento periódico HAC, com um espaçamento entre ângulos de  $5^\circ$  e uma pesquisa local em torno dos 3 ângulos que conduziram aos melhores resultados.

Foram utilizadas as mesmas instâncias de teste do algoritmo PPR, representadas na figura 5.3. Os resultados obtidos encontram-se resumidos na tabela 5.9. Realça-se que os valores de percentagem de utilização da placa apresentados na tabela são obtidos directamente das áreas das figuras que compõem o grupo, e não a partir das áreas (maiores) dos grupos formados.

Para cada instância e tipo de posicionamento periódico efectuado, apresenta-se o melhor resultado obtido e o valor do ângulo de rotação permitido



Tabela 5.9: Resultados computacionais da aplicação do algoritmo PPM

Inst	Placa	Tipo Posic	Âng	Aval Grp	Num Grp	% de Utilização da placa				Tempo (seg.)	
						melhor	média	pior	d.p.	Grp	Posic
<i>data</i> <i>_4t_s</i>	160	DLS	45	0	<b>85</b>	70.8%	67.3%	62.5%	2.2%	13	37
	x	SLS	45	1	81	67.5%	61.3%	56.7%	3.2%	13	11
	120	S	0	0	72	60%	59.3%	53.3%	2%	1	0
<i>data</i> <i>_4t_l</i>	320	DLS	45	2	<b>360</b>	75.0%	71.6%	68.8%	2.0%	11	148
	x	SLS	45	1	346	72.1%	65.5%	60.0%	3.6%	13	116
	240	S	0	1	306	63.8%	58.3%	52.9%	4.0%	1	0
<i>data</i> <i>_7b_s</i>	90	DLS	180	0	48	72.0%	67.2%	60.0%	3.0%	204	61
	x	SLS	180	2	<b>49</b>	73.5%	66.0%	60.0%	3.4%	189	9
	60	S	0	0	42	63.0%	59.7%	55.5%	2.5%	98	0
<i>data</i> <i>_7b_m</i>	180	DLS	45	1	206	77.3%	74.3%	70.1%	1.7%	630	91
	x	SLS	180	2	<b>210</b>	78.8%	71.9%	65.3%	3.0%	172	41
	120	S	0	1	179	67.1%	63.8%	59.5%	3.6%	94	0
<i>data</i> <i>_7b_l</i>	240	DLS	45	1	<b>428</b>	80.3%	75.2%	71.6%	2.3%	528	194
	x	SLS	180	2	423	79.3%	73.3%	68.3%	2.6%	187	140
	180	S	0	0	378	70.9%	68.7%	65.3%	4.1%	109	0

O tempo computacional encontra-se separado por fases: a formação do grupo e o seu posterior posicionamento periódico.

às figuras nessa solução. Da análise da tabela, pode realçar-se o seguinte: nem sempre a melhor solução obtida corresponde a uma situação de máxima liberdade de rotação permitida ( $45^\circ$ ), podendo verificar-se que também a possibilidade de as figuras no grupo rodarem apenas  $180^\circ$  conduziu a alguns dos melhores resultados. Também seria de esperar que um posicionamento periódico duplo conduzisse sempre a melhores resultados que qualquer dos outros dois tipos testados, o que não se verifica, existindo dois casos em que um posicionamento periódico simples é superior.

Existe ainda outra questão, que não pode ser ignorada: o facto de a formação do grupo não ter sido conduzida por uma *targetDim*. Nos testes preliminares (ver tabelas 5.3 a 5.8) foi variado o parâmetro *targetDim*. A tabela 5.10 resume o melhor resultado computacional obtido para a instância *data\_4t*, considerando uma placa de  $320 \times 240$ , sendo indicados o melhor resultado obtido para cada tipo de posicionamento e as respectivas dimensões da *targetDim*.

Por comparação do melhor resultado obtido com a instância *data\_4t* considerando uma *targetDim* infinita (tabela 5.9), com o caso em que é determinado o valor de *targetDim* que melhor se ajusta à instância dada (tabela 5.10), pode concluir-se que a diferença é elevada. Isto significa que este de-

Tabela 5.10: Resultados da aplicação do algoritmo PPM à instância *data\_4t*, por variação da *targetDim*

<i>target Dim</i>	Tipo Posic	Âng	Ordem Grp	Pontos Candid	Num Grupos	%Utilização placa
20x10 / 15x10	DLS	45	0	ER	371	77.29%
20x10 / 15x10	SLS	45	0	CH	369	76.88%
20x10	S	0	0	CH	327	68.13%

verá ser um factor a ter em conta, conquanto se consegue melhorar bastante o aproveitamento da placa. Ou seja, é aconselhável um estudo prévio da instância para identificar qual a *targetDim* que melhor aproveita a placa dada.

### 5.3 PPR *versus* PPM

#### 5.3.1 Evolução do desempenho dos algoritmos PPR e PPM em função da dimensão da placa

Para melhor avaliar e comparar o desempenho das abordagens PPR e PPM, foi usada a instância *data\_4t* e variada a área da placa rectangular, mantendo-se em todas a proporção utilizada nos testes computacionais. O primeiro valor de placa considerado para a execução dos algoritmos foi de (80x60) e o último (800x600).

No caso da segunda abordagem, uma vez que a formação do grupo é independente da sua posterior replicação, para a aplicação do algoritmo de posicionamento periódico HAC, foi escolhido o melhor grupo obtido atrás.

É possível ver o efeito produzido pela variação das dimensões da placa, para cada um dos algoritmos propostos neste capítulo (5.7).

Conforme pode constatar-se por simples visualização, é notório o melhor desempenho do algoritmo PPM face ao algoritmo PPR. É também possível concluir que, quanto maior for a placa, melhor é o seu aproveitamento, sendo no entanto mais visível no caso do algoritmo PPM. O efeito produzido pela variação da dimensão da placa, no caso do algoritmo PPM, era já esperado, uma vez que se trata do mesmo algoritmo já aplicado no capítulo anterior a uma só figura, que agora é o grupo. No caso do outro algoritmo, o efeito produzido por variação das dimensões da placa é mais ténue. Também isto é justificável, uma vez que o grupo é posicionado num rectângulo e não

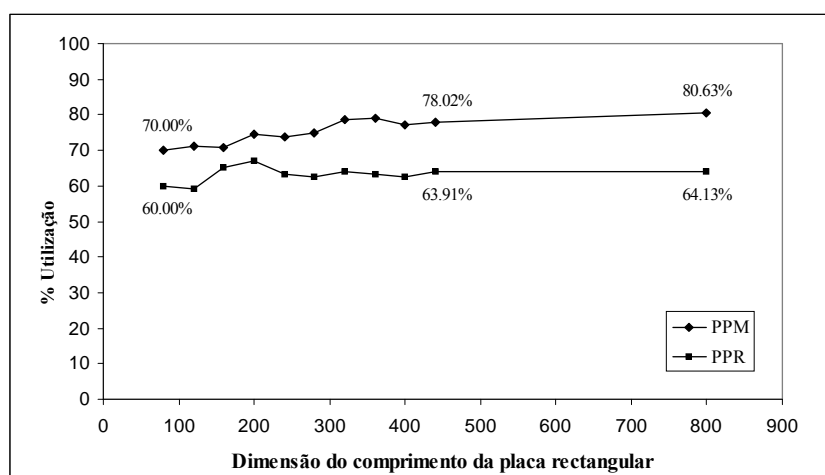


Figura 5.7: Evolução do desempenho dos algoritmos PPR e PPM em função da dimensão da placa, para a instância *data\_4t*.

aproveita reentrâncias de outros grupos contíguos, pelo que, a dada altura, por mais que a placa seja aumentada, a percentagem de aproveitamento da mesma mantém-se praticamente inalterável.

Dos resultados apresentados após aplicação de cada um dos algoritmos propostos neste capítulo, é possível afirmar-se que a segunda abordagem descrita apresenta sem qualquer dúvida melhor desempenho do que a primeira, ou equivalentemente, uma maior percentagem de utilização da placa. Acrescentando também a vantagem de não depender da forma geométrica da placa, e permitindo considerar rotações em ambas as fases do processo, conclui-se que o algoritmo PPM é, no geral, preferível ao algoritmo PPR.

Pode no entanto antever-se a aplicabilidade prática de ambos os algoritmos. Neste aspecto, cada um à sua maneira, poderá apresentar vantagens relativamente ao outro. Se por um lado o algoritmo PPR é simples e conduz a soluções de posicionamento facilmente implementáveis na prática, por outro, dado o acréscimo de desperdício da placa relativamente ao algoritmo PPM, a versatilidade e adequação mesmo a placas não-rectangulares sugere que terá um interesse mais alargado.

### 5.3.2 Resultados finais por aplicação do algoritmo PPM

Tendo sido possível concluir que o algoritmo PPM permite obter melhores resultados de posicionamento periódico de grupos de figuras que o algoritmo PPR, decidiu-se fazer um conjunto de testes mais exaustivo apenas recorrendo a esse algoritmo. Para tal, considerou-se o posicionamento periódico de diferentes tipos de grupos, constituídos por mais e menos figuras, com figuras mais simples e mais complexas, constituídas por um número menor e maior de vértices, com figuras todas convexas ou não.

#### Instâncias utilizadas

No total, foram geradas 12 instâncias de problemas para a realização das experiências computacionais, encontrando-se as mesmas ilustradas nas figuras 5.8 a 5.10.

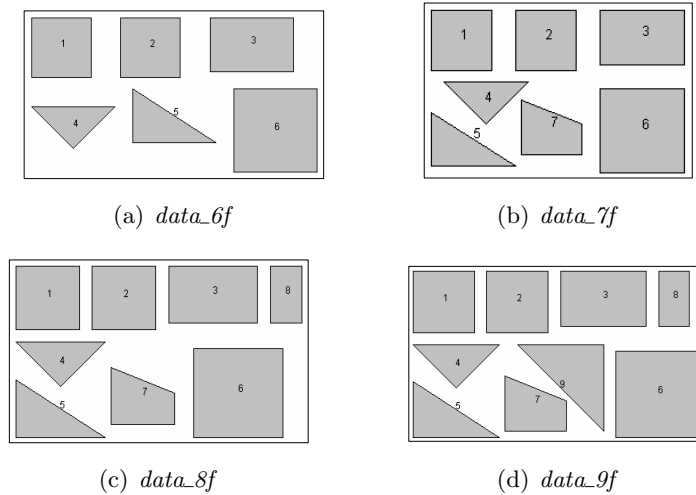


Figura 5.8: Instâncias utilizadas (i).

No primeiro conjunto de figuras (5.8), define-se um conjunto de instâncias, com a particularidade de todas as figuras que as constituem serem convexas. O nome de todas elas termina em “*nf*”, uma vez que tiveram origem em  $n$  figuras retiradas da instância FU, sendo  $n$  a parte do nome que as distingue. Outra característica de realçar, é o tamanho da placa, que foi propositadamente considerado igual em todos os quatro casos.

