

**Soluções analíticas e semi-analíticas de escoamentos
instacionários em meio confinado para fluidos newtonianos
generalizados**

Edgar Domingos Soeiro Neto

Relatório do Projecto Final / Dissertação do MIEM

Orientador: Professor Fernando Manuel Coutinho Tavares de Pinho



FEUP

**Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**

Julho 2010

Resumo

Neste trabalho são obtidas soluções analítico-numéricas de escoamentos instacionários entre placas paralelas para fluidos newtoniano e newtoniano generalizado. Para estes últimos a viscosidade é descrita pelos modelos de lei de potência e de Carreau. Uma das motivações deste trabalho está relacionada com o interesse em simular o comportamento de escoamentos de sangue. Apesar de o sangue não ser um fluido newtoniano, e de os vasos sanguíneos não serem condutas rígidas, em certos casos estas suposições podem ser realizadas mantendo sempre presente o domínio de aplicabilidade destes modelos servindo assim como ponto de partida para estudos futuros. O interesse primordial deste estudo reside na caracterização destes escoamentos e compreensão das diferenças existentes relativamente aos escoamentos estacionários. Compreender qual a influência das forças viscosas e das forças de inércia no escoamento e que parâmetros adimensionais podem ser utilizados para o descrever.

O modelo newtoniano é o primeiro caso estudado, obtendo-se a solução analítica para escoamento estacionário e instacionário. Estas soluções são usadas como forma de validar método numérico aplicado posteriormente, servindo também de referência para compreensão dos resultados obtidos com os restantes modelos.

Para o modelo lei de potência é obtida a solução analítica para o escoamento estacionário, sendo esta utilizada para normalizar os perfis de velocidade do escoamento instacionário. Quanto às simulações dos modelos lei de potência e Carreau é apenas estudado o caso de $n < 1$ ou seja, fluido reofluidificante.

Conclui-se com este trabalho que para forças de inércia pouco significativas, ou seja, número de Womersley muito inferior à unidade, os escoamentos apresentam um desfasamento reduzido e a velocidade máxima é praticamente igual à obtida para um escoamento de Poiseuille equivalente. Com o aumento das forças de inércia aumenta o desfasamento entre a velocidade e o gradiente de pressões, diminui consideravelmente a amplitude da velocidade e existe uma zona inicial em que o regime oscilatório não está completamente estabelecido. Estas propriedades verificam-se também para o modelo lei de potência e para o modelo de Carreau, referindo que estes modelos se transformam no modelo newtoniano para o caso particular de $n=1$. No modelo lei de potência verifica-se um maior desfasamento da velocidade para valores mais elevados do parâmetro n . O modelo de Carreau apresenta mais um número adimensional, o número de Carreau. Neste modelo para valores reduzidos do número de Womersley os escoamentos localizam-se no primeiro patamar newtoniano sendo os resultados idênticos aos obtidos para simulações com modelos newtonianos. Para valores do número de Womersley e do número de Carreau muito elevados o comportamento é predominantemente definido pela zona lei de potência. Para valores intermédios do número de Womersley e do número de Carreau verifica-se um comportamento de transição.

Abstract

Analytical-numerical solutions for unsteady flow of Newtonian and Generalized Newtonian fluids, in particular using the Carreau and the Power law model, through two parallel plates are obtained in this thesis. One of the motivations of this work is related with the interest in simulate the blood flow behavior. Although the blood doesn't have a constant value of viscosity like Newtonian fluids, and the blood vessel is not a rigid duct, in some cases this assumption may be done. In other cases the effect of the tube elasticity and the non-Newtonian behavior of the blood must be recognized. The applicability domain of those models is limited, but gives some knowledge to future investigations. The main interest of this study consists on the characterization of those flows and the understanding of the differences between the steady and unsteady flows. Comprehend how the viscous and inertial forces influence the flow and what dimensionless numbers can be used to describe it.

An analytical solution is obtained for the Newtonian model for steady and unsteady flow. Those solutions are used to compare the results of the analytical and numerical simulations and are used to understand the results obtained with the other models.

For steady flow of Power Law fluid we obtain an analytical solution, this solution is used to normalize the velocity profiles of the unsteady flow. If $n < 1$, the fluid is said to be "pseudoplastic" or "shear thinning", and if $n > 1$, the fluid is called "dilatant" or "shear thickening". The numeric simulations carried out in this thesis with Power law and Carreau models only study the case of $n < 1$.

We can conclude with this work that the inertial forces are insignificant when the Womersley number is much less than the unity. When the Womersley number is increased, the velocity lags behind the pressure difference by a fixed phase angle, and its amplitude is lower than it would be in the absence of inertial effects. For high values of Womersley number the flow begins with a transient period in which it attempts to satisfy the pressure difference, but it never does. Instead, a steady state is reached in which the velocity oscillates with the same frequency as the pressure difference driving the flow. The behavior shown above also occurs with the Power Law and Carreau models, in fact, those models become the Newtonian model when $n=1$. In the numeric simulations with Power Law model and with the same Womersley number, the results show that the difference angle between the velocity and the pressure difference is higher when the power law index (n) is increased. In the Carreau model simulation is present another dimensionless number called Carreau number. For low values of Carreau and Womersley numbers the fluid behavior is localized in the upper Newtonian region and the results are identical to those that are obtained with the Newtonian model simulations. For high values of Carreau and Womersley numbers the fluid behavior is essentially defined by Power Law behavior. For intermediate values of Carreau and Womersley numbers the flow has a transitional behavior.

Agradecimentos

Gostaria de manifestar os meus profundos agradecimentos a todos os que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. Um especial reconhecimento ao orientador Fernando Manuel Coutinho Tavares de Pinho pelo empenho e apoio prestado ao longo dos meses de trabalho dando um contributo fundamental para a realização desta tese.

Representando este trabalho não apenas o final de uma etapa mas o culminar de cinco anos de curso, gostaria de agradecer à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, pelas condições excelentes que proporcionou tal como a disponibilidade de uma boa biblioteca e recursos informáticos e agradecer também a todos os professores que me acompanharam ao longo deste período contribuindo para a minha formação académica.

Por fim, reconhecer o apoio da minha Mãe e irmãos, aqueles que sempre acreditaram que eu era capaz, pelo apoio incondicional e motivação e pelo porto de abrigo que representam. Agradecer também aos meus padrinhos, por estarem sempre presentes ao longo destes anos.

Índice

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	vii
Índice de figuras	xi
Lista de símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Enquadramento e Objectivos	1
1.2 Reologia	2
1.3 Características gerais dos fluidos	4
1.4 Estrutura da tese	5
2 Revisão bibliográfica	7
2.1 Introdução	7
2.2 Forças de inércia e forças viscosas	8
2.3 Efeito da pulsação	9
3 Equações fundamentais	13
3.1 Considerações preliminares	13
3.1.1 Equação diferencial de Conservação da Massa	14
3.1.2 Equação diferencial da quantidade de movimento	16
3.2 Modelo newtoniano generalizado	17
4 Estudo analítico-numérico	21
4.1 Caso de estudo	21
4.2 Método numérico para solução da equação diferencial	25
4.2.1 Programa utilizado	25
4.2.2 Condições de fronteira	27
4.2.3 Efeito do refinamento	28
5 Validação do cálculo	33
5.1 Soluções analíticas	33
5.1.1 Escoamento oscilatório e pulsado de fluido newtoniano	34
5.1.2 Escoamento estacionário de fluido segundo a lei de potência	39
5.2 Validação por comparação entre resultados numéricos e analíticos	42
6 Resultados	45
6.1 Fluido newtoniano	45
6.1.1 Escoamento oscilatório	45
6.1.2 Escoamento pulsado	53
6.2 Fluido de lei de potência	55
6.2.1 Escoamento estacionário (Poiseuille)	55
6.2.2 Escoamento oscilatório	62
6.3 Fluido de Carreau	69
7 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	75
7.1 Conclusões	75
7.2 Sugestões para trabalhos futuros	77
Referências bibliográficas	79
	ix

Índice de figuras

Figura 1: Influência da inércia na variação do caudal ao longo do tempo para um escoamento oscilatório.	12
Figura 2: Componentes das tensões que actuam nas faces de um volume de controlo.	14
Figura 3: Curva típica de um fluido reofluidificante, adaptado de barnes (2000).	19
Figura 4: Representação esquemática da geometria onde ocorre o escoamento, coordenadas cartesianas.	21
Figura 5: Evolução com o tempo da velocidade no eixo para fluido newtoniano com espaçamento de malha $\Delta y^* = 0,01$ e $\Delta t^* = (0,1; 0,05; 0,01; 0,005)$	28
Figura 6: Perfis de velocidade para fluido newtoniano com $t^* = 0,25$, espaçamento de malha $\Delta y^* = 0,01$ e $\Delta t^* = (0,1; 0,05; 0,01; 0,005)$	29
Figura 7: Evolução com o tempo da velocidade no eixo para fluido newtoniano com espaçamento de malha $\Delta y^* = 0,01$; $\Delta t^* = 0,01$ e $\Delta t^* = 0,005$	29
Figura 8: Evolução com o tempo da velocidade no eixo para fluido newtoniano com espaçamento de malha $\Delta t^* = 0,01$ e $\Delta y^* = (0,4; 0,1; 0,04)$	30
Figura 9: Perfis de velocidades para fluido newtoniano com $t^* = 0,25$ e espaçamentos de malha $\Delta t^* = 0,01$ e $\Delta y^* = (0,4; 0,1; 0,04)$	30
Figura 10: Evolução com o tempo da velocidade no eixo para fluido de lei de potência com $n = 0,5$ e espaçamento de malha $\Delta t^* = 0,01$ e $\Delta y^* = (0,4; 0,1; 0,04)$	31
Figura 11: Solução analítica do perfil de velocidade para escoamento estacionário de fluido newtoniano com $\alpha = 0,5$	36
Figura 12: Solução analítica da variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento pulsado de fluido newtoniano com $k_s = k_0$ e $\alpha = 0,5$	39
Figura 13: Solução analítica do perfil de velocidade para escoamento pulsado de fluido newtoniano com $k_s = k_0$, $\alpha = 0,5$ e $t^* = 0,26$	39
Figura 14: Solução analítica dos perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c = 0,5$ e diferentes valores de n	42
Figura 15: Soluções analíticas e numéricas com fluido newtoniano para a velocidade no eixo, variando o número de womersley. Espaçamento de malha $\Delta t^* = 0,01$ e $\Delta y^* = 0,01$	42
Figura 16: Soluções analíticas e numéricas com fluido newtoniano para os perfis de velocidade, variando o número de womersley e com $t^* = 31,25$. Espaçamento de malha $\Delta t^* = 0,01$ e $\Delta y^* = 0,01$	43
Figura 17: Soluções analíticas e numéricas com fluido newtoniano para a velocidade no eixo, variando o número de womersley. Espaçamento de malha $\Delta t^* = 0,1$ e $\Delta y^* = 0,1$	44
Figura 18: Soluções analíticas e numéricas para a velocidade no eixo para escoamento pulsado de fluido newtoniano, $\alpha = 0,5$. Espaçamento de malha $\Delta t^* = 0,01$ e $\Delta y^* = 0,01$	44
Figura 19: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $\alpha = 0,5$	46
Figura 20: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano em função de α	46
Figura 21: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com diferentes valores de α	47
Figura 22: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $\alpha = 5$	47
Figura 23: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $\alpha = 10$	48
Figura 24: Perfis de velocidade normalizada para diferentes instantes de tempo e $\alpha = 2$	49
Figura 25: Perfis de velocidade normalizada para diferentes valores de α , $t^* = 60,25$	50

Figura 26: Variação com o tempo da tensão junto à parede para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $\alpha=0,5$	50
Figura 27: Variação com o tempo da tensão normalizada junto à parede para escoamento oscilatório de fluido newtoniano em função de α	51
Figura 28: Perfis de tensão normalizada para escoamento oscilatório de fluido newtoniano em diferentes instantes de tempo e $\alpha=0,5$	52
Figura 29: Perfis de tensão normalizada para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $t^*=[5,9; 6,4]$ e $\alpha=2$	52
Figura 30: Perfis de tensão normalizada para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $t^*=[6,4; 6,9]$ e $\alpha=2$	53
Figura 31: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento pulsado de fluido newtoniano em função de α	54
Figura 32: Variação no tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento pulsado de fluido newtoniano com diferentes valores de α e $k_0=2ks$	55
Figura 33: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,85$ e diferentes valores de n	56
Figura 34: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação, para $\alpha_c=0,85$ e diferentes valores de n	57
Figura 35: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$ e diferentes valores de n	57
Figura 36: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação, para $\alpha_c=3$ e diferentes valores de n	58
Figura 37: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=5$ e diferentes.....	58
Figura 38: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação, para $\alpha_c=5$ e diferentes valores de n	59
Figura 39: Perfis de velocidade normalizada para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,85$ e diferentes valores de n	60
Figura 40: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,8$ e $n=0,5$; $\alpha_c=0,636538$ e $n=0,6$; $\alpha_c=0,506476$ e $n=0,7$	60
Figura 41: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação para diferentes valores de α_c	61
Figura 42: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,8$ e $n=0,5$; $\alpha_c=0,6215479$ e $n=0,6$; $\alpha_c=0,482513$ e $n=0,7$	61
Figura 43: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação para diferentes valores de α_c	62
Figura 44: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,2$ e diferentes valores de n . ($t^*=0,25$).....	63
Figura 45: Perfis de velocidade normalizada para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,2$ e diferentes valores de n . ($t^*=0,25$).....	63
Figura 46: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,2$	64
Figura 47: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,2$	64
Figura 48: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$ e diferentes valores de n . ($t^*=10,5$).....	65
Figura 49: Perfis de velocidade normalizada para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$ e diferentes valores de n . ($t^*=10,5$).....	65
Figura 50: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$	66
Figura 51: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$	66

Figura 52: Perfis de velocidade normalizada para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=5$ e diferentes valores de n . ($t^*=10,5$).....	67
Figura 53: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=5$	68
Figura 54: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido lei de potência com $\alpha_c=5$, regime oscilatório completamente estabelecido.	68
Figura 55: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=0,1$, $cu=1$ e diferentes valores de n . ($t^*=0,25$)	69
Figura 56: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=0,1$, $cu=1$	69
Figura 57: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=0,1$, $cu=1$	70
Figura 58: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação para $\alpha_c=0,1$, $cu=1$ e diferentes valores de n	70
Figura 59: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=1$, $cu=1$ e diferentes valores de n . ($t^*=0,25$)	71
Figura 60: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=1$, $cu=1$	71
Figura 61: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=4$, $cu=10$	72
Figura 62: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=4$, $cu=10$	73
Figura 63: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=4$, $cu=10$ e diferentes valores de n . ($t^*=8,5$)	73
Figura 64: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação, para $\alpha_c=4$, $cu=10$ e diferentes valores de n	74

Lista de símbolos

Cu	Número de Carreau
D	Tensor velocidade de deformação
E	Módulo de Young
h	Altura do canal (entre o eixo e a parede)
K	Índice de consistência
n	Índice de lei de potência
P	Pressão
Re	Número de Reynolds
t	tempo
V	Velocidade do fluido
x,y,z	Coordenadas cartesianas
u,v,w	Componentes da velocidade segundo x,y,z respectivamente

Índices superiores

T	Transposta
$*$	Relativo a grandezas adimensionais
$'$	Derivada em ordem à coordenada espacial (y)
$.$	Derivada em ordem ao tempo

Símbolos Gregos

α	Número de Womersley
β	Função auxiliar
$\dot{\gamma}$	Tensor taxa de deformação
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação
ε	Extensão

$\dot{\epsilon}$	Taxa de extensão
η	Viscosidade
η_0	Viscosidade da primeira região newtoniana
η_∞	Viscosidade da segunda região newtoniana
θ	Ângulo de defasamento
λ	Tempo característico do fluido
μ	Viscosidade dinâmica de fluidos newtonianos
ν	Viscosidade cinemática de fluidos newtonianos
ρ	Massa volúmica
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor das tensões
τ	Tensão
ω	Frequência angular

Operadores Matemáticos

$\frac{d\mathbf{V}}{dt}$	Derivada total da velocidade (\mathbf{V}) em ordem ao tempo (t)
$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$	Derivada parcial da velocidade (\mathbf{V}) em ordem ao tempo (t)
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente da velocidade

1 Introdução

Este primeiro capítulo inicia-se com a apresentação do enquadramento e objectivos da tese, refere-se a relevância do estudo de escoamentos instacionários para a compreensão de escoamentos biológicos e escoamentos industriais. De seguida referem-se alguns conceitos sobre reologia e sobre as características gerais dos fluidos. Finalmente apresenta-se de forma sucinta a estrutura da tese.

1.1 Enquadramento e Objectivos

A obtenção de soluções analíticas do escoamento de fluidos nem sempre é possível dada a complexidade das equações governativas e da geometria do escoamento. Contudo, em casos geometricamente simples é possível simplificar as equações governativas de tal forma que as soluções analíticas se tornam possíveis como é o caso do escoamento de Couette e Poiseuille para fluidos newtonianos e mesmo para diversos fluidos de reologia complexa. De qualquer das formas a não linearidade das equações, a ocorrência de instabilidades fazem com que existam poucas soluções exactas conhecidas. Estes factores assumem maior importância para fluidos não-newtonianos pois à dificuldade de manipulação analítica das equações que governam os campos de velocidade e tensões aliam-se equações constitutivas mais complexas. Assim, uma abordagem numérica ou experimental tem predominado face às dificuldades recorrentes dos métodos analíticos.

O propósito deste trabalho é realizar um estudo teórico alargado sobre escoamentos instacionários entre placas paralelas, ou seja escoamentos dependentes do tempo, em particular o caso oscilatório e pulsado recorrendo-se para este efeito a um programa de matemática simbólica com capacidade de solução numérica, o programa “Maple” (na sua versão 13). Os escoamentos instacionários têm ganho uma especial atenção quer por parte dos estudos de reologia, quer porque existem escoamentos reais instacionários, sendo actualmente realizados grandes esforços para o desenvolvimento de soluções deste tipo de escoamentos. Salienta-se a importância destes estudos como forma de compreender melhor muitos dos actuais escoamentos visto ocorrerem em regime variável como por exemplo escoamentos a nível industrial, operações de processamento e escoamentos biológicos. A título de exemplo, o escoamento do sangue no sistema cardiovascular é instacionário, o sangue apresenta um comportamento reológico complexo e neste caso até existe uma forte interacção fluido-estrutura.

Muitos estudos recentes salientam a importância das características de fluidos não-newtonianos na tecnologia e na natureza. Existe uma grande variedade de modelos que expressam as propriedades reológicas de muitos fluidos. Alguns modelos de comportamento do fluido foram aplicados a escoamentos estacionários em condutas obtendo-se soluções

analíticas ou numéricas, as soluções para escoamentos instacionários são mais reduzidas encontrando-se apenas para alguns modelos salientando assim a dificuldade da resolução analítica de escoamentos provocados por gradientes de pressão dependentes do tempo. A procura de soluções para estes escoamentos revela um grande esforço para descrever ou prever efeitos importantes em escoamentos de fluidos.

O principal objectivo deste trabalho é obter soluções numéricas para escoamentos instacionários de fluidos newtonianos generalizados usando o modelo lei de potência (Power Law) e o modelo de Carreau para avaliar a influência dos diferentes parâmetros independentes do escoamento pulsado sobre as características do escoamento. Deste modo pretende-se aferir qual o papel desempenhado pelas forças de inércia e pelas forças viscosas, qual a influência da variação de condições como por exemplo o diâmetro da conduta (ou distância entre placas), sendo estas condições utilizadas sob a forma de números adimensionais de modo a ter uma solução mais genérica. Pretende-se também compreender a resposta a estas variações por parte de fluidos com diferentes propriedades.

Uma das motivações deste trabalho está relacionada com o interesse em futuras simulações do comportamento de escoamentos de sangue, escoamento instacionário. O sangue é uma suspensão de diferentes tipos de células no plasma, entre estas os glóbulos vermelhos tem um papel dominante na hemodinâmica. Embora o plasma seja constituído em 90% por água, o sangue é um fluido não-newtoniano devido à estrutura elástica e deformável dos glóbulos vermelhos. Tendo em conta a complexa estrutura química do sangue, um modelo teórico universalmente aceite ainda não existe, porém, muitos modelos matemáticos para descrever o comportamento reológico do sangue foram extensivamente desenvolvidos nas últimas décadas.

Contudo no âmbito desta tese não seria exequível o uso de equações constitutivas tão elaboradas tais como as propostas para o escoamento do sangue, tendo em conta o período de tempo disponível para a sua realização.

Uma das mais comuns simplificações na modelação de escoamentos de sangue é pois assumir que este é um fluido newtoniano. Esta suposição revela-se bastante razoável como uma primeira aproximação em certos casos específicos, permitindo simulações do escoamento através dos grandes vasos sanguíneos. Porém, o comportamento não-newtoniano do sangue deve ser levado em conta em vasos de diâmetros mais reduzidos.

Deste modo o estudo numérico levado a cabo parte de um modelo newtoniano, tendo como objectivo obter soluções semi-analíticas de escoamentos oscilatórios e pulsados entre placas paralelas e evoluindo posteriormente para fluidos puramente viscosos descritos pelo modelo newtoniano generalizado. O modelo newtoniano será também usado como referência para os modelos seguintes bem como forma de aferir a precisão do método empregue.

1.2 Reologia

Os princípios fundamentais da física clássica têm aplicação em qualquer tipo de material independentemente do seu estado físico, porém o estudo de sólidos e fluidos aparece dividido em duas áreas distintas da mecânica: a mecânica dos sólidos e a mecânica dos fluidos. Estas duas áreas de estudo compreendem-se pelo facto destes materiais apresentarem diferentes comportamentos quando são sujeitos a um determinado estado de tensão.

Robert Hooke formulou os princípios básicos da moderna Teoria da Elasticidade, no âmbito da mecânica dos sólidos, relacionando o estado de tensão e de deformação nos corpos sujeitos a deformações elásticas. Assim, se o corpo sólido for homogêneo, isotrópico e estando em equilíbrio devido a um sistema de forças exteriores aplicadas, as componentes do estado de deformação elástica, devido à aplicação no corpo desse sistema de forças, são funções lineares das componentes do estado de tensão a que o corpo está sujeito.

A proporcionalidade entre as tensões (τ) e as deformações (ε) é assim dada por um factor de proporcionalidade (E) que se designa por módulo de Young ou módulo de elasticidade do material, ou seja, segundo a expressão:

$$\tau = E\varepsilon \quad (1.1)$$

Durante um processo de deformação, sendo a solicitação reduzida os corpos apresentam a característica linear referida anteriormente, ou seja, o material deforma-se quando uma força é aplicada mas volta à configuração original quando a força é retirada. Porém, com o aumento progressivo da intensidade das solicitações, atinge-se um ponto acima do qual as deformações no corpo passam a ser irreversíveis, terminando o domínio de aplicação Teoria da Elasticidade de Hooke. Entra-se assim no domínio plástico caracterizado por uma relação não linear entre as tensões e as deformações.

Os princípios que regem o comportamento mecânico dos fluidos são diferentes dos apresentados anteriormente para os sólidos. Tendo em conta que os fluidos não apresentam uma estrutura posicional e as suas moléculas têm uma grande liberdade de movimento, os fluidos apresentam estados de deformação que aumentam indefinidamente quando sujeitos a um estado de tensão de corte.

“Reologia é a ciência que estuda o escoamento e a deformação da matéria”. Esta designação foi proposta pelo Professor Eugene C. Bingham, por volta de 1928, tendo sido aceite cientificamente aquando da fundação da Sociedade de Reologia Americana (American Society of Rheology) em 1929. A reologia é a ciência que estuda o comportamento mecânico das substâncias fluidas, classificando-as em função de parâmetros específicos apropriados à previsão das características do seu escoamento em condições reais.

Ao contrário dos sólidos, quando se analisa o comportamento mecânico de substâncias fluidas comuns, não faz sentido utilizar o conceito de deformação, visto não haver uma relação biunívoca entre esta e o estado de tensão, devendo assim relacionar-se o estado de tensão com o estado da velocidade de deformação. Aos fluidos que apresentam uma relação linear entre a tensão aplicada e a consequente variação espacial da velocidade de deformação passaram a designar-se por fluidos newtonianos. Como exemplo destes fluidos temos a água, o ar e em geral todos os fluidos que tenham um baixo peso molecular e uma estrutura química simples.

Face ao enorme progresso industrial em áreas como a indústria química e alimentar, onde se utilizam inúmeros fluidos, bem como o grande desenvolvimento de fluidos sintéticos, as teorias usadas para descrever o comportamento de fluidos newtonianos deixam de se poder aplicar para estes fluidos. Como exemplo destes fluidos encontram-se os polímeros, no estado de fusão ou em solução, os produtos alimentares e farmacêuticos, produtos de limpeza, colas, tintas, entre outros.

Todos estes fluidos estão agrupados num mesmo conjunto, que tomou a designação genérica de fluidos não-newtonianos. Porém, devido ao rápido desenvolvimento das técnicas de análise e de caracterização do comportamento reológico dos fluidos foi possível distingui-los com mais detalhe, estabelecendo assim uma classificação mais objectiva e exacta em função das características dos seus comportamentos.

1.3 Características gerais dos fluidos

Quando numa análise mais imediata se pensa num fluido, nas suas propriedades ou comportamento, relacionamos intuitivamente esse conceito com a ideia de fluido newtoniano pela simples razão de serem fluidos com os quais lidamos diariamente tais como a água e o ar, e muitos outros fluidos constituídos por pequenas moléculas.

Porém numa análise mais atenta poderíamos concluir que grande parte dos fluidos com relevância industrial, em particular os de origem sintética ou mesmo escoamentos biológicos não apresentam um comportamento semelhante ao descrito pelos fluidos newtonianos.

Um fluido dito newtoniano apresenta um comportamento que é caracterizado por uma equação constitutiva estabelecendo uma relação de proporcionalidade directa entre tensão e velocidade de deformação também designada por taxa de deformação, sendo a constante de proporcionalidade μ a viscosidade do fluido. Em condições estáveis de temperatura e de pressão, esta viscosidade é uma propriedade do material facilmente mensurável.

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1.2)$$

Os fluidos não-newtonianos apresentam uma grande diversidade de características reológicas, que podemos tipificar em dois grandes grupos: fluidos puramente viscosos ou inelásticos e fluidos viscoelásticos. Quanto ao primeiro grupo este pode ainda ser subdividido em dois subgrupos: os fluidos com características viscosas independentes do tempo e os fluidos com características viscosas dependentes do tempo.

Os fluidos não-newtonianos puramente viscosos são fluidos incapazes de armazenar energia elástica respondendo instantaneamente em tensão a variações súbitas da velocidade de deformação, ou vice-versa, não sendo capazes de relaxar tensões quando se relaxam as velocidades de deformação sendo por isso as suas tensões de origem puramente viscosa. Os fluidos não-newtonianos puramente viscosos com características independentes do tempo, quando sujeitos a movimento, apresentam uma taxa de deformação que só depende do valor da tensão aplicada nesse instante.

Para os fluidos não-newtonianos puramente viscosos com dependência do tempo, e contrariamente aos anteriores, a velocidade de deformação num escoamento de Couette em que a tensão aplicada é constante, depende não só da tensão aplicada, mas também do tempo durante o qual essa tensão é aplicada. Saliente-se que esta variação é totalmente dissipativa ou seja, o fluido é incapaz de armazenar internamente a energia de deformação, cedendo-a quando a tensão aplicada é removida.

As duas formas de dependência do tempo que as propriedades viscosas podem apresentar são a tixotropia e a reopexia. Nos fluidos tixotrópicos a tensão de corte diminui com o tempo para uma dada velocidade de deformação e temperatura constante num escoamento de Couette. O fenómeno não é permanente e ao fim de algum tempo é atingido um valor constante. Após remoção do esforço de corte, as características do fluido voltam gradualmente à situação inicial, ou seja, o comportamento é reversível para grandes intervalos de tempo, mas não há cedência de energia ao escoamento por parte do fluido. O fenómeno da tixotropia está associado à orientação das partículas e à configuração estrutural dos fluidos. Estes fluidos, além de serem sensíveis ao campo de tensões aplicado, apresentam um rearranjo estrutural lento quando comparado com o que ocorre nos fluidos ditos independentes do tempo, os quais se adaptam quase instantaneamente ao campo de tensão. Exemplos de fluidos com este tipo de comportamento são o “ketchup” e o iogurte.

O termo reopexia indica o comportamento inverso ao tixotrópico, ou seja, fluidos cuja tensão de corte aumenta com o tempo para uma velocidade de deformação constante, até se atingir um valor limite. Na prática estes fluidos são raros e os poucos que se conhecem são normalmente suspensões de partículas de geometria irregular, apresentando este tipo de comportamento em gamas limitadas de operação.

Os fluidos viscoelásticos, não estando no âmbito do estudo deste trabalho podem ser sucintamente descritos pela característica de recuperação parcial da forma quando termina a aplicação da tensão a que estão submetidos. Estes materiais possuem assim propriedades mistas entre os fluidos e os sólidos. Quanto à componente viscosa podem ser caracterizados como os fluidos puramente viscosos, ou seja, fluidos não-newtonianos com características viscosas independentes do tempo e fluidos não-newtonianos com características viscosas dependentes do tempo salientando-se o facto de neste caso ser difícil distinguir a variabilidade da tensão com origem na elasticidade e na tixotropia/reopexia.

1.4 Estrutura da tese

Esta tese encontra-se dividida em sete capítulos. Para além desta introdução, o capítulo 2 apresenta uma breve revisão bibliográfica com vista a contextualizar o tema abordado neste texto. No capítulo 3 apresentam-se as equações fundamentais que regem o escoamento de fluidos, as equações governativas incluindo as funções da viscosidade usadas aqui nos modelos newtonianos generalizados. No capítulo 4 são introduzidos os escoamentos a estudar-se também fazendo uma descrição do método analítico-numérico utilizado. O estudo da malha e a verificação da convergência de soluções com o seu refinamento é também realizado neste capítulo. No capítulo 5 são obtidas soluções analíticas para escoamento instacionário de fluido newtoniano e escoamento de Poiseuille para fluido lei de potência, posteriormente é feita a validação do cálculo através da comparação de resultados numéricos e analíticos. No capítulo 6 apresentam-se os resultados decorrentes das soluções numéricas efectuadas. Finalmente, no capítulo 7 apresentam-se as principais conclusões desta tese e sugestões para trabalhos futuros.

2 Revisão bibliográfica

Este capítulo faz uma breve revisão da bibliografia sobre o estudo de escoamentos instacionários de fluidos newtonianos generalizados em meio confinado, tema de estudo desta tese.

