Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

O Movimento da Matemática Moderna.

Concepções, Dinâmicas e Repercussões

Fernanda Maria Brito Gonçalves

Tese submetida para obtenção do grau de

Mestre em Ensino da Matemática

Professora Orientadora:

Professora Doutora Maria Helena Castanheira Henriques

Porto, 2007

O presidente do Júri,
Carlos Correia de Sá
14-12-2007

Agradecimentos

Para a realização da presente dissertação contribuíram diversas pessoas com quem fui contactando e que se cruzaram no meu percurso académico e profissional. A todas elas, que aqui ficarão anónimas, os meus sinceros agradecimentos.

Agradeço, em particular, à minha Orientadora, pela sua permanente disponibilidade, pela competência e clareza das sugestões apresentadas e, sobretudo, pela sua grandiosidade como Ser Humano.

Dedico uma palavra de agradecimento aos meus Pais e Irmão, pelas contínuas palavras de incentivo e pelo Olhar sempre atento.

Ao *Mário Jorge*, dedico as minhas últimas palavras:

Obrigada pelas palavras sábias e cristalinas e pelo companheirismo que tens demonstrado ao longo da Nossa Vida.

RESUMO

O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA.

CONCEPÇÕES, DINÂMICAS E REPERCUSSÕES

Fernanda Maria Brito Gonçalves

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2007

Orientadora da Tese: Professora Doutora Maria Helena Castanheira Henriques

O *Movimento da Matemática Moderna* constituiu um marco educacional à escala mundial, em meados do século XX.

O estudo apresentado é essencialmente sustentado por uma metodologia qualitativa de recolha de fontes primárias e de publicações da época.

Os resultados incluem uma descrição das dinâmicas internacionais referidas nas publicações institucionais: as directrizes veiculadas nos documentos oficiais, especificamente, nas actas das instituições internacionais como OCDE e UNESCO, assim como, as concepções inerentes ao processo de crescimento do Movimento.

São igualmente facultadas informações sobre as dinâmicas na organização dos principais simpósios, as propostas de grupos de trabalho e/ou personalidades de referência, assim como, as recomendações deliberadas oficialmente.

Uma vez que se trata de uma investigação sobre a implementação de um programa, é dado a conhecer o programa elaborado pela comissão de especialistas, não rígido, que serviria de documento guia para a elaboração de textos e da organização de cursos experimentais, nos diferentes países.

A análise da implementação do programa de Matemática, as formas de o organizar e de ensinar os novos conteúdos, a utilização e os objectivos das classes piloto, a importância da formação inicial e da formação contínua dos professores de Matemática são igualmente alvo de atenção.

Finalmente, o estudo inclui uma referência às dinâmicas do Movimento da Matemática Moderna em Portugal. Deste modo, será dada uma relevância ao contexto educacional de 1936 a 1974 e à experiência piloto preconizada em Portugal, efectuando uma pesquisa em publicações de referência.

ABSTRACT

THE MOVEMENT OF MODERN MATHEMATICS.

CONCEPTIONS, DYNAMICS AND REPERCUSSIONS

Fernanda Maria Brito Gonçalves

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2007

Director of Thesis: Professora Doutora Maria Helena Castanheira Henriques

The Movement of Modern Mathematics was a worldwide educational achievement in the middle of XX century.

The subsequent report is essentially supported by a methodology of research on primary sources and publications of that time.

The results include a description of the international dynamics stated on institutional publications: the information passed on official documents, specifically, on the registers of the international institutions such as the OCDE and UNESCO, as well as, the process inherent conceptions of the Movement growth.

There's also information about the dynamics of the organization of the main symposiums, the suggestions of the workgroups or outstanding celebrities just as the recommendations officially taken, that directed the execution of the reform.

Since we are talking of a study about the implementation of a syllabus, it's essential to present the programme elaborated by a special commission, of flexible application, that would work as a guide document to the writing of texts and to the organization of experimental courses in a different countries.

The analysis of the experiments carried out on the Mathematics syllabus, its organization and the teaching methods, the usage and the purpose of the experimental classes, in addition to the importance of the initial and continuous formation of teachers are in the same way object of attention.

Finally, the report includes a reference to the dynamics of the Movement of Modern Mathematics in Portugal. Therefore, a special attention is going to be given to the educational context from 1936 to 1974 and the initial experience developed in Portugal, making a research on relevant publications.

ÍNDICE

Índice de Siglas

Consideramos pertinente explicitar previamente as designações das siglas usadas neste estudo.

CERI - Centre for Educational Research and Innovation

GEPAE – Gabinete de Estudos e Planeamento da Acção Educativa

ICMI ou CIEM (versão francesa) – International Commission on Mathematical Instruction

IMAVE – Instituto dos Meios Audiovisuais de Ensino

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

OCDE - Organisation de Coopération et de Développement Économiques

SMSG - School Mathematics Study Group

SPM – Sociedade Portuguesa de Matemática

UICSM - University of Illinois Committee on School Mathematics

UMMaP – University of Maryland Mathematics Project

UNESCO – United Nations Education Scientific and Cultural Organization

Índice das Ilustrações contidas nos Anexos

Índice de Figuras contidas no texto

1. Introdução

Perante o intenso movimento que se manifesta com vista a uma renovação do ensino da Matemática, ninguém fica indiferente. Decorrem diversas experiências que pretendem renovar o fundo e a forma do ensino, procurando apresentar uma matéria unificada sob a forma pedagógica mais eficaz.

Tem sido cada vez mais corrente, a generalização de uma ideia de que o ensino da Matemática se encontra em crise. Existe um número demasiado grande de crianças que não gosta de Matemática, sendo uma disciplina encarada como difícil e ardilosa. Por outro lado, em muitos casos, a disciplina é encarada como tendo alguns patamares de avaliação (exames, testes) findos os quais não é necessário dedicar qualquer tempo ao pensamento matemático.

Surgem então rumores, algo descoordenados, propondo, de forma implícita ou explícita, um regresso ao tempo em que os alunos sabiam Matemática. Mas será que esta afirmação corresponde à verdade?

Para Abrantes (2004), esta apreciação, apesar de ser bastante popular, era bastante simplista e enganadora.

> *"Em primeiro lugar porque ela se baseia numa deficiente análise do passado: os "bons velhos tempos" estão muito longe de ter sido bons ... Em segundo lugar porque ela pressupõe uma concepção conservadora e estática da sociedade e da ciência (e em particular da Matemática) que não tem na devida conta a necessidade de mudança provocada pela evolução social, científica e tecnológica".*
>
> Abrantes, 2004[1]

Segundo Ponte (1993), a Educação Matemática dos anos 80 e seguintes, em Portugal, tem uma herança essencialmente internacional, devendo as suas ideias orientadoras fundamentais às publicações da UNESCO e do NCTM e a autores como Pólya, Freüdenthal, Kilpatrick, Davis, Hersh e Papert.

Contudo, esta herança do foro internacional não poderá significar um esquecimento das tradições, valores e problemas da realidade portuguesa. Ponte (1993) refere, que existe uma preocupação de reconhecimento e valorização do passado, sendo crucial uma reconstrução da nossa identidade.

[1] Cit. em *Gazeta da Matemática*, n.º 146, p.15 de 2004. (artigo gentilmente facultado pela APM (1988) – *A renovação do currículo de Matemática*).

Segundo Matos (2004)[2],

> *"Levantamentos iniciais revelam que as pesquisas sobre o Movimento da Matemática Moderna (MMM), além de escassas, em grande medida, atém-se ao estudo do ideário modernizador (...) não existindo estudos profundos sobre as consequências do movimento e muito menos, da sua recepção nas práticas pedagógicas dos professores de matemática".*

Considera-se, portanto, fundamental identificar as principais lições do passado, preenchendo uma lacuna histórica, para que sejam edificados referenciais da Educação Matemática, levada a cabo na segunda metade do século XX.

A compreensão efectiva das estruturas da Matemática sempre constituiu uma preocupação pedagógica da maior importância. Se recuarmos no tempo, muitas foram as preocupações de diversas personalidades e/ou instituições (nacionais ou internacionais) relacionados directa ou indirectamente com a disciplina. Deste modo, a análise que se pretende realizar corresponde a um importante marco pedagógico internacional, que é e situado nos finais da década de 50: *O Movimento da Matemática Moderna.*

O Movimento desempenhou um importante papel

> *"na demolição de certos mitos então prevalecentes na educação matemática. Com toda a inovação radical, sofreu as consequências do exagero, da precipitação e da improvisação. Os desacertos muito naturais e esperados foram explorados e sensacionalizados e a matemática moderna foi desprestigiada e combatida".*
>
> D'Ambrósio, 1996, p.54

O estudo da história da transmissão do saber matemático no período referido, torna-se mais relevante, pelo facto de poder constituir uma perspectiva de modernidade cultural - Um estudo desta natureza considera a Matemática como um produto cultural.

Para a consecução de metas tão amplas, é necessário procurar os vestígios deixados por quotidianos escolares passados. Esses vestígios podem ser encontrados, compondo um conjunto de produtos de cultura escolar.

Como refere Dominique Júlia (2004)[3], a

> *"cultura escolar não pode ser estudada sem a análise precisa das relações conflituosas ou pacíficas que ela mantém a cada período da sua história, com o conjunto das culturas que lhe são contemporâneas...", definindo Cultura escolar como "um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos".*

[2] Cit. em Proj. A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal - estudos históricos comparativos
[3] Cit. em Proj. A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal - estudos históricos comparativos

Em alguns países, a valorização da dimensão teórica levou ao relativo esbatimento das preocupações didácticas. Segundo Ponte (1993), um dos aspectos mais importantes da investigação portuguesa é talvez a forte presença da vertente didáctica, levando os educadores matemáticos a debruçarem-se sobre problemas concretos da prática pedagógica dos professores. Contudo, sem se erradicar estas preocupações é fundamental guarnecer o papel da teoria na investigação, uma vez que a qualidade desta, depende não só da metodologia empírica como da respectiva solidez teórica, sendo esta crucial para a definição de problemáticas, bem como, para suporte de análise e de interpretação.

De acordo com Certeau (1982), a base teórico-metodológica a que nos propomos, aponta, em primeira instância, para a prática da história, para o ofício do historiador. Deste modo, as ferramentas metodológicas terão em consideração que o trabalho histórico considera a produção de objectos de pesquisa, procedimentos específicos para a sua construção e a busca da legitimação dos seus produtos pela comunidade científica. Deste modo, o papel que nos propomos desempenhar não pretende modificar pontos de vista nem adoptar juízos de valor.

O estudo nasceu de uma motivação gerada durante a frequência da parte curricular do Mestrado, onde tivemos a possibilidade de ter conhecimento de movimentações internacionais que poderiam ter influenciado o contexto educacional europeu e, em particular, de Portugal, no final dos anos 50. Essa motivação materializou-se num projecto de investigação submetido ao regente de uma das cadeiras e permitiu o início de uma pesquisa que não mais parou.

Não constituiu nosso objectivo demarcar profundamente o início do designado Movimento da Matemática Moderna, uma vez que consideramos ser uma tarefa difícil de concretizar com exactidão. Assim, numa primeira fase e após leituras genéricas de referência, ficamos com a ideia de que teria sido um movimento que pretendeu renovar o ensino da Matemática.

Pensamos então analisar as motivações e concepções iniciais, nomeadamente, verificar a existência de encontros internacionais e planos de trabalho estabelecidos. Após a constatação de dinâmicas, procuramos direccionar a pesquisa para a consulta de actas de instituições internacionais que têm objectivos e preocupações relacionados com o desenvolvimento científico, económico, educacional e cultural, como sendo, OCDE e UNESCO. O objectivo era compreender e analisar as diversas etapas do fenómeno, facultando informações específicas das concepções e das dinâmicas que o mesmo se revestia. Na nossa opinião, esse propósito só poderia ser alcançado se efectuássemos um acompanhamento sequencial das indicações, seguindo todas as referências disponibilizadas.

Nesta investigação, as publicações das organizações internacionais, como a OCDE e a UNESCO, constituíram um suporte, abundante e credível, de informação, nomeadamente, no desabrochar do Movimento.

Uma grande parte da pesquisa que sustenta o estudo compreende fontes primárias, nomeadamente, actas dos congressos, publicações em revistas à data, Diários do Governo português, assim como, artigos e textos publicados durante e pós *Movimento*.

Realçamos, desde já, que em todas as actas consultadas os textos se encontravam escritos em língua francesa ou inglesa, pelo que, por uma questão de acessibilidade geral, efectuamos as devidas traduções para português. Deste modo, os excertos apresentadas neste estudo, que pertencem a essas fontes, não serão assinaladas como tradução nossa, ficando desde já esclarecido, que o são. Tratou-se de um trabalho exaustivo, pela dimensão, mas também pela preocupação de se ser rigoroso nas informações veiculadas, factos que conduziram a uma necessária delimitação temporal.

A estruturação do estudo obedeceu a um princípio cronológico, partindo das motivações até aos aspectos concretos que lhe estiveram subjacentes.

Deste modo, no capítulo dois evidenciamos o contexto internacional e as concepções relativamente à *Matemática Moderna*. São facultadas informações sobre a dinâmica na organização do simpósio, as propostas de grupos de trabalho e/ou personalidades de referência, assim como, as recomendações deliberadas, que constituíam um guia para a implementação da reforma. Sendo Portugal um dos países integrados nestas organizações internacionais, consideramos crucial, a apresentação da informação oficial disponibilizada pelas autoridades competentes relativamente ao estado do ensino da Matemática em 1960.

No terceiro capítulo pretendemos divulgar o programa elaborado por uma Comissão de especialistas, que serviria de documento guia para a elaboração de textos, estruturação de programa e organização de cursos experimentais, nos diferentes países.

No quarto capítulo, pretendemos partilhar e analisar, as primeiras práticas focando os seguintes itens: o conteúdo do *novo programa* de Matemática, as formas de ensinar os novos conteúdos, a utilização e os objectivos das classes piloto, o papel das aplicações na modernização do ensino e a importância da formação dos professores. Pelas razões já mencionadas anteriormente, considerou-se relevante a referência particular ao caso português.

No quinto capítulo fornecemos uma sinopse descritiva dos encontros dinamizados, assim como, um resumo de comunicações e artigos, que no seu âmbito foram concebidos.

No capítulo seguinte pretendemos elucidar sobre os desenvolvimentos decorrentes e algumas das críticas levantadas à forma como decorria a Reforma.

Consideramos relevante dedicar o último capítulo à análise geral da repercussão do *Movimento da Matemática Moderna* em Portugal. Tendo em atenção que um estudo desta natureza não poderia isolar a Matemática do restante contexto educacional, resolvemos delimitar previamente esta tarefa, no tempo (1936 a 1974). Porquê este limite?

Esta opção esteve relacionada, pelas referências prévias relativas às directrizes da Reforma, as quais se situavam no final dos anos 50. Contudo, optamos por não analisar apenas a partir dessa década, pelo facto de poder existir algum sinal anterior susceptível de fornecer informações valiosas para a compreensão do fenómeno.

Deste modo, pretendemos contextualizar o antes e pós *Movimento da Matemática Moderna*, referindo de forma global e histórica, aspectos de ordem político-social, assim como, medidas educacionais passíveis de terem influenciado a situação do ensino em Portugal. Seguimos para uma referência aos programas adoptados durante o período temporal supracitado, bem como, a experiência piloto preconizada em Portugal no âmbito do *Movimento.*

O estudo é ainda sustentado por um conjunto de anexos que corroboram as informações veiculadas.

Acreditamos ter explorado todas as referências que se cruzaram durante a pesquisa, tendo a convicção, que algumas delas constituem pontos de partida para posteriores investigações.

O nosso intuito é que o estudo permita o desenvolvimento de dinâmicas posteriores para uma efectiva construção de referenciais históricos ao nível do Ensino da Matemática.

2. O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

2.1. O Simpósio de Royaumont

Não constitui nosso objectivo demarcar profundamente o início do designado Movimento da Matemática Moderna, até porque se considera uma tarefa difícil de concretizar com exactidão.

Ao procurar analisar este fenómeno foi necessário procurar fontes que o pudessem sustentar e explicar. Assim, e de acordo com D'Ambrósio (1987), as novas descobertas encontradas nos trabalhos de Dedekind, Weirstrass, Cantor, Frege, Grupo Bourbaki parecem ter marcado uma evolução e uma nova etapa da Matemática. Apesar destas reconhecidas contribuições, o seu efeito nas escolas secundárias só se faria sentir muito mais tarde.

Segundo Jones & Coxford (1970 a), os primeiros esforços de organização de comités para procurar incluir novos conteúdos nas escolas do Ensino Secundário limitaram-se, principalmente, à escrita de recomendações.

No início dos anos cinquenta, a recessão económica e política causada pelas duas guerras mundiais não constituiria terreno fértil para a reflexão em torno de aspectos ligados ao ensino da Matemática. Para D'Ambrósio (1987), com o fim da 2.ª Guerra Mundial parecia evidente a insuficiência de preparar os estudantes para competências funcionais, sendo diversos os sectores que requeriam pessoas altamente qualificadas, nomeadamente, a indústria, o negócio e a engenharia. A Matemática tornava-se imprescindível, não só para aqueles que pretendiam prosseguir estudos nessa vertente, mas também para aqueles cuja área de conhecimento parecia desligada da Matemática, como a Psicologia e a Sociologia.

A sociedade actual exigia cada vez mais o conhecimento de noções elementares de Matemática, assim como, engenheiros e investigadores com sólidos conhecimentos matemáticos. As novas aplicações da Matemática na indústria e em outras actividades económicas tornavam clara a "vantagem" de se ser Matemático.

A par deste contexto, os resultados obtidos pelos alunos não eram propriamente brilhantes e a aversão pela disciplina tornava-se uma constante.

Segundo Castelnuovo (1987), em 1950, foi constituída a *Comissão Internacional para o Estudo e Melhoramento do Ensino das Matemáticas*, cujos fundadores foram G. Choquet, J. Piaget e G. Gattegno – um matemático, um psicólogo e um pedagogo, respectivamente.

No final da década de 50, um impulso exterior de mudança provocou um grande alvoroço na comunidade matemática. Em 1957, os russos lançaram com êxito o primeiro satélite artificial – Sputnik. No seio da nação americana, um alvoroço fora instalado, levando a questionar a preparação técnica dos seus quadros. Estas pressões de ordem social e obviamente política apontavam para a necessidade de formar engenheiros e cientistas de modo a permitir equiparação à tecnologia russa. Tal traduziu-se na vertente pedagógica, especificamente, na modernização do Ensino da Matemática e das Ciências.

Neste sentido, em 1958, a *American Mathematical Society* decidiu constituir o SMSG - *School Mathematics Study Group*, (programa americano mais famoso) resultante de duas conferências de matemáticos em Chicago e Boston e que seria dirigido pelo professor Edward G. Begle.

Contudo, já em 1957, havia sido desenvolvido o Projecto *Madison* dirigido por Robert Davis, o qual aplicava muitas das ideias de Bruner, nomeadamente, o facto de enfatizar o método da descoberta e uma utilização de materiais manipuláveis no ensino. Precisamente no mesmo ano, aparecia o projecto UMMaP – *University of Maryland Mathematics Project*, orientado por Gagné, que tinha como objectivo, hierarquizar os objectivos comportamentais de Matemática e procurar traduzi-los para um currículo. Em 1959, desenvolve-se nos Estados Unidos da América o projecto UICSM - *University of Illinois Committee on School Mathematics*, dirigido por Max Beberman, que realçava a importância de alguns conteúdos do programa para o Ensino Secundário, apelando ao rigor e à precisão da linguagem sobretudo ao nível do complementar (high school).

Foi contudo unânime que o SMSG despoletou uma nova mudança no Ensino da Matemática, procurando motivar a integração de novos tópicos na escola elementar tais como, a Geometria Informal, Probabilidades, Álgebra e Teoria dos Números, sendo os Conjuntos o tema unificador. Os documentos foram predominantemente escritos por matemáticos mas também por professores.

Na sequência destes grupos, muitos outros foram criados por diversas instituições.

Era genericamente aceite, que muitas discussões e encontros foram realizados no âmbito de uma revisão de algo que estava necessariamente mal. Contudo, a metodologia pedagógica subjacente ao ensino nunca foi um ponto relevante dessa discussão, considerando-se que, em última análise, competiria aos estabelecimentos de ensino, implementar as medidas necessárias para uma desejável mudança.

Era opinião ecuménica, que seria impossível continuar a preparar matemáticos e técnicos baseados em metodologias e concepções antigas, sendo necessário incorporar na sua formação conhecimento actualizado e proveniente de outros campos. A relação entre as novas ideias e a sua aplicação no ensino era indissociável. Urgia o momento de reunir as ideias dos promotores dos novos métodos de ensino com as pessoas que se encarregariam de elaborar os novos programas.

A principal mensagem era que o ensino da Matemática tinha malogrado porque o currículo tradicional oferecia Matemática antiquada.

Na Europa, um grupo de matemáticos franceses apelava a uma reforma mais radical. Segundo Castelnuovo (1982), em 1959, a *Organisation Européenne de Coopération Économique* (OECE)[4], organizou um simpósio internacional em Royaumont para discutir e promover uma renovação do Ensino da Matemática em todo o mundo.

O plano de trabalho da sessão foi estabelecido entre os meses de Maio e Setembro de 1959, tendo-se repartido os participantes em três secções de trabalho, cada uma com um presidente, a saber:

I. Novas Concepções no domínio das Matemáticas[5] – Professor Jean Dieudonné;
II. Novas Concepções no Ensino das Matemáticas[6] – Professor Howard F. Fehr;
III. Problemas na Implementação da Reforma[7] – M. Pierre Théron.

Cada país membro ou participante foi convidado a enviar três delegados: um ilustre matemático, um especialista em pedagogia das Matemáticas ou a pessoa encarregue das Matemáticas no Ministério da Educação e um reputado professor de Matemáticas do Ensino Secundário. O Anexo 1 contém a lista dos participantes nesse encontro, sendo de realçar que Portugal não esteve presente.

A sessão de estudo decorreu de 23 de Novembro a 4 de Dezembro de 1959, no Círculo Cultural de Royaumont, em Asnières Sur Oise, sendo o relatório elaborado pelo Professor Howard F. Fehr, director da Secção das Matemáticas do *Teachers College* da Universidade de Columbia.

Deste modo, as informações aqui veiculadas são sobretudo baseadas na análise desse relatório, o qual apresenta argumentos, propostas e debates em prol de uma renovação no ensino das Matemáticas e culmina com a redacção e aprovação de um conjunto de Resoluções Gerais.

[4] A OCDE - *Organisation de Coopération et de Développement Économiques* foi instituída por uma convenção assinada em 14 de Dezembro de 1960, em Paris, pelos membros da OECE assim como pelo Canadá e os Estados Unidos da América. Como informação adicional, os membros da OCDE eram Alemanha, Áustria, Bélgica, Canadá, Dinamarca, Espanha, Estados Unidos da América, França, Grécia, Irlanda, Islândia, Itália, Luxemburgo, Noruega, Países Baixos, **Portugal**, Reino Unido, Suécia, Suíça e Turquia.

[5] Secção dedicada à evolução da Ciência Matemática; novas áreas das Matemáticas; novas aplicações; novos objectivos de estudos matemáticos. Preocupar-se-ia mais especificamente com as modificações do conteúdo das Matemáticas, procurando articular e facilitar a transição entre os estabelecimentos escolares e as universidades.

[6] Secção dedicada ao ensino das Matemáticas depois do primeiro ano de ensino escolar até ao terceiro ano; regras de Aritmética como sendo base intelectual de todos os estudos matemáticos; formação dos conceitos matemáticos; aptidão para a aprendizagem das Matemáticas; orientação racional e motivação dos alunos em Matemáticas. Esta secção ocupar-se-ia igualmente das modificações a realizar nos programas.

[7] Secção encarregue de definir os obstáculos colocados com a aplicação da Reforma, assim como, de examinar se as novas concepções do Ensino das Matemáticas poderiam ser implementadas na prática, nos actuais sistemas escolares. Dedicar-se-ia a esta questão, do ponto de vista dos organismos que estariam oficialmente encarregues de elaborar os programas para o Ensino das Matemáticas e procuraria responder às seguintes preocupações: manutenção de um corpo docente tanto em número como em qualidade; género, grau e entendimento dos conhecimentos matemáticos necessários dos professores e das condições de aperfeiçoamento dessas condições; novos materiais para acompanhamento dos novos programas.

Consideramos crucial a sua análise, pois

> *"Royaumont representou o culminar de quatro ou cinco anos de interesse crescente na necessidade de modernização".*
>
> Moon, 1986, p.48

O simpósio foi fecundo nas comunicações tendo a intervenção inaugural ficado a cargo de Dr. Marshall H. Stone, da Universidade de Chicago. A Lista de Conferencistas poder ser consultada no Anexo 2.

A iminência de uma evolução radical foi de imediato lançada pelo primeiro orador. Stone (1961a) referiu que a sessão de estudo foi organizada porque algo se passava com gravidade e porque no âmbito de uma mudança de programas de ensino:

> *"todos temos a convicção que é indispensável (...) uma discussão com um espírito aberto e com discernimento"*
>
> OCDE, 1961a, p.15

O pensamento científico tornava-se cada vez mais tributário dos métodos matemáticos, numa sociedade cada vez mais carente de investigadores nos diferentes campos do conhecimento. As pressões sobre o sistema escolar tornaram-se mais frequentes, quer no sentido de melhorar o ensino dos conteúdos, quer ao nível da preparação que se pretendia que os indivíduos possuíssem com vista à integração no mundo laboral, encontrando-se os programas inadaptados às carências e às condições da vida naquela época.

Segundo Stone (1961a), as Matemáticas do Ensino Superior evoluíam ao ritmo da investigação moderna. Deste modo, alertou que a via da remodelação dos programas do Ensino Secundário, apesar de crucial, teria de ser muito cautelosa pois podia criar um fosso entre o Ensino Secundário e o Superior. Afirmou que:

> *"como são os professores de Matemática das Universidades que decidem as licenças dos programas, não haverá sérios obstáculos a essa harmonização".*
>
> OCDE, 1961a, p.16

Para Stone (1961a), o verdadeiro espírito moderno que se pretendia incorporar no ensino, deveria passar pela integração de novas matérias que a descoberta científica realçou, considerando que, o que se pretendia formar ao longo do ciclo secundário era o "*homem culto*", que, no final do Ensino Secundário, poderia integrar o mundo do trabalho ou prosseguir estudos superiores. Deste modo, defendeu que para os estudantes prosseguirem os seus estudos com assiduidade e dinamismo:

"teremos de eliminar do ensino noções que, consagradas pela tradição, constituem a sua [ensino] *morte e onde se perde a utilidade, actualidade e importância".*

OCDE, 1961a, p.17

Para Stone, a razão pela qual a disciplina de Matemática tinha uma presença assídua nos programas escolares derivava da sua utilidade prática, sendo por essa razão que a Ciência Moderna prosseguia os seus intentos. Deste modo, considerou que não se poderia mais negar as relações da Matemática com a Ciência e a Tecnologia Modernas. Stone afirmou que os indivíduos viviam numa sociedade onde "*a técnica impera*" e alertou para o facto de não nos podermos alhear dessa realidade e sim de efectuar as devidas adaptações. Stone (1961a) alegou também que se constatava uma tendência crescente de apelar a estudos matemáticos para a resolução de problemas relacionados com outras ciências, nomeadamente em estudos científicos do comportamento humano, afirmando mesmo, que a Matemática poderia ser conectada como "*a pedra angular da sociedade*".

Este protagonismo teria de ter algumas implicações práticas. Se a atmosfera vivenciada apontava para um recurso a indivíduos altamente qualificados, então, em reposta às carências da sociedade e em favor da modernização da indústria, deveriam ser promovidas as condições necessárias para esse efeito.

Um interveniente aguardado era o Professor Jean Dieudonné. Em função dos programas de Matemáticas ministrados nas Universidades e nas Escolas de Engenharia, a sua exposição visava:

a. *"Analisar a formação matemática que os professores desses estabelecimentos poderiam trazer aos seus alunos no fim do Ensino Secundário";*
b. *"A formação realmente adquirida por esses jovens";*
c. *"As medidas a implementar para melhorar a situação actual".*

Dieudonné, 1961a, p.31

Segundo Dieudonné (1961a), os professores universitários consideravam que os estudantes que se encontravam no 1.º ano deveriam estar familiarizados com um conjunto básico de técnicas indispensáveis à aquisição de novas noções, que seriam adquiridas no âmbito de áreas como a Álgebra Linear Elementar, Geometria Analítica, Trigonometria e no Cálculo Diferencial e Integral.

Assim,

" os alunos deverão estar familiarizados com a utilização da dedução lógica e ter uma ideia do método axiomático".

Dieudonné, 1961a, p.32

Perante as novas mudanças no mundo e na sociedade, as Universidades não poderiam renegar a sua responsabilidade, uma vez que,

> *"É naturalmente nas Universidades que as novas concepções matemáticas fazem sentir a sua influência (...) a Ciência não poderá renunciar a novos métodos e aquisições recentes: seria a negação do que seria a missão essencial do ensino universitário."*
>
> Dieudonné, 1961a, p.34

Contudo, estas mudanças não se poderiam limitar exclusivamente ao Ensino Universitário sob pena de quebrar uma linha de conhecimento imprescindível à ascensão de conhecimentos superiores. Assim, Dieudonné defendeu a importância de uma séria revisão dos programas do Ensino Secundário, dada a introdução de novas Matemáticas e de uma nova linguagem que deveria ser extensível e aplicável a esse nível escolar.

Afirmou que:

> *"Passados 50 anos, os matemáticos encontram-se animados não só por introduzirem novos conceitos mas uma nova linguagem, linguagem criada empiricamente para as carências da investigação matemática e para a aptidão da expressão com precisão e concisão dos enunciados matemáticos".*
>
> Dieudonné, 1961a, p.34

Contudo, Dieudonné declarou que esta implementação não só era difícil como já havia encontrado alguma resistência na sua aplicação, nomeadamente em França, exemplo que era conhecedor. Apesar de existir a introdução de alguns elementos de Cálculo Integral e Diferencial e um pouco de Geometria Analítica, a grande atenção era dada à Geometria Pura, "*ensinada mais ou menos à maneira de Euclides, com um pouco de Álgebra e Teoria de Números*".

Declarou mesmo que:

> *" (...) devemos agora empreender uma reforma bem profunda, a menos que se aceite a situação, ao ponto de travar seriamente todo o progresso científico".*
>
> Dieudonné, 1961a, p.35

Tornou-se célebre a frase "*Abaixo Euclides*" proferida pelo orador.

> *"Se pudesse resumir em uma frase todo o programa que tenho em espírito, seria através do slogan Abaixo Euclides".*
>
> Dieudonné, 1961a, p.35

A afirmação, talvez chocante, para muitos dos presentes, tinha argumentos que a sustentavam.

Segundo Castelnuovo (1982), Dieudonné pretendia que os presentes fossem porta-vozes, nos respectivos países, de uma necessidade de abandono total do Ensino Euclidiano e a sua substituição por uma Matemática viva e estimulante ligada à investigação moderna. A título de exemplo, Dieudonné expôs aos presentes, uma ideia metafórica e pessoal relativamente ao Ensino Euclidiano:

> *"Suponha-se que a título teórico, se pretende ensinar a Geometria Plana Euclidiana a espíritos adultos que vêm de outro mundo. Admita-se que iremos apenas ensinar do ponto de vista das aplicações no âmbito das investigações modernas. Eu estou convencido de que todo o curso poderá ser leccionado em três horas: a primeira hora destinada à descrição dos axiomas, depois às consequências úteis desses axiomas e por fim alguns exercícios com um certo interesse".*
>
> Dieudonné, 1961a, p.36

Seguidamente, tentou evidenciar qual a situação vigente nos estabelecimentos de Ensino Secundário. Assim, considerou errada a forma como as noções geométricas eram transmitidas, apontando algumas deficiências nessa transmissão. Os processos apresentados eram extraordinariamente laboriosos e complicados, chegando a supostos teoremas, que não passavam de propriedades.

Para os defensores da tradição, a

> *"Geometria Euclidiana ensinada daquela forma é o único meio que permite abrir o espírito da criança para uma verdadeira compreensão das Matemáticas" e que "os grandes matemáticos do passado e do presente tiveram como base esses ensinamentos e com eles fizeram as suas descobertas".*
>
> Dieudonné, 1961a, p.38

Uma pergunta impunha-se: que matérias deveriam então ser colocadas no lugar da Geometria de Euclides?

Para Dieudonné (1961a), deveriam ser matérias úteis às teorias de nível superior. De forma a concretizar esta ideia, apresentou propostas detalhadas e considerou que o seu ensino era perfeitamente adaptável ao desenvolvimento intelectual dos alunos.

Estas foram algumas dessas propostas:

a. *"Matrizes e determinantes de ordem 2 e 3";*
b. *"Cálculo Diferencial e Integral Elementar – Funções de uma só variável";*
c. *"Construção da curva representativa de uma função; construção de uma curva dada a sua forma paramétrica, por meio de derivadas";*
d. *"Propriedades elementares dos números complexos";*
e. *"Coordenadas polares"..*

Dieudonné, 1961a, p.39

Contudo, subsistiria ainda um grande problema que era a organização dessas matérias de forma equilibrada de modo a ser elaborado um programa exequível, com metodologias de ensino adequadas.

Para esse propósito, sugeriu que fosse desenvolvido durante alguns anos um ensino semi-experimental, para que fosse adquirida uma competência essencial – *Intuição.*

Mencionou que:

> *" (...) não podemos desenvolver com eficácia uma teoria matemática sob a forma axiomática, sem que o estudante esteja familiarizado com a questão em que ela se aplica, sem trabalhar um certo tempo sobre uma base experimental ou semi-experimental".*

Dieudonné, 1961a, p.40

Por outro lado, a introdução lógica numa questão matemática, devia ser encarada como uma necessidade e ser apresentada de um forma clara, sem lacunas para não dissimular o pensamento. Em particular, declarou que o ensinamento da Geometria era encarado como

> *"(...) colecções de «definições» que nada definem e de pseudo «demonstrações» que não conseguem resistir à análise lógica".*

Dieudonné, 1961a, p.40

Dieudonné apresentou uma proposta para um novo programa, o qual pode ser consultado no Anexo 3. A ideia seria subdividir o mesmo através da idade dos alunos e, em cada nível, propunha-se examinar os aspectos experimentais e dedutivos de diversas questões presentes no programa.

Segundo Dieudonné (1961a), as noções introduzidas deveriam contemplar a sua interpretação dedutiva, sendo apenas na Universidade que a abstracção deveria realmente iniciar.

Estas noções, capazes de serem interpretadas dedutivamente, deveriam constituir uma prioridade no Ensino Secundário, sendo necessário que esse ensino se debruçasse sobre questões actuais e úteis e não sobre resultados artificiais que acabavam por dominar o ensino da Geometria. A título de exemplo, referiu que a noção de vector era de crucial importância em toda a Ciência Moderna e que a noção de triângulo era artificial e que não havia praticamente aplicação no âmbito de domínios altamente especializados da Astronomia e Geodesia.

Após a sua comunicação, um estimulante debate ficou instalado. Dessa troca de ideias, resultaram alguns pontos de acordo, sendo o mais relevante, o facto de não se suprimir inteiramente a Geometria Euclidiana do programa do Ensino Secundário.

Assim,

> *"(...) devemos conservar alguma coisa da apresentação actual da Geometria, pois a maior parte das noções matemáticas reclamam de uma representação geométrica".*
>
> OCDE, 1961a, p.48

No que respeita à questão levantada por Dieudonné relativamente à noção artificial de triângulo, considerou-se que:

> *"(...) devemos ensinar a Geometria através de procedimentos intuitivos e experimentais e, nesse domínio, o triângulo é claramente útil".*
>
> OCDE, 1961a, p.48

De igual modo, constatou-se que a Geometria continuava a ser a disciplina que habituava os alunos às metodologias do pensamento dedutivo, mas que se passava tempo a mais no ensino de noções geométricas com pouco interesse e utilidade para os estudos matemáticos. O grupo de trabalho considerou que:

> *"(...) um dos objectivos das matemáticas do Ensino Secundário é preparar os alunos para a Universidade, não poderemos retardar a sua formação, obrigando-os a resolver exercícios artificiais em excesso, complicados e muitas vezes inúteis".*
>
> OCDE, 1961a, p.48

O grupo de trabalho considerou que independentemente do programa de Geometria adoptado, determinadas competências deveriam ser desenvolvidas em determinadas faixas etárias, de modo a permitir que:

> *"A passagem progressiva da realidade física à abstracção formal e à estrutura deverá ser concluída no momento em que o estudante entra na universidade".*
>
> OCDE, 1961a, p.121

A nova abordagem da Matemática deveria apresentar esta disciplina de um modo unificado, procurando integrar e coordenar os cursos isolados de Álgebra, Aritmética, Geometria, Trigonometria e Análise.

Por outro lado, devia ser introduzida uma linguagem precisa que poderia ser atingida pela utilização de um novo simbolismo, indispensável para o prosseguimento de estudos universitários. Neste âmbito não foi registada unanimidade.

Um outro aspecto a salientar foi a situação de muitos alunos que não pretendiam prosseguir os seus estudos. Nesses casos, sugeriu-se que os que pretendessem prosseguir:

> *"(...) deverão ser colocados em classes distintas daqueles que são incapazes de retirar proveito desse ensino intensivo".*
>
> OCDE, 1961a, p.49

Considerando que o único meio de diminuir o fosso entre os estudos secundários e universitários era melhorar o ensino e os programas, o grupo de trabalho considerou que na formação dos professores do Ensino Secundário dever-se-ia ter em consideração a diferença entre o pensamento essencialmente abstracto do Matemático Puro e a forma de exposição exigida ao nível do Ensino Secundário. Assim, propôs a apresentação de um curso

> *" (...) de uma forma visual; a representação gráfica, o estudo das funções pelas suas curvas e o recurso à imagem visual são os procedimentos a implementar e recomendados aos futuros professores de Matemáticas do Ensino Secundário".*
>
> OCDE, 1961a, p.50

Por outro lado, a ligação entre os estudos universitários e os estudos secundários deveria ser mantida também pelos investigadores e professores universitários, que deviam partilhar com a comunidade os seus feitos e as suas ideias.

Foi realçado que a Reforma devia evidenciar primeiramente uma mudança de objectivos: relevar a importância da aquisição dos conceitos, das estruturas e da inteligência matemática sobre a destreza técnica, a qual devia permanecer como a suficiente. Posteriormente, devia debruçar-se por uma mudança no recurso a noções que nunca tiveram o seu lugar no programa das escolas secundárias e organizar e homogeneizar os diversos campos da Matemática, com o objectivo de reforçar a compreensão e assegurar a constituição de sólidas bases para estudos superiores.

Cada país seria autónomo na forma de concretizar esta Reforma, de redigir novos manuais de classe, de organizar o ciclo de estudos e de efectuar as devidas experimentações, apesar de, ficar encarregue de divulgar os resultados dos seus ensaios a todos os restantes.

Pretendia-se que todos os esforços efectuados:

> *"(...)d'abord, mieux préparer les élèves aux études universitaires; ensuite, mettre à la disposition de chacun d'eux un instrument utilisable dans la vie de tous les jours".*
>
> OCDE, 1961a, p.132

2.1.1. Resoluções e Recomendações

Os tópicos anteriores referiram-se a resumos de comunicações apresentadas e a debates de pequenos grupos de trabalho. Estes, por sua vez, ocuparam-se com questões mais particulares no âmbito do seu objectivo de estudo. Foram então fornecidas recomendações que foram apresentadas sob a forma de versão definitiva como um conjunto de resoluções resultantes de um comum acordo.

Todas as discussões estabelecidas nos distintos grupos de trabalho, fizeram ressaltar a necessidade imediata de reunir uma comissão de especialistas pertencentes a diferentes países, os quais ficariam encarregues de elaborar um programa detalhado para as Matemáticas no Ensino Secundário.

As resoluções foram aprovadas pelo Director do Comité da OCDE para as Questões do Pessoal Científico e Técnico e um grupo de educadores, matemáticos e de professores reuniu em Agosto e Setembro de 1960 na Jugoslávia, no sentido de estabelecer o programa detalhado, a partir do qual se redigiram novos manuais.

Foram então deliberadas as seguintes Resoluções Gerais:

I. O ensino da Geometria e da Álgebra ministrado nas escolas deveria ser adaptado com toda a urgência aos progressos das Matemáticas Modernas. Neste sentido, essa adaptação exigiria a eliminação de uma parte da Geometria Plana e Geometria Espacial, da Álgebra e da Trigonometria. Considerou-se também indispensável que as matérias fossem leccionadas de forma lógica e mais profunda e com mais rigor. Por outro lado, essa adaptação exigia que se estabelecesse um ensino, que privilegiasse as relações que unem a Geometria à Álgebra, em particular, a Álgebra Linear e Vectorial. Por outro lado, o ensino da Geometria Dedutiva deveria ser posterior a um ensino experimental da Geometria Intuitiva ou Física.

II. A Estatística Indutiva deveria ser considerada um ramo da Matemática Aplicada, dada a importância que assumia em processos de decisão e dada a crescente utilização no domínio das Ciências Físicas e das Ciências do comportamento humano. O cálculo elementar de probabilidades deveria ser susceptível de ser ensinado nas escolas secundárias, devendo fazer parte do novo programa de estudos. Os cursos preparatórios destas matérias deveriam figurar nos programas das escolas e das instituições que se encarregassem da formação de professores.