No segundo conjunto de figuras (5.9), encontram-se descritas um conjunto de instâncias constituídas por algumas figuras não convexas. As ins-

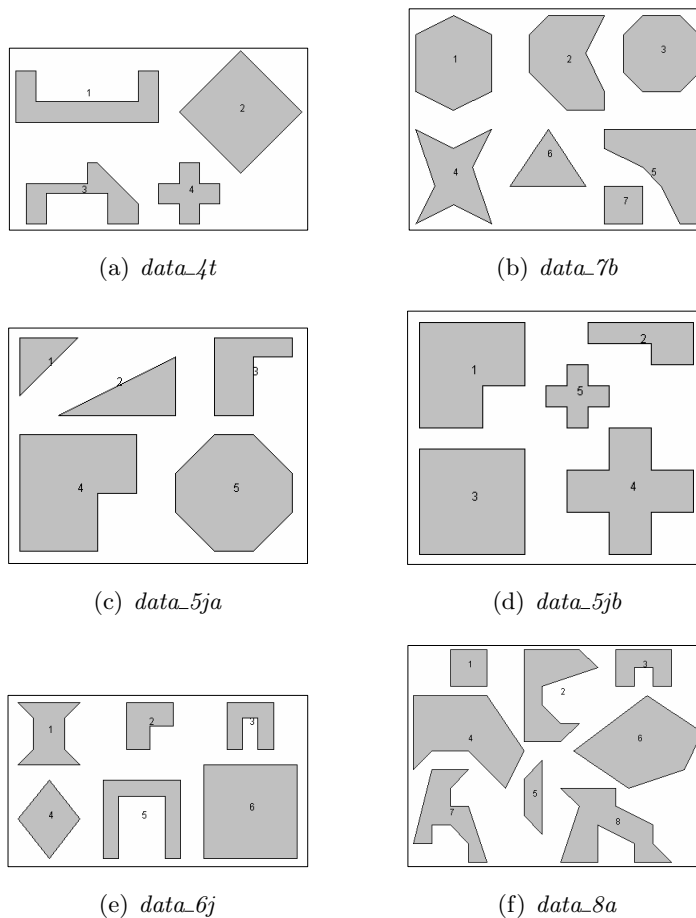


Figura 5.9: Instâncias utilizadas (ii).

tâncias *data\_4t* e *data\_7b* tiveram por base SHAPES0 e SHAPES2, respectivamente (já utilizadas na primeira seção deste capítulo). As instâncias *data\_5ja* e *data\_5jb* foram retiradas da instância JAKOBS1, enquanto *data\_6j* foi retirada de JAKOBS2. A instância *data\_8a* é constituída pelas 8 figuras de ARTIF, sem repetições, i.e., considerando apenas uma de cada tipo.

Por último (figura 5.10), decidiu-se incluir duas instâncias mais complexas, oriundas da indústria têxtil, correspondendo uma delas a um fato-de-banho e a outra a um biquíni (figuras 5.10(a) e 5.10(b), respectivamente). Foram ambas retiradas da instância SWIM, sendo constituídas por 8 figuras formadas por um elevado número de vértices (de 10 a 27 vértices na primeira instância e de 16 a 36 vértices na segunda).

Todas as instâncias foram criadas a partir de instâncias disponíveis no

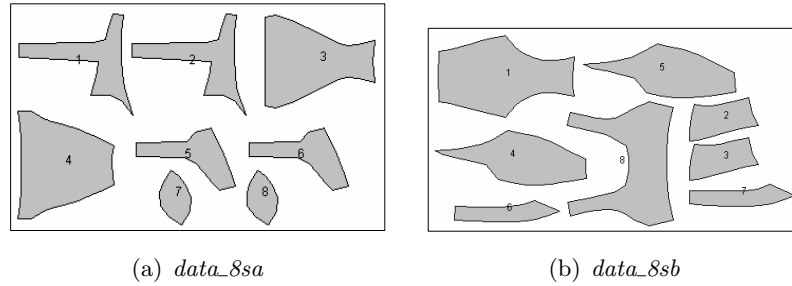


Figura 5.10: Instâncias utilizadas (iii).

site do [ESICUP]. O número de figuras que compõem o grupo é identificável no nome atribuído, neste capítulo, a cada instância. Para cada instância gerada, foi criada uma placa rectangular de dimensões tais que caiba um número de grupos sensivelmente da mesma ordem de grandeza em cada uma. A exceção é para as instâncias representadas na figura 5.10, retirados da indústria têxtil, em que propositadamente se definiu um tamanho de placa baseado em dados reais. Para as duas instâncias já testadas na secção anterior decidiu-se testar mais do que um tamanho de placa, mas esses resultados serão omitidos nesta secção, visto terem já sido apresentados na secção 5.2.5. A tabela 5.11 apresenta uma comparação entre instâncias, em termos de número de figuras, tamanho da placa, número médio de vértices das figuras e área da placa face à área total das figuras.

Tabela 5.11: Comparação de características das instâncias usadas

Instância	Número de figuras	Nº médio de vértices	Área das figuras	Área da placa	Área da placa Área total das figuras
<i>data_4t_s</i>	4	8.8	160.0	160x120	120.0
<i>data_4t_l</i>	4	8.8	160.0	320x240	480.0
<i>data_5ja</i>	5	5.2	81.5	250x150	460.1
<i>data_5jb</i>	5	8.0	78.0	250x150	480.8
<i>data_6f</i>	6	3.7	634.0	500x600	473.2
<i>data_6j</i>	6	6.3	331.0	500x350	528.7
<i>data_7b_s</i>	7	6.3	81.0	90x60	66.7
<i>data_7b_m</i>	7	6.3	81.0	180x120	266.7
<i>data_7b_l</i>	7	6.3	81.0	240x180	533.3
<i>data_7f</i>	7	3.7	704.0	500x600	426.1
<i>data_8a</i>	8	7.6	82.0	300x150	548.8
<i>data_8f</i>	8	3.8	749.0	500x600	400.5
<i>data_8sa</i>	8	17.3	3605193.0	60000x575	95.7
<i>data_8sb</i>	8	22.8	4876481.6	60000x575	70.77
<i>data_9f</i>	9	3.7	847.0	500x600	354.2

O número médio de vértices dá uma ideia da complexidade das figuras constituintes da instância. Incluiu-se na última coluna da mesma tabela, um quociente que serve para se poder fazer uma ideia de quantos grupos seria possível posicionar se o aproveitamento da placa fosse de 100%.

### Resultados computacionais

As tabelas 5.12 a 5.14 resumem os resultados computacionais obtidos para todas as instâncias de teste, por aplicação do algoritmo PPM. São indicados o melhor resultado, o pior e a média dos resultados obtidos para cada instância. Para a obtenção destes resultados, foram executadas 10 corridas de cada abordagem por cada combinação de critérios testada. Considerou-se uma *targetDim* infinita (para permitir que os grupos sejam formados livremente). Apenas foi aplicado o critério *valor\_CH* para a ordenação dos grupos, visto ter sido mostrado que, estatisticamente, este critério resulta melhor do que *valor\_MG*. Foi escolhido o critério *MIN\_AREA\_CH* para a escolha do ponto candidato, uma vez que este critério não apresenta diferença significativa relativamente a *MIN\_AREA*. Por último, para permitir uma aplicação automática do algoritmo PPM sem intervenção na escolha de qualquer parâmetro, foi considerada a possibilidade de ser criado um grupo completamente livre.

Tabela 5.12: Resultados computacionais da aplicação do algoritmo PPM

Inst	Placa	Tipo Posic	Âng	Ord Grp	Num Grp	% de Utilização da placa				Tempo (seg.)	
						melhor	média	pior	d.p.	Grp	Posic
<i>data</i> _6 <i>f</i>	500	DLS	180	0	448	94.7%	83.4%	67%	7.7%	18	155
	x	SLS	0	1	408	86.2%	76.9%	67%	4.6%	51	149
	600	S	0	1	338	71.4%	69.4%	64.5%	2.0%	8	0
<i>data</i> _7 <i>f</i>	500	DLS	180	2	389	91.3%	84.8%	77.9%	3.5%	49	116
	x	SLS	45	0	360	84.5%	77%	64.8%	5.1%	66	98
	600	S	0	0	340	79.8%	73.8%	68.5%	4.6%	25	0
<i>data</i> _8 <i>f</i>	500	DLS	0	0	354	88.4%	84.5%	80.6%	2.3%	337	103
	x	SLS	45	1	338	84.4%	75.6%	66.4%	5.3%	337	89
	600	S	0	0	320	79.9%	76.9%	71.9%	3.6%	140	1
<i>data</i> _9 <i>f</i>	500	DLS	0	0	304	85.8%	81.0%	72.0%	5.4%	1373	68
	x	SLS	0	0	294	83.0%	78.1%	72.0%	3.3%	1373	64
	600	S	0	0	255	72.00%	69.5%	65.1%	2.1%	1373	7

O tempo computacional encontra-se separado por fases: a formação do grupo e o seu posterior posicionamento periódico.

Na tabela 5.12 apresentam-se os resultados das instâncias descritas na

figura 5.8.

Tabela 5.13: Resultados computacionais da aplicação do algoritmo PPM

Inst	Placa	Tipo Posic	Âng	Ord Grp	Num Grp	% de Utilização da placa				Tempo (seg.)	
						melhor	média	pior	d.p.	Grp	Posic
<i>data</i>	250	DLS	90	0	400	86.9%	82.2%	77.6%	2.9%	4	163
<i>_5ja</i>	x	SLS	45	0	387	84.1%	78.1%	73.0%	4.1%	6	138
	150	S	0	0	328	71.3%	67.2%	63.5%	3.6%	0	2
<i>data</i>	250	DLS	90	1	425	88.4%	83.6%	78.4%	2.6%	5	183
<i>_5jb</i>	x	SLS	180	0	415	86.3%	81.1%	73.6%	3.3%	4	138
	150	S	0	2	360	74.9%	70.3%	67.4%	3.2%	0	2
<i>data</i>	500	DLS	180	0	425	80.4%	76.6%	69.6%	3.8%	16	150
<i>_6j</i>	x	SLS	45	1	410	77.5%	75.5%	69.6%	2.3%	43	151
	350	S	0	1	408	77.2%	72.0%	69.2%	3.4%	6	0
<i>data</i>	300	DLS	90	1	404	73.6%	71.0%	67.6%	1.8%	1254	149
<i>_8a</i>	x	SLS	45	1	392	71.4%	69.2%	63.8%	2.3%	2951	122
	150	S	0	2	319	58.1%	56.7%	55.1%	1.1%	735	2

Na tabela 5.13 apresentam-se os resultados das instâncias descritas na figura 5.9. Exceptuam-se os resultados relativos às instâncias *data\_4t* e *data\_7b*, nas várias vertentes de dimensões de placa estudadas, uma vez que já foram apresentadas na secção 5.2.5.

Tabela 5.14: Resultados computacionais da aplicação do algoritmo PPM

Inst	Placa	Tipo Posic	Âng	Ord Grp	Num Grp	% de Utilização da placa				Tempo (seg.)	
						melhor	média	pior	d.p.	Grp	Posic
<i>data</i>	60000	DLS	90	0	60	62.7%	59.1%	58.5%	2.1%	35444	2127
<i>_8sa</i>	x	SLS	90	0	63	65.8%	61.9%	58.5	1.8%	35444	120
	5752	S	0	0	42	43.9%	43.9%	43.9%	0	20171	12
<i>data</i>	60000	DLS	0	1	48	67.8%	57.4%	48.0%	8.4%	14331	477
<i>_8sb</i>	x	SLS	0	0	48	67.8%	57.1%	46.6%	8.7%	11902	4127
	5752	S	0	0	45	63.6%	48.3%	46.6%	1.3%	14331	10

Apresentam-se na tabela 5.14 os resultados obtidos com as instâncias descritas na figura 5.10. Neste caso, dado o tempo excessivo que o grupo de figuras demora a ser criado pelo algoritmo PPM, não só devido ao número de figuras que constituem o grupo mas também ao elevado número médio de vértices que as compõem, não foram testadas todas as possíveis rotações permitidas. Nos testes com a instância *data\_8sa* foram considerados todos os ângulos, excepto 45°, enquanto nos testes que envolveram a instância *data\_8sb* apenas a rotação original das figuras foi contemplada. Só como



ideia geral, cada grupo formado pela instância *data\_8sa* é composto por cerca de 90 vértices, enquanto um grupo formado pela instância *data\_8sb* é composto em média por 100! Por esse motivo, a heurística de posicionamento periódico HAC, independente do número de ângulos usados na fase de formação do grupo, demorou bastante mais tempo do que aquando do posicionamento de outros grupos, mais simples, resultantes do agrupamento das outras instâncias de teste.