2.1 Introdução

Ciência que estuda o comportamento mecânico das substâncias fluidas, assim pode ser entendido o termo reologia. Porém, quando deparados com um objecto de estudo mais complexo que o vulgarmente conhecido escoamento estacionário de fluidos newtonianos, o qual é amplamente estudado em inúmeros livros de texto, e aplicado quotidianamente na engenharia, esta ciência ganha um significado mais relevante.

A nossa intuição remete-nos para uma percepção simples do comportamento dos fluidos, por analogia com os fluidos ditos newtonianos pelo facto de serem fluidos de uso comum tal como a água e o ar. É então imperativo um estudo prévio como forma de adquirir conhecimentos que permitam distinguir os fluidos, o comportamento que apresentam face a diferentes condições de escoamento bem como a utilização prática ou presença desses fluidos no ambiente que nos rodeia. A este respeito é de referir o livro “A Handbook of Elementary Rheology” de Barnes (2000) o qual permite uma consolidação de conhecimentos sobre mecânica dos fluidos e também uma abordagem simples e pouco teórica de novos conceitos relacionados com reologia e com os vários tipos de fluidos.

Um marco relevante para a realização desta tese foi o livro “*Dynamics of Polymeric Liquids*” de Bird *et al.* (1987). Este faz uma abordagem mais complexa mas muito exaustiva dos escoamentos de fluidos não-newtonianos apresentando quer soluções analíticas quer numéricas de vários casos concretos. Possibilita assim uma familiarização com a nomenclatura específica desta área. É também de referir a existência de vários apêndices com equações que regem o escoamento bem como equações características dos fluidos, escritas em diversos sistemas de coordenadas, sendo deste modo um instrumento extremamente importante.

Como já foi referido, é objectivo desta tese o estudo de escoamentos instacionários de fluidos viscosos, para tal recorrem-se aos modelos newtoniano, lei de potência e ao modelo de Carreau para simular numericamente os escoamentos. A pesquisa bibliográfica levada a cabo revelou uma existirem poucos trabalhos relacionados com escoamentos instacionários que abordassem esse tema por via analítica, a primeira tentativa de solução nesta tese. De facto, dada a complexidade das equações governativas, a solução numérica tem prevalecido em detrimento das soluções analíticas, reservando-se estas soluções para fluidos newtonianos, por vezes também para fluido de lei de potência, e para escoamentos relativamente simples. São

de referir alguns estudos, próximos do objectivo desta tese tais como Duarte et al. (2008) no qual é abordado um escoamento instacionário para fluidos viscoelásticos apresentando também a solução analítica para escoamento pulsado de fluido newtoniano. Outra contribuição é o estudo realizado por Daprà et al. (2006) do escoamento instacionário de um fluido não-newtoniano em conduta de secção circular. Neste trabalho a lei constitutiva usada para descrever o comportamento reológico do fluido é a lei de potência, obtendo-se uma solução analítica aproximada para a velocidade. É também realizada uma simulação numérica para o mesmo caso, comparando-se então os valores obtidos pelos dois métodos.

É importante salientar que ao longo da pesquisa foram encontradas várias referências que remetem para escoamentos relacionados com a circulação sanguínea. A maioria destes estudos analisam um escoamento pulsado em conduta rígida utilizando o modelo newtoniano, tendo depois como objectivo de estudo casos mais particulares envolvendo trocas de calor, obstrução da conduta ou comparação com estudo de outros fluidos. Por apresentar algumas semelhanças quanto a uma das leis constitutivas de estudo, bem como ao gradiente de pressão que governa o escoamento, salienta-se o trabalho de Esmaeili et al. (2008) em que se simula numericamente o escoamento pulsado de um fluido não-newtoniano no interior de uma conduta possuindo uma obstrução (estenose), usando o modelo reológico de Carreau. É também uma abordagem semi-analítica pois a forma complexa do modelo de Carreau não permite uma solução puramente analítica.

Ainda no contexto da simulação da hemodinâmica, dois livros foram importantes para a realização do presente trabalho: “Biofluid Mechanics - The Human Circulation” de Chandran et al. (2007); e o livro “The Physics of Coronary Blood Flow” de Zamir (2005). Nestas obras estão patentes as características dos escoamentos sanguíneos em diferentes vasos do organismo humano, e também algumas especificações para abordagens através de simulações numéricas definindo o domínio da sua aplicação bem como simplificações efectuadas face aos casos reais.

Ao longo destas duas obras é referido que o escoamento de sangue no sistema circulatório é instacionário e, na maioria das regiões é pulsado. Importa assim, no contexto desta tese clarificar alguns conceitos quanto à forma de variação no tempo do escoamento. O termo “instacionário” é muito geral e refere-se, simplesmente, a todo o tipo de escoamento que não é constante. Se o escoamento apresentar um comportamento periódico e um caudal médio não nulo ao longo do ciclo, o escoamento é considerado pulsado. Por outro lado, se o escoamento tem um comportamento periódico simples com um caudal médio nulo, é aqui chamado de escoamento oscilatório.

Apesar do objecto de estudo desta tese incidir em escoamentos instacionários, é importante descrever previamente os princípios do escoamento de fluidos sob condições mais simples, o que será feito de forma breve seguidamente.

2.2 Forças de inércia e forças viscosas

O escoamento de um fluido newtoniano ou newtoniano generalizado confinado entre placas paralelas (ou no interior de um tubo) é essencialmente controlado pelo equilíbrio entre as forças de inércia, forças de pressão e forças viscosas aplicadas ao fluido. Se o escoamento decorre em regime permanente não há variação das forças de inércia e o equilíbrio é

simplesmente entre as forças de pressão e as forças viscosas. O escoamento é considerado laminar quando as forças viscosas são predominantes caracterizando-se por uma movimentação suave do fluido. Uma forma de entender este tipo de escoamento é considerar que o fluido se divide num certo número de camadas que se movem paralelamente umas em relação às outras sem ocorrer distúrbios entre as camadas. Por outro lado, quando as forças de inércia são dominantes, mesmo que em média a sua variação seja pequena ou mesmo nula, o escoamento é dominado por oscilações designadas por turbulência, apresentando o fluido uma movimentação quasi-aleatória. Uma forma de averiguar se o escoamento é laminar ou turbulento consiste em calcular o quociente entre as forças de inércia e as forças viscosas. Este quociente é conhecido como número de Reynolds (Re), o qual é adimensional pois ambos os termos tem unidade de força, e pode ser representado segundo White (1999) como:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (2.1)$$

Refira-se que a viscosidade na interface entre o fluido e a parede da conduta é uma das formas mais importantes de resistência ao escoamento. É importante porque está presente quando o escoamento é estacionário ou instacionário e é sempre dissipativa. Uma consequência da viscosidade dos fluidos é o facto de a diferença de velocidades entre camadas adjacentes de fluido ser infinitamente pequena de modo ao gradiente de velocidade permanecer finito, ou seja, uma mudança de velocidade na forma de degraus não é assim possível pois provocaria localmente gradientes de velocidade infinitos. Por outras palavras, a variação da velocidade no seio de um fluido deve ser suave. A resistência total ao escoamento, R , devido às tensões que actuam na superfície do tubo, é expressa em termos do caudal (q) segundo Zamir (2005) da forma:

$$R = \frac{\Delta p_R}{q} \quad (2.2)$$

2.3 Efeito da pulsação

Em termos gerais, num escoamento a aceleração pode ocorrer no tempo e no espaço. A aceleração no espaço ocorre quando por exemplo a secção de escoamento sofre uma variação, sendo o fluido obrigado a variar a sua velocidade de ponto para ponto para acompanhar as variações no espaço. A aceleração no tempo está associada a escoamentos instacionários, ou seja, por exemplo quando o gradiente de pressão depende do tempo.

A secção anterior explicitava as características de escoamento estacionário quando o gradiente de pressão que governava esse escoamento era constante. No caso de escoamentos pulsados a pressão e a velocidade variam periodicamente no tempo. O número de Reynolds é claramente insuficiente para caracterizar este tipo de escoamentos, existindo assim outro parâmetro adimensional, o número de Womersley (representado por α) que é usado para caracterizar a natureza periódica do escoamento. A definição do número de Womersley é, segundo Zamir (2005):

$$\alpha = h\sqrt{\rho\omega/\mu} \quad (2.3)$$

representando h a altura da conduta desde o eixo até à parede, ρ a massa volúmica do fluido, ω a frequência angular da oscilação e μ a viscosidade do fluido. O número de Womersley num escoamento instacionário tem um significado físico similar ao apresentado pelo número de Reynolds para escoamentos estacionários comparando as forças viscosas e as forças de inércia para escoamentos instacionários.

A título de exemplo refere-se, segundo Chandran et al. (2007), que no sistema circulatório humano α toma valores desde 10^{-3} nos capilares até aproximadamente 20 nos grandes vasos. Se α for inferior a 1, as forças viscosas dominam. À medida que o valor de α aumenta, as forças de inércia tornam-se mais importantes e começam a dominar, sendo o seu efeito mais visível no centro da conduta. O resultado traduz-se no aparecimento de um atraso, desfasamento relativamente à oscilação do gradiente de pressão, e o perfil de velocidades torna-se mais plano na região central do escoamento.

No caso de um escoamento no interior de um tubo (ou placas paralelas) em que existe uma variação da velocidade no tempo, daqui decorre uma variação do caudal no tempo e é a esta variação do caudal que a inércia se opõe. Tendo em conta a nomenclatura apresentada por Zamir (2005), é necessário um gradiente de pressão ΔP_L especificamente para vencer a inércia, o índice L é utilizado para distinguir este gradiente de pressão do necessário para manter o escoamento face à resistência viscosa.

$$\Delta p_L = L \frac{dq}{dt} \quad (2.4)$$

O símbolo L é usado para a constante de proporcionalidade por analogia com os sistemas eléctricos.

Assim, para criar um escoamento na presença de uma variação de caudal é necessário um gradiente de pressão total que pode ser representado pela soma do gradiente de pressão necessária para vencer a inércia, ΔP_L e o gradiente de pressão necessário para vencer a resistência devido à viscosidade, ΔP_R .

$$\Delta p = \Delta p_R + \Delta p_L = R q + L \frac{dq}{dt} \quad (2.5)$$

A equação anterior é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. A solução geral deste tipo de equações pode ser encontrada em Kreyszig (1999), tomando a seguinte forma:

$$q(t) = \frac{e^{-t/(\frac{L}{R})}}{L} \int \Delta p e^{t/(\frac{L}{R})} dt \quad (2.6)$$

Refira-se como forma de exemplo para melhor compreensão do papel desempenhado pelas forças de inércia, o caso simples do arranque do escoamento por imposição de um gradiente de pressão constante no instante inicial $t=0$, então:

$$\Delta p = \Delta p_0 \quad (2.7)$$

$$q(t) = \frac{\Delta p_0}{R} \left(1 - e^{-t/(L/R)} \right) \quad (2.8)$$

Com a evolução no tempo o termo exponencial desaparece, sendo o caudal um valor constante. Para esse valor o escoamento é considerado estacionário, face ao início do escoamento na fase dita de escoamento transiente.

A inércia criar então um período de adaptação até o escoamento atingir o estado estacionário. Com a imposição do gradiente de pressão o caudal do escoamento aumenta desde zero até ao valor final, mas devido à inércia demora um certo período de tempo até atingir esse valor. É importante salientar que a aproximação do estado estacionário é assintótica, o que significa que o fluido demora uma quantidade de tempo infinita para alcançar o regime estacionário. Na prática, o escoamento está suficientemente próximo do regime estacionário ao fim de um tempo finito.

Considere-se o quociente L/R o qual tem a dimensão de tempo que é uma medida do tempo de resposta às variações:

$$t_L = L/R \quad (2.9)$$

Quanto mais elevado for o valor de t_L mais elevados são os efeitos da inércia e mais longo é o tempo necessário para o escoamento atingir o estado estacionário.

Saliente-se o facto de o escoamento considerado estar já desenvolvido, ou seja, neste exemplo considerou-se que em cada instante o escoamento está completamente desenvolvido no espaço só então o gradiente de pressão é alterado e examina-se de que forma o caudal se adapta a esta variação.

No presente caso de estudo o gradiente de pressão imposto não é constante mas varia segundo uma função periódica do tempo com frequência única e constante, uma função sinusoidal:

$$\Delta p = \Delta p_0 \sin(\omega t) \quad (2.10)$$

Considerando que o caudal é zero para o instante $t=0$, a equação do caudal é dada por Zamir (2005):

$$q(t) = \frac{\Delta p_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(R \sin(\omega t) - \omega L \cos(\omega t) + \omega L e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \right) \quad (2.11)$$

Ou combinando as funções trigonométricas:

$$q(t) = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left(\sin(\omega t - \theta) - \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \right); \text{ com: } \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \quad (2.12)$$

É possível compreender que à medida que o termo exponencial se torna insignificante, o caudal depende da mesma função que o gradiente de pressão mas desfasado de um ângulo θ . Quanto maiores forem as forças de inércia, ou seja quanto maior o valor de t_L , mais elevado será este desfasamento.

Na figura seguinte representa-se graficamente a equação anterior, normalizada, $q(t)/q_p$, sendo o caudal (q_p) correspondente ao gradiente de pressão (Δp_0) um escoamento independente do tempo, ou seja escoamento de Poiseuille. Representando o caso de ausência de inércia ($t_L \approx 0$), e casos em que se varia a relação do atraso temporal: $t_L=0,1$; $t_L=0,5$; $t_L=1$. O tempo foi adimensionalizado relativamente ao período de oscilação.

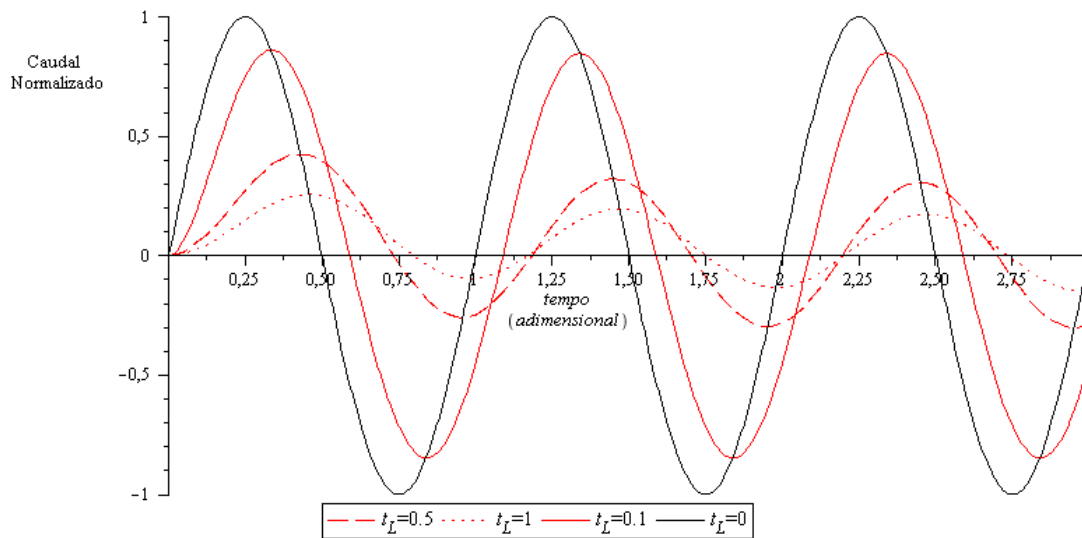


Figura 1: Influência da inércia na variação do caudal ao longo do tempo para um escoamento oscilatório.

Nesta secção pretendeu-se integrar o leitor com o objecto de estudo desta tese. Assim, as equações apresentadas bem como a figura 1 representam casos genéricos como forma de inserir alguns conceitos relacionados com as forças de inércia e forças viscosas e os seus efeitos no escoamento que serão abordados de forma exaustiva nos capítulos seguintes.

3 Equações fundamentais

Neste capítulo são apresentadas as equações fundamentais que governam o escoamento de um fluido. Equação diferencial de conservação da massa, equação diferencial da quantidade de movimento bem como as leis que relacionam o estado de tensão com o campo de velocidades. Deste modo são introduzidas algumas leis constitutivas que modelam o comportamento dinâmico dos fluidos newtonianos generalizados, em particular os modelos lei de potência e Carreau, objecto de estudo desta tese.

3.1 Considerações preliminares

As propriedades que caracterizam um escoamento isotérmico são a pressão, velocidade e o estado de tensão, assim é necessário o conhecimento destas propriedades em cada instante de tempo e posição.

A velocidade é uma grandeza vectorial, variando no tempo e no espaço:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = i\mathbf{u}(x, y, z, t) + j\mathbf{v}(x, y, z, t) + k\mathbf{w}(x, y, z, t) \quad (3.1)$$

A tensão é uma grandeza tensorial que depende não só da posição, mas também da orientação do plano sobre o qual é avaliada. O estado de tensão pode definir-se sob a forma de um tensor conhecendo seis das suas componentes de tensão, não dependentes entre si. Num referencial cartesiano, o tensor das tensões, $\boldsymbol{\tau}$, escreve-se:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Em cada coluna o tensor das tensões representa as componentes segundo x , y e z , das tensões que actuam nas faces de um volume de controlo, o primeiro índice corresponde a face onde actua a tensão (face normal ao eixo designado por esse índice) e o outro a direcção da tensão actuante.

Das nove componentes deste tensor, apenas seis são independentes pois a equação da quantidade de movimento angular impõe que o tensor das tensões seja simétrico para fluidos homogêneos. São deste modo iguais as tensões que apresentam os mesmos índices mas em disposição inversa.

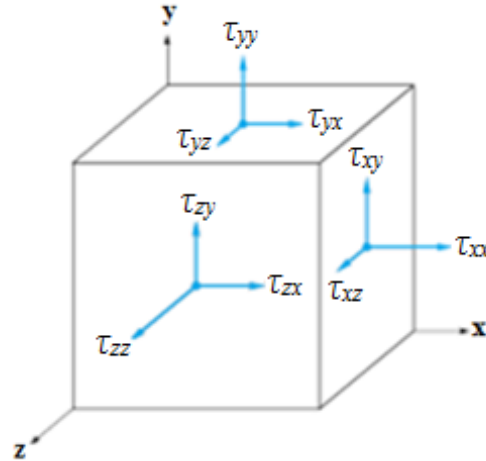


Figura 2: Componentes das tensões que actuam nas faces de um volume de controlo.

O método utilizado para analisar o movimento dos fluidos será um método infinitesimal. Isto significa que as leis governativas serão aplicadas a um volume de controlo de dimensões muito reduzidas, segundo uma análise diferencial.

Saliente-se que na sua forma básica, estas equações de movimento são extremamente difíceis de resolver analiticamente, contudo algumas considerações podem ser feitas sem perda de generalidade, tornando possível a obtenção de soluções para casos particulares.

3.1.1 Equação diferencial de Conservação da Massa

Considerando um volume de controlo infinitesimal fixo (dx, dy, dz) o escoamento através de cada uma das faces do elemento é aproximadamente unidimensional, podendo então ser aplicada a relação de conservação da massa:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i \mathbf{V}_i)_{saida} - \sum_i (\rho_i A_i \mathbf{V}_i)_{entrada} = 0 \quad (3.3)$$

Tendo em conta que o volume de controlo é infinitesimal, o primeiro termo da equação anterior toma a forma:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (3.4)$$

O fluxo de massa ocorre nas seis faces do volume de controlo, três entradas e três saídas, considerando que todas as propriedades do fluido variam de forma uniforme em função do tempo e do espaço, como por exemplo, $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Deste modo após algumas simplificações da equação obtêm-se uma equação de derivadas parciais envolvendo a massa volúmica e a velocidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

Esta equação representa a conservação da massa (equation of continuity) para um volume de controlo infinitesimal. Pode ainda ser representada de um modo mais compacto assumindo a seguinte forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.6)$$

Em certos casos específicos podem ser formuladas hipóteses que simplificam as equações. Dois casos em que isso é possível são o escoamento estacionário e o escoamento de fluidos incompressíveis.

Sendo o escoamento estacionário, não ocorrem variações ao longo do tempo, todas as propriedades são dependentes apenas da posição, reduzindo-se a equação anterior, (3.5), à forma:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

Para o caso de escoamento de fluidos incompressíveis, as variações de ρ no espaço são desprezáveis, independentemente de o escoamento ser instacionário ou estacionário, tomando a equação de conservação da massa, (3.5), a seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

ou num modo mais compacto:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.9)$$

3.1.2 Equação diferencial da quantidade de movimento

Usando o mesmo conceito de volume de controlo apresentado anteriormente, a equação da quantidade de movimento é:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \mathbf{V} \rho dV \right) + \sum_i (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{saida} + \sum_i (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{entrada} \quad (3.10)$$

Como o elemento tem dimensões reduzidas, o integral reduz-se à forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \mathbf{V} \rho dV \right) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V} \rho) dx dy dz \quad (3.11)$$

Após algumas considerações teóricas¹ obtêm-se a equação diferencial da quantidade de movimento para um elemento infinitesimal:

$$\rho g - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} = \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (3.12)$$

sendo:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad (2.13)$$

Saliente-se o facto de a equação anterior, (3.12), possuir uma elevada complexidade. Na verdade, trata-se de uma equação vectorial de equilíbrio segundo os eixos coordenados (x,y,z) portanto com três componentes. Um modo mais fácil de visualizar este facto é, usando a notação de Einstein, escrever a equação da quantidade de movimento num referencial cartesiano, segundo a direcção i (com $i=x, y$ ou z):

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} \quad (3.14)$$

Esta equação pode assim ser entendida, à luz da segunda lei de Newton, como um balanço de forças por unidade de volume.

¹ A dedução completa destas equações pode ser encontrada em bibliografia específica de mecânica dos fluidos tal como White (1999) e Munson et al. (1998)

Tendo em conta o que foi dito anteriormente, possuímos quatro equações escalares: três referentes à quantidade de movimento e uma referente à conservação da massa. Porém ainda não é possível descrever completamente um escoamento porque o número de incógnitas é superior ao número de equações. Falta uma lei que caracterize a resposta do fluido, ou seja, uma lei que relacione o estado de tensão com o campo de velocidades.

No caso de fluidos constituídos por pequenas moléculas pode ser aplicada a lei de Newton da viscosidade, equação (1.2) anteriormente apresentada, sendo a sua representação na forma vectorial a seguinte:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D} = \eta\{\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T\} \quad (3.15)$$

O tensor, \mathbf{D} , representa o tensor velocidade de deformação e a expressão entre parêntesis corresponde ao tensor taxa de deformação. Por substituição da equação anterior na equação da quantidade de movimento e considerando o fluido incompressível, obtém-se a seguinte forma das equações de Navies-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\mathbf{V}\right) = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{V} \quad (3.16)$$

Refira-se que a equação anterior se aplica apenas a fluidos newtonianos, para outros fluidos são necessárias novas equações que caracterizem o seu comportamento reológico. Na representação das equações anteriores optou-se por utilizar o símbolo η em vez do símbolo μ , como forma de tornar as equações mais genéricas, e proporcionar a sua aplicação aos fluidos newtonianos generalizados, como será demonstrado posteriormente.

3.2 Modelo newtoniano generalizado

As equações constitutivas relacionam o campo de tensões com o campo de velocidade de deformação a que o fluido está sujeito, deste modo as equações constitutivas descrevem matematicamente as propriedades reológicas dos fluidos. O modelo de fluido newtoniano generalizado é um modelo reológico simples válido para fluidos puramente viscosos, i.e. que não possuam efeito de memória o que se traduz por uma dependência do tempo ou de estados de tensão anteriores.

Este modelo representa uma extensão da lei de Newton da viscosidade, equação (3.15), e permite descrever o comportamento não-newtoniano evidenciado por fluidos com viscosidade dependente da taxa de deformação:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta(\dot{\gamma})\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \eta(\dot{\gamma})[\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T] \quad (3.17)$$

Onde $\eta(\dot{\gamma})$ é função do invariante do tensor velocidade de deformação. No caso vertente só se considera o segundo invariante, $\dot{\gamma}$, que é definido como (Bird et al. (1987):

$$\dot{\gamma} = |\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2}II(\dot{\gamma})} = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}\dot{\gamma}^2} \quad (3.18)$$

No caso particular de escoamento desenvolvido entre placas paralelas, usando um sistema de coordenadas cartesianas, pode ser escrito na forma: $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$

Existem várias funções possíveis para a viscosidade, tais como:

Lei de potência:

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.19)$$

onde K e n são o índice de consistência e o índice de potência, respectivamente. Para valores de $n < 1$, o fluido é considerado reofluidificante, se $n > 1$ o fluido é reoespessante; para $n=1$ o fluido apresenta viscosidade constante, logo o modelo de fluido newtoniano generalizado reduz-se à lei constitutiva de Newton.

Modelo de Sisko:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_{\infty} + K\dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.20)$$

No modelo de Sisko K e n têm o mesmo significado que na lei de potência e η_{∞} representa a viscosidade a elevadas taxas de deformação.

Modelo de Carreau:

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}) - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2} \quad (3.21)$$

Modelo de Carreau-Yasuda:

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}) - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^a]^{(n-1)/a} \quad (3.22)$$

O modelo de lei de potência é um modelo muito comum por ser o modelo mais simples para fluido com viscosidade variável, porém apresenta algumas limitações tais como o facto de a viscosidade tender para infinito para taxas de deformação nulas ao mesmo tempo que a viscosidade decresce continuamente para altas taxas de deformação.

Geralmente um fluido reofluidificante apresenta uma viscosidade constante para taxas de deformação muito baixas e muito elevadas, e uma viscosidade que varia segundo uma lei de potência numa gama intermédia de taxas de deformação, como ilustrado na figura seguinte. As duas regiões de viscosidade constante são chamadas de primeira ($\eta=\eta_0$) e segunda ($\eta=\eta_\infty$) região newtoniana, respectivamente.

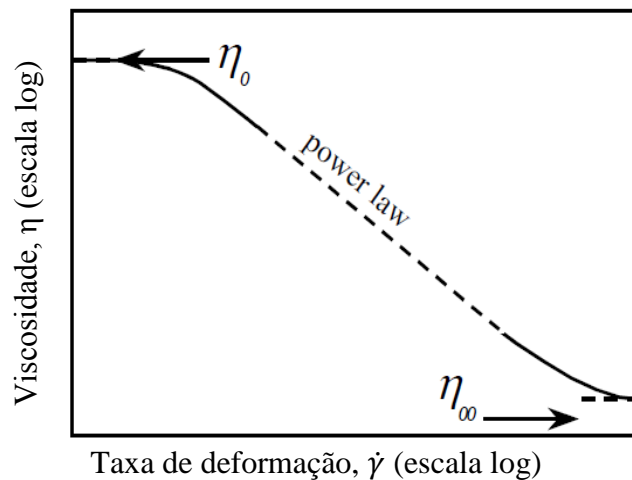


Figura 3: Curva típica de um fluido reofluidificante, adaptado de Barnes (2000).

O modelo de Carreau-Yasuda é uma extensão do modelo de Carreau, e inclui, do ponto de vista da generalidade, todos os outros apresentados. Contempla o primeiro e segundo patamar newtoniano, η_0 e η_∞ respectivamente, representando o parâmetro λ um tempo característico do fluido, que determina o valor da taxa de deformação a partir da qual a fluidificação se estabelece. Um caso particular do modelo de Carreau-Yasuda, denomina-se modelo de Carreau no qual o parâmetro $a=2$.

No presente caso de estudo é usada uma versão simplificada do modelo de Carreau, assumindo que $\eta_\infty \cong 0$, deste modo a equação toma a forma:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 [1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2} \quad (3.23)$$

Saliente-se o facto de este modelo poder ser utilizado em certos casos de modo a regularizar o modelo de lei de potência, evitando assim a existência de singularidades tornando mais fácil a simulação por meios numéricos. De facto, se $\lambda\dot{\gamma} \gg 1$ então a lei anterior assume a forma da lei de potência, com $\eta_0 \lambda^{n-1} = K$

4 Estudo analítico-numérico

Neste capítulo apresenta-se o método utilizado para a resolução das equações diferenciais que regem o escoamento em estudo. Inicialmente apresentam-se as equações de transporte bem como as equações governativas dos modelos utilizados, newtoniano, lei de potência e Carreau simplificado, adaptadas ao caso de estudo de modo a obter um sistema de equações para posterior resolução. Seguidamente é feita uma breve descrição do método numérico empregue e opções tomadas. De referir que o todo o cálculo (analítico e numérico) se realiza recorrendo a um programa de matemática simbólica, o programa “Maple” versão 13.

4.1 Caso de estudo

Como foi dito anteriormente o propósito de estudo deste trabalho incide nos modelos newtoniano, lei de potência e modelo de Carreau simplificado, sendo de seguida apresentadas, de um modo mais detalhado, as equações que permitem a caracterização de um escoamento governado por estes modelos. Neste trabalho a equação de conservação de energia não foi tida em conta pois o estudo restringe-se a cálculos isotérmicos. Foi também utilizada uma análise bidimensional considerando assim todas as simplificações daí recorrentes.

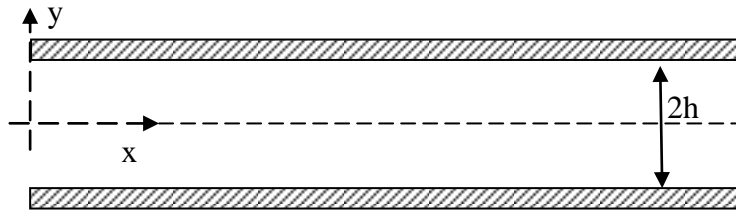


Figura 4: representação esquemática da geometria onde ocorre o escoamento, coordenadas cartesianas.

Considerando um escoamento desenvolvido, pulsado e entre placas paralelas horizontais de um fluido incompressível, a equação de conservação da massa apresentada anteriormente pode ser simplificada, apresentando a forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

Como na parede a condição de não escorregamento implica $v=0$, e integrando a expressão anterior resulta $v = \text{constante}$ então o valor que satisfaz as duas condições é $v=0$ em todos os pontos.

Considerou-se neste caso, para além da incompressibilidade, que o escoamento está instantaneamente desenvolvido o que implica $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, bem como a condição de simetria do escoamento no plano central.

Deste modo, as componentes da velocidade são:

$$u = f(y, t) \quad v = 0 \quad w = 0 \quad (4.2)$$

Se, o gradiente de pressão imposto for do tipo:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = k_s + k_0 \text{sen}(\omega t) \quad (4.3)$$

então a equação da quantidade de movimento será simplificada para:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = k_s + k_0 \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (4.4)$$

Para fluido newtoniano generalizado, a equação anterior assume a forma genérica seguinte:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_s + k_0 \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.5)$$

Neste momento do estudo surge a necessidade de introduzir uma análise dimensional das equações, que tem por objectivo generalizar a solução.