III. Sendo um interveniente crucial em todo este processo, ao papel do Professor deveria ser dada a devida importância. Uma reforma colocada nestes moldes não seria concretizável se os docentes envolvidos não fossem competentes. Assim, seria importante realçar que "*o Professor de Matemática deverá ser um importante membro da sociedade, apreciado e respeitado*"[8]. Salientou-se também a actualidade da temática analisada no que respeitava ao prestígio que o professor devia ter, sendo de lhe assegurar um tratamento conveniente, as condições de vida favoráveis ao seu desenvolvimento pessoal, a possibilidade de se elevar a um nível superior, assim como, normas de trabalho satisfatórias, nomeadamente, a nível dos horários.

IV. O ensino das Matemáticas nas escolas secundárias deveria ser exclusivamente confinado a indivíduos possuidores de diplomas universitários de Matemáticas, sendo imprescindível nas classes superiores do Ensino Secundário.

V. Com o objectivo de se conhecer a população de professores de Matemática dos países pertencentes à OCDE, cada delegação ficou encarregue de elaborar uma pequena bibliografia dos trabalhos mais importantes desses professores e de comunicar à Organização de modo a constituir como um anexo ao relatório deste estudo.

VI. Todos os participantes nesta sessão estiveram de acordo no que respeitava à necessidade imperiosa de modernizar o ensino das Matemáticas. Para a consecução desse objectivo, era indispensável que cada país redigisse novos manuais e livros de classe. Considerou-se que esse trabalho seria facilitado se fosse colocado à disposição dos países, um plano que indicasse as diferentes possibilidades de reforma, para servir de guia na redacção dos seus próprios manuais escolares e posteriormente do seu ensaio. De modo a constituir as bases desse plano, os membros da sessão de estudo recomendaram que a OCDE constituísse uma comissão de especialistas, composta por professores de Matemáticas das universidades, das escolas secundárias e das instituições encarregues da formação de professores do Ensino Secundário. Esta comissão estabeleceria uma tabela indicativa do conjunto de matérias que deveriam fazer parte do Ensino Secundário e procuraria também, especificar "*o espírito através do qual essas matérias deveriam ser ensinadas*"[9]. Este guia seria posteriormente facultado a todos os países membros, tendo estes de o transmitir às diferentes autoridades do Ensino Secundário. Foi então recomendado que essa comissão deveria ter reuniões preliminares no ano lectivo de 1959/1960 e uma sessão de pelo menos quatro semanas durante as férias de Verão de 1960. Ficou também estabelecido que os países que aderissem a este esforço de modernização seriam encorajados através de ajudas financeiras que a Organização acordaria segundo as regras tradicionais.

OCDE, 1961a, pp.127-132

[8] OCDE, 1961a, p.129
[9] OCDE, 1961a, p.130

2.2. Monografia do estado do ensino da Matemática em Portugal - 1960

Em Dezembro de 1959 foi enviado a todos os países da OCDE, Canadá e Estados Unidos da América um questionário intitulado "*Etat actuel de l'enseignement des mathématiques – tendances et évolution*". Após a recepção em cada um destes países, o responsável oficial pelas questões do ensino teria de designar uma pessoa que ficaria encarregue de o preencher e enviar, assim como, de comunicar o respectivo nome à OCDE. O Anexo 4 contém a lista dos responsáveis pelas respostas ao questionário, o qual deveria ser enviado até ao dia 1 de Fevereiro de 1960. Em Portugal, o responsável por essa tarefa foi Pedro de Campos Tavares[10].

Esta documentação tinha como principais objectivos:

> I. Descrever de forma sucinta o programa de Matemática leccionado em cada um dos países;
> II. Indicar a maneira como o programa tem sido aplicado;
> III. Indicar as tendências ou mudanças consideráveis que possam estar a intervir com a organização do ensino;
> IV. Especificar o número de alunos que obtiveram aprovação nos exames e que pretendem prosseguir estudos universitários;
> V. Descrever a formação matemática e pedagógica ministrada aos professores de escolas secundárias.
>
> OCDE, 1961a, p.135

O Anexo 5 corresponde ao questionário enviado, o qual seria preenchido pelo indivíduo responsável em cada um dos países. O questionário apresenta algumas questões estatísticas, questões relativas à formação dos professores de Matemáticas e aos programas adoptados, uma questão sobre a inspecção dos estudos e, por fim, algumas questões sobre tendências e/ou modificações no âmbito dos programas de Matemáticas em cada um dos países. A última parte deste inquérito foi destinada a inferir sobre o ano de escolaridade em que figuravam pela primeira vez determinados problemas matemáticos.

Considerando que as questões formuladas pudessem não cobrir as realidades de todos os países, sugeriu-se ainda que este inquérito fosse complementado com sugestões, comentários e documentos que se considerassem pertinentes para a análise global que se pretendia efectuar.

De modo a simplificar a posterior análise destes inquéritos, sugeriu-se que as escolas fossem divididas em Escolas Primárias e Escolas Secundárias. Estas últimas catalogadas ainda em **Categoria A** (escolas que se destinavam a alunos que prosseguiam os estudos universitários – Liceu, Colégio, Classes Preparatórias) e de **Categoria B** (escolas onde se verificava que os alunos raramente prosseguiam os estudos universitários). Sugeriu-se ainda que as Escolas de Categoria A

[10] Professor de Matemáticas, no Liceu Camões em Lisboa.

fossem divididas em **Categoria AI** (escolas onde se ministrava um ensino científico[11]) e em **Categoria AII** (escolas onde se ministrava um ensino não científico[12]). Ressalvou-se ainda o facto de uma determinada escola agrupar situações de ambas as Categorias, procedendo então à especificação do número de alunos inscritos em cada uma das Categorias[13].

A documentação enviada, assim como, uma monografia resumida do estado actual dos programas de Matemáticas em vigor, que cada país ficou encarregue de elaborar, permitiriam analisar a situação vigente em cada um dos países.

Pretendia-se que essa monografia contemplasse os seguintes itens:

> I. Descrição sucinta da estrutura do Ensino Primário e do Ensino Secundário;
> II. Esboço dos programas de Matemática correspondentes aos diferentes anos de escolaridade;
> III. Número de alunos, por classe, que receberam ensino em Matemáticas;
> IV. Formação e títulos exigidos aos professores de Matemáticas;
> V. Orientação da reforma dos programas.
>
> OCDE, 1961b, p.3

Em Portugal, a personalidade incumbida desse objectivo foi novamente Pedro de Campos Tavares. Com base na consulta da versão integral dessa monografia[14] e respeitando a divisão efectuada, apresentamos, de seguida, um resumo das informações veiculadas.

I. Estrutura Geral do Ensino

Segundo as informações transmitidas, o Ensino Primário[15] era gratuito para todos os jovens e tinha a duração de 4 anos, até aos 11 anos de idade, altura em que tinha início o Ensino Secundário, o qual se dividia em duas categorias[16]: Ensino Liceal e Ensino Técnico. Para o respectivo ingresso, os alunos tinham de se submeter à realização de um Exame de Admissão.

[11]Considerou-se como Ensino Científico, as classes onde os cursos se debruçavam principalmente ou exclusivamente sobre as Matemáticas, a Física, a Química ou as Ciências Experimentais (Biologia). (OCDE, 1961a, p.242)

[12] Considerou-se como Ensino não Científico, as classes especializadas no estudo das Línguas (clássicas ou modernas), das Humanidades (Literatura e História) e das Belas Artes. (OCDE, 1961a, p.242)

[13] Esta classificação foi válida para todos os países com excepção do Canadá, Estados Unidos da América, Irlanda e Suíça, por razões distintas. Considerou-se que Canadá e EUA apresentavam como tipo de escola mais frequente, a "*hight school*", que correspondia à aglutinação das três categorias mencionadas, a Irlanda onde todas as escolas secundárias preparavam os seus alunos para estudos universitários e a Suíça, pelo facto de não ter relevância a subdivisão da Categoria A, dado que, mesmo nos *gymnases classiques* e *gymnases littéraires*, os estudos de carácter científico representavam 30% ou menos do programa. (OCDE, 1961a, p.136)

[14] A Monografia apresentada por Tavares sobre Portugal pode ser consultada em OCDE, 1961b, pp.77-84.

[15] Em muitas escolas rurais, o Ensino Primário estendia-se para Cursos Complementares de aprendizagem agrícola.

[16]Segundo Tavares, a Lei previa que fosse possível a transição do Ensino Liceal para o Ensino Técnico, assim como, o contrário, desde que o aluno realizasse um determinado exame. (OCDE, 1961b, p.77)

Tavares não explicou de forma clara quais as condições exigidas, no caso do Ensino Técnico, deixando aqui uma certa ambiguidade na utilidade de uma e outra vertente do Ensino Secundário.

> *"O ensino nos liceus prepara os alunos para a entrada nas universidades e nas escolas superiores; o Ensino Técnico prevê igualmente a preparação, em certas condições, da sua entrada nas universidades e nas escolas técnicas superiores"*
>
> Tavares, 1961b, p.77

Tanto o Ensino Liceal como o Ensino Técnico compreendiam uma parte geral ou elementar. No caso do Ensino Liceal, essa parte dos estudos era destinada à cultura e aptidões gerais, habilitando os alunos ao desempenho de determinadas funções administrativas. No caso do Ensino Técnico, destinava-se à formação técnica para empregos especializados.

Apresentamos, de seguida, a organização estrutural dos Ensinos Liceal e Técnico:

Ensino Liceal

Duração de 7 anos e dividido em 3 ciclos de estudos

1.º Ciclo
Duração de 2 anos

2.º Ciclo
Duração de 3 anos

→ **CURSO GERAL**
Comum a todos os alunos

3.º Ciclo
Duração de 2 anos

→ **CURSO COMPLEMENTAR**
Prepara os alunos para as Universidades e Escolas Superiores

Nota:

No final de cada ciclo, os alunos eram submetidos a um exame.

Ensino Técnico

Ensino Técnico Elementar
Duração de 5 ou 6 anos

Ensino Técnico Médio
Duração de 4 anos

Ensino Técnico Elementar
Divide-se em 2 ciclos de estudos

1.º Ciclo
Duração de 2 anos e comum a todos os alunos

Orienta os alunos numa escolha posterior de cursos técnicos

2.º Ciclo
Duração de 3 a 4 anos

COMERCIAL

ARTES DECORATIVAS

2.º Ciclo
Divide-se em 4 secções

INDUSTRIAL

AGRICULTURA

Nota:

Cada uma destas 4 secções compreendia planos de estudos distintos dependendo da especialidade técnica.

Ensino Técnico Médio

"o curso prepara os agentes técnicos de engenharia civil, profissões comerciais e cursos de regentes agrícolas".

Tavares, 1961b, p.78

No fim do 2.º ano, os alunos podiam concorrer a Escolas Superiores de Economia, Engenharia, Agronomia e Veterinária.

Nota:

Neste documento, Tavares informava que no ano lectivo 1960/1961, se previa a fusão dos 1.ºs Ciclos do Ensino Liceal e do Ensino Técnico, tendo o objectivo de constituir um ciclo comum, de 2 anos, cujo propósito seria o de orientação. Assim, ao fim destes 2 anos, os jovens poderiam então escolher o prosseguimento dos seus estudos no 2.º Ciclo do Ensino Liceal ou no 2.º Ciclo do Ensino Técnico.

II. Estrutura do ensino das Matemáticas

Ensino Primário

Durante os 4 anos da escola primária, um único professor ensinava todas as matérias onde as Matemáticas também estavam incluídas, estudando a Aritmética e a Geometria Intuitiva.

Ensino Liceal

Curso Geral

- No âmbito do Curso Geral, todos os alunos tinham 3 horas semanais de Matemáticas, em cada um dos 5 anos (1.º e 2.º Ciclos);
- No 1.º Ciclo estudava-se a Aritmética e Geometria Intuitiva;
- No 2.º Ciclo estudava-se a Álgebra e Geometria Euclidiana.

Curso Complementar

- Das 8 secções que compunham estes 2 anos de ensino, 4 delas incluíam as Matemáticas, tendo os alunos 4-6 horas semanais em cada ano;
- No 3.º Ciclo do Ensino Liceal estudava-se a Álgebra, Aritmética Racional, Trigonometria, Geometria Analítica e Elementos de Geometria Descritiva (em duas das secções).

Ensino Técnico

Ensino Técnico Elementar

- Todos os alunos tinham 3 horas semanais de Matemáticas em cada um dos anos do 1.º Ciclo e no primeiro ano do 2.º Ciclo;
- No segundo ano do 2.º Ciclo, os alunos tinham duas horas semanais;
- No 1.º Ciclo estudavam Matemáticas e Geometria Intuitiva;
- No 2.º Ciclo estudavam a Álgebra, Geometria e Trigonometria.

Ensino Técnico Médio

- Todos os alunos tinham 3 horas semanais de Matemática nos dois primeiros anos, à excepção daqueles que pretendiam prosseguir os estudos universitários, que usufruíam de 6 horas semanais nos dois primeiros anos.
- Neste ensino estudava-se as Matemáticas Elementares avançadas.

Exames

- Tanto para o ingresso no Ensino Liceal como no Ensino Técnico Elementar, os alunos eram sujeitos a um exame de admissão, que compreendia uma prova escrita e uma prova oral de Aritmética e Geometria;
- Para o ingresso no Ensino Técnico Médio, os alunos eram igualmente sujeitos a uma prova específica de Matemáticas;
- No fim de cada Ciclo, assim como, no momento de ingresso para Universidades[17] eram realizados exames iguais a nível nacional.

[17]Tavares referiu os seguintes cursos como exemplo daqueles que requeriam uma prova específica de Matemáticas: Ciências Matemáticas, Física e Química, Ciências Geofísicas, Ciências Geográficas, Engenharia, Arquitectura, Economia e ingresso em Escolas Militares. (OCDE, 1961b, p.79)

III. Programas

Pedro de Campos Tavares referiu que os programas eram iguais em todo o país, tendo optado por partilhar nessa monografia os programas que vigoravam à data para o Ensino Primário e para o Ensino Liceal. A versão integral dos programas pode ser consultada no Anexo 6.

IV. Tendências Actuais

"Les tendances, dans l'enseignement des mathématiques, évoluent lentement."

Tavares, 1961b, p.83

Segundo Tavares, no 1.º Ciclo (5.º e 6.º ano) de estudos do Ensino Liceal, procurava-se enfatizar os métodos activos baseados na observação, medição, actividades concretas e práticas assim como uma tentativa de coordenação[18] com o Desenho e os Trabalhos Manuais. Acrescentou, ainda, que se havia promovido uma colaboração entre o ensino das Ciências e a utilização das Matemáticas como linguagem, insistindo na iniciação simbólica e a utilização de letras, de fórmulas e de equações simples.

No 2.º Ciclo do Ensino Liceal, constatava-se essencialmente uma concentração dos estudos na Álgebra e na Geometria. Na primeira, procurava-se atingir uma compreensão dos fundamentos e de um conjunto de regras operatórias de cálculo, bem como, mais rigor na interpretação e na utilização das noções. Por seu lado, na Geometria tentava-se promover o carácter formativo da matéria, procurando igualmente desenvolver o rigor e o sentido lógico.

No 3.º Ciclo e tendo em vista o objectivo deste plano de estudos, procurava-se, sobretudo, familiarizar os alunos com metodologias que permitissem permeabilidade e ginástica mental para posterior investigação de fundamentos e métodos. Neste sentido, os professores procuravam promover algumas experiências de contacto com uma *'Matemática Moderna'*, com o objectivo de facilitar a transição entre o Ensino Secundário e o Superior.

[18] Segundo Tavares, essa tendência foi definida no âmbito da reforma dos programas promulgados em 1948. (OCDE, 1961b, p.83)

V. Preparação dos professores

Ensino Primário

Os professores tinham a sua formação nas designadas Escolas Normais. Para o respectivo ingresso, os candidatos tinham que possuir o Curso Geral Liceal e ainda ter obtido aprovação num exame de admissão, que compreendia uma prova de Matemáticas. Para a inscrição neste exame, os candidatos teriam de ter obtido uma determinada classificação em Português e em Matemáticas no exame final do Curso Geral Liceal.

Ensino Liceal e Ensino Técnico

Para este nível de ensino, os professores de Matemáticas deviam possuir uma licenciatura em Matemáticas e serem titulares de um certificado de estudos pedagógicos. Seguidamente, realizavam um estágio pedagógico de dois anos acompanhados por um metodólogo na área do Ensino Secundário correspondente.

Os candidatos licenciados eram admitidos neste estágio mediante a realização de um exame de admissão que compreendia questões de carácter cultural e questões relacionadas com conhecimentos específicos de matérias incluídas no programa. O resultado deste exame constituía a habilitação legal para o ingresso no Ensino Liceal ou Técnico.

Como informação adicional, Tavares referiu que à data, 59% dos professores que leccionavam em estabelecimentos do Estado possuíam essa habilitação legal, ressalvando o facto de essa proporção poder vir a diminuir, dado o acréscimo da frequência do número de alunos nesses estabelecimentos. Acrescentou, ainda, que todos os professores que leccionavam tanto em escolas do Estado como privadas possuíam um diploma universitário de Matemáticas.

3. UM PROGRAMA MODERNO DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO SECUNDÁRIO

Tendo em consideração o que havia sido delineado em Royaumont, a comissão de 16 especialistas reuniu de 21 de Agosto de 1960 a 19 de Setembro de 1960 na Jugoslávia. A lista dos especialistas encarregues dessa função pode ser consultada no Anexo 7.

Segundo (OCDE, 1961c), o grupo de trabalho considerou que essas 4 semanas de trabalho seriam insuficientes para a execução integral do objectivo inicialmente traçado, pelo que decidiu que a sua intervenção centrar-se-ia nas matérias de maior prioridade: a Álgebra, a Geometria e a Estatística.

Segundo a mesma fonte (p.6), a Comissão procurou debruçar-se particularmente na elaboração de um programa essencialmente destinado aos alunos com maior apetência que frequentavam os liceus e os *gymnases*, considerando que este grupo de alunos estaria potencialmente mais receptivo, a um ensino mais moderno e de um nível mais avançado relativamente ao que lhes era ministrado. Por outro lado, justificaram esta escolha, pelo facto de considerarem que este grupo de alunos seria pouco susceptível a uma possível desorientação escolar.

Apesar desta escolha, a Comissão tinha bem presente as *Resoluções* aprovadas no Simpósio de Royaumont, especialmente o facto de o programa elaborado necessitar de possuir a propriedade essencial de poder ser ajustável e moldável a todos os alunos, nos diferentes países. Deste modo, a Comissão decidiu considerar o Ensino Secundário como um período de 6 anos de escolaridade e dividi-lo em dois Ciclos de estudos, com a duração de 3 anos cada.

Para estes especialistas, o trabalho realizado possuía características que iam ao encontro das especificidades das *Resoluções de Royaumont*, a saber:

I. Os programas elaborados para o 1.º Ciclo de estudos tinham a faculdade de poderem ser facilmente alteráveis de modo a constituir um programa de Matemáticas destinado a um aluno de nível médio;

II. Os programas elaborados para o 2.º Ciclo eram essencialmente vocacionados para os alunos que pretendiam prosseguir estudos cientificos e técnicos superiores e, mais especificamente, para aqueles que pretendiam prosseguir estudos de Matemáticas e Física;

III. Tendo em conta o facto de poderem existir muitos alunos que não pretendiam prosseguir os seus estudos na vertente científica, a Comissão considerava que o programa elaborado continha matéria que lhes poderia suscitar a curiosidade intelectual e, neste sentido, o programa teria a capacidade de poder constituir uma introdução a esse aspecto do pensamento matemático;

IV. Por outro lado, o programa continha sugestões que estimulavam a reflexão sobre a natureza das Matemáticas e sobre a forma de apresentação desse ensino, aspectos que deveriam ser transmitidos nos estabelecimentos de Ensino Secundário.

OCDE, 1961c, pp.6-7

A Comissão de especialistas não pretendia elaborar um programa rígido, de aplicação genérica e incontrolável, mas sim, um documento guia que pudesse servir de base à elaboração de textos e de cursos experimentais pois, era de opinião, que um programa definitivo só poderia ser formulado após um período experimental e tendo em consideração a realidade específica de cada país:

"Os textos, as experiências e o programa definitivo deverão, inevitavelmente, ser adaptados aos métodos tradicionais dos países que empreenderem a modernização dos seus programas".

OCDE, 1961c, p.7

O Grupo de trabalho estava optimista em relação ao trabalho desenvolvido, pois considerava que o programa elaborado comportava *`bonnes mathématiques´*, em consonância com uma concepção moderna e adaptado às exigências do momento. Assim, pretendeu aplicar uma abordagem e tratamento lógicos na elaboração do programa, procurando que as temáticas fossem concebidas de acordo com as suas inter-relações e de forma unificada pois,

"de facto, essa tendência de unificação é uma das características da evolução das matemáticas do século XX".

OCDE, 1961c, p.8

Dada a incidência crescente que as Matemáticas assumiam em diferentes disciplinas científicas, a Comissão considerou que seria de grande utilidade prática, a introdução de noções de Probabilidade e Estatística, assim como, de vector e respectivo desenvolvimento sistemático das suas propriedades algébricas e geométricas. Neste sentido, realçou a importância da prática de uma pedagogia cooperacional entre as Matemáticas e as Ciências, considerando que foi esse o espírito no qual o programa havia sido concebido.

"Nós podemos esperar que, (...), os melhores pedagogos empreenderão um estudo sério de coordenação do ensino das matemáticas e das ciências (particularmente da física). "

OCDE, 1961c, p.8

3.1. Programa para o 1.º Ciclo de estudos: Aritmética, Álgebra e Geometria

De forma prática, os programas relativos à Álgebra/Aritmética, Geometria, Probabilidades e Estatística foram divididos em dois ciclos: o 1.º Ciclo destinado aos alunos dos 11 aos 15 anos e o 2.º Ciclo destinado aos alunos dos 15 aos 18 anos.[19]

Deste modo, este grupo de trabalho limitou-se a fornecer a ordem, através da qual, as matérias deveriam ser leccionadas, assim como, fornecer algumas sugestões metodológicas de abordagem de temas, sempre com a premissa base de coordenar o ensino da Álgebra e da Aritmética, concebendo a Matemática como um *todo*. Precedendo o programa, seria encontrada uma breve exposição dos objectivos e dos requisitos necessários à abordagem das temáticas em causa, seguido de comentários e exemplos elucidativos da metodologia a usar para a consecução dos objectivos delineados.

Seguidamente apresentamos o programa proposto para a **Álgebra e Aritmética**.

Programme d'Arithmétique et d'Algèbre
Premier Cycle de l'Enseignement Secondaire (II - 15 ans)

I. Notions élémentaires sur la théorie des ensembles d'éléments ; propriétés et relations.
II. Application d'un ensemble dans et sur un autre ; nombre cardinal.
III. Les quatre opérations sur les entiers. Propriétés des opérations.
IV. Opérations dans le système décimal de numération. Notions sur les systèmes de numération à bases autres que 10, et en particulier, à base 2.
V. Inégalités, borne supérieure et borne inférieure des résultats d'un calcul approché.
VI. Représentation graphique. Courbes en escalier des nombres naturels.
VII. Entiers négatifs ; Equation $x + a = b$ (a et b étant des nombres naturels).
VIII. Fractions et nombres rationnels ; Equation $ax = b$ (a, b, entiers).
IX. Fractions décimales (et plus tard, fractions diadiques). Valeur approchée décimale d'un nombre rationnel.
X. Représentation linéaire des rationnels sur un axe.
XI. Courbes cartésiennes, et fonction associée.
XII. Grandeur proportionnelle à une autre, $x \longrightarrow ax$. Rapports avec le théorème de Thalès.
XIII. Fonctions linéaires et graphique linéaire $x \longrightarrow ax + b$ (x entier, x rationnel).
XIV. Equation du premier degré à une inconnue.
XV. Inéquation du premier degré à une inconnue.
XVI. Puissances entières (positives, négatives).

Figura 1: Programa proposto para o 1.º Ciclo – Álgebra e Aritmética, 1960[20]

[19] A explicação dada por esta comissão para esta opção, prendia-se com o facto de o Ensino Secundário de cada um dos países diferir ao nível da sua duração, da sua organização e na forma de recrutamento dos alunos. (OCDE, 1961c, p.10)

XVII. Notion de groupe.

XVIII. Divisibilité des entiers.

XIX. Notion d'anneau et de corps.

XX. Polynômes à un ou plusieurs paramètres. Addition, soustraction, multiplication, division euclidienne.

XXI. Fonctions rationnelles élémentaires à plusieurs paramètres.

XXII. Equations linéaires à deux inconnues, avec solution graphique. Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues. Solutions numériques et graphiques. Systèmes d'équations à trois inconnues.

XXIII. La fonction du 2ème degré $x \rightarrow x^2$. Représentation graphique.

XXIV. Racine carrée d'un nombre positif $x \rightarrow \sqrt{x}$ et $x \rightarrow \sqrt{x}$

XXV. Equation du 2ème degré à une inconnue.

XXVI. Progression arithmétique. Progression géométrique. Isomorphismes et préparation à l'étude des logarithmes.

Figura 2: Programa proposto para o 1.º Ciclo - Álgebra e Aritmética, 1960[21]

Como nota introdutória a este programa, a Comissão ressalvou o facto de considerar que o mesmo não seria muito diferente do preconizado em muitos países da OCDE, mas tinha a particularidade de possuir uma introdução de noções elementares de Teoria de Conjuntos, Grupos, Anéis e Corpos. Neste sentido, a Comissão alertou para o facto de estas noções não serem apresentadas de forma formal e teórica mas através de um processo de descoberta, algo que os professores deviam promover nas actividades de aula. O objectivo seria que no final do 1.º Ciclo de estudos, os alunos adquirissem "*uma certa facilidade no cálculo numérico e algébrico*"[22], sendo de evitar a perda de tempo que resultasse de longos cálculos e `*acrobacias algébricas*´. Por outro lado, pretendia-se enfatizar as operações e suas propriedades, apresentando problemas e exercícios que fossem aplicações das noções ensinadas e que tivessem a particularidade de fazerem

> *" (...) apelo ao interesse dos alunos, ao seu gosto, ao seu desejo de investigação e que lhes desenvolvesse as faculdades de análise e de invenção".*
>
> OCDE, 1961c, p.11

A Comissão considerava ainda algo inovador, que era a utilização de técnicas experimentais no estudo da Aritmética, afirmando que:

> *"(...) nós podemos fazer as experiências, da mesma forma, com os números como com as figuras concretas na Geometria".*
>
> OCDE, 1961c, p.11

[20] Fonte: OCDE, 1961c, pp.13-14
[21]Fonte: OCDE, 1961c, pp.13-14
[22] OCDE, 1961c, p.10

Para ilustrar o espírito que pretendiam transmitir com *'fazer as experiências'*, a Comissão remeteu para a leitura de alguns exemplos, especificando o Exemplo IV[23], que aqui reproduzimos:

IV. Opérations dans le système décimal ; autres systèmes

L'entrainement pour les calculs numériques rapides obtenu généralement au moyen de longues additions, multiplications, et divisions à plusieurs chiffres, peut être remplacé, en partie, par des exercices du type suivant :

(a) 23 + ? = 71	? + 37 = 72
(b) 84 - ___ = 27	___ - 45 = 26
(c) 80 x ___ = 4800	___ x 700 = 56000
(d) 6300 x ___ = 90	___ x 50 = 600
(e) 80 (50 + ___) = 6400	(50 + ___) 80 = 6400

On commencera par désigner le nombre inconnu par un point d'interrogation. Plus tard, l'inconnue sera désignée par une lettre particulière, et enfin, par une lettre quelconque. De cette façon, l'élève est amené peu à peu à résoudre les équations du type indiqué ci-dessous :

(a) a + x = b	ou x + a = b
(b) a - x = b	ou x - a = b
(c) a . x = b	ou x . a = b
(d) a / x = b	ou x / a = b
(e) a(b + x) = c	

Les exercices ci-dessus attireront l'attention de l'élève sur les lois gouvernant les opérations fondamentales de l'arithmétique. On commencera à employer cette méthode dès que l'enfant saura calculer, et ce travail pourra constituer une partie des séances pratiques accompagnant la présentation de chaque opération.

On pourra remarquer que la forme habituelle de l'algorithme de la multiplication fournit un exemple pour la loi de distributivité :

```
  485
 x 23
  ---
 ---
-----
```

De plus, l'entraînement en calcul mental donne l'occasion de remarquer le rôle de l'associativité.

175 + 118 + 112 = 175 + 230 ou
= 293 + 112
et 20 x 18 x 11 = 20 x 198 ou
= 360 x 11

Il est aussi important de présenter des exercices qui développent le sens de la recherche et de l'observation.

par exemple,
20 x 30, 21 x 29, etc.
Qu'observe-t-on ici ? Que peut-on dire de 40 x 50, 41 x 49, etc ?

Plus généralement :
(10n + a) (10(n + 1) - a) = ?

Ou, qu'arrive-t-il quand on multiplie 142857 par 2, 3, 4, etc.? Ou encore, quelle propriété peut-on trouver à la somme des quatre premiers nombres impairs, ou des cinq premiers nombres impairs, etc. ?

```
0 | x | 0 | x |
x _ _x_| 0| x |
0 _ _0_ _0| x |
x _ _x_ _x_ _x_|
```

L'étude des nombres premiers et celle des triplets de Pythagore présentent aussi de l'intérêt pour les élèves.

On peut encore, pour illustrer les lois de l'arithmétique, aller puiser dans les problèmes de représentation des nombres dans les systèmes de numération à base autre que 10. On pourra entraîner les élèves en leur faisant faire des calculs sur des nombres écrits dans d'autres systèmes de numération, en particulier dans le système binaire.

Figura 3: Exemplo IV

[23] OCDE, 1961c, pp.65-66

Os objectivos que serviram de guia para a elaboração do programa para o 1.º Ciclo do Ensino Secundário foram:

> 1. A matéria de ensino deste ciclo deveria permanecer como na maior parte dos países à data: estudo dos sistemas de numeração de base 10 e métodos de cálculo nesse sistema; destreza na utilização da Álgebra; Equações Lineares de uma incógnita e Inequações; Sistemas de Equações a duas ou três incógnitas; Equações do 2.º grau com uma incógnita.
>
> 2. Os métodos de ensino seriam modificados necessariamente de modo a introduzir o uso das noções da Teoria de Conjuntos, o estudo das propriedades características das operações, com vista à introdução das noções de Grupo, Anel e Corpo.
>
> 3. O Ensino da Aritmética, da Álgebra e da Geometria deveria ser coordenado do ponto de vista do objectivo 2.
>
> OCDE, 1961c, pp.11-12

Apresentados os itens que deviam fazer parte do programa, a Comissão considerou relevante a exploração de alguns deles, sob a forma de comentários, procurando ilustrar metodologias mais eficazes para atingir os objectivos enumerados, assim como, para esclarecer pontos novos que o programa incluía.

Alertou também para a utilização da Teoria de Conjuntos nos estudos matemáticos do Ensino Secundário, cabendo ao professor, a capacidade de efectuar a devida e prévia clarificação das noções, dado que estas deviam aparecer continuamente e nos contextos mais diversificados[24]. Para este grupo de trabalho, estas noções apresentavam um papel fundamental na aprendizagem pois,

> *"(...) em certos casos estas noções permitem a clarificação, assim como, a simplificação do vocabulário dos alunos. Em outros casos, elas permitem expor uma propriedade matemática através de uma expressão simples ou de uma fórmula breve."*
>
> OCDE, 1961c, p.15

A Comissão reconheceu que esta inclusão implicaria uma organização das matérias, mas as suas potencialidades eram grandiosas, nomeadamente, na utilização em situações concretas familiares aos alunos como um ponto de partida, chegando, por patamares, à compreensão dos princípios abstractos assim que o aluno terminasse o 2.º Ciclo.

> *"Se as noções elementares são introduzidas desta forma no início do Ciclo, será possível enriquecer o conhecimento dos alunos sem sobrecarregar o programa".*
>
> OCDE, 1961c, p.15

[24] A Comissão alertou para a sua utilização também na Geometria e na Álgebra: "*Poderemos observar neste relatório, que a Teoria de Conjuntos pode ser utilizada como um meio eficaz no ensino da Geometria assim como na Álgebra*". (OCDE, 1961c, p.16)

Seguidamente apresentamos o programa proposto para a **Geometria**.

Liste des sujets étudiés en géométrie 11-15

1. Introduction à la notion de vecteurs en tant que segments de droites orientées. Addition, soustraction, multiplication, par un scalaire.

2. L'angle : propriétés des angles étudiées en liaison avec les droites parallèles, les polygones, les cercles. Etude des propriétés des angles dans les parallélogrammes et dans les triangles.

3. Symétrie -- le triangle isocèle.

4. Transformations étudiées d'un point de vue physique et intuitif pour la recherche des propriétés des figures. Les transformations seront effectuées au moyen de : a) papier plié; b) réflexion ; c) rotation ; d) translation ; e) découpage ; f) points régulièrement espacés sur un cercle et les polygones réguliers.

5. Transformations algébriques simples : $x^1 = a_1x + b_1$, $y^1 = a_2x + b_2$ avec les valeurs de a_1, a_2, b_1, b_2, qui illustrent seulement les transformations affines.

6. Représentations graphiques en algèbre, simples : études des courbes $y = ax + b$ et $y = ax^2 + bx + c$ et développement des idées de base pour l'étude du calcul. La relation entre droite et parabole et les coefficients dans les équations.

7. Idées fondamentales incluses dans le concept d'aire, de volume, théorème de Pythagore et ses extensions.

8. Propriétés non métriques de la droite et du plan et introduction à la notation des ensembles. La figure géométrique considérée comme un ensemble de points.

9. Similitude et lois associées dans les aires et volumes.

10. Trigonométrie : sinus, cosinus tangente et leurs applications.

11. Emploi de courtes "démonstrations logiques" pour justifier quelques-unes des propriétés géométriques précédemment vues sur une base intuitive.

Figura 4: Programa proposto para o 1.º Ciclo - Geometria[25]

Sob a forma de um prefácio, o Grupo de trabalho iniciou esta proposta enfatizando a inovação do programa elaborado e o sentido que naquele momento deveria ser dado à Geometria:

> *"O programa proposto para este ciclo marca um abandono do trajecto tradicional na Geometria para uma apresentação que reflecte as tendências modernas na maneira de tratar a matéria".*
>
> *"Hoje a Geometria engloba todos os aspectos do espaço tratados seja do ponto de vista do número (Álgebra), ou como conjunto de pontos, de rectas, etc. Os métodos de síntese de Euclides serão em consequência reforçados pelas técnicas que têm interesse no domínio da Álgebra".*
>
> OCDE, 1961c, p.74

[25] Fonte: OCDE, 1961c, pp.77-78

Os especialistas procuraram integrar a Álgebra e a Geometria através da introdução da Álgebra e das coordenadas, considerando que o estudo da Álgebra e da Geometria no 1.º Ciclo poderia constituir uma preparação para um trabalho posterior em Análise. Para o efeito, remeteram para a consulta de exemplos[26] dessa inter-relação, Exemplos VII (1) e XV (2), que aqui reproduzimos:

VII. Quelques méthodes de coordonnées

1. Dans ce travail, le papier graphique avec un système de coordonnées sera considéré comme un instrument pour mesurer le modèle entre les ensembles de nombres, c'est-à-dire la correspondance entre les ensembles de nombres. Les échelles peuvent être données par le professeur dans les premiers stades.

(a) Périmètres et aires des triangles semblables. On peut, comme exercice sur les aires et périmètres, donner l'exemple suivant : (voir figure page suivante)

ℓ	1	1	1	2	2	2	3	3	3	etc...
w	1½	1	2	1	2	4	1½	3	6	etc...
P	3	4	etc.							
A	½	1	2	etc.						

(i) Tracer P en fonction de ℓ ; A en fonction de ℓ ω en fonction de ℓ ; pour P les points sont placés sur des lignes droites. Pour A, sur des courbes. Discuter les lois reliant P à ℓ, A à ℓ.
Note : $P = 3\,l$; $P = 4\,l$; $P = 6\,l$; $\omega = (1/2)\,\ell$ et $A = (1/2)\,\ell^2$, etc. Montrer les propriétés de symétrie venant de la forme des coefficients. Les graphiques de ces formules peuvent être utilisés pour renforcer le concept de gradient.

(ii) Les rectangles ci-dessus peuvent être coupés dans du papier et assemblés d'une manière suggérée par le graphique. La symétrie des graphiques et leur continuité trouveront leur interprétation dans les orientations des ensembles de rectangles.

(b) On peut appliquer la discussion ci-dessus à d'autres figures de similitude : triangles rectangles, etc.

(c) La représentation graphique de $y = x^2$ peut être faite pour déterminer pratiquement les racines carrées.

Figura 5: Exemplo VII (1)

2. Analyse et Algèbre

Les côtés d'un rectangle, x, y, sont donnés par la table suivante :

x	2	4	6	8	10	12	14	16
y	16	14	12	10	8	6	4	2

Trouver les périmètres et les aires. Tracer y en fonction de x. Quelle est la loi ? Que signifie-t-elle ? Tracer A et x. Quelle est la loi ? Tracer P en fonction de x. Quelle est la loi ? Que signifie-t-elle ? Décrire comment A varie avec x. Quelle est la valeur maximale de A ? Quelle forme a le rectangle ? Pour quelles valeurs de x, A vaut-il 72 ? Résoudre $x(18 - x) = 17$. Dans quel domaine varie A quand $0 \leq x \leq 18$? A peut-il être défini pour $18 < x \leq 20$?

D'autres problèmes similaires peuvent s'imaginer à partir d'aires de solides de volume donné, etc.

Figura 6: Exemplo XV (2)

[26] OCDE, 1961c, pp.88-89 e pp.101-102

Consideraram também que tanto para quem elaborava um programa escolar, como para o professor na sua classe, três princípios deveriam orientar a acção:

I. *"Não utilização de uma terminologia difícil e prematura"* e *"Definir os novos termos no contexto onde são usados".*

Segundo a Comissão, o uso frequente de novos termos e o contacto com conhecimentos crescentes sobre as propriedades associadas a um termo, preparava o caminho a estudos matemáticos mais tardios. Uma questão que poderia ser colocada neste contexto dizia respeito às definições que podiam ser vazias, sem recurso a uma base experimental, isto é, determinados termos podiam ter uma definição mais precisa através do recurso a essa base experimental. A comissão considerou que:

> *" (...) uma figura pode ser definida pela sua realização material e isto é especialmente verdadeiro nos estudos iniciais quando o aluno distingue as propriedades de uma figura à medida que ele a constrói e que estuda as possibilidades aparentes para a construção".*
>
> OCDE, 1961c, p.75

II. *"Um modelo material é a base a partir do qual podemos desenvolver a abstracção matemática".*

Para o Grupo de trabalho, neste Ciclo as propriedades mecânicas e mais genericamente físicas eram interpretadas em termos matemáticos, sendo também a partir deste Ciclo que as propriedades matemáticas eram vistas distintamente do contexto material onde elas foram encontradas inicialmente. Deste modo, consideraram crucial que a familiarização com determinados conceitos, derivasse de uma experimentação pois:

> *"Para o jovem, contudo, uma experiência concreta, rica e variada é um caminho necessário para a abstracção. As transformações apresentadas de forma física conservam um aspecto cinemático que contrasta com o aspecto estático das Matemáticas e devolve a capacidade à criança de passar confortavelmente de um para o outro".*
>
> OCDE, 1961c, p.76

III. *"É essencial que o aluno aprenda a pensar de forma criativa e intuitiva".*

Neste ponto, a Comissão alertou para a necessidade de existir um espaço onde os alunos colocassem os seus problemas, expusessem as suas soluções, as quais, muitas vezes, poderiam não ser válidas. Contudo, tal não deveria constituir um problema pois, caberia ao professor propor a análise e discussão dessas soluções e, de entre as válidas, alertar para a variedade de respostas correctas e a elegância de algumas delas. Com esta forma de agir,

> *"(...) o professor caminharia para o estabelecimento da confiança que representa um papel importante para favorecer um amor pelas Matemáticas em geral (...)".*
>
> OCDE, 1961c, p.76

Apresentados os três princípios, a Comissão referiu que o programa para a Geometria requeria como requisitos, conhecimentos de Aritmética da escola primária e sugeriu que a Álgebra, neste 1.º Ciclo, fosse rapidamente integrada, sempre que possível, num contexto geométrico, considerando como objectivos deste ciclo de estudos geométricos:

1. *"Estabelecer, intuitivamente, certos resultados geométricos sobre as bases da experiência física e da experimentação".*
2. *"Empregar de forma dedutiva os resultados assim obtidos na justificação de outros resultados e investigar as propriedades invariantes nas transformações físicas e algébricas".*
3. *"Integrar os métodos variados (algébricos e de síntese) na resolução de um problema de Geometria".*
4. *"Desenvolver, à medida que o curso avança, pequenos encadeamentos dedutivos que apresentem propriedades fundamentais que, no estado do curso, o aluno as admita como verdadeiras porque não se pode servir de métodos de demonstração no momento onde as propriedades foram introduzidas".*

OCDE, 1961c, pp.76-77

Seguidamente, a Comissão apresentou um conjunto de indicações de abordagem de certas matérias que pretendiam ilustrar o espírito que se pretendia incluir neste 1.º Ciclo ao nível da Geometria[27], procurando desenvolver experiências que envolvessem a maior parte das noções e conceitos, de propriedades e de princípios que seriam utilizados mais tarde.