## 5.4 Visualização de alguns resultados

A figura 5.11 refere-se à melhor solução de posicionamento periódico da instância *data\_4t*, obtida por aplicação do algoritmo PPR. Como é possível verificar, os grupos preencheram a placa segundo 13 linhas e 6 colunas, resultando um total de 78 grupos. O grupo formado é isolado e aumentado, para uma melhor distinção entre os dois tipos de algoritmos propostos.

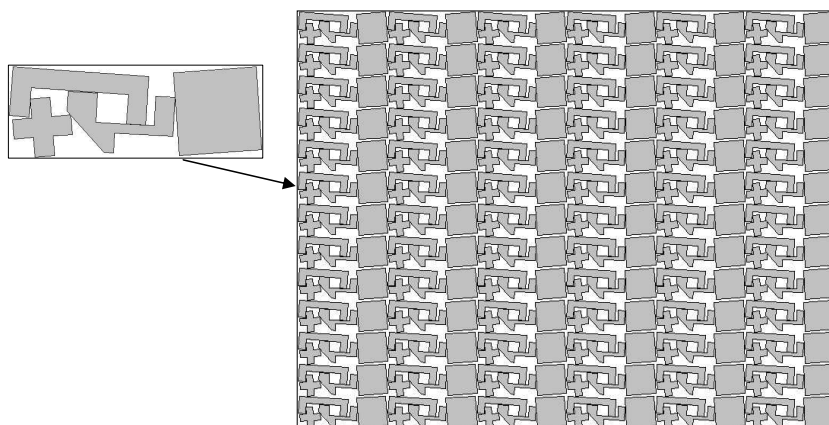


Figura 5.11: Melhor solução de posicionamento periódico de grupos rectangulares (algoritmo PPR) para a instância *data\_4t* (78 grupos = 312 figuras posicionadas - 65.0% de Utilização).

A figura 5.12 ilustra a melhor solução obtida para a mesma instância (*data\_4t*), por aplicação da abordagem PPM. Esta solução foi possível considerando a possibilidade de as figuras sofrerem rotações de  $45^\circ$  na formação do grupo e por aplicação do algoritmo de posicionamento periódico duplo HAC, com pesquisa local. O grupo formado é também isolado e aumentado.

A figura 5.13 refere-se à aplicação do algoritmo PPR, apresentando a melhor solução obtida com a instância *data\_7b*. Como é possível verificar,

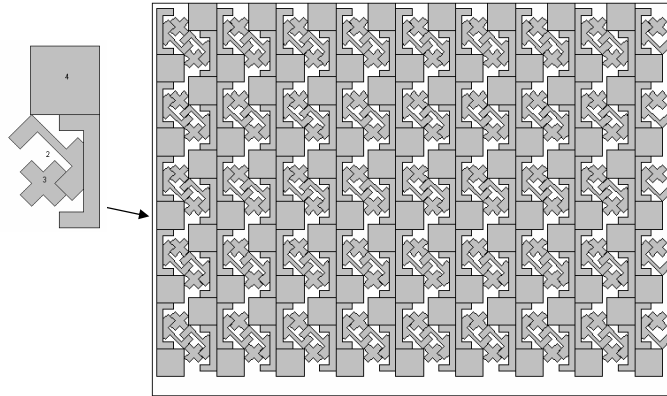


Figura 5.12: Melhor solução de posicionamento periódico de *data\_4t*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (85 grupos = 340 figuras posicionadas - 70.8% de Utilização).

os grupos preencheram a placa segundo 12 linhas e 4 colunas, resultando um total de 48 grupos. O grupo formado é isolado e aumentado, para uma melhor distinção entre os dois tipos de algoritmos propostos.

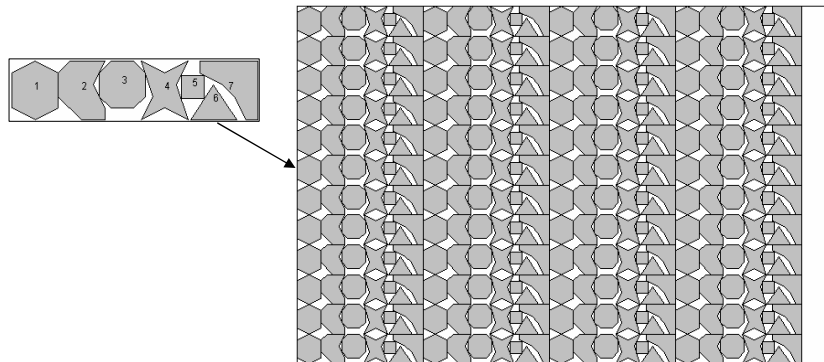


Figura 5.13: Melhor solução de posicionamento periódico da instância *data\_7b* segundo posicionamento ortogonal - obtida por aplicação do algoritmo PPR (48 grupos = 336 figuras posicionadas - 72.0% de Utilização).

A figura 5.14 refere-se à melhor solução obtida para a instância *data\_7b* pela abordagem PPM. Nesta solução foram permitidas rotações de 180° nas figuras, na formação do grupo. Foi aplicado um posicionamento periódico simples, contemplando uma pesquisa local em redor dos três melhores ângulos. O grupo formado é isolado e aumentado, para uma melhor percepção do funcionamento do algoritmo de posicionamento descrito, pelo mesmo motivo

apontado na figura anterior.

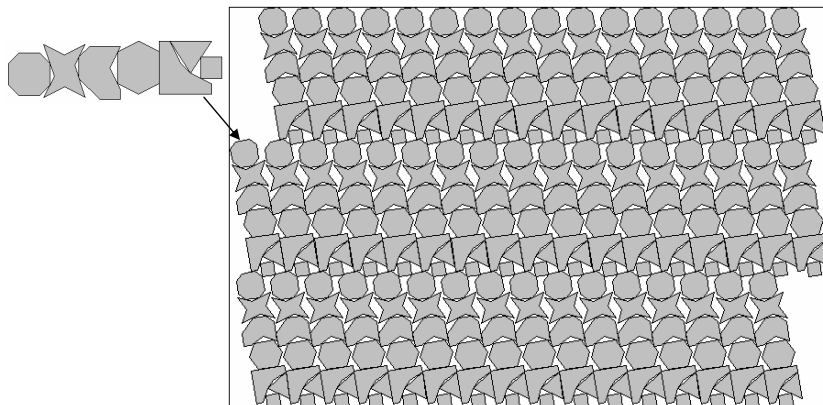


Figura 5.14: Melhor solução de posicionamento periódico de *data\_7b*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (49 grupos = 343 figuras posicionadas - 73.5% de Utilização).

A figura 5.15 refere-se à melhor solução obtida para a instância *data\_7b* pela abordagem PPM, considerando um posicionamento periódico duplo. Nesta solução foram permitidas rotações de  $45^\circ$  nas figuras, aquando da formação do grupo. O algoritmo de posicionamento periódico duplo foi aplicado no final, com uma pesquisa local final. Como pode concluir-se, é uma solução pior do que a solução anteriormente apresentada, obtida por aplicação de um posicionamento periódico simples (48 grupos posicionados, contra 49 na melhor solução encontrada, obtida após um posicionamento periódico simples).

Nas figuras 5.16 e 5.17 podem ver-se duas possíveis soluções de posicionamento periódico simples, respectivamente das instâncias *data\_7f* e *data\_8f* (299 grupos colocados em cada caso), obtidas por aplicação do algoritmo PPM. Salientando que a dimensão das placas usada foi igual em ambas as instâncias e que a constituição das duas instâncias só difere na 8ª figura (todas as 7 figuras anteriores são idênticas), o facto de o número de grupos colocados ser igual em ambas as situações (299), significa que o aproveitamento da placa no segundo caso é superior (74.65% contra 70.17%). Este exemplo serve para ilustrar como, por vezes, há espaços que ficam desaproveitados no posicionamento periódico de um grupo e que poderão ser ocupados por uma figura pequena. Serve também como adjuvante na justificação anteriormente dada para a separação do conjunto de  $n$  figuras em dois subconjuntos, um

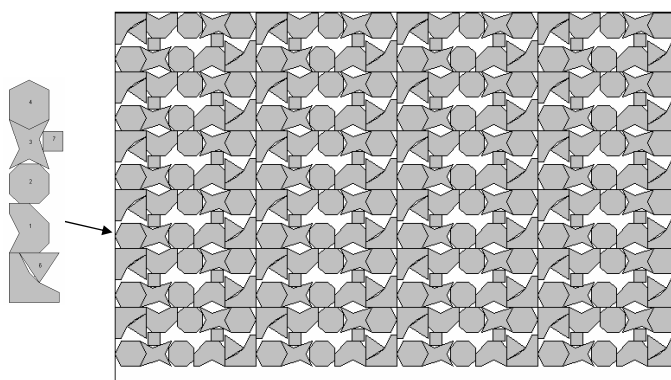


Figura 5.15: Melhor solução de posicionamento periódico duplo de *data\_7b*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (48 grupos = 336 figuras posicionadas - 72.0% de Utilização).

com as figuras grandes e o outro com as figuras pequenas, sendo as pequenas posicionadas sempre após as grandes.

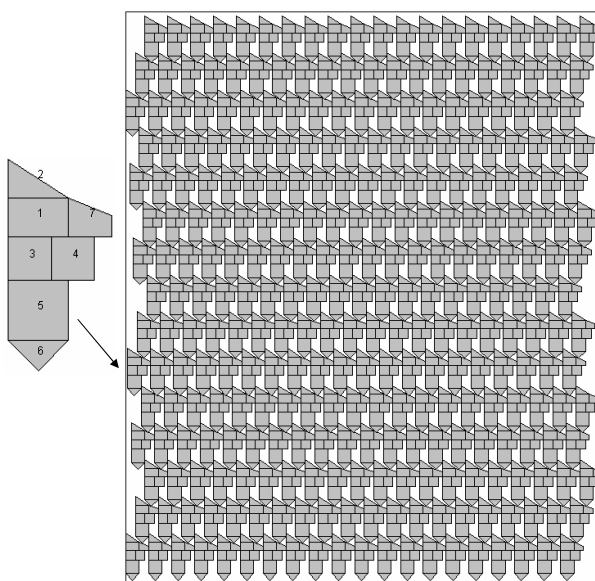


Figura 5.16: Possível solução de posicionamento periódico simples de *data\_7f*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (299 grupos = 2093 figuras posicionadas).

Considerando ainda a instância *data\_8f*, apresenta-se na figura 5.18 a melhor solução resultante da aplicação do algoritmo PPM. Como é fácil

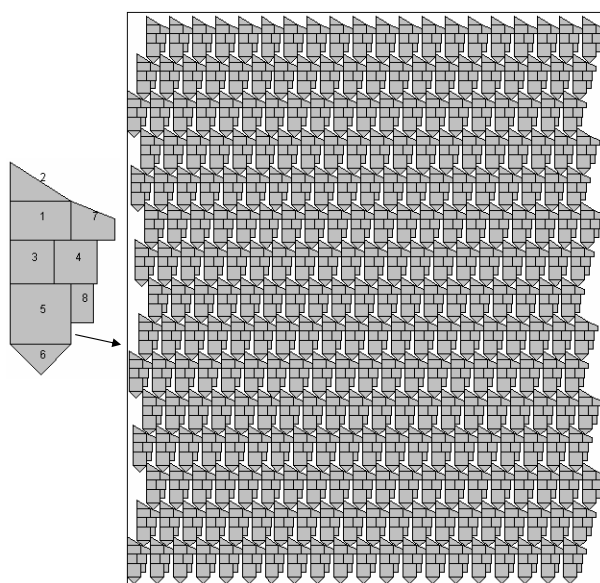


Figura 5.17: Possível solução de posicionamento periódico simples de *data\_8f*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (299 grupos = 2392 figuras posicionadas).

identificar, a diferença relativa à solução apresentada na figura 5.17 deve-se apenas a um melhor aproveitamento da placa, uma vez que o grupo formado é rigorosamente o mesmo. Isto vem reforçar a nossa opinião de que para a obtenção de um bom resultado de posicionamento periódico de um grupo, a formação inicial do grupo é apenas parte de um todo, pois é também de extrema importância a qualidade do algoritmo de posicionamento periódico aplicado.