Adimensionalizando segundo:

$$y^* = \frac{y}{y_c}; \quad u^* = \frac{u}{u_c}; \quad \eta^* = \frac{\eta}{\eta_c}; \quad t^* = \frac{t}{t_c} \quad \text{sendo } t_c = T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.6)$$

$$\text{considere-se } P = k_s + k_0 \text{sen}(2\pi t^*) \quad \text{e } P^* = \frac{P}{P_c} \quad (4.7)$$

onde o índice c representa dimensões características. Obtém-se para a equação (4.5) a forma:

$$\frac{1}{t_c} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{P_c P^*}{u_c} + \frac{\eta_c}{\rho y_c^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\eta^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \quad (4.8)$$

Assumindo que a velocidade característica toma a forma:

$$u_c = \frac{2\pi k_0}{\omega} \quad (4.9)$$

e se $y_c = h$, chega-se a forma final:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = P^* + \frac{2\pi}{\alpha_c^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\eta^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \quad (4.10)$$

Onde se considerou $P_c = K_0$ e α representa o número adimensional de Womersley. Optou-se por representar o número de Womersley também com o índice c como forma de tornar a equação mais genérica uma vez que para o caso de fluidos newtonianos generalizados a viscosidade não é constante. Deste modo α_c transforma-se em α para fluidos newtonianos visto que a viscosidade é constante.

Contudo para o escoamento estar completamente caracterizado falta definir a viscosidade que se usa no modelo newtoniano generalizado. Neste trabalho efectuam-se simulações com fluidos newtonianos e newtonianos generalizados, obedecendo aos modelos de lei de potência e de Carreau simplificado.

Se $y_c = h$, falta apenas definir η_c considerando a lei do fluido. Para o primeiro caso em estudo, o fluido obedece a lei de Newton da viscosidade. Deste modo a viscosidade é constante: $\eta = \eta_c = \mu$.

A equação (4.10) pode ser escrita da seguinte forma para fluidos newtonianos:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{k_s}{k_0} + \text{sen}(2\pi t^*) + \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \quad \text{sendo: } \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\rho \omega h^2} \quad \text{e} \quad \eta^* = \frac{\eta}{\eta_c} = 1 \quad (4.11)$$

Para o segundo caso em estudo o fluido obedece ao modelo lei de potência:

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \quad (4.12)$$

Fazendo a mesma análise dimensional anterior usando a velocidade característica, equação (4.9) obtém-se:

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \left(\frac{k_0 2\pi}{\omega h} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^{n-1} \quad (4.13)$$

Considerando:

$$\eta_c = K \left(\frac{u_c}{y_c} \right)^{n-1} = K \left(\frac{k_0 2\pi}{\omega h} \right)^{n-1} \quad (4.14)$$

A equação (4.10) pode ser reescrita da seguinte forma para fluido de lei de potência:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{k_s}{k_0} + \text{sen}(2\pi t^*) + \frac{2\pi}{\alpha_c^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\eta^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \quad (4.15)$$

com:

$$\frac{1}{\alpha_c^2} = \frac{\eta_c}{\rho \omega h^2} = \frac{K k_0^{n-1} (2\pi)^{n-1}}{\rho \omega^n h^{n+1}} \quad \text{e} \quad \eta^* = \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^{n-1} \quad (4.16)$$

Para o último caso em estudo o fluido obedece ao modelo de Carreau:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) \left[1 + \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (4.17)$$

Considerando $\eta_c = \eta_0$ e utilizando um caso particular para o qual $\eta_\infty = 0$, fazendo a mesma análise dimensional usada anteriormente, podemos escrever:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda k_0 2\pi}{\omega h} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (4.18)$$

Deste modo, para o modelo de Carreau, simplificado considerando $\eta_\infty = 0$, substitui-se na equação (4.10) os parâmetros:

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_0} = \left[1 + \left(\frac{\lambda k_0 2\pi}{\omega h} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\alpha_c^2} = \frac{\eta_0}{\rho \omega h^2} \quad (4.19)$$

Refira-se o facto de em alguns trabalhos envolvendo o modelo de Carreau tais como Anderson et al. (2000), Mendes (2007), existir um número adimensional chamado “Número de Carreau” que envolve os parâmetros λ , velocidade característica e comprimento característico. Assim, à semelhança desses trabalhos, a viscosidade adimensional definida na fórmula anterior pode ser dada segundo:

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_0} = \left[1 + \left(Cu \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \quad \text{sendo o número de Carreau: } Cu = \frac{\lambda k_0 2\pi}{\omega h} \quad (4.20)$$

4.2 Método numérico para solução da equação diferencial

Nesta secção são apresentados os conceitos básicos associados à implementação das equações de forma a obter uma simulação numérica. O sucesso da simulação está dependente do modo como o problema é formulado, da adequada escolha das condições de fronteira com vista a reduzir problemas de convergência dependendo também da utilização de condições auxiliares para evitar possíveis singularidades existentes nos modelos.

4.2.1 Programa utilizado

Seguidamente é feita uma breve descrição do método utilizado para a resolução das equações apresentadas anteriormente. Utilizando o programa “Maple 13” procurou-se uma forma expedita para encontrar soluções de equações às derivadas parciais.

Tendo em conta que o problema em causa possui equações com derivadas parciais, as quais dependem de duas variáveis, tempo (t) e coordenada espacial (y), foi aplicado o procedimento “*pdsolve/numeric*” para encontrar soluções numéricas para as equações diferenciais. Usando este procedimento as soluções para o sistema de equações podem ser representadas de várias formas, os resultados são exportados pelo programa na forma de um “módulo” podendo depois ser vistos na forma de gráficos 2D, animações, ou listas de valores. Para cada forma de apresentar os resultados existem ainda várias opções relacionadas com aspectos de visualização.

Possuindo apenas uma equação que descreve o escoamento do fluido segundo um determinado modelo reológico, equação (4.10) tomando η^* e α_C^2 as formas específicas de cada modelo, poderia ser realizada a simulação numérica. Porém, foi preferível optar por separar a equação (4.10) num sistema de duas equações de ordem inferior. De facto, a utilização de apenas uma equação diferencial, com as respectivas condições de fronteira implica a utilização de equações de ordem superior o que acarreta uma degradação da precisão do método ou para evitar essa degradação, uma utilização de um refinamento de malha superior, o que provocaria um maior número de iterações e consequente aumento de tempo de processamento do programa.

Deste modo a simulação numérica utilizada tem por base os seguintes sistemas de equações:

Fluido newtoniano:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{k_s}{k_0} + \text{sen}(2\pi t^*) + \frac{2\pi}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \tau_{xy}^* \\ \tau_{xy}^* = \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \end{cases} \quad (4.21)$$

Fluido segundo o modelo lei de potência:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{k_s}{k_0} + \text{sen}(2\pi t^*) + \frac{2\pi}{\alpha_c^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \tau_{xy}^* \\ \tau_{xy}^* = \left| \beta + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|^{n-1} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \end{cases} \quad (4.22)$$

Fluido segundo o modelo de Carreau simplificado:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{k_s}{k_0} + \text{sen}(2\pi t^*) + \frac{2\pi}{\alpha_c^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \tau_{xy}^* \\ \tau_{xy}^* = \left[1 + \left(C u \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \end{cases} \quad (4.23)$$

Saliente-se o facto de ser necessário regularizar a lei de potência utilizando uma função auxiliar, β , que toma um valor constante e muito pequeno ($\beta = 10^{-15}$) como forma de evitar a existência de singularidades no modelo. Deste modo, sendo o fluido reofluidificante, quando $\partial u^*/\partial y^*$ tende para zero deixará de existir uma divisão por zero passando a dividir pelo número $\beta = 10^{-15}$. Refira-se também que para $n=1$ os modelos de lei de potência e de Carreau se transformam no modelo para fluido newtoniano como se pode verificar pelas equações anteriores.

O programa “Maple” na sua versão 13 apresenta um conjunto de onze métodos para a resolução numérica de equações diferenciais, como por exemplo o método de Euler ou o método de Crank-Nicholson, os quais apenas permitem a utilização de uma equação diferencial. Em alternativa a esse conjunto de métodos, o programa disponibiliza um método para a obtenção de soluções numéricas para sistemas de equações. Este método caracteriza-se por ser capaz de encontrar soluções para sistemas de equações diferenciais de ordem elevada, a partir da utilização de um esquema implícito centrado, de segunda ordem no espaço e no tempo.

Permite ainda uma definição manual dos espaçamentos utilizados (no tempo e espaço), sendo estabelecido inicialmente o valor do intervalo temporal e espacial a utilizar em cada iteração. Para uma dada malha existe a possibilidade de fazer um controlo de erro que tem por base um refinamento automático da malha. O programa usa uma malha com o dobro dos pontos da

definida pelo utilizador representando graficamente a solução do utilizador e o desvio (positivo e negativo) face ao refinamento da malha. Deste modo é possível verificar se as soluções obtidas são dependentes dos espaçamentos usados e qual a melhoria obtida com uma malha usando o dobro dos pontos.

4.2.2 Condições de fronteira

Para a solução numérica do sistema de equações diferenciais não basta explicitar o sistema de equações e o método utilizado para a sua resolução. Para a completa definição do problema é necessário ainda definir as condições de fronteira adequadas, ou seja, a imposição de valores específicos das grandezas, ou dos seus gradientes, nas fronteiras do domínio de cálculo.

As condições de fronteira obtêm-se normalmente em planos de simetria, paredes, entradas e saídas. A razão da escolha de uma condição de fronteira em detrimento de outras equivalentes para o mesmo problema será explicada mais adiante aquando da sua implementação, reservando-se agora os seguintes parágrafos para uma breve descrição das suas propriedades:

Paredes: tendo em conta a condição de não escorregamento na parede, a condição fronteira baseia-se em igualar a velocidade do fluido adjacente à parede à velocidade da parede, no caso de a conduta apresentar paredes imóveis. Nos casos em estudo esta condição resume-se a impor velocidade nula na parede.

Planos de simetria: por definição, os fluxos convectivos e difusivos são nulos através destes planos, o que se aplica a todas as variáveis, embora as tensões normais não sejam nulas. Tendo em conta a geometria do escoamento, entre placas paralelas ou em conduta circular, e considerando o escoamento como sendo bidimensional, obtêm-se a condição de simetria para o eixo, ou seja, considera-se simetria em relação ao plano $y=0$.

Condições temporais: sendo objecto de estudo um escoamento instacionário importa portanto indicar uma condição que expresse o ponto de partida para as iterações na variável temporal. Uma condição de fronteira usual é estabelecer a expressão da velocidade para a situação $t=0$. Esta condição apresenta-se como algo bastante simples para o caso em que a velocidade é meramente oscilatória devido, por exemplo, a um gradiente de pressão da forma $\rho k_0 \sin(\omega t)$ pois para $t=0$ o gradiente de pressão é nulo e conseqüentemente a velocidade também é nula, independentemente da posição. Por outro lado quando aliada à componente oscilatória existe uma componente constante esta condição torna-se mais difícil de definir. É então necessário encontrar a solução para a velocidade devido à existência do gradiente de pressão constante, sendo essa a condição de fronteira para o instante $t=0$ de um gradiente de pressão pulsado (componente oscilatória mais componente constante). Por exemplo, para o modelo de Carreau simplificado para o qual não foi obtido neste trabalho uma solução analítica para escoamento estacionário, a definição da condição de fronteira para um escoamento pulsado implica uma simulação numérica num procedimento independente como modo de obter a velocidade para $t=0$ ou seja apenas devido à componente constante da pressão.

4.2.3 Efeito do refinamento

O estudo da malha teve como ponto de partida a escolha de um escoamento de referência, para o qual foi avaliada a variação de valores obtidos alterando o refinamento de um parâmetro da malha. Assim, foi escolhido um caso particular do estudo desta tese, utilizando o modelo de fluido newtoniano para o qual o gradiente de pressões é da forma $\rho k_0 \text{sen}(\omega t)$, por outro lado optou-se por atribuir $\omega=0,1$ [rad/s], $h=0,001$ [m], $\rho=1000$ [kg/m³], $\mu=0,004$ [Pa.s] para os parâmetros do sistema de equações, que corresponde a $\alpha \approx 0,1581$.

Sendo o problema em estudo considerado bidimensional, as variáveis são dependentes da coordenada temporal (t^*) e da coordenada espacial (y^*) tendo em conta que o escoamento considerado não depende da posição axial. Deste modo atribuiu-se o valor do espaçamento da malha para a coordenada (y^*) igual a 0,01 que indica o valor do incremento em cada iteração segundo esta direcção. Para o estudo da influência do refinamento da coordenada temporal são realizadas sucessivas iterações usando para tal o valor de passo temporal $\Delta t^*=0,1$, $\Delta t^*=0,05$, $\Delta t^*=0,01$, $\Delta t^*=0,005$. Pretende-se assim aferir a dependência dos resultados relativamente à variação da malha temporal.

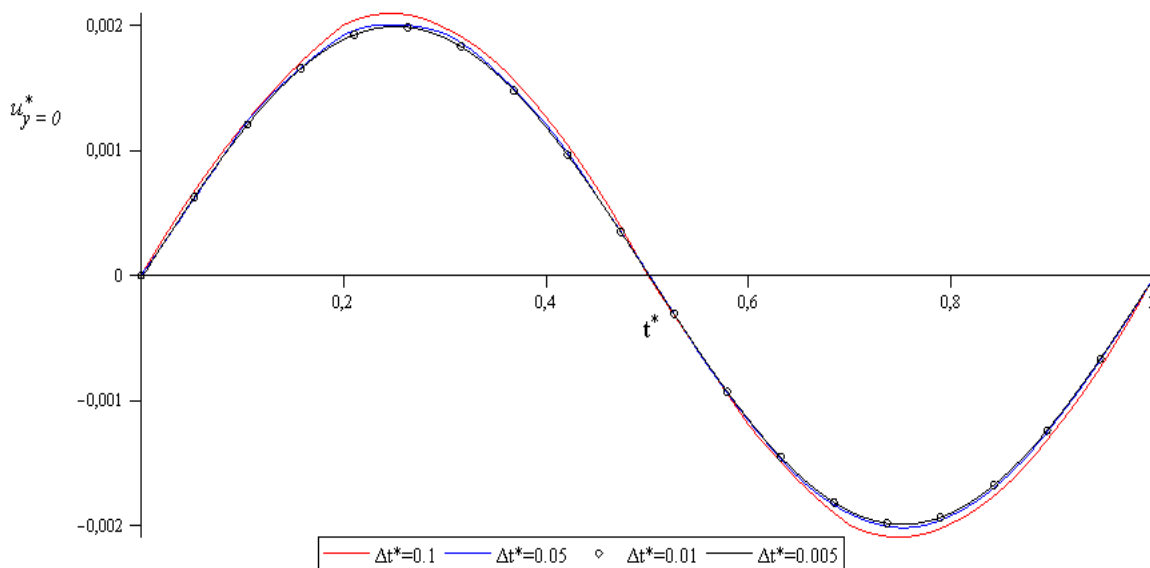


Figura 5: Evolução com o tempo da velocidade no eixo para fluido newtoniano com espaçamento de malha $\Delta y^*=0,01$ e $\Delta t^* = (0,1; 0,05; 0,01; 0,005)$.

Tabela 1: Erro obtido para $t^*=0,25$ em função do refinamento de malha no tempo e $\Delta y^*=0,01$.

Espaçamento de malha	Erro (%)
$\Delta t^*=0,1$	5,2864
$\Delta t^*=0,05$	0,6906
$\Delta t^*=0,01$	0,0499
$\Delta t^*=0,005$	0,0123

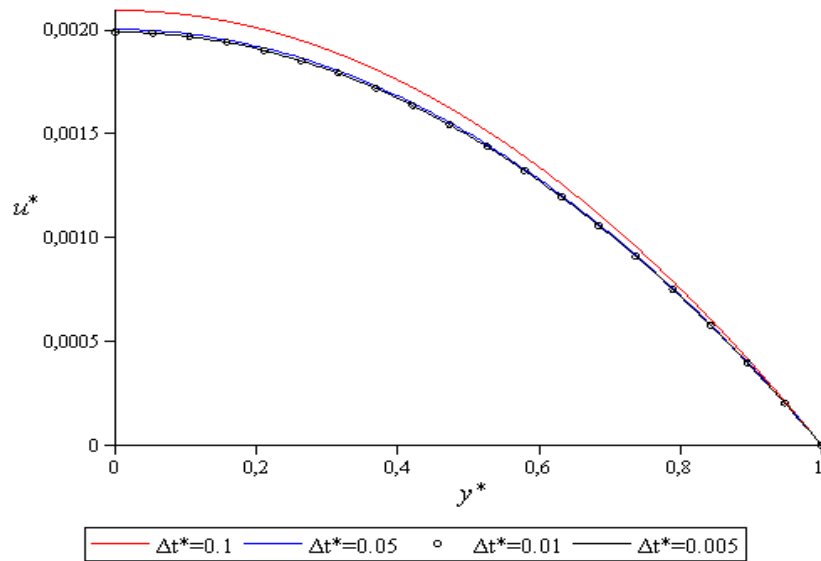


Figura 6: Perfis de velocidade para fluido newtoniano com $t^* = 0,25$, espaçamento de malha $\Delta y^* = 0,01$ e $\Delta t^* = (0,1; 0,05; 0,01; 0,005)$.

Como se pode observar pelos gráficos anteriores (figuras 5 e 6), para valores elevados do incremento temporal, os resultados obtidos são dependentes desse passo no tempo. Por outro lado, à medida que o passo do tempo é refinado os resultados convergem, apresentando-se as soluções gráficas como linhas sobrepostas. Saliente-se o facto de a partir do valor de $\Delta t^* = 0,01$ a diferença entre os resultados já ser difícil de aferir graficamente, estando no caso representado, a linha preta e os círculos sobrepostos. É também de referir que a utilização de valores muito inferiores a 0,01 torna o processo iterativo mais moroso e por vezes cria dificuldades de convergência.

Representando-se a velocidade no eixo, agora somente as linhas referentes ao passo temporal $\Delta t^* = 0,01$ e $\Delta t^* = 0,005$, com uma escala mais reduzida, verifica-se que a diferença entre estas é imperceptível.

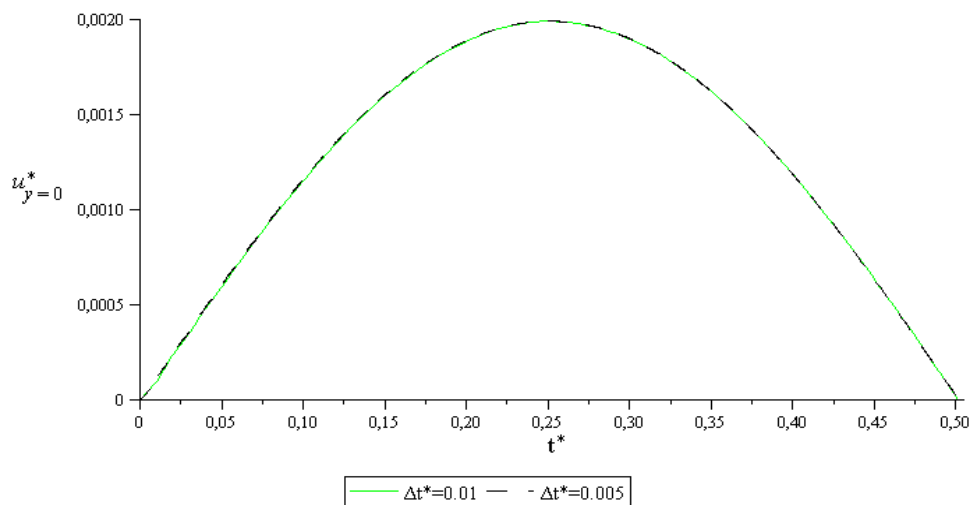


Figura 7: Evolução com o tempo da velocidade no eixo para fluido newtoniano com espaçamento de malha $\Delta y^* = 0,01$; $\Delta t^* = 0,01$ e $\Delta t^* = 0,005$.

Com o objectivo de estudar também a influência do refinamento da malha quanto à coordenada espacial (y^*) foi assumido o valor $\Delta t^*=0,01$ para o incremento temporal e foi avaliada a variação de resultados para valores de $\Delta y^*=0,4$, $\Delta y^*=0,1$, $\Delta y^*=0,04$.

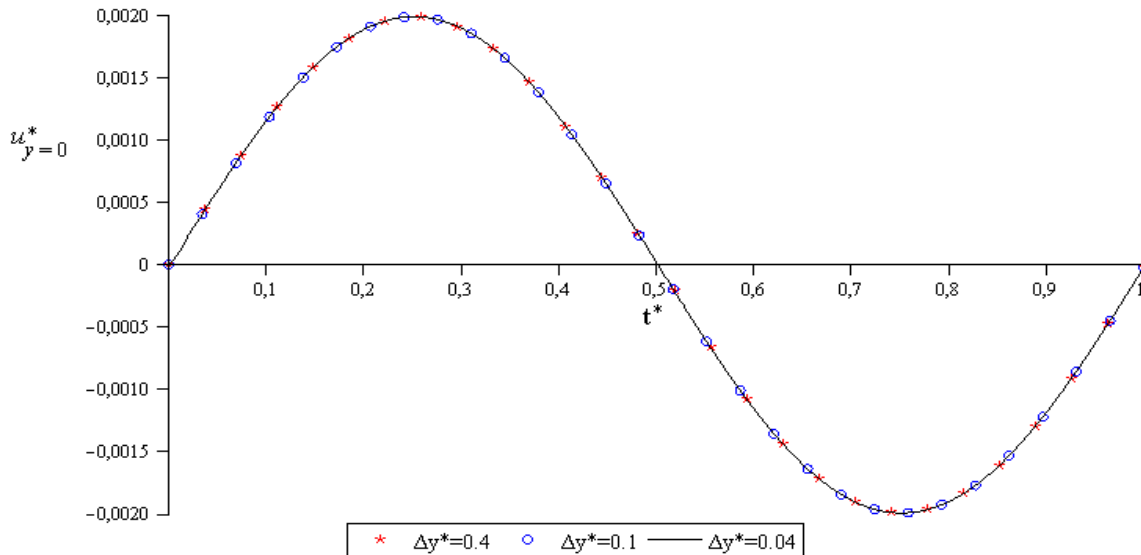


Figura 8: Evolução com o tempo da velocidade no eixo para fluido newtoniano com espaçamento de malha $\Delta t^*=0,01$ e $\Delta y^*=(0,4; 0,1; 0,04)$.

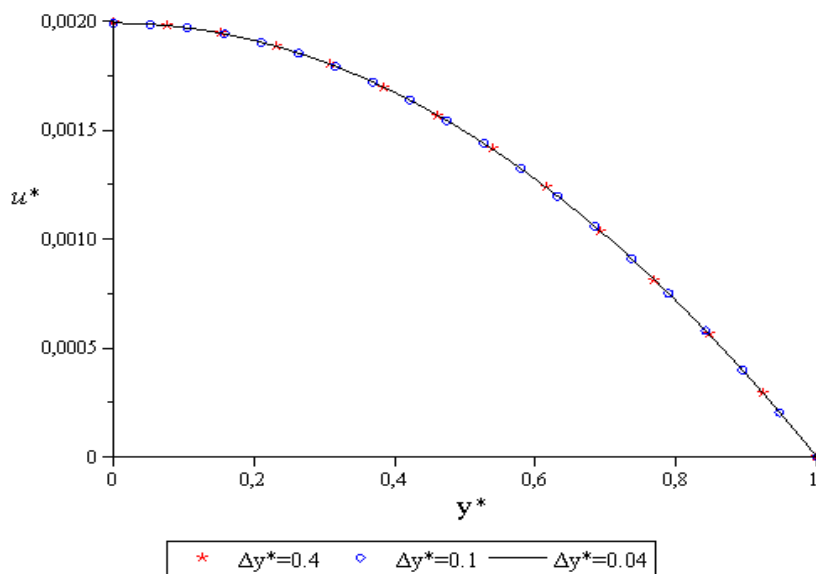


Figura 9: Perfis de velocidades para fluido newtoniano com $t^*=0,25$ e espaçamentos de malha $\Delta t^*=0,01$ e $\Delta y^*=(0,4; 0,1; 0,04)$.

Observando os gráficos acima apresentados, verifica-se uma elevada convergência dos resultados com o refinamento. Mesmo realizando uma representação para a velocidade no eixo com refinamento da malha no espaço $\Delta y^*=0,04$ e $\Delta y^*=0,01$ com uma escala mais reduzida, verifica-se que a diferença entre estas é imperceptível.

Tabela 2: Erro obtido para $t^*=0,25$ em função do refinamento de malha no espaço e $\Delta t^*=0,01$.

Espaçamento de malha	Erro (%)
$\Delta y^*=0,4$	0,0511
$\Delta y^*=0,1$	0,0501
$\Delta y^*=0,04$	0,0499
$\Delta y^*=0,01$	0,0499

A tabela 1 e a tabela 2 foram obtidas comparando os resultados das soluções numéricas com os resultados fornecidos pela solução analítica (ver secção 5.1.1), para o instante $t^*=0,25$.

É também de salientar que a convergência de valores em função do refinamento da malha está dependente dos valores atribuídos para o sistema de equações, por exemplo verificou-se que existe uma maior disparidade de resultados com a diminuição do valor do parâmetro (n) para fluidos segundo o modelo de lei de potência ou Carreau. Refira-se que o modelo utilizado é correspondente à utilização do modelo lei de potência ou de Carreau para $n=1$, tendo isso em conta, apresenta-se um gráfico para o modelo lei de potência com $n=0,5$ e $\alpha_c \approx 0,1581$:

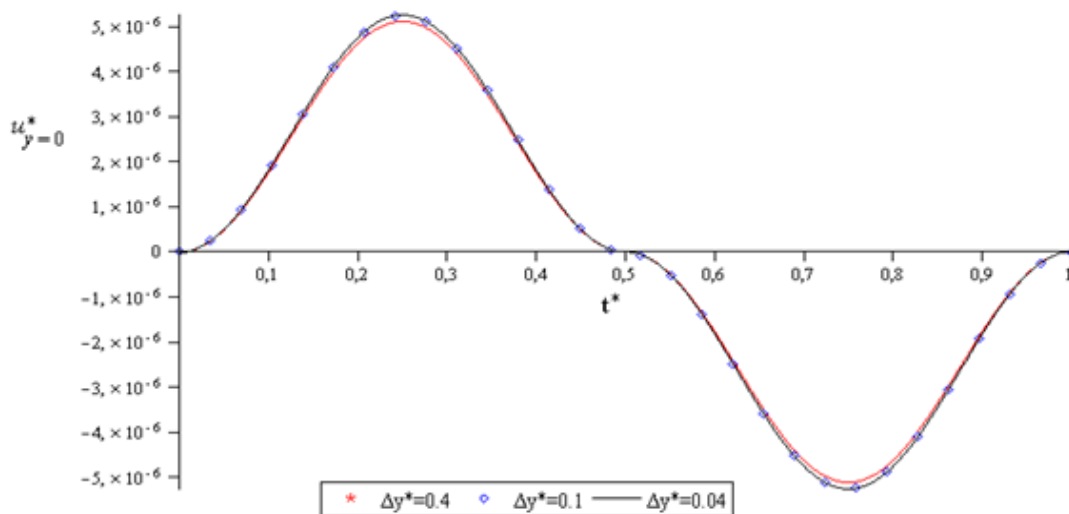


Figura 10: Evolução com o tempo da velocidade no eixo para fluido de lei de potência com $n=0,5$ e espaçamento de malha $\Delta t^*=0,01$ e $\Delta y^*=(0,4; 0,1; 0,04)$.

Esta análise teve como ponto de partida a utilização do valor $n=0,5$ pois este estudo irá incidir sobre variações de (n) entre $[0,5;1]$.

Deste modo, todas as simulações seguintes apresentadas utilizarão o espaçamento de malha $t^*=0,01$ e $y^*=0,01$. O refinamento de malha no espaço não necessitava ser tão elevado face ao estudo levado a cabo, contudo este tipo de solução demonstrou ser eficaz conciliando a precisão de resultados e questões de convergência bem como tempo de resolução necessário pelo programa.

5 Validação do cálculo

Pretende-se neste capítulo avaliar o grau de fiabilidade do cálculo numérico através da comparação de resultados com os que decorrem das soluções analíticas conhecidas. Deste modo são deduzidas as soluções para o caso de fluido newtoniano instacionário, em particular os casos oscilatório e pulsado. É também obtida a solução para escoamento estacionário de fluido governado segundo o modelo lei de potência.

5.1 Soluções analíticas

Quando o gradiente de pressão é constante, a pressão varia linearmente ao longo do tubo ou do sistema de placas paralelas, segundo a coordenada x (figura 4), mas todas as outras propriedades do escoamento tal como o caudal, as tensões ou a velocidade não variam segundo esta coordenada. Contudo deve-se referir que o gradiente de pressão entre a entrada e a saída permanece constante, este tipo de escoamento é conhecido por escoamento de Poiseuille. Quando o gradiente de pressão que governa um escoamento não é constante mas varia no tempo, as propriedades do escoamento também variam no tempo tornando-se assim dependentes deste, mas mantendo-se independentes da coordenada x . Saliente-se que este comportamento só é possível sob as condições de fluido incompressível e escoamento sem deformação da conduta.

O propósito deste trabalho consiste num estudo de escoamentos em regime instacionário ou seja quando o gradiente de pressão é função do tempo, deste modo o gradiente de pressão pode apresentar uma forma simples de onda sinusoidal ou uma onda composta. O segundo caso é abordado de uma forma específica em que o gradiente de pressão tem um valor médio não nulo, ou seja, uma parte do gradiente de pressão produz um escoamento estacionário de Poiseuille enquanto a restante componente do gradiente de pressão será puramente oscilatória.

Tendo em conta que as equações que governam o escoamento desenvolvido no interior de uma conduta para fluido newtoniano são lineares, estas duas componentes do gradiente de pressão podem ser consideradas separadamente, cada uma produzindo um escoamento como se fosse o único gradiente de pressão existente, sendo posteriormente adicionados os efeitos, obtendo-se assim um escoamento devido ao gradiente de pressão composto, por analogia com as soluções analíticas realizadas em Duarte et al. (2008) e em Zamir (2005).

Seguidamente apresenta-se a dedução analítica para o escoamento de fluido newtoniano provocado por um gradiente de pressão constante, obtém-se também a solução analítica para o mesmo escoamento mas provocado por um gradiente de pressão oscilatório, sendo finalmente apresentada a solução para um gradiente de pressão pulsado, que se resume à soma das duas soluções tal como foi referido anteriormente. Posteriormente apresenta-se a solução analítica para um gradiente de pressão constante, escoamento de Poiseuille, para um fluido que

obedece a um modelo lei de potência. Saliente-se que não foi possível obter soluções analíticas para este modelo nas condições de gradiente de pressão dependente do tempo, fazendo-se aqui uma referência à solução aproximada obtida por Daprà et al. (2006). Também não foi possível obter a solução analítica para gradiente de pressão dependente do tempo para o caso de fluido de Carreau. Deste modo a validação do cálculo terá como referência o escoamento de fluido newtoniano, reservando a solução analítica obtida para o modelo lei de potência, como condição de fronteira para o caso pulsado como será referido aquando da sua simulação numérica.