Paralelamente, o Grupo de trabalho ressalvou o facto de os métodos preconizados exigirem mais material e, consequentemente, de um local para os preservar, encorajando para o uso de uma sala de Matemáticas onde,

> *"(...) os alunos terão todo o acesso aos aparelhos matematicamente interessantes em todos os momentos (...) e haverá muitas ocasiões para mostrar os modelos matemáticos, os gráficos, os planos, as notícias, etc. (...)."*
>
> OCDE, 1961c, p.107

[27] Para uma leitura dos exemplos fornecidos pela Comissão, consultar OCDE, 1961c, pp.79-106.

A própria Comissão reconheceu desde logo a dificuldade na implementação do programa de Geometria, mas evidenciou o facto de o projecto conter a liberdade/elasticidade suficiente para permitir a selecção, a modificação, a elaboração e o seu desenvolvimento.

> *"As particularidades dos sistemas de administração e de educação nacionais imporão uma restrição ao programa de Geometria".*
>
> OCDE, 1961c, p.107

3.2. Programa para o 2.º Ciclo de estudos: Álgebra e Geometria

Apresentamos de seguida o programa proposto para a **Álgebra**. A repartição das matérias por anos foi um facto provisório, pois a ordem através da qual as matérias foram apresentadas constituiu o mais importante.

Liste de matières enseignées en Algèbre dans le second cycle proposées dans l'ordre

Première année

Ensembles (Introduction à la Théorie des Ensembles, symboles)
Applications (notion de fonction)
Relations (surtout d'équivalence et d'ordre)
Anneaux, corps, groupes (définitions et propriétés élémentaires)
Systèmes de m équations linéaires à n inconnues ($m \leq n \leq 3$)
Introduction à la théorie des vecteurs, surtout en vue de la résolution d'un système de 2 ou 3 équations à 2 ou 3 inconnues
Premières étapes en vue de l'étude formelle des nombres réels. (Valeurs absolues, corps ordonnés, radicaux)
Equations du second degré
Nombres complexes

Deuxième année

Principe de récurrence
Divisibilité dans l'anneau des entiers ; nombres premiers
Factorisation ; anneau des classes résiduelles
Anneau de polynomes
Ensembles (opérations logiques, ensembles dénombrables et non-dénombrables)
Groupes (Isomorphismes, homomorphismes)
Structure axiomatique de l'ensemble des nombres réels
Notion générale des relations
Combinaisons et permutations

Troisième année

Notion abstraite d'espace vectoriel ; applications aux systèmes d'équations linéaires et à la géométrie
Applications linéaires, matrices
Suite de la théorie des groupes
Coniques (Formes et fonctions quadratiques)

Théorie des ensembles

Bien qu'une introduction à l'étude de la théorie des ensembles ait été faite dans le premier cycle, on propose qu'une révision et une extension de cette étude comprenne les points suivants :

1. Ensembles et sous-ensembles (différentes manières de décrire un ensemble)
2. Complémentaire d'un ensemble par rapport à un ensemble de référence)
3. Egalité des ensembles ; ensemble vide
4. Réunion et intersection de deux ensembles
5. Réunion et intersection d'une famille dénombrable d'ensembles
6. Produit de deux ensembles (ou plus)
7. Diagrammes d'ensembles
8. Ensembles finis et infinis ; ensembles dénombrables ; ensembles non-dénombrables
9. Application d'un ensemble dans ou sur un autre ensemble
10. Compositions d'applications ; bijections ; applications inverses
11. "Relation" d'un ensemble à un autre
12. Graphique d'une application et d'une relation

Figura 7: Programa para o 2.º Ciclo: Álgebra[28]

[28] Fonte: OCDE, 1961c, pp.110-111

> *"Do ponto de vista da Universidade, o programa proposto deve ser considerado como o máximo."*
>
> OCDE, 1961c, p.109

O Grupo de trabalho ressalvou desde logo o facto de as sugestões feitas no âmbito desta temática, constituírem uma preparação consistente (a serem leccionadas todas as matérias) para aqueles que pretendessem prosseguir os estudos para um nível superior. Contudo, realçou que as propostas efectuadas tinham de ser devidamente enquadradas na realidade de cada país, atendendo à duração do ciclo, do número de horas atribuídas ao estudo das Matemáticas e da capacidade dos alunos.

Segundo a Comissão, as noções introduzidas no 1.º Ciclo de estudos como Conjuntos, Anéis, Corpos, Grupos e Álgebra Linear deviam ocupar um lugar primordial no currículo e constituir a estrutura de todo o ensino da Álgebra. Paralelamente, estas noções deviam aparecer sistematicamente no estudo da Geometria, conduzindo a que

> *"uma cooperação do ensino destas duas matérias se torne então indispensável".*
>
> OCDE, 1961c, p.109

Relativamente à natureza dos exercícios que deviam fazer parte do curso, a Comissão esclareceu que tal se encontrava inteiramente relacionado ou até dependente das aptidões dos alunos e da sua facilidade no uso de noções matemáticas.

Assim,

> *"para ajudar o aluno a fazer as abstracções que caracterizam a Álgebra deste ciclo, é necessário apresentar-lhe não apenas um grande número de exemplos (e de contra-exemplos) mas também de exercícios do tipo `descoberta´, que desenvolvam no aluno uma disposição à investigação".*
>
> OCDE, 1961c, p.109

Para este grupo de especialistas, os conceitos de grupo, de anel e de corpo eram as mais importantes noções matemáticas contemporâneas, uma vez que, possuindo estes conhecimentos era possível realizar com eficácia uma descrição clara das propriedades algébricas dos conjuntos numéricos e, simultaneamente, evidenciar a utilização das estruturas algébricas em diversos domínios das Matemáticas. Sem nunca esquecer que este programa se destinava ao Ensino

Secundário, a Comissão ressalvou que para tal fim, era necessário realçar essa vertente com a divulgação/análise de resultados no âmbito da Geometria, Teoria de Números e Cálculo.

Para este Grupo de trabalho, era crucial, que a Teoria de Grupos não fosse leccionada de forma isolada e distante das suas aplicabilidades, o que seria facilmente evitável, se fosse exposta juntamente com outras matérias.[29]

> *"A Teoria de Grupos é um belo e simples exemplo de uma teoria matemática fundamentada sobre um pequeno número de axiomas bem estabelecidos."*
>
> OCDE, 1961c, p.112

Procurando ainda clarificar as suas propostas, o grupo apresentou ainda uma exposição sumária da Teoria de Grupos com indicações metodológicas, considerações, diversos exemplos e exercícios (alguns com uma indicação do seu grau de dificuldade), exibição de Teoremas, ou seja, um vasto conjunto de material pedagógico[30] orientativo. Da lista de matérias do programa proposto fazia parte um *'novo material'* que, segundo estes especialistas, havia sido objecto de diversas publicações e que por tal razão a Comissão não efectuaria comentários, remetendo para a consulta das mesmas. O Anexo 8 contém as referências bibliográficas indicadas para a Álgebra mas também para a Geometria. Cumulativamente, a Comissão apresentou considerações metodológicas para as matérias no âmbito de Álgebra Vectorial e Linear.[31]

Seguidamente apresentamos o programa proposto para a **Geometria**.

[29] A Comissão propôs a repartição do estudo desta temática por 3 anos, em que cada um deles enfatizava determinadas aplicações em diferentes domínios: No 1.º ano procurava-se realçar as aplicações à Álgebra e à Geometria; no 2.º ano, as aplicações à Teoria dos Números, Cálculo, Teoria das Equações e à Geometria e no 3.º ano prosseguia-se o desenvolvimento da Teoria de Grupos, efectuando o tratamento de alguns problemas teóricos. (OCDE, 1961c, pp.112-113)

[30] Para a leitura deste material, consultar OCDE, 1961c, pp.115-146.

[31] Para a leitura deste material, consultar OCDE, 1961c, pp.147-157.

Etudes préalables

L'algèbre et la géométrie mises au programme du premier cycle. On suppose également que le programme d'algèbre décrit pour le second cycle sera étudié simultanément et conjointement au programme de géométrie proposé.

Sujets d'étude

1. Groupes de transformations
   a) symétrie par rapport à une droite
   b) symétrie par rapport à un point
   c) translations
   d) rotations
   e) réflexions
   f) isométries
2. Géométrie affine
   a) les nombres réels et la droite
   b) coordonnées
   c) vecteurs et espaces vectoriels
   d) géométrie analytique
3. Géométrie euclidienne
   a) perpendicularité
   b) produit intérieur de vecteurs
   c) espaces vectoriels ; norme ;
   d) trigonométrie
4. Coniques
   a) lieux géométriques
   b) transformations affines
   c) formes quadratiques, représentation paramétrique
   d) propriétés projectives ; géométrie projective et descriptive.
5. Etudes axiomatiques (on ne fera pas toutes les études)
   a) espace vectoriel
   b) espace affine
   c) espace métrique euclidien
   d) géométrie euclidienne synthétique

Figura 8: Programa para o 2.º Ciclo – Geometria[32]

Segundo informações veiculadas, o programa proposto resultou de uma síntese do ensino ministrado no domínio da Geometria de diferentes países, com nomes distintos e que esta Comissão resolveu designar unicamente por GEOMETRIA[33].

Nesta mesma fonte, uma nota explicativa especial foi dada à designada Geometria Euclidiana. Assim, para o grupo de trabalho, sempre que se pretendesse evocar a Geometria baseada nos axiomas de Euclides, dever-se-ia chamar de `*Geometria de Euclides*´, sendo a Geometria Euclidiana aquela que se debruçasse sobre o estudo das propriedades do espaço euclidiano.

Esclarecido este ponto, os especialistas procuraram delinear o alcance do projecto da Geometria para o 2.º Ciclo de estudos. Assim, consideraram que, apesar de ao longo do 1.º Ciclo as propriedades euclidianas `*clássicas*´ serem alvo de um estudo de cariz experimental e sem necessidade de um estudo sistemático, o 2.º Ciclo de estudos deveria possibilitar ao aluno o conhecimento de outras geometrias e outros espaços que não exclusivamente a Geometria Euclidiana e o espaço euclidiano.

[32] Fonte: OCDE, 1961c, p.160

[33] Esta temática incluía os vectores, as coordenadas e a designada Geometria Sintética, assim como, técnicas para a consecução de demonstrações.

> *"O estudo dessas diferentes Geometrias exige que nós tomemos conhecimento dos recentes desenvolvimentos nas Matemáticas e em todos os novos modos de aplicação das Matemáticas às Ciências, em especial na Física".*
>
> OCDE, 1961c, p.158

As propostas contidas neste projecto requeriam que os alunos tivessem presente os conhecimentos adquiridos no 1.º Ciclo de estudos, no âmbito de Geometria, mas também de Álgebra, sugerindo que os programas destes dois domínios fossem estudados em simultâneo e articuladamente. Deste modo, pretender-se-ia que o estudo da Geometria nesta faixa etária pudesse contribuir para um conhecimento, claro e preciso, da natureza desta matéria e das suas aplicações às Ciências Físicas.

Os objectivos pretendidos eram:

1. *"Desenvolver a noção de espaço concebido como um conjunto com os seus conjuntos particulares possuidores de estruturas ligadas entre si; em particular, o espaço afim, o espaço euclidiano e o espaço vectorial";*

2. *"Desenvolver o conhecimento da correspondência precisa entre a `recta´ e o conjunto dos números reais";*

3. *"Desenvolver a inteligência das principais transformações utilizadas nas diferentes Geometrias e dos grupos de transformações, em particular na geometria afim e euclidiana";*

4. *"Desenvolver a inteligência do que é uma estrutura axiomática através de estudos do tipo: a recta afim, o plano afim, espaços afins, espaços métricos euclidianos, espaços vectoriais";*

5. *"Desenvolver a destreza a aplicar os diversos métodos de desenvolvimento geométrico na solução de problemas originais, ao mesmo tempo, nas Matemáticas e nas Matemáticas Aplicadas".*

OCDE, 1961c, p.159

O grupo ressalvou que as sugestões presentes nesta proposta relativamente a sistemas de axiomas constituíam uma das numerosas possibilidades, alertando que, a escolha do sistema em estudo dependeria de diversos factores onde as capacidades dos alunos e os conhecimentos anteriormente adquiridos deviam ter especial preponderância. Considerou também que, um factor decisivo no sucesso da proposta dependeria do professor, em especial, da sua capacidade de explanar e explicitar os axiomas sobre os quais uma determinada teoria se fundamentava.

Após a análise de todos estas inerências, a Comissão considerou pertinente que os alunos que se encontrassem no último ano do 2.º Ciclo pudessem estudar alguns sistemas axiomáticos, dada a utilidade no trabalho científico-experimental. Assim, alertou para um conjunto de publicações de referência, pois continham importantes desenvolvimentos axiomáticos que deviam ser alvo de consulta e respectiva leitura[34].

Posteriormente, foram elaborados um conjunto de comentários[35] a determinadas matérias, com indicações metodológicas, proposta de exercícios, teoremas e sugestões de respectivas demonstrações. Os especialistas destacaram o comentário[36] fornecido pelo Professor Gustave Choquet[37], que tinha como destinatário, os professores que leccionavam a alunos da faixa etária 15-18 anos, o qual fornecia uma estrutura axiomática do plano afim, que contemplava um conjunto de axiomas, proposições, lemas, teoremas e demonstrações.

Complementarmente, a Comissão apresentou uma sugestão de um prolongamento suplementar ao programa, no âmbito da Geometria Projectiva, Elementos de Teoria de Cónicas e das Quádricas (para alunos dos 17 aos 18 anos) e um programa de Geometria Analítica a desenvolver de acordo com as faixas etárias 15-16, 16-17 e 17-18 anos[38].

3.3. Programa para o 1.º e 2.º Ciclos de estudos: Probabilidades e Estatística

> *"Ao mesmo tempo que a Teoria das Probabilidades e a Estatística são estritamente ligadas, elas são de um ponto de vista lógico duas disciplinas diferentes".*[39]
>
> OCDE, 1961c, p.215

A Comissão apresentou uma proposta de um programa vasto em informação que não teria de ser integralmente seguido, mas tido em consideração para a elaboração do respectivo curso de Probabilidades e Estatística, podendo ser minimizado, reduzido, um curso misto ou uma só destas disciplinas.

---

[34] O Anexo 8 contém algumas publicações no âmbito da Geometria, mas a Comissão referiu (OCDE, 1961c, p.161), em particular, e neste contexto, as seguintes publicações: "*Lectures on Modern Teaching of Geometry*" – relatório realizado na Conferência do ICMI, na Dinamarca, em 1960, o qual apresenta mais de 5 sistemas axiomáticos para o ensino da Geometria no Ensino Secundário; o livro "*Foundations of Geometry and Trigonometry*" de Howard Levi, da University of Columbia – Livro que contém o primeiro desenvolvimento axiomático completo – utiliza os números reais, começando pelas propriedades afins e desenvolve todas as propriedades úteis do espaço métrico euclidiano; "Trigonométrie" de Pauli et Post, em 1960 – fornece uma introdução simples aos vectores e à Geometria afim adaptada ao ensino dos 16 aos 17 anos; programa proposto para a Geometria, pelo Professor Jean Dieudonné, no seminário de Royaumont – actas da OCDE, 1961a, pp.42-46.

[35] Para a leitura destes comentários consultar actas OCDE, 1961c, pp.162-214.

[36] Para a respectiva leitura consultar OCDE, 1961c, pp.183-206.

[37] Professor de Matemáticas no Institut Henri Poincaré – Université de Paris

[38] Para a leitura deste prolongamento curricular suplementar, consultar OCDE, 1961c, pp.207-214.

[39] Segundo este Grupo de trabalho, a Teoria das Probabilidades era a teoria dos modelos matemáticos dos fenómenos aleatórios e fazia parte das Matemáticas Puras, enquanto que a Estatística era encarada como uma ciência cujo objectivo era estudar a forma de estabelecer determinações racionais a partir de dados incertos. (OCDE, 1961c, p.215)

Tendo estas ressalvas em consideração, o programa proposto foi apresentado com a seguinte divisão:

- **A.** Probabilidades e Estatística para o 1.º Ciclo nas classes secundárias (11 aos 15 anos)
- **B.** Probabilidades e Estatística para o 2.º Ciclo nas classes secundárias (15 aos 18 anos – área não científica)
- **C.** Probabilidades e Estatística para o 2.º Ciclo nas classes secundárias (15 aos 18 anos – área científica)

À semelhança dos domínios anteriores, foi efectuada uma breve exposição dos objectivos delineados, uma lista dos conhecimentos prévios necessários, assim como, uma lista das matérias a serem abordadas. Foi igualmente seguida a mesma metodologia no âmbito de comentários a algumas matérias, assim como, a indicação de referências bibliográficas[40] a serem tomadas em consideração. Essas referências bibliográficas podem ser consultadas no Anexo 9.

Seguidamente apresentamos o programa proposto para o **1.º Ciclo**.

Probabilités et Statistique dans le premier cycle des classes secondaires. (11 à 15 ans).

But. Donner aux élèves un fondement intuitif à la théorie des probabilités, et les familiariser avec les notions fondamentales de la théorie des probabilités, et leur présenter les méthodes de base de la statistique descriptive.

Connaissance requises. Arithmétique des nombres réels positifs (pratique du calcul uniquement). Mesure de longueurs et calculs d'aires simples.

Liste des sujets. Etude des expériences aléatoires pour introduire les notions d'espace d'échantillonnage, d'évènement, de probabilité d'un évènement.

Loi empirique de la stabilité des fréquences.

Méthodes numériques et graphiques en statique descriptive.

Moyenne, médiane, mode, quartiles, intervalles et intervalle des quartiles.

Diagramme de barres, diagramme fréquentiel de points, histogramme et polygone cumulatif de fréquence. On pourra traiter, si possible, les diagrammes de dispersion à deux dimensions, les diagrammes directeurs et la représentation graphique des séries temporelles.

Etude de la "déduction statistique".

Figura 9: Programa para o 1.º Ciclo - Probabilidades e Estatística[41]

O Grupo de trabalho considerou como objectivo crucial:

[40] A Comissão destacou o facto de as referências indicadas com os números 1, 3 e 15 se referirem a cursos experimentais, sendo sugerida a sua consulta, de modo a constituir bases para experiências futuras. (OCDE, 1961c, p.216)

[41] Fonte: OCDE, 1961c, p.216

"(...) fornecer aos alunos um fundamento intuitivo da teoria das probabilidades e os familiarizar com as noções fundamentais de teoria das probabilidades e lhes apresentar os métodos de base de estatística descritiva."

OCDE, 1961c, p.216

Procuraram enfatizar as ideias intuitivas das noções fundamentais através da experimentação baseada em fenómenos aleatórios e de práticas básicas usando dados, peças ou sequências aleatórias de números.

A Comissão considerou que os requisitos básicos estavam relacionados com a Aritmética de números reais positivos, na vertente do Cálculo, noções de medidas de comprimentos e cálculo de áreas simples. Com base numa recolha empírica ou não de dados, deveria propor-se ao aluno a reunião e representação desses mesmos dados sob a forma de gráficos e tabelas, sugerindo que tal fosse efectuado de uma forma interdisciplinar (reunir dados contidos em livros de História ou Geografia, efectuar medições de variáveis botânicas foram alguns dos exemplos fornecidos).

A Comissão alertou para que a escolha das variáveis em estudo permitisse aos alunos o desenvolvimento da capacidade de análise e interpretação, assim como, a argumentação das vantagens e limitações dos dados recolhidos. Alertaram ainda para o facto de os professores seguirem uma metodologia de sistematização desses mesmos dados, familiarizando os alunos com a representação dos mesmos de diversos modos, consolidando, simultaneamente, técnicas de desenho. Paralelamente, o professor deveria proporcionar o contacto com uma grande variedade de exemplos em suporte gráfico, a partir dos quais seria possível introduzir a designada Inferência Estatística[42].

Seguidamente apresentamos o programa proposto para o **2.º Ciclo, área não científica.** Neste âmbito, o grupo resolveu fornecer programas distintos para a Teoria das Probabilidades e para a Estatística, mas ressalvou que os dois podiam ser simultaneamente ministrados oferecendo aos alunos um curso misto.

Expomos em primeiro lugar o programa proposto para a **Teoria das Probabilidades**.

---

[42] Termo em francês: 'déduction *statistique* ' que segundo este grupo de trabalho consistia na segunda etapa de uma investigação estatística: examinar e representar os dados recolhidos. (OCDE, 1961c, p.215)

Théorie des probabilités. Branche non scientifique.

But. Faire connaître aux élèves la théorie fondamentale des probabilités en insistant sur les notions qui sont nécessaires au cours de statistique.

Connaissances mathématiques requises. Permutations et combinaisons. Théorème du binôme. Progression géométrique. Eléments d'analyse. Fonction exponentielle.

Liste des sujets.

Introduction intuitive à la théorie des probabilités.
Probabilités dans les espaces finis d'échantillonage.
Théorèmes de la théorie des probabilités. Evènements indépendants.
Une esquisse de la théorie axiomatique des probabilités.
Variables aléatoires et leurs distributions en probabilités.
Variables aléatoires discontinues et continues. Fonctions de fréquence.
Moyennes et variances.

Distributions binominale et normale.
Somme des variables aléatoires indépendantes.
Inégalité de Tchebycheff et loi des grands nombres.
$(P\left\{ |x-\mu| \geq t\,\theta \right\} \leq \frac{1}{t^2} \geq 1)$

Figura 10:Programa proposto para o 2.º Ciclo, área não científica – Teoria das Probabilidades[43]

O Grupo de trabalho considerou como objectivo crucial:

> *"Dar a conhecer aos alunos a teoria fundamental das probabilidades insistindo sobre as noções que são necessárias ao curso de estatística."*
>
> OCDE, 1961c, p.220

Considerou como requisitos básicos necessários o conhecimento de Permutações, Combinações, Teorema do Binómio, Progressão Geométrica, Elementos de Análise e Função Exponencial e apresentou, à semelhança dos anteriores, comentários[44] ao programa proposto.

Apresentamos, de seguida, o programa proposto para **Estatística**.

Statistique. Branche non scientifique.

But. Le but n'est pas de faire des élèves des statisticiens professionnels mais de les aider à comprendre les principes de base du raisonnement statistique.

Liste des sujets.

Statistique descriptive.
Exemples de déduction statistique.
Contrôle des hypothèses.
Dépouillement statistique concernant la moyenne d'une population normale avec déviation standard connue.
Adaptation d'une distribution normale aux résultats statistiques.
Diagrammes directeurs.
Déduction statistique concernant les modèles de régression.

Figura 11: Programa proposto para o 2.º Ciclo, área não científica - Estatística[45]

---

[43] Fonte: OCDE, 1961c, p.220

[44] Estes comentários podem ser consultados nas actas OCDE, 1961c, pp.222-226.

Neste âmbito, o Grupo de trabalho considerou como objectivo crucial:

> *"O objectivo não é fazer dos alunos profissionais da estatística mas de lhes ajudar a compreender os princípios base do pensamento estatístico."*
>
> OCDE, 1961c, p.221

A Comissão não referiu requisitos básicos necessários, mas procedeu à realização dos comentários[46] ao programa.

Seguidamente apresentamos o programa para o **2.º Ciclo, área científica**.

Probabilités et Statistique dans le second cycle des classes secondaires (15 à 18 ans). Branche scientifique.

Brut. Faire connaître aux étudiants la théorie fondamentale des probabilités et les principes de base du raisonnement statistique.

Liste des sujets. En plus des sujets de la branche non scientifique, les suivants :

Axiomes de la théorie des probabilités.
Théorie des probabilités conditionnelles. Evènements indépendants.
Distribution de Poisson (si possible).

Figura 12: Programa proposto para o 2.º Ciclo, área científica - Probabilidades e Estatística[47]

Neste âmbito, o Grupo de trabalho considerou como objectivo crucial:

> *"Dar a conhecer aos estudantes a teoria fundamental das probabilidades e os princípios base do pensamento estatístico".*
>
> OCDE, 1961c, p.221

De igual modo, não foram referidos requisitos básicos mas, novamente, elaborados comentários[48] relativos a esta proposta. Contudo, os especialistas ressalvaram que a lista de matérias era praticamente igual à da proposta para o campo não científico, sendo que a diferença se encontrava no facto de nesta proposta se incluir o tratamento axiomático da Teoria das Probabilidades.

[45] Fonte: OCDE, 1961c, p.221
[46] Estes comentários podem ser consultados nas actas da OCDE, 1961c, pp.227-233
[47] Fonte: OCDE, 1961c, p.221
[48] Estes comentários podem ser consultados nas actas da OCDE, 1961c, pp.234-235.

Apresentadas as propostas para os programas nos diferentes domínios, foi elaborado um apêndice, que continha algumas considerações relativamente ao ensino da Análise. Como já havia sido referido, tendo estes especialistas um tempo limitado, relativamente a este tópico não foi possível realizar uma proposta de modificação de técnicas de ensino e aplicações a promover. Deste modo, o comentário realizado versou apenas dois aspectos: um apanhado genérico das ideias principais a serem exploradas durante o 1.º Ciclo de estudos (11-15 anos)[49] e uma proposta de um programa de Análise[50] para o último ano do Ensino Secundário.

[49] Podem ser consultadas na acta da OCDE, 1961c, pp.238-243.
[50] Este programa pode ser consultado na acta da OCDE, 1961c, pp.244-248.

4. ANÁLISE DA IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA DE MATEMÁTICA MODERNA

4.1. Conferência de Atenas

> *"As duas últimas décadas foram marcadas por uma verdadeira explosão de conhecimentos científicos".*
>
> OCDE, 1963, p.3

Decorridos sensivelmente quatro anos após o encontro de Royaumont e três anos dos trabalhos realizados por uma comissão de especialistas na Jugoslávia, (possivelmente os pontos fortes e delineadores das linhas mestre de actuação e de guia do processo de reforma do ensino das Matemáticas), imperava a necessidade de promover uma nova sessão de trabalho que procurasse reunir os principais promotores dessa reforma.

Assim, de 17 a 23 de Novembro de 1963, em Atenas, realizou-se um encontro internacional, do qual resultou a elaboração de mais uma fonte da OCDE. O Anexo 10 contém o plano de trabalho previsto para os dias atrás mencionados.

O conteúdo desta acta contou com a preciosa ajuda do Professor Fehr[51], pois foi o responsável pela fusão das comunicações realizadas, assim como, do Professor Revuz[52] que foi o responsável pela revisão dos textos apresentados. A lista dos participantes e observadores, assim como, dos autores das comunicações, constituem o Anexo 11. Portugal esteve representado por Jaime Leote[53], A.A. Lopes[54] e José Sebastião e Silva[55].

No prefácio da acta deste encontro pode ler-se qual o propósito da reunião:

> *"Esta sessão propunha-se examinar os novos programas do ensino das matemáticas, quer eles estivessem em estado de projecto, no decorrer da experimentação ou efectivamente adoptados. A conferência devia igualmente estudar os novos métodos preconizados para o ensino das matemáticas modernas, as aplicações modernas das matemáticas e sua incidência nos alunos das secções científicas do Ensino Secundário".*
>
> OCDE, 1963, p.3

[51] Professor no *Teachers College/Columbia University* – Estados Unidos da América.
[52] Professor na *Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers* – França.
[53] Jaime Leote, professor e Vice-Reitor do Liceu Normal de Pedro Nunes, é identificado por Campos Tavares como "Professor do segundo grau – Lisboa".
[54] Professor do Liceu normal D. Manuel II – Porto
[55] Professor da Faculdade de Ciências de Lisboa – Lisboa

Cumulativamente, seria alvo de particular atenção, a formação a exigir aos professores, temática que seria conveniente promover, de modo a contribuir para a reforma desejada.

Provavelmente, o resultado mais importante da Conferência terá sido o facto de se ter clarificado, o que se entendia por uma "*modernização do ensino das Matemáticas*". Assim, pode ler-se que esse entendimento poderia ser descrito com base nos seguintes pontos:

I. *"O ensino das matemáticas deve ser realizado numa óptica genérica totalmente diferente da do ensino tradicional. Esta atitude pode ser expressa por um esforço para unificar o conjunto de matéria insistindo sobre as estruturas fundamentais que encontramos nas diversas áreas das matemáticas";*

II. *"Devem ser incluídos nos programas as teorias e as matérias que adquiriram uma grande importância, de acordo com as suas aplicações nas outras ciências, em particular nas ciências físicas";*

III. *"Os métodos de ensino devem ser melhorados, procurando: (a) uma melhor compreensão por parte dos alunos dos princípios das matemáticas; (b) uma exposição mais susceptível de os cativar e (c) um desenvolvimento da sua aptidão na procura da solução de problemas concretos num contexto matemático".*

OCDE, 1963, p.237

Estas ideias reiteraram as outrora exprimidas, tanto em Royaumont como na Jugoslávia, representando estas últimas, uma importante contribuição ao nível da actualidade do processo de melhoria do ensino das Matemáticas. Recordemos que os especialistas defenderam a formulação de um programa que possuísse a elasticidade necessária para que as entidades competentes, em cada um dos países, pudessem adaptá-lo à sua realidade. Questões como o número de horas consagradas ao ensino das matemáticas, as capacidades e os conhecimentos dos professores, as tradições do ensino, bem como, questões de desenvolvimento intrínsecas a cada país, seriam aspectos que inibiriam claramente a aplicação rígida de um programa standard.

Nesta sessão, os principais aspectos alvo de análise foram:

1. *"O conteúdo de um programa moderno de Matemáticas destinado às secções científicas do Ensino Secundário";*

2. *"As formas de organizar e de ensinar um tal programa";*

3. *"A utilização e os objectivos das classes piloto experimentais de matemáticas";*

4. *"O conjunto de aplicações no âmbito do ensino nas áreas modernas de matemáticas";*

5. *"A formação inicial e a formação contínua dos professores de matemáticas no Ensino Secundário".*

OCDE, 1963, p.236

O discurso de abertura ficou a cargo do Professor Papaioannou[56], o qual ficou pautado por uma breve referência histórica aos contributos de antepassados para o desenvolvimento do pensamento matemático, nomeadamente a civilização grega, tendo defendido o facto de ser entre o Renascimento e o fim do século XVIII que se terão efectuado as grandes descobertas sobre as quais assentava a ciência.

Referiu, ainda, que os rápidos progressos da civilização, imputáveis primariamente à evolução da técnica (sobretudo no início do séc. XIX) e, posteriormente, às modificações profundas das condições de vida, terão sido aspectos que contribuíram para uma alteração das condições de trabalho dos designados *'homens da ciência'*. Assim, o contributo mais solidário destes *'homens da ciência'*, que deixaram de lado o recanto isolado das descobertas e aplicaram o novo conhecimento no quotidiano moderno, contribuiu para uma intervenção mais eficaz na nova sociedade. Papaioannou informou também os presentes que a Grécia integrou esse projecto global de reforma e tinha o objectivo de partilhar as primeiras realizações[57].

Apesar de já ter sido mencionado anteriormente como um dos promotores desta reforma, Papaioannou enalteceu a contribuição do Professor Howard Fehr na consecução das etapas já conseguidas e alertou para, em face dos primeiros resultados experimentais, uma situação que não seria facilmente resolúvel, realçando que:

> *"(...) a rapidez actual do desenvolvimento da ciência interdita que possamos elaborar um programa que possa permanecer algum tempo sem modificação".*
>
> OCDE, 1963, p.10

---

[56] Membro da Academia de Atenas – Grécia.

[57] Como complemento informativo, salienta-se a informação veiculada nesta mesma acta relativamente ao ponto de situação da implementação da reforma na Grécia: Foi constituído um comité em 24 de Novembro de 1961 e à data do encontro foram efectuadas as seguintes realizações: 1.º Foi submetido à OCDE um programa detalhado de toda a actividade realizada, o qual obteve aprovação deste organismo; 2.º Foi redigida uma obra de 370 páginas e publicada em Agosto de 1962 com o título *"Enseignement expérimental des mathématiques en première année des lycées"*; 3.º Em Setembro de 1962 foi realizado um seminário com os professores que ficariam encarregues da experimentação; 4.º Em Outubro de 1962 foi empreendido um ensino experimental em 10 estabelecimentos. (OCDE, 1963, p.9)

4.1.1. Considerações sobre o conteúdo dos novos programas

Aberta a sessão de estudo, procedeu-se a um conjunto de comunicações de interlocutores de diferentes países, no sentido de partilharem as suas realizações, que poderiam ser simples introdução de conceitos modernos nos programas existentes até à partilha da formulação de um programa profundamente alterado ou fundido relativamente ao tradicional.

Assim, numa primeira fase, os participantes foram convidados a preparar uma comunicação sobre a natureza das matérias que, nos seus países, pensavam incluir no novo programa.

Deste modo, foi promovida uma discussão dos programas sugeridos pelos intervenientes, quer constituíssem uma mera proposta, quer estivessem a ser alvo de experimentação ou já estivessem oficialmente em vigor[58].

Apesar de se ter constatado diferenças de opinião em questões de detalhe, foi unânime[59] que o programa belga, proposto por M.W. Servais, para as secções científicas do Ensino Secundário, constituía um exemplo sedutor de um programa moderno ao nível do espírito e do conteúdo, constituindo uma forte referência (de acordo com as possibilidades de cada país) para aqueles que pensavam empreender uma experimentação. Segundo Servais, para a elaboração do respectivo programa foram consideradas várias fontes, em particular, o programa proposto pela Comissão na Jugoslávia em 1960[60]. Fazia igualmente parte da proposta, a indicação das matérias que deveriam ser alvo de estudo e um comentário à forma como esses conteúdos deveriam ser organizados por ano, com o propósito de um ensino unitário. Esta proposta pode ser consultada no Anexo 12.

Após a auscultação das diversas propostas e considerando a sua diversidade e devida contextualização, um conjunto de aspectos foram considerados particularmente importantes, fosse pela sua característica unificadora, fosse pelo interesse particular ao nível das suas aplicações.

---

[58] Foram apresentadas as seguintes comunicações: Dr. L. Pauli [Suiça] (OCDE, 1963, pp.12-18); Dr. J. Laub [Áustria] (OCDE, 1963, pp.19-20); Prof. N. Kritikos [Grécia] (OCDE, 1963, pp.21-23); Dr. M. Villa [Itália] (OCDE, 1963, pp.24-29); Dr. E.G. Begle [Estados Unidos] (OCDE, 1963, pp.30-34); M.W. Servais [Bélgica] (OCDE, 1963, pp.35-39). A comunicação de M. Servais constituiu um exemplo de uma proposta de programa; um exemplo de um programa em experimentação foi o sugerido por L. Pauli e um exemplo de um programa já em vigor foi o programa implementado nos liceus dinamarqueses. Em 1958, o Parlamento dinamarquês votou uma nova lei escolar que promoveu uma revisão dos programas a todos os níveis. O tempo destinado para essas revisões não foi muito longo, sendo o novo programa aprovado pelas autoridades em 1960 e iniciado em 1963. (OCDE, 1963, p.61)

[59] OCDE, 1963, pp.238-239

[60] Servais complementou esta informação referindo a documentação que serviu de referência à elaboração do programa: o programa proposto na Jugoslávia, o programa proposto pela Comissão de Matemáticas do júri de admissão à universidade, o programa experimental estabelecido pelo Centre Belge de Pédagogie des Mathématiques, o programa experimental dos países escandinavos, o trabalho realizado pela Comissão Internacional para o aperfeiçoamento do ensino das Matemáticas, o programa experimental do liceu de Neuchâtel e o programa experimental de Madrid. (OCDE, 1963, p.39)

Assim, pode ler-se que:

> *"Na base de todo o programa do Ensino Secundário, nós encontramos: os princípios e as estruturas algébricas fundamentais, os espaços vectoriais e a álgebra linear, o cálculo diferencial, o cálculo das probabilidades e a estatística e alguns elementos sobre as teorias matemáticas que fazem utilização das calculadoras electrónicas. Todo o ensino deve ser centrado sobre o estudo dos espaços vectoriais".*
>
> OCDE, 1963, p.239

Complementava-se ainda que, os programas destinados aos estudantes que pretendiam prosseguir estudos universitários não científicos, deviam obedecer à mesma natureza que caracterizava os estudos científicos, podendo ser um pouco menos exigentes. De igual modo, devia possibilitar-se a estes estudantes o contacto com os conceitos que unificam o pensamento matemático e, simultaneamente, procurar familiarizá-los com o estudo do cálculo das probabilidades e aplicações na Estatística.

Pretendia-se também, que os programas elaborados não se limitassem a uma exposição teórica das aplicações, mas sobretudo que pudessem apresentar exemplos práticos dessas aplicações, de modo a familiarizar os alunos com métodos matemáticos de resolução de problemas concretos.

Nesta perspectiva considerou-se que:

> *"Esses exemplos constituem para os estudantes uma incitação suplementar ao estudo das matemáticas e, por acréscimo, e não menos importante, mostrar que a formulação matemática de uma situação dada começa por uma descrição clara e precisa dos dados do problema e das questões que se nos coloca, para de seguida procurar o modelo que permite exprimir o conjunto em termos matemáticos".*
>
> OCDE, 1963, p.240

Acrescentou-se ainda, que estes exemplos deveriam ser transversais a todos os domínios das Matemáticas, procurando evidenciar que, em diversas circunstâncias a matéria tratada deveria relacionar-se com aplicações concretas. A relevância dada a este aspecto, conduziu a que os conferencistas convidassem os presentes, no respectivo país, a constituir um conjunto de exemplos de aplicações das Matemáticas, adaptadas ao Ensino Secundário. Esta sistematização, segundo os mesmos, tinha como objectivo primordial, constituir uma base de investigação permanente e actualizada, para que, tanto professores como alunos, pudessem contactar com a evolução nas novas aplicações.

4.1.2. Considerações sobre uma nova metodologia

Dando cumprimento ao segundo ponto da ordem de trabalhos, procurou-se dar a conhecer aos presentes, novas metodologias de sucesso no âmbito dos novos programas, ainda que experimentais. Considerando o programa de Servais como base, foram apresentados alguns dos métodos que poderiam ser utilizados para o respectivo ensino, partilhados alguns métodos pedagógicos utilizados em outros países e, posteriormente, realizada uma discussão sobre essas metodologias e sobre as classes piloto experimentais.

Deste modo, a sessão teve como primeiro interveniente, o Professor G. Papy, da Université de Bruxelles – Bélgica.[61] Como planificado, de seguida procedeu-se a um conjunto de comunicações de interlocutores de outros países como: Professor Max Beberman, da Université de Illinois – Estados Unidos da América[62], Dr. Hans – Georg Steiner, da Université de Münster, Westphalie - Alemanha[63], Dr. Lennard Raade, da Université de Göteborg - Suécia[64], Dr. Erik Kristensen, do Matematisk Institut, Aarhust Universitet - Dinamarca[65] e, por fim, Professor P. Abellanas, da Université de Madrid - Espanha[66].

Considerou-se que existia uma relação muito estreita entre o melhoria das matérias ministradas e os métodos pedagógicos utilizados no respectivo ensino, daí a importância que deveria ser dada a este último aspecto.

As intervenções de Papy e Beberman constituíram exemplos eloquentes relativamente à possível associação entre as ideias matemáticas modernas e os métodos pedagógicos. Estes exemplos procuraram facultar uma orientação aos estudantes para a descoberta de modelos matemáticos e a construção por eles mesmos de entidades matemáticas, motivando-os na aprendizagem e no desejo de compreender os factos manuseados.

[61] A comunicação integral do Professor G. Papy, pode ser consultada nas actas da OCDE, 1963, pp.79-118, contendo a página 119 desta mesma fonte, um conjunto de referências bibliográficas do próprio autor e de seus colaboradores.
[62] A comunicação integral do Professor Max Beberman pode ser consultada nas actas da OCDE, 1963, pp.120-131.
[63] A comunicação integral do Dr. Hans – Georg Steiner, pode ser consultada nas actas da OCDE, 1963, pp.132-145, contendo a página 146 desta mesma fonte, um conjunto de referências bibliográficas do próprio autor e de outros colaboradores, nomeadamente, G. Papy, B. Russel e I. Hant.
[64] A comunicação integral do Dr. Lennard Raade pode ser consultada nas actas da OCDE, 1963, pp.147-153.
[65] A comunicação integral do Dr. Erik Kristensen pode ser consultada nas actas da OCDE, 1963, pp.154-158.
[66] A comunicação integral do Professor P. Abellanas pode ser consultada nas actas da OCDE, 1963, pp.159-171.

4.1.3. Utilização e objectivos de classes piloto

No que concerne ao ponto acima mencionado, os intervenientes consideraram que a investigação contínua de novas metodologias era indubitavelmente facilitada por um trabalho experimental no âmbito das designadas *'classes piloto'*. Estas consistiam num número reduzido de classes seleccionadas, ministradas por professores particularmente experientes e com altos conhecimentos de Matemáticas.