Foi testado o algoritmo PPM para todas as instâncias com a restrição adicional de manter a rotação original de todas as figuras, quer na fase de formação do grupo, quer na fase posterior de posicionamento periódico. Esta situação poderá ter interesse em certos casos de instâncias oriundas de processos produtivos onde tal é obrigatório, como é o caso das instâncias *data\_8sa* e *data\_8sb*, respectivamente, peças constituintes de um fato-de-banho e de um biquíni. Estas figuras, com origem na indústria têxtil, poderão nem sequer permitir a rotação de  $180^\circ$ , por exemplo se a malha de que são feitos contiver padrões. As figuras 5.19 e 5.20 ilustram o posicionamento periódico simples da instância *data\_8sb*, respectivamente, na situação de imposição de não rotação em qualquer fase e na situação de imposição de

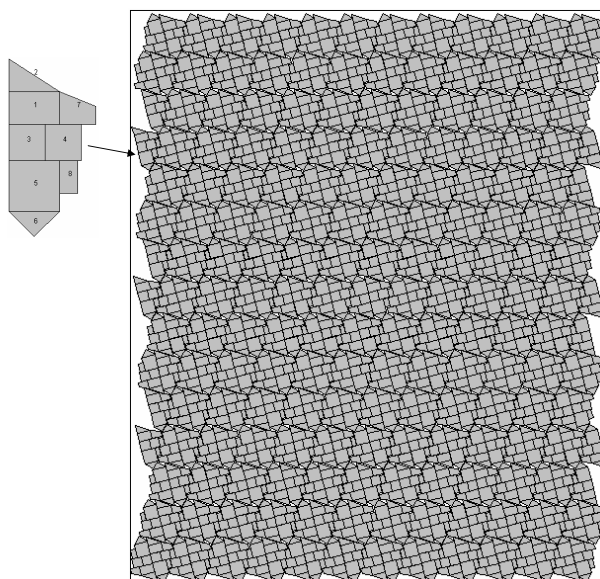


Figura 5.18: Melhor solução de posicionamento periódico de *data\_8f*, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (354 grupos = 2832 figuras posicionadas - 88.4% de Utilização).

não rotação apenas na fase de construção do grupo, podendo este sofrer rotação posteriormente na fase de replicação (isto só é possível uma vez que as duas fases são totalmente independentes).

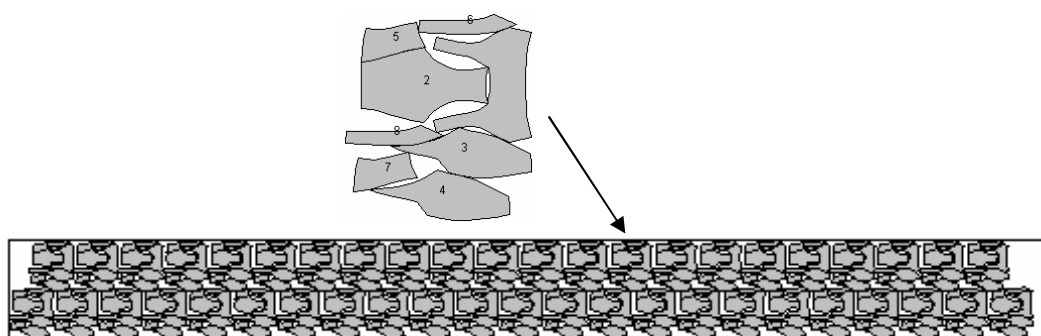


Figura 5.19: Melhor solução de posicionamento periódico simples de *data\_8sb*, sem qualquer rotação das figuras, decorrente da aplicação do algoritmo PPM. (45 biquínis = 360 figuras posicionadas - 63.6% de Utilização).

Como pode ser confirmado, comparando o número de biquínis completos posicionados numa situação e na outra, consegue-se alguma melhoria

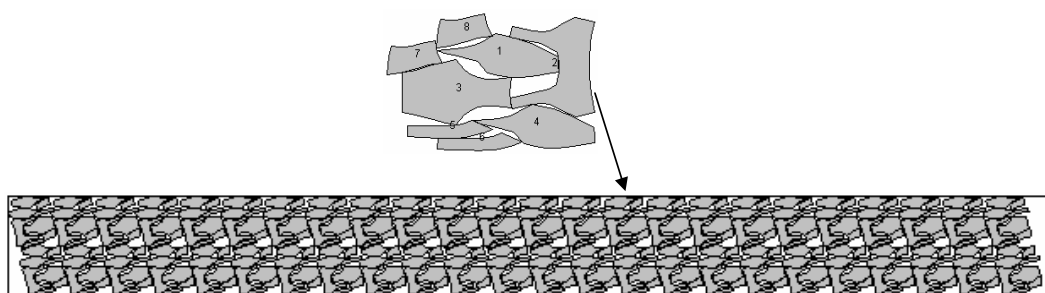


Figura 5.20: Melhor solução de posicionamento periódico simples de *data\_8sb*, permitindo rotação do grupo formado com as figuras na orientação original, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (48 biquínis = 384 figuras posicionadas - 67.8% de Utilização).

no aproveitamento da placa se se permitir a rotação das figuras. Ou seja, embora admissível do ponto de vista geométrico, a solução poderá não ser admissível do ponto de vista do processo tecnológico, pelo que se salienta que a utilização de um ou outro critério na aplicação de cada algoritmo de resolução se encontra sempre dependente do domínio de aplicação.

As figuras 5.21 e 5.22 ilustram o posicionamento periódico simples da instância *data\_8sa*, respectivamente, na situação de imposição de não rotação em qualquer fase e permitindo rotações de  $90^\circ$  na fase de construção do grupo. Neste último caso, o posicionamento periódico aplicado foi do tipo simples com pesquisa local.

Dos posicionamentos ilustrados nas figuras anteriores, mostra-se que as limitações de resolução de grupos de figuras do tipo destas descritas (constituídas por muitos vértices) não apresentam problemas de admissibilidade da solução apresentada, por muito complexas que sejam as figuras do grupo. No entanto, além de nem sempre ser possível rodar figuras em termos reais, também a aplicação do algoritmo deixa de ser eficiente, em termos de tempos computacionais.

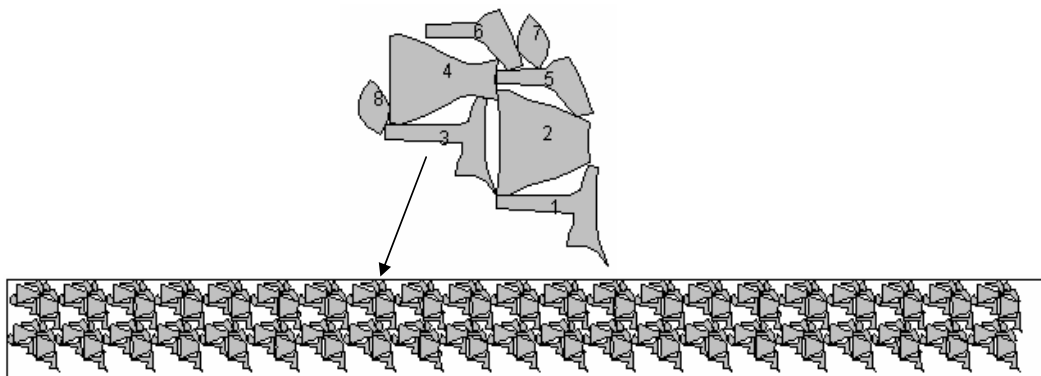


Figura 5.21: Melhor solução de posicionamento periódico simples de *data\_8sa*, sem qualquer rotação das figuras, decorrente da aplicação do algoritmo PPM. (42 fatos de banho completos = 336 figuras posicionadas - 43.9% de Utilização).

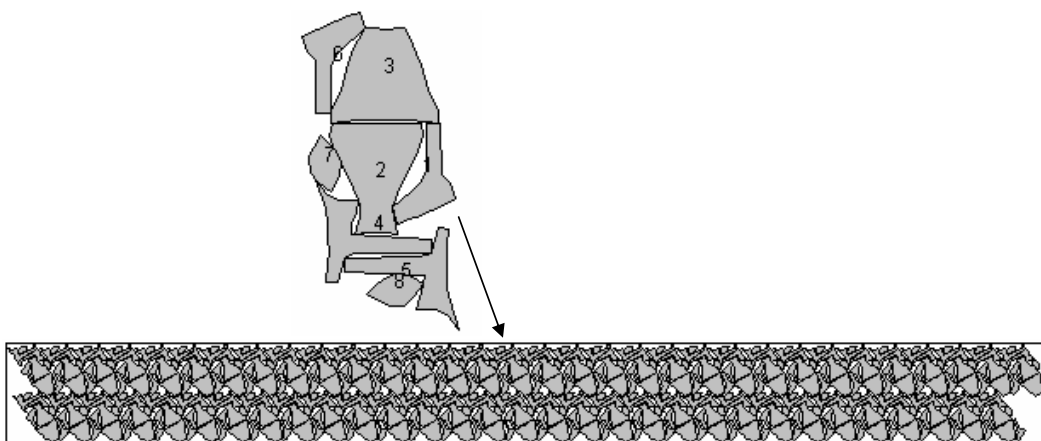


Figura 5.22: Melhor solução de posicionamento periódico simples de *data\_8sa*, permitindo rotação do grupo formado com as figuras na orientação original, decorrente da aplicação do algoritmo PPM (63 fatos de banho completos = 504 figuras posicionadas - 66.9% de Utilização).



# Capítulo 6

## Conclusão

### 6.1 Conclusões do trabalho

Nesta dissertação considerou-se o problema do posicionamento periódico de figuras irregulares numa placa rectangular. Este problema foi abordado em duas vertentes: quando há uma única figura com a qual se pretende preencher a placa e quando há um grupo de figuras a replicar. A ideia subjacente é a mesma, quer se trate de uma figura ou de um grupo de figuras. Em qualquer das vertentes, o objectivo é a maximização do número de figuras colocadas, o que é equivalente a minimizar o desperdício da placa. A orientação das figuras não foi restringida, sendo apenas exigido que as réplicas, uma vez escolhida a orientação para a primeira figura colocada, mantenham essa orientação. É excepção o posicionamento periódico duplo, onde é permitida uma segunda rotação, de  $180^\circ$  relativamente à primeira, sendo metade das figuras posicionada em cada uma das orientações.

No que respeita ao posicionamento periódico de uma única figura, começou por se descrever o problema que se pretendia resolver, partindo para uma revisão bibliográfica das várias abordagens a este problema e outros afins encontradas na literatura. Foi enquadrado no âmbito dos problemas de posicionamento periódico numa placa de dimensões finitas e no plano, tendo sido apontadas as semelhanças e diferenças. Foram identificadas as vantagens e desvantagens das abordagens usualmente consideradas.

Quanto ao posicionamento periódico de um grupo de figuras, este problema foi enquadrado quer nos problemas de agrupamento de figuras, quer nos problemas de posicionamento periódico. A interligação entre os dois tipos de problemas, assim como os aspectos inovadores introduzidos neste

trabalho, foram descritos. Uma revisão bibliográfica dos dois tipos de problemas, independentes e relacionados, foi pormenorizadamente reunida.