5.1.1 Escoamento oscilatório e pulsado de fluido newtoniano

Considerando a equação da quantidade de movimento:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (5.1)$$

sob a acção do seguinte gradiente de pressão:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = k_s + k_0 \text{sen}(\omega t) \quad (5.2)$$

Resolvendo o escoamento devido apenas à componente estacionária, escoamento de Poiseuille:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = k_s \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = k_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (5.3)$$

Para a solução estacionária, a velocidade não depende do tempo:

$$-k_s \rho = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \Leftrightarrow \tau_{xy} = -k_s \rho y + C_1 \quad (5.4)$$

Tendo em conta a condição de simetria do escoamento no eixo:

$$y = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Leftrightarrow \tau_{xy} = -k_s \rho y \quad (5.5)$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow -k_s y = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow u = \frac{-k_s y^2}{2\nu} + C_2 \quad (5.6)$$

Devido à condição de não escorregamento na parede:

$$y = h \Rightarrow u = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{k_s h^2}{2\nu} \Leftrightarrow u = \frac{-k_s y^2}{2\nu} + \frac{k_s h^2}{2\nu} \Leftrightarrow u = \frac{k_s}{2\nu} (h^2 - y^2) \quad (5.7)$$

Usando a mesma análise dimensional que foi utilizada nos capítulos anteriores:

$$y^* = \frac{y}{h} \quad e \quad u^* = u \frac{\omega}{k_0 2\pi} \quad (5.8)$$

$$u^* = \frac{k_s}{2\pi k_0} \frac{\omega}{2\nu} (h^2 - (y^*)^2 h^2) = \frac{k_s}{2\pi k_0} \frac{\omega}{2\nu} (h^2 (1 - y^{*2})) \quad (5.9)$$

Note-se que sendo α o número de Womersley dado pela expressão:

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{\mu/\omega\rho}} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{\omega h^2}{\nu} \quad (5.10)$$

então a expressão da velocidade pode ser reescrita na forma:

$$u^* = \frac{k_s}{2\pi k_0} \frac{\alpha^2}{2} (1 - y^{*2}) \quad (5.11)$$

Esta é pois a solução estacionária.

A título de exemplo representa-se na figura 11 um caso específico da equação anterior sendo $K_s = K_0$ e $\alpha = 0,5$:

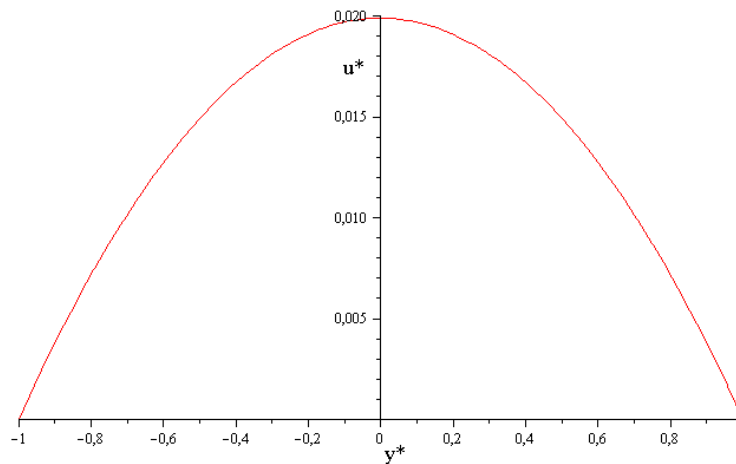


Figura 11: Solução analítica do perfil de velocidade para escoamento estacionário de fluido newtoniano com $\alpha=0,5$.

Resolvendo agora o escoamento apenas devido à componente dependente do tempo (oscilatório):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = k_0 \text{sen}(\omega t) \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.13)$$

Sendo o gradiente de pressão expresso na forma exponencial:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -i k_0 e^{(i\omega t)} \quad (5.14)$$

Refira-se que neste caso a velocidade depende do tempo e da coordenada espacial y , por outro lado, o gradiente de pressão foi expresso na forma exponencial. A resolução da equação diferencial resultante não é directa, de facto surge a necessidade de indicar a forma de dependência da velocidade, para posterior resolução. Assim assume-se que a velocidade apresenta determinada forma, explicitando a sua dependência, obtendo-se uma solução que será uma solução particular da equação diferencial de segunda ordem inicial.

Considerando que a velocidade depende do espaço segundo uma função $f(y)$, e depende do tempo segundo uma função semelhante à pressão que governa o escoamento, a velocidade toma a forma:

$$u(y, t) = f(y)e^{(i\omega t)} \quad (5.15)$$

Então:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (i\omega)f e^{(i\omega t)} \quad e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'' e^{(i\omega t)} \quad (5.16)$$

onde f'' significa segunda derivada de f em ordem a y .

$$(i\omega)f e^{(i\omega t)} = -ik_0 e^{(i\omega t)} + \nu f'' e^{(i\omega t)} \Leftrightarrow (i\omega)f = -ik_0 + \nu f'' \quad (5.17)$$

$$\Leftrightarrow f'' - \frac{(i\omega)}{\nu} f - i \frac{k_0}{\nu} = 0 \quad (5.18)$$

Fazendo uma mudança de variável da forma:

$$G = f + \frac{(k_0)}{\omega} \Rightarrow f = -\frac{(k_0)}{\omega} + G \quad (5.19)$$

A equação (5.18) fica:

$$G'' - \frac{(i\omega)}{\nu} G = 0 \quad (5.20)$$

É uma equação homogénea, sendo a equação característica: $Z^2 = \sqrt{i\omega/\nu}$

A solução geral deste tipo de equações diferenciais pode ser encontrada em Kreyszig (1999) tomando a forma: $G = A \cosh(Zy) + B \sinh(Zy)$, deste modo, tendo em conta as seguintes condições de fronteira,

$$u(h, t) = 0 \Rightarrow f(h) = 0 \quad \text{logo: } G(h) = \frac{k_0}{\omega} \quad (5.21)$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow G'(0) = f'(0) = 0 \quad (5.22)$$

$$\begin{cases} \frac{(k_0)}{\omega} = A \cosh(Zh) + B \sinh(Zh) \\ 0 = Z A \sinh(0) + Z B \cosh(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{k_0}{\omega \cosh(Zh)} \\ B = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

$$G(y) = \frac{k_0 \cosh(Zy)}{\omega \cosh(Zh)} \Rightarrow f = \frac{k_0 \cosh(Zy)}{\omega \cosh(Zh)} - \frac{k_0}{\omega} \quad (5.24)$$

$$f = \frac{k_0}{\omega} \left(\frac{\cosh(Zy)}{\cosh(Zh)} - 1 \right) \Rightarrow u(y, t) = \frac{k_0}{\omega} \left[\frac{\cosh \left(y \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)}{\cosh \left(h \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)} - 1 \right] e^{(i\omega t)} \quad (5.25)$$

Adimensionalizando, segundo:

$$y^* = \frac{y}{h}; \quad u^* = u \frac{\omega}{2\pi k_0}; \quad e \quad t^* = \frac{t}{T} \quad \text{com: } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.26)$$

$$\Leftrightarrow u^*(y^*, t^*) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cosh \left(y^* h \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)}{\cosh \left(h \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)} - 1 \right] e^{(i2\pi t^*)} \quad (5.27)$$

$$\Leftrightarrow u^*(y^*, t^*) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cosh \left(y^* \sqrt{i} \sqrt{\frac{h^2 \omega}{\nu}} \right)}{\cosh \left(\sqrt{i} \sqrt{\frac{h^2 \omega}{\nu}} \right)} - 1 \right] e^{(i2\pi t^*)} \quad (5.28)$$

Como: $\alpha = \sqrt{\frac{\omega h^2}{\nu}}$ então:

$$u^*(y^*, t^*) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cosh (y^* \alpha \sqrt{i})}{\cosh (\alpha \sqrt{i})} - 1 \right] e^{(i2\pi t^*)} \quad (5.29)$$

Finalmente a expressão para a velocidade num escoamento pulsado pode ser expressa juntando as equações (5.11) e (5.29), sob a forma adimensional seguinte:

$$u^*(y^*, t^*) = \frac{k_s}{2\pi k_0} \frac{\alpha^2}{2} (1 - y^{*2}) + Re \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cosh (y^* \alpha \sqrt{i})}{\cosh (\alpha \sqrt{i})} - 1 \right] e^{(i2\pi t^*)} \right\} \quad (5.30)$$

Onde Re significa a parte real do termo dentro de chavetas.

A título de exemplo representa-se na figura 12 a evolução com o tempo da velocidade no eixo, e na figura 13 representa-se o perfil de velocidades para $t^* = 0,26$. Nas duas figuras foi utilizado $K_s = K_0$ e $\alpha = 0,5$

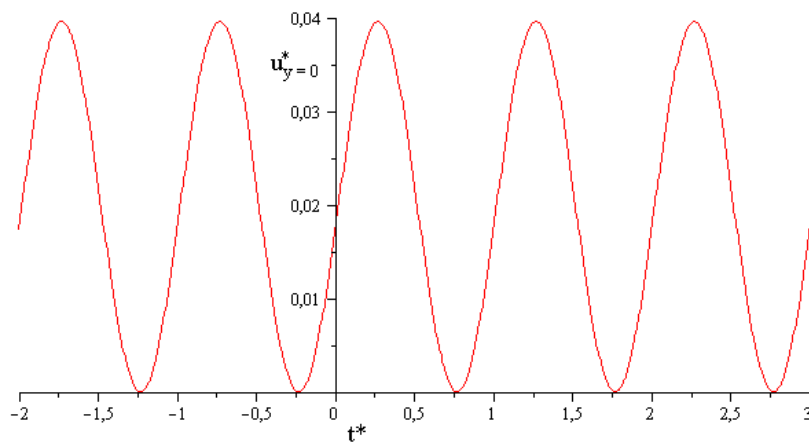


Figura 12: Solução analítica da variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento pulsado de fluido newtoniano com $K_s=K_0$ e $\alpha=0,5$.

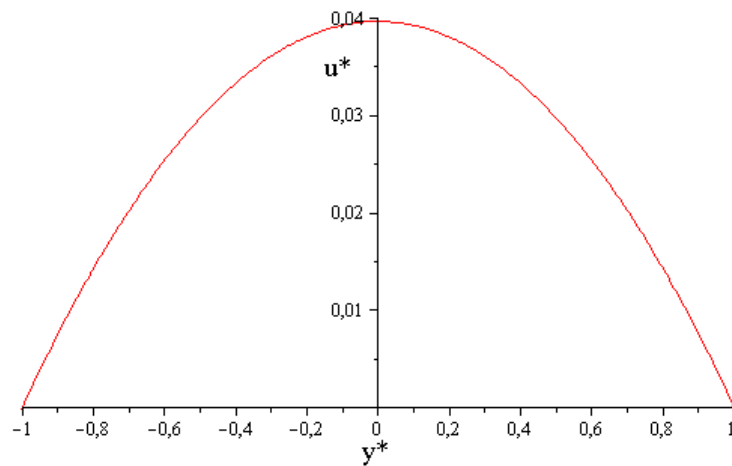


Figura 13: Solução analítica do perfil de velocidade para escoamento pulsado de fluido newtoniano com $K_s=K_0$, $\alpha=0,5$ e $t^*=0,26$.

5.1.2 Escoamento estacionário de fluido segundo a lei de potência

Considerando a equação da quantidade de movimento:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (5.31)$$

Seja:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (5.32)$$

Para o modelo lei de potência, a tensão pode ser dada pela relação:

$$\tau_{xy} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.33)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Leftrightarrow y \frac{\partial p}{\partial x} = K \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.34)$$

Considerando que o gradiente de pressão é sempre negativo, então $u > 0$, é possível reescrever a equação anterior na forma:

$$y \frac{\partial p}{\partial x} = -K \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad (5.35)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{K} y \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n} (y)^{1/n} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.36)$$

$$u = - \left(-\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{(y)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n} + 1} + C_1 \quad (5.37)$$

Tendo em conta as condições de fronteira, a velocidade junto à parede é nula logo:

$$y = h \Rightarrow u = 0 \Rightarrow C_1 = \left(-\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{(h)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n} + 1} \quad (5.38)$$

$$u = \left(-\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{(h)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n} + 1} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right) \quad (5.39)$$

Adimensionalizando a equação anterior segundo:

$$y^* = \frac{y}{h}; \quad u^* = u \frac{\omega}{2\pi k_0} \quad e \quad com : \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho k_s \quad (5.40)$$

$$u^* \frac{2\pi k_0}{\omega} = \left(\frac{\rho k_s}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{(h)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \left(1 - (y^*)^{\frac{1}{n}+1}\right) \quad (5.41)$$

$$u^* 2\pi k_0 (K)^{\frac{1}{n}} = \omega (\rho)^{\frac{1}{n}} (k_s)^{\frac{1}{n}} \frac{(h)^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}}{\frac{1+n}{n}} \left(1 - (y^*)^{\frac{1}{n}+1}\right) \quad (5.42)$$

Elevando os dois membros da equação a (n):

$$(u^*)^n = \frac{\omega^n \rho h^{n+1}}{(2\pi)^n k_0^n K} \frac{k_s}{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n} \left[1 - (y^*)^{\frac{1}{n}+1}\right]^n \quad (5.43)$$

$$(u^*)^n = \frac{\omega^n \rho h^{n+1}}{(2\pi)^{n-1} k_0^{n-1} K} \frac{k_s}{2\pi k_0 \left(\frac{1+n}{n}\right)^n} \left[1 - (y^*)^{\frac{1}{n}+1}\right]^n \quad (5.44)$$

Tendo em conta a definição do número de Womersley característico para o escoamento de fluido segundo o modelo lei de potência, equação (4.16), a expressão anterior pode ser escrita na forma:

$$(u^*)^n = \alpha_C^2 \frac{k_s}{2\pi k_0 \left(\frac{1+n}{n}\right)^n} \left[1 - (y^*)^{\frac{1+n}{n}}\right]^n \quad (5.45)$$

$$u^* = \left[\alpha_C^2 \frac{k_s}{2\pi k_0 \left(\frac{1+n}{n}\right)^n} \right]^{\frac{1}{n}} \left(1 - (y^*)^{\frac{1+n}{n}}\right) \quad (5.46)$$

Para a velocidade no eixo da conduta a equação anterior simplifica ficando apenas:

$$u^*_{eixo} = \left[\alpha_C^2 \frac{k_s}{2\pi k_0 \left(\frac{1+n}{n}\right)^n} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (5.47)$$

A título de exemplo representa-se na figura 14 um caso específico dos perfis de velocidade sendo $K_s=K_0$ e $\alpha_c=0,5$ em função do valor de n :

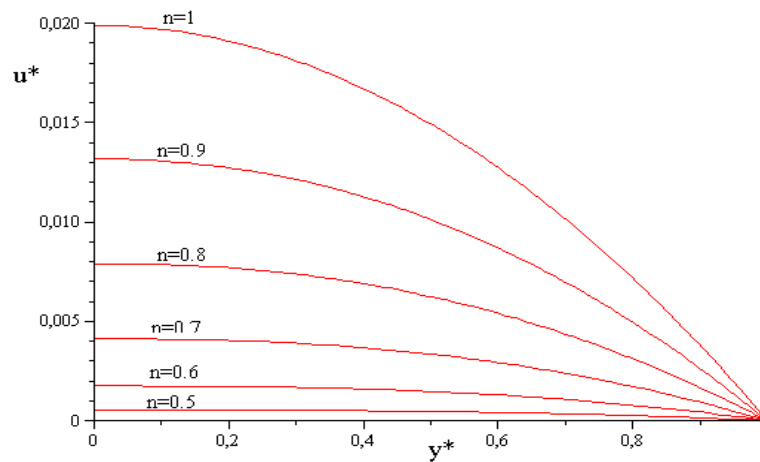


Figura 14: Solução analítica dos perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,5$ e diferentes valores de n .

5.2 Validação por comparação entre resultados numéricos e analíticos

Nesta secção são comparados graficamente os valores obtidos através da formulação do escoamento para fluido newtoniano pelo método numérico e os obtidos através da representação gráfica da equação analítica para este modelo.

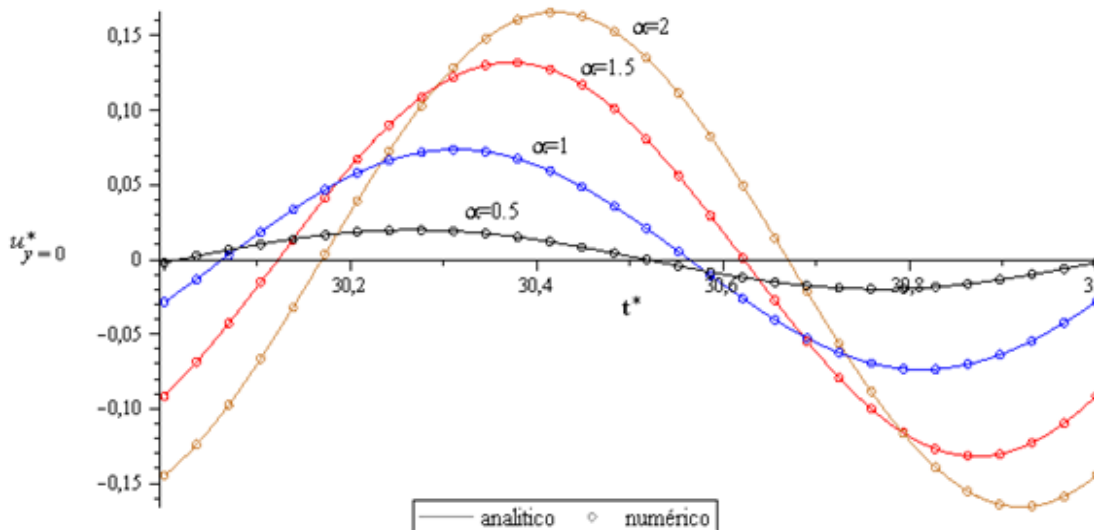


Figura 15: Soluções analíticas e numéricas com fluido newtoniano para a velocidade no eixo, variando o número de Womersley. Espaçamento de malha $\Delta t^*=0,01$ e $\Delta y^*=0,01$.

Para as comparações da figura 15 deve-se referir que a escolha do intervalo temporal não foi ao acaso. De facto, aquando da obtenção da solução analítica foi assumida uma determinada forma para a velocidade sendo esta escrita através de uma função da coordenada espacial e de uma função do tempo. Desse modo, como foi dito anteriormente, a solução analítica

corresponde a uma solução particular e não à solução geral. A solução analítica obtida contempla apenas o escoamento quando o regime oscilatório se encontra completamente estabelecido, deste modo foi escolhido um intervalo temporal (adimensional) suficientemente elevado para permitir que as soluções numéricas contenham apenas o escoamento na sua forma desenvolvida.

Na figura 16 apresenta-se um gráfico para um instante de tempo elevado ($t^*=31,25$) proporcionando assim a visualização dos perfis de velocidade para escoamentos já desenvolvidos, evitando a representação gráfica por parte das simulações numéricas da componente inicial transiente. Seguiu-se também o mesmo método utilizado para o gráfico anterior, utilizando sempre o mesmo refinamento de malha e realizando simulações para diferentes números de Womersley:

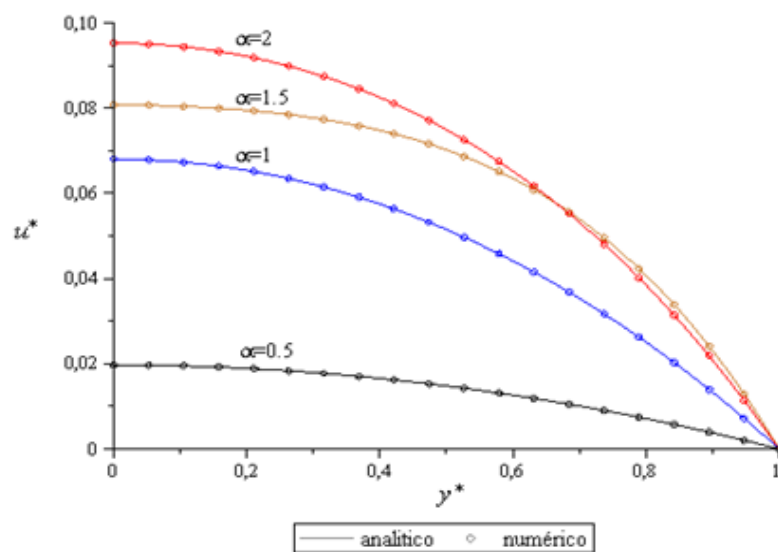


Figura 16: Soluções analíticas e numéricas com fluido newtoniano para os perfis de velocidade, variando o número de Womersley e com $t^*=31,25$. Espaçamento de malha $\Delta t^*=0,01$ e $\Delta y^*=0,01$.

Tabela 3: Valor do erro para a velocidade no eixo em $t^*=31,25$ em função de α

Nº de Womersley	Erro (%)
$\alpha=0,5$	0,0488
$\alpha=1,0$	0,0409
$\alpha=1,5$	0,0216
$\alpha=2,0$	0,0025

Como se pode compreender pelas figuras 15 e 16, verifica-se uma grande correspondência de valores entre as simulações numéricas e analíticas. Uma das razões apontadas para justificar este facto poderá ser o refinamento de malha escolhido, tal como foi demonstrado na secção 4.2.3. É contudo de referir que apenas possuímos solução analítica para o caso newtoniano instacionário, assim, esta validação servirá de referência para os restantes casos, lembrando que a existência de outros parâmetros nos modelos lei de potência e Carreau poderão ter alguma influência na precisão dos resultados.

Seguidamente representa-se na figura 17 a variação com o tempo da velocidade no eixo para diferentes números de Womersley mas com uma malha menos refinada, ou seja, $\Delta t^*=0,1$ e $\Delta y^*=0,1$, evidenciando assim o efeito do refinamento para a precisão dos resultados. Para finalizar este capítulo representa-se na figura 18 um exemplo do caso pulsado para número de Womersley igual a 0,5 e provocado por um gradiente de pressão dado pela equação (5.2) com $k_o = k_s = 0,1$ [m/s²], com o refinamento de malha que será utilizado para obter os resultados presentes no capítulo seguinte: $\Delta t^*=0,01$ e $\Delta y^*=0,01$.

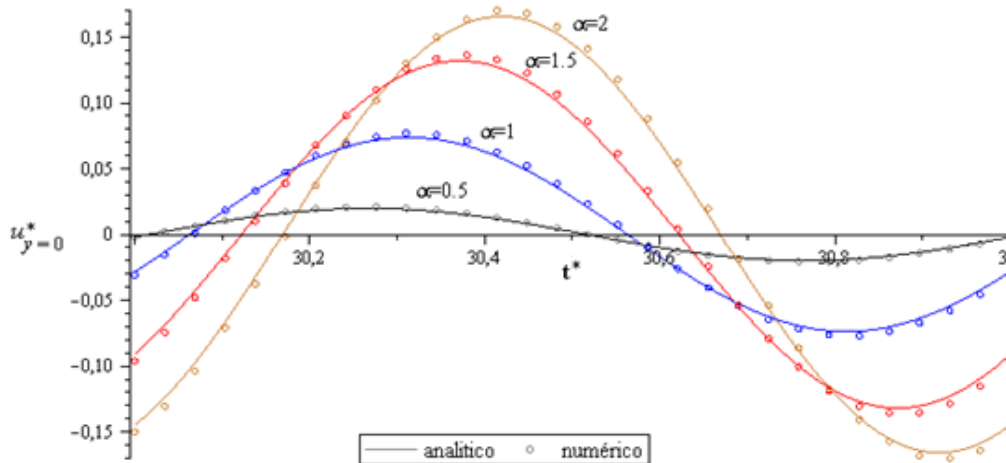


Figura 17: Soluções analíticas e numéricas com fluido newtoniano para a velocidade no eixo, variando o número de Womersley. Espaçamento de malha $\Delta t^*=0,1$ e $\Delta y^*=0,1$.

Como se pode verificar na figura 17, é já visível uma disparidade entre os resultados obtidos de forma numérica e analítica. Quanto à figura 18, verifica-se que o refinamento de malha $\Delta t^*=0,01$ e $\Delta y^*=0,01$ escolhido para a obtenção dos resultados e descrito de forma mais pormenorizado na secção 4.2.3 garante também uma boa precisão para o caso pulsado.

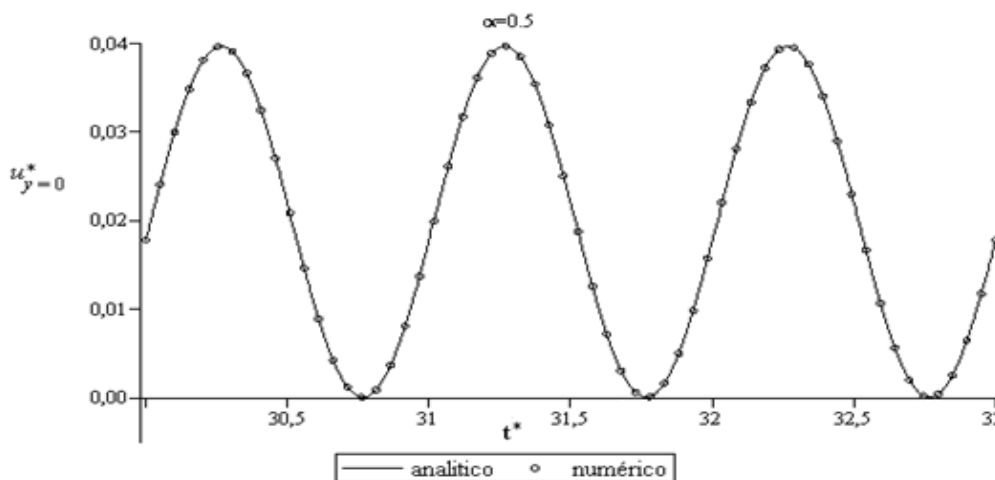


Figura 18: Soluções analíticas e numéricas para a velocidade no eixo para escoamento pulsado de fluido newtoniano, $\alpha=0,5$. Espaçamento de malha $\Delta t^*=0,01$ e $\Delta y^*=0,01$.

6 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados provenientes da simulação numérica dos sistemas de equações propostos no capítulo 5 e das respectivas condições de fronteira. Face à impossibilidade de representar todos os resultados obtidos, as representações gráficas escolhidas bem como as normalizações realizadas neste capítulo têm como objectivo uma melhor demonstração das propriedades dos escoamentos em estudo.

6.1 Fluido newtoniano

O sistema de equações para escoamento de um fluido newtoniano apresenta-se como o caso mais simples deste trabalho mas de grande relevância. De facto neste modelo apenas intervêm parâmetros como a frequência angular, a massa volúmica, a altura da conduta e a viscosidade que é constante, podendo deste modo ser convertidos num parâmetro adimensional, o número de Womersley, tendo apenas interesse o estudo da variação desse parâmetro de modo a tornar os resultados mais genéricos. Será assim feito um estudo mais exaustivo deste modelo visto o seu interesse para o estudo da hemodinâmica como já foi referido e pelo facto de os outros dois modelos apresentarem o caso newtoniano como solução particular ($n=1$), servindo este estudo de referência para os modelos de lei de potência e de Carreau.

6.1.1 Escoamento oscilatório

Como foi dito anteriormente, o número de Womersley representa a relação entre as forças de inércia e as forças viscosas, desta forma o primeiro estudo numérico pretende avaliar a influência deste parâmetro em escoamentos oscilatórios entre placas paralelas. As condições de fronteira usadas nestas simulações são: velocidade nula junto à parede, ou usando as coordenadas adimensionais, $u^*(1, t^*)=0$, velocidade nula quando $t^*=0$, independentemente do valor de y^* , ou seja, $u(y^*, 0)=0$. É ainda necessária mais uma condição de fronteira, assim foi escolhida a condição de tensão nula no eixo, $\tau_{xy}^*(0, t^*)$. Poderia ter sido escolhida a condição de derivada da velocidade nula para o eixo, porém seria uma condição de segunda ordem deteriorando a precisão dos resultados.

Nos primeiros dois gráficos apresentados nesta secção, figuras 19 e 20 representa-se à variação da velocidade no eixo para um valor de número de Womersley igual a 0,5, e representa-se a variação da velocidade no eixo em simultâneo para valores de número de Womersley igual a 0,5; 2; 5; 10. A título de exemplo refere-se que estes valores de α podem ser obtidos considerando $\rho=1000$ [kg/m³], $\omega=1$ [rad/s], $\mu=0,004$ [Pa.s] e $h=0,001$ [m]; 0,004 [m]; 0,01 [m]; 0,02 [m], respectivamente.

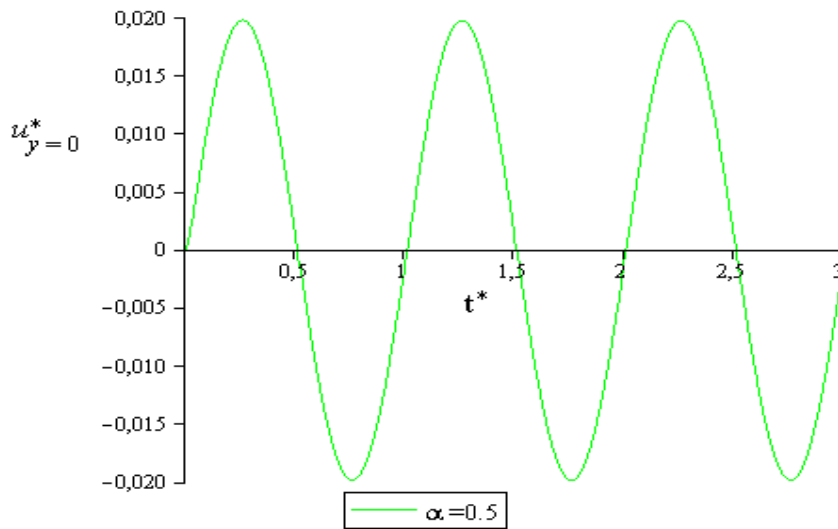


Figura 19: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $\alpha=0,5$.