O objectivo crucial destes esforços seria:

> *"(...) facultar aos estudantes melhores e mais exigentes conhecimentos matemáticos, preparando-os assim para os estudos mais profundos da universidade".*
>
> OCDE, 1963, p.241

Em particular, na Grécia, as classes piloto funcionavam há dois anos, tendo os membros da Conferência a oportunidade de visitar uma dessas classes.[67]

Relativamente à organização de classes piloto foram efectuadas as seguintes sugestões:

1. Fazer uma série de filmes de aulas, ministradas por docentes experimentados e que utilizem métodos modernos de modo a serem usados para a formação dos professores;
2. Organizar visitas periódicas a classes piloto seguidas de um espaço de discussão, análise e crítica;
3. Dar liberdade na condução das classes piloto, dado que um controlo mais estreito poderia anular consideravelmente a recolha de informações que poderiam conduzir a um ensino experimental;
4. Utilizar as classes piloto para estimular os professores, assim como, a classe de alunos;
5. Utilizar as classes piloto para activar uma reforma, dado que as modificações oficiais eram demasiado lentas. Assim, o pensamento, a organização e a experimentação levariam a um adiantamento ao nível do processo de estabelecimento de novos programas para todos os restantes alunos;
6. Utilizar diferentes tipos de classe piloto: aquelas que criam, as que experimentam o novo programa e aquelas que experimentam a partir de um programa já em vigor.

OCDE, 1963, p.176

[67] Essa visita ocorreu a uma classe do oitavo ano escolar – alunos com 14 anos. Após essa visita, os conferencistas discutiram o ensino ministrado. A classe era constituída por 45 alunos de todos os níveis, dado que na Grécia apenas no nono ano escolar se repartiam os alunos em função das suas aptidões. Os livros utilizados nessa classe foram redigidos pelo Comité Nacional de Matemáticas, o qual era composto por três professores universitários, três professores de institutos preparatórios no ensino das Matemáticas e três professores de conceituadas escolas. O mesmo Comité controlou o ensino experimental, realizou os testes e dirigiu seminários de um mês para formar os professores de Matemáticas das classes piloto. (OCDE, 1963, pp.175-176)

Neste sentido, as autoridades administrativas não poderiam considerar que uma melhoria nos métodos pudesse conduzir a uma redução dos horários consagrados às Matemáticas, pois se tal acontecesse, seria de esperar graves implicações quanto aos objectivos que foram inicialmente fixados.

4.1.4. O papel das aplicações na modernização do ensino da Matemática

Dando cumprimento ao terceiro ponto da ordem de trabalhos, foi suscitado o interesse da temática após a comunicação de Henry Pollak[68], a qual tinha como objectivo evidenciar a importância da aplicabilidade prática no ensino das Matemáticas. Apesar de a maior parte das intervenções estarem vocacionadas para uma melhoria das aprendizagens para que fosse possível sucesso em estudos superiores, seria irreal, não considerar a possibilidade de os alunos não prosseguirem os estudos científicos. Assim, seria relevante questionar que tipo de Matemáticas se poderia apresentar a esses alunos, que não tinham o desejo de ser criadores ou professores e, que portanto, para eles as Matemáticas não passariam de uma ferramenta.

Neste âmbito, a comunicação de Henry Pollak tinha o propósito de discutir o valor das Matemáticas Aplicadas e das suas repercussões nos programas.[69]

Pollak apresentou exemplos práticos do quotidiano onde a formulação matemática apresentava um papel fundamental na resolução dos problemas colocados. Partindo dessas ilustrações e enfatizando a crescente divulgação deste tipo de aplicabilidades[70], Pollak referiu áreas onde se vislumbravam as maiores carências de conhecimento:

> *"(...) as carências mais importantes em matemáticas, além da análise clássica, são a álgebra linear, o cálculo das probabilidades e a estatística matemática (...). Igualmente importante para essas aplicações é a teoria de grupos que, em face das suas múltiplas aplicações citadas durante esta comunicação, é utilizada, conjuntamente com o cálculo das probabilidades, num sector importante da teoria da informação. Podemos, contudo, considerar que o domínio da física constitui ainda o campo de aplicação mais importante da teoria dos grupos e, mais genericamente, de tudo o que se relaciona com o estudo das estruturas algébricas".*
>
> OCDE, 1963, p.188

[68] Matemático e industrial – *Bell Telephone Laboratories*, Estados Unidos da América.
[69] Para leitura integral da comunicação de H.O. Pollak, consultar actas da OCDE, 1963, pp.179-191.
[70] Pollak partilhou com os presentes, o facto de uma edição do *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, apresentar 14 artigos no âmbito das Matemáticas Aplicadas, sendo dois deles escritos por matemáticos que trabalhavam na indústria e que certamente influenciados pelas suas funções, resolveram partilhar problemas de grande importância prática e para os quais as Matemáticas assumiam um papel crucial.

A questão que se colocava estava relacionada com as consequências que a introdução destas aplicabilidades teria na estrutura dos programas. Relativamente a este facto, Pollak referiu que estas aplicações só viriam enriquecer o ensino, na medida em que promoviam a compreensão e a prática.

> *"Não é suficiente conhecer uma fórmula, saber girar uma manivela para obter o resultado pretendido. É necessário conhecer como se fez e porque é que gira".*
>
> OCDE, 1963, p.189

Para Pollak, a exploração de novas situações permitia criar os bons matemáticos, assim como, do ponto de vista pedagógico, era uma excelente maneira de formar a intuição matemática e a capacidade do rigor lógico dos estudantes, pois estes percebiam a natureza exacta da situação proposta, porque ela apresentava uma verdadeira aplicabilidade prática.

Esta intervenção de Pollak conduziu a uma discussão a diversos níveis.

A maior parte dos participantes considerou que não deveria ser feita uma distinção entre Matemáticas Aplicadas e Puras ao nível do Ensino Secundário e que os problemas e as estruturas lógicas deveriam constituir um único e simultâneo estudo. Considerou igualmente importante que fosse realizada uma recolha de problemas de Matemáticas Aplicadas para o Ensino Secundário, à semelhança do que estaria a ser feito no Ensino Universitário. Para essa recolha seria muito útil a participação de diferentes colaboradores, como matemáticos empregues na indústria, investigadores de diversas especialidades e, mais genericamente, especialistas qualificados que usavam métodos matemáticos no seu dia a dia. O objectivo seria elaborar uma brochura anual que facultaria um conjunto de problemas actuais, bem como, uma bibliografia de novas aplicações de Matemáticas acessíveis ao nível do Ensino Secundário.

Por outro lado, o facto de se introduzir aplicações matemáticas no ensino, implicaria necessariamente uma cooperação estreita entre os professores, não só entre os professores de Matemáticas e Física, mas de todo o corpo docente, uma vez que:

> *"(...) as matemáticas formam actualmente uma linguagem que é usada em numerosas disciplinas e que todos os professores, e não apenas os de matemáticas, devem ser capazes de utilizar".*
>
> OCDE, 1963, p.193

Apesar de serem mais notórias as aplicações das Matemáticas na Física, os participantes consideraram a existência de outras áreas onde essa articulação também seria possível e interessante ao nível do Ensino Secundário, como Economia, Sociologia, Psicologia, Geologia, Biologia. Referiram igualmente problemas de Programação Linear, testes de hipóteses, assim como, novas aplicações no âmbito da Aritmética, da Álgebra e da Análise potenciadas pela possibilidade do recurso a calculadoras electrónicas.

Por outro lado, a introdução destas aplicações deveria ter em consideração os programas e a formação dos professores, dado que as efectivas aplicações das Matemáticas eram, em geral, complexas e exigiam conhecimentos em diferentes domínios. Para além disso, um ensino aplicado exigiria tempo para que os professores pudessem preparar as suas aulas, recolherem material necessário e tempo na aula para colocar em prática essas aplicações.

Deste modo, chegaram à conclusão que:

> *"A reforma do ensino das matemáticas é feita sob a impulsão de três forças diferentes: a) a dos matemáticos que pretendem uma apresentação das matemáticas de acordo com as teorias modernas; b) a dos psicólogos da adolescência que mostraram a possibilidade de uma melhor aprendizagem, e c) a dos dirigentes da indústria que exigem uma melhor apresentação das aplicações das matemáticas".*
>
> OCDE, 1963, p.194

A discussão sobre o ensino das Matemáticas a alunos de secções não científicas surgiu após a comunicação de Dr. Hermann Athen[71]. Esta assentou essencialmente em três pontos: a necessidade do estudo das Matemáticas; se se aceitar essa necessidade, qual deveria ser o seu conteúdo e sobre que princípios deveriam assentar esse ensino.

Um acordo unânime existiu relativamente ao facto de todos os estudantes dos ciclos terminais do Ensino Secundário auferir ensino de Matemáticas. Ainda que alguns estivessem preparados para a aceitação de um programa reduzido, existiriam razões sólidas em favor da continuidade desses estudos.

Os participantes invocaram as seguintes razões:

1. *"A necessidade de facilitar o retorno posterior de numerosos estudantes a uma carreira científica. A ausência de conhecimentos matemáticos fecharia a porta a numerosos estudos universitários";*

2. *"As matemáticas desenvolvem-se agora no domínio das ciências humanas e das artes, assim como nas ciências naturais e físicas e em todos esses domínios uma boa compreensão dos conceitos de base das matemáticas é necessário";*

[71] Bismarck-Gymnasium, Elmshorn /Hambourg – Alemanha. A comunicação integral pode ser consultada em OCDE, 1963, pp.196-207.

3. *"Mais frequente são os que se interessam pelas ciências do comportamentos não prosseguindo os ciclos científicos; as matemáticas intervêm contudo cada vez mais nos domínios da economia, da psicologia, da sociologia e da medicina";*

4. *"O tipo de sistematização e de solução utilizada nas matemáticas aplicadas encontram-se constantemente nos estudos de problemas não científicos".*

5. *"Uma formação liberal necessita, para ser completa, que sejam usadas as matemáticas e os métodos matemáticos".*

OCDE, 1963, p.209

Para que as metas propostas – educação prática, preparação para a Universidade e educação liberal – fossem atingidas, seria necessário escolher quais as matérias que deveriam ser ensinadas nas secções não científicas. Ficou acordado que seriam mantidas as mesmas da secção científica ao longo do primeiro ou dos dois primeiros anos, compreendendo:

1. *"Uma parte fundamental, como os conjuntos, as relações, as funções e as aplicações";*

2. *"Um estudo da álgebra e da geometria que alie espaços vectoriais e álgebra linear";*

3. *"O cálculo das probabilidades e estatística".*

OCDE, 1963, p.209

Alertou-se ainda para o facto de a apresentação ser feita, tanto quanto possível, num óptica conceptual, implicando falar de lógica, de sistemas de axiomas e de estruturas. Paralelamente, dado que os estudantes da secção não científica revelavam maior interesse nas aplicabilidades das matemáticas, dever-se-ia velar para que:

I. *"As aplicações sejam feitas com problemas reais de acordo com os domínios de interesse dos alunos";*

II. *"A prática da utilização das matemáticas seja desenvolvida, porque para esses estudantes o aspecto "ferramenta" é importante".*

OCDE, 1963, p.209

Algumas considerações foram também efectuadas relativamente ao perfil do professor.

"(...) Deverá ser um professor culto e experimentado, que se interesse ele próprio por centros de interesse e pelas necessidades dos estudantes onde as preocupações primeiras não são as matemáticas. (...) Seria desejável que esse professor colaborasse com os professores de outras disciplinas (...)".

OCDE, 1963, p.210

Deste modo, a utilização das Matemáticas em outras disciplinas poderia permitir que esses estudantes pudessem adquirir habilidade técnica, deixando para a classe das Matemáticas, um estudo mais conceptual.

Uma última referência foi feita em relação à possibilidade de estabelecer programas distintos para rapazes e raparigas. Assim, foi unânime que tal não deveria acontecer, sendo de evitar qualquer discriminação no ensino das Matemáticas.

4.1.5. A importância da Formação de Professores

Relativamente ao último ponto da ordem de trabalhos, considerou-se que o sucesso de novas metodologias estaria intrinsecamente relacionado com o professor, independentemente do programa de Matemáticas estabelecido. Neste sentido, considerou-se pertinente a análise de aspectos relativos à formação dos professores, uma vez que, o contínuo e rápido progresso do conhecimento matemático mais elevado, a par de uma modificação estrutural dos programas escolares exigia que o docente se familiarizasse com os novos avanços científicos e tecnológicos.

> *"As exigências apresentadas ao professor que ensina um programa de matemáticas modernas são notavelmente diferentes daquelas apresentadas nos programas tradicionais".*
>
> OCDE, 1963, p.211

Neste âmbito foram proferidas as comunicações do Professor A. Revuz[72] e do Professor Howard Fehr[73].

A intervenção de Revuz esteve sobretudo centrada no nível e no volume de conhecimentos matemáticos desejáveis para um professor, sendo a ideia central da sua comunicação, a distinção entre professores do 1.º Ciclo e professores do 2.º Ciclo, a qual, permitiria formar em quantidade, mas onde cada um teria uma qualificação adaptada à tarefa que iria desempenhar.

O aumento considerável do interesse dado aos estudos matemáticos havia conduzido a uma situação onde dois princípios se contradiziam: os professores serem excelentes ao nível dos seus conhecimentos científicos e qualidades pedagógicas e, simultaneamente, por exigências políticas e

[72] A Comunicação integral poderá ser consultada nas actas da OCDE, 1963, pp.212-224.
[73] A Comunicação integral poderá ser consultada nas actas da OCDE, 1963, pp.225-234.

sociais, serem formados rapidamente. Revuz advertiu para a tentação perigosa de se reduzir a formação de base, apelando a todos os responsáveis da Educação Nacional em cada país para não cederem a essa tentação, apenas para obterem maior quantidade de professores.

De forma prévia, expôs os diferentes graus de conhecimento que um professor poderia ter de uma teoria, sendo desejável que o professor se encaixasse no grau:

> *"g – não apenas ter um conhecimento científico perfeito, mas ter também uma clara consciência das dificuldades que apresenta a sua aproximação e assimilação àqueles que a [teoria] ignoram".*
>
> OCDE, 1963, p.213

Contudo, alertou que dificilmente esse grau era atingido, o que não invalidaria o esforço do docente em se aproximar desse princípio.

Considerando que uma teoria matemática não se limitava a uma colecção de noções e teoremas, mas antes de mais, a uma forma de manipular certos conceitos, um modo de pensar que podia ser aplicado tanto a casos simples como a situações complexas, seria impossível limitar os conhecimentos de um professor ao nível que ele ministrava.

Assim, seria fundamental encontrar um ponto de equilíbrio, que na opinião de Revuz, passaria, inicialmente, pela distinção entre a formação na Universidade e a formação após a Universidade (designada, segundo Revuz, por formação contínua dos mestres).

> *"A segunda [formação contínua] é indispensável para aprofundar a cultura do professor (...). Ela deverá ser também dada pela Universidade, com a qual todo o professor deverá manter o contacto, e ela deve ser o complemento da formação que o professor recebeu durante os seus anos de estudante".*
>
> OCDE, 1963, p.215

Revuz começou então por propor uma distinção de 4 estádios, dois para o Ensino Secundário e dois para o Ensino Universitário.

Ensino Secundário:

- 1.º Ciclo – alunos dos 10/11 anos aos 14/15 anos;
- 2.º Ciclo – alunos de 15/16 anos aos 18/19 anos.

Ensino Universitário[74]

- 1.º Ciclo – correspondente ao **nível 1**, onde seria razoável consagrar três ou quatro semestres de estudo de Matemáticas;
- 2.º Ciclo – correspondente ao **nível 2** (licença de ensino), o qual seria atingido ao fim de quatro anos de Universidade.

Efectuada esta distinção, Revuz sistematizou o nível de conhecimentos apresentando a seguinte frase:

> *"A formação de base de um professor do n-ésimo ciclo do Ensino Secundário é aquela dada ao n-ésimo ciclo da Universidade".*
>
> OCDE, 1963, p.216

Revuz considerou importante a articulação dos programas de Matemáticas estabelecidos nas universidades e os programas estabelecidos para o Ensino Secundário. Partindo de programas sobre os quais existia um acordo, *Programa de Dubrovnik*[75] (Ensino Secundário) e *Programa de Düsseldorf* (Ensino Universitário), Revuz tentou concretizar a ideia expressa na frase transcrita acima, analisando detalhadamente a situação de um professor do 1.º Ciclo e a situação do professor do 2.º Ciclo, pois esse princípio não era tão linear para todos os conteúdos.

Por exemplo, as noções genéricas de Álgebra do primeiro nível abordadas segundo o programa de Düsseldorf não permitiam dominar suficientemente as noções ensinadas no primeiro ciclo do Ensino Secundário, de acordo com o programa da Jugoslávia. Assim, solucionou a questão afirmando que para esta área o professor deveria possuir o nível 2 de Álgebra dos Conjuntos e Álgebra, assim como, o nível 2 de um bloco elementar presentes no programa de Düsseldorf, devendo estas matérias ser revistas ao longo do ano de formação pedagógica. Revuz continuou a análise detalhada para um professor que leccionava o 1.º Ciclo do Ensino Secundário, referindo os desfasamentos ou lacunas para a Geometria, Análise, Análise Numérica, Cálculo de Probabilidades e Estatística. A análise estendeu-se igualmente para professores do 2.º Ciclo, para os quais se exigiria o segundo nível do Ensino Universitário tendo considerado que os conhecimentos adquiridos no nível dois permitiriam dominar suficientemente os domínios ministrados no 2.º Ciclo do Ensino Secundário e o nível um do Ensino Universitário. Contudo, Revuz sugeriu, ainda, o reforço da formação dos

[74] Os dois níveis propostos para o Ensino Universitário correspondiam aos dois níveis do Programa de Düsseldorf. Este programa apresentava as temáticas a serem abordadas no Ensino Universitário, estando divididas segundo os dois níveis referidos. O programa constitui o <u>Anexo 13</u>.

[75] Programa proposto na Jugoslávia, que se encontra na acta da OCDE de 1961c *"Un Programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire"* e que foi alvo de análise deste estudo no capítulo 3.

professores do segundo ciclo em dois pontos: a Geometria (estudo mais profundo ao nível da Geometria Afim, Geometria Projectiva e da Geometria Analítica) e o Cálculo das Probabilidades e da Estatística.

Referiu também o facto de as aplicações às ciências físicas, às ciências económicas e às ciências humanas, figurarem na formação de base do professor. Todavia, Revuz considerou que durante a formação de base não era possível ter tempo para remediar todas as lacunas ou desfasamentos e ainda familiarizar o professor com aplicações das Matemáticas. Deste modo, remeteu estas últimas para a formação contínua. Considerou também que a formação pedagógica deveria estar directamente relacionada com as matérias e o nível dos alunos que o professor teria pela sua frente. O facto de os programas do Ensino Secundário estarem em fase de constante evolução, suscitaria a participação dos futuros professores em reuniões pedagógicas onde seriam estudados e comparados diversos métodos, diversos programas e analisadas as conclusões de programas experimentais. Neste âmbito foram ainda realizadas sugestões ao nível de noções sobre a Psicologia do Adolescente, da aquisição de conhecimentos, das diferenças de personalidade, no sentido de os professores adaptarem o seu ensino a todos alunos, procurando elevar o nível de conhecimentos de cada um deles.

A comunicação do Professor Fehr centrou-se na formação profissional dos professores do Ensino Secundário.

Segundo Fehr, o ritual da formação de um aluno que pretendia ser professor era, caricaturalmente, o seguinte: o aluno recebia uma determinada formação matemática que se julgava necessária para poder ministrar o ensino das Matemáticas nos estabelecimentos de Ensino Secundário, finda a qual, adquiria uma formação pedagógica e, após um estágio, era reconhecido como professor de Matemáticas. Durante este caminho formativo, o professor não era estimulado para efectuar um estudo autónomo, de modo a fazer uso das suas próprias faculdades intelectuais e dos conhecimentos matemáticos adquiridos. Essa especialidade, se assim se puder dizer, estaria destinada àqueles que prosseguiam um caminho universitário ou então àqueles que pretendiam ser matemáticos profissionais.

Deste modo, Fehr alertou para o primeiro aspecto a ser alvo de atenção na formação de futuros professores: o culto de um espírito onde o professor deveria sempre pensar e agir como um estudante ou um investigador, durante toda a sua carreira profissional. Esse género de formação, deveria ser adquirida ao longo dos últimos anos da Universidade e constituir um dos objectivos essenciais da formação pedagógica. Sugeriu então que o professor, após terminar a formação científica e pedagógica e ter obtido o título de professor de Matemáticas, tivesse contacto com novas obras adaptadas às carências sentidas pelos professores em actividade e que contivessem algo novo ou então, que pelo menos, constituíssem uma abordagem inteiramente nova de algo já conhecido. Os textos escritos deveriam versar algo simples e se possível, relacionados com a prática pedagógica.

Relativamente aos professores que se encontravam em actividade, Fehr reforçou a necessidade de lhes incutir o facto de as Matemáticas não serem encaradas como produto acabado e estático, mas algo em constante mudança, que vai englobando novos e abrangentes conceitos. Uma das formas de promover este espírito, seria a criação de sociedades, à escala local, nacional e internacional, cujo objecto de trabalho fosse o ensino das Matemáticas. Fehr partilhou com os presentes que, em alguns países, como França, Bélgica e Estados Unidos da América, essas sociedades já existiam, individualizando, a *Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, a *Société Belge des Professeurs de Mathématiques* e o *National Council of Teachers of Mathematics*. Para Fehr, essas sociedades favoreceriam o impulso da profissão através da organização de congressos e de publicações. Os congressos funcionariam como '*catalisador*', fornecendo a ocasião de reencontrar colegas de outras regiões e de outros países, de ouvir comunicações preparadas por matemáticos, por investigadores ou professores, sobre as suas experiências ou reformas recentes, quer ao nível de métodos quer ao nível de programas. Sugeriu também que cada professor assistisse, pelo menos, uma vez por ano a um congresso, para não perder contacto com os modos de pensamento actuais.

As publicações permitiriam manter os professores informados e, simultaneamente, constituir um meio de referência para novas e diferentes práticas pedagógicas. Para Fehr, as publicações mais importantes seriam aquelas que contivessem diversos artigos sobre as novas Matemáticas, recheadas de exemplos e ilustrações e perfeitamente adaptadas às necessidades dos professores do Ensino Secundário. Como exemplos elucidativos, referiu a exposição de J. Techam, em 1957, "*La Statistique Mathématique*" na revista Mathematica and Pedagogia e a exposição de André Huisman em 1962, no Bulletin francês, intitulada "*Les Mathématiques modernes*". Sugeriu igualmente que para encorajar à adesão e escrita de artigos, cada sociedade institucionalizasse um prémio anual para os melhores artigos. Simultaneamente, essas sociedades deveriam ser independentes relativamente a Universidades ou Escolas, possuir estatutos e regulamentos próprios e procurar exercer a sua influência junto de universidades e das autoridades oficiais no sentido de promoverem um nível profissional elevado.

Para Fehr era possível formar:

> *" (...) um corpo vivo, em expansão, de professores altamente competentes do Ensino Secundário."*
>
> OCDE, 1963, p.229

A sua intervenção ficou ainda pautada por um conjunto de contributos que pudessem ir ao encontro desse objectivo. Relevou o retorno periódico à universidade de cada professor do Ensino Secundário, acto que deveria ser parte integrante das actividades de um professor e, para o qual, nada deveria pagar. Essa frequência deveria ser, no mínimo de doze semanas, consagrada aos novos aspectos da Álgebra, da Geometria e da Análise, bem como, expandida a um seminário sobre métodos pedagógicos. O conteúdo do curso deveria ser diferente em cada ano, de modo a acompanhar o estado actual dos conhecimentos dos professores. Ressalvou que esta ideia poderia ser alvo de objecção uma vez que implicaria o aumento efectivo de professores para integrarem esse projecto, mas que na sua opinião, esse aumento rondaria os 5% a 10%, o que seria sustentável e cujas vantagens se traduziram numa ascensão a todos os níveis.

Fehr terminou a sua intervenção efectuando duas observações:

> *"A primeira é que não são os cursos que formam um professor, mas sobretudo, o conteúdo desses cursos e a forma como eles são leccionados e como a comunicação se faz entre dois espíritos, o do professor, com a sua competência, e a do estudante, com o seu desejo de aprender. A segunda é que (...) o conteúdo e o método são precisamente o objecto de nossa preocupação".*
>
> OCDE, 1963, p.230

Os presentes consideraram que a ideia de "*educação permanente*"[76] levantaria diversos problemas conjunturais, não existindo uma única solução e igual para todos os países, dado que estes apresentavam realidades completamente díspares entre si. Após a intervenção de Fehr, cujo conteúdo foi alvo de manifesto acordo, os participantes sugeriram diversas formas de a atingir.

Foi opinião unânime que não devia ser dado um carácter institucional à "*educação permanente*" no sentido de os professores não serem obrigados a seguir um plano de estudos pré-estabelecido. De igual modo, a formação recebida após a obtenção do diploma deveria ser obtida, primeiramente, no Departamento de Matemáticas de uma Universidade e só depois no âmbito da Pedagogia. Esses cursos deveriam ser de curta duração e mais frequentes ao longo do ano. Foram ainda sugeridos, os designados cursos por correspondência, classificados como eficazes, permitindo

[76] Expressão usada durante a Conferência. (OCDE, 1963, p.231)

a ajuda de matemáticos em tempo útil e que iriam ao encontro das verdadeiras carências que cada professor sentia na sua profissão. Para incentivar a frequência dos professores em seminários ou nesses cursos, os congressistas alertaram que seria indispensável ajuda financeira do Estado e que esses eventos fossem dotados de um aspecto profissional, mas também com um carácter de reunião agradável, onde se realizassem pausas improvisadas para café ou chã. O interlocutor deveria ter a preocupação de propiciar um ambiente de discussão, suscitando questões e evitando interrogações directas aos participantes. Uma última sugestão foi o recurso à televisão como meio de promoção da formação dos professores. À semelhança de programas para os alunos, também deveria haver emissões destinadas aos docentes (é referida a existência de pelo menos quatro países onde essas emissões são realizadas, não especificando o seu nome).

No âmbito da designada *"educação permanente"*, muitas sugestões foram dadas pelos congressistas e que poderiam servir de referência para implementar em cada país membro. Contudo, os princípios que obtiveram concordância genérica foram:

> I. Os professores de matemáticas que exercem diferentes níveis de ensino deveriam dominar os aspectos científicos e pedagógicos do conteúdo matemático referente ao nível que leccionavam, assim como, do nível superior àquele que ministravam. Tal facto era crucial, uma vez que, uma visão alargada dos diversos domínios, permitiria ao professor organizar as suas aulas para que os alunos pudessem experimentar, usar a intuição e a razão e, por outro lado, estar receptivo a uma revisão permanente dos conteúdos dos programas e dos métodos de ensino;
>
> II. Para além da formação de base, os professores deveriam prosseguir activamente o estudo das Matemáticas, ao longo de toda a sua carreira. Para cumprir esse objectivo, deveriam ser colocadas em prática algumas medidas, como a publicação de obras de valor destinadas aos professores, a possibilidade de os professores prosseguirem cursos e de voltarem à Universidade para efectuar estudos próprios e contactar periodicamente com personalidades universitárias;
>
> III. Dependente da organização estrutural do Ensino Secundário de cada país, a diferentes níveis do sistema escolar deveriam corresponder diferentes níveis de exigência aos conhecimentos dos professores. O número de níveis devia ser fixado em cada país, existindo referências que podiam ser tidas em consideração, nomeadamente, o programa de Düsseldorf ou o relatório da Mathematical Association de Grande Bretagne;
>
> IV. Ao longo da sua formação, os professores deveriam obter não só uma formação científica mas também uma visão dos problemas pedagógicos. As especificidades de cada país determinariam o momento no qual devia intervir a formação pedagógica no processo de formação de cada professor. Deveriam ser facultadas noções de Psicologia do conhecimento e da sua aquisição e, se possível, a sua aplicação particular ao grupo de alunos que estariam a cargo do professor.
>
> OCDE, 1963, pp.242-243

Findas as intervenções oficiais e após frutuosas discussões, um restrito Comité ficou encarregue de resumir o acordo que foi feito entre os participantes relativamente à orientação que devia ser seguida, de modo a permitir uma modificação no ensino das Matemáticas. O trabalho efectuado por este Comité foi traduzido através de um conjunto de resoluções/recomendações, que foram aprovadas por unanimidade pelos participantes.

Estas resoluções fazem parte das actas da OCDE e, segundo o mencionado, permitiriam:

> *" (...) servir de guia àqueles que se preocupam com a reforma do ensino das matemáticas".*
>
> OCDE, 1963, p.244

4.1.6. Resoluções e Recomendações

A versão oficial e integral das resoluções e recomendações elaboradas pode ser consultada no Anexo 14. Contudo, apresentaremos, de seguida, um resumo das mesmas.

Serviço de Informação

I. A OCDE deveria assegurar aos países membros um sistema actualizado de informações sobre a evolução do ensino das Matemáticas de cada país.

Visitas

II. Os participantes recomendaram que a OCDE e os organismos competentes de cada país empreendessem e patrocinassem iniciativas que promovessem visitas de intercâmbio de personalidades que se interessavam pela melhoria do ensino das matemáticas.

Investigação a efectuar

III. Foi recomendado a realização de investigações sobre as possibilidades do uso de filmes, televisão e instrução programada, no ensino das Matemáticas.

Classes Piloto

IV. Os participantes na Conferência sublinharam a importância das classes experimentais de Matemáticas na adopção dos novos métodos e dos novos programas. Assim, dada a rapidez da evolução que se fazia sentir, seria conveniente a utilização permanente dessas classes.

Formação de Professores

V. Foi unânime que a formação dos professores deveria congregar duas vertentes: a formação pedagógica e a formação científica. A formação matemática dos futuros professores teria de assegurar um conhecimento superior em relação ao nível leccionado, o que implicaria, um entendimento dos princípios fundamentais das Matemáticas modernas, assim como, das suas aplicações. A formação pedagógica deveria relacionar-se com as Matemáticas que o professor leccionava e deveria versar elementos da Psicologia dos Adolescentes, em particular, daqueles que seriam os futuros alunos do professor. Foi igualmente salientada a importância da formação do futuro professor fomentar a capacidade de prosseguir autonomamente a sua educação, dotando-lhe da aptidão de se adaptar com facilidade às constantes mudanças que ocorreriam ao longo de toda a sua carreira.

Formação ao longo da carreira

VI. A modernização pretendida não poderia ser empreendida sem ter em consideração a necessidade de criar os meios necessários para aperfeiçoar os conhecimentos dos professores que se encontravam no activo. Foram então sugeridos os cursos por correspondência e o retorno frequente e indispensável dos professores à Universidade ou a um centro de Ensino Superior de nível análogo. Por outro lado, os participantes ressalvaram o facto de uma ajuda financeira por parte das entidades competentes, permitir que associações ou centros profissionais pudessem contribuir para a elevação da formação dos professores, recorrendo às universidades.

Matérias dos cursos

VII. Os participantes destacaram a relevância cultural e prática das Matemáticas, pelo que, recomendaram que todos os alunos obtivessem uma formação matemática, ao longo dos seus estudos secundários. Especificaram que, os Conjuntos, as Relações e as Funções deveriam estar presentes em todos os campos das Matemáticas e que os Espaços Vectoriais, o Cálculo Diferencial e Integral, Probabilidades e Estatística deveriam ser alvo de estudo para aqueles que se especializavam no âmbito das ciências. Os restantes alunos deveriam igualmente receber uma sólida formação matemática, de forma a:

"(...) compreender de igual modo os princípios fundamentais e as suas aplicações. Eles deveriam em particular compreender as probabilidades e a estatística".

OCDE, 1963, p.247

Utilização das calculadoras

VIII. Foi reconhecida a importância crescente da utilização de calculadoras, pelo que consideraram relevante, que tal facto deveria ser tido em consideração no âmbito dos programas de Matemáticas nas escolas secundárias.

Ritmo de aplicação

IX. Todos os países da OCDE foram convidados a implementar a modernização dos programas nas escolas, o mais rapidamente possível, de acordo com os meios de formação que cada país dispusesse.

Exames

X. Os exames deveriam ser escritos, versar um programa fixo e evitar constituir um obstáculo à melhoria do ensino.

"Os exames deverão ser modificados em conformidade com os objectivos de um ensino matemático moderno".

OCDE, 1963, p.248

O ensino a partir de situações reais

XI. As Matemáticas Puras deveriam seguir a mesma linha que as Matemáticas Aplicadas. Os especialistas em Matemáticas Aplicadas construíam modelos matemáticos partindo de situações reais, utilizando os modelos para elaborar deduções e uma estrutura matemática apropriada, confrontando os resultados e a situação original. Foi então recomendado que aos estudantes fossem proporcionadas situações reais, convidando-os a reflectir sobre elas, intuir e posteriormente elaborar as noções matemáticas subjacentes.

Valor do ensino através das aplicações

"É importante fazer compreender aos alunos que as matemáticas são úteis à sociedade".

OCDE, 1963, p.248

XII. Como forma de alcançar esse objectivo, os participantes recomendaram que com alguma frequência o ensino das noções matemáticas tivesse como base aplicações oriundas de um vasto conjunto de domínios, procurando colocar em prática as Matemáticas no contexto dessas mesmas aplicações. Por outro lado, o professor de Matemáticas deveria cooperar com professores de outras disciplinas, evidenciando a aplicabilidade das Matemáticas.

Natureza das Matemáticas

XIII. *"As matemáticas constituem uma disciplina coordenada e não uma série de artifícios isolados. No ensino das matemáticas, a estrutura deverá ser utilizada como ferramenta fundamental".*

OCDE, 1963, pp.248-249

Relações com os físicos

XIV. Os participantes na Conferência recomendaram que a OCDE promovesse encontros que reunissem matemáticos e especialistas de outras ciências, uma vez que, o ensino das Matemáticas apresentava relações estreitas com o ensino de outras ciências.

Definições e notações

XV. Todos os termos e símbolos matemáticos que fossem utilizados nos relatórios impressos da OCDE e que não eram frequentemente utilizados nas Matemáticas escolares clássicas deveriam ser alvo de explicações completas inseridas no texto e ilustradas por exemplos.

4.2. Inovações introduzidas no ensino da Matemática, em Portugal, após 1960

Após 1960, de modo a ter uma ideia mais exacta da realidade em cada um dos países da OCDE, foram elaboradas exposições[77] sem carácter oficial, preparadas pelos participantes na Conferência de Atenas. Esses resumos tinham o objectivo de servir de guias de discussão para os participantes e neles foram expostas as inovações introduzidas ao nível do ensino das Matemáticas.

Na acta da OCDE de 1963, Pedro de Campos Tavares apresenta, do seguinte modo, a sua visão do estado da educação matemática em Portugal:

I. Nenhuma nova matéria foi introduzida nos programas oficiais, sendo porém referida uma experiência realizada durante o ano lectivo de 1963-1964, em três classes piloto (Porto, Lisboa e Coimbra) onde foram incluídas novas matérias como a Lógica Simbólica, Teoria dos Conjuntos e das Relações e a Álgebra Abstracta (conceitos de semigrupo, grupo, anel, corpo);

II. Os alunos iniciavam o Ensino Secundário entre os 10 e 11 anos, após a frequência do Ensino Elementar, onde aprendiam o cálculo com inteiros e fracções;

III. Os estudos liceais duravam sete anos, divididos em três ciclos. Nos dois primeiros ciclos, o programa de Matemáticas era igual para todos os alunos, enquanto que no último ciclo de estudos (que tinha a duração de dois anos) tal não se verificava. Assim, para os alunos que prosseguiam os estudos na secção literária não eram ministradas Matemáticas, o mesmo não acontecendo para aqueles que prosseguiam os seus estudos na secção científica;

IV. Relativamente à formação exigida aos professores de Matemáticas, estes começavam por adquirir uma licença para leccionar Matemáticas, através da frequência de estudos universitários com duração de quatro anos. Foi referido que o conteúdo dessa formação era análogo ao exigido em outros países europeus, não especificando a quais se assemelhava. Após a obtenção da licença era necessária a frequência de dois anos numa Escola Normal, período durante o qual, os professores aprendiam a ensinar as Matemáticas elementares;

V. Depois de 1959, foram organizados cursos no Liceu Pedro Nunes e no Centro de Estudos Matemáticos, para professores do Ensino Liceal, onde os conteúdos foram a Lógica Simbólica, a Teoria dos Conjuntos e das Relações, os Conjuntos Ordenados, os Métodos Axiomáticos, as Estruturas Algébricas e outros não referidos.

[77] Para eventual consulta das inovações introduzidas nos diferentes países, após 1960, consultar OCDE, 1963, pp.259-299.

5. CONFERÊNCIAS, ENCONTROS E CONGRESSOS DECORRIDOS ENTRE 1964 E 1965

Corria o ano de 1964.

A pedido dos países em vias de desenvolvimento, a UNESCO passava a encarar uma tarefa de grande responsabilidade – ajudar estes países a melhorar o ensino das Ciências. Parecia existir uma consciência genérica de que o progresso económico estaria intrinsecamente relacionado com a sua capacidade de formar um importante núcleo de homens da ciência, engenheiros e técnicos e alargar esta ideia a toda a sociedade, de modo, a criar sólidos fundamentos ao nível de uma sociedade tecnologicamente moderna. As estruturas educacionais possuíam metodologias obsoletas e incapazes de se defrontarem com o surto demográfico e o grande avanço do conhecimento científico. Assim, muitos destes países passaram a ter como prioridade, uma verdadeira modernização do ensino das Ciências.

Na procura de respostas para as inúmeras questões colocadas, a UNESCO pretendeu empreender um programa no âmbito do ensino das Ciências, que apresentava os seguintes objectivos:

I. Promover mudanças no conteúdo e metodologia no ensino das Ciências;

II. Conduzir experimentalmente projectos para o desenvolvimento de métodos e materiais pedagógicos;

III. Organizar, em cooperação com os estados membros, programas internacionais de pós-graduação, assim como, cooperar na criação de centros de estudos avançados destinados a cientistas, professores e investigadores nesses mesmos países;

IV. Estimular o interesse na Ciência e no ensino das Ciências através da consciencialização da sua máxima importância na vida quotidiana, patrocinando conferências e atribuindo prémios internacionais, como o Prémio Kalinga.

UNESCO, 1967, pp.7-8

Neste sentido, a UNESCO começou por efectuar uma publicação bienal intitulada "*The Teaching of Basic Sciences*", onde um dos volumes foi dedicado à Física, Química e Biologia e o outro volume dedicado às Matemáticas.

A publicação destinada às Matemáticas – "*New Trends in Mathematics Teaching*", teve a colaboração da "*International Commission of Mathematical Instruction of the International Mathematical Union*" e teria como público-alvo, os professores que leccionavam em universidades, Escolas Normais ou em Escolas Secundárias, assim como, estudantes de Matemáticas, especialmente, os que pretendiam ser professores.

André Lichnerowicz, presidente da "*International Commission for the Teaching of Mathematics*", referiu que o primeiro volume (publicado em 1967) consistia numa colectânea de resumos de comunicações proferidas em alguns Seminários dedicados ao ensino das Matemáticas desenvolvidos entre 1964 e 1965, artigos originais, uma lista dos colóquios realizados nesse âmbito, uma primeira lista de revistas e jornais dedicados à matéria mencionada e uma lista de centros (constituídos de forma informal em torno de um líder ou assumindo um carácter de entidade organizada e reconhecida) que se dedicavam ao estudo dos problemas no âmbito do Ensino da Matemática. A lista[78] dos centros, das revistas e jornais (por país) podem ser consultados no Anexo 15.

5.1. Contribuições de artigos apresentados em Congressos, Encontros e Seminários

Congresso Internacional sobre o Ensino das Ciências Dakar – 14 a 22 de Janeiro de 1965	
Autor	**Designação do artigo**
A. Delessert	*"Qu'attend de l'université le maître enseignant les mathématiques à l'école secondaire ?"* UNESCO, 1967, pp.21-30 Texto redigido a partir de notas de uma comunicação efectuada no Congresso "*L'enseignement des sciences et le progrès économique*" em Dakar na data mencionada.

[78] Da lista de revistas consta, sempre que possível, o primeiro ano de publicação (entre parênteses), a periodicidade, a tiragem e o número de páginas. O asterisco * indica que a revista era parcialmente consagrada ao ensino das Matemáticas. Salienta-se o facto de não existir qualquer referência a um centro ou uma revista portugueses.

Howard F. Fehr	*"Mathematics Instruction"* UNESCO, 1967, pp. 32-82 O artigo constitui um extracto de um relatório preparado para o Congresso supracitado. O autor apresentou sinteticamente as novas tendências no ensino das Matemáticas nos diferentes níveis de ensino, para o Ensino Primário e Secundário, assim como, os princípios da preparação científica, pedagógica e profissional dos professores de Matemáticas. Este artigo contempla, igualmente, sugestões efectuadas no âmbito de uma correlação entre o ensino das Matemáticas e da Física, bem como, uma extensa bibliografia (de autores de muitos países) de manuais de estudo e obras que abrangem diferentes domínios das Matemáticas destinadas a professores. Estas referências bibliográficas podem ser consultadas no Anexo 16.
T. Neville George	*"Mathematics in the training of geologists"* UNESCO, 1967, pp.85-113 Este artigo apela à necessidade de uma visão integrada dos conhecimentos matemáticos, especificamente, no caso do curso de Geologia.
René Heller	*"L´enseignement des mathématiques, de la physique et de la chimie l´usage des biologistes"* UNESCO, 1967, pp.116-144 Este texto foi preparado após estudos e discussões preliminares estabelecidos num grupo de trabalho no Congresso supracitado. O artigo contempla, por exemplo, procedimentos pedagógicos no âmbito das áreas mencionadas, bem como, exemplos de programas para Matemáticas, Química e Física – "*ciências base*" para a Biologia.