As abordagens utilizadas recorreram a heurísticas e meta-heurísticas, por se ter verificado impraticável a sua resolução por métodos exactos. Foram desenvolvidos novos algoritmos para cada uma das vertentes do problema e, no caso de uma única figura, comparados resultados com trabalhos publicados. Nesses casos, os algoritmos desenvolvidos melhoraram significativamente o aproveitamento da placa. A principal contribuição desta dissertação no caso do posicionamento periódico de uma única figura, pode resumir-se no seguinte: em geral, artigos publicados visam a maximização da percentagem de utilização da placa (no caso de uma placa de dimensões finitas) ou a maximização da densidade do posicionamento (na situação ilimitada ou, aproximadamente, placas muito grandes). Nesta tese foram propostas heurísticas que visam ambos os objectivos simultaneamente. Os resultados computacionais mostram um bom desempenho na resolução do problema de posicionamento periódico numa placa limitada, independentemente das suas dimensões.

No caso do posicionamento periódico de grupos de figuras, pode afirmar-se que a principal contribuição foi o desenvolvimento de novos algoritmos e novas estratégias de resolução. Em nenhum trabalho publicado foi contemplada a consideração de rotações das figuras dentro da formação do grupo que depois é replicado. Nos artigos publicados cuja rotação das figuras dentro do grupo pode ser qualquer, o seu objectivo resume-se à criação do grupo por si só. Nos artigos que referem um posicionamento periódico de grupos de figuras, o grupo é formado por translação (ou deslizamento) das figuras umas em redor das outras, sendo o grupo posteriormente replicado com ou sem a possibilidade de ser rodado. Nesta tese foram englobadas rotações nas duas fases, na própria construção do grupo e na sua posterior replicação.

## 6.2 Desenvolvimentos futuros

São várias as perspectivas de desenvolvimento futuro deste trabalho. A primeira linha de actuação centra-se na manipulação automática das formas, ou seja, o desenvolvimento de algoritmos que permitam encontrar, de forma automática, a melhor orientação de uma figura face a outra, para que a sua “fusão” seja mais eficaz. Este processo é intuitivo à percepção humana,

deixando de o ser ao nível do algoritmo, quando as figuras a posicionar não passam de listas ordenadas de vértices. O facto deste processo poder ser executado *a priori*, uma vez que são conhecidas as figuras a colocar, tornaria o algoritmo de posicionamento mais eficiente. O maior investimento durante a execução do algoritmo de posicionamento passaria a ser no processo de posicionamento em si, em vez de ser na escolha da melhor orientação de cada figura em cada instante.

Conforme pode ser visualizado nas figuras apresentadas relativas às melhores soluções de PP $n$ FI, no final sobram alguns espaços junto às fronteiras da placa. Estes espaços, não sendo grandes o suficiente para conterem um grupo inteiro, poderão conter uma ou mais figuras soltas do grupo. Poderia pensar-se em preencher esses buracos com algumas figuras do grupo, de modo que, em termos de contagem, continuasse a haver no total um número de figuras que completasse um número inteiro de grupos. Esta ideia foi implementada no caso da resolução do problema de PPF $I$  com as figuras duplas, que no final foram separadas em duas e cada metade preencheu buracos. Sendo mantida a regularidade do posicionamento, mesmo neste caso, consegue aumentar-se o aproveitamento da placa.

Neste trabalho assumiu-se rígida a constituição de cada grupo de figuras, sendo descritos os algoritmos de agrupamento do conjunto de figuras (formação de grupos) e, posteriormente, aplicados alguns dos algoritmos desenvolvidos no quarto capítulo que replicam uma única figura (que neste caso irão replicar o grupo) e desenvolvidos novos algoritmos. Admitindo uma interpretação do problema de agrupamento de figuras diferente da considerada neste trabalho, num trabalho complementar, poderia subdividir-se a placa em secções não necessariamente idênticas (com base no estudo das figuras a replicar) e agrupar figuras dentro de cada secção de forma a maximizar o seu aproveitamento. Isto implica que cada grupo possa ser diferente dos restantes, i.e., aceita-se que a constituição de cada grupo formado dentro de uma secção não é rígida. Assim, novos algoritmos teriam que ser desenvolvidos para fazerem a escolha das figuras que devem constituir cada grupo, bem como os algoritmos que determinem que secções formar, dadas as figuras a posicionar. Também poderiam ser desenvolvidos novos algoritmos para o posicionamento das figuras dentro de uma secção, ou utilizados outros já existentes, nomeadamente, aqueles propostos neste trabalho. Esta abordagem passa da resolução de um problema de posicionamento em geral (não

periódico) para a resolução de uma sequência de problemas de agrupamento de menor dimensão que o problema original.

Uma variante da proposta anterior diz também respeito a novas aplicações dos algoritmos de formação de grupos desenvolvidos neste trabalho. Na resolução de um problema de posicionamento de figuras irregulares genérico, um problema de *nesting*, quando o número de figuras a replicar é muito elevado, os algoritmos tipicamente usados tornam-se pouco eficientes. Seria interessante considerar, nessa situação, a formação de vários grupos, cada um constituído por parte das figuras, de forma que o conjunto dos grupos formados contemple a totalidade das figuras a posicionar. Nessa situação, o problema original passaria por uma resolução em duas fases, sendo objetivo da primeira a redução do número de itens a colocar (o resultado da primeira fase seria um conjunto reduzido de itens - os grupos resultantes da fusão de figuras) e passando a segunda fase a ser um problema de posicionamento de figuras irregulares (os grupos formados) de menor dimensão que o inicial. Esta abordagem afigura-se interessante, dado que a maior parte dos algoritmos de resolução de problemas de *nesting* propostos na literatura apresentam limitações a partir de certa dimensão. Resumir-se-ia, nesse caso, o problema original de *nesting* com muitas figuras a um problema com poucas figuras, permitindo a aplicação de metodologias de resolução de problemas de *nesting* comprovadamente eficientes quando o número de figuras é reduzido, nomeadamente, a resolução de modelos matemáticos.

## Apêndice A

# Planeamento de Experiências

A Análise de Variância é uma técnica estatística que está directamente relacionada com o modo como é feito o planeamento das experiências. Tem como principal objectivo analisar dados que se encontram dependentes de vários efeitos simultâneos, permitindo decidir quais desses efeitos são significativos e de que forma podem ajudar a delinear as experiências a realizar.

O objectivo deste apêndice é a análise de um conjunto vasto de resultados oriundos da aplicação do algoritmo PPM a uma única instância (capítulo 5), para decidir que experiências deverão ser realizadas sobre a totalidade das instâncias. O motivo prende-se com a quantidade elevada de regras e critérios, que, todos conjugados, resultam num conjunto vasto de resultados difícil de interpretar. A instância de teste a partir da qual foram obtidos estes resultados é formada por um reduzido número de figuras, que, embora irregulares, são compostas por poucos vértices. Uma vez que se pretende testar o algoritmo proposto num conjunto mais vasto de instâncias, desde muitas a poucas figuras, mais simples e mais complexas, tornar-se-ia impraticável fazer testes totais a todas essas instâncias. Por esse motivo se decidiu fazer um estudo estatístico que ajudasse a delinear os testes computacionais finais a realizar. Foi utilizado o SPSS na realização deste estudo estatístico.

Apresenta-se na figura A.1 o esquema de funcionamento do algoritmo de posicionamento periódico de grupos de figuras PPM. Torna-se assim mais simples de estruturar o tipo de experiências que se pretende efectuar.

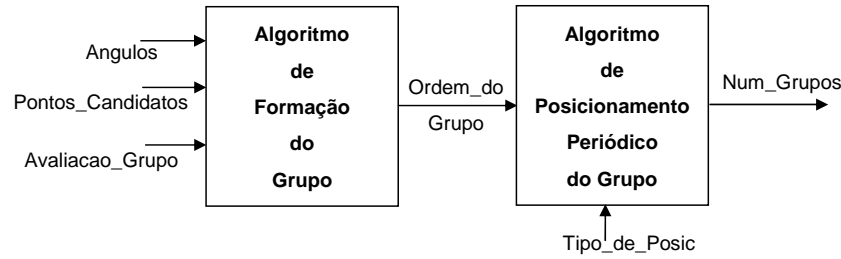


Figura A.1: Esquema de funcionamento do algoritmo PPM.

## A.1 Primeiro conjunto de experiências

O algoritmo PPM é basicamente decomposto em dois módulos principais: o algoritmo de formação do grupo e o algoritmo de posicionamento periódico do grupo. Os vários factores envolvidos nas duas fases, que se encontram interligadas, estão identificados na figura. O primeiro conjunto de experiências pretende estudar a influência dos factores intervenientes no segundo módulo.

### A.1.1 Estrutura das experiências

Pretende-se analisar o efeito dos factores *Tipo\_de\_Posic* e *Ordem\_do\_Grupo* na variável dependente *Num\_Grupos*, testando se as médias da variável dependente em cada combinação dos níveis dos factores são ou não estatisticamente iguais. Trata-se de uma Análise de Variância para dois factores com efeitos fixos.

Os níveis do factor *Tipo\_de\_Posic* são 6: DOUBLE\_CH, DOUBLE\_CHLS, DOUBLE\_MA, DOUBLE\_MA\_LS, SINGLE, SINGLE\_LS.

Os níveis do factor *Ordem\_do\_Grupo* são 10: O\_0, O\_1, ..., O\_9.

No total, após conjugação de todos os factores envolvidos na execução do algoritmo PPM, dispõe-se de 12480 observações.

### A.1.2 Verificação dos pressupostos

Antes de se aplicar testes ANOVA ao conjunto de observações, é necessário verificar os seguintes pressupostos: na ANOVA assume-se que as observações dentro de cada célula são independentes e que provêm de uma amostra aleatória da população cuja distribuição é normal, sendo as variâncias das

células iguais na população. [Nota: Cada célula consiste na observação dos valores da variável dependente nos factores em estudo, sendo composta por 208 observações]. É necessário, então, analisar se esses pressupostos se verificam.

Tabela A.1: Teste à normalidade dos dados

	Kolmogorov-Smirnov (a)		
	Statistic	df	Sig.
Resíduos	0.028	12480	0.000

(a) Lilliefors Significance Correction

A análise da normalidade das observações faz-se usando os resíduos, pelo que, da análise da tabela A.1, se observa que o pressuposto da normalidade não é verificado (sig=0). No entanto, a ANOVA é robusta à violação da normalidade quando a dimensão da amostra é elevada, o que acontece neste caso.

Testou-se então a homogeneidade das variâncias das células, por aplicação do teste de Levene (A.2).

Tabela A.2: Teste à homogeneidade das variâncias das células

F	df1	df2	Sig.
1.618	59	12420	0.002

Este teste verifica se a variância do erro da variável dependente se mantém em cada grupo. Observa-se que o pressuposto da igualdade das variâncias (homocedasticidade) não é verificado (sig=0.002). No entanto, a ANOVA é robusta à violação da homocedasticidade quando o número de observações em cada célula for igual, o que acontece neste caso.

Não sendo verificados os pressupostos, é possível, contudo, aplicar-se uma ANOVA, pelos motivos apontados.

### A.1.3 Testes ANOVA e Análise post-hoc

Antes da aplicação dos testes ANOVA, faz-se uma representação dos factores segundo diagramas do tipo caixa. Na figura A.2 faz-se uma representação do factor *Num\_Grupos* segundo *Tipo\_de\_Posic*.