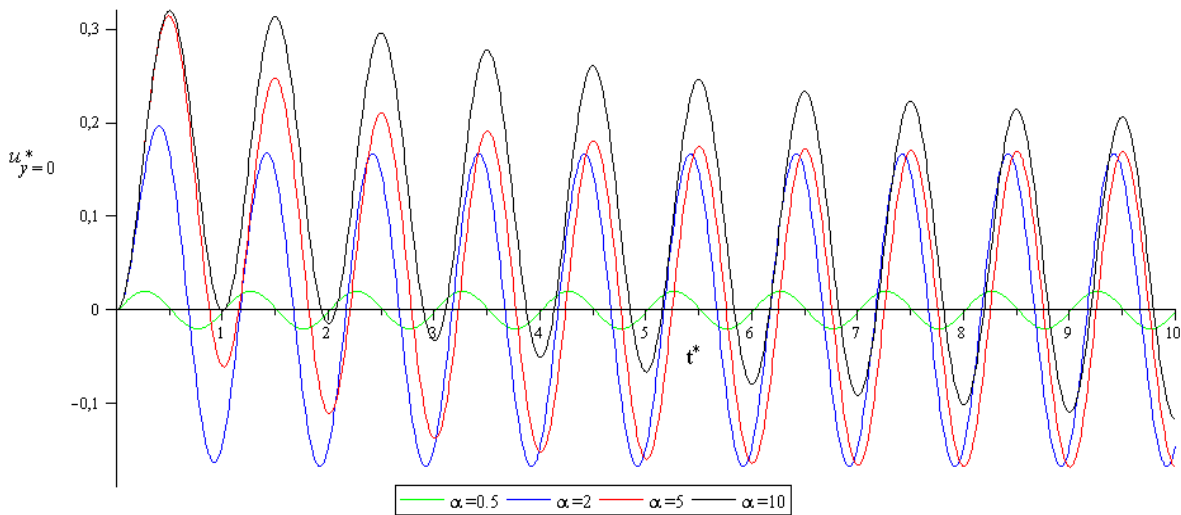


Figura 20: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano em função de α .

Observando os dois gráficos acima representados fica claro que com o aumento do número de Womersley aumenta o desfasamento da velocidade. Por outro lado verifica-se que para valores mais elevados deste número aumenta o regime instacionário inicial.

Porém, a análise adimensional realizada não permite tirar conclusões quanto ao efeito das forças de inércia na amplitude da velocidade. Uma forma de poder comparar a variação das amplitudes de velocidade em função do tempo para diferentes valores de α é assim realizar uma normalização que relacione o escoamento instacionário com o escoamento de Poiseuille equivalente. Deste modo optou-se por dividir as velocidades adimensionais obtidas para o escoamento oscilatório pela velocidade adimensional máxima de um escoamento de Poiseuille provocado por um gradiente de pressão com amplitude igual à amplitude do

escoamento pulsado mas sem a componente dependente do tempo, ou seja, com $k_{\text{poiseuille}}=k_0$. A velocidade adimensional máxima ou seja, no eixo da conduta, para um escoamento de Poiseuille equivalente será designada ao longo das secções seguintes por u_p^* . Os resultados desta normalização estão representados graficamente nas figuras 21 para $\alpha=0,5$ e $\alpha=2$ e nas figuras 22 e 23 para $\alpha=5$ e $\alpha=10$, respectivamente.

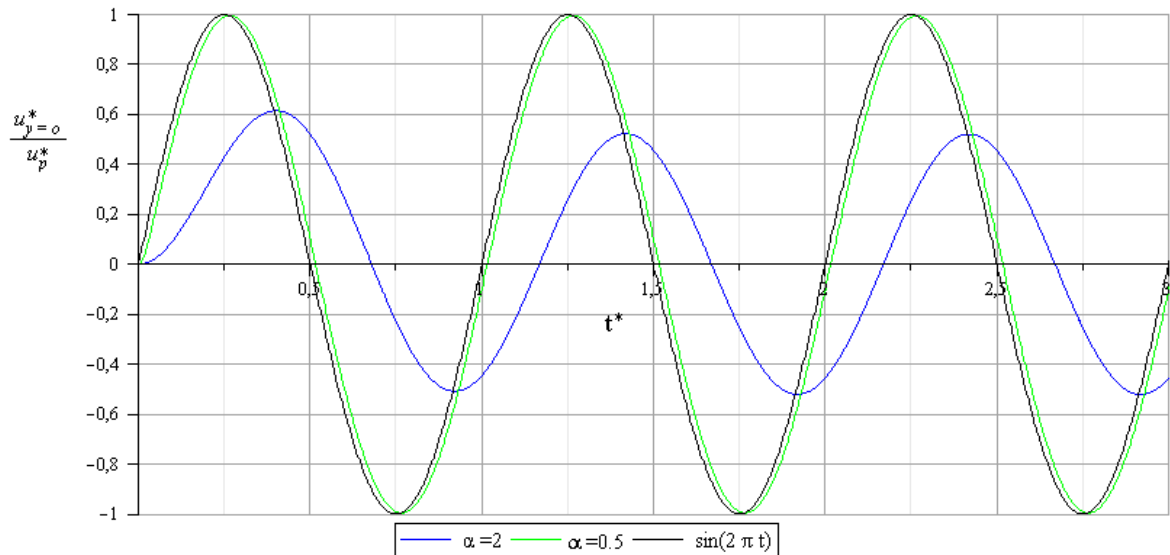


Figura 21: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com diferentes valores de α .

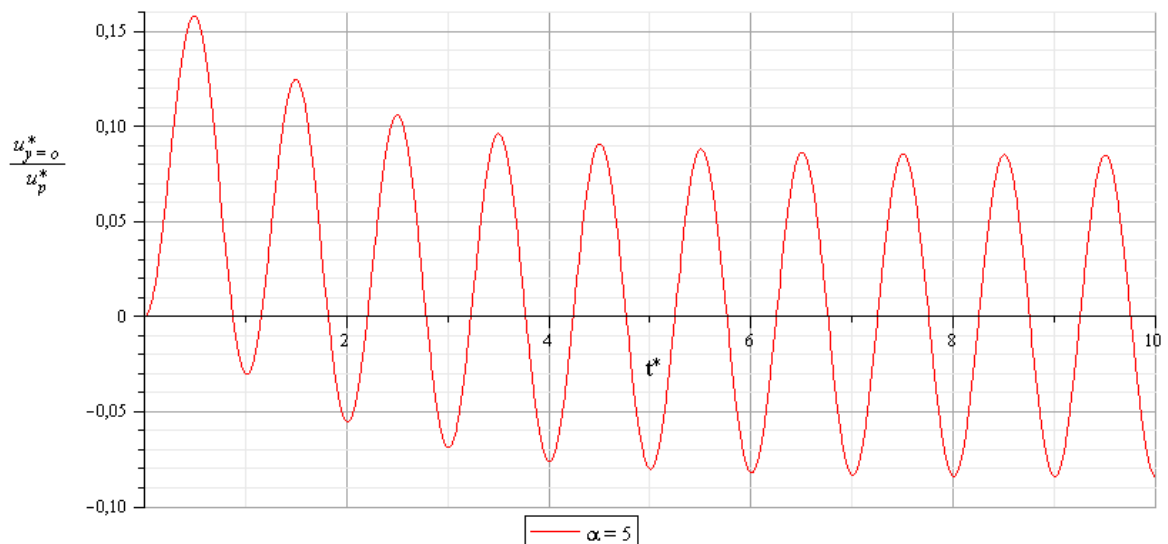


Figura 22: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $\alpha=5$.

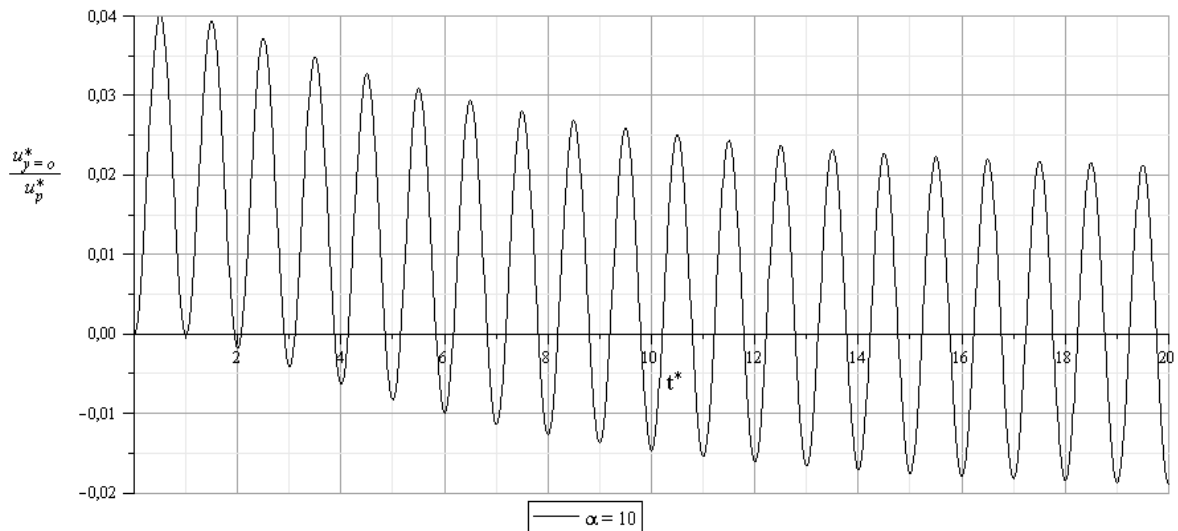


Figura 23: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $\alpha=10$.

Os gráficos para $\alpha=5$ e $\alpha=10$ foram realizados separadamente tendo em conta a diferença de valores relativamente aos apresentados pelo gráfico de $\alpha=2$ e $\alpha=0,5$ e os condicionamentos que a escala provocaria se fossem representados em simultâneo. Na figura 21 foi também representada a função oscilatória que rege o gradiente de pressão como forma de tornar mais fácil a visualização do desfasamento com o aumento das forças de inércia (aumento de α). Verifica-se assim que para valores de α inferiores à unidade, representado na figura 21 pela linha de $\alpha=0,5$, as forças viscosas são predominantes relativamente às forças de inércia tal como já tinha sido referido anteriormente. Porém verifica-se já uma pequena diminuição da amplitude que pode ser comprovada pelo facto de a amplitude máxima não atingir o valor unitário e observa-se um ligeiro desfasamento relativamente à função oscilatória da pressão. Deste modo, à medida que o valor de α aumenta, aumenta o valor das forças de inércia, traduzindo-se num desfasamento mais elevado, uma componente inicial instacionária que se prolonga por um maior número de ciclos e uma grande diminuição da amplitude face à amplitude que este escoamento apresentaria se fosse estacionário. Como se pode verificar na figura 22 para de $\alpha=5$, após completamente atingido o regime oscilatório, a velocidade máxima atingida neste escoamento representa menos de 10% da velocidade obtida para um escoamento de Poiseuille equivalente. No gráfico de $\alpha=10$ verifica-se que ao fim de 20 ciclos o regime oscilatório ainda não está completamente estabelecido.

Na figura 24 representam-se os perfis de velocidade para $\alpha=2$, para diferentes instantes de tempo. Representa-se também o perfil de velocidades para o escoamento de Poiseuille equivalente ($\alpha=2$ e $k_{Poiseuille} = k_0$) também normalizado relativamente à velocidade máxima de um escoamento de Poiseuille equivalente.

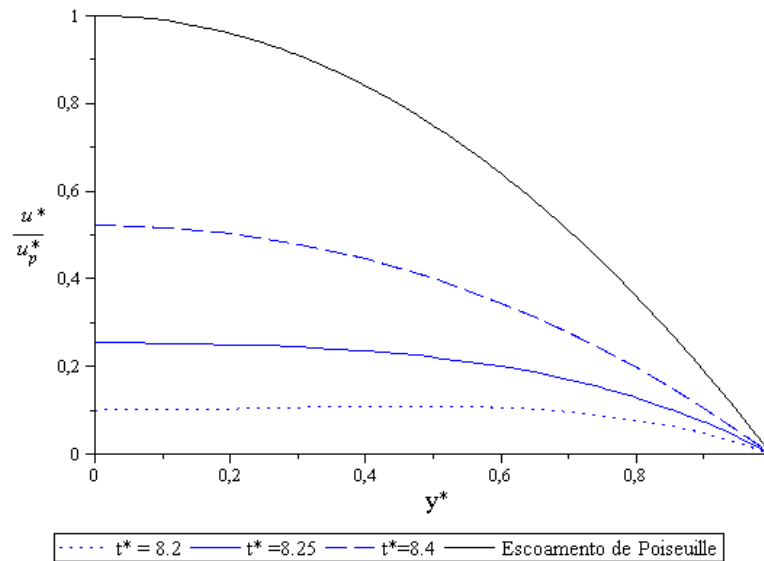


Figura 24: Perfis de velocidade normalizada para diferentes instantes de tempo e $\alpha=2$.

Os instantes de tempo foram escolhidos de forma a pertencerem à zona oscilatória completamente desenvolvida, evitando a zona instacionária inicial. Pretende-se assim salientar o facto de que a velocidade obtida para escoamentos instacionários é sempre inferior à obtida para o escoamento de Poiseuille equivalente e o valor máximo de velocidade para o escoamento não ocorre quando o gradiente de pressão é máximo. Sendo o gradiente de pressão dependente de uma função do tipo $\sin(2\pi t^*)$, o seu máximo ocorre neste caso para $t^*=8,25$, pelo contrário quando $\alpha=2$ a velocidade em $t^*=8,4$ é superior à velocidade em $t^*=8,25$ não estando em concordância relativamente à pressão máxima.

Na figura 25 representam-se os perfis de velocidade para diversos valores de α . De facto o perfil de velocidades do escoamento de Poiseuille é praticamente coincidente com o perfil de velocidades para o caso de α inferior à unidade ($\alpha=0,5$). Refira-se que neste caso o desfaseamento relativamente à oscilação da pressão é consideravelmente baixo. Por outro lado, as representações para α superiores não se referem a perfis de velocidade para os valores máximos do ciclo devido ao desfaseamento criado pelas forças de inércia. Apesar disso, a amplitude máxima da velocidade será também consideravelmente inferior à amplitude máxima da velocidade obtida para escoamento de Poiseuille.

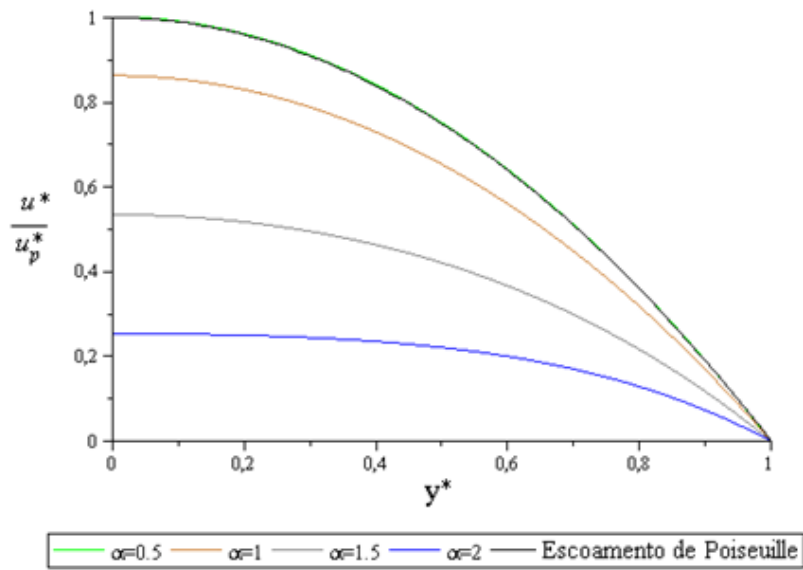


Figura 25: Perfis de velocidade normalizada para diferentes valores de α , $t^*=60,25$.

Representam-se agora graficamente alguns resultados referentes ao estudo das tensões para escoamentos oscilatórios. A título de exemplo como forma de dar a conhecer os valores absolutos em jogo apresenta-se na figura 26 a evolução das tensões máximas, ou seja junto à parede, para $\alpha=0,5$.

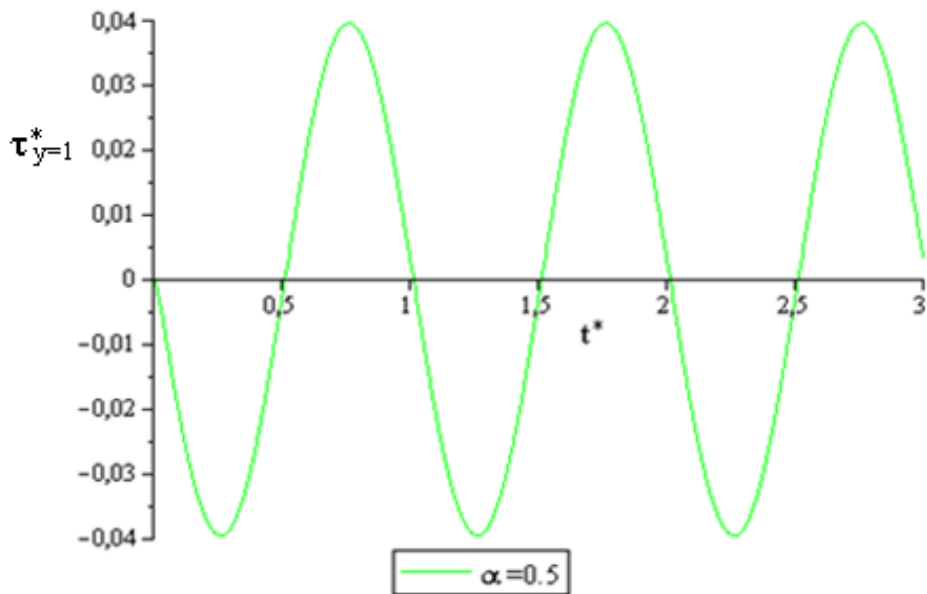


Figura 26: Variação com o tempo da tensão junto à parede para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $\alpha=0,5$.

Todos os gráficos seguintes referentes a simulações de tensões apresentam porém uma normalização relativamente à tensão máxima ($y^*=1$) existente num escoamento de Poiseuille equivalente que pode ser dada pela fórmula:

$$|\tau_p^*| = \frac{\alpha^2}{2\pi} \quad (6.1)$$

Esta normalização tem por objectivo poder comparar os efeitos da pulsação para diferentes valores de número de Womersley.

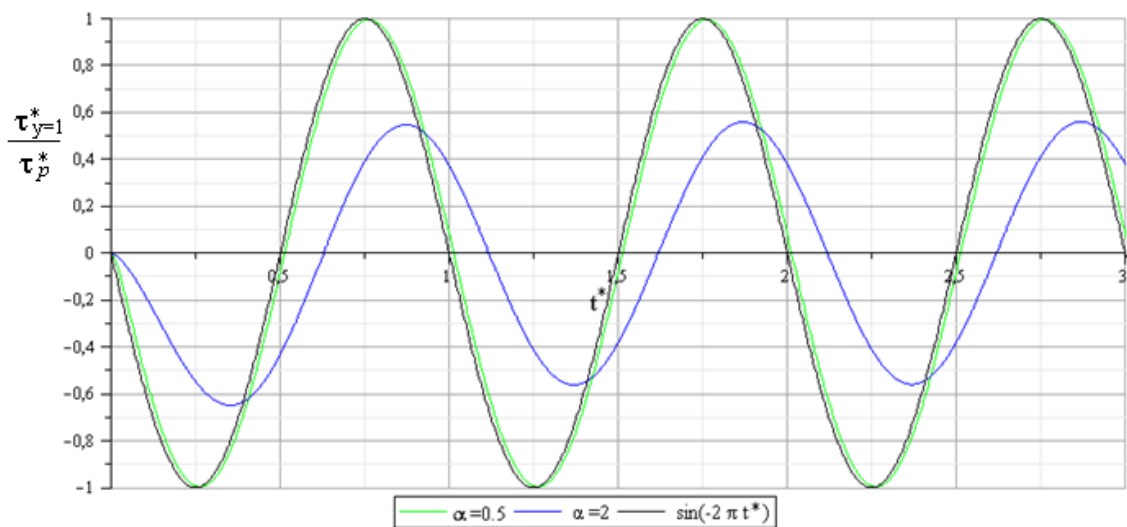


Figura 27: Variação com o tempo da tensão normalizada junto à parede para escoamento oscilatório de fluido newtoniano em função de α .

Refira-se o facto de o sinal apresentado pelas evoluções de tensão ao longo do tempo ser oposto ao sinal das evoluções da velocidade apresentadas anteriormente. A utilização do módulo na equação da tensão máxima de escoamento de Poiseuille tem como objectivo manter essa diferença de sinais entre as tensões e a velocidade. No gráfico anterior, optou-se por representar a função oscilatória da pressão mas com sinal inverso, apenas para tornar mais fácil a observação do desfasamento, saliente-se porém que o gradiente de pressão se manteve igual ao utilizado nas representações da velocidade.

Como seria de esperar, o número de Womersley tem um efeito nas tensões semelhante ao evidenciado nas representações da velocidade. Este efeito traduz-se pela diminuição do valor da tensão relativamente ao escoamento de Poiseuille equivalente, no aparecimento de um desfasamento bem como uma fase inicial transiente antes de se observar um regime oscilatório completamente estabelecido. De qualquer forma, para $\alpha=0,5$ os perfis lineares de tensão mostram que o escoamento é essencialmente dominado por forças viscosas.

Seguidamente representam-se os perfis de tensão para diferentes instantes de tempo, no primeiro caso, linha verde, representa-se o escoamento para $\alpha=0,5$. Nos dois casos posteriores representam-se as tensões para o escoamento com $\alpha=2$.

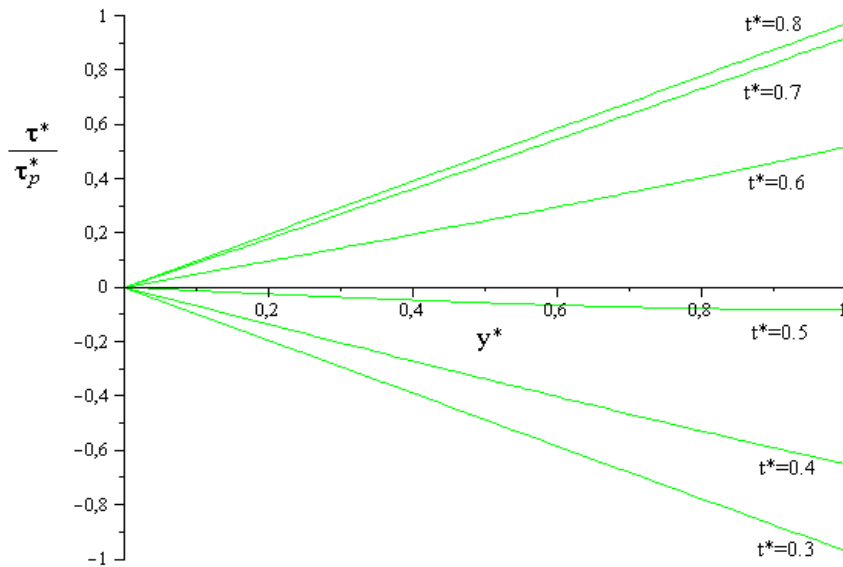


Figura 28: Perfis de tensão normalizada para escoamento oscilatório de fluido newtoniano em diferentes instantes de tempo e $\alpha=0,5$.

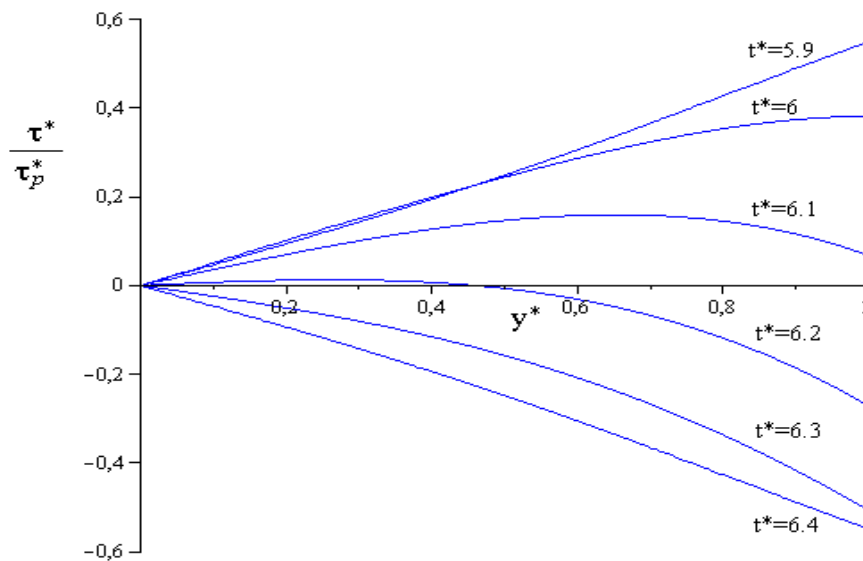


Figura 29: Perfis de tensão normalizada para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $t^*=[5,9; 6,4]$ e $\alpha=2$.

Na figura 29, para $\alpha=2$ verifica-se que a tensão por vezes não é descrita por uma recta, tal como acontece para o escoamento de Poiseuille. Quando aumenta a relação entre as forças de inércia e as forças viscosas, para valores de α superiores à unidade, as forças de inércia começam a fazer-se sentir em primeiro lugar na região central do escoamento. Deste modo verifica-se pela figura 29 e pela figura 30 que junto à parede, $y^*=1$, as forças de inércia são menos influentes sendo esta a causa da curvatura dos perfis de tensão. Refira-se por exemplo o caso de $t^*=6,0$ em que desde o eixo até aproximadamente 50% da distância do eixo à parede a tensão apresenta o mesmo valor do instante anterior $t^*=5,9$.

Na figura 29 os instantes de tempo correspondem à transição de um valor positivo de tensão para um valor negativo. Como forma de reforçar a ideia anteriormente apresentada de uma maior influência das forças de inércia na região central, representa-se agora o mesmo caso de $\alpha=2$, mas para uma transição de valores negativos de tensão para positivos. Escolheu-se para primeiro instante de tempo (adimensional) o último instante representado no gráfico anterior.

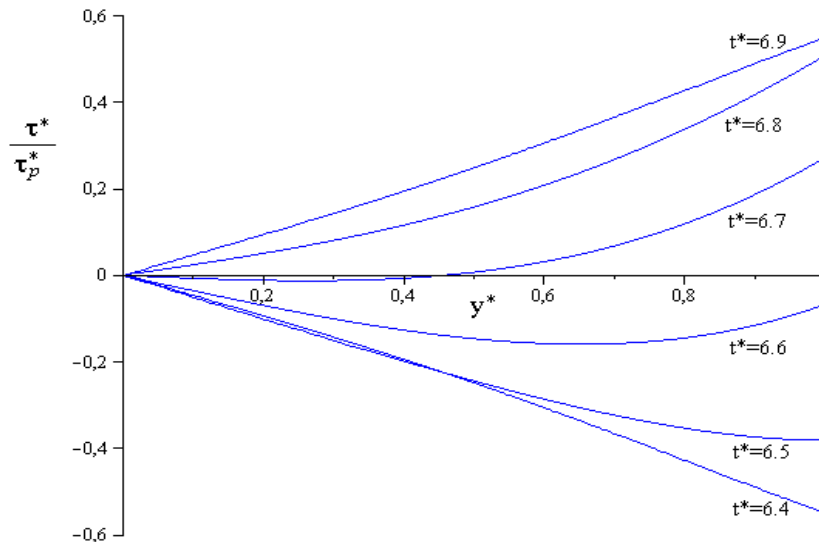


Figura 30: Perfis de tensão normalizada para escoamento oscilatório de fluido newtoniano com $t^*=[6,4; 6,9]$ e $\alpha=2$.

6.1.2 Escoamento pulsado

Agora a pressão já não oscila em torno de um valor médio nulo mas apresenta um valor médio constante. As condições de fronteira usadas nestas simulações são: velocidade nula junto à parede, ou usando as coordenadas adimensionais, $u^*(1, t^*)=0$ e tensão nula no eixo, $\tau^*(0, t^*)$. A velocidade já não é nula no instante $t^*=0$, deste modo é necessário obter a velocidade para o instante inicial e usar esse valor como condição de fronteira, isto deve-se ao facto de a função que rege a componente oscilatória ser do tipo $\sin(2\pi t^*)$ então para $t^*=0$ esta componente é zero, existindo apenas a componente constante da pressão. Assim, tendo sido obtida anteriormente a solução analítica para o escoamento de Poiseuille, esta será utilizada como condição de fronteira para cada simulação de escoamento pulsado newtoniano. Todas as velocidades representadas na figura 31 e 32 foram normalizadas relativamente à velocidade máxima do escoamento de Poiseuille correspondente (u_p^*), porém com uma diferença relativamente ao que foi feito anteriormente. Neste caso optou-se por escolher o gradiente de pressão que governa o escoamento de Poiseuille equivalente causado por: $\partial p/\partial x = -\rho(k_s + k_0)$. A primeira simulação é realizada para variações de valores de α pequenos sendo $\alpha = 0,5; 1; 1,5; 2$. Estes valores podem ser obtidos usando para tal $\rho=1000$ [kg/m³], $\omega=1$ [rad/s], $\mu=0,004$ [Pa.s] e $h=0,001$ [m]; $0,002$ [m]; $0,003$ [m]; $0,004$ [m], respectivamente.

Refira-se que estes valores são aqui representados a título de exemplo, pois apenas é relevante a análise com os números adimensionais. É também considerado que o valor de $k_s=k_0$.

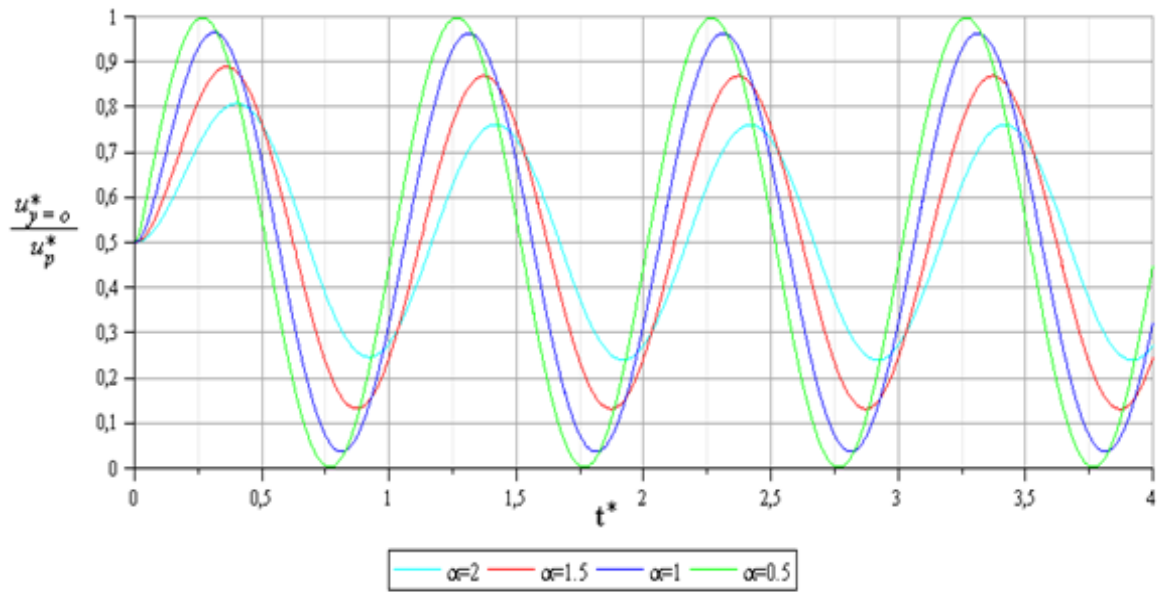


Figura 31: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento pulsado de fluido newtoniano em função de α .