Ch. Pisot	*"Les programmes el la répartition dans le temps des enseignements de mathématiques pour les physiciens"* UNESCO, 1967, pp.147-156 Este artigo resultou de estudos efectuados por um grupo de trabalho que funcionou de 14 a 18 de Janeiro de 1965, no Congresso mencionado. Desse grupo de trabalho fizeram parte diversos matemáticos, nomeadamente, A. Delessert (Suiça), H. Fehr e M.H. Stone (U.S.A.), P. Fleury e Ch. Pisot (França), entre outros. O projecto resultante foi alvo de discussão nesse Congresso tendo suscitado intervenções de muitos oradores, as quais também foram tomadas em consideração por Pisot, o redactor deste artigo. O artigo contempla princípios genéricos que envolvem o ensino das Matemáticas para físicos e um projecto de três programas que colocam em prática os princípios evidenciados, nomeadamente, programas destinados para o Ensino Secundário e para os primeiro e segundo ciclos de estudos universitários. O artigo contém também um apêndice que apresenta o programa de Matemáticas para físicos, ministrado na Universidade de Tóquio.

Conferência promovida por CIEM sobre as repercussões da investigação matemática no ensino

Echternach

Autor	Designação do Artigo
A. Engel	*"Initiation à la théorie des probabilités"* UNESCO, 1967, pp.159-174 O artigo apresenta uma sugestão introdutória das noções e operações no âmbito das Probabilidades e Estatística, destinada aos alunos que frequentam o quinto, sexto e sétimos anos de escolaridade. O autor alertou para a necessidade de familiarizar previamente os alunos com a compreensão do pensamento estatístico, apresentou algumas críticas a exemplos usados na metodologia tradicional e chamou a atenção para o facto de o programa ser leccionado em estreita correlação com a Aritmética e a Álgebra.

Ch. Pisot	*"Introduction par la théorie des nombres des notions de groupe, anneau et corps"* UNESCO, 1967, pp.177-182 O autor usou os elementos da Teoria de Números leccionados na escola de modo a fornecer modelos não triviais de determinadas noções algébricas e desenvolveu esta ideia através de exemplos de anéis construídos a partir do conjunto Z. Cumulativamente, apresentou alguns teoremas e a partir destes, evidenciou algumas aplicações elementares.

Colóquio promovido pela Sociedade Suíça de Professores de Matemáticas e de Física

Berna

Autor	**Designação do Artigo**
W. Servais	*"La coordination de enseignements de la mathématique et de la physique au niveau secondaire"* UNESCO, 1967, pp.184-200 O autor enfatizou a importância da coordenação da Física e das Matemáticas e alertou para a necessidade de essa ligação ser feita com cautela evitando que os estudantes de Matemáticas olhassem para a sua matéria como um jogo formal de símbolos e que os estudantes de Física pudessem pensar que a sua matéria era uma mera descrição qualitativa de fenómenos. O autor apresentou igualmente algumas sugestões de possíveis esquemas de colaboração enfatizando as contribuições de cada uma das disciplinas para a outra.

Conferência sobre o programa da Metodologia de ensino das Matemáticas e os meios de sua concretização nas escolas normais Cracóvia – 29 a 31 de Outubro de 1964	
Autor	**Designação do Artigo**
A. Z. Krygowska	*"Méthodologie de l'enseignement des mathématiques sujet d'étude au niveau supérieur"* UNESCO, 1967, pp.202-218 Este artigo constitui um extracto de um documento elaborado para apresentação na Conferência supracitada. O autor apresentou uma proposta inicial de discussão relativamente ao facto de a Metodologia de Ensino ser vista como objecto de estudos superiores ou então como fazendo parte do treino profissional, alheando-se do âmbito do estudo científico. Apesar de reconhecer que a Metodologia do Ensino das Matemáticas constituía um campo que apresentava alguns pontos de contacto com diversas ciências tradicionais, numa primeira fase, o autor propôs que fosse encarada como um campo distinto da ciência, dados os problemas particulares e métodos de investigação. Numa segunda fase, o autor alertou para o erro de se restringir a Metodologia do Ensino das Matemáticas à mera prática profissional, acompanhada de uma série de princípios teóricos de ensino. O autor enfatizou ainda a necessidade de se considerar a Metodologia de Ensino das Matemáticas como um assunto que deveria fazer parte da formação de futuros professores de Matemáticas. O autor apresentou um programa de estudos em Metodologia do Ensino das Matemáticas levado a cabo na École Normale Supérieure de Cracovie. Esta proposta pode ser consultada no Anexo 17.

Contribuições de artigos originais e reproduções

Autor	Designação do Artigo
Tibor Bakos	*"Approximate calculation in the secondary school"* UNESCO, 1967, pp.223-227 O autor pretendeu dar resposta a três questões: 1. "Partindo de dados com uma certa precisão, qual o grau de precisão esperado nos resultados?" 2. "Para obter uma certo grau de precisão no resultado, que grau de precisão terá de ser assegurado nos dados iniciais?" 3. "Como utilizar as tabelas no trabalho acima?"
Andor Cser	*"The pupils´ activity in current mathematics teaching"* UNESCO, 1967, pp.230-240 O autor procurou sublinhar os numerosos esforços que têm sido levados a cabo no sentido de promover uma participação activa dos alunos. Assim, após fornecer alguns conselhos práticos como, a realização de trabalhos práticos, o autor chamou a atenção para a necessidade de efectuar a demonstração de um teorema para assegurar a assimilação perfeita por parte dos alunos. Relativamente ao trabalho realizado em casa pelos alunos, o autor defendeu que o mesmo se devia limitar à reprodução das demonstrações feitas na aula e à aplicação desses resultados em exemplos, uma vez que defendeu que o "*o saber em matemáticas é mais fruto da inteligência do que da memória*".

H. F. Fehr	*"Teaching algebra and analysis in the secondary school"* UNESCO, 1967, pp.242-246 O autor pretendeu destacar três objectivos do ensino das Matemáticas e suas consequências: 1. Inclusão das Matemáticas na educação genérica, o que exigia a modernização do conteúdo e do tratamento em aula do mesmo; 2. Evidência das aplicações matemáticas nas ciências físicas e sociais, o que exigia a construção adequada de programas e da sua concretização; 3. Preparação dos alunos com vista à criação de hábitos de trabalho e pensamento necessários em estudos superiores, o que implicava que a Álgebra e a Análise fossem leccionadas com o espírito da ciência contemporânea. Segundo o autor, Álgebra e Análise de classes superiores deviam ser a extensão e o desenvolvimento de conhecimentos preliminares, pelo que propunha um programa para os três últimos anos do Ensino Secundário e bibliografia que detalhava os princípios mencionados.
Z. Krygowska	*"Axiomatique et axiomatisation dans l'enseignement secondaire"* UNESCO, 1967, pp.248-281 O artigo procura evidenciar os problemas pedagógicos que surgem quando o método axiomático é considerado como uma ferramenta de pensamento na sala de aula, assim como, focar os três principais aspectos de treino de pensamento: axiomatização, dedução e interpretação. O autor procurou ilustrar o processo axiomático recorrendo a exemplos baseados na experiência dos estudantes e enfatizou a necessidade de incutir uma preparação precoce para a inclusão dessa metodologia. Este último ponto suscitou uma análise dos problemas que se podiam colocar ao nível da organização de cursos, na pedagogia e no grau de rigor que devia ser exigido.

G. Papy	*"La géométrie dans l'enseignement moderne de la mathématique"* UNESCO, 1967, pp. 283-301 O autor analisou o programa experimental belga (o qual fora estabelecido sob a sua inspiração), durante os primeiros cinco anos do Ensino Secundário (idades compreendidas entre os 12 e os 17 anos). O referido programa pode ser consultado no Anexo 18. Com a concordância de G. Choquet, o autor procurou provar que os espaços vectoriais, com o produto escalar constituía a principal e inovadora forma de ensinar Geometria. Deste modo, considerou uma classe do terceiro ano científico cuja base foi o ensino tradicional (alunos com 15 a 16 anos, sete períodos de 45 minutos por semana) e procurou ensinar directamente a teoria vectorial. As conclusões foram as seguintes: 1. O ensino tradicional antes dos 15 anos condicionava os estudantes numa direcção oposta ao espírito das matemáticas modernas; 2. As principais noções relacionadas com conjuntos e relações eram mais facilmente ministradas aos alunos com 12 anos do que com 15 anos; 3. Conjuntos, relações e grupos, ensinados desde os 12 ou 13 anos contribuíam para que o edifício matemático fosse construído sob uma visão unitária. O artigo partilhou igualmente a análise da nova metodologia de ensino com base nos espaços vectoriais, começando nos estudantes de 12 a 13 anos, 13 a 14 anos, 14 a 15 anos e de 15 a 16 anos. O artigo faculta também uma vasta bibliografia (Anexo 19) de obras e artigos de Papy e de Dieudonné.

Relatório intermédio do Comité nórdico para a modernização das Matemáticas escolares

1 de Fevereiro de 1965

Experiência levada a cabo em diversas escolas da Dinamarca, Finlândia, Noruega e Suécia ao longo de 1961-1964.

A experiência baseou-se na adopção experimental de manuais que contemplavam um programa moderno de Matemáticas e abrangiam o ensino do primeiro ao décimo segundo ano de escolaridade (estudantes de 7 a 19 anos). Os textos destinados ao quarto, quinto e sexto ano foram traduções de manuais preparados pelo SMSG – *School Mathematic Study Group*, dos Estados Unidos da América, enquanto que para as restantes classes foram usados textos elaborados pelo próprio Comité Nórdico (grupo de 2 ou 3 pessoas dos países nórdicos).

O Comité apresentou os manuais em experimentação e detalhou para cada um deles, o tipo de grupo de alunos a que se destinava (idade, género e nível de preparação anterior), o conteúdo matemático do manual e correcções introduzidas que se revelaram necessárias após a sua experiência, assim como, observações e opiniões quanto ao valor pedagógico dos textos por parte de professores que os utilizaram.

5.2. Congressos Internacionais, Encontros e Seminários 1964 &1965.

"Os programas e os relatórios de congressos internacionais destinados, totalmente ou em parte, aos problemas do ensino das matemáticas que foram organizados em 1964 e 1965 provam que a reforma deste ensino já foi além da fase de investigações preliminares e projectos".

UNESCO, 1967, p.353

As experimentações e as implementações realizadas, quer ao nível da sala de aula, quer ao nível da modernização de textos contidos em manuais, começaram a ser partilhadas pelos seus promotores.

Este avanço permitiu analisar e reflectir sobre problemas concretos, suscitados pela execução de projectos, outrora em papel mas, simultaneamente, levantar problemas.

Assim, foram estabelecidas as seguintes questões para solucionar, como sendo as de maior premência:

1. *"A coordenação do ensino moderno das matemáticas (em diferentes níveis) com as outras ciências";*

2. *"Os aspectos psicológicos e pedagógicos do ensino baseado nos modernos programas";*

3. *"A preparação de professores e a sua contínua preparação".*

UNESCO, 1967, p.353

A maior parte do trabalho desenvolvido durante os encontros internacionais realizados em 1964 e 1965 foi dedicado à primeira das questões, tendo sido estabelecidos resultados concretos e muito importantes, devendo-se, sobretudo, aos esforços de grupos interdisciplinares e ao desenvolvimento de programas de Matemáticas como base para o estudo da Física, Química, Biologia e Geologia.

Durante o Congresso de Dakar, foi tomada a decisão de ser preparado um livro com exemplos seleccionados de aplicações das Matemáticas em outras ciências, especialmente destinado a professores do Ensino Secundário.

Durante os anos de 1964 e 1965, foram igualmente alvo de discussão os aspectos psicológicos e pedagógicos da modernização do ensino das Matemáticas. A dificuldade base evidenciada pelos intervenientes nesses encontros foi o facto de a modernização efectiva das Matemáticas apenas ser concretizável se existisse harmonia entre a busca activa dos alunos e as construções das Matemáticas elementares de acordo com as concepções modernas.

Paralelamente, a preparação contínua dos professores continuava a ganhar cada vez mais importância no panorama internacional, sendo igualmente alvo de atenção nos encontros realizados.

Seguidamente, apresentamos uma lista dos Seminários, Encontros ou Congressos realizados durante os anos de 1964 e 1965 e um breve resumo das temáticas tratadas.

III.rd Seminar at Entebbe – Mathematics[79]

Uganda – 5 de Julho a 15 de Agosto de 1964

Este seminário realizado em Uganda, que teve 60 participantes de 12 países (Etiópia, Gana, Kénia, Libéria, Malásia, Nigéria, Serra Leoa, Tanzânia, Uganda, Reino Unido, Estados Unidos da América e Zâmbia), procurou dar continuidade ao trabalho iniciado em dois seminários precedentes organizados no *Entebbe Mathematical Centre*, sob orientação de Professor W.T. Martin.

Numa primeira fase, os intervenientes apresentaram relatórios do desenvolvimento do ensino das Matemáticas salientando a importância do trabalho levado a cabo pelo *Entebbe Mathematical Centre*. Seguidamente, os participantes constituíram quatro grupos de trabalho: o primeiro dedicado ao Ensino Primário, dirigido por Clarence Hardgrove, era constituído por 13 membros (professores do Ensino Primário, professores universitários de Matemáticas, inspectores) e ficou encarregue da revisão dos programas para os terceiro, quarto, quinto e sexto anos, de preparar os manuais para os alunos do terceiro ano, bem como, um guia para o professor. O segundo grupo de trabalho dedicado ao Ensino Secundário e dirigido por Kathleen Collard era constituído por 19 membros (professores do Ensino Secundário e Universitário) e preparou um manual para o terceiro ano do Ensino Secundário, tendo delineado um plano detalhado para os próximos dois anos. O terceiro grupo, dedicado aos textos e dirigido por Christopher Moely, era constituído por 8 membros e procurou rever os textos elaborados num seminário realizado em 1963 e elaborar novos textos para o Ensino Secundário. Por fim, o último grupo, constituído por 30 membros sob direcção dos professores A.L.Putnam e Donald Richmond ficou encarregue de elaborar textos para os professores de Matemáticas (estrutura da Aritmética e fundamentos da Geometria).

[79] O relatório detalhado deste seminário poderá ser consultado numa brochura intitulada "*A report of na African Education Programme*", publicada por Educational Services Incorporated, em 1965. (UNESCO, 1967, p.356)

18th International meeting of Mathematics teachers

(organizado pela *International Commission for the Study and the Improvement of Mathematics Teaching*)

Oberwolfach, Alemanha – 9 a 16 de Agosto de 1964

O encontro dirigido pelo Presidente da Comissão, Professor G. Papy, teve a participação de 45 membros de 9 países (8 europeus e 1 africano). O tema genérico foi a contribuição da Psicologia para o ensino das Matemáticas modernas e debruçou-se especificamente sobre os seguintes aspectos:

1. A importância da contribuição da Psicologia para o ensino das Matemáticas modernas;
2. Psicologia do pensamento;
3. Estruturas perceptivas e operacionais;
4. Psicologia Interna das Matemáticas de hoje;
5. Problemas psicológicos relacionados com o estudo das estruturas matemáticas;
6. Temas da investigação psicológica importantes para o ensino.

UNESCO, 1967, p.361

Estes problemas foram tratados durante sessões plenárias, tendo sido enfatizado o ponto de vista fenomológico e a Psicologia Operacional desenvolvida na escola de J. Piaget. Este último ponto foi sublinhado pelos matemáticos que se encontravam particularmente activos na modernização das matemáticas – *The Belgian Centre of Mathematics Teaching.*

Colloquium on the teaching of physics

(organizado pelo *International Centre of Pedagogical Studies of Sèvres*)

Sèvres, França – 28 de Setembro a 3 de Outubro de 1964

Este colóquio teve a participação de 20 representantes de 8 países europeus. Foi enfatizada a questão da coordenação entre o ensino das Matemáticas e o da Física. Os participantes alertaram para os perigos que rodeavam a introdução de noções matemáticas pelos físicos antes de serem desenvolvidas nas Matemáticas elementares e, consideraram também, que tópicos como Cálculo Vectorial, Aproximações, Equações Diferenciais, Probabilidades deviam ser ministrados mais cedo de modo a poderem ser utilizados posteriormente na Física.

Mathematics at the coming to University
Real situation and desirable situation

(organizada pelo *European Center of Education* com a participação da *International Commission for the Study and the Improvement of Mathematics Teaching* (CIEM))

Frascati, Itália – 8 a 10 de Outubro de 1964

Esta conferência contou com 27 participantes de 5 países (europeus e argentinos). Durante 12 sessões foi analisada a situação da transição entre o ensino ministrado nas escolas secundárias e o ministrado nas Universidades e Colégios de Engenharia. Steiner, Papy, Kirsch, Revuz, De Finetti realçaram os problemas existentes das Matemáticas na escola secundária e Behnke, Manara, Pickert, Bass e Kjellberg debruçaram-se sobre o ensino das Matemáticas em certas universidades durante os primeiros dois anos.

> *"Esta comparação revelou a necessidade de uma rápida modernização do ensino das matemáticas no nível escolar, assim como, os resultados já obtidos neste campo por alguns países nos quais a reforma está avançada".*

UNESCO, 1967, p.366

Seminar on Mathematics teaching in South-East Asia[80]

(organizado pela *Association of the South-East Asian Institutes of higher education)*

Saigão e Dalat, – 9 a 13 de Novembro de 1964

O seminário contou com 20 representantes das Universidades da Malásia, Singapura, Tailândia e do Vietname. Os intervenientes apresentaram a situação vigente nos seus países, ao nível do ensino das Matemáticas, focando os programas, métodos, preparação dos professores, engenheiros, economistas e investigadores.

[80] O relatório detalhado do seminário foi publicado sob o título "*ASAIHL – Seminar on Mathematical Education in South-East Ásia*" pela *Association of the South-East Asian Institutions of Higher Learning.* (UNESCO, 1967, p.374)

Congress on Science Teaching and Economic Progress

(organizado pela *Inter-union Commission for the teaching of science (CIES) of the International Council of Scientific Unions (ICSU)*)

Dakar – Janeiro de 1965

O congresso contou com a presença de 84 membros provenientes de 9 países africanos, 4 países americanos, 5 países asiáticos e 9 países europeus, especialistas em variadas áreas como a Astronomia, Química, Economia, Mecânica e Matemática, entre outras. Contudo, o domínio mais representativo coube às Matemáticas sendo 25 os presentes. UNESCO foi representada por Mr. P. Bandyopadhyay e Mrs. Anne Hunwald, enquanto que CIES teve como representantes Professor A. Lichnerowicz (Presidente da Comissão) e A. Delessert (Secretário).

Durante os quatro dias precedentes ao Congresso, seis grupos de trabalho preparam documentos baseados nas seguintes temáticas:

1. O ensino das Matemáticas, Física e Química para biólogos. (Professor R. Heller);
2. Matemáticas na educação dos geólogos. (Professor T.N. George);
3. O ensino das Matemáticas para físicos. (Professor Ch. Pisot);
4. Educação matemática para as carências científicas, técnicas e industriais da sociedade. (Professor H. W. Fehr);
5. A preparação de técnicos. (Professor M. Y. Bernard);
6. Conservação e exploração dos recursos naturais; ensino e organização de institutos especializados e problemas particulares dos países africanos. (Professor J. G. Baer);

UNESCO, 1967, pp.382-383

Cinco destes grupos de trabalho foram financiados pela UNESCO, o que evidenciava o interesse manifestado nestas questões do ensino que se apresentavam cada vez mais relacionadas com o progresso económico. O trabalho desenvolvido pelo grupo dirigido por Fehr elaborou um programa de Matemáticas para as escolas primárias e secundárias, bem como, algumas modificações com vista à designada *'educação de massas'.*

"*Diversos membros expressaram a esperança de que a reforma no ensino das matemáticas não deva ser tão brutal, devendo permitir tanto quanto possível uma expressão dos problemas da realidade conduzindo facilmente a cálculos numéricos e algébricos*".

UNESCO, 1967, p.383

Para os meses que se seguiam, o congresso estabeleceu alguns objectivos a alcançar:

1. Preparação de uma colecção de exemplos seleccionados de aplicações das Matemáticas em diversas ciências;
2. Estudo detalhado das condições da preparação científica dos professores do Ensino Secundário e Ensino Técnico;
3. Estudo pormenorizado do tempo necessário para o ensino das diversas disciplinas.

9th Reunion of the Council of Europe Committee on Higher Education and Research

Estrasburgo – 9 a 12 de Março de 1965

O encontro procurou contribuir para o esclarecimento de dois pontos cruciais da reforma do ensino das Matemáticas. O primeiro aspecto relacionou-se com a necessidade crescente de uma coordenação do ensino das Matemáticas com o ensino da Química, dado que para além da necessidade das técnicas elementares, um maior número de químicos suscitava tópicos matemáticos cada vez mais específicos. O outro aspecto prendeu-se com a necessidade de avaliar, qual o papel que as universidades deviam desempenhar no processo de preparação dos professores, tendo sido diversas as questões suscitadas e alvo de análise por parte deste Comité.

Colloquium of Echternach

Echternach, Luxemburgo – 30 de Maio a 4 de Junho de 1965

O colóquio, fecundo em intervenções, contou com a participação de 92 membros provenientes de 8 países europeus, tendo como tema geral " *As repercussões da investigação matemática no ensino*".

Eis algumas das 16 comunicações proferidas:

H. Behnke – "*The influence of research on teaching*"; C. Bréard – "*A global conception of mathematics teaching*"; H. G. Steiner – "*Different aspects of axiomatic methods in teaching*"; A. Kirsch – "*On the axiomatic treatment of natural numbers in teaching*"; W. Servais – "*Axiomatization of elementary geometry (12-15 anos)*"; A. Revuz – "*The accent must be put as early as possible on the notion of morphism*"; Ch. Pisot – "*Introduction to the notions of group, ring and field by means of number theory*"; G. Papy – "*The `vectoriel euclidien´ plan in teaching (15 anos)*"; J. Dieudonné – "*The role of linear algebra in modern mathematics*"; G. Pickert – "*Bilinear forms and Conic Sections*"; A. Delessert – "*Can there exist essentially different presentations of Euclidean Geometry?*"; G. Choquet – "*The analysis in the teaching of the second degree"; A. Engel – "Mathematical research and Didactics in Probability theory*".

UNESCO, 1967, pp.400-401

International Colloquium on Modern Trends in the Teaching of Mathematics in Secondary Schools

(organizado pela *International Commission for the Teaching of Mathematics*)

Utrecht, Holanda – 19 a 23 de Dezembro de 1965

Este colóquio, organizado pelo Professor H. Freüdenthal, teve a participação de 28 membros provenientes de 9 países europeus, dos Estados Unidos da América e do Canadá. Foram apresentadas 16 comunicações cujas temáticas foram:

1. Princípios gerais da reforma no ensino das Matemáticas (Comunicação de A. Wittemberg: "*Priorities and responsibilities in the reform of mathematics teaching*");
2. Relatórios do trabalho realizado em determinados centros relativamente a programas desenvolvidos, a reciclagem dos professores e outras actividades (Comunicações de H. Freüdenthal, H. Troelstra, L.R.J. Westewrmann, St. Straszewicz, M. Beberman, M. Thwaites, W.O. Storer, Th. J. Korthagen e J. Van Lint);
3. Relatórios de experimentações já concluídas no âmbito do ensino moderno e projectos colocados em prática de certos fragmentos de matemáticas elementares de acordo com os novos programas (Comunicações efectuadas por W. Servais, e J. Dzewas – "*Mathematical analysis*"; W.G. Steiner – "*Algebraic structures*"; A. Z. Krygowska – "*Logic*"; L. Félix e E. Castelnuovo - "*Mathematics in the first stage of secondary school*" e A. Delessert – "*The mathematical laboratory*").

UNESCO, 1967, p.377

As intervenções efectuadas e as discussões posteriores tornaram evidente que a reforma não só se encontrava em diferentes fases, mas como havia sido organizada e concebida de diferentes formas, levantando algumas questões relacionadas com a construção axiomática do curso e o lugar da Geometria nessa construção. Segundo UNESCO (1967), o ponto crucial do colóquio terá sido o debate de ideias suscitado pela comunicação de Wittemberg, que acentuou a necessidade de uma concepção pedagógica precisa da reforma e sublinhou os perigos relacionados com a modernização formal que não apresentava uma base adequada relativamente aos objectivos a que se propunha.

6. DESENVOLVIMENTOS E CRÍTICAS

O espírito de Royaumont parecia estar a intensificar-se no Ensino Primário.

UNESCO e OCDE suportavam algumas das iniciativas preconizadas para o Ensino Primário e Z. P. Dienes[81] apresentava um relatório[82] das Matemáticas no Ensino Primário conduzindo a mais uma publicação da UNESCO. Este relatório resultou de três conferências organizadas pelo *International Study Group for Mathematics*, suportadas pela UNESCO e realizadas nos anos de 1964, 1965 e 1966, especificamente, em Stanford (Dezembro de 1964), Paris (Abril de 1965) e Hamburgo (Janeiro de 1966).

Já em 1960 tiveram início algumas experiências austríacas divulgadas por um grupo de professores primários. Procuraram desenvolver actividades e exercícios sugeridos pela Teoria dos Conjuntos, na linha de pensamento de Dienes e dos grupos de trabalho alemães. Pouco depois surgiram relatos de experiências nos Estados Unidos da América, Inglaterra e França. Em 1964, na Inglaterra, teve início, o Projecto *Nuffield* destinado aos alunos dos 5 aos 13 anos. Segundo Matos (2004), Edith Biggs, uma das maiores impulsionadoras da renovação do Ensino Primário britânico durante os anos 50, foi das maiores entusiastas deste projecto. As actividades propostas relacionadas com as ideias de Piaget e Dienes, baseavam-se mais em experiências em sala de aula do que nos conceitos teóricos.

O referido projecto assumia como objectivo:

> *"produzir um curso contemporâneo (...) desenhado para ajudar crianças a ligar muitos aspectos do mundo à volta delas, levá-las gradualmente ao processo do pensamento abstracto e desenvolver nelas um pensamento crítico, lógico, mas também criativo".*
>
> Van der Blij, Hilding e Weinzweig, 1980, p.42[83]

Como motivação adicional à reforma que parecia chegar ao Ensino Primário, o trabalho de psicólogos como Jean Piaget constituía uma influência crucial no trabalho reformista que se pretendia desenvolver. Através da documentação elaborada e após a conferência realizada em Hamburgo, Moon (1985) alertou para o papel crucial que os aspectos psicológicos estavam a tomar no ensino das Matemáticas.

---

[81] Zoltan P. Dienes, matemático inglês que se interessou pelo ensino das Matemáticas, publicou em 1960 o livro "*Building Up Mathematics*", que apresenta diversas possibilidades educativas de manipuláveis. Em meados dos anos 50, Dienes criou alguns materiais como os blocos multifásicos e os blocos lógicos. Estes últimos foram inspirados num trabalho de W. Hull e aperfeiçoados por Dienes numa experiência realizada na Austrália. (Matos, 2004)

[82] Mathematics in Primary Education. *Learning of mathematics by young children.* (UNESCO, 1966)

[83] Cit. em Matos, 2004

O enorme interesse que a aplicação das Matemáticas modernas no currículo estava a tomar, conduziu a uma maior racionalização dos apoios dados pelas maiores organizações internacionais (OCDE e UNESCO). Assim, em 1968, segundo Moon (1985), a UNESCO passou a ser a principal força de suporte internacional para os educadores matemáticos enquanto que a OCDE estabeleceu uma área de actuação mais institucional através do *Centre for Educational Research and Innovation* (CERI). Diversos colóquios foram dinamizados e o número de participações cada vez mais elevado. Segundo Matos (2004), em Agosto de 1969 realizou-se em Lyon um congresso internacional da *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI ou CIEM – versão francesa), que contou com a presença de mais de 600 participantes de 42 países e teve cerca de 20 comunicações solicitadas a Begle, Castelnuovo, Dienes, Engel, Krygowska, Revuz, Servais, Steiner, entre outros.

> *"Em 1969 as matemáticas primárias são aceites como a maior área de interesse".*
>
> Moon, 1985, p.56

No fim da década de 60, muitos dos projectos destinados ao Ensino Primário apresentavam os primeiros desenvolvimentos enquanto que os promotores da reforma do Ensino Secundário se encontravam a discutir particularidades da sua aplicação ou a assistirem a uma vertiginosa alteração curricular em países com estruturas educativas tão distintas como a Inglaterra, a França, os Estados Unidos da América ou a Nigéria.

Segundo Matos (2004), apesar das linhas orientadoras dos programas estabelecidos na Jugoslávia, detectaram-se diferentes concretizações curriculares, desde a rigidez estruturalista da reforma francesa, que reflectiu o que se designava de "*abordagem bourbakista*", até a alguns currículos ingleses e americanos que integravam amplamente materiais manipuláveis no ensino.

Desde cedo que a nível internacional se começou a questionar a validade da reforma. Em 1965, num colóquio em Utrecht – Holanda, Wittemberg sublinhou os perigos ligados à modernização formal proposta e no ano de 1969, Begle alimentou mais essa atenção, num evento em Lyon, onde proferiu a seguinte afirmação:

> *"Eu estou convencido que muitos dos guias que seguimos na tentativa de melhorar o ensino das matemáticas são de duvidoso valor e as respostas que temos vindo a dar às questões fundamentais sobre ensino das matemáticas não podem ser de confiança".*
>
> Begle[84]

Mais sinais de algum descontentamento, segundo Moon (1985), foram dados por Hans Freüdenthal, que, apesar de se encontrar vigorosamente activo na reforma a implementar na

[84] Cit. em Moon, 1985, p.58

Holanda, revelou sérias preocupações com a introdução das novas Matemáticas no Ensino Primário, bem como, o título de um colóquio promovido pela ICMI, em Utrecht, em 1967, intitulado "*Como ensinar Matemáticas para que sejam úteis*".

Para Ponte (2003), o grande objectivo ambicionado pelo Movimento da Matemática Moderna – proporcionar uma melhoria das aprendizagens no Ensino Secundário para possibilitar uma aproximação dos requisitos que se consideravam necessários no Ensino Superior, não foi atingido, apesar de esse plano ter permitido uma renovação dos temas, uma abordagem mais actual dos conceitos e uma interligação das ideias matemáticas.

Segundo Matos (2004), em 1972, num segundo congresso promovido pela ICMI, em Exeter – Inglaterra, com 1700 participantes, René Thom colocou em causa determinadas concretizações da reforma, realçando a importância da heurística e das aplicações, bem como, as questões psicológicas, sociológicas e linguísticas no ensino das Matemáticas. Estes aspectos passaram a ser alvo de particular interesse, motivando a criação de um comité internacional dedicado especificamente ao estudo da investigação na aprendizagem das Matemáticas.

René Thom sublinhou ainda que:

> *"(...) a comunidade matemática nestes últimos anos permitiu-se ser desviada por declarações e falsas promessas. Tem havido assunto sobre uma 'revolução nas matemáticas' (...). É altura de colocar um ponto final a essas expressões que tocam a decepção (e) (...) será bom relembrar os nossos colegas que existe uma lei da nossa sociedade que as coisas importantes nunca são aquelas sobre as quais se falam (...)".*
>
> Thom[85]

Foi então que no início dos anos setenta, um intenso movimento explodia.

> *"No início dos anos setenta explodia um forte movimento de revolta contra a Matemática Moderna, primeiro nos Estados Unidos, depois em França e noutros países. O principal porta-estandarte deste movimento era um matemático prestigiado, Morris Kline, que escreveu um livro intitulado Why Johnny can't add: The failure of the new Math."*
>
> Ponte et. al., 1997, p.52

Este movimento ficou conhecido por *Back to Basics* e reclamava o regresso à ênfase nas competências básicas, bem como, segundo Ponte (1997), a necessidade de estabelecer níveis de competência mínima em exames para transição de ano.

[85] Cit. em Moon, 1985, p.60

Morris Kline, no seu livro *Why Johnny can't add: The failure of the new Math* teceu algumas críticas ao plano da Matemática Moderna.

> *"A terminologia, especialmente a terminologia pretensiosa, não é um substituto para a substância. Com vista à ênfase da terminologia, os reformadores evidentemente crêem que, dando nomes a coisas, automaticamente conferem poderes sobre elas. Muitos críticos consideraram que os textos de Matemática Moderna não são mais do que dicionários ou estudos de linguística. Pouco se duvida que a novidade atribuída à Nova Matemática resulte em grande parte da introdução de uma nova terminologia, que serve muito menos que a antiga."*
>
> Kline, 1976, p.92

> *"Admite-se naturalmente que certo simbolismo seja útil e até necessário. (...) O simbolismo pode servir três propósitos: pode comunicar ideias, pode ocultá-las e pode ocultar a ausência delas. Quase sempre os textos de matemática moderna empregam o simbolismo para ocultar a pobreza das ideias."*
>
> Kline, 1976, pp.93-94

Kline (1976) alegou, que a nova Matemática se apresentava como auto-suficiente e auto-criadora, o que era verdadeiramente refutado pela evidência histórica. Declarou ainda, que ao ser construída uma Matemática através de questões matemáticas, profundamente artificiais, esta isolava-se de todos os outros corpos do conhecimento.

> *"O conteúdo e o espírito da Matemática Moderna podem convir ao matemático erudito mas ignorou-se a relação com o Mundo Real".*
>
> Kline, 1976, p.102

No que respeitava à relevância dada à Teoria dos Conjuntos, Kline, referiu que, apesar da sofisticada abordagem conseguida, não garantia qualquer utilidade à compreensão e aprendizagem em Matemática Elementar, afirmando mesmo que apenas permitia definir conceitos de forma artificial. O autor vai mesmo mais longe, afirmando que:

> *"A Teoria dos Conjuntos é para a Matemática Elementar um formalismo oco que dificulta as ideias que são mais facilmente compreendidas intuitivamente".*
>
> Kline, 1976, p.120

De acordo com Kline, o plano da Matemática Moderna proporcionava uma visão abstracta e rigorosa da Matemática que ocultava a sua verdadeira essência, assumindo portando um carácter dogmático.

"Acentuam-se versões sofisticadas e finais de ideias simples, ao mesmo tempo que se trata superficialmente das mais profundas".

Kline, 1976, p.28

Kline (1976) referiu que, embora os planos da Matemática Moderna tenham sido preparados por matemáticos altamente competentes, as suas contribuições acabaram por ficar muito dissolvidas. O autor salientou mesmo que:

"A verdadeira reforma está diametralmente oposta ao caminho seguido pela Matemática Moderna e encontra-se, por assim dizer, no outro "lado" da Matemática Tradicional".

Kline, 1976, p.29

Assim, o novo currículo da Matemática não parecia remediar as falhas do currículo tradicional, acrescentando novos defeitos. Segundo Matos (2004), perante tantas críticas começou-se a questionar a validade da reforma, sendo referido o segundo congresso da ICMI, em 1972, como o marco do fim da Matemática Moderna.

Dez anos passados da Conferência de Atenas, os revolucionários encontros de outrora tornaram-se mais ténues. Os debates foram cuidadosamente organizados e sinal dessa alteração foi a afirmação contida numa publicação da UNESCO em 1979 e citada por Moon:

"O primeiro passo a ser dado pela ICMI foi a identificação do tema dos treze autores. O segundo foi o estabelecimento, para cada grupo de especialistas num tema (10 a 15 membros) amplamente representativos dos seus países ou regiões e dos vários aspectos do tema. Os membros deste grupo têm diferentes e cruciais funções: primeira, providenciar aos autores informação de outros contextos nacionais e profissionais; segunda, fornecer críticas construtivas em diversas fases do trabalho; terceira, os membros do grupo juntarem-se ao grupo que forma o Painel para discutir o relatório do seu tema".

UNESCO, 1979[86]

Representantes da educação superior foram progressivamente dominando o debate destas questões, constituindo a percentagem mais representativa nos congressos realizados (acima dos cinquenta por cento dos participantes). Moon referiu que, comparativamente, apenas em Royaumont, tal não ocorreu, onde mais de um terço dos participantes eram provenientes de escolas. Na Conferência de Atenas esse número diminuiu, sendo que em 1980, na Conferência de Osnabruck não se registou qualquer participação de professores do ensino não superior.

[86] Cit. em Moon, 1985, p.62

7. O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA EM PORTUGAL

7.1. O Contexto Educacional nos anos 40

Algumas das reformas que se concretizaram antes de 1930, não serão aqui alvo de atenção, dado o tratamento específico que as mesmas requerem e que não constituiu objectivo deste estudo. Contudo, considerou-se fundamental contextualizar o antes e pós *Movimento da Matemática Moderna* no nosso país, efectuando uma breve referência a algumas medidas educacionais.

A reforma[87] do Ensino Liceal de Carneiro Pacheco data de 14 de Outubro de 1936. Profundo defensor dos ideais de Salazar, Carneiro Pacheco pautou a sua actuação em conformidade com princípios nacionalistas.

De acordo com Carvalho (1985), o Ensino Liceal e o Ensino Primário foram orientados na perspectiva de uma missão educativa da Família e do Estado, no sentido de proporcionarem um desenvolvimento harmónico da personalidade moral, intelectual e física dos portugueses, atenuando de forma intencional uma das finalidades tradicionais, que era a da preparação para o Ensino Superior.

> *"Com a criação da Mocidade Portuguesa, que foi a sua obra de maiores dimensões, obrigou toda a juventude do pais à disciplina de uma farda e ao compasso de um hino, na imitação embevecida do fascismo italiano e do nazismo alemão. Tudo quanto executou teve sempre como objectivo a moldagem das crianças e dos adolescentes ao modelo nacionalista que defendia. (...) O Ensino Universitário não lhe interessou, como é óbvio, e, em pleno século vinte e numa hora alta de ressurgimento nacional, não deu a mínima atenção ao Ensino Técnico".*
>
> Carvalho, 1985, p.778

Esta clara diminuição de propósitos conduziu a uma simplificação do esquema do currículo escolar no Ensino Liceal, nomeadamente, na anulação da ramificação, entre Letras e Ciências, na recta final do Curso, considerando-a pedagogicamente irreal.

Carvalho (1985) referiu que o objectivo era a instituição de um curso igual para todos, distribuído por três ciclos:

[87] A reforma foi regulada pelo Decreto-Lei n.º 27 084, DG n.º 241 e antecedeu a reforma primária. Nessa mesma data, foram aprovados os programas para as disciplinas do Ensino Liceal através do Decreto n.º 27 085. (Carvalho, 1985, p.774)

Ciclos	Duração	Objectivos
1.º Ciclo	Constituído pelos primeiros 3 anos	Essencialmente prático e descritivo
2.º Ciclo	Constituído pelos 3 anos seguintes	Essencialmente teórico e experimental
3.º Ciclo	Constituído por 1 ano	Sistematização mental e a síntese de todos os conhecimentos adquiridos

Tabela 1: Estrutura do Ensino Liceal em 1936[88]

Carvalho (1985) referiu também que uma das novidades desta reforma foi a inclusão de um regime por disciplinas, que fora justificado pelo facto de o regime de classe beneficiar os alunos, uma vez que cobria deficiências em algumas disciplinas, valorizando-as mais do que o merecido.

No preâmbulo do Decreto-Lei n.º 27 084, podemos ler:

> *"(...) as reformas dos últimos cinquenta anos (...) adoptaram rígidas e falsas consequências da articulação em classes. Passou-se a julgar o esforço do aluno com tam decisiva influência das notas nas diferentes disciplinas entre si que, à sombra das outras, se lhe dá passagem numa em que oficialmente se verificou falta de aproveitamento; e, se não obteve em duas, chega-se a obrigá-lo a nova frequência de seis disciplinas em que o aproveitamento foi verificado e pode ter sido o mais alto! A injustiça da segunda hipótese é tam clamorosa que a brandura dos costumes a terá reduzido quási sempre à primeira, recebendo o aluno em duas disciplinas um aproveitamento que não alcançara. (...) É em face deste quadro que o presente diploma, rompendo contra todos os preconceitos, pretende construir sobre as realidades uma nova experiência pedagógica. (...) A frequência é logicamente orientada no sentido de não ser permitir a passagem a novo ciclo sem a conclusão do precedente e no de ser iniciado o estudo de cada ciclo pelo do conjunto das disciplinas do seu primeiro ano ou semestre. Restaura-se a verdade do aproveitamento do aluno: por isso se determina que o julgamento do resultado do seu esforço em cada disciplina se faça separadamente e se lhe permite acumular com disciplinas do ano imediato aquelas em que não alcançou."*
>
> Decreto-Lei n.º 27 084, de 14 de Outubro de 1936

Durante seis anos e meio de governação (os primeiros quatro anos e meio por Carneiro Pacheco e os restantes por Mário de Figueiredo e Caeiro de Mata), os princípios directores de actuação foram os já mencionados, não se tendo registado grandes inovações pedagógicas.[89] Contudo, serão aqui realçadas algumas iniciativas de relevo ao nível do ensino da Matemática.