A observação do gráfico revela simetria. Além disso, sugere comportamentos diferenciados na variável *Num\_Grupos*, em que os valores mais baixos

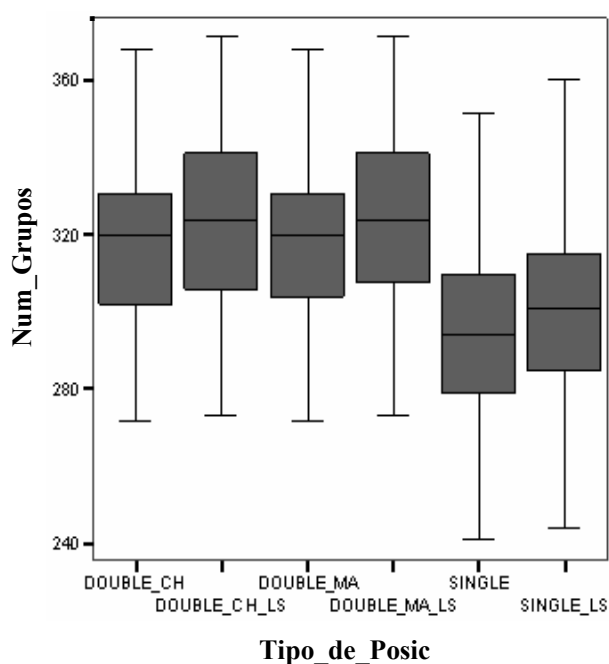


Figura A.2: Variável *Num\_Grupos* versus *Tipo\_de\_Posic*

correspondem ao tipo de posicionamento periódico Simples e os valores mais altos correspondem ao tipo Duplo com pesquisa local (idem MA ou CH)

Na figura A.3 faz-se uma representação do factor *Num\_Grupos* segundo *Ordem\_do\_Grupo*.

Mais uma vez, a observação do gráfico revela simetria. No entanto, não é óbvio por simples visualização que haja comportamentos diferenciados na variável *Num\_Grupos*.

Procedendo aos testes estatísticos obtêm-se os resultados apresentados na tabela A.3.

Os resultados apresentados mostram que não é significativa a interacção entre os factores *Tipo\_de\_Posic* e *Ordem\_do\_Grupo* (o nível de significância é igual a 1 nas interacções entre os factores). No entanto, os resultados em termos dos efeitos principais mostram que cada um dos factores tem um efeito significativo na variável dependente *Num\_Grupos* (o nível de significância é igual a 0). O efeito conjunto dos dois factores pode ser interpretado a partir do gráfico da figura A.4.

O gráfico da figura A.4 revela inexistência de interacção entre os factores



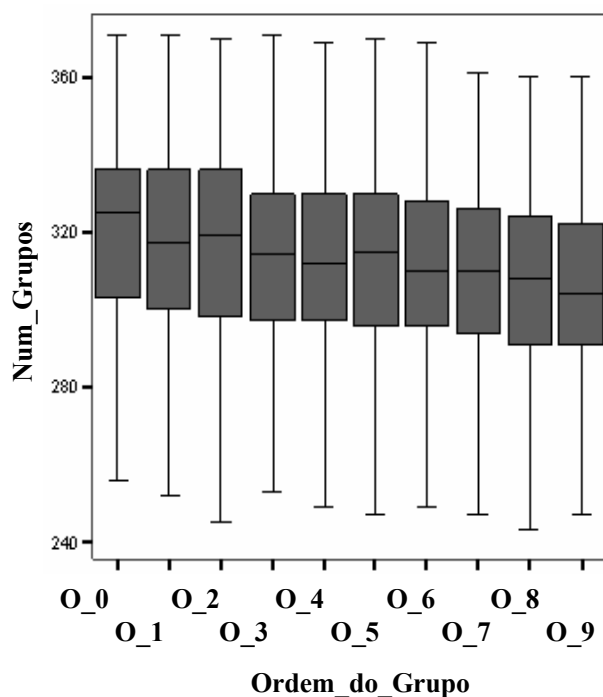
Figura A.3: Variável *Num\_Grupos* versus *Ordem\_do\_Grupo*

Tabela A.3: Tabela ANOVA

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	1792093.988 (a)	59	30374.474	72.803	0.000
Intercept	1223182773.350	1	1223182773.350	2931779.096	0.000
Ordem_do_Grupo	201026.657	9	22336.295	53.537	0.000
Tipo_Posic	1586403.993	5	317280.799	760.473	0.000
Ordem_do_Grupo * Tipo_Posic	4663.337	45	103.630	0.248	1.000
Error	5181812.663	12420	417.215		
Total	1230156680.000	12480			
Corrected Total	6973906.651	12479			

(a) R Squared = 0.257 (Adjusted R Squared = 0.253)

*Tipo\_de\_Posic* e *Ordem\_do\_Grupo*, devido ao facto de as linhas serem praticamente paralelas. Além disso, pode ver-se que as curvas referentes aos critérios DOUBLE.CH e DOUBLE.MA são praticamente coincidentes (mal se vêem no gráfico, por estarem quase sobrepostas), o mesmo acontecendo com as curvas DOUBLE.CH\_LS e DOUBLE.MA\_LS (idem). Isto significa que a aplicação de um ou outro critério é indiferente, ou seja, o critério

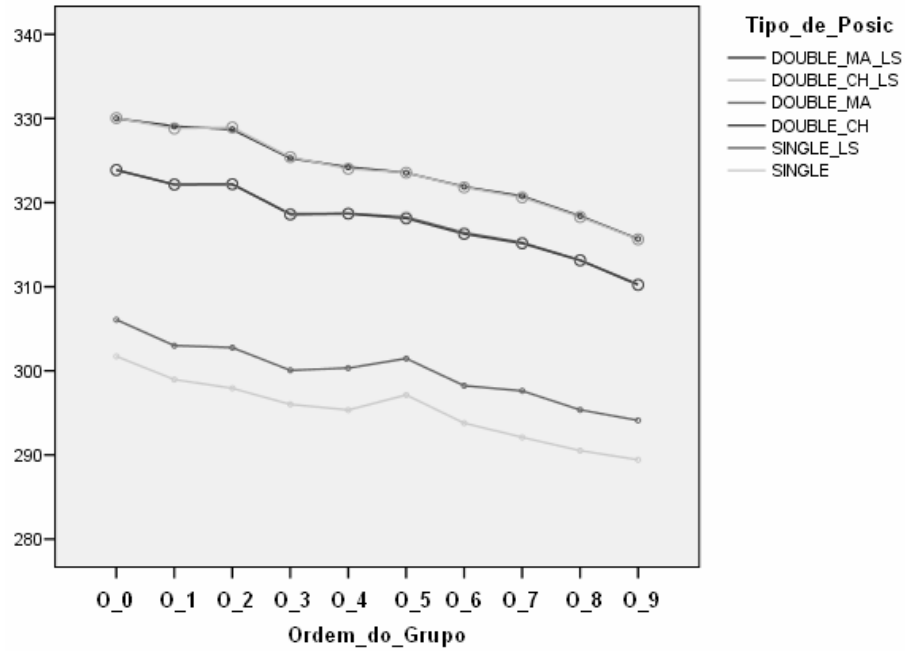


Figura A.4: Efeito conjunto dos dois factores na variável dependente

“\_CH” (minimização da área da envolvente convexa) criado neste capítulo para a junção da mega-figura no posicionamento periódico duplo não veio acrescentar qualquer valor.

### Análise dos efeitos dos factores

Como há evidência estatística em como não existe interação entre os dois factores *Tipo\_de\_Posic* e *Ordem\_do\_Grupo* mas que os efeitos destes factores na variável dependente *Num\_Grupos* são significativos, interessa distinguir concretamente entre níveis diferentes de cada factor. Para isso, estudou-se quais os níveis de cada factor que são significativamente diferentes, aplicando os testes de comparações múltiplas de Tukey HSD a cada um dos factores.

Na tabela A.4 identifica-se o tipo de posicionamento DOUBLE\_MA\_LS como permitindo obter um valor significativamente superior da variável dependente (*Num\_Grupos*) relativamente aos tipos de posicionamento DOUBLE\_CH, DOUBLE\_MA, SINGLE e SINGLE\_LS. Estas diferenças são estatisticamente significativas, podendo observar-se não só pelo nível de significância associado aos testes (sig=0) como ainda pelo facto de o intervalo de

Tabela A.4: Comparação entre níveis do factor *Angulos*

(I) Tipo de_Posic	(J) Tipo de_Posic	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Upper Bound	Lower Bound
DOUBLE_CH	DOUBLE_CH_LS	-5.874 (*)	0.644	0.000	-7.71	-4.04
	DOUBLE_MA	-0.065	0.644	1.000	-1.90	1.77
	DOUBLE_MA_LS	-5.918 (*)	0.644	0.000	-7.75	-4.08
	SINGLE	22.540 (*)	0.644	0.000	20.70	24.38
	SINGLE_LS	17.932 (*)	0.644	0.000	16.10	19.77
DOUBLE_CH_LS	DOUBLE_CH	5.874 (*)	0.644	0.000	4.04	7.71
	DOUBLE_MA	5.809 (*)	0.644	0.000	3.97	7.65
	DOUBLE_MA_LS	-.044	0.644	1.000	-1.88	1.79
	SINGLE	28.414 (*)	0.644	0.000	26.58	30.25
	SINGLE_LS	23.806 (*)	0.644	0.000	21.97	25.64
DOUBLE_MA	DOUBLE_CH	0.065	0.644	1.000	-1.77	1.90
	DOUBLE_CH_LS	-5.809 (*)	0.644	0.000	-7.65	-3.97
	DOUBLE_MA_LS	-5.853 (*)	0.644	0.000	-7.69	-4.02
	SINGLE	22.605 (*)	0.644	0.000	20.77	24.44
	SINGLE_LS	17.997 (*)	0.644	0.000	16.16	19.83
DOUBLE_MA_LS	DOUBLE_CH	5.918 (*)	0.644	0.000	4.08	7.75
	DOUBLE_CH_LS	0.044	0.644	1.000	-1.79	1.88
	DOUBLE_MA	5.853 (*)	0.644	0.000	4.02	7.69
	SINGLE	28.459 (*)	0.644	0.000	26.62	30.30
	SINGLE_LS	23.850 (*)	0.644	0.000	22.01	25.69
SINGLE	DOUBLE_CH	-22.540 (*)	0.644	0.000	-24.38	-20.70
	DOUBLE_CH_LS	-28.414	0.644	0.000	-30.25	-26.58
	DOUBLE_MA	-22.605 (*)	0.644	0.000	-24.44	-20.77
	DOUBLE_MA_LS	-28.459 (*)	0.644	0.000	-30.30	-26.62
	SINGLE_LS	-4.608 (*)	0.644	0.000	-6.44	-2.77
SINGLE_LS	DOUBLE_CH	-17.932 (*)	0.644	0.000	-19.77	-16.10
	DOUBLE_CH_LS	-23.806 (*)	0.644	1.000	-25.64	-21.97
	DOUBLE_MA	-17.997 (*)	0.644	0.000	-19.83	-16.16
	DOUBLE_MA_LS	-23.850 (*)	0.644	0.000	-25.69	-22.01
	SINGLE	4,608 (*)	0.644	0.000	2.77	6.44

(\*) The mean difference is significant at the 0.05 level

confiança a 95% não conter o valor zero, o que corresponde a não se verificar a igualdade das médias. No entanto, não se considera significativamente diferente do tipo de posicionamento DOUBLE\_CH\_LS (sig=1.00).

Por outro lado, é também possível concluir que o facto de ser feita uma pesquisa local (\_LS) após a aplicação da heurística de posicionamento, melhora sempre os resultados. Os testes de Tukey HSD identificam ainda o tipo de posicionamento SINGLE como tendo um valor significativamente inferior da variável *Num\_Grupos* relativamente a qualquer um dos outros tipos de posicionamento. Nas tabelas A.5 a A.7 indicam-se os resultados dos testes

comparativos entre os vários níveis do factor *Ordem\_do\_Grupo*.