No gráfico acima mostra-se novamente o efeito do aumento das forças de inércia, tal como havia sido referido para o escoamento oscilatório, caracterizado pelo aumento do desfasamento e diminuição da amplitude da velocidade relativamente ao escoamento de Poiseuille equivalente. Uma importante consequência da existência das forças de inércia que este gráfico revela é o facto de para valores de α mais elevados a velocidade não atingir o valor zero, tendo em conta que $k_0=k_s$.

Para finalizar e como forma de complementar o estudo sobre escoamento pulsado de fluidos newtonianos representa-se na figura 32 o caso em que $k_0=2k_s$ e números de Womersley mais elevados:

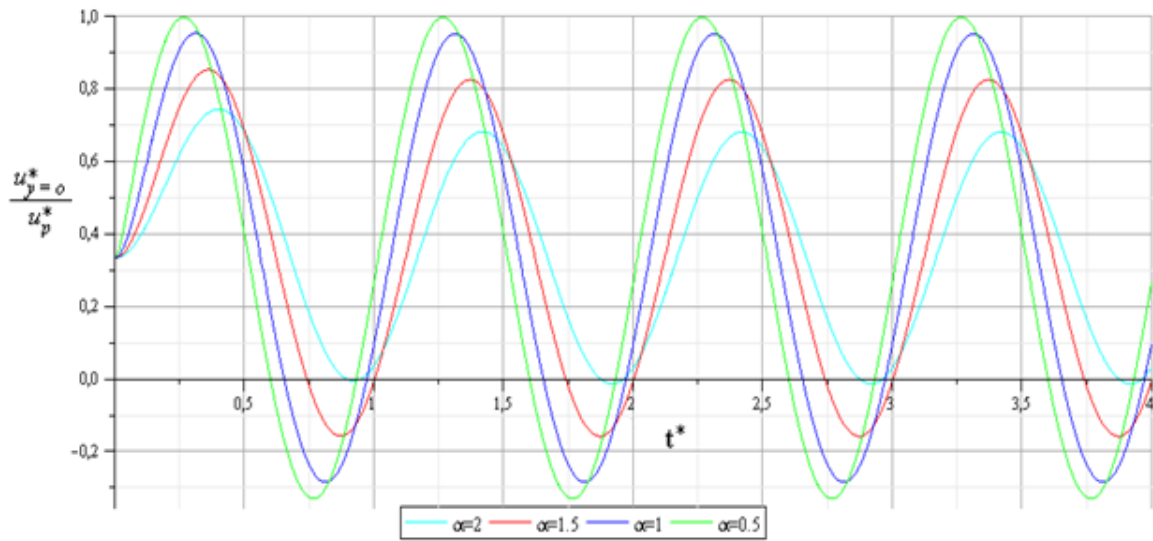


Figura 32: Variação no tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento pulsado de fluido newtoniano com diferentes valores de α e $k_0=2k_s$.

Este gráfico serve como forma de consolidar os resultados obtidos salientando o facto de o valor inicial de velocidade (normalizado) não ser igual a 0,5 tendo em conta que foram consideradas as duas componentes, k_s e k_0 , para o escoamento de Poiseuille.

6.2 Fluido de lei de potência

O modelo lei de potência apresenta algumas características que aumentam a dificuldade de uma abordagem numérica bem como acrescem a dificuldade na compreensão dos resultados obtidos. Ao contrário do modelo apresentado anteriormente, a principal característica do modelo lei de potência reside no facto de a viscosidade não ser constante, dependendo da taxa de deformação. Existem ainda algumas especificidades tal como a viscosidade tender para infinito à medida que nos aproximamos do eixo da conduta. Deste modo, como forma de compreender os resultados obtidos para o caso de estudo, escoamento dependente do tempo, é essencial analisar primeiramente as propriedades do escoamento estacionário como forma de aferir a influência da variação de certos parâmetros do modelo, para posteriormente avaliar o comportamento destes fluidos mas em regime oscilatório.

Deste modo apresentam-se seguidamente alguns resultados usando a solução analítica para o modelo lei de potência obtida anteriormente, sendo estes fundamentais para a compreensão do caso oscilatório.

6.2.1 Escoamento estacionário (Poiseuille)

Pretende-se com a simulação seguinte aferir o comportamento do escoamento para variações do número de Womersley, e variações do parâmetro n do modelo lei de potência.

Compreender de que modo os perfis de velocidades são afectados por estas variações e utilizar uma normalização adequada com vista a poder comparar os vários resultados. Para a simulação numérica foi usada a solução analítica obtida na secção 5.1.2, atribuindo valores ao parâmetro α_c e ao parâmetro n do modelo lei de potência. De referir que, sendo o número de Womersley neste caso um “número de Womersley característico” como já foi referido anteriormente, o parâmetro n também influencia α_c . O valor de K_s é considerado igual ao valor de k_0 simplificando assim a equação que permite obter a velocidade (adimensional).

Para o primeiro caso de estudo será usado um valor de número de Womersley inferior à unidade: $\alpha_c=0,85$. São obtidos os perfis de velocidade para valores de n entre 0,5 e 1 mantendo constante o valor de $\alpha_c=0,85$ (saliente-se novamente que se trata de um valor característico, pois a viscosidade não é constante). As simulações realizadas com valores de α_c inferiores e para a variação de n entre 0,5 e 1 demonstram o mesmo comportamento que a de $\alpha_c=0,85$, deste modo será apenas representada esta simulação tendo em conta que os outros resultados são semelhantes. Além da representação dos perfis de velocidade representa-se na figura 34 a variação da viscosidade (adimensional) em relação à taxa de deformação (adimensional). Sobre as linhas referentes a $n=0,5$; $n=0,6$; $n=0,7$ estão representados pontos que indicam o valor da taxa de deformação para diferentes posições na conduta: $y^*=1$ (parede); $y^*=0,75$; $y^*=0,5$ e $y^*=0,25$.

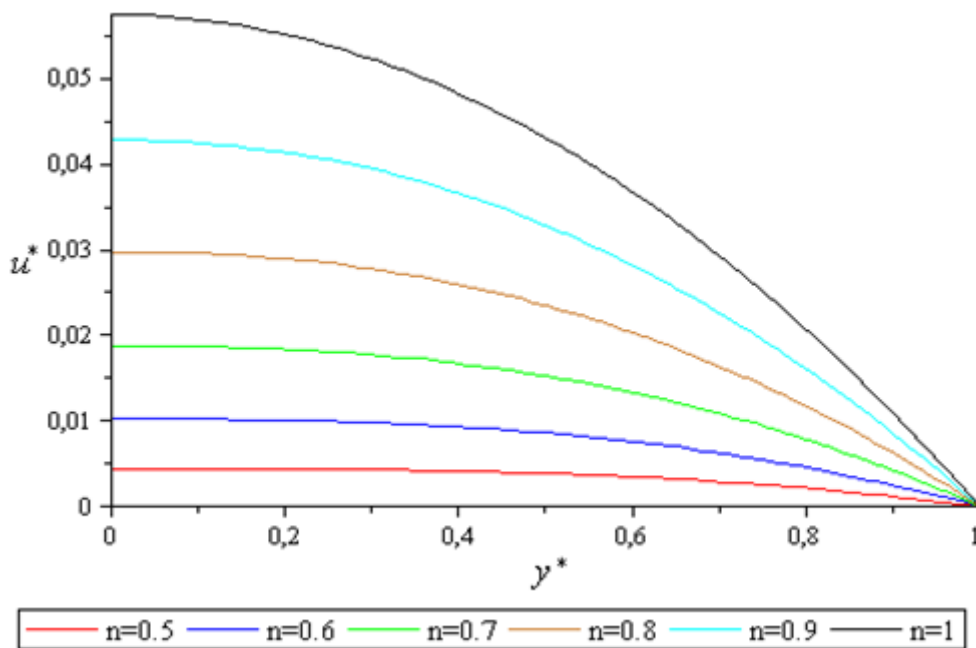


Figura 33: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,85$ e diferentes valores de n .

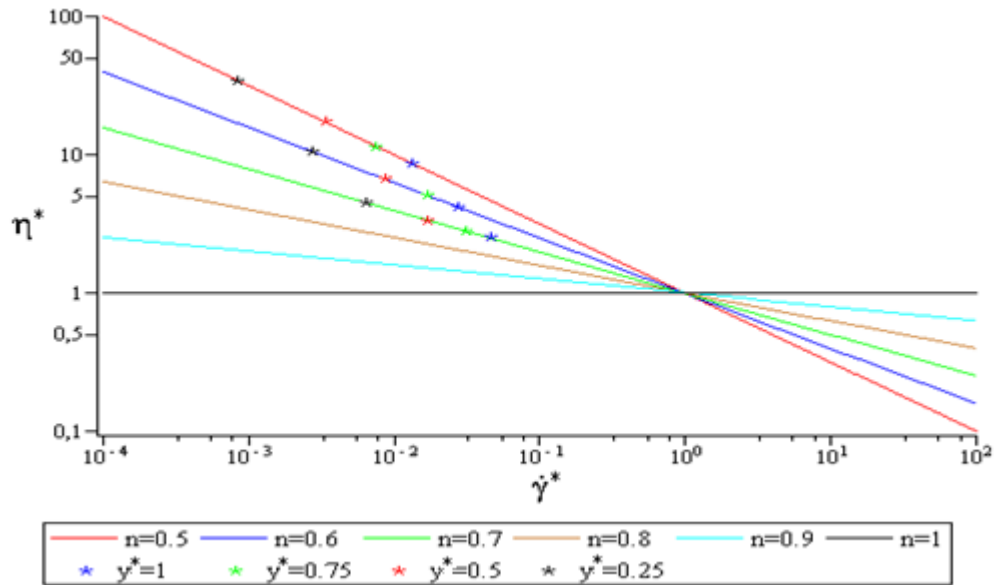


Figura 34: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação, para $\alpha_c=0,85$ e diferentes valores de n .

Através da figura 34 verifica-se que as soluções com valor de n mais baixo apresentam uma taxa de deformação mais baixa, referindo que é para $y^*=1$ (parede) que se obtém o valor máximo das taxas de deformação. Verifica-se também que num determinado ponto a viscosidade é mais elevada para valores inferiores de n .

Na figura 35 representam-se perfis de velocidade para diferentes valores de n e com um valor de α_c constante mas superior à unidade. Escolheu-se o valor de $\alpha_c=3$ de modo a que a taxa de deformação máxima, ou seja junto à parede, seja superior a 1. Assim, no intervalo de taxas de deformação superiores á unidade a viscosidade é mais baixa para as curvas com menor valor de n . Na figura 36 representa-se a variação da viscosidade (adimensional) em relação á taxa de deformação (adimensional) em função do valor de n para $\alpha_c=3$, representando sobre as linhas de $n=0,5$; 0,6; 0,7 o valor da taxa de deformação para algumas posições da conduta.

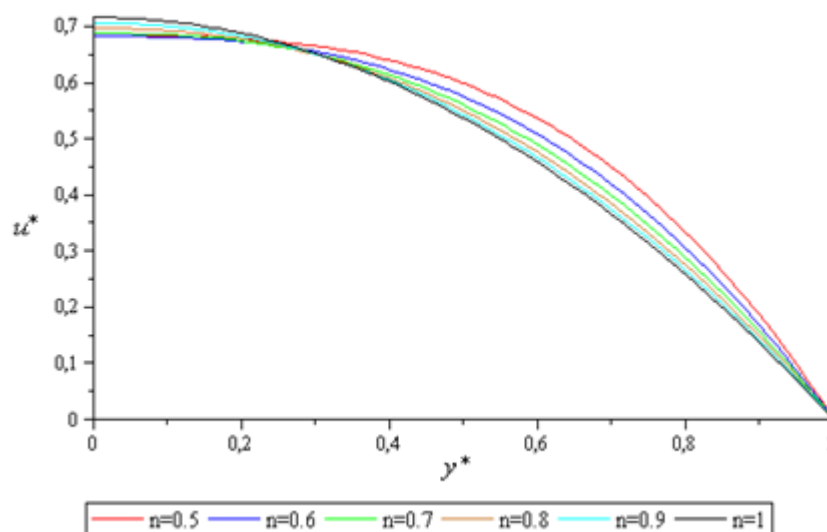


Figura 35: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$ e diferentes valores de n .

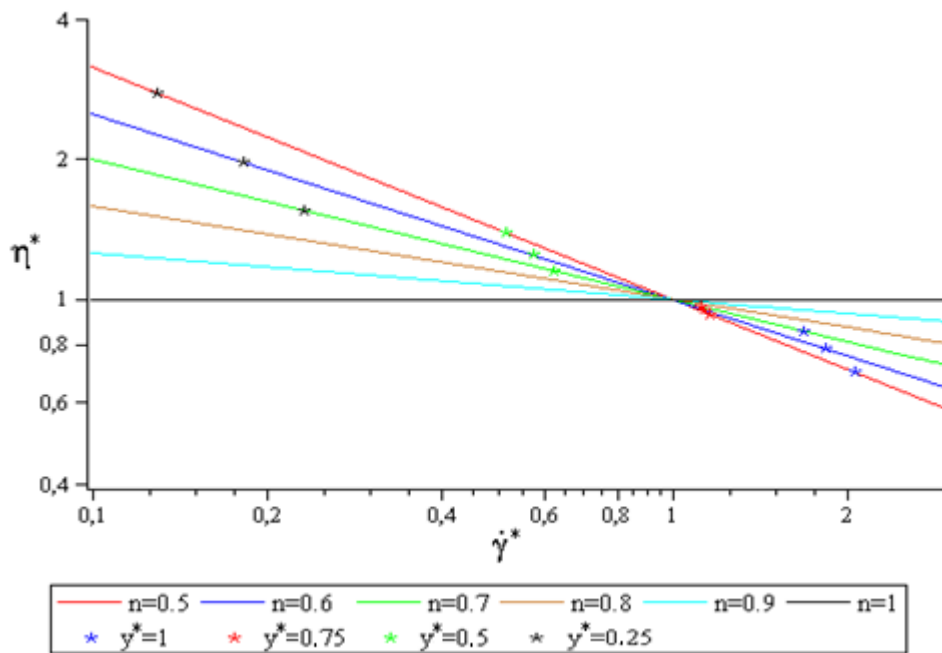


Figura 36: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação, para $\alpha_c=3$ e diferentes valores de n .

As figuras anteriores, em particular o gráfico relativo aos perfis de velocidades, não são muito esclarecedoras face ao comportamento apresentado pelo escoamento. De facto, pela observação dos perfis de velocidade verifica-se que junto ao eixo, quanto maior é o valor de n , mais elevada é a velocidade. Pelo contrário, próximo da parede a velocidade é superior para valores inferiores de n . Como forma de explicar a ambiguidade criada pela figura 35, realizou-se uma simulação numérica com valores de $\alpha_c > 3$, representando-se seguidamente o caso em que $\alpha_c=5$.

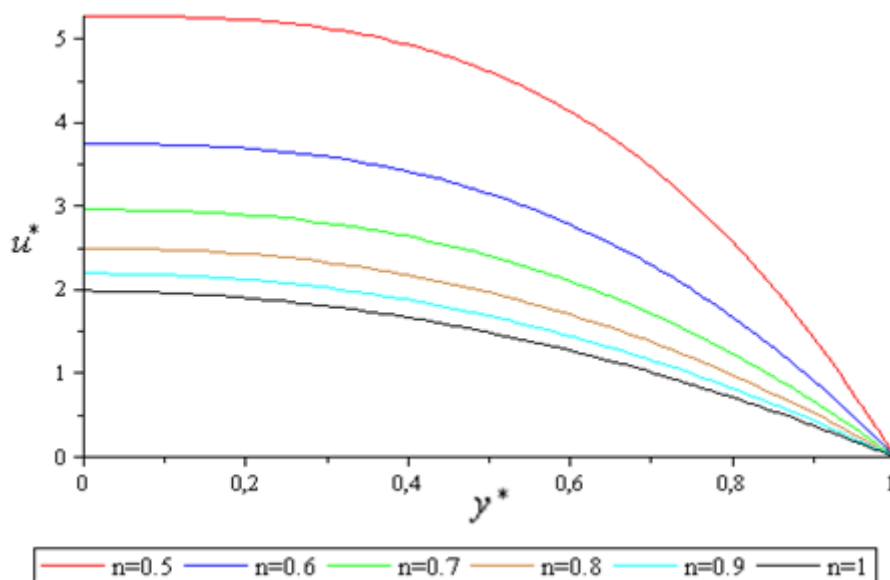


Figura 37: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=5$ e diferentes valores de n .

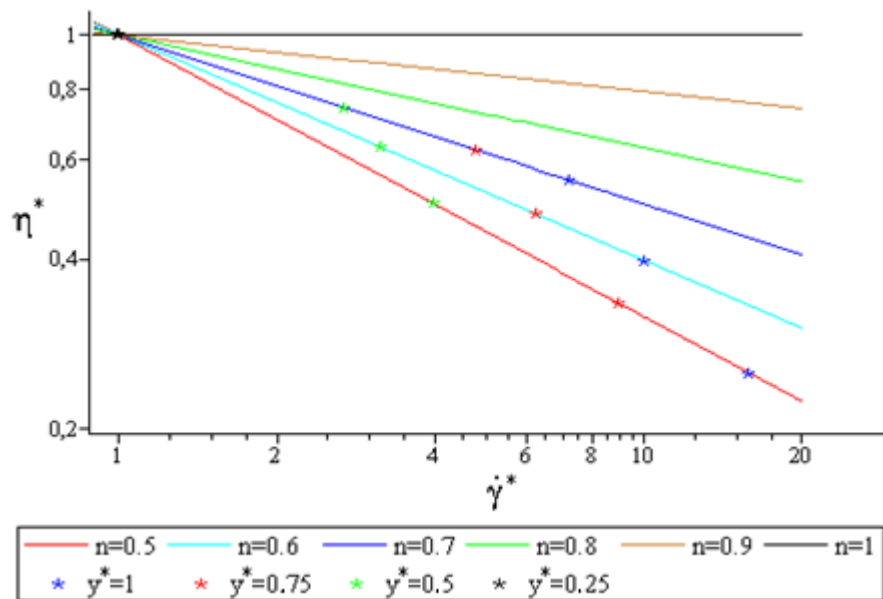


Figura 38: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação, para $\alpha_c=5$ e diferentes valores de n .

Deste modo, tendo em conta as simulações realizadas pode-se indicar que no caso de $\alpha_c=3$ os perfis de velocidade se encontram numa zona intermédia em que apesar de o gradiente de velocidade ser mais elevado, junto à parede, para $n=0,5$ verifica-se o oposto junto ao eixo. É indispensável a representação da variação da velocidade em função da variação da taxa de deformação (ambos na forma adimensional) para compreender os perfis de velocidade. Assim, verifica-se que para o caso de $\alpha_c=5$ mais de 70% da distância medida da parede em direcção ao eixo possui taxa de deformação superior à unidade. Deste modo, entre $y^*=1$ e $y^*=0,25$ quanto menor for o valor de n , maior é o valor da taxa de deformação e maior é a velocidade.

Com vista a poder comparar todos os resultados bem como avaliar os efeitos devidos à existência de pulsação, que será feito na secção seguinte, pode ser realizada uma normalização da velocidade, tal como já foi realizado anteriormente. Assim, normalizando relativamente à velocidade máxima ou seja a velocidade no eixo, todos os perfis de velocidade apresentados nesta secção 6.2.1 apresentam uma forma idêntica independentemente do valor de α_c , apresentando-se as curvas para valores de n inferiores como curvas mais “cheias”. A título de exemplo representa-se na figura 39 o caso de $\alpha_c=0,85$, já representado anteriormente, mas agora normalizado relativamente à velocidade máxima de um escoamento de Poiseuille equivalente.

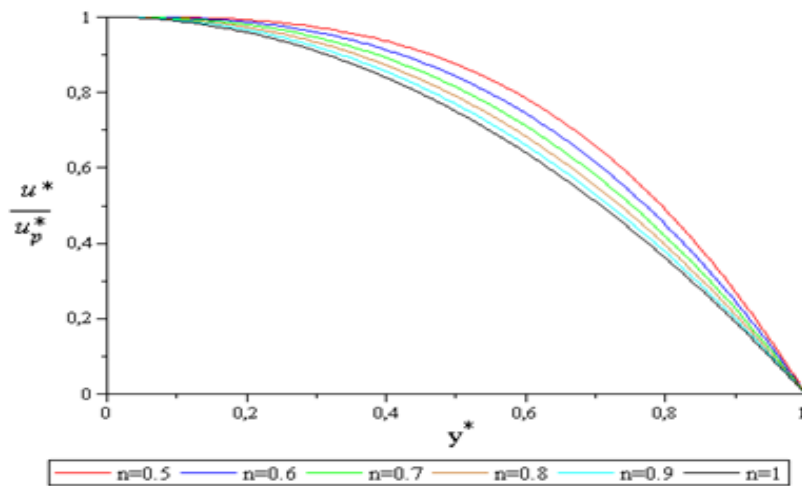


Figura 39: Perfis de velocidade normalizada para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,85$ e diferentes valores de n .

Para finalizar este estudo sobre escoamento estacionário representam-se dois casos em que se varia simultaneamente o valor de n e o valor de α_c . Assim, no primeiro caso, figuras 40 e 41, foram ajustados os valores de α_c de modo a obter a mesma velocidade próxima à parede para diferentes valores de n . No segundo caso, figuras 42 e 43, os valores de α_c foram ajustados de modo a obter o mesmo valor de velocidade para $y^*=0,5$ com diferentes valores de n .

Com estas simulações pretende-se estudar a variação da viscosidade em função da taxa de deformação bem como os perfis de velocidade obtidos impondo velocidades iguais em determinados pontos da conduta.

Representa-se assim, para $n=0,5$, $n=0,6$ e $n=0,7$ os perfis de velocidade com $\alpha_c=0,8$; $\alpha_c=0,636538$; $\alpha_c=0,506476$, respectivamente:

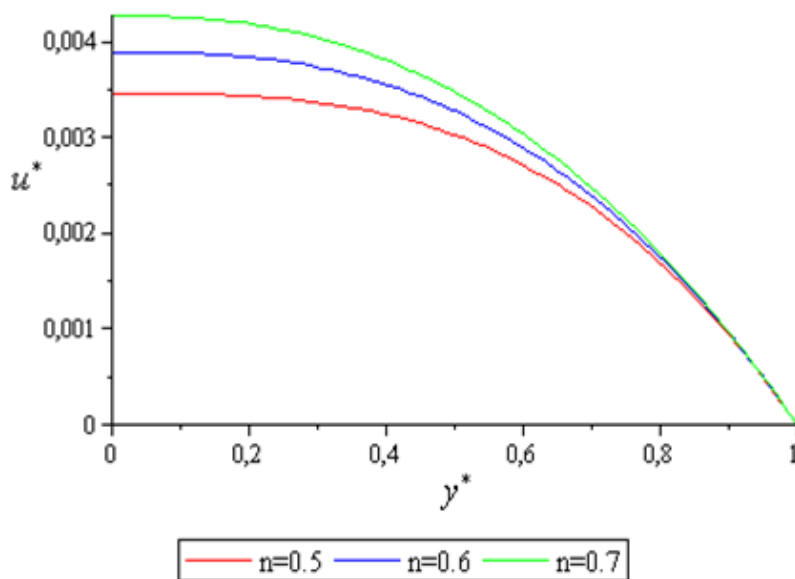


Figura 40: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,8$ e $n=0,5$; $\alpha_c=0,636538$ e $n=0,6$; $\alpha_c=0,506476$ e $n=0,7$.

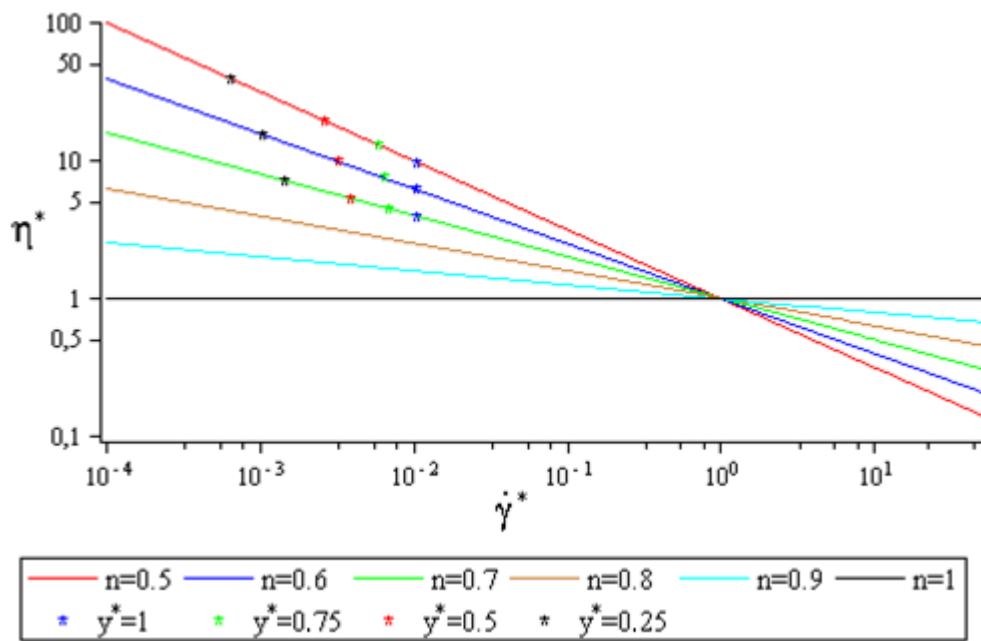


Figura 41: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação para diferentes valores de α_c .

Os pontos marcados na figura 41 sobre as linhas $n=0,5$, $n=0,6$ e $n=0,7$ foram obtidos usando $\alpha_c=0,8$; $\alpha_c=0,636538$; $\alpha_c=0,506476$, respectivamente. As figuras 42 e 43 representam o segundo caso em que $n=0,5$, $n=0,6$ e $n=0,7$ com $\alpha_c=0,8$; $\alpha_c=0,6215479$; $\alpha_c=0,482513$, respectivamente:

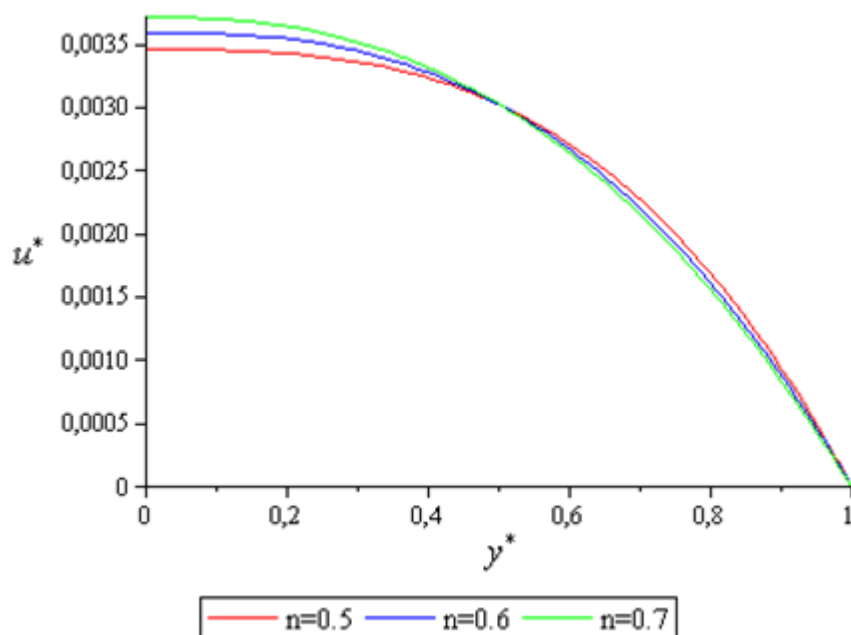


Figura 42: Perfis de velocidade para escoamento estacionário de fluido de lei de potência com $\alpha_c = 0,8$ e $n=0,5$; $\alpha_c=0,6215479$ e $n=0,6$; $\alpha_c=0,482513$ e $n=0,7$.

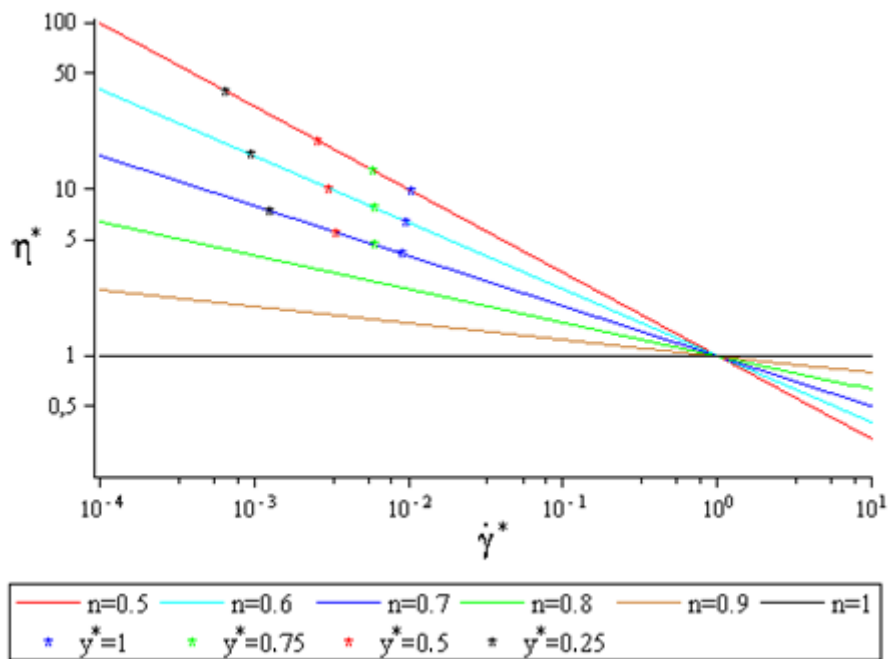


Figura 43: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação para diferentes valores de α_c .