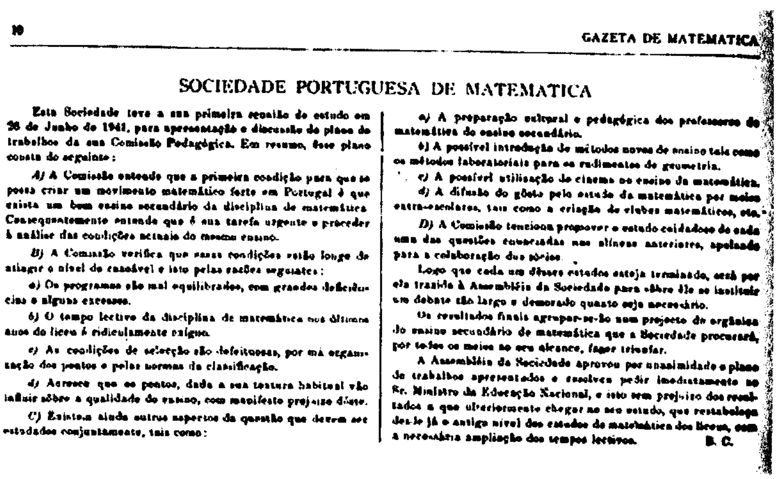
[88] Fonte: Carvalho, 1985, p.774

[89] Mário de Figueiredo e Caeiro de Mata eram professores catedráticos da Faculdade Direito de Coimbra e Faculdade Direito de Lisboa, respectivamente. Durante o período de vigência, foram registadas algumas alterações ao que já havia sido legislado por Carneiro Pacheco, especificamente na distinção entre Letras e Ciências e algumas alterações em relação à docência universitária. Por Decreto-Lei n.º 31 658, de 21 de Novembro de 1941, foi proporcionado às Universidades, a contratação de personalidades nacionais e estrangeiras para a regência de algumas cadeiras. (Carvalho, 1985, p.776 e p.778)

Nos anos quarenta existiu em Portugal um núcleo de matemáticos portugueses reveladores de enérgica actividade científica e pedagógica, que contribuíram para um ambiente científico que findasse o isolamento dos cientistas portugueses.

Reis (2003), referiu, que esta actividade se traduziu num aparecimento gradual de iniciativas como a *Portugaliae Mathematica* (1937), do Seminário Matemático de Lisboa (1938), do Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia (1938), da *Gazeta da Matemática* (1939), do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa e do Porto (1940 e 1942, respectivamente) e da Sociedade Portuguesa de Matemática[90] (1940). A maior parte destas iniciativas foram dinamizadas por António Aniceto Monteiro juntamente com matemáticos como Hugo Ribeiro, Zaluar Nunes, Ruy Luís Gomes, Mira Fernandes, José da Silva Paulo, Bento de Jesus Caraça e José Sebastião e Silva, entre outros.

> *"Em 1941 é aprovado o plano de trabalhos da Comissão Pedagógica da SPM, a qual, propunha-se promover o estudo cuidadoso de diversas questões do ensino de matemática, como os programas, o tempo lectivo, os pontos de exame, a preparação cultural e pedagógica dos professores, a possível introdução de métodos novos de ensino, tais como, os métodos laboratoriais para os rudimentos de Geometria, a possível utilização do cinema, a criação de clubes de matemática".*
>
> Caraça, 1941[91]



10 GAZETA DE MATEMATICA

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMATICA

Esta Sociedade teve a sua primeira reunião de estudo em 26 de Junho de 1941, para apresentação e discussão do plano de trabalhos da sua Comissão Pedagógica. Em resumo, êsse plano consta do seguinte:

A) A Comissão entende que a primeira condição para que se possa criar um movimento matemático forte em Portugal é que exista um bom ensino secundário da disciplina de matemática. Consequentemente entende que é sua tarefa urgente o proceder à análise das condições actuais do mesmo ensino.

B) A Comissão verifica que essas condições estão longe de atingir o nível do razoável e isto pelas razões seguintes:

a) Os programas são mal equilibrados, com grandes deficiências e alguns excessos.

b) O tempo lectivo da disciplina de matemática nos últimos anos do liceu é ridiculamente exíguo.

c) As condições de selecção são defeituosas, por má organização dos pontos e pelas normas de classificação.

d) Acresce que os pontos, dada a sua textura habitual vão influir sôbre a qualidade do ensino, com manifesto prejuízo dêste.

C) Existem ainda outros aspectos da questão que devem ser estudados conjuntamente, tais como:

a) A preparação cultural e pedagógica dos professores de matemática do ensino secundário.

b) A possível introdução de métodos novos de ensino tais como os métodos laboratoriais para os rudimentos de geometria.

c) A possível utilização do cinema no ensino da matemática.

d) A difusão do gôsto pelo estudo da matemática por meios extra-escolares, tais como a criação de clubes matemáticos, etc.

D) A Comissão tenciona propor o estudo cuidadoso de cada uma das questões enunciadas nas alíneas anteriores, apelando para a colaboração dos sócios.

Logo que cada um dêsses estudos esteja terminado, será por ela trazido à Assembléia da Sociedade para sôbre êle se instituir um debate tão largo e demorado quanto seja necessário.

Os resultados finais agrupar-se-ão num projecto de orgânica do ensino secundário de matemática que a Sociedade procurará, por todos os meios ao seu alcance, fazer triunfar.

A Assembléia da Sociedade aprovou por unanimidade o plano de trabalhos apresentados e resolveu pedir imediatamente ao Sr. Ministro da Educação Nacional, e isto sem prejuízo dos resultados a que ulteriormente chegar no seu estudo, que restabeleça desde já o antigo nível dos estudos de matemática dos liceus, com a necessária ampliação dos tempos lectivos. B. C.

Figura 13: Plano de Trabalhos da Comissão Pedagógica da SPM, 1941

---

[90] A Sociedade Portuguesa de Matemática fundada a 12 de Dezembro de 1940 nunca foi reconhecida pelo regime político de Oliveira Salazar e Marcelo Caetano, tendo sido legalmente constituída apenas em 10 de Outubro de 1977, sob direcção de Santos Guerreiro. (Reis, 2003). Segundo informações veiculadas na Gazeta de Matemática n.º 5, p.12 e do Boletim da SPM, série B, volume 1, n.º 2, pp.5-6 (de 1941 e 1947 respectivamente) foram eleitos para a Assembleia-Geral: Presidente – Aureliano de Mira Fernandes, Secretário – António Augusto Ferreira de Macedo; Para a Direcção: Presidente: Pedro José da Cunha, Vice-Presidente – Victor Hugo Duarte de Lemos, Secretário-Geral – António Aniceto Ribeiro Monteiro, Tesoureiro – Manuel Augusto Zaluar Nunes, 1.º Secretário – Maria Pilar Ribeiro e 2.º Secretário – Augusto de Macedo Sá da Costa; Para Delegados à Associação Portuguesa para o avanço das Ciências: Bento de Jesus Caraça e Francisco de Paula Leite Pinto. (Morgado, 1995, p.2)

[91] Cit. em Matos, 2004

A Comissão Pedagógica da Sociedade Portuguesa de Matemática tinha como objectivo essencial:

> *"Cultivar e promover o estudo das Ciências Matemáticas, Puras e Aplicadas, realizando, para isso, reuniões de estudo, conferências, cursos livres, publicando um Boletim e outros estudos matemáticos, promovendo a participação em Colóquios e Congressos, colaborando em publicações, quer nacionais, quer estrangeiras, etc."*
>
> Morgado, 1995, p.3

De acordo com uma nota publicada por Bento de Jesus Caraça na *Gazeta da Matemática* n.º 8, p.10 de 1941, na primeira reunião de estudo realizada a 26 de Junho de 1941, a Assembleia aprovou, por unanimidade, o plano de estudos proposto pela Comissão Pedagógica. Deste modo, Morgado (1995) referiu que era crucial a promoção de um bom Ensino Secundário da disciplina de Matemática, tornando-se urgente analisar as condições em que o ensino se processava.

Em 1941, a Comissão Pedagógica alertava para a necessidade de um estudo profundo da situação do ensino, especificando alguns pontos:

a. *"Os programas são mal equilibrados, com grandes deficiências e alguns excessos";*
b. *"O tempo lectivo da disciplina de Matemática é ridiculamente exíguo;*
c. *"As condições de selecção são defeituosas, por má organização dos pontos e pelas normas de classificação";*
d. *"Acresce que os pontos, dada a sua textura habitual, vão influir sobre a qualidade do ensino, com manifesto prejuízo deste".*

Morgado, 1995, pp.3-4

Outros aspectos da questão foram simultaneamente realçados, nomeadamente:

a. *"A preparação cultural e pedagógica dos professores de Matemática";*
b. *"A possível introdução de métodos novos de ensino, tais como, os métodos laboratoriais para os rudimentos da geometria";*
c. *"A possível introdução do cinema no ensino da Matemática";*
d. *"A difusão do gosto pelo estudo da Matemática por meios extra-escolares, tais como, a criação de clubes de Matemática, etc.".*

Morgado, 1995, pp.3-4

A realização de seminários, o aparecimento dos Centros de Estudos Matemáticos e a criação de publicações[92] possibilitaram um contacto regular entre os matemáticos portugueses de diferentes Universidades, assim como, criar mecanismos de divulgação das investigações realizadas. Segundo Morgado (1985)[93], em 1943, António Aniceto Monteiro e Ruy Luís Gomes fundaram a Junta de Investigação Matemática, que promoveu a realização de Colóquios sobre a Álgebra Moderna, Teoria das Estruturas, Topologia Geral, Teoria Geral da Medida e deu origem aos primeiros cadernos de Análise Geral e aos primeiros debates em Portugal sobre uma necessidade de renovação.

Estas instituições e estas dinâmicas ao nível de estudos de divulgação ajudaram a romper com o isolamento secular verificado na cultura portuguesa. Assim, estas instituições prestaram um precioso serviço nacional em dois planos:

> *"No plano científico na medida em que rompendo o isolamento ajudaram a criar condições indispensáveis à melhoria da criação matemática portuguesa; no plano humano, na medida em que, nascendo numa época em que matemáticos de tantos países foram perseguidos, ajudaram a criar, em todos nós, um sentimento de solidariedade com os matemáticos perseguidos de todo o Mundo".*
>
> Morgado, 1995, p.9

Vejamos algumas das iniciativas desencadeadas nos anos 40.

[92] Relativamente à investigação, salienta-se o papel da *Portugaliae Mathematica* inicialmente editada por António Aniceto Monteiro e coadjuvado por Hugo Ribeiro, Silva Paulo, Zaluar Nunes e Ruy Luís Gomes (a partir do volume 4), a qual contribuiu para a divulgação de artigos originais e da investigação portuguesa em geral e na comunidade internacional. A *Gazeta da Matemática* (criada por António Aniceto Monteiro, Bento de Jesus Caraça, Silva Paulo, Hugo Ribeiro e Zaluar Nunes) assumiu uma orientação sobretudo destinada aos professores e alunos, facultando o acesso a trabalhos de divulgação matemática, de pedagogia e de História da Matemática, trechos antológicos escritos por grandes cientistas, informações bibliográficas, informações sobre cursos, exames, conferências, etc.
[93] Cit. em Matos, 2004

8 de Abril de 1940

- Realização de duas conferências dinamizadas por Hugo Ribeiro e António Aniceto Monteiro. A primeira relacionada com o *Objectivo da Topologia Geral* e a segunda com a *Importância da Análise Geral*.

15 de Novembro de 1941 a 27 de Março de 1942

- Tiveram início duas séries de conferências que se prolongaram durante alguns meses. A primeira série tratou de temas como a *Álgebra* e *Teoria de Números*, tendo sido colaboradores João Remy Freire, Orlando Morbey Rodrigues, José Sebastião e Silva, José da Silva Paulo, Augusto Sá da Costa, Gustavo Ramos de Castro, Virgílio Barroso, José Ribeiro de Albuquerque, Mário de Alenquer, Fernando Castro de Oliveira e Hugo Ribeiro. A segunda série de conferências teve como temáticas a *Noção de Vizinhança, Conjuntos Fechados e Espaços (F), Espaços de Kuratowski, Comparação de Topologias, Funções Contínuas e Homeomorfia, Estruturas de Lógica Clássica, Fundamentos Modernos do Cálculo de Probabilidades*, entre outras.

- Durante um curto período de tempo esta série de colóquios foi interrompida para que um eminente matemático pudesse realizar alguns colóquios em Portugal. Assim, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, nos dias 22 e 23 de Janeiro de 1942 e nos dias 2,4, 5 e 6 de Fevereiro do mesmo ano, Maurice Fréchet[94] realizou diversas conferências.

Novembro de 1941 e 22-23 de Janeiro de 1942

- A convite da Secção de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, António Aniceto Monteiro e Manuel Valadares realizaram duas conferências: uma sobre introdução à Topologia Geral e a outra sobre os Novos Elementos da Família do Rádio.

- Após a consecução destas conferências tiveram início dois cursos livres: um cuja temática foi *Teoria dos Grupos e suas aplicações à Física Quântica*, ministrado por António Almeida Costa e o outro sobre *Cálculo Tensorial e algumas das suas aplicações* orientado por Manuel Gonçalves Miranda.

- Sob convite da Secção de Matemática da Faculdade de Ciências do Porto, Aurélio Marques da Silva, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, deslocou-se até ao Porto para dinamizar duas conferências: uma sobre *A Materialização da Energia* e a outra sobre a *Fissão dos Núcleos*.

Morgado, 1995, pp.10-15

[94] O matemático Maurice Fréchet durante a sua deslocação a Portugal foi homenageado pela Sociedade Portuguesa de Matemática que reconheceu a sua profunda influência no movimento matemático contemporâneo tendo-lhe atribuído o título de sócio honorário da respectiva instituição. (Morgado, 1995, p.13)

Conforme Morgado (1995), numa nota publicada na *Gazeta da Matemática*, n.º 9, pp.13-14 de 1942, Ruy Luís Gomes, esclareceu os objectivos das actividades que energicamente se vinham a desenvolver.

> *"Por um lado, no plano científico, temos a intenção de facilitar aos estudiosos as técnicas e as vias de acesso aos problemas de maior actualidade, da Matemática e das suas Aplicações. Por outro, desejamos integrar os problemas da Matemática no movimento geral da Ciência, numa primeira tentativa de sistematização das íntimas relações que hoje existem entre os três domínios – o da Matemática, o da Física e o da Biologia. Finalmente, num plano ético, desejamos criar um ambiente de trabalho, um "clima" e um estímulo, como resultante da cooperação de todos numa tarefa que transcende o interesse imediato de cada um e traduz uma consciência colectiva: a de que pertencemos todos a uma Universidade".*
>
> Gomes, Gazeta da Matemática[95]

Em 1945, o fim da 2.ª Grande Guerra, trouxe alguma esperança numa viragem na política nacional. Contudo, tal não aconteceu, tendo permanecido o regime ditatorial de Oliveira Salazar e a vigilância e repressão ao nível de exteriorização de divergências.

Foi durante a vigência de Caeiro de Mata que foi assinada a Portaria[96] da demissão de alguns grandes mestres do ensino.

Carvalho (1985) referiu que, em 15 de Junho de 1947, a imprensa reproduzia uma nota oficiosa do Conselho de Ministros, onde se declarava que havia sido deliberada a aposentação, reforma ou demissão daqueles que não dessem garantias de cooperação na realização dos fins superiores do Estado. O regime vigente desencadeou uma ofensiva contra a Universidade, tendo sido afastados do ensino, entre outros, Bento de Jesus Caraça, Ruy Luís Gomes, José Morgado, António Aniceto Monteiro e, simultaneamente, proibidas as actividades da Sociedade Portuguesa de Matemática, assim como, praticamente extintos os Centros de Matemática. Alguns dos principais colaboradores da *Gazeta da Matemática* foram expulsos do Ensino Oficial, enquanto que outros, não conseguindo contratação pelas Universidades portuguesas, acabaram por ingressar em Universidades de outros países. Tratou-se de um período difícil, que, segundo Matos (2004), comprometeu gravemente o esforço de debate de ideias que se vinha desenvolvendo em torno da *Gazeta da Matemática*.

[95] Cit. em Morgado, 1995, p.16

[96] A Portaria data de 8 de Outubro de 1946 e a demissão foi efectuada ao abrigo do Decreto-Lei n.º 32 659, n.º 9, do artigo 11º do Estatuto Disciplinar dos Funcionários Civis de Estado de 9 de Fevereiro de 1943. (Carvalho, 1985, p.783)

7.2. O programa de Matemática nos Anos 40

Com a promulgação da Reforma do Ensino Liceal e dos programas de Matemática, a 14 de Outubro de 1936, a disciplina de Matemática apresentava uma carga horária semanal de 3 horas em todos os ciclos, à excepção do 3.º Ciclo onde apenas se destinava 2 horas para a disciplina de Matemática.

Segundo informações veiculadas no Decreto n.º 27:085, da data supracitada, o programa de Matemática para o Ensino Liceal apresentava três grandes domínios: a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. No 1.º Ciclo, pretendia-se que o estudo da Aritmética possuísse um carácter intuitivo e elementar, visando desenvolver no aluno a capacidade do cálculo mental e escrito. Para o efeito deveria ser proposto o maior número de exercícios, os quais deveriam ser repetidos exaustivamente. O ensino da Geometria deveria ser essencialmente experimental, substituindo as demonstrações por verificações realizadas sobre modelos construídos pelos alunos, alertando-se, contudo, para a necessidade de as definições e os teoremas serem correctamente ministrados. Durante o 2.º Ciclo, deveria ser acentuado o carácter dedutivo, se bem que elementar, do ensino da Geometria, proporcionando a realização de demonstrações típicas e simples, para além de se fomentar o cálculo algébrico.

Vejamos alguns exemplos práticos elucidativos da situação escolar de vários alunos.

Em 1946, Maria Teodora Alves publicou, na *Gazeta da Matemática* n.º 30, de 1946, um estudo dos resultados obtidos pelos alunos do 1.º Ciclo no exame de Matemática, no Liceu de Passos Manuel, no ano lectivo de 1945-46. Os resultados[97] estatísticos constam na figura seguinte:

Aritmética e Algebra		*Geometria*
Nota minima	0	0
Nota máxima	18	19
média	9.9	11.2
σ	4.08	3.99
coeficiente de variação	0.41	0.35
Q_3	12.3	13.8
mediana	9.1	10.9
Q_1	6.7	8.0
Q	2.8	2.9
r		0.53
$N=236$		

Figura 14: Resultados estatísticos obtidos num exame de Matemática em 1945-46[98]

[97] Alves (1946), referiu que N = 236 incluía 42 alunos internos do Liceu Passos Manuel e 194 externos, sendo que destes últimos, alguns eram provenientes do ensino particular em estabelecimento, outros do ensino particular individual e outros alunos maiores e emancipáveis.

[98] Fonte: *Gazeta da Matemática*, 1946, n.º 30, p.13

Alves (1946) analisou os elementos estatísticos efectuados e concluiu, numa primeira fase, que eram obtidas classificações abrangentes e díspares, isto é, alunos com 0 valores e alunos com 18 e 19 valores. Acrescentou, ainda, que de acordo com a análise da média obtida em cada um dos pontos, os alunos apresentaram um melhor desempenho no ponto de Geometria do que no de Aritmética e Álgebra, o que poderia indiciar uma melhor preparação dos alunos no primeiro domínio ou então um ponto mais difícil de Aritmética e Álgebra. Contudo, a autora complementou a informação referindo que o número de lições auferidas pelos alunos (pelo menos os internos) em Aritmética e Álgebra era substancialmente superior às recebidas em Geometria, o que tornou mais inesperada a diferença das médias obtidas. Dada a influência das classificações extremas, Alves (1946) efectuou uma análise mais específica, considerando as medianas e os quartis de cada prova, concluindo que a distribuição de notas era mais regular em Geometria do que a verificada em Aritmética e Álgebra. Para tal, apresentou um esquema representativo das diferentes zonas de distribuição, definindo os alunos como Alunos Inferiores (classificações abaixo do Q1), Alunos Médios Inferiores (classificações entre Q1 e a Mediana), Alunos Médios Superiores (classificações entre Mediana e Q3) e Alunos Superiores (classificações acima do Q3).

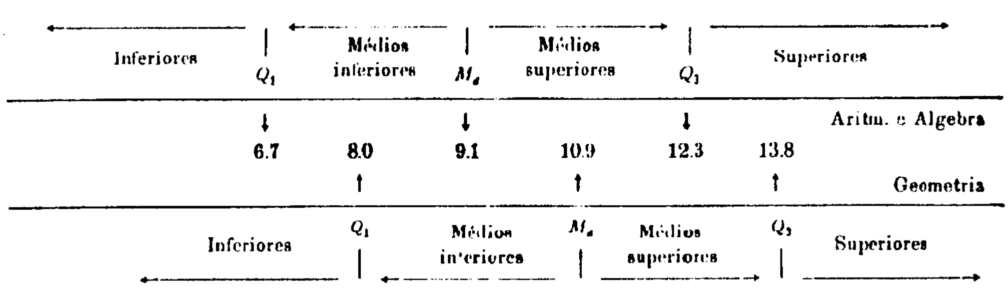
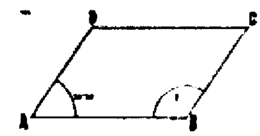


Figura 15: Gráfico que contém as zonas de distribuição para as provas realizadas[99]

Referiu ainda o facto de todos os alunos médios inferiores serem admitidos à prova oral de Geometria (pois registaram classificações acima dos 7,5 valores) e nem todos os alunos serem admitidos à prova oral de Aritmética e Álgebra.

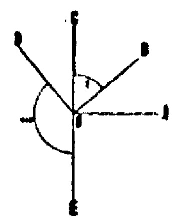
No ano lectivo seguinte, Alves (1947) analisou os resultados dos alunos no referido Liceu, no exame de Geometria. Vejamos o exame proposto.

[99] Fonte: *Gazeta da Matemática*, 1946, n.º 30, p.14



1.º — Condições da figura: $[ABCD]$ é um paralelogramo. O ângulo $B\widehat{A}D$ mede 40° 20'. Qual é a medida do ângulo $A\widehat{B}C$?

2.º — Construa o triângulo cujos lados medem respectivamente 3 cm, 5 cm e 6 cm e construa as alturas correspondentes aos três lados do triângulo.



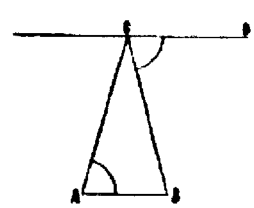
3.º — Condições da figura: EC é perpendicular a OA, OD é perpendicular a OB. Ângulo

$E\widehat{O}D = 140°$.

Qual é a medida do ângulo

$B\widehat{O}C$?

4.º — Descreva uma circunferência de 3 cm de raio. Tome, no plano da circunferência, um ponto O à distância de 5 cm do centro dessa circunferência. Construa a figura simétrica da circunferência descrita, tomando o ponto O por centro de simetria.



5.º — Condições da figura: No triângulo $[ABC]$ é: $\overline{AC} = \overline{BC}$. CD é paralelo a AB. Podemos afirmar que ângulo $C\widehat{A}B =$ ângulo $B\widehat{C}D$. Porquê?

6.º — Os dois lados consecutivos de um rectângulo medem respectivamente 3 decímetros e 12 decímetros. O lado de um quadrado mede 6 centímetros. Calcule a área do rectângulo tomando por unidade a área do quadrado.

7.º — A geratriz de um cilindro de revolução mede 18 centímetros e o raio da base do cilindro é igual a 1/4 da geratriz. Calcule o volume deste cilindro expresso em decímetros cúbicos.

8.º — Quais são os poliedros regulares cujas faces são triângulos equiláteros?

Figura 16: Exame de Geometria[100] do 1.º Ciclo (1.ª chamada) realizado no Liceu Passos Manuel em 1946-47

De seguida, apresentamos o polígono de frequências relativo às classificações da prova escrita.

[100] Fonte: *Gazeta da Matemática*, 1947, n.º 33, p.13

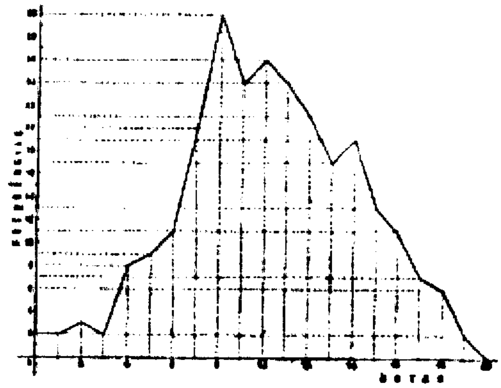


Figura 17: Polígono de frequências das notas do exame escrito de Geometria em 1946-47[101]

Alves (1947) considerou que os resultados obtidos eram concordantes com os obtidos no ano lectivo transacto e apresentou algumas sugestões para melhorar a prova, arriscando-se a referir:

> *" (...) que o ponto de exame organizado nos moldes destes dois pontos tem consistência para medir a habilidade dos alunos num exame de Geometria do 1.º Ciclo".*
>
> Alves, 1947[102]

Em 1947, face à evidência da deficiente preparação dos alunos relativamente às técnicas de Cálculo Aritmético e Algébrico, os professores de Matemática do Liceu Passos Manuel incumbiram Maria Teodora Alves de organizar um teste e o respectivo estudo estatístico de modo a diagnosticar essas deficiências para, posteriormente, serem colmatadas. O teste para determinar as deficiências de cálculo dos alunos do 2.º ano teve a duração de 50 minutos, serviu quatro turmas do referido liceu e encontramos um exemplar na *Gazeta da Matemática* desse ano, o qual constitui a figura seguinte.

[101] Fonte: *Gazeta da Matemática*, 1947, n.º 33, p.13
[102] *Gazeta da Matemática*, 1947, n.º 33, p.14

Calcule:

1) 170×1	2) 1×120
3) $520 : 520$	4) $180 : 1$
5) 0×17	6) 21×0
7) $0 : 18$	8) $1 : 1$
9) $2-3-4+7$	10) $9-2+5-4$
11) $(8\times6\times5) : (8\times6)$	12) $(7\times3\times9) : (3\times9)$
13) $4 : 0{,}1$	14) $20 \times 0{,}1$
15) $8-6:3$	16) $7+8:4$
17) $4+3\times2$	18) $10-4\times2$
19) $20-4\times2-15:3$	20) $16-12:4-3\times2$
21) 1^6	22) 1^9
23) $2^3\times2$	24) $3^4:3$
25) $3^8\times2^2:3^8$	26) $2^2\times5^3:5^3$
27) 2^2+3^2	28) 4^2-3^2
29) $2\times(2\times3+3)$	30) $2\times(18:6+1)$
31) $2+3/4$	32) $2/3+2$
33) $3-3/2$	34) $5/2-2$
35) $1/2+2/3$	36) $3/4-2/3$
37) $2/7\times3$	38) $2\times4/5$
39) $3/8:2$	40) $3/5:3$
41) $1+2/3\times2$	42) $1-2/5\times2$
43) $1+3/4:3$	44) $1-5/2:5$
45) $2/3:1/2$	46) $2:3/4$
47) $1\,1/4\times3$	48) $2:2\,1/3$
49) $(2/3)^2$	50) $(4/3)^2$

Figura 18: Teste para determinar as insuficiências ao nível do cálculo no Liceu Passos Manuel, 1947[103]

Eis a percentagem de respostas erradas para cada grupo de questões:

$N = 129$ alunos

Grupos	Questões do teste pertencentes a cada grupo	Dificuldade expressa em σ	Percentagem de respostas erradas
A	1 a 8	0.61	72.87
B	11 e 12; 25 e 26	0.21	58.11
C	15 a 20; 29 e 30	0.40	65.81
D	31 a 36	0.33	62.80
E	13 e 14; 37 a 40; 45 a 48	0.98	83.73
F	21 a 24; 49 e 50	0.20	58.14
G	41 a 44	0.70	75.97
H	9 e 10	0.73	76.75
I	27 e 28	0.13	44.97

Figura 19: Percentagem de respostas erradas no Teste no Liceu Passos Manuel, 1947[104]

[103] Fonte: *Gazeta da Matemática*, 1947, n.º 32, p.15

Alves (1947) depois de efectuar a análise estatística concluiu que eram graves as deficiências reveladas pelos alunos em termos do Cálculo Aritmético e aconselhou a uma reflexão sobre as causas desse insucesso.

> *"A meu ver, são muitas e variadas e o seu estudo deverá ser feito cientificamente, pois de um autêntico problema científico se trata (...)"*
>
> Alves, 1947, p.16

Em 1951, num artigo escrito para a revista *Gazeta da Matemática* n.º 49, José Sebastião e Silva criticou a exclusão completa da Análise Infinitesimal do programa dos liceus para a disciplina de Matemática, que fora apresentado na Reforma de 1936. Segundo Silva (1951) este facto produziu graves perturbações no ensino global das matérias científicas.

> *"Sem ter adquirido a mínima familiaridade com os conceitos de infinitésimo e de derivada, o aluno, ao entrar para a universidade, passava bruscamente a ter de assimilar o método infinitesimal em todas as minúcias e com os requintes de subtilização lógica que cem anos de crítica exaustiva lhe infligiram, quási desfigurando a sua primária feição intuitiva. (...) O resultado era de prever. Queixavam-se os alunos de que lhes era exigido muito mais do que as suas possibilidades lhes permitiam dar (...) Queixavam-se os mestres de que os alunos vinham pessimamente preparados dos liceus".*
>
> Silva, 1951, p.1

Para esta reivindicação, a solução foi simples, mas apenas apareceu decorridos 12 anos, com a aprovação de novos programas. Assim, e como defendia Silva (1951), o ramo da Matemática que maior êxito alcançava nas aplicações às ciências, passava a estar incluído no currículo do Ensino Liceal.

Em 17 de Setembro de 1947, foi então publicada uma nova Reforma.[105] Eis a estrutura proposta para o Ensino Liceal:

[104] Fonte: *Gazeta da Matemática*, 1947, n.º 32, p.16

[105] A Reforma foi promulgada a 17 de Setembro de 1947, segundo o Decreto n.º 36 507. (Matos, 2004)

	Ciclos	Duração	Objectivos
Curso Geral[106] (5 anos)	1.º Ciclo	Constituído pelos primeiros 2 anos	Pretendia-se manter o que fosse útil e necessário, como saber, como exercício mental e como elemento de formação
	2.º Ciclo	Constituído pelos 3 anos seguintes	
Curso Complementar	3.º Ciclo	Constituído por 2 anos	Sistematização mental e a síntese de todos os conhecimentos adquiridos

Tabela 2: Estrutura do Ensino Liceal em 1947[107]

O mesmo Decreto continha referências aos professores do Ensino Liceal, especialmente no que respeitava à sua formação. Carvalho (1985), referiu que a formação exigida à data se baseava na aquisição de um grau superior de cultura, numa Universidade e aquisição de habilitações pedagógicas num estágio[108] de 2 anos. O novo diploma alertava para a necessidade de os professores do Ensino Liceal serem considerados formados após uma boa prestação numa longa série de provas, possuírem predicados de natureza pedagógica, mas também após uma prévia e rigorosa verificação das suas qualidades morais e cívicas. A lista dos professores efectivos pode ser consultada no Anexo 20.

Em 1948, foram aprovados novos programas[109] (Anexo 21) para a disciplina de Matemática do Ensino Liceal, conforme o Decreto-Lei n.º 37 112 de 22 de Outubro de 1948. Segundo Matos (2004), em geral, estes programas mantiveram-se até aos anos 60, tendo sido introduzidas pequenas alterações pelo Decreto-Lei n.º 39 807 de 7 de Setembro de 1954, sendo provável que sofressem outras pequenas mudanças. Por exemplo, a Circular n.º 2026 de 14 de Março de 1956 da Direcção-Geral do Ensino Liceal indicava quais os teoremas, corolários e problemas de Geometria cujos enunciados eram, respectivamente, de demonstração e resolução obrigatória.

A Aritmética, Álgebra e Geometria constituíam os grandes temas de Matemática ensinados aos alunos, antes da entrada para a Universidade.

Segundo Ponte et al. (1997), a Aritmética era estudada principalmente nos níveis de ensino mais elementares. No 2.º Ciclo do Ensino Liceal, era introduzido o estudo da Álgebra e uma iniciação ao estudo da Geometria, de forma muito semelhante aos *Elementos de Euclides*. Já no 3.º Ciclo do Ensino Liceal, os alunos continuavam o estudo da Álgebra, estudavam Geometria Analítica, Trigonometria e Aritmética Racional.

106 No Curso Geral foi eliminado o Latim, facto que rompeu com uma tradição secular. O respectivo ensino ficava apenas reservado aos alunos do 3.º ciclo que pretendessem ingressar nas Faculdades de Letras ou Direito. (Carvalho, 1985, p.788)
107 Fonte: Carvalho, 1985, p.788
108 Segundo o mesmo Diploma, os estágios pedagógicos que se efectuavam desde 1930 no Liceu Pedro Nunes em Lisboa e Liceu D. João III em Coimbra, passaram a ser feitos apenas em Coimbra. Segundo Carvalho (1985) só dez anos mais tarde foram novamente restabelecidos em Lisboa pelo então ministro Leite Pinto.
109 Fonte: *Gazeta da Matemática*, 1948, n.ºs 37-38, pp.20-27.

Vejamos algumas das recomendações do Programa de Matemática para o Ensino Liceal.

> " [Relativamente ao 1.º Ciclo] *É também indispensável obrigá-los a fixar determinadas propriedades e conceitos; sem o uso, embora parcimonioso, da memória, os resultados, por mais brilhantes que pareçam, são apenas passageiros e ilusórios.* [Relativamente ao 2.º Ciclo] *O rigor e o sentido lógico das demonstrações dão aos alunos hábitos de precisão de ideias e de linguagem, permitindo-lhes aplicar com êxito o raciocínio lógico-dedutivo não só a outras ciências como a questões da vida real. (...) A aquisição desta técnica e a resolução de problemas constituem a base do ensino da álgebra elementar; se a técnica de cálculo é indispensável para o prosseguimento de estudos e como estímulo de atenção, a resolução de problemas é fundamental, não apenas como aplicação dessa técnica, mas porque satisfaz à preocupação formativa que orienta este programa.* [Relativamente ao 3.º Ciclo] *O Estudo da Matemática no 3.º Ciclo deve constituir para o aluno uma ginástica intelectual que lhe permita raciocinar com clareza e precisão, tanto no campo científico como na vida prática. Pretende-se que o aluno não só fique de posse de um certo número de princípios e teorias, em que será geralmente exigido o rigor próprio desta disciplina, mas que tenha desenvolvido a iniciativa pessoal e a faculdade de raciocínio, de modo a poder iniciar com confiança os estudos superiores (...)*".
>
> Decreto n.º 37 112, de 22 de Outubro de 1948[110]

Várias críticas foram apontadas ao currículo apresentado. A primeira delas, especialmente dedicada à abordagem da Álgebra, apontava para o facto de os conteúdos algébricos serem apresentados como meros processos mecânicos, especialmente vocacionados para a memorização em detrimento da compreensão. Esse objectivo era amplamente concretizado através dos inúmeros exercícios propostos resolvidos até à exaustão.

De seguida, uma mudança repentina para a Geometria Dedutiva, onde se pretendia que o aluno desenvolvesse uma característica fundamental – saber demonstrar. Contudo, essa correspondia à parte final de um processo que se caracteriza como engenhoso e criativo. Os alunos não foram "treinados" para esse tipo de abordagem e o que se verificava era que as demonstrações acabavam por ser decoradas, uma vez que os alunos não percebiam o fundamento lógico que as envolvia.

Em todos os níveis de ensino, a ênfase era o treino das técnicas de cálculo. Ao cálculo numérico da Aritmética, seguia-se o cálculo algébrico, as regras de derivação e a resolução de equações trigonométricas, sendo por fim as famosas "contas" de logaritmos.

Os manuais eram insípidos, frios e sem qualquer criatividade. Repetiam-se uns aos outros na esperança de que uma mudança de ordem dos temas lhes possibilitasse maior êxito comercial.

Muitas mais críticas foram apontadas, mas especialmente uma era mais do que evidente: o currículo assim como era apresentado, era fraco e sem motivação.

---

[110] Cit. em *Gazeta da Matemática*, n.ºs 37-38, pp.25-26

"A verdadeira motivação proporciona o discernimento do próprio sentido da Matemática e deixar de apresentar a importância da Matemática, equivale a ensinar ao estudante a ler notações musicais sem lhe permitir que toque um instrumento musical (...) se ele não sabe o que as várias notações e técnicas significam, vê-se apenas possuidor de habilidades aborrecidas e destituídas de sentido".

Kline, 1976, p.28

Para Abrantes (2004), a falta de interesse dos alunos, a quebra do rendimento escolar e a pobre preparação que o ensino proporcionava para prosseguimento de estudos superiores foram os factores assinalados como os responsáveis pela acentuada crise que a disciplina ultrapassava.

Em 1951 e 1952, nas páginas da Gazeta da Matemática n.º 48, n.º 49 e n.º 51, Maria Teodora Alves efectuou uma análise crítica (Anexo 22) ao programa oficial para o 1.º, 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Liceal, o que alimentou mais as críticas que se vinham a sentir também em relação aos programas em vigor.

7.3. O Contexto Educacional nos Anos 50 e 60

No ano de 1952, já com Fernando Andrade de Pires de Lima[111] no Ministério da Educação, foi dado um impulso no combate à extinção do analfabetismo em Portugal. Foi promulgado[112] o Plano de Educação Popular, cujo objectivo era:

"Despertar e desenvolver no nosso povo, por processos directos e indirectos, por métodos suasórios ou repressivos, um interesse esclarecido pela instrução".

Carvalho, 1985, p.785

O Plano distinguia dois tipos de acção: os Cursos de Educação de Adultos e uma Campanha Nacional de Educação de Adultos. Os Cursos, apesar de já existirem, funcionavam apenas com aulas nocturnas de 1 de Novembro a 30 de Abril. Com o estabelecimento desse Plano, prolongaram-se até 31 de Maio. A Campanha Nacional de Educação para Adultos, especialmente dirigida para os analfabetos com idades compreendidas entre os 14 e os 35 anos, tinha como propósito alertar a opinião pública para o problema do analfabetismo.

[111] Pires de Lima, professor da Faculdade de Direito de Coimbra.
[112] A promulgação consta do Decreto-Lei 38 968 de 27 de Outubro de 1952, sendo o Decreto n.º 38 969, de 27 de Outubro de 1952, que regula a execução desse diploma.

O supracitado Plano pretendia igualmente tornar exequível o princípio da escolaridade obrigatória, passando o Ensino Primário a estender-se a mais um ano (dos 7 aos 12 anos).

Três anos decorridos desde o lançamento deste projecto podia dizer-se que algo havia sido feito em prol do combate ao analfabetismo em Portugal, uma vez que em 1955 apenas 1% das crianças em idade escolar não frequentavam a escola primária. Esta evolução é demonstrada na tabela[113] seguinte.

Anos	População de 7 a 11 anos	Crianças sem ensino dos 7 aos 11 anos	Percentagens
1911	670 168	532 112	79,4
1930	707 971	517 604	73,1
1940	813 230	376 018	46,2
1950	768 271	156 219	20,3
1955	858 800	8 891	1,0

Tabela 3: Evolução da frequência escolar das crianças de 7 a 11 anos[114]

O rápido desenvolvimento da indústria e da economia, assim como, o novo mundo da automação exigiam novos progressos na investigação matemática e, simultaneamente, uma formação actualizada. Terminada a 2.ª Grande Guerra, havia que se proceder a uma actividade regeneradora, procurando-se trabalhar no que fora destruído, mas também desenvolver uma nova concepção técnica para redesenhar um novo mundo. O ensino, onde todas as alterações sociais se repercutem, deveria ser totalmente revisto, alertando para a evidência de que, o saber ler, escrever e contar se tornara uma cultura irreal.

Para Carvalho (1985) era evidente o atraso do nosso país e urgente uma remodelação de objectivos de actuação, sendo crucial o investimento em técnicos especializados e competentes que pudessem fazer face ao "deplorável atraso".

Já em Maio de 1947, haviam sinais internacionais dessa modernidade. Foi publicado na *Gazeta da Matemática* n.º 32, com tradução de José Sebastião e Silva, um artigo que descrevia o que então era designada de "máquina calculadora electrónica" – o primeiro computador electrónico – O ENIAC[115].

[113] Os valores referentes a 1955 não eram definitivos, sendo o valor da população apenas estimado, dado que, apenas em 1960 houve recenseamento. O valor referente às crianças sem ensino nesse ano havia sido obtido por inquérito efectuado pela Direcção-Geral do Ensino Primário. (Carvalho, 1985, p.792)

[114] Fonte: Carvalho, 1985, p.793

[115] O ENIAC (conhecido exactamente por integrador e calculador electrónico) foi inventado e aperfeiçoado por dois jovens cientistas da Universidade da Pennsylvania, Dr. John William Mauchly e J. Presper Eckert Jr. . Um matemático adido ao serviço da artilharia teve conhecimento do projecto e na ânsia de procurar uma máquina capaz de preparar um grande número de dados balísticos das novas

"(...) uma máquina maravilhosa que permite efectuar cálculos matemáticos até agora demasiado difíceis ou laboriosos, com velocidades que podem obter-se unicamente com dispositivos electrónicos. Os peritos que viram funcionar pela primeira vez esta máquina, declararam que ela é o instrumento com o qual será possível reconstruir completamente sobre novas bases as questões científicas".