Tabela A.5: Comparação entre níveis do factor *Ordem\_do\_Grupo*

(I) Ordem do_Grupo	(J) Ordem do_Grupo	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Upper Bound	Lower Bound
O_0	O_1	1.913	0.933	0.563	-1.04	4.87
	O_2	2.157	0.933	0.381	-0.80	5.11
	O_3	5.267 (*)	0.933	0.000	2.31	8.22
	O_4	5.716 (*)	0.933	0.000	2.76	8.67
	O_5	5.583 (*)	0.933	0.000	2.63	8.54
	O_6	7.869 (*)	0.933	0.000	4.92	10.82
	O_7	9.020 (*)	0.933	0.000	6.07	11.97
	O_8	11.123 (*)	0.933	0.000	8.17	14.08
	O_9	13.373 (*)	0.933	0.000	10.42	16.33
O_1	O_0	-1.913	0.933	0.563	-4.87	1.04
	O_2	0.244	0.933	1.000	-2.71	3.20
	O_3	3.353 (*)	0.933	0.012	0.40	6.31
	O_4	3.803 (*)	0.933	0.002	0.85	6.76
	O_5	3.670 (*)	0.933	0.003	0.72	6.72
	O_6	5.955 (*)	0.933	0.000	3.00	8.91
	O_7	7.107 (*)	0.933	0.000	4.15	10.06
	O_8	9.210 (*)	0.933	0.000	6.26	12.16
	O_9	11.460 (*)	0.933	0.000	8.51	14.41
O_2	O_0	-2.157	0.933	0.381	-5.11	0.80
	O_1	-0.244	0.933	1.000	-3.20	2.71
	O_3	3.110 (*)	0.933	.029	0.16	6.06
	O_4	3.559 (*)	0.933	0.005	0.61	6.51
	O_5	3.426 (*)	0.933	0.009	0.47	6.38
	O_6	5.712 (*)	0.933	0.000	2.76	8.66
	O_7	6.863 (*)	0.933	0.000	3.91	9.82
	O_8	8.966 (*)	0.933	0.000	6.01	11.92
	O_9	11.216 (*)	0.933	0.000	8.26	14.17
O_3	O_0	-5.267 (*)	0.933	.000	-8.22	-2.31
	O_1	-3.353 (*)	0.933	.012	-6.31	-.40
	O_2	-3.110 (*)	0.933	.029	-6.06	-.16
	O_4	.450	0.933	1.000	-2.50	3.40
	O_5	.317	0.933	1.000	-2.64	3.27
	O_6	2.602	0.933	.140	-.35	5.55
	O_7	3.753 (*)	0.933	.002	.80	6.71
	O_8	5.857 (*)	0.933	.000	2.90	8.81
	O_9	8.107 (*)	0.933	.000	5.15	11.06

(\*) The mean difference is significant at the 0.05 level

Os testes de Tukey HSD identificam as ordens O\_0, O\_1 e O\_2 do grupo como tendo um valor significativamente superior da variável dependente (*Num\_Grupos*), relativamente às ordens  $\geq 3$ . Porém, embora o melhor grupo formado (O\_0) conduza normalmente a melhores resultados finais de posici-

Tabela A.6: Comparação entre níveis do factor *Ordem\_do\_Grupo*

(I) Ordem do_Grupo	(J) Ordem do_Grupo	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Upper Bound	Lower Bound
O_4	O_0	-5.716 (*)	0.933	.000	-8.67	-2.76
	O_1	-3.803 (*)	0.933	.002	-6.76	-.85
	O_2	-3.559 (*)	0.933	.005	-6.51	-.61
	O_3	-.450	0.933	1.000	-3.40	2.50
	O_5	-.133	0.933	1.000	-3.09	2.82
	O_6	2.152	0.933	.384	-.80	5.10
	O_7	3.304 (*)	0.933	.015	.35	6.26
	O_8	5.407 (*)	0.933	.000	2.45	8.36
	O_9	7.657 (*)	0.933	.000	4.70	10.61
O_5	O_0	-5.583 (*)	0.933	0.000	-8.54	-2.63
	O_1	-3.670 (*)	0.933	0.003	-6.62	-.72
	O_2	-3.426 (*)	0.933	0.009	-6.38	-.47
	O_3	-0.317	0.933	1.000	-3.27	2.64
	O_4	0.133	0.933	1.000	-2.82	3.09
	O_6	2.285	0.933	0.297	-.67	5.24
	O_7	3.437 (*)	0.933	0.009	.48	6.39
	O_8	5.540 (*)	0.933	0.000	2.59	8.49
	O_9	7.790 (*)	0.933	0.000	4.84	10.74
O_6	O_0	-7.869 (*)	0.933	0.000	-10.82	-4.92
	O_1	-5.955 (*)	0.933	0.000	-8.91	-3.00
	O_2	-5.712 (*)	0.933	0.000	-8.66	-2.76
	O_3	-2.602	0.933	0.140	-5.55	.35
	O_4	-2.152	0.933	0.384	-5.10	.80
	O_5	-2.285	0.933	0.297	-5.24	.67
	O_7	1.151	0.933	0.967	-1.80	4.10
	O_8	3.255 (*)	0.933	0.018	.30	6.21
	O_9	5.505 (*)	0.933	0.000	2.55	8.46

(\*) The mean difference is significant at the 0.05 level

onamento, esta ordem não pode ser considerada significativamente diferente das ordens de O\_1 e O\_2. Esta conclusão é bastante importante, conquanto é possível eliminar alguns grupos de entre os 10 que se decidiu guardar, mas não é conveniente ficar apenas com o melhor de todos, O\_0.

#### A.1.4 Discussão de resultados

Os testes estatísticos revelaram a inexistência de interacção entre os factores em estudo, *Tipo\_de\_Posic* e *Ordem\_do\_Grupo*. No entanto, cada um dos factores tem um efeito significativo na variável dependente *Num\_Grupos*. Através dos testes de Tukey HSD, foi possível concluir que:

- Os níveis DOUBLE\_MA\_LS e DOUBLE\_CH\_LS do factor *Tipo\_de\_Posic*

Tabela A.7: Comparação entre níveis do factor *Ordem\_do\_Grupo*

(I) Ordem do_Grupo	(J) Ordem do_Grupo	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Upper Bound	Lower Bound
O_7	O_0	-9.020 (*)	0.933	0.000	-11.97	-6.07
	O_1	-7.107 (*)	0.933	0.000	-10.06	-4.15
	O_2	-6.863 (*)	0.933	0.000	-9.82	-3.91
	O_3	-3.753 (*)	0.933	0.002	-6.71	-.80
	O_4	-3.304 (*)	0.933	0.015	-6.26	-.35
	O_5	-3.437 (*)	0.933	0.009	-6.39	-.48
	O_6	-1.151	0.933	0.967	-4.10	1.80
	O_8	2.103	0.933	0.419	-.85	5.06
	O_9	4.353 (*)	0.933	0.000	1.40	7.31
O_8	O_0	-11.123 (*)	0.933	0.000	-14.08	-8.17
	O_1	-9.210 (*)	0.933	0.000	-12.16	-6.26
	O_2	-8.966 (*)	0.933	0.000	-11.92	-6.01
	O_3	-5.857 (*)	0.933	0.000	-8.81	-2.90
	O_4	-5.407 (*)	0.933	0.000	-8.36	-2.45
	O_5	-5.540 (*)	0.933	0.000	-8.49	-2.59
	O_6	-3.255 (*)	0.933	0.018	-6.21	-.30
	O_7	-2.103	0.933	0.419	-5.06	.85
	O_9	2.250	0.933	0.319	-.70	5.20
O_9	O_0	-13.373 (*)	0.933	0.000	-16.33	-10.42
	O_1	-11.460 (*)	0.933	0.000	-14.41	-8.51
	O_2	-11.216 (*)	0.933	0.00	-14.17	-8.26
	O_3	-8.107 (*)	0.933	0.000	-11.06	-5.15
	O_4	-7.657 (*)	0.933	0.000	-10.61	-4.70
	O_5	-7.790 (*)	0.933	0.000	-10.74	-4.84
	O_6	-5.505 (*)	0.933	0.000	-8.46	-2.55
	O_7	-4.353 (*)	0.933	0.000	-7.31	-1.40
	O_8	-2.250	0.933	0.319	-5.20	.70

(\*) The mean difference is significant at the 0.05 level

são estatisticamente equivalentes, revelando-se significativamente melhores do que os restantes;

- Os níveis DOUBLE\_MA e DOUBLE\_CH do factor *Tipo\_de\_Posic* são estatisticamente equivalentes, revelando-se significativamente melhores do que SINGLE e SINGLE\_LS;
- Os níveis O\_0, O\_1 e O\_2 dos grupos ordenados apresentam um valor significativamente superior da variável dependente (*Num\_Grupos*), comparativamente aos restantes;
- Não há evidência estatística quanto à diferença entre os níveis O\_0, O\_1 ou O\_2.

A análise dos resultados dos testes efectuados veio ainda reforçar as decisões tomadas no capítulo 4.

Relativamente aos testes finais a realizar no capítulo 5, usarão, apenas, duas regras de posicionamento: DOUBLE\_MA\_LS e SINGLE\_LS. A primeira, naturalmente por se ter revelado estatisticamente superior a quatro das restantes e não haver diferença que justifique a utilização de DOUBLE\_CH\_LS. A segunda, porque poderá ter interesse a nível tecnológico um posicionamento em que todas as figuras mantenham a mesma orientação.

## A.2 Segundo conjunto de experiências

O segundo conjunto de experiências pretende estudar a influência dos factores intervenientes no primeiro módulo. No total, após conjugação de todos os factores envolvidos na execução do algoritmo PPM, dispõe-se de 12480 observações. As observações foram separadas nos 6 níveis do factor *Tipo\_de\_Posic*, uma vez que se concluiu na secção anterior que há diferenças significativas entre eles. Por esse motivo, vão ser analisados separadamente os casos relativos a cada um dos critérios DOUBLE\_MA\_LS, DOUBLE\_CH\_LS, DOUBLE\_MA, DOUBLE\_CH, SINGLE\_LS e SINGLE. Serão aqui apresentados os testes efectuados ao primeiro DOUBLE\_MA\_LS, sendo os restantes testes realizados da mesma forma.

### A.2.1 Estrutura das experiências

Pretende-se analisar o efeito dos factores *Angulos*, *Pontos\_Candidatos* e *Avaliação\_Grupo* na variável dependente *Num\_Grupos*, testando se as médias da variável dependente em cada combinação dos níveis dos factores são ou não estatisticamente iguais. Trata-se de uma Análise de Variância para três factores com efeitos fixos.

Os níveis do factor *Angulos* são 4: 0°, 45°, 90°, 180°.

Os níveis do factor *Pontos\_Candidatos* são 2: MIN\_AREA e MIN\_AREA\_CH.

Os níveis do factor *Avaliacao\_Grupo* são 2: valor\_CH e valor\_MG.

### A.2.2 Verificação dos pressupostos

Antes de se aplicar testes ANOVA ao conjunto de observações, é necessário verificar os pressupostos de que as observações dentro de cada célula são

independentes e que provêm de uma amostra aleatória da população cuja distribuição é normal, sendo as variâncias das células iguais na população.

Tabela A.8: Teste à normalidade dos dados

	Kolmogorov-Smirnov (a)		
	Statistic	df	Sig.
Resíduos	0.068	48	0.200

(a) Lilliefors Significance Correction

A análise da normalidade das observações faz-se usando os resíduos, pelo que, da análise da tabela A.8, se observa que o pressuposto da normalidade é verificado (sig.=0.2).

Testou-se então a homogeneidade das variâncias das células, por aplicação do teste de Levene (A.9).

Tabela A.9: Teste à homogeneidade das variâncias das células

F	df1	df2	Sig.
2.535	15	32	0.013

Observa-se que não é possível rejeitar o pressuposto da igualdade das variâncias (homocedasticidade) a um nível de Significância de 1% (sig=0.013 no teste).