Os pontos marcados na figura 43 sobre as linhas $n=0,5$, $n=0,6$ e $n=0,7$ foram obtidos usando $\alpha_c=0,8$; $\alpha_c=0,6215479$; $\alpha_c=0,482513$, respectivamente.

Importa referir que apesar de no primeiro caso em que a velocidade na proximidade da parede era igual, a taxa de deformação na parede era igual para diferentes valores de n , no segundo caso em que a velocidade coincide para o ponto $y^*=0,5$, as taxas de deformação não são coincidentes nesse ponto. De referir também que neste trabalho não foram obtidas soluções para valores de n inferiores a 0,5 devido a dificuldades de convergência.

6.2.2 Escoamento oscilatório

Seguidamente apresentam-se os resultados para as simulações com gradiente de pressão dependente do tempo, em particular para o caso oscilatório. Pretende-se assim averiguar as principais diferenças relativamente aos resultados apresentados anteriormente para o modelo lei de potência. Verificar quais os efeitos da pulsação, relação entre as forças viscosas e forças de inércia e a sua influência nos perfis de velocidade bem como na evolução ao longo do tempo.

Em primeiro lugar simulou-se um caso em que as forças viscosas predominam face às forças de inércia, em particular $\alpha_c=0,2$, e variou-se n desde $n=0,5$ até $n=1$.

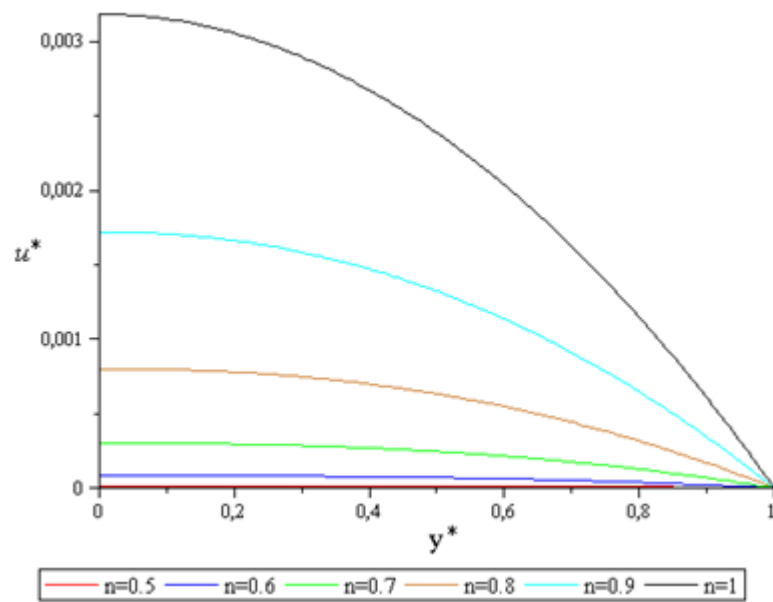


Figura 44: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,2$ e diferentes valores de n . ($t^*=0,25$)

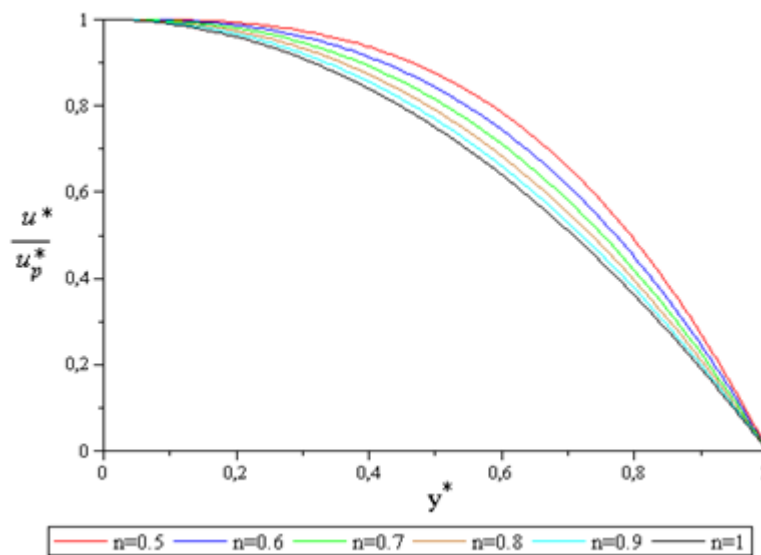


Figura 45: Perfis de velocidade normalizada para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,2$ e diferentes valores de n . ($t^*=0,25$)

Pela análise das figuras 44 e 45 verifica-se que estão de acordo com os resultados obtidos anteriormente, referindo que aquando desta simulação, os valores obtidos para as derivadas da velocidade na parede, ou seja, o valor da taxa de deformação (adimensional) para $y^*=1$ são mais elevados para valores de n mais elevados, tal como no escoamento estacionário.

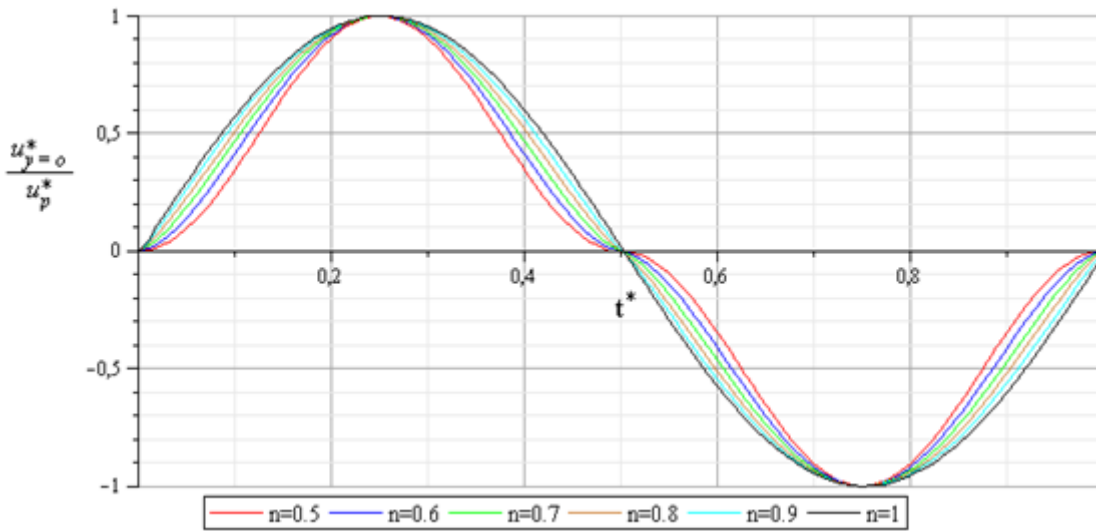


Figura 46: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,2$.

Pelo gráfico anterior verifica-se que a inércia não influencia significativamente a velocidade visto que todas as curvas atingem o valor máximo 1 (normalizado) e atingem o valor zero para o mesmo instante $t^*=0,5$. De referir que na ausência de normalização relativamente ao escoamento de Poiseuille equivalente, as evoluções não seriam coincidentes no ponto de velocidade máxima, sendo as amplitudes de velocidade menores à medida que se diminui o valor de n , tal como se pode verificar pela figura 47.

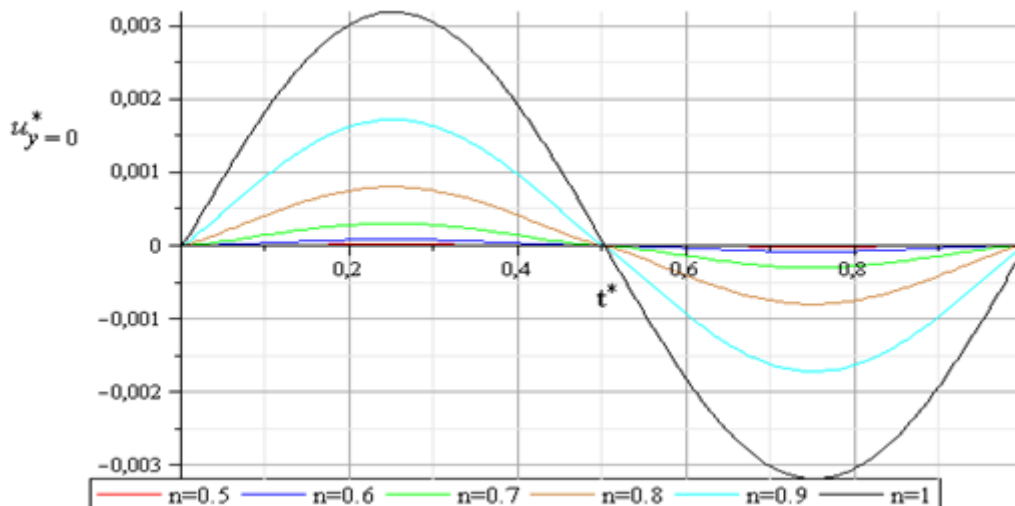


Figura 47: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=0,2$.

Para a mesma variação de n , mas para valores de α_c superiores à unidade, com vista a verificar o efeito da inércia realizou-se a simulação seguinte. Foi escolhido $\alpha_c=3$:

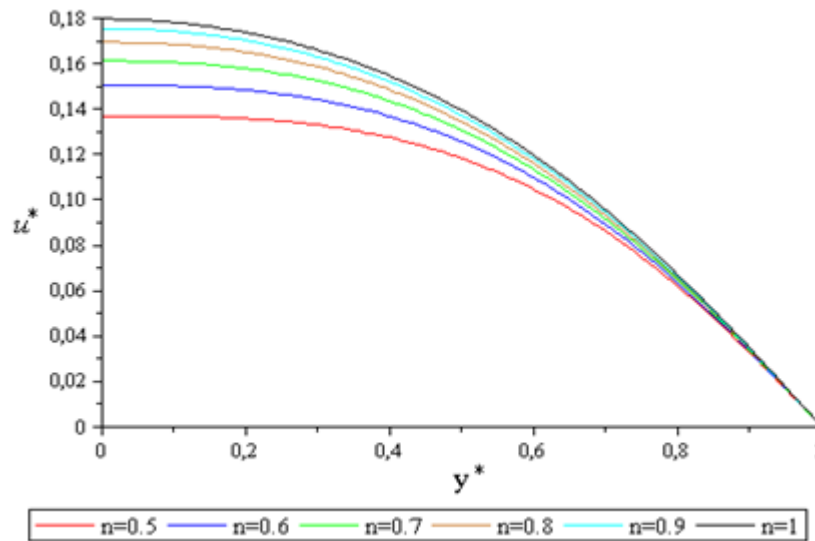


Figura 48: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$ e diferentes valores de n . ($t^*=10,5$)

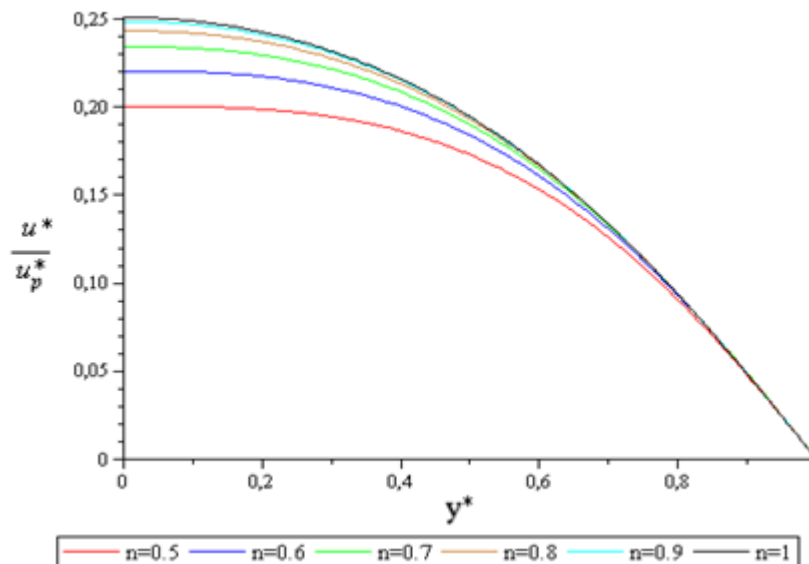


Figura 49: Perfis de velocidade normalizada para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$ e diferentes valores de n . ($t^*=10,5$)

Saliente-se o facto de os perfis de velocidade não corresponderem à velocidade máxima de um ciclo devido ao desfasamento temporal provocado pelas forças de inércia. Nas figuras 50 e 51 são representadas as evoluções da velocidade no eixo ao longo do tempo. Deste modo é possível observar em que instante ocorre a velocidade máxima para os diferentes valores de n , bem como o desfasamento:

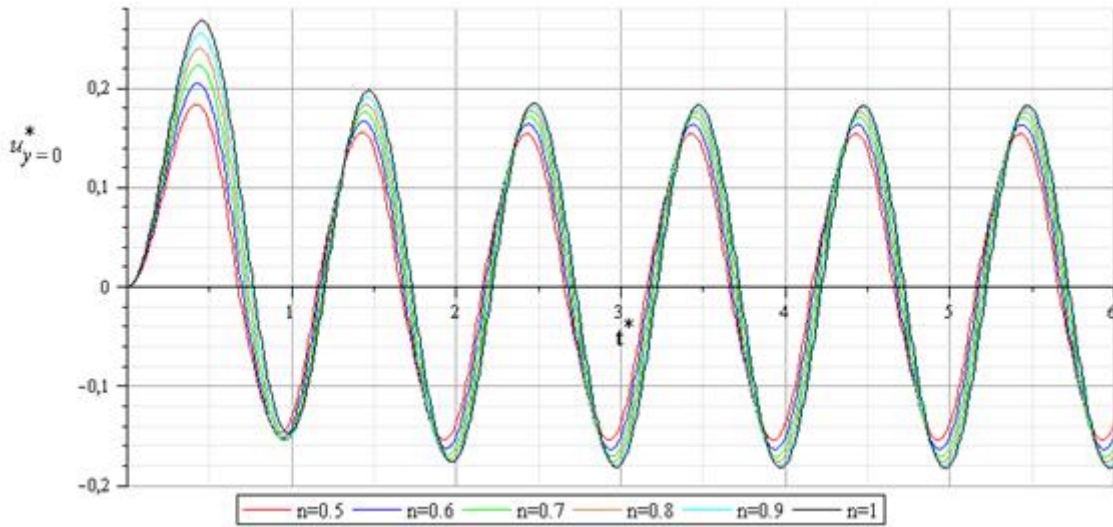


Figura 50: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$.

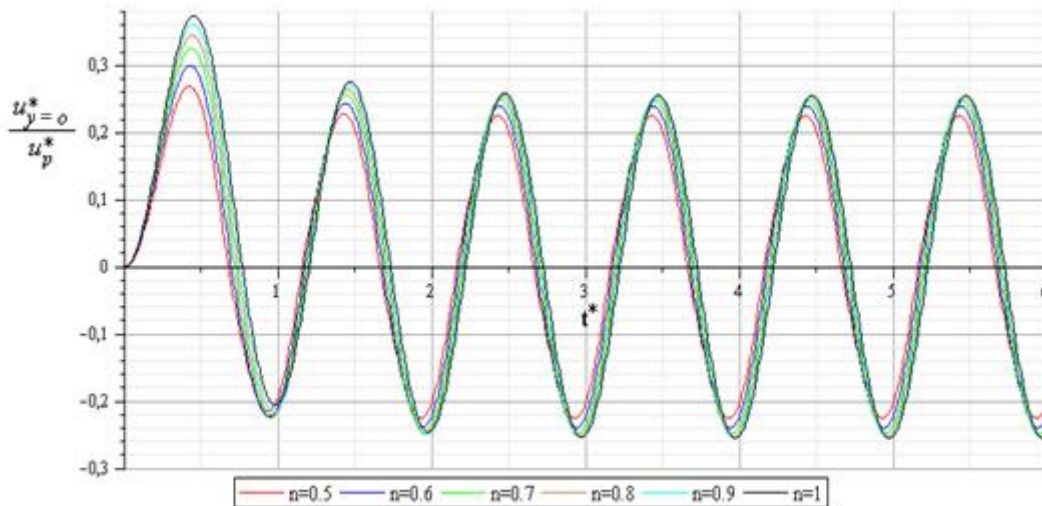


Figura 51: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=3$.

Através dos gráficos acima representados observa-se que apesar de o número de Womersley característico ser o mesmo, o desfasamento apresentado pelas curvas com diferentes valores de n não é idêntico. Verifica-se assim que para valores de n superiores, é também superior o desfasamento, ou seja o desfasamento é maior quanto mais próximo de fluido newtoniano.

Para finalizar o estudo sobre o modelo lei de potência realizou-se uma simulação numérica com mesma variação de n , mas para valores de $\alpha_c=5$, tal como tinha sido simulado anteriormente para um gradiente de pressão constante. Os resultados obtidos são apresentados a seguir:

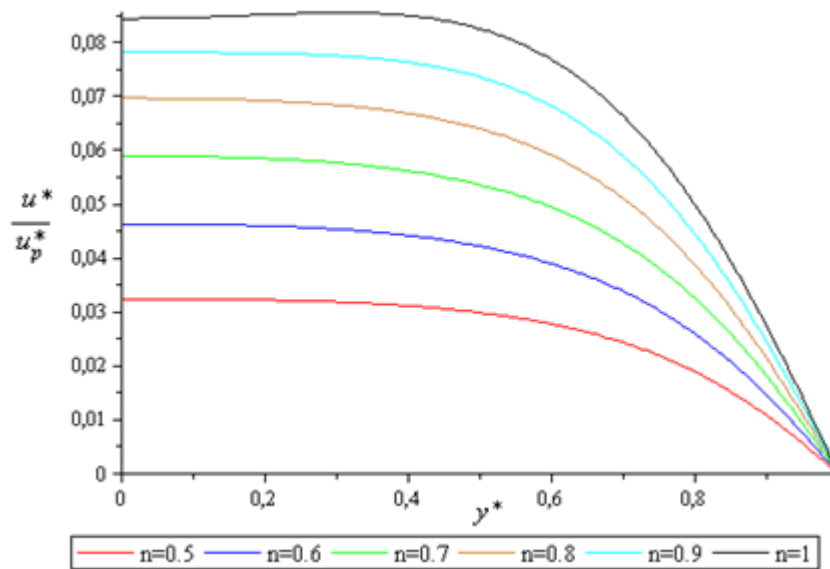


Figura 52: Perfis de velocidade normalizada para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=5$ e diferentes valores de n . ($t^*=10,5$)

É importante referir que a representação gráfica dos perfis de velocidade para o instante $t^*=10,5$ e $\alpha_c=5$ sem normalização relativamente ao escoamento de Poiseuille equivalente apresentava as curvas para diferentes valores de n muito próximas, sendo praticamente coincidentes no intervalo de $y^*=0,7$ a $y^*=1$. Deste modo, salienta-se o facto de a grande diferença entre as curvas de diferentes valores de n apresentada pelo gráfico acima decorrer da normalização efectuada. É também de salientar que o valor da taxa de deformação para $y^*=1$ e para $\alpha_c=5$, no caso oscilatório é inferior a unidade, ao contrário do que acontecia para o mesmo valor de número de Womersley mas para caso estacionário. Deste modo, no caso oscilatório com $\alpha_c=5$ a taxa de deformação para $n=0,5$ é inferior à apresentada para valores de n superiores, sendo a viscosidade superior para $n=0,5$ relativamente as outras curvas de n superior. Estes perfis foram obtidos para $t^*=10,5$ não correspondendo às velocidades máximas do ciclo tendo em conta o desfasamento temporal.

Podemos concluir comparando estes resultados com os obtidos para o mesmo caso mas em regime estacionário que a pulsação provoca um deslocamento do domínio mais para a esquerda nas representações da viscosidade em função da taxa de deformação, ou seja, ocorre uma redução considerável do valor da taxa de deformação. Isto pode ser comprovado com o ultimo exemplo para o qual os valores da taxa de deformação máxima são inferiores a 1, estando no caso estacionário mais de 70% do domínio localizado para taxas de deformação superiores a 1. Deste modo assume-se que a normalização utilizada talvez não seja a mais adequada para comparar o efeito da pulsação na amplitude da velocidade para este caso tendo em conta as variações de viscosidade. Assim, realça-se o facto de, por exemplo para $n=0,5$, a viscosidade no caso estacionário ser inferior à viscosidade apresentada pelas curvas de n superior mas no caso pulsado a viscosidade para $n=0,5$ é superior à apresentada pelas curvas de n superior.

Nas figuras 53 e 54 apresentam-se as evoluções temporais da velocidade no eixo, normalizada. Optou-se por se representar separadamente o regime instacionário do regime oscilatório completamente estabelecido tendo em conta o número de ciclos que demora até

este ser atingido. O regime oscilatório completamente estabelecido é atingido depois do oitavo ciclo aproximadamente, referindo que a amplitude máxima atingida pela velocidade é menos de 10% relativamente a um escoamento de Poiseuille equivalente. Apesar de não ser muito evidente tendo em conta os constrangimentos da escala utilizada para representar todas as curvas, existe um desfaseamento que é superior para valores superiores de n .

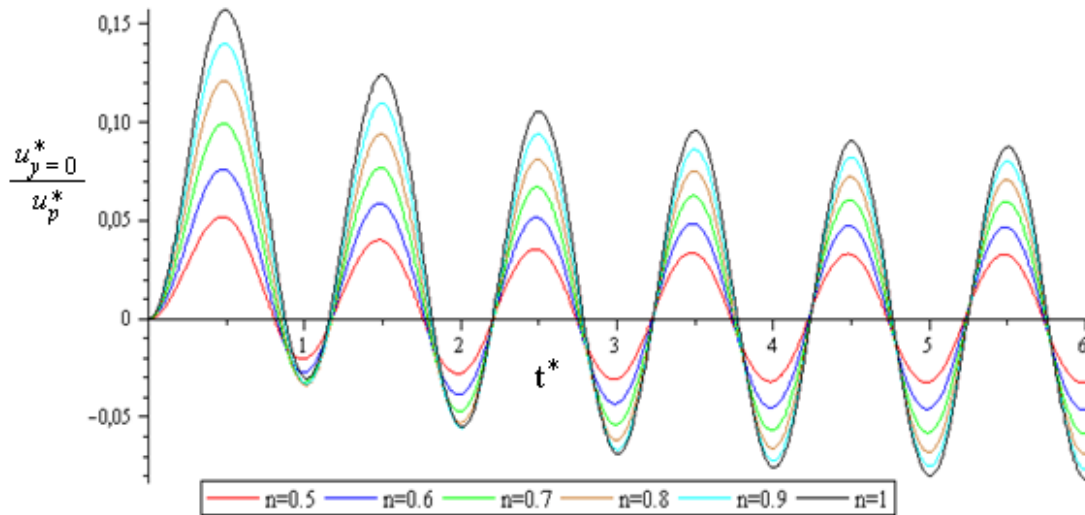


Figura 53: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de lei de potência com $\alpha_c=5$.

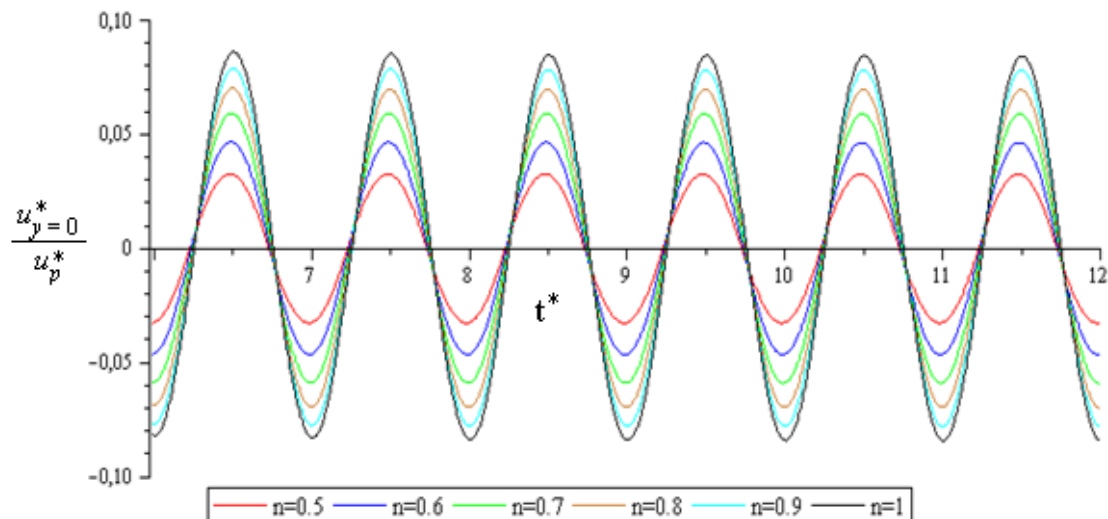


Figura 54: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido lei de potência com $\alpha_c=5$, regime oscilatório completamente estabelecido.

6.3 Fluido de Carreau

A resolução numérica do sistema de equações para fluidos segundo o modelo de Carreau simplificado, apresentado anteriormente, teve como base a variação do número de Womersley característico, a variação do número de Carreau e do parâmetro n do modelo. Deste modo pretende-se aferir qual a influencia destes parâmetros nos perfis de velocidade bem como na evolução da velocidade ao longo do tempo. A primeira simulação é obtida para $Cu=1$ (número de Carreau); $\alpha_c=0,1$ e para n variando entre 0,5 e 1.

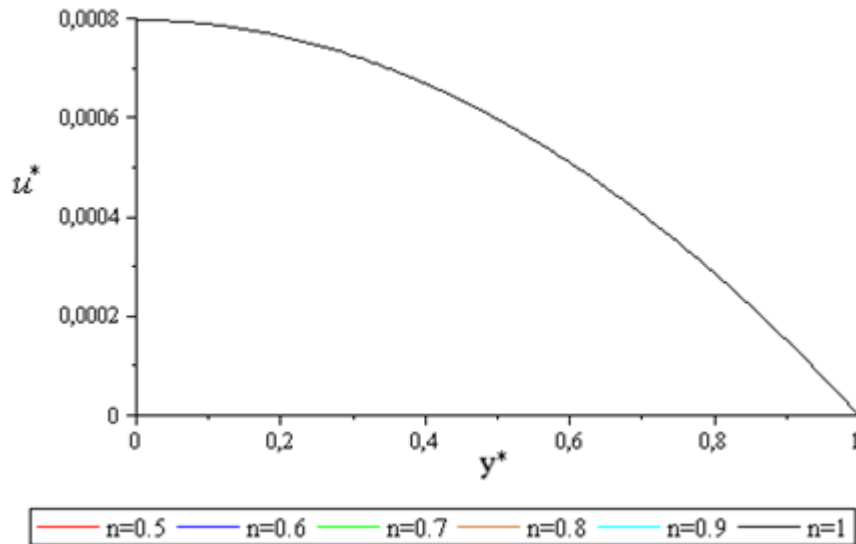


Figura 55: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=0,1$, $Cu=1$ e diferentes valores de n . ($t^*=0,25$)

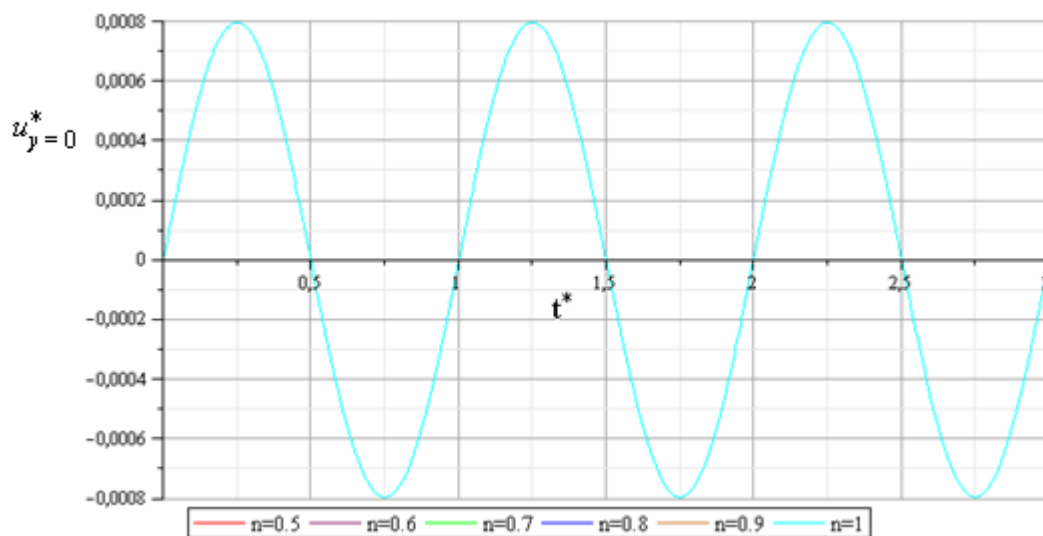


Figura 56: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=0,1$, $Cu=1$.

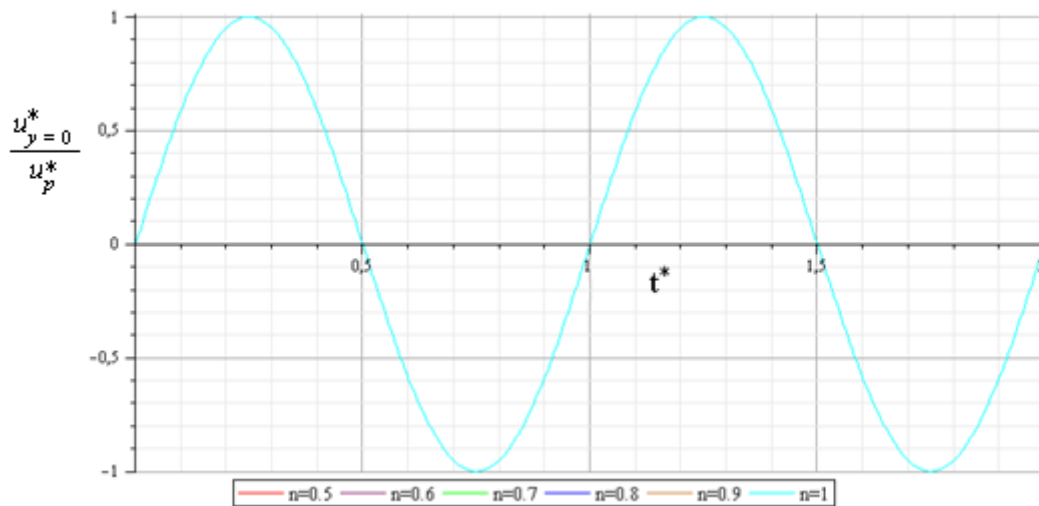


Figura 57: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=0,1$, $Cu=1$.