Kennedy, T.R., 1947,[116]

José Sebastião e Silva elogiou o *Istituto per le Applicazioni del Calcolo* de Roma, pelas sucessivas contribuições e pelo contacto permanente com a realidade, enfatizando a necessária renovação de métodos e ampliações dos diferentes domínios, assim como, uma nova fase no ensino da Matemática.

"Parece estar ultrapassada aquela fase da Matemática característica do século passado – a fase dos belos teoremas, das belas propriedades, das elegantes demonstrações – em que o investigador, à maneira dos gregos, fazia a matemática pela matemática, com preocupações de puro artista".

"Uma última conclusão nos parece lícito tirar daqui: a necessidade premente de arejar os nossos métodos e programas de ensino, tornando-os adequados ao espírito da época".

Silva, 1947, pp.3-4

Em 1955, mais uma mudança na pasta da Educação: a Pires de Lima sucedia Francisco Leite Pinto[117].

Carvalho (1985) considerou que a consciencialização da necessidade do estabelecimento de relações entre a Educação e a Economia que o novo mundo exigia constituiu um factor decisivo para os desafios seguintes ao nível da Educação. Em 1959, com o referido ministro, foram efectivamente projectados os primeiros passos. Para o efeito, foi elaborado o *Plano de Fomento Cultural* cuja concretização excedia as possibilidades nacionais, o que terá conduzido a conversações com organismos internacionais, nomeadamente, com a OCDE.

Segundo Carvalho (1985), esta iniciativa sugerida por Leite Pinto foi muito bem aceite pela OCDE e culminou com um plano mais abrangente, denominado *"Projecto Regional do*

---

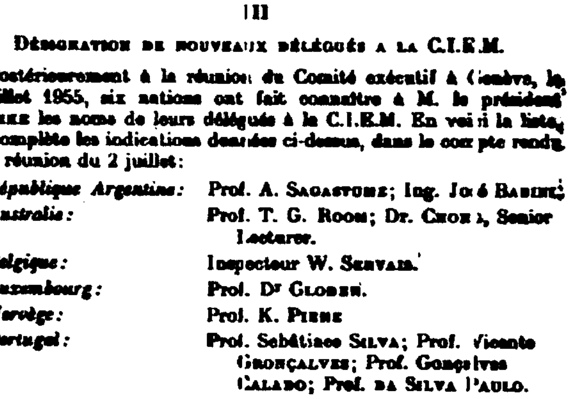
armas de ofensiva destinadas ao Ultramar, convenceu o seu coronel, que com entusiasmo, interveio no sentido de o estado auxiliar a sua consecução. Dois anos passados, o projecto passava de ficção à realidade. Com um custo de 400 milhares de dólares e uma absorção de uma quantidade de energia três vezes superior à exigida pelo funcionamento de uma das maiores instalações rádio-transmissoras dos Estados Unidos da América, o ENIAC abria uma nova era. Nas palavras de um dos seus criadores: "*a velha era está declinando: aquela nova das velocidades electrónicas está-se aproximando, e nós poderemos começar a tratar dos problemas científicos, baseando-nos sobre novas concepções*". (Silva, 1947)

[116] *Gazeta da Matemática*, 1947, n.º 32, pp.3-4, Tradução de José Sebastião e Silva

[117] Engenheiro, professor universitário da Universidade Técnica era uma personalidade muito conceituada no meio académico e científico. Para Carvalho (1985), esta ascensão poderia constituir um sinal de que algo estaria a mudar em Portugal.

Mediterrâneo"[118] e cujos resultados apenas foram visíveis após a saída de Leite Pinto do Ministério. Para o autor, os contributos mais significativos estiveram relacionados com o alargamento para quatro anos e a generalização[119] para ambos os sexos da obrigatoriedade escolar do Ensino Primário.

Ainda durante a vigência de Leite Pinto, em 1955, o Instituto de Alta Cultura (actual INIC) nomeou J. Vicente Gonçalves, J. J. Calado, Silva Paulo e José Sebastião e Silva para a integração da Comissão Internacional do Ensino da Matemática, sendo apresentada como a delegação oficial portuguesa junto do CIEM.



III

DÉSIGNATION DE NOUVEAUX DÉLÉGUÉS A LA C.I.E.M.

Postérieurement à la réunion du Comité exécutif à Genève, le 2 juillet 1955, six nations ont fait connaître à M. le président BEHNKE les noms de leurs délégués à la C.I.E.M. En voici la liste, qui complète les indications données ci-dessus, dans le compte rendu de la réunion du 2 juillet:

République Argentine:	Prof. A. SAGASTUME; Ing. José BABINI;
Australie:	Prof. T. G. ROOM; Dr. CHONG, Senior Lecturer.
Belgique:	Inspecteur W. SERVAIS.
Luxembourg:	Prof. Dr GLODEN.
Norvège:	Prof. K. PIENE
Portugal:	Prof. Sebâtiaoo SILVA; Prof. Vicente GRONÇALVES; Prof. Gonçalves CALADO; Prof. DA SILVA PAULO.

Figura 20: Delegação oficial portuguesa junto da CIEM, 1955[120]

Segundo Carvalho (1985), a actuação de Leite Pinto não foi de total agrado de Salazar, tendo este optado por procurar para a pasta da Educação personalidades formadas pelas Universidades Clássicas, com mentalidades mais próximas da sua. Deste modo, até Salazar ter o acidente que o havia de afastar da governação, houve três ministros: Manuel Lopes de Almeida[121], Inocêncio Galvão Teles e José Hermano Saraiva. Galvão Teles fez ressurgir a linha de actuação de Leite Pinto, especificamente, com a publicação em 2 de Abril de 1964, do relatório do "*Projecto Regional do Mediterrâneo*".

[118] Os trabalhos do grupo português realizaram-se no Centro de Estudos de Estatística Económica, do Instituto da Alta Cultura, segundo direcção de Alves Martins e a participação de Alves Caetano, Simões Lopes, Morgado Cândido e outros auxiliares técnicos. (Carvalho, 1985, p.796)

[119] Por Decreto-Lei n.º 40 964, de 31 de Dezembro de 1956, Leite Pinto prorrogou a escolaridade obrigatória para 4 anos, mas apenas para as crianças de sexo masculino. Decorridos cerca de 3 anos e meio, a 28 de Maio de 1960, pelo Decreto-Lei n.º 42 994, Leite Pinto propôs a generalização do Ensino Primário obrigatório para ambos os sexos. (Carvalho, 1985, p.796) e (Matos, 2004)

[120] Fonte: Matos, 2004

[121] Lopes de Almeida, Professor Catedrático de Letras da Universidade de Coimbra, governou cerca de ano e meio, sendo da sua responsabilidade, a criação da Faculdade de Letras da Universidade do Porto e a criação dos Estudos Gerais Universitários nas províncias ultramarinas de Angola e Moçambique. (Carvalho, 1985, p.798)

O Projecto propunha-se:

> *"(...) estabelecer, em termos quantitativos, a evolução que deverá, ou deveria, sofrer o sistema escolar português, durante certo período de tempo, a fim de estar apto a preparar o pessoal qualificado requerido pela economia portuguesa metropolitana. Trata-se, pois, essencialmente, de uma análise feita à luz de pontos de vista económicos. O período de tempo considerado para este fim foi de quinze anos, de 1960 a 1975, uma parte do qual, aliás, já se encontra decorrido."*
>
> Galvão Teles[122]

Carvalho acrescentou ainda que:

> *"Distingue o ministro dois aspectos fundamentais no proposto planeamento: um, qualitativo, cujo objectivo principal seria a promulgação de um Estatuto da Educação Nacional, «carta magna do ensino», «fiel às grandes constantes do Cristianismo e da Lusitanidade, mas modernizado em função das exigências do presente e das tendências do provir»; e outro, quantitativo, onde estariam inseridas, com predominância, as preocupações de índole económica."*
>
> Carvalho, 1985, pp.798-799

Os contactos internacionais fruto do Projecto já mencionado ajudaram à promoção de um ambiente mais propício a alterações ao nível do funcionamento educacional. Um dos sinais desse contributo, foi a promulgação de uma reformulação dos estatutos da *Mocidade Portuguesa*[123], a 12 de Novembro de 1966, pelo Decreto-Lei n.º 47 311, cujas atribuições se reduziram à acção social escolar, ocupação dos tempos livres da juventude não escolar, omitindo o «culto do dever militar» e os "escalões militares" de outrora. Um outro indicador foi o alargamento da escolaridade obrigatória para seis anos, para ambos os sexos, por Decreto-Lei n.º 45 810 de 9 de Julho de 1964.

Ensino Primário [124]	
Elementar	Correspondia às quatro primeiras classes
Complementar	Correspondia às próximas duas classes

Tabela 4: Estrutura do Ensino Primário em 1964[125]

[122] Cit. em Carvalho, 1985, p.798

[123] A Organização Nacional Mocidade Portuguesa foi criada pelo Decreto-Lei n.º 26 611 de 19 de Maio de 1936, em cumprimento da Base XI da Lei n.º 1941, de 19 de Abril de 1936. O respectivo Regulamento foi publicado a 4 de Dezembro de 1936 e impunha (este objectivo terá sido concretizado em relação aos jovens que frequentavam a escola) a fidelização dos jovens, dos sete aos catorze anos. Os filiados estudantes tinham o privilégio de poder permanecer na organização até aos 26 anos, divididos em quatro escalões: os lusitos (dos 7 aos 10 anos), os infantes (dos 10 aos 14 anos), os vanguardistas (dos 14 aos 17 anos) e os cadetes (a partir dos 17 anos). Estes últimos seriam comandados por um oficial superior do exército ou da armada e constituiriam a milícia pré-militar. A Mocidade Portuguesa Feminina viria a ser instituída um ano mais tarde. (Carvalho, 1985, p.756)

[124] Segundo Carvalho (1985), todas as crianças que não pretendessem prosseguir estudos teriam de efectuar as seis classes. As que ambicionassem seguir estudos frequentariam apenas as primeiras quatro classes e, após aprovação em exame, efectuariam matrícula no 1.º ciclo do Ensino Liceal ou no ciclo preparatório técnico. O processo tornou-se bastante débil uma vez que implicava que uma criança com apenas 12 anos tivesse de decidir por uma das duas vias.

7.4. O programa de Matemática nos Anos 50 e 60

Em 1954, Pires de Lima aprovou modificações aos programas das disciplinas do Ensino Liceal, segundo o Decreto n.º 39 807, do DG n.º 198, de 7 de Setembro de 1954, com o propósito de os simplificar, especificamente no curso geral, e adequá-los ao nível de desenvolvimento dos alunos.

Vejamos o preâmbulo do Decreto:

> *"A prática do exercício docente durante os anos decorridos após a publicação do Decreto n.º 37 112 de 22 de Outubro de 1948, fez reconhecer a necessidade de introduzir algumas modificações nos programas do Ensino Liceal, aprovados pelo referido Decreto. Procura-se agora, sobretudo, simplificar os do curso geral, de forma a acomodá-los à capacidade receptiva dos alunos".*
>
> Decreto n.º 39 807, de 7 de Setembro de 1954

Estes programas duraram anos, sendo a 2 de Janeiro de 1967, por Decreto-Lei n.º 47 480, instituído o Ciclo Preparatório[126] do Ensino Secundário, que fundia o 1.º Ciclo do Ensino Liceal e o Ciclo Preparatório do Ensino Técnico. Este seria ministrado em dois anos, com separação de sexos e exigia a aprovação em exame da 4.ª classe. Finda esta frequência, os alunos seriam sujeitos a um exame de aptidão, para prosseguimento de estudos no Ensino Liceal ou Ensino Técnico.

Considerando que a legislação vigente não regulava as experiências pedagógicas em termos suficientemente adequados, a 10 de Março de 1967, foi publicado o Decreto-Lei n.º 47 587 que autorizava a realização de experiências pedagógicas em estabelecimentos de ensino público. Segundo o articulado, em «experiências pedagógicas» podiam estar incluídos o funcionamento experimental de escolas-piloto[127] ou ensaios de novos métodos didácticos.

Os programas foram aprovados a 9 de Setembro de 1968, pela Portaria n.º 23 601. O Anexo 23 contém o programa proposto para a disciplina de Matemática para o Ciclo Preparatório, em 1968, influenciado pela designada *Matemática moderna*.

Na introdução destes programas, relativamente à disciplina de Matemática, podemos ler:

---

[125] Fonte: Carvalho, 1985, pp.801-802

[126] O novo sistema entraria em vigor no ano lectivo 1968-1969.

[127] Segundo o artigo 4.º, pontos 1 e 2, do referido Decreto, as escolas-piloto seriam criadas nos termos aplicáveis aos estabelecimentos do mesmo grau pertencentes à rede escolar, devendo ser fixado o prazo do seu funcionamento, desde o início. Terminado esse prazo, o Ministro da Educação Nacional decidiria se a escola-piloto deveria integrar a rede escolar. O ponto 4 do artigo 4.º complementa ainda que essas escolas-piloto conferiam habilitações de valor oficial.

"A actualização do ensino de uma disciplina terá de ser encarada sob duplo aspecto: o da forma e o do conteúdo. No que se refere à disciplina de Matemática do Ciclo Preparatório, a introdução de novos conteúdos deverá ser feita, por enquanto, com prudência e parcimónia, atendendo a que é necessário, primeiro que tudo, actualizar os agentes de ensino. Algumas noções fundamentais da chamada «matemática moderna», tais como as de «conjunto», «elemento de um conjunto», «inclusão», «reunião», «intersecção» e «conjunto complementar» estão já a entrar nos hábitos de ensino de grande número de professores. Trata-se de noções muito simples, que é fácil e conveniente introduzir desde já neste ciclo. (...) Quanto ao problema da modernização da forma, a situação já é diversa. Na realidade, tem-se vindo a registar, há vários anos nas escolas normais do nosso Ensino Secundário, uma atitude crítica construtiva e um esforço permanente no sentido de dar novos rumos à forma por que deva processar-se o ensino da Matemática, desde os primeiros anos, inclusive no que se refere à linguagem e às relações professor-aluno."

Programas do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, 1968, p.51

Ainda com base no documento supracitado, a redacção do programa para a disciplina de Matemática tinha os seguintes princípios base:

1. Dar a todo o ensino da Matemática uma base tanto quanto possível intuitiva e concreta;
2. Estimular a coordenação entre o ensino da Matemática e o das restantes disciplinas;
3. Eliminar os assuntos que sobrecarregavam o anterior programa do 1.ºCiclo do Ensino Liceal, especialmente em Geometria, e que a experiência do ensino, assim como a comparação com os programas para as mesmas idades em países estrangeiros, mostraram ser prematuros nesta fase;
4. Reordenar as restantes matérias segundo uma nova hierarquia, de modo a rentabilizar o assunto que neste ciclo se apresentava com carácter central: o estudo dos números racionais;
5. Modernizar a linguagem matemática sem provocar uma mudança brusca relativamente às tradições do ensino;
6. Introduzir de forma moderada e progressiva o uso de letras;
7. Estabelecer um esquema de repetições periódicas e sistematizadas, atendendo a que a Matemática, se adquire pelo uso, pela repetição, pelo aperfeiçoamento progressivo;
8. Imprimir ao ensino do Ciclo Preparatório uma orientação mais próxima das aplicações técnicas.

Preâmbulo do Programa de Matemática para o Ciclo Preparatório, 1968

Esse prefácio informava que no programa eram fornecidas orientações didácticas flexíveis, para que os docentes e os autores de compêndios pudessem conjugar esforços no sentido de uma frutuosa acção pedagógica conjunta. Alertava igualmente para o facto de os compêndios se aproximarem do tipo de cadernos, com espaços a preencher pelo aluno, procurando introduzir todos os conceitos de modo operacional, adaptando-se às exigências de um método activo e heurístico. Realçava a importância de uma linguagem de texto simples e adequada à idade dos alunos, apoiada em gravuras sugestivas, relembrando que o livro constituía apenas um instrumento de aprendizagem e que, sempre que possível, se devia recorrer a outros instrumentos, como construção de modelos e meios audiovisuais.

A 23 de Janeiro de 1968, numa entrevista concedida ao Diário de Noticias, José Sebastião e Silva, comentava a era científica que vivíamos – a da automação, que se processava em ritmo acelerado nos Estados Unidos da América. Para Silva (1968), o cérebro e o músculo do homem estavam a ser substituídos pela máquina, facto que conduziria, a uma preferência cada vez maior pela mão-de-obra qualificada e uma procura de técnicos, cientistas e professores de alto nível. Assim, parecia crucial que para responder a esta exigência social e económica, a preparação pedagógica dos futuros técnicos teria de ser revista, constituindo a Matemática um importante papel nessa formação. Por outro lado, esta revisão possibilitaria uma renovação na forma de ensinar Matemática, uma vez que o ensino tradicional estava a produzir seres passivos, receptores de informação.

> *"(...) para construir ou utilizar inteligentemente os «cérebros electrónicos» (que são, na realidade, seres inteligentes, mas autómatos prodigiosamente eficientes) é necessário ter boa formação matemática de base e dominar assuntos de matemática moderna ligados entre si, tais como: lógica matemática, teoria dos conjuntos, álgebra de Boole, análise numérica, análise funcional, teoria dos jogos de estratégia, teoria das linguagens metamatemática, etc. (...) o que se pretende acima de tudo, é levar o aluno a compreender o porquê dos processos, em vez de lhe paralisar o espírito, automatizando-o desde logo na execução árida das operações aritméticas muito antes de ele saber o que estas significam".*
>
> Silva, 1968

Estas sucessivas chamadas de atenção que constituíam ecos cada vez mais duradoiros, levou a que o ensino mecanicista começasse a ser substituído pela perspectiva estruturalista da "*Matemática Moderna*", apesar de:

> *"No nosso país, a generalização do currículo de matemática moderna só ocorreu quando noutros países este movimento já há muito estava em refluxo."*
>
> Ponte, 1997, p.52

7.5. A influência de Sebastião e Silva

Em Portugal, na década de sessenta, assistiu-se ao aparecimento de

> *"(...) um dos mais interessantes e inovadores projectos de desenvolvimento curricular da chamada matemática moderna".*
>
> Ponte, 1993, p.97

> *"No nosso país assistiu-se a uma coexistência entre duas abordagens distintas: no Ensino Liceal, a influência de José Sebastião e Silva foi crucial, sabendo equilibrar o formalismo exigido com um recurso notável a processos heurísticos. No Ensino Técnico, a influência curricular dominante foi a mais formalista, com especial destaque para Papy".*
>
> Matos, 2004

O denominado *Movimento da Matemática Moderna* (MMM) teve um período que se designou por fase experimental que surgiu no seguimento das opções adoptadas internacionalmente.

A iniciativa mais relevante foi a preconizada pelo Professor José Sebastião e Silva,[128] já em 1964, que a par da sua visão de investigador, sentia um crescente dever de intervenção a bem da qualidade do Ensino Liceal.

Segundo a descrição[129] apresentada por Lima (1997), José Sebastião e Silva decidiu promover a realização de um curso a realizar-se na Faculdade de Ciências de Lisboa para actualização de professores de liceus mas aberto a qualquer aluno da instituição. O curso denominou-se "*Curso de Introdução à Matemática Moderna*", funcionou durante o ano lectivo de 1962/1963 e coroou-se de êxito, tendo sido decisivo para que as autoridades governamentais manifestassem o seu interesse.

Deste modo, em 1963, o Ministro da Educação, Inocêncio Galvão Teles, convidou José Sebastião e Silva para presidir a "*Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática no 3.º Ciclo de Ciências dos liceus portugueses*". Nesse mesmo ano, a comissão formada por Jaime Leote, A.A. Lopes e José Sebastião e Silva, representou Portugal no Simpósio realizado em Atenas em 1963, sendo em Dezembro do mesmo ano, assinado o protocolo entre a OCDE e o Ministério da Educação que previa a criação de turmas-piloto no 3.º Ciclo dos liceus portugueses.

[128] (1914-1972).

[129] *"Esta descrição do contexto em que surgiu a experiência está escrita pela mão de Sebastião e Silva em carta enviada ao GEPAE em Junho de 1969 e em entrevista publicada no Diário de Notícias em 23/01/1968".* (Lima, 1997, p.101)

A Comissão definiu as seguintes etapas ao nível da sua actuação:

1. *"Formar professores".*
2. *"Experimentar num grupo muito restrito de escolas".*
3. *"Afinar os textos após as primeiras experiências; alargar progressivamente o n.º de escolas e de professores formados".*
4. *"Apresentar programas de Matemática Moderna na TV para todo o público".*

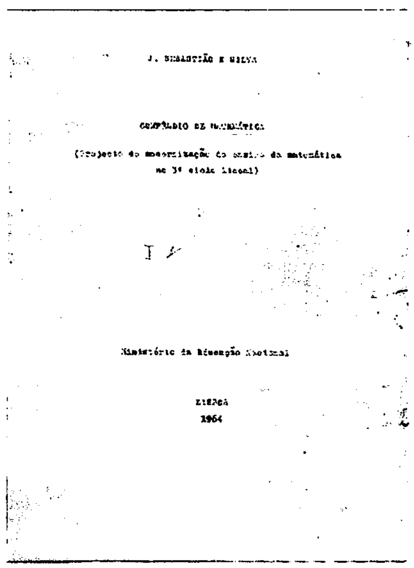
Lima, 1997, p.103

No ano lectivo de 1963-1964 funcionaram três turmas-piloto, uma em cada Liceu Normal (Lisboa, Porto e Coimbra) regidas por elementos da Comissão, sob orientação de Sebastião e Silva. Segundo Lima (1997), os textos eram da exclusiva autoria de José Sebastião e Silva, totalmente originais e acompanhados de um guia de apoio aos professores, sendo da responsabilidade dos restantes membros, a adequação ao nível etário, ao número de aulas e a proposta de exercícios e exemplos.

Nas palavras de Yolanda Lima:

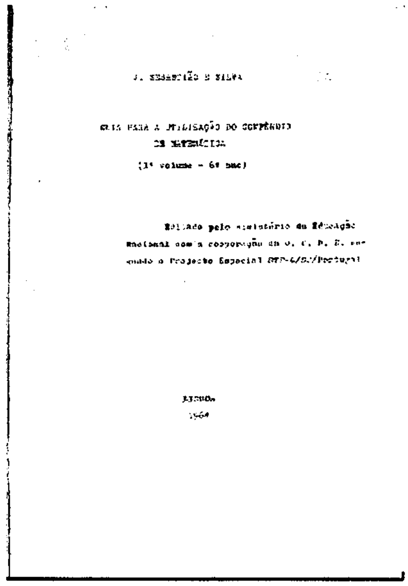
"Os textos, que foram surgindo em fascículos, surpreenderam toda a gente, porque para além dos conhecimentos científicos, revelavam excepcionais dotes pedagógicos, grande cultura humanística e sobretudo uma segurança de perspectivas e de modernidade só possível a quem está na crista da Ciência como investigador".

Lima, 1997, p.103


I

1964

Figura 21: Folha de Rosto do Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva, 1964


J. SEBASTIÃO E SILVA

GUIA PARA A UTILIZAÇÃO DO COMPÊNDIO
DE MATEMÁTICA

(1º volume - 6º ano)

Editado pelo Ministério da Educação
Nacional com a cooperação da O. C. D. E.

LISBOA
1964

Figura 22: Folha de Rosto do Guia para a utilização do Compêndio de Matemática de Sebastião e Silva, 1964

Em Agosto de 1964 foi promovido o 1.º curso para actualização dos professores em Oeiras e regido pelos elementos da Comissão; no ano seguinte, eram já 11 turmas-piloto do 6.º ano, com programas já ajustados pela experiência levada a cabo no ano anterior e pelas conclusões do Simpósio em Atenas; em Setembro de 1965 foi realizado o 2.º curso de actualização, também em Oeiras, tendo-se constatado um novo aumento das turmas-piloto. Este procedimento foi seguido durante os anos seguintes e tinham a particularidade de os monitores serem substituídos pelos seus formandos.[130]

Segundo Miranda (1966)[131] e Velho (1967)[132], no ano lectivo 1965-1966 realizou-se no distrito de Évora, o *Colóquio para Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática*, onde foram discutidos temas como, operações sobre conjuntos, aplicações, produtos cartesianos, relações, leis de composição, estruturas e diversos aspectos didácticos e filosóficos, o que antecedeu o lançamento de turmas-piloto nos liceus da referida região. Passados cinco anos do início da experiência existiam mais de 60 turmas-piloto no Continente, 6 em Luanda, 2 em Lourenço Marques, 1 em S. Tomé e 3 em Colégios.

Os regentes da experiência encontravam-se de 15 em 15 dias com José Sebastião e Silva, sendo que no Liceu Pedro Nunes, Sebastião e Silva assistia a muitas aulas, o que permitia o aperfeiçoamento constante dos textos piloto.

[130] Yolanda Lima foi uma das orientadoras desses cursos em Setembro de 1971 com as colegas Ondina Vasconcelos e Emília Horta. (Lima, 1997, p.104)
[131] Cit. em Matos, 2004
[132] Cit. em Matos, 2004

A TV EDUCATIVA contribuiu para a concretização da quarta fase do projecto. Promovido pelo IMAVE[133], todas as semanas José Sebastião e Silva falava de diversos aspectos da Matemática Moderna.

Sobre a evolução da experiência preconizada, Sebastião e Silva apresentou uma descrição numa carta enviada ao GEPAE[134] em 1969, que foi parcialmente reproduzida por Lima:

> *"Não nos é ainda possível atingir o grau de desenvolvimento de alguns projectos no que se refere a computadores, programação, estatística, equações diferenciais e aplicações à física (...). Mas a par de assuntos da Matemática clássica que continuam a ser ensinados, em geral com mais eficiência, foram introduzidos nos liceus portugueses, pela primeira vez, os seguintes temas de grande importância: Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Álgebras de Boole com aplicações a computadores, Teoria das relações e respectivos grafos, Programação Linear, Estruturas de grupo, anel e corpo, uso da régua de cálculo a par do cálculo logarítmico, Cálculo diferencial e integral aplicados a problemas concretos, Cálculo das probabilidades, Espaços vectoriais, Transformações geométricas... .*
> *(...) A organização das turmas-piloto tem sido baseada em convites dirigidos aos encarregados de educação (...). Isso tem permitido efectuar uma avaliação espontânea da experiência (...) não só esses convites são geralmente aceites, num regime de plena liberdade de escolha, como ainda surgem numerosos pedidos para incluir alunos não convidados (...)"*
>
> Silva, 1969, Carta enviada ao GEPAE[135]

Yolanda Lima foi regente do programa de 6.º ano entre 1967 e 1974. As figuras seguintes ilustram o organigrama estrutural dos programas para o 6.º e 7.º anos.

---

133 O Instituto dos Meios Audiovisuais de Ensino (IMAVE) foi instituído a 31 de Dezembro de 1964, pelo Decreto-Lei n.º 46 135 e reorganizado pelo Decreto-Lei n.º 48 963, de 14 de Abril de 1969, pelo ministro seguinte, José Hermano Saraiva. A utilização dos meios audiovisuais foi um dos projectos de Galvão Teles, devendo-se a este, a instituição em 1964, do Centro de Estudos de Pedagogia Audiovisual, que foi o ponto de partida para a criação do IMAVE. Este instituto tinha como objectivo «promover a utilização, a expansão e o aperfeiçoamento das técnicas audiovisuais como meios auxiliares de difusão do ensino e da elevação do nível cultural da população». (Carvalho, 1985, p.803)

134 O Gabinete de Estudos e Planeamento da Acção Educativa (GEPAE) foi criado em 1965 e tinha como finalidade, a avaliação das transformações provocadas no sistema de ensino pelos diplomas promulgados por Galvão Teles. Segundo o articulado, «O Ministério da Educação tem absoluta necessidade de um órgão que possa consagrar-se ao estudo permanente, sistemático, dos problemas de natureza educacional, em ordem a facilitar as decisões de fundo que o Ministro haja de tomar sob a matéria». (Carvalho, 1985, p.804)

135 Cit. em Lima, 1997, p.105

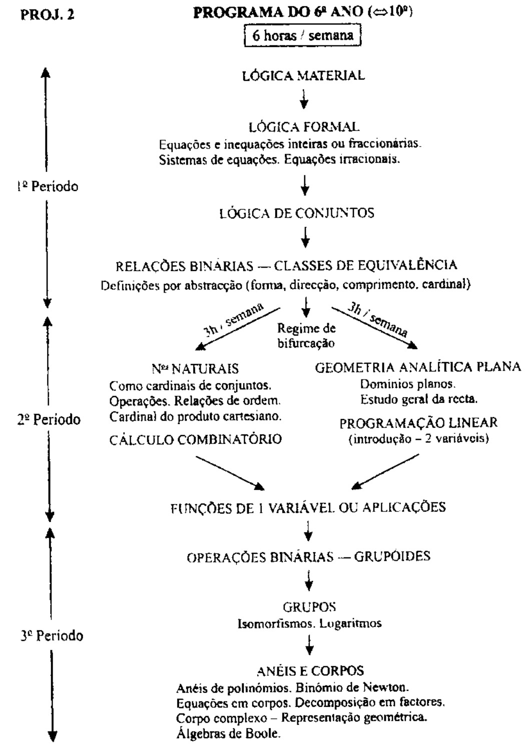


Figura 23: Estrutura do programa do 6.° ano regido por Lima de 1964 a 1974[136]

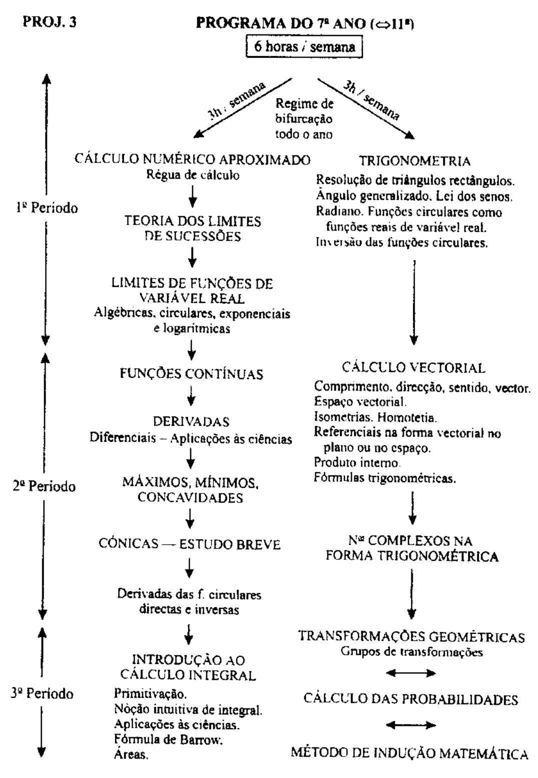


Figura 24: Estrutura do programa do 7.° ano leccionado por Lima de 1964 a 1974[137]

[136] Fonte: Lima, 1997, p.113
[137] Fonte: Lima, 1997, p.114

Apesar de os textos existirem apenas em folhas dactilografadas, os manuais e guias estavam recheados de uma visão pedagógica ímpar, exposta com grande clareza e lucidez, intercalados de reflexões culturais e filosóficas.

Vejamos algumas das suas palavras.

1. *"A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".*

2. *"A par da intuição e da imaginação criadora há que desenvolver ao máximo no espírito dos alunos o poder de análise e o sentido crítico. Isto consegue-se, principalmente, ao tratar da definição dos conceitos e da demonstração dos teoremas, em que a participação do aluno deve ser umas vezes parcial (em diálogo com o professor) e outras vezes total (encarregando cada aluno de expor um assunto, após preparação prévia em trabalho de casa)".*

José Sebastião e Silva, 1964[138]
Guia para a utilização do Compêndio de Matemática

Sebastião e Silva procurou realçar sempre a importância das aplicações da Matemática, evidenciando conexões com outros campos do conhecimento. Paralelamente sempre evidenciou uma preocupação com os métodos de ensino, assumindo como referência, George Pólya, um dos autores mais brilhantes no âmbito da Didáctica da Matemática.

O Professor José Sebastião e Silva foi um marco fundamental e impulsionador da Reforma da Matemática Moderna em Portugal. Deste modo, torna-se útil analisar o programa por si apresentado bem como as suas reflexões pedagógicas.

Numa carta a Emma Castelnuovo, Sebastião e Silva afirmava que:

"A Matemática não deve desprezar o concreto, a Matemática deve estar ligada à realidade física, em que o pensamento matemático mergulha as suas raízes".

Silva[139]

Para Sebastião e Silva, a Matemática era uma meio de atingir a formação integral de um cidadão e não um conjunto de técnicas a dominar[140].

[138] Cit. em Ponte et al., 1997, p.50
[139] Cit. em Ensino da Matemática Anos 80, SPM, 1982
[140] Silva ,1995

Vejamos algumas das suas palavras, na entrevista ao Diário de Noticias em 1968.

Do seu plano pedagógico, constava não só uma mudança ao nível de programas mas também ao nível dos métodos de ensino:

> *"(...) a educação, na era científica, não pode continuar, de modo nenhum, a ser feita segundo os moldes do passado. Em todas as classes o ensino das ciências tem que ser intensificado e remodelado desde as suas bases, não só quanto a programas mas ainda quanto a métodos".*
>
> Silva, Entrevista ao DN, 23 de Janeiro de 1968

Sebastião e Silva afirmava que no ensino tradicional o aluno:

> *"é tratado, precisamente, como se fosse uma máquina, enquanto que no ensino moderno se procura, por todos os meios, levá-lo a reflectir e a reencontrar por si as ideias fundamentais que estão na base da Matemática".*
>
> Silva, Entrevista ao DN, 23 de Janeiro de 1968

Sebastião e Silva considerava que o ensino da Matemática deveria reflectir não só a evolução da própria Matemática como também as necessidades sociais e económicas. Assim, seria crucial a inclusão de novos assuntos, como sendo:

> *"(...) a lógica matemática, teoria dos conjuntos, álgebra de Boole com aplicações a computadores. Teoria das relações (e respectivos grafos), programação linear, estruturas de semi-grupo, anel e corpo, uso da régua de cálculo em associação com o cálculo logarítmico, cálculo de valores aproximados como base para uma introdução ao cálculo diferencial e integral aplicado a problemas concretos e com a referência à sua resolução por meio de computadores, elementos de cálculo das probabilidades e de estatística matemática, cálculo vectorial, espaços vectoriais e transformações geométricas baseadas no cálculo vectorial".*
>
> Silva, s/d, manuscrito[141]

[141] Cit. em Silva, 1995

Ao chamar a atenção para uma remodelação das metodologias, o professor Sebastião e Silva prevenia para o facto de:

> *"O professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um professor de matematização, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos".*
>
> Silva, Guia para a Utilização do Compêndio, 2.º e 3.º Vol. p.9

Relativamente a exercícios propostos, alegava que:

> *"é mais importante reflectir sobre o mesmo exercício que tem interesse, do que resolver vários exercícios diferentes que não tenham interesse nenhum (...)", evidenciando que "entre os exercícios que podem ter mais interesse figuram aqueles que se aplicam a situações reais, concretas".*
>
> Silva, Guia para a Utilização do Compêndio da Matemática 2.º e 3.ºVol. p.9

Acrescentava também que havia muito a lucrar se:

> *"o ensino fosse normalmente orientado a partir de centros de interesses e tanto quanto possível laboratorial (...)".*
>
> Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2.º e 3. Vol., p.89

Alertava ainda para:

> *"Um ensino da matemática que atenda exclusivamente ao aspecto demonstrativo, desprezando as intuições, o método heurístico e as aplicações concretas, pode tornar-se altamente deformativo, em vez de formativo que pretende ser".*
>
> Silva, Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática, 2.º e 3.ºVol. p.111

José Sebastião e Silva considerava fundamental que os jovens encarassem a Matemática como uma ciência construtiva, sendo

> *"um dos objectivos fundamentais da educação, criar no aluno hábitos e automatismos úteis, como os de leitura, de escrita e de cálculo". [Mas, acrescenta ainda, que tal se] "trata manifestamente, de meios, não de fins".*
>
> Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2.º e 3.ºVol., pp.10-11

Reconhecendo, contudo a extensão dos programas, alegava que:

"se não houver tempo – o que é bem provável – podem omitir-se as demonstrações. O que importa, por enquanto, são as intuições: essas de modo nenhum devem faltar (...)".

Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2.º e 3.ºVol., p.81

Tal não significava que as demonstrações não tinham a sua importância:

"(...) o ensino de qualquer assunto deve (...) começar pela fase intuitiva. Mas a fase racional, que se lhe segue, é igualmente indispensável. Especialmente em matemática, nenhum resultado pode merecer inteira confiança, enquanto não for sancionado pela razão, isto é, demonstrado logicamente. Por isso, se é muito importante estimular no aluno a intuição e a imaginação criadora, não menos importante é desenvolver nele o espírito crítico, o hábito da análise lógica e do raciocínio rigoroso".

Silva, Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática, 2.º e 3.ºVol., p.175

As suas ideias preservavam também a evidente evolução tecnológica, como o uso de equipamento técnico, sublinhando o seu valioso contributo na Trigonometria e Estatística.

"Na verdade o uso dos computadores tem vindo a acentuar a importância do método experimental na investigação matemática, permitindo aperfeiçoar processos ou mesmo abrir caminhos inteiramente novos".

Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2.º e 3.ºVol., p.86

"os computadores e as máquinas de calcular têm o seu valor e o seu lugar no ensino da matemática e de modo algum substituem o ser pensante (...) os cálculos exigidos pelos métodos estatísticos são geralmente muito laboriosos. Por esse facto não será fácil nem aconselhável resolver nas aulas problemas numéricos de estatística sem o auxílio de máquina de calcular".

Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2.º e 3.ºVol., p.109

Esta orientação não defendia a substituição dos investigadores pelas máquinas, mas evidenciava a necessidade de saber pensar:

"Um dos principais deveres do ensino é ensinar o aluno a pensar. E todo o aluno deve ambicionar adquirir autonomia mental e espírito crítico suficiente, para não se deixar facilmente convencer com argumentos errados".

Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2.º e 3.ºVol., p.180

Apesar destas marcantes reflexões, Sebastião e Silva não conseguiu generalizar esta filosofia no Ensino da Matemática. Refere Matos (2004):

> *"Com a unificação do ensino e a morte de Sebastião e Silva, passaram a predominar no Ensino Secundário, métodos e programas de Matemática muito rígidos. A resolução de problemas e a matematização do real são desvalorizadas em benefício do formalismo e do rigor da linguagem".*
>
> Matos, 2004

7.6. Os Anos 70

Salazar morreu a 27 de Julho de 1970, tendo sido substituído por Marcelo Caetano[142], na Presidência do Conselho.

Após passagem de José Hermano Saraiva pelo Ministério da Educação, Marcelo Caetano convidou José Veiga Simão[143], em 1970, para a assunção dessa pasta.

Segundo Carvalho (1985), preocupado com a estrutura da Administração Central dos serviços que tutelava, Veiga Simão propôs uma reforma global dessas estruturas, sendo promulgada a 27 de Setembro de 1971, uma lei orgânica[144], que teve a colaboração de peritos estrangeiros, ao abrigo de um plano de assistência da OCDE.

No mesmo ano, Veiga Simão apresentou dois projectos de reforma: *Projecto do Sistema Escolar e Linhas Gerais da Reforma do Ensino Superior.*

Segundo Carvalho (1985), na Lei n.º 5/73 de 25 de Julho de 1973, foram aprovadas as bases a que devia obedecer a reforma do Sistema Educativo, a qual incluía inovações merecedoras de realce: o Sistema Educativo passaria a abranger a educação pré-escolar, a educação escolar e a educação permanente; institucionalização da educação pré-escolar, aumento do ensino obrigatório de 6 para oito anos (primário e preparatório de quatro anos cada um); polivalência do Ensino Secundário (aumentado para mais um ano e composto por dois ciclos de dois anos cada, o primeiro de carácter geral e o segundo, complementar); diversificação do Ensino Superior; criação de cursos de pós-graduação; novo enquadramento de formação e educação permanente.

---

[142] Professor Catedrático da Faculdade de Direito de Lisboa.

[143] Ilustre professor da Universidade de Coimbra, doutor em Física pelas Universidades de Coimbra e de Cambridge, havia dado provas de grande dinamismo enquanto reitor dos Estudos Gerais em Moçambique. (Carvalho, 1985, p.807)

[144] Decreto-Lei 408/71, de 27 de Setembro de 1971.

Veiga Simão sofreu grandes pressões para a não concretização dos seus projectos. Como transcreveu Carvalho (1985):

> *"«Nestes tempos históricos da vida nacional se teima em pôr pedregulhos em caminhos límpidos, tentando evitar a todo o custo que a bandeira da reforma possa flutuar na paz e na tranquilidade»".*
>
> Veiga Simão, 1970[145]

A partir do início dos anos 70 encetou-se um segundo período, que correspondeu à generalização dos programas de Matemática Moderna aos alunos de todos os níveis de ensino,

> *"sendo elaborados novos programas e novos manuais escolares. Foram os programas dessa época, com pequenos reajustes no período pós 25 de Abril que acabariam por vigorar até 1991".*
>
> Ponte et. al., 1997, p.50

Estes programas destinados ao 1.º ano, após o 1.º Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, estavam destinados a serem ensaiados a partir de Outubro de 1972, ao abrigo do Decreto-Lei n.º 47 587, de 10 de Março de 1967.