### A.2.3 Testes ANOVA e Análise post-hoc

Procedendo aos testes estatísticos obtêm-se os resultados apresentados na tabela A.13.

Os resultados apresentados mostram que não são significativas as interações entre os factores. Permitem, ainda, concluir que o efeito de *Pontos\_Candidatos* não é significativo, pelo que eliminamos este factor.

Para a realização de novos testes, considerando agora apenas a existência dos dois factores *Angulos* e *Avaliacao\_Grupo*, é necessário repetir a verificação dos pressupostos quanto à normalidade das observações e igualdade das variâncias.

#### Verificação dos pressupostos

A análise da normalidade das observações faz-se usando os resíduos, pelo que, da análise da tabela A.11, se observa que o pressuposto da normalidade



Tabela A.10: Tabela ANOVA

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	9966.813 (a)	15	664.454	3.553	0.001
Intercept	5335333.521	1	5335333.521	28528.017	0.000
<i>Angulos</i>	1299.396	3	433.132	2.316	0.094
<i>Avaliacao_Grupo</i>	7227.521	1	7227.521	38.646	0.000
<i>Pontos_Candidatos</i>	46.021	1	46.021	0.246	0.623
<i>Angulos * Avaliacao_Grupo</i>	890.396	3	296.799	1.587	0.212
<i>Angulos * Pontos_Candidatos</i>	191.229	3	63.743	0.341	0.796
<i>Avaliacao_Grupo * Pontos_Candidatos</i>	28.521	1	28.521	0.153	0.699
<i>Angulos * Av_Grupo * Pontos_Cand</i>	283.729	3	94.576	0.506	0.681
Error	5984.667	32	187.021		
Total	5351285.000	48			
Corrected Total	15951.479	47			

(a) R Squared = 0.625 (Adjusted R Squared = 0.449)

Tabela A.11: Teste à normalidade dos dados

	Kolmogorov-Smirnov (a)		
	Statistic	df	Sig.
Resíduos	0.085	48	0.200

(a) Lilliefors Significance Correction

é verificado (sig=0.2).

Testou-se então a homogeneidade das variâncias das células, por aplicação do teste de Levene (A.12).

Tabela A.12: Teste à homogeneidade das variâncias das células

F	df1	df2	Sig.
1.140	7	40	0.358

Verifica-se o pressuposto da igualdade das variâncias (homocedasticidade) a um nível de Significância de 5% (sig=0.358 no teste).

Os resultados apresentados mostram que a interação entre os factores *Angulos* e *Avaliacao\_Grupo* não é significativa (sig = 0.160).

### Análise dos efeitos dos factores

Na tabela seguinte estudou-se quais os níveis do factor *Angulos* que são significativamente diferentes, aplicando os testes de comparações múltiplas de Tukey HSD a cada um dos factores.

Tabela A.13: Tabela ANOVA

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	9417.313 (a)	7	1345.330	8.236	0.000
Intercept	5335333.521	1	5335333.521	32661.141	0.000
<i>Angulos</i>	1299.396	3	433.132	2.651	0.062
<i>Avaliacao_Grupo</i>	7227.521	1	7227.521	44.244	0.000
<i>Angulos * Avaliacao_Grupo</i>	890.396	3	296.799	1.817	0.160
Error	6534.167	40	187.021		
Total	5351285.000	48			
Corrected Total	15951.479	47			

(a) R Squared = 0.590 (Adjusted R Squared = 0.519)

Tabela A.14: Comparação entre níveis do factor *Tipo\_de\_Posic*

(I) Angulo	(J) Angulo	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.
0°	45°	-10.25	5.218	0.218
	90°	2.58	5.218	0.960
	180°	2.08	5.218	0.978
45°	0°	10.25	5.218	0.218
	90°	12.83 (*)	5.218	0.082
	180°	12.33	5.218	0.101
90°	0°	-2.58	5.218	0.960
	45°	-12.83 (*)	5.218	0.082
	180°	-0.5	5.218	1.000
180°	0°	-2.08	5.218	0.978
	45°	-12.33	5.218	0.101
	90°	0.5	5.218	1.000

(\*) The mean difference is significant at the 0.10 level

Na tabela A.14 identifica-se a consideração de ângulos de 45° como sendo significativamente diferente apenas do caso em que são considerados ângulos de 90° e para um nível de significância de 10%.

Quanto ao outro factor em análise, *Avaliacao\_Grupo*, composto apenas por dois níveis, pode dizer-se que valor\_CH apresenta resultados significativamente diferentes (melhores) que valor\_MG.

#### A.2.4 Discussão de resultados

Há alguma diferença, pouco significativa entre dois dos ângulos do nível *Angulos*. No entanto, embora não tendo sido aqui apresentados os outros cinco estudos realizados, para os restantes níveis do factor *Tipo\_Posic*, essa

análise revelou que, consoante o caso, as conclusões sobre os efeitos do ângulo na variável dependente *Num\_Grupos* não são sempre as mesmas, dependem do tipo de posicionamento considerado. Como tal, e pensando que a partir do estudo de uma única instância se está a extrapolar para o estudo de um conjunto mais alargado de instâncias, decidiu-se que todos os ângulos seriam testados.

No respeitante à influência do factor *Avaliacao\_Grupo*, concluiu-se que *valor\_CH* apresenta resultados na variável dependente *Num\_Grupos* significativamente melhores do que *valor\_MG*, pelo que apenas este critério será utilizado nos testes finais.



# Referências

- M. Adamowicz e A. Albano. A two-stage solution of the cutting-stock problem. In *Information Processing Proceedings 71*, volume 2, páginas 1086–1091, 1972.
- M. Adamowicz e A. Albano. Nesting two-dimensional shapes in rectangular modules. *Computer-Aided Design*, 8(1):27–33, 1976.
- A. Bouganis e M. Shanahan. A vision-based intelligent system for packing 2-d irregular shapes. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 4(3):382–394, 2007.
- S. K. Cheng e K. P. Rao. Quick and precise clustering of arbitrarily shaped flat patterns based on stringy effect. *Computers & Industrial Engineering*, 33(3-4):485–488, 1997.
- S. K. Cheng e K. P. Rao. Concepts of neighbourhood and universal compact yield towards achieving best pattern layouts. *International Journal of Production Research*, 37(16):3643–3658, 1999.
- S. K. Cheng e K. P. Rao. Large-scale nesting of irregular patterns using compact neighborhood algorithm. *Journal of Materials Processing Technology*, 103(1):135–140, 2000.
- D. Dori e M. Ben-Bassat. Circumscribing a convex polygon by a polygon of fewer sides with minimal area addition. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 21(3):131–159, 1983.
- D. Dori e M. Ben-Bassat. Efficient nesting of congruent convex figures. *Communications of the ACM*, 27(3):228–235, 1984.
- Y. Duparcmeur, A. Gervois e J. Troadec. Dense periodic packings of regular polygons. *Journal de Physique I*, 5(12):1539–1550, 1995.

- Y. Duparcmeur, J. Troadec e A. Gervois. Random close packings of regular polygons. *Journal de Physique I*, 7(10):1181–1189, 1997.
- ESICUP. EURO Special Interest Group on Cutting & Packing, . "http://www.fe.up.pt/esicup".
- H. Freeman e R. Shapira. Determining minimum-area encasing rectangle for an arbitrary closed curve. *Communications of the ACM*, 18(7):409–413, 1975.
- M. R. Garey e D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.
- A. M. Gomes. *Abordagens Heurísticas ao Posicionamento de Formas Irregulares*. Phd, Universidade do Porto, 2005.
- A. M. Gomes e J. F. Oliveira. A 2-exchange heuristic for nesting problems. *European Journal of Operational Research*, 141(2):359–370, 2002.
- R. B. Grinde e T. M. Cavalier. A new algorithm for the minimal-area convex enclosure problem. *European Journal of Operational Research*, 84(3):522–538, 1995.
- F. Koroupi e M. Loftus. Accommodating diverse shapes within hexagonal pavers. *International Journal of Production Research*, 29(8):1507–1519, 1991.
- G. Kuperberg e W. Kuperberg. Double-lattice packings of convex-bodies in the plane. *Discrete & Computational Geometry*, 5(1):389–397, 1990.
- H. Lamousin e W. N. Waggenspack Jr. Nesting of two dimensional irregular parts using a shape reasoning heuristic. *Computer-Aided Design*, 29(3):221–238, 1997.
- H. R. Lourenço, O. Martin e T. Stützle. Iterated local search. In F. Glover e G. Kochenberger, editores, *Handbook of Metaheuristics*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2002.
- K. Mahler. The theorem of Minkowski-Hlawka. *Duke Math. J.*, 13:611–621, 1946.

- V. Martynov. Geometrical objects regular placement onto a stock sheet or strip. *Pesquisa Operacional*, 19(2):211–222, 1999.
- V. J. Milenkovic. Densest translational lattice packing of non-convex polygons. *Computational Geometry*, 22(1-3):205–222, 2002.
- D. C. Montgomery. *Design and Analysis of Experiments, Sixth Edition*. John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2005.
- D. M. Mount. The densest double-lattice packing of a convex polygon. In *Discrete and Computational Geometry: Papers from the DIMACS Special Year*, volume 6, páginas 245–262. Amer. Math. Soc., 1991.
- D. M. Mount e R. Silverman. Packing and covering the plane with translates of a convex polygon. *Journal of Algorithms*, 11(4):564–580, 1990.
- B. K. Nielsen. An efficient solution method for relaxed variants of the nesting problem. In *Computing: The Australian Theory Symposium 2007*, volume 65. Conferences in Research and Practice in Information Technology (CRPIT), Australia, 2007.
- J. F. Oliveira. *Problemas de Posicionamento de Figuras Irregulares: uma perspectiva de otimização*. Phd, Universidade do Porto, 1995.
- J. F. Oliveira, A. M. Gomes e J. S. Ferreira. TOPOS — a new constructive algorithm for nesting problems. *OR Spectrum*, 22(2):263–284, 2000.
- Y. K. D. V. Prasad, S. Somasundaram e K. P. Rao. A sliding algorithm for optimal nesting of arbitrarily shaped sheet metal blanks. *International Journal of Production Research*, 33(6):1505–1520, 1995.
- C. A. Rogers. The closest packing of convex two-dimensional domains. *Acta Mathematica*, 86(1):309–321, 1964a.
- C. A. Rogers. *Packing and covering*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1964b.
- S. A. Segenreich. How to build a lattice nesting in any arbitrary direction. *Computers & Graphics*, 12(2):255–259, 1988.
- Y. G. Stoyan e A. V. Pankratov. Regular packing of congruent polygons on the rectangular sheet. *European Journal of Operational Research*, 113(3):653–675, 1999.

- Y. G. Stoyan e V. N. Patsuk. A method of optimal lattice packing of congruent oriented polygons in the plane. *European Journal of Operational Research*, 124(1):204–216, 2000.
- G. F. Tóth. Densest packings of typical convex sets are not lattice-like. *Discrete & Computational Geometry*, 14(1):1–8, 1995.
- L. F. Tóth. On the densest packing of domains. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 51:189–192, 1948.
- L. F. Tóth. Some packing and covering theorems. *Acta Sci. Math.*, 12/A:62–67, 1950.
- A. Uday, E. D. Goodman e A. A. Debnath. Nesting of irregular shapes using feature matching and parallel genetic algorithms. In *Late Breaking Papers at Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO 2001)*, páginas 429–434, 2001.
- G. Wäscher, H. Haußner e H. Schumann. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, 183(3):1109–1130, 2007.
- P. F. Whelan e B. G. Batchelor. Automated packing systems — a systems engineering approach. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part A — Systems and Humans*, 26(5):533–544, 1996.