Pelos gráficos anteriores verifica-se que o fluido se encontra totalmente na zona do primeiro patamar newtoniano, para o qual a viscosidade é constante. Desta forma observa-se que as variações do parâmetro n não produzem qualquer efeito nos perfis de velocidade nem na variação da velocidade ao longo do tempo. Os efeitos da inércia não são observáveis visto que a velocidade máxima normalizada toma valor um e as curvas não apresentam desfase visível com a escala utilizada. Como forma de verificar estas conclusões representa-se seguidamente a variação da viscosidade em função da taxa de deformação (ambos na forma adimensional), representa-se também a taxa de deformação para $y^*=1$, sendo coincidentes para todas as curvas:

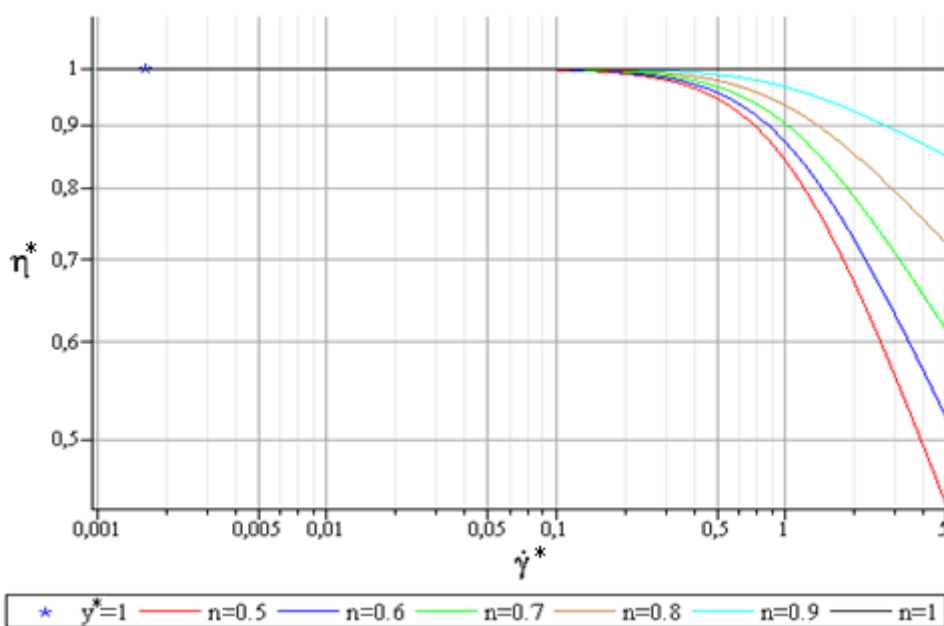


Figura 58: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação para $\alpha_c=0,1$, $Cu=1$ e diferentes valores de n .

No caso anterior as forças de inércia não eram relevantes. Representa-se agora o caso em que $\alpha_c=1$ e $Cu=1$, para diferentes valores de n , as curvas mantêm-se no primeiro patamar newtoniano, apresentando agora algum desfaseamento e uma diminuição da velocidade.

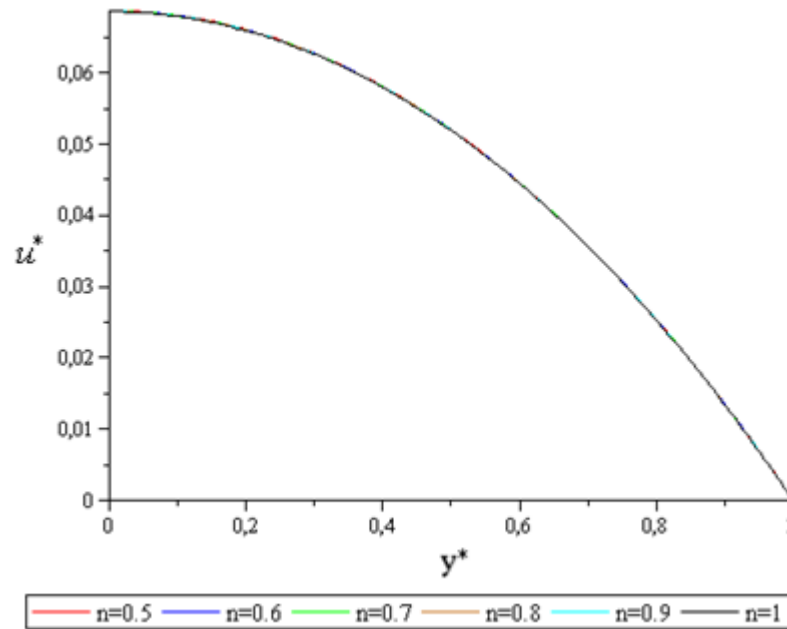


Figura 59: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=1$, $Cu=1$ e diferentes valores de n . ($t^*=0,25$)

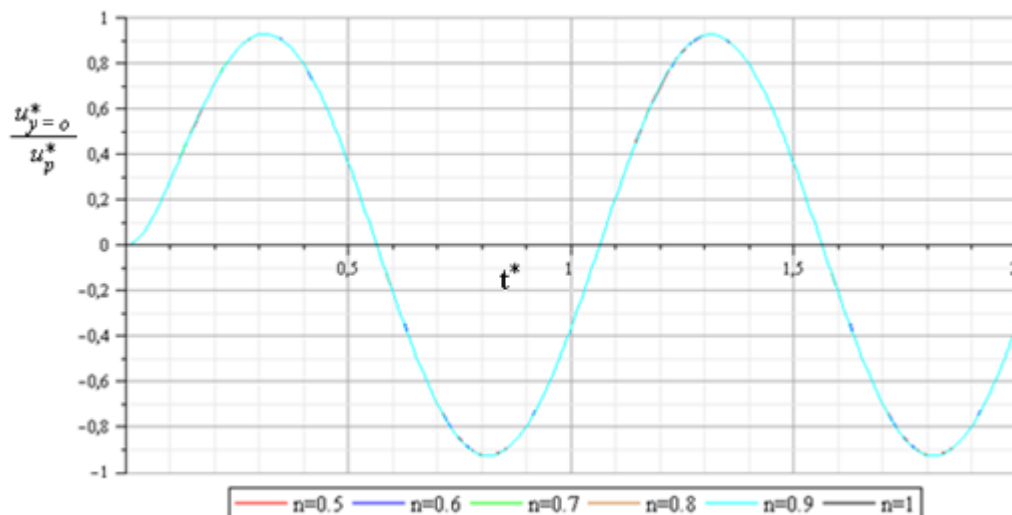


Figura 60: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=1$, $Cu=1$.

Anteriormente verificou-se que para valores de número de Carreau pequenos tal como $Cu=1$ e valores de α também reduzidos, o escoamento se encontrava no primeiro patamar newtoniano. Em simulações realizadas com um número de Carreau muito superior à unidade, por exemplo $Cu=100$, mas com número de Womersley reduzido, $\alpha_c=0,1$, verificou-se que as curvas correspondiam também ao primeiro patamar newtoniano.

Pela análise de gráficos da variação da viscosidade em função da taxa de deformação (ambos adimensionais) verifica-se que aumentando o número de Carreau o primeiro patamar newtoniano ocorre para taxas de deformação inferiores. Assim, com vista a estudar um fluido que não apresente apenas patamar newtoniano é feita uma análise para valores de Cu elevados e α_c também elevado. Utiliza-se nesta simulação numérica $Cu=10$, $\alpha_c=4$, variando n .

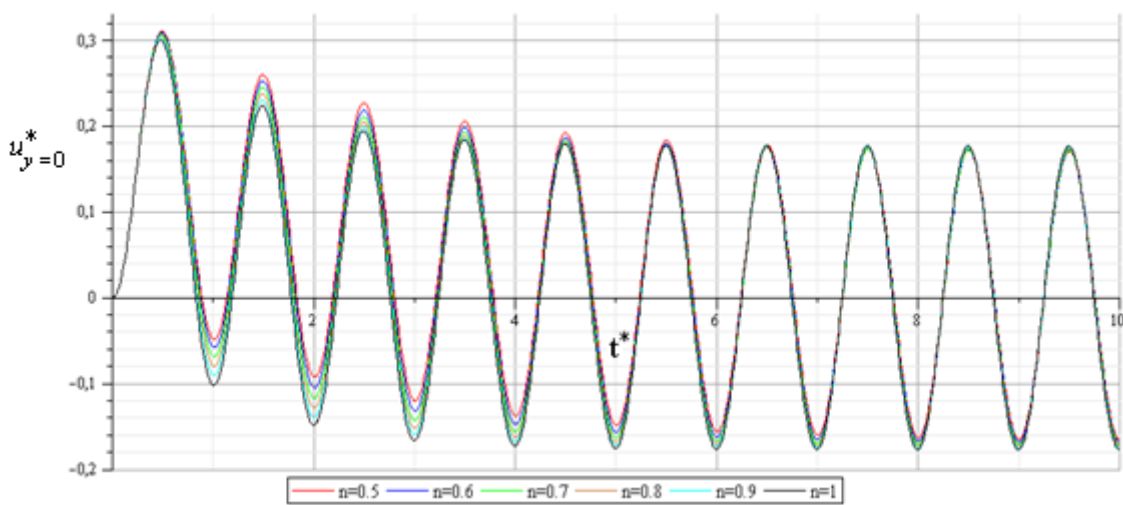


Figura 61: Variação com o tempo da velocidade no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=4$, $Cu=10$.

Tendo em conta que para este modelo não era conhecida a solução analítica para o caso estacionário, escoamento de Poiseuille, para realizar a normalização foi necessário criar um programa numérico para a resolução da simulação em regime estacionário. Verificou-se que com o aumento do número de Womersley e com a diminuição do parâmetro n aumentavam os problemas de convergência bem como o tempo necessário para realizar as iterações. A título de exemplo representa-se na figura 62 a variação da velocidade no eixo para escoamento oscilatório com $\alpha_c=4$ e $Cu=10$ para os valores de $n=1$ e $n=0,9$, normalizada relativamente a um escoamento de Poiseuille equivalente. Na figura 63 é representado o perfil de velocidades para o instante $t^*=8,5$, referindo que não se trata da velocidade máxima para todas as curvas tendo em conta os desfasamentos apresentados.

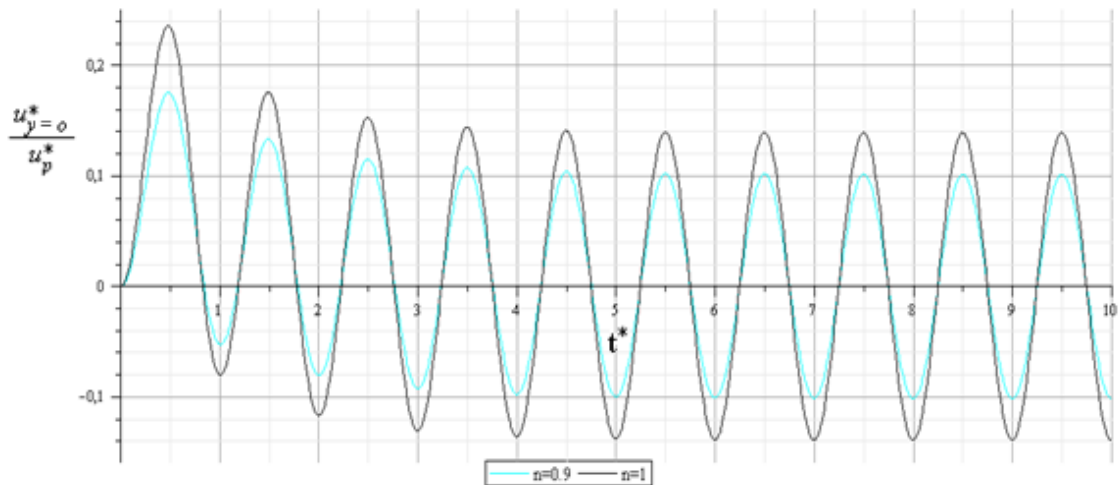


Figura 62: Variação com o tempo da velocidade normalizada no eixo para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=4$, $Cu=10$.

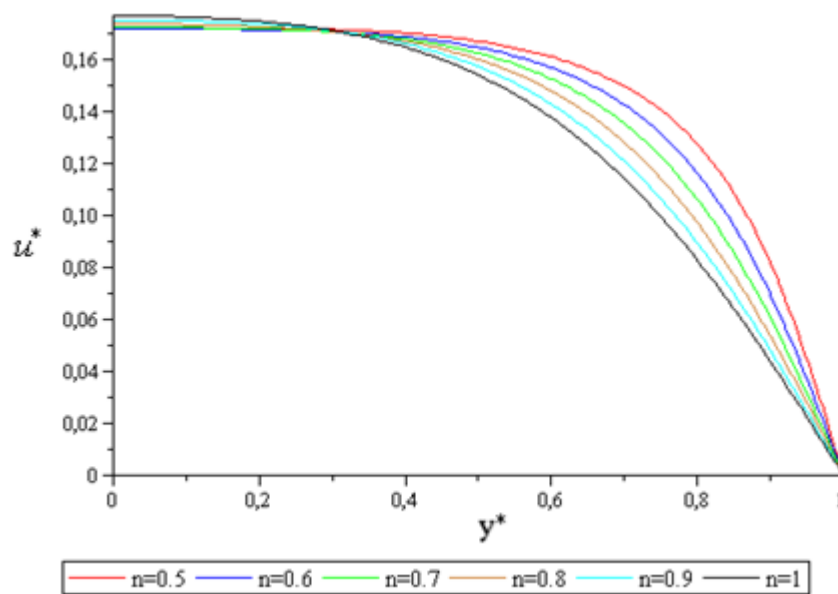


Figura 63: Perfis de velocidade para escoamento oscilatório de fluido de Carreau com $\alpha_c=4$, $Cu=10$ e diferentes valores de n . ($t^*=8,5$)

Para uma melhor compreensão dos resultados apresentados para este caso representa-se na figura 64 a variação da viscosidade em função da taxa de deformação para os diferentes valores de n . Representa-se também sobre a linha referente a $n=0,5$ e $n=0,6$, a título de exemplo, o valor da taxa de deformação para diferentes pontos da conduta, nomeadamente para $y^*=1$; $y^*=0,75$; $y^*=0,5$ e $y^*=0,25$. Esta representação têm por objectivo relacionar os resultados anteriores com os resultados já obtidos para o fluido newtoniano e para o fluido de lei de potência. Refira-se que os valores da taxa de deformação representados por pontos correspondem ao instante $t^*=9$.

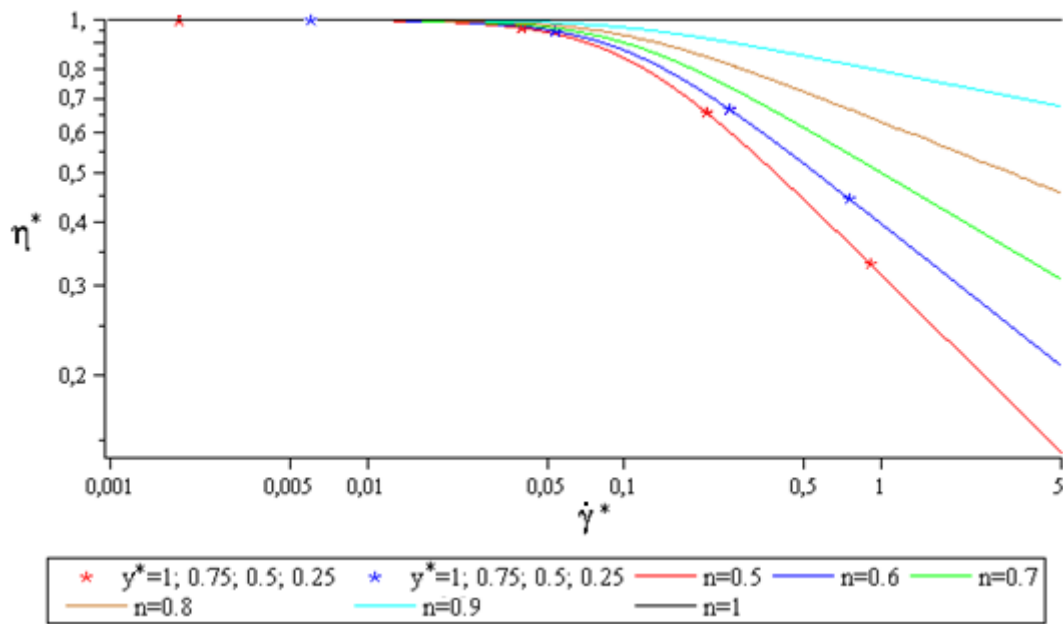


Figura 64: Variação da viscosidade em função da taxa de deformação, para $\alpha_c=4$, $Cu=10$ e diferentes valores de n .

Pela representação anterior verifica-se que para este instante de tempo, entre $y^*=1$ e $y^*=0,75$ os fluidos com $n=0,5$ e $n=0,6$ encontram-se sob o domínio lei de Potência, estando o intervalo entre $y^*=0,75$ e $0,5$ numa zona de transição. Para o ponto $y^*=0,25$ está já no primeiro patamar newtoniano. Verifica-se assim que com o aumento simultâneo do número de Carreau e do número de Womersley, o domínio do escoamento tende a estar localizado predominantemente numa zona definida pela lei de potência, sendo o intervalo onde decorre o primeiro patamar newtoniano mais reduzido.

7 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Este capítulo finaliza a tese, apresentando na primeira secção as principais conclusões deste trabalho e por fim na segunda secção são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

7.1 Conclusões

O trabalho realizado consistiu na obtenção de soluções semi-analíticas de escoamentos instacionários entre placas paralelas de fluidos newtonianos e newtonianos generalizados (modelos lei de potência e de Carreau) através do programa de matemática simbólica *Maple 13* como forma de resolver os sistemas de equações diferenciais e representar graficamente as soluções obtidas. O estudo sobre o modelo newtoniano tem como principal motivação a simulação de escoamentos sanguíneos. Por outro lado permite aferir a precisão do estudo numérico bem como compreender os principais efeitos decorrentes da existência de um gradiente de pressão dependente do tempo.

Relativamente ao estudo analítico realizado para fluidos newtonianos verifica-se que o escoamento pulsado numa conduta rígida pode ser dividido na componente estacionária e na componente oscilatória pois as equações que governam o escoamento são lineares, as duas partes podem ser resolvidas separadamente e o resultado é simplesmente adicionado. Uma das principais características do comportamento de um escoamento oscilatório numa conduta rígida é o de a velocidade num determinado instante de tempo ser a mesma independentemente da posição axial ao longo do tubo. Por outras palavras, a velocidade é apenas função do tempo e da coordenada radial, salientando que isto é apenas possível sob a condição de conduta rígida e escoamento incompressível, existindo assim várias limitações da aplicabilidade destes resultados para o sistema sanguíneo. Porém, estas equações e resultados obtidos podem ser entendidos como um ponto de partida para o entendimento de casos mais complexos como por exemplo escoamentos pulsados no interior de condutas elásticas ou de condutas rígidas com variação longitudinal do raio.

Nestes escoamentos usa-se em alternativa ao número de Reynolds o número de Womersley que é definido como:

$$\alpha = h\sqrt{\rho\omega/\eta} \quad (7.1)$$

em que h representa a altura desde o eixo da conduta até à parede, ρ representa a massa volúmica, ω a frequência angular da oscilação e η a viscosidade do fluido, sendo constante para fluidos newtonianos. O número de Womersley também relaciona as forças viscosas e

inerciais, mas enfatiza os termos dependentes do tempo em vez dos termos inerciais estacionários.

Num escoamento instacionário, o desfasamento entre o gradiente de pressões e a velocidade nunca termina pois o gradiente de pressão está a mudar continuamente. Se o gradiente de pressão for da forma oscilatória, a velocidade assume também uma forma desse tipo, mas devido à inércia, a velocidade requer um certo período de tempo para alcançar esse regime oscilatório. Deste modo, o gradiente de pressão e a velocidade apresentam-se desfasados, sendo a amplitude da velocidade inferior à amplitude que esta tomaria na ausência de inércia.

Para escoamentos instacionários com baixo número de Womersley, tal como $\alpha=0,5$, verifica-se através das simulações numéricas que o desfasamento relativamente à função oscilatória do gradiente de pressão é muito reduzido. Verifica-se também, realizando uma normalização da velocidade do escoamento instacionário relativamente à velocidade máxima de um escoamento de Poiseuille equivalente, que para $\alpha=0,5$ a velocidade máxima do escoamento dependente do tempo é praticamente igual a 1, reforçando a ideia anterior que indicava uma menor influência das forças de inércia face as restantes forças envolvidas no escoamento para valores de número de Womersley reduzidos.

Com o aumento do número de Womersley, as forças de inércia tornam-se predominantes face às forças viscosas. O escoamento começa com um regime transiente no qual tenta satisfazer o gradiente de pressão prevalecente, mas nunca consegue. Em vez disso, um regime estacionário é atingido no qual a velocidade oscila com a mesma frequência do gradiente de pressão, mas com um desfasamento. Quanto maior for o efeito da inércia, maior será este desfasamento, na ausência de efeitos de inércia, o desfasamento seria nulo. Refira-se que esta zona transiente inicial não pode ser observada realizando uma análise de valores a partir da solução analítica tendo em conta os pressupostos admitidos aquando da formulação da equação que representa a velocidade do escoamento. Deste modo, a solução analítica é uma solução particular que contempla apenas o escoamento oscilatório completamente estabelecido.

Conclui-se que com o aumento de α aumenta consideravelmente o número de ciclos necessários para atingir o regime oscilatório completamente estabelecido. A amplitude máxima atingida durante o ciclo é consideravelmente inferior à que existiria para um escoamento de Poiseuille equivalente. Se $\alpha=5$, após completamente atingido o regime oscilatório, a velocidade máxima representa menos de 10% da velocidade obtida para um escoamento de Poiseuille equivalente.

Para escoamentos pulsados, a velocidade oscila em torno de um valor médio não nulo. No caso em que $k_0=k_s$ observa-se que o aumento do número de Womersley faz com que a velocidade normalizada, relativamente ao escoamento de Poiseuille equivalente, nunca tome valor zero, ou seja, a componente oscilatória nunca anula a componente estacionária mesmo quando $\sin(2\pi t^*)=-1$, apesar de k_0 ser igual a k_s .

Para os modelos lei de potência e de Carreau, o que foi dito anteriormente também se verifica. Na realidade, estes modelos transformam-se no modelo newtoniano para o caso particular em que $n=1$.

No modelo lei de potência se o valor do número de Womersley for muito inferior à unidade, o desfasamento é praticamente nulo. Verifica-se que os perfis de velocidade, normalizados relativamente à velocidade máxima de um escoamento de Poiseuille equivalente são mais “cheios” para valores de n inferiores. Aumentando o valor de α_c aumenta o desfasamento,

referindo que nas simulações realizadas o número de Womersley característico foi mantido constante para diferentes valores de n e verificou-se um maior desfasamento para valores de n superiores. É também de referir o facto de para o mesmo número de Womersley característico os resultados para o escoamento oscilatório apresentarem o domínio mais à esquerda numa representação da viscosidade em função da taxa de deformação.

Um resultado importante que corrobora esta afirmação é a simulação para $\alpha_c=5$ para a qual no caso estacionário o domínio se localizava predominantemente na zona de taxa de deformação superior a 1 sendo a viscosidade apresentada pela curva $n=0,5$, nessa zona, inferior à apresentada pelas curvas de n superior. No caso oscilatório, o domínio localiza-se totalmente à esquerda do valor 1 de taxa de deformação apresentando a curva de $n=0,5$ maiores valores de viscosidade relativamente às outras curvas.

Quanto ao modelo de Carreau verifica-se que para valores de α_c reduzidos, tais como $\alpha_c=0,1$, o escoamento se encontra no primeiro patamar newtoniano não sendo deste modo influenciado pelas variações do valor de n . Assim, os resultados apresentados para o caso de $\alpha_c=0,1$ e $Cu=1$ ou o caso de $\alpha_c=1$ e $Cu=1$ apresentam-se como linhas sobrepostas, existindo no segundo caso efeitos devidos à inércia iguais aos obtidos para as simulações numéricas de fluidos newtonianos.

Com o aumento gradual do número de Womersley e do número de Carreau o primeiro patamar newtoniano tende a apresentar dimensões mais reduzidas face às dimensões do domínio de transição e do domínio lei de potência.

Verifica-se assim que para valores elevados do número de Carreau e do número de Womersley, o domínio do escoamento tende a estar localizado predominantemente numa zona definida pela lei de potência, sendo o intervalo onde decorre o primeiro patamar newtoniano mais reduzido. Deste modo os resultados apresentados para estes casos são governados predominantemente pela zona lei de potência tendo as curvas da velocidade representações semelhantes às obtidas para as simulações numéricas utilizando o modelo lei de potência.

Conclui-se assim que para a compreensão dos resultados obtidos para este modelo é essencial a representação da variação da viscosidade em função da taxa de deformação bem como a representação do valor das taxas de deformação em diferentes pontos da conduta com vista a compreender qual o domínio predominante do escoamento.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Julga-se pertinente a obtenção de soluções analíticas ou semi-analíticas para os casos instacionários para fluidos segundo o modelo de Carreau e modelo lei de potência, as quais não foi possível obter neste trabalho mesmo com a ajuda do programa “Maple” versão 13.

A extensão do trabalho aqui realizado, simulação numérica de escoamentos instacionários em meio confinado, mas para o caso específico de condutas elásticas apresenta um enorme interesse para complementar este estudo bem como uma maior adequação do problema ao caso da hemodinâmica.

Este problema foi abordado na fase inicial desta tese referindo que, no caso da existência de deformação da conduta existirá uma velocidade radial diferente de zero, ao contrário do que

ocorre nos casos apresentados. Deste modo possuímos um sistema inicial com três equações, uma referente à equação de conservação da massa e duas referentes a quantidade de movimento segundo os dois eixos. Para fluido newtoniano visto a lei constitutiva ser bastante simples, o termo das tensões existente na equação da quantidade de movimento pode ser substituído logo de início. A estas três equações acrescentam-se duas equações relativas ao deslocamento da parede, também segundo as duas direcções. Utilizando abordagens semelhantes às realizadas em Chandran et al. (2007); Rao (1983) e em Whirlow et al. (1965), nas quais é feita uma análise de magnitude nas equações de quantidade de movimento: para a primeira equação que relaciona a variação da velocidade radial com o tempo é desprezando o valor da segunda derivada da velocidade radial em ordem à coordenada x (eixo); na segunda equação que relaciona a variação da velocidade axial com o tempo é desprezado o valor da segunda derivada da velocidade axial em ordem à coordenada x (eixo). Esta abordagem não significa que as segundas derivadas desprezadas apresentam valor nulo mas significa que apresentam um valor muito inferior ao dos outros termos da equação. Outra simplificação comum na bibliografia estudada reside na consideração da conduta elástica fixa segundo a direcção axial, existindo assim apenas uma equação que represente o deslocamento da conduta (deslocamento radial).

Importa assim referir que face a todas as considerações levadas a cabo, a velocidade passa a depender de duas coordenadas espaciais (ao contrário do estudado nesta tese) e do tempo, existindo velocidade axial e também velocidade radial. A tentativa de resolução do sistema de equações com o programa “Maple 13” através da utilização do método aplicado neste trabalho demonstrou-se ineficaz tanto a nível analítico como a nível numérico. Salientando deste modo as enormes limitações da resolução numérica com este método pois apenas permite a simulação com variáveis dependente de duas coordenadas: uma coordenada temporal e uma coordenada espacial.

Assim, sugere-se para trabalhos futuros uma abordagem diferente deste problema passando pela discretização das equações e posterior resolução do sistema resultante. Saliente-se que se trata de um exercício bastante complexo não só devido às variações segundo duas direcções espaciais bem como a variação da malha ao longo do tempo tendo em conta a elasticidade da conduta. Por outro lado, as novas versões do programa “Maple” poderão entretanto resolver algumas das actuais limitações permitindo obter mais facilmente solução destes casos complexos.

Referências bibliográficas

- Anderson, P. D., Galaktionov, O. S., Peters, G. W. M., Vosse, F. N., Meijer, H. E. H.** Mixing of non-Newtonian fluids in time-periodic cavity flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 93 (2000) 265-286.
- Barnes, H. A.** *A Handbook of Elementary Rheology*. s.l. : University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2000.
- Bird, R. B., Armstrong, R. C. e Hassager, O.** *Dynamics of Polymeric Liquids. Volume I. Fluid Mechanics*. New York : John Wiley & Sons, 1987.
- Chandran, K. B., Yoganathan, A. P. e Rittgers, S. E.** *Biofluid Mechanics : the human circulation*. s.l. : Taylor & Francis Group, 2007.
- Daprà, I. e Scarpi, G.** Pulsatile pipe flow of pseudoplastic fluids. *Meccanica*. 41(2006) 501-508.
- Duarte, A. S. R., Miranda, A. I. P. e Oliveira, P. J.** Numerical and analytical modeling of unsteady viscoelastic flows: The start-up and pulsating test case problems. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 154 (2008) 153-169.
- Esmaeili, M., Javadzadegan, A. e Marashi, S. E.** The modeling of pulsatile blood flow as Cross-Williamson and Carreau fluids in an artery with a partial occlusion. Proc. *Second UKSIM European Symposium on Computer Modeling and Simulation*, 08-10 de Setembro de 2008.
- Kreyszig, E.** *Advanced Engineering Mathematics* . s.l. : Wiley , 1999.
- Liu, T. J.** Fully Developed Flow of Power-Law Fluids in Ducts. *Ind. Eng. Chem. Fundam.* 22 (1983) 183-186.
- Malheiro, J., Oliveira, P. J. e Pinho, F. T.** Verificação de um programa de computador para simulação de escoamentos viscoelásticos. Artigo ENG-09-21-2, Proc. *Conferência Engenharia'2009- Inovação e Desenvolvimento*, 25-27 de Novembro de 2009, Covilhã, UBI, pp. 5 (CD-ROM)
- Mendes, P. R. S.** Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 147 (2007) 109-116.
- Munson, B. R., Young, D. F. e Okiishi, T. H.** *Fundamentals of fluid mechanics* . New York : JohnWiley, 1998.
- Rao, A. R.** Oscillatory Flow in an Elastic Tube of Variable Cross-Section. *Acta Mechanica*. 46 (1983) 155-165.
- Schlichting, H. e Gersten, K.** *Boundary-Layer Theory*. New York : McGraw Hill, 1979.
- Whirlow, D. K. e Rouleau, W. T.** Periodic Flow of a viscous liquid in a thick-walled elastic tube. *Bulletin of Mathematical Biophysics*. 27 (1965) 355-370
- White, F. M.** *Fluid mechanics* . s.l. : McGraw-Hill/Higher Education ed. , 1999.
- Zamir, M.** *The physics of coronary blood flow*. s.l. : Springer, 2005.