Apresentamos, na tabela seguinte, o Currículo e Horário Semanal estabelecido:

Currículo e Horário Semanal	
Português	4 horas
Língua Estrangeira	3 horas
Matemática	4 horas
Ciências da Natureza	3 horas
Ciências Humanas	3 horas
Educação Visual	3 horas
Educação Física	2 horas
Educação Musical	2 horas
Trabalhos Oficinais	4 horas

Tabela 5: Currículo e Horário Semanal

[145] Cit. em Carvalho, 1985, p.811, Discurso n.º8 de 31 de Dezembro de 1970.

Segundo o articulado, a aprendizagem na disciplina de Matemática teria como finalidades:

1. *"Desenvolver a capacidade de matematizar situações da vida real;*
2. *"Desenvolver a imaginação criadora";*
3. *"Criar hábitos de reflexão";*
4. *"Desenvolver as capacidades de análise e de síntese";*
5. *"Promover a aquisição consciente de determinadas técnicas de cálculo";*
6. *"Fomentar o desenvolvimento intelectual dos alunos com vista à aquisição do pensamento operatório";*
7. *"Consciencializar o aluno de que as construções matemáticas são apenas modelos aproximados do real;*
8. *"Proporcionar o conhecimento de oportunidades próximas e futuras em matéria de actividade matemática profissional.*

Programas para o 1.º ano após o actual 1.º Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, 1972, p.65

O programa propunha um conjunto de assuntos sem prévia e rígida ordenação, recorrendo a uma indicação de conhecimentos e capacidades que o aluno deveria possuir no fim de cada ano, assim como, atitudes e metodologia que o professor deveria assumir durante o processo. Deste modo, o esquema programático proposto, tinha como finalidade potenciar nos alunos a capacidade de recriar os conceitos matemáticos fundamentais que lhe permitissem uma compreensão das técnicas a utilizar, fixando níveis mínimos[146] que o discente deveria atingir. Para o efeito, e dada a inexistência de uma disposição específica ao nível da abordagem dos assuntos, recorreu-se aos objectivos cognitivos de B.S. Bloom, a qual propunha uma ordem para os sucessivos níveis a percorrer na aquisição dos conceitos.

As figuras seguintes contêm a lista dos níveis propostos pela Taxonomia usada no programa de Matemática.

TAXONOMIA DOS OBJECTIVOS EDUCATIVOS (cognitivos)

1.00 — **Conhecimento**

1.10 — *Conhecimento de dados particulares*

1.11 — Conhecimento de terminologia

1.12 — Conhecimento de factos particulares

1.20 — *Conhecimento de meios que permitam a utilização de dados particulares*

1.21 — Conhecimento de convenções

[146] Seguida à enunciação de cada objectivo seria indicado dentro de parêntesis, um número que correspondia na Taxonomia ao nível que se propunha.

1.22 — Conhecimento de tendências e sequências

1.23 — Conhecimento de classificações

1.24 — Conhecimento de critérios

1.25 — Conhecimento de métodos

1.30 — *Conhecimento de representações abstractas*

1.31 — Conhecimento de princípios ou leis

1.32 — Conhecimento de teorias

2.00 — **Compreensão**

2.10 — *Transposição*

2.20 — *Interpretação*

2.30 — *Extrapolação*

3.00 — **Aplicação**

3.10 — *Resolução de problemas novos*

4.00 — **Análise**

4.10 — *Análise de elementos*

4.20 — *Análise de relações*

4.30 — *Análise de princípios de organização*

5.00 — **Síntese**

5.10 — *Produção de obra pessoal*

5.20 — *Elaboração de plano de acção*

5.30 — *Determinação de um conjunto de relações abstractas*

6.00 — **Avaliação**

6.10 — *Crítica interna*

6.20 — *Crítica externa*

Figura 25: Taxonomia dos objectivos educativos proposta por Bloom

Observemos o exemplo constante do referido Programa.

«Capacidade para determinar somas, diferenças, produtos, quocientes (quando existirem) e potências de expoente natural destes números (3.00)»

O nível de aplicação era (3.00). Tal facto significava que o aluno deveria ter a capacidade de aplicar conhecimentos e técnicas e pressupunha que o discente tivesse adquirido os níveis anteriores, no domínio dos conhecimentos e da compreensão.

Como já foi referido anteriormente, o programa propunha também uma descrição de um conjunto de atitudes que o docente deveria assumir no processo de aprendizagem, sobretudo em pontos específicos e relevantes do programa.

A figura seguinte contém a descrição dessas atitudes:

1 — Na exemplificação e em exercícios sobre conjuntos, relações e aplicações deverão, também, ser usadas figuras geométricas consideradas como conjuntos de pontos definidos no plano (rectas, semi-rectas, segmentos, círculos, quadriláteros, etc.) tentando esbater, diríamos eliminar, a tradicional compartimentação aritmética-álgebra-geometria-vida real.

2 — As experiências relativas ao estudo das operações com conjuntos deverão proporcionar uma coordenação com a língua materna nos seguintes pontos:

— esclarecimento do uso das conjunções «e» e «ou» a propósito da intersecção e da reunião de conjuntos;
— uso do advérbio «não» a propósito do complementar de um conjunto;
— a inclusão de conjuntos e as expressões «se... então...» e «...implica...»;
— a igualdade de conjuntos e a expressão «...é idêntico a...».

Esta coordenação será constituída por breves apontamentos integrados num todo, mas não terão necessàriamente que constituir um estudo exaustivo do assunto.

3 — A propósito do estudo dos conjuntos será proposto o exercício de determinar todos os subconjuntos de um conjunto de dois ou três elementos. A procura de todos os casos possíveis deverá ser proposta em outras e variadas situações como a propósito de: simétrico, inverso, divisores, divisores comuns, factores de um produto e parcelas de uma soma.

4 — A propósito do estudo das relações deverão ser abordadas relações definidas por condições como:

«x é pai de y», «x é irmão de y», etc. do foro familiar;
«x mora na mesma localidade que y», «x é mais idoso que y», etc., definidas na turma;
«x é maior que y», «x é divisor de y», «x é menor ou igual a y», «x é o dobro de y», etc. definidas em conjuntos numéricos.

5 — A propósito de relações de equivalência deverão ficar esclarecidos os seguintes casos:

— paralelismo de rectas no plano;
— igualdade geométrica de segmentos;
— equipolência.

6 — No estudo dos vectores deverá salientar-se a necessidade de garantir que a soma de dois vectores é um vector, fazendo-se, na aula, a respectiva prova.

7 — A propósito do estudo de paralelismo de rectas no plano e com base na intuição dos alunos deverá surgir e salientar-se a necessidade de aceitar que a relação em causa é transitiva.

Figura 26: Atitudes que se espera ver o professor assumir, Programa de Matemática, 1972

Relativamente às indicações didácticas, sugeriu-se que o docente tivesse em consideração os seguintes pontos:

1. Uso do método heurístico, privilegiando a forma como a aprendizagem se desenvolve em detrimento do conteúdo.
2. Recurso às vivências dos alunos, partindo de situações concretas ou familiares para a matematização das mesmas;
3. Estabelecimento de hábitos de cooperação através da realização de trabalhos de pequeno grupo;
4. Propor situações de trabalho onde o aluno sinta necessidade de avaliar e criticar os resultados a que chega;
5. Proporcionar o contacto com situações que propiciem o despertar do processo dedutivo;
6. Proporcionar contextos variáveis onde os conceitos são frequentemente retomados em detrimento da repetição mecânica;
7. Recurso a meios audiovisuais e a material polivalente de concretização;

8. Propor uma aquisição prioritária de conhecimentos e capacidades aplicáveis a uma variedade de situações;

9. Proporcionar ao aluno contextos onde o aluno pode verificar e testar as soluções que vai recolhendo;

10. Uso gradual da régua de cálculo de modo a introduzir o aluno no mundo da aproximação de resultados;

11. Proporcionar oportunidades de cálculo com números decimais;

12. Substituir o esquema tradicional de conhecimentos – aplicações mecânicas desses conhecimentos (em grande profusão) pelo esquema conhecimentos – aplicações (algumas) – criação de situações ou de novos conhecimentos, de modo a proporcionar uma aula motivada e participada;

13. Incitar à criação de situações e desafiar a imaginação dos alunos, deixando às máquinas e aos sistemas automáticos, tudo o que exige cálculos muito laboriosos;

14. Usar a ferramenta matemática sobre o mundo real e procurar que as aquisições realizadas sejam definitivas e para além da escola.

Indicações Didácticas, Programa de Matemática, 1972[147]

Cumulativamente foi salientada a importância dos instrumentos didácticos, nomeadamente, o equipamento da sala de Matemática e o Compêndio. Assim, referiu-se a necessidade da existência de salas de aula específicas para a aprendizagem de Matemática, as quais deviam possuir mesas que permitam o trabalho dos alunos em grupos de quatro a seis elementos, assim como, um quadro a abranger toda a largura da sala onde uma das partes deveria ser quadriculada.

A figura seguinte contém as sugestões dadas para o equipamento da sala de Matemática.

1. *Equipamento da sala de Matemática*

Salienta-se a necessidade de existirem salas especialmente adaptadas à aprendizagem da Matemática.

Nessa sala as mesas serão individuais permitindo formar mesas maiores onde os alunos trabalhem em grupos de quatro a seis; o quadro deverá abranger toda a largura da sala e uma das suas partes deverá estar quadriculada.

O equipamento que se deseja como parte integrante deste ambiente de trabalho será constituído essencialmente por:

a) Material para usar em combinação com o quadro:

— Régua graduada (preferentemente deslisante, para traçado de paralelas);
— Esquadro (45 e 60 graus)
— Transferidor;
— Compasso;
— Giz de cor.

b) Material de projecção:

— Retroprojector;
— «Écran» de parede.

c) Outro material:

— Régua de cálculo de parede;
— Réguas de cálculo individuais (25);
— Colecções de figuras geométricas planas;
— Colecções de sólidos geométricos;
— Tabelas de quadrados, cubos e inversos.

d) Biblioteca adequada.

Figura 27: Equipamento da sala de Matemática, Programa de Matemática, 1972

[147] pp. 81-82

Em 2 de Setembro de 1974, já com Vitorino Magalhães Godinho como Ministro da Educação, foi publicitado o Despacho n.º 24-A/74, que ilustrava o contexto educacional português.

> *"A queda do regime fascista e o processo de democratização que iniciou em Portugal em 25 de Abril tornaram inutilizáveis, na sua maior parte, os programas dos ensino básico e secundário. Na verdade esses programas visaram, no seu conjunto a conformação com a ideologia do regime deposto, sofriam de graves distorções por motivos políticos e estavam crivados de um espírito anacrónico, em oposição flagrante muitas vezes com a atitude científica e a abertura da criação cultural ao mundo moderno. (...) Impõe-se que a escola sirva de transformação nacional em que estamos empenhados, contribuindo decisivamente para a formação dos cidadãos conscientes e responsáveis e de trabalhadores competentes que todos temos de ser".*
>
> Despacho n.º 24-A/74

Segundo o articulado, pretendia-se renovar os planos de curso quanto aos aspectos considerados mais prementes, reelaborar o conjunto de programas de ensino, nos casos em que se verificasse a sua completa inadequação aos objectivos educacionais e realizar ajustamentos ou correcções consideradas necessárias. As alterações efectuadas vigorariam a título experimental durante 1 ano, findo o qual, seria efectuada uma análise crítica e sugestiva para que efectivamente se pudesse reorganizar de raiz o sistema educacional português.

Deste modo, ficou determinado que no ano lectivo 1974/1975 fossem implementadas as seguintes alterações:

1 – Quanto ao ciclo complementar do ensino primário:

a) é alterado o curriculum correspondente, pela inserção do ensino de uma língua estrangeira, a que se destinam 4 tempos lectivos na 5.ª classe e 3 na 6.ª classe, e pela adopção dos nomes das disciplinas a usar no ensino preparatório;

b) neste ano lectivo de transição serão destinados 5 tempos semanais ao ensino da língua estrangeira, na 6.ª classe;

c) a regência desta disciplina ficará a cargo de um dos dois professores do ciclo complementar ou, em caso de impossibilidade, de um professor da escola preparatória mais próxima, porventura em regime itinerante, assistindo a todas as escolas do ciclo complementar da área.

4 – Quanto ao ensino secundário técnico, e também independentemente da criação da disciplina de Introdução à Política e da obrigatoriedade da disciplina de Português.

a) extingue-se a disciplina de Regulamentação Geral;
b) é criado um programa de transição, no 3.º ano, para os alunos provenientes do 4.º ano experimental do ensino preparatório;
c) a designação de Educação e Comunicação Visual substitui a de Desenho, relativamente à disciplina correspondente.
d) a disciplina de Educação Social dos cursos gerais do ensino secundário técnico é substituída pela disciplina denominada Vida Política.

5 – No ensino primário, no ensino preparatório e no ensino secundário vigorarão os programas a seguir publicados.

2 – Quanto aos 1.º e 2.º anos do ensino preparatório,

a) substituem-se os conjuntos lectivos por duas grandes áreas de disciplinas; área de comunicação e área de experiência;
b) a área de comunicação terá o seguinte leque de disciplinas e correspondentes tempos lectivos:

	1.º ano	2.º ano
Português	5	4
Iniciação à Língua Estrangeira	4	3
Matemática	3	3
Educação Visual	1+1 (de 110mn)	1+1 (de 110mn)
Música	1	1
Educação Física	3	3

c) será o seguinte o plano da área de experiência:

	1.º ano	2.º ano
História e Geografia	3	2
Ciências da Natureza	2	3
Trabalhos Manuais	1 (de 110mn)	2 (de 110mn)
Religião e Moral Católicas	1	1

3 – Quando ao ensino secundário liceal, e para além da criação da disciplina de Introdução à Política e da obrigatoriedade da disciplina de Português, conforme foi oportunamente determinado para o curso complementar,

a) extingue-se a disciplina de Lavores, nos liceus femininos, providenciando-se entretanto, pela transferência das respectivas professoras para o ensino preparatório;

b) é criado um programa de transição, no 3.º ano para os alunos provenientes do 4.º ano experimental do ensino preparatório;

c) a designação de Educação Visual e Estética substitui a de Desenho, relativamente à disciplina correspondente do curso geral.

d) a disciplina de Formação Social do curso geral do ensino liceal nocturno é substituída pela disciplina denominada Vida Política.

Figura 28: Alterações efectuadas ao programa de Matemática, 1974[148]

[148] De relembrar que havia sido estabelecido um programa para o Ciclo Preparatório em 1968 e, em 1972, um programa para o 1.º ano após o Ciclo Preparatório. Em 1974 são efectuadas algumas alterações e publicados novos programas.

Para Carvalho (1985), a crise que teimava em assombrar o nosso país continuava. Decorridos nove anos do golpe militar do 25 de Abril de 1974, já quinze governos haviam passado pelo poder.

Segundo Ponte et. al. (1997), no início dos anos 80 começaram a surgir críticas aos programas da Matemática Moderna. No nosso país essa manifestação (Movimento Back to Basics, originário nos EUA) não teve grande expressão, uma vez que o currículo da Matemática Moderna não substituiu o currículo tradicional, mas o integrou. Deste modo as principais críticas assentaram principalmente na ênfase dada às estruturas algébricas, no rigor da linguagem e uso excessivo de simbolismo, na resolução de exercícios irrelevantes para a melhoria do raciocínio dos alunos e nas competências dos alunos para a resolução de problemas.

> *"Acabamos por assistir a um ensino da Matemática orientado numa óptica essencialmente dedutiva, focando os aspectos lógicos, privilegiando o estudo dos mais diversos tipos de estruturas, desde as mais "pobres" às mais ricas. A Matemática aparece aos olhos dos jovens como ciência acabada, artificialmente criada, sem qualquer ligação com a realidade. A intuição, fundamental na criatividade, que teve um papel essencial na construção do edifício matemático, não é estimulada. Ora, se analisarmos as diversas etapas históricas da evolução da Matemática, reconhecemos que a intuição teve sempre um papel capital nas descobertas e, portanto, no progresso matemático e que a dedução, isto é, a construção do edifício da Matemática a partir de um número reduzido de axiomas e definições corresponde a uma fase posterior de síntese".*
>
> Aubyn, 1980[149]

Em 1987 foi divulgado o documento Proposta de Reorganização dos Planos Curriculares dos Ensinos Básico e Secundário, que viria a se conhecido como "Documento Fraústo". Segundo Matos (2004), este era um relatório preliminar de um grupo de trabalho constituído por Fraústo da Silva, Roberto Carneiro, Manuel Tavares Emídio e Eduardo Marçal Grilo, que tinha ficado responsável pela elaboração de uma nova proposta. O documento recomendava "como especialmente desejável" uma maior ênfase no cálculo nos primeiros anos de escolaridade, a par de "uma valorização do operacional em detrimento do conceptual".

Foram realizados diversos colóquios cujo tema central era a renovação do currículo de Matemática, vislumbrando-se uma nova reforma.

[149] Cit. em Ponte et. al, 1997, p.51

8. CONCLUSÃO

Ao finalizar o estudo, apuramos desde logo que se tratou de um fracção do que pode ser explorado. A restrição temporal exigiu uma delimitação que se impôs desde o início, apesar de muitas das temáticas tratadas conduzirem a outras vias de investigação, que a nosso ver, devem ser prosseguidas.

A bibliografia secundária permitiu, numa primeira fase, auxiliar e direccionar a pesquisa para a consulta de fontes primárias, a qual tornou-se necessária para a abordagem rigorosa que pretendíamos impor no estudo realizado. A informação proveniente destes pergaminhos preambulares revelou-se uma fonte de informação credível e abundante, que preencheu as nossas horas de leitura.

Na consulta de publicações de referência, apercebemo-nos que a guerra (sobretudo a partir da Segunda Guerra Mundial) havia conduzido a uma utilização crescente de talento matemático no exército, na marinha, na força aérea e em indústrias bélicas. Paralelamente, o redobrar de esforços em experiências espaciais conduziu a uma tomada de consciência de que a Matemática estaria intrinsecamente ligada ao tecido da vida, sendo possível realçar nesses projectos a mais valia de profissionais com conhecimentos matemáticos.

Apuramos que no final da década de 50, um ímpeto de mudança provocou grande alvoroço na comunidade matemática: em 1957, os russos lançavam o primeiro satélite artificial.

No seio da comunidade americana questionou-se a preparação técnica dos seus quadros, pressionando para a necessidade de formar engenheiros e cientistas de modo a permitir equiparação ou superioridade à tecnologia russa. Estas orientações ainda que no âmbito de um contexto político, económico e social, traduziram-se na vertente pedagógica, especificamente na modernização do ensino das Ciências.

A necessidade de formar pessoal altamente qualificado para um rápido ascendente na pesquisa espacial realçou a importância da Matemática e da Física na aquisição e/ou desenvolvimento das faculdades intelectuais inerentes à formação de técnicos e especialistas. Deste modo, alertou-se para a necessidade de revisão de métodos de ensino da Matemática considerados ultrapassados, assim como, uma reformulação dos programas.

Para além do contexto evidenciado, os resultados escolares não eram os desejados, tendo conduzido à dinamização de projectos de referência como, o SMSG, o UMMaP, o *Projecto Madison*, o UICSM, assim como, a criação da *Comissão Internacional para o Estudo e Melhoramento do Ensino das Matemáticas*.

Contudo, na Europa um grupo de matemáticos apelava a uma reforma mais radical, sendo organizado um simpósio internacional em Royaumont, que decorreu de 23 de Novembro a 4 de Dezembro de 1959. Neste encontro estiveram diversas personalidades, sendo de realçar a falta da presença portuguesa.

Tendo em consideração as comunicações e discussões realizadas, verificamos que existiu uma necessidade imediata de reunir uma comissão de especialistas pertencentes a diferentes países, com o objectivo de elaborar um programa para a Matemática para o Ensino Secundário, a partir do qual se redigiriam novos manuais. De entre todas as ideias e sugestões mencionadas, foram deliberadas várias resoluções gerais.

Em Dezembro de 1959 foi enviado a todos os países da OCDE, Canadá e Estados Unidos da América, um questionário que pretendia aferir da situação real de cada um dos países membros. Cumulativamente, cada país ficou encarregue de elaborar uma resumida monografia do estado à data dos programas em vigor. Em Portugal, a personalidade incumbida dessa tarefa foi Pedro de Campos Tavares, professor de Matemática no Liceu Camões em Lisboa.

Após a análise das informações oficiais apresentadas por Tavares, consideramos relevante proceder à transmissão das nossas conclusões.

Relativamente à estrutura geral do ensino, constatamos que o Ensino Secundário se dividia em duas categorias: o Ensino Liceal e o Ensino Técnico, nas quais poderiam ingressar os alunos após a realização de um exame de admissão. Tavares não explicou de forma clara quais as condições exigidas, no caso do Ensino Técnico, deixando aqui uma certa ambiguidade na utilidade de uma e outra vertente do Ensino Secundário. Foram ainda apresentados pormenores ao nível da organização estrutural dos Ensinos Liceal e Técnico, tendo sido destacado o facto de no ano lectivo 1960/1961, se prever a fusão dos 1.ºs Ciclos do Ensino Liceal e do Ensino Técnico, com o objectivo de constituir um ciclo comum, de 2 anos, cujo propósito seria o de orientação. Assim, ao fim destes 2 anos, os jovens poderiam escolher o prosseguimento dos seus estudos no 2.º Ciclo do Ensino Liceal ou no 2.º Ciclo do Ensino Técnico. Essa previsão foi realmente concretizada, não no ano lectivo mencionado, mas em 1968-1969, após a promulgação do Decreto-Lei n.º 47 480 de 2 de Janeiro de 1967. Este Decreto previa a instituição do Ciclo Preparatório com a duração de dois anos, a vigorar no ano lectivo de 1968-1969, sendo os novos programas aprovados a 9 de Setembro de 1968, pela Portaria n.º 23 601.

Relativamente aos programas em vigor em 1960 foi declarado que os mesmos eram iguais em todo o país, partilhando apenas o conteúdo dos programas destinados ao Ensino Primário e o Ensino Liceal. Realçou também que em Portugal as tendências ao nível do ensino da Matemática apresentavam uma lenta evolução.

Após a análise dos programas divulgados (e restringindo-a ao Ensino Liceal), verificamos que no 1.º Ciclo de estudos, a Aritmética era apresentada de forma intuitiva e prática, sem recorrer a demonstrações. Relativamente à Geometria, considerada como a base do programa, era intuitiva e experimental e pretendia desenvolver nos alunos o espírito de observação. Para Tavares, neste primeiro Ciclo de estudos procurava-se enfatizar os métodos activos baseados na observação, medição, actividades concretas e práticas assim como uma tentativa de coordenação[150] com o Desenho e os Trabalhos Manuais. Acrescentou, ainda, que se havia promovido uma colaboração entre o ensino das Ciências e a utilização das Matemáticas como linguagem, insistindo na iniciação simbólica e a utilização de letras, de fórmulas e de equações simples.

No 2.º Ciclo, o estudo baseava-se na Álgebra e no estudo lógico e dedutivo da Geometria segundo uma perspectiva axiomática. Na primeira, procurava-se atingir uma compreensão dos fundamentos e um conjunto de regras operatórias de cálculo, bem como, mais rigor na interpretação e na utilização das noções. Por seu lado, na Geometria tentava-se promover o carácter formativo da matéria, procurando igualmente desenvolver o rigor e o sentido lógico.

No primeiro ano do 3.º Ciclo de estudos retomava-se a Álgebra, aditando Trigonometria e Aritmética Racional. No último ano insistia-se no estudo da Álgebra e Trigonometria, acrescentando Geometria Analítica plana e Geometria Descritiva. Para Tavares, este último ciclo de estudos pretendia levar os alunos a raciocinar de forma clara, correcta e rigorosa, assim como, familiarizar os alunos com metodologias que permitissem permeabilidade e ginástica mental para posterior investigação de fundamentos e métodos.

Relativamente à preparação dos professores, estes deviam possuir uma licenciatura em Matemática e serem titulares de um certificado de estudos pedagógicos. Seguidamente, realizavam um estágio pedagógico de dois anos acompanhados por um metodólogo na área do Ensino Secundário correspondente. Os candidatos licenciados eram admitidos neste estágio mediante a realização de um exame de admissão que compreendia questões de carácter cultural e questões relacionadas com conhecimentos específicos de matérias incluídas no programa. O resultado deste exame constituía a habilitação legal para o ingresso no Ensino Liceal ou Técnico.

Tendo em consideração o que havia sido delineado em Royaumont, uma comissão de 16 especialistas reuniu-se na Jugoslávia, de 21 de Agosto de 1960 a 19 de Setembro de 1960, para elaborar um documento guia que pudesse servir de base à elaboração de textos e de cursos experimentais. Essa opinião era sustentada pelo facto de um programa definitivo apenas ser formulado após um período experimental e tendo em consideração a realidade específica de cada país.

[150] Segundo Tavares essa tendência foi definida no âmbito da reforma dos programas promulgados em 1948. (OCDE, 1961b, p.83)

De forma prática e atendendo ao facto de em cada um dos países membros, o Ensino Secundário diferir ao nível da sua duração, organização e forma de recrutamento dos alunos, apuramos que a Comissão resolveu considerar o Ensino Secundário como um período de 6 anos de escolaridade e dividir em dois ciclos, com a duração de 3 anos cada: o 1.º Ciclo (alunos dos 11 aos 15 anos) e o 2.º Ciclo (alunos dos 15 aos 18 anos). Apesar de o programa elaborado ser essencialmente destinado aos alunos com maior apetência, o trabalho realizado possuía as características que as *Resoluções de Royaumont* reclamavam: a propriedade de poder ser ajustável e moldável a todos os alunos, nos diferentes países.

Dada a restrição temporal do trabalho (4 semanas), a Comissão concentrou a sua intervenção nas seguintes matérias: Álgebra, Geometria e a Estatística. Neste âmbito foi fornecida a ordem através da qual os conteúdos deveriam ser ministrados, assim como, sugestões metodológicas de abordagem de temas, sempre com a premissa base de coordenar o ensino das diferentes matérias e conceber a Matemática como um todo.

Relativamente ao programa de Aritmética e Álgebra proposto para o 1.º Ciclo de estudos, o Grupo de trabalho considerou que, os métodos de ensino deveriam ser modificados, de modo a introduzir noções de Teoria de Conjuntos, de Grupo, Anel e Corpo, destacando o papel do professor no sentido de propiciar o seu contínuo uso e nos contextos mais diversificados, nomeadamente, na Geometria e na Álgebra.

Relativamente ao programa de Geometria proposto para este ciclo de estudos, constatamos a recomendação de alguns princípios que deviam reger a acção do professor e de quem elabora o programa, nomeadamente, a não utilização de uma terminologia difícil e prematura, definir os novos termos no contexto onde são usados e considerar modelos materiais a partir dos quais se devia estimular o desenvolvimento da abstracção. Os especialistas procuraram integrar a Álgebra e a Geometria através da Álgebra e das coordenadas, considerando que o estudo da Álgebra e da Geometria no 1.º Ciclo de estudos, poderia constituir uma preparação para um trabalho posterior em Análise. Verificamos que a própria Comissão considerou o facto de os métodos a preconizar exigirem mais material e consequentemente de um local parra os preservar, daí ter proposto o uso de uma Sala de Matemática. Dadas as particularidades dos sistemas de administração e educação foi reconhecida a dificuldade da implementação do programa de Geometria, mas o mesmo possuía a elasticidade suficiente de permitir a selecção, modificação, elaboração e o seu desenvolvimento.

No que concerne ao programa proposto para a Álgebra no âmbito do 2.º Ciclo e não esquecendo o objectivo primordial deste ciclo de estudos, as propostas efectuadas deveriam ser devidamente enquadradas na realidade de cada país, atendendo à duração do ciclo, do número de horas atribuídas ao estudo da Matemática e à capacidade dos alunos. Verificamos que as noções introduzidas no 1.º Ciclo de estudos como Anéis, Corpos, Grupos e Álgebra Linear deveriam constituir a estrutura do ensino da Álgebra, aparecendo sistematicamente no estudo da Geometria, numa perspectiva de cooperação. No que respeita à natureza dos exercícios que deviam fazer parte do curso, estes deveriam basear-se num grande número de exemplos e contra-exemplos e exercícios do tipo `descoberta', com o propósito de desenvolver no aluno uma motivação à investigação. Relativamente à Teoria de Grupos, que fazia parte do conjunto de matérias a leccionar, constatamos um alerta no sentido de não ser ministrada de forma isolada e distante das suas aplicabilidades. Deste modo, foi proposta a repartição desta temática por 3 anos, onde em cada um deles realçava os domínios de aplicação: o primeiro evidenciava as aplicações à Álgebra e Geometria, o segundo, as aplicações à Teoria dos Números, Cálculo, Teoria das Equações e Geometria e, por fim, o desenvolvimento desta temática no tratamento de alguns problemas teóricos.

Relativamente ao programa proposto para a Geometria para o 2.º Ciclo de estudos, este deveria possibilitar ao aluno o conhecimento de outras Geometrias e outros espaços que não exclusivamente a Geometria Euclidiana e o espaço euclidiano. Ficou também ressalvado que as sugestões presentes relativamente a estudos axiomáticos constituíam uma das numerosas possibilidades. Assim, as capacidades dos alunos e os conhecimentos anteriormente adquiridos deveriam ser factores a determinar essa escolha, sendo o professor um agente decisivo no sucesso dessa escolha.

Verificamos também a apresentação de um programa para Probabilidades e Estatística, dotado de flexibilidade, podendo ser integral ou parcialmente seguido, misto ou até minimizado, dependendo dos alunos a quem se destinava. No que respeita ao programa destinado ao 1.º Ciclo de estudos, o objectivo seria realçar as ideias intuitivas das noções fundamentais, recorrendo a práticas e materiais básicos, assim como, suportes gráficos. Esta metodologia devia ser encarada de forma interdisciplinar, organizando e representando dados do âmbito de outras áreas do conhecimento, consolidando simultaneamente técnicas de desenho. No que concerne ao programa destinado ao 2.º ciclo, este foi dividido segundo se destinava à área científica ou não científica. No âmbito da área não científica, verificamos a existência de programas distintos para a Teoria das Probabilidades e para a Estatística. Relativamente à primeira, considerou-se que o objectivo era dar a conhecer a teoria fundamental das probabilidades, insistindo sobre as noções necessárias ao curso de Estatística. Relativamente à segunda, pretendia-se que os alunos compreendessem os princípios base do pensamento estatístico. Quanto ao programa destinado à área científica, este não foi subdividido, apresentando uma lista de matérias praticamente igual à da área não científica e a inclusão do tratamento axiomático da Teoria das Probabilidades.

No que respeita aos domínios supracitados, constatamos a existência de um conjunto de referências bibliográficas, facultados pela Comissão, que poderiam ser alvo de consulta e de guia.

Decorridos aproximadamente quatro anos do simpósio de Royaumont e três anos dos estudos realizados na Jugoslávia, realizou-se um encontro internacional em Atenas, de 17 a 23 de Novembro de 1963. Realçamos a presença, como participantes e observadores, de L. Pauli, M. P. Theron e T. Viola, que juntamente com W. Servais, estiveram envolvidos na elaboração do programa de Matemática na Jugoslávia. Relativamente a Portugal, este foi representado pela comissão formada por J. Leote, A.A. Lopes e José Sebastião e Silva.

Um facto que consideramos importante neste encontro foi a clarificação por parte dos presentes do que realmente se entendia por "*modernização do ensino das Matemáticas*". Assim, apuramos que essa modernização estaria relacionada uma nova metodologia ao nível do ensino procurando unificar as matérias e com a inclusão de temáticas que possuíssem a propriedade de serem aplicáveis em outras ciências. O objectivo máximo seria possibilitar uma clara compreensão por parte dos alunos, uma exposição susceptível de os motivar, assim como, um espírito de procura e reflexão.

Constatamos que, apesar de existirem diferenças de opinião em questões de detalhe, foi unânime que o programa belga proposto por Servais, para as secções científicas do Ensino Secundário, era um exemplo de um programa moderno ao nível de espírito e conteúdo, constituindo uma forte referência para todos aqueles que pensavam empreender uma experimentação. Para a respectiva elaboração haviam sido consideradas várias fontes, em particular, o programa proposto na Jugoslávia em 1960. As temáticas contidas neste programa iam ao encontro do que havia sido delineado, nomeadamente, a inclusão da Teoria de Conjuntos, Teoria das Relações, Grupos, Anéis e Corpos, Espaços Vectoriais, Geometria do Espaço Afim, entre outras.

Após a auscultação de diferentes propostas, foram realçadas temáticas que possuíam uma característica unificadora e de particular importância ao nível das suas aplicações, como sendo, a Álgebra Linear, as Estruturas Algébricas, o Cálculo Diferencial, o Cálculo das Probabilidades e a Estatística, assim como, algumas teorias que fizessem apelo à utilização das calculadoras electrónicas.

Relativamente aos programas destinados aos alunos que pretendiam prosseguir estudos não científicos, foi considerado que os mesmos deveriam obedecer à mesma natureza que os das secções científicas, podendo, contudo, serem menos exigentes.

Um aspecto alvo de acordo foi também o facto de os programas elaborados não se limitarem a uma exposição teórica das aplicações, mas sobretudo a uma apresentação de exemplos práticos dessas aplicações, de modo a familiarizar os alunos com métodos matemáticos de resolução de problemas concretos. Acrescentou-se ainda, que esses exemplos deveriam ser transversais a todos os domínios da Matemática. A relevância dada a este aspecto, conduziu a que os conferencistas convidassem os presentes, no respectivo país, a constituir um conjunto de exemplos de aplicações da Matemática, adaptadas ao Ensino Secundário. Esta sistematização, segundo os mesmos, tinha como objectivo primordial, constituir uma base de investigação permanente e actualizada, para que, tanto professores como alunos, pudessem contactar com a evolução nas novas aplicações.

No que respeita à implementação de novas metodologias, constatamos que foi genérica opinião dos presentes relativamente à ligação estreita e indubitável entre a melhoria das matérias leccionadas e o aperfeiçoamento dos respectivos métodos de ensino. Neste âmbito, as intervenções de Papy e Beberman foram consideradas exemplos eloquentes dessa associação. Papy apresentou algumas técnicas a usar no ensino de novos conceitos de Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Secundário, nomeadamente, a Teoria de Conjuntos auxiliada por Diagramas de Venn e as Relações auxiliadas por grafos nos quais deveria ser usada. Beberman debruçou-se sobre a importância dos esquemas como potenciadores do desenvolvimento da capacidade de abstracção.

Dada a rapidez na evolução dos conhecimentos científicos e no âmbito da investigação contínua de novas metodologias, verificamos a importância dada ao trabalho experimental nas designadas `classes piloto´. Estas poderiam funcionar como um motor de adiantamento ao processo de organização e estabelecimento de novos programas para todos os alunos, assim como, um ponto de partida para a realização de espaços de discussão, análise e crítica construtiva.

No que respeita ao papel das aplicações no ensino da Matemática, verificamos que a maioria dos participantes considerou que no Ensino Secundário não deveria ser feita uma distinção entre Matemática Pura e Matemática Aplicada.

Apuramos também que a reforma do ensino da Matemática deveria ser feita sob a impulsão de três forças: a dos matemáticos, a dos psicólogos da adolescência e a dos dirigentes da indústria. Neste sentido, as aplicações da Matemática deveriam intervir como formulações matemáticas de situações concretas, procurando construir modelos matemáticos. Assim, poderia ser realizada uma brochura anual que facultasse um conjunto de problemas acessíveis ao nível do Ensino Secundário, reveladores da aplicabilidade prática da Matemática, sendo mencionados os problemas de Programação Linear, testes de hipóteses e aplicações potenciadas pelo recurso a calculadoras electrónicas.

Verificamos também que ao admitir a inclusão das aplicações, deveria ser explorada uma relação de cooperação entre os professores de diferentes áreas, não só entre as áreas de Matemática e Física (por ser mais evidente essa aplicação) mas também entre a Matemática e a Economia, Psicologia, Geologia entre outras.

Constatamos ainda que o sucesso de novas metodologias estaria intrinsecamente relacionado com o professor, independentemente do programa de Matemática elaborado. Deste modo, deveria ser dada especial atenção à formação inicial dada aos professores, não só em termos científicos como pedagógicos. Paralelamente, deveria ser cultivada uma ideia de *`educação permanente´*, onde os professores eram estimulados a fazer contínuo uso das suas faculdades intelectuais.

De modo a ter uma ideia mais precisa da realidade em cada um dos países da OCDE, foram elaboradas exposições sem carácter oficial, preparadas pelos participantes na Conferência de Atenas. Esses resumos tinham o objectivo de servir de guias de discussão para os participantes e neles foram expostas as inovações introduzidas ao nível do ensino da Matemática.

Depois da leitura do resumo relativo ao caso português, constatamos que após 1960, nenhuma nova matéria foi introduzida nos programas oficiais, sendo apenas referida uma experiência realizada durante o ano lectivo de 1963 – 1964, em três classes piloto (Porto, Lisboa e Coimbra) onde foram incluídas novas matérias como a Lógica Simbólica, Teoria dos Conjuntos e das Relações e a Álgebra Abstracta (conceitos de semigrupo, grupo, anel, corpo). Podemos concluir que a experiência preconizada ia ao encontro das directrizes delineadas na Jugoslávia ao nível do conteúdo, mas neste resumo não foi referida qualquer indicação relativa a novas metodologias de ensino. Foi contudo mencionada a dinamização de alguns cursos destinados aos docentes que incluíam conteúdos de Lógica Simbólica, de Teoria dos Conjuntos e das Relações, de Métodos Axiomáticos e Estruturas Algébricas, mas sem qualquer referência ao modo da sua organização.

Nos dois primeiros ciclos, o programa de Matemática era igual para todos os alunos, enquanto que no último ciclo de estudos tal não acontecia. Assim, para os alunos que prosseguiam os estudos na secção literária não era ministrada Matemática, o mesmo não acontecendo para aqueles que prosseguiam os seus estudos na secção científica. Esta situação não vai ao encontro ao que foi delineado em Atenas, onde todos os alunos deveriam receber ensino de Matemática.

Relativamente à formação exigida aos professores de Matemática, foi referido que o conteúdo da mesma era análogo ao exigido em outros países europeus, não especificando a quais se assemelhava. Não foram referidos os moldes em que se processava essa formação, quer na vertente científica quer pedagógica e se era privilegiado o conceito de educação permanente.

Através de uma publicação bienal, a UNESCO pretendeu contribuir para uma modernização do ensino das Ciências e, em particular, da Matemática. A análise desta publicação permitiu-nos constatar as dinâmicas que ocorreram durante os anos supracitados, nomeadamente, na organização de diversos colóquios e das contribuições de artigos escritos no âmbito do ensino da Matemática.

Durante o período de 1964 e 1965, os relatórios dos congressos internacionais demonstravam que a reforma da Matemática já havia passado para além de projectos preliminares, num grande número de países. Assim, este avanço permitiu analisar e reflectir sobre problemas suscitados durante a execução dos projectos, a saber: a coordenação do ensino da Matemática com outras ciências, os aspectos de natureza psicológica e pedagógica e a preparação dos professores. Neste sentido, destacamos a conjugação de esforços demonstrada por grupos interdisciplinares no desenvolvimento de programas de Matemática como base para o estudo da Física, Química, Biologia e Geologia. Salientamos também um encontro realizado em Oberwolfach (Alemanha) onde foram tratadas temáticas relacionadas com o contributo da Psicologia para o ensino da Matemática Moderna, focando a Psicologia Operacional desenvolvida por Jean Piaget.

Num congresso realizado em Dakar, em Janeiro de 1965, diversos membros expressaram o desejo de a reforma não ser tão brutal, constituindo um sinal de alguma desorientação. Deste modo, apuramos que a reforma não só se encontrava em diferentes fases como havia sido concebida de forma distinta, suscitando algumas questões relacionadas com a construção axiomática e o lugar da Geometria nessa construção. Wittemberg acabou mesmo por acentuar a necessidade de uma precisa concepção pedagógica da reforma sublinhando os perigos relacionados com a modernização formal.

O enorme interesse que a Matemática Moderna estava a suscitar conduziu a maior racionalização dos apoios dados pela OCDE e UNESCO, passando esta última a ser a principal força de suporte internacional para os educadores matemáticos. Um sinal desse interesse foi revelado nos diversos colóquios dinamizados após 1965, que contaram com a presença de mais de 600 participantes.

Paralelamente, foi surgindo com grande convicção diversas experiências no âmbito do Ensino Primário através de relatos de actividades desenvolvidas enquadradas em investigações como o *Projecto Nuffield* (Inglaterra) que contou com as ideias de Piaget e Dienes.

Apuramos que desde cedo a nível internacional se começou a questionar a validade da reforma. Como já foi referido, em 1965, Wittemberg sublinhou os perigos relacionados com o formalismo, tendo sido acompanhado por Begle, que em 1969, num evento em Lyon evidenciou a desconfiança relativa ao valor dos guias seguidos. Mais sinais de descontentamento foram dados por Freüdenthal, que apesar de se encontrar diligente na reforma a implementar na Holanda, revelou grandes preocupações com a introdução de novas Matemáticas no Ensino Primário, assim como, por um título de um colóquio promovido pela ICMI em 1967 intitulado "*Como ensinar Matemáticas para que sejam úteis*".

Contudo, a expressão que mais personificou essa onda de críticas, foi sentida no início dos anos 70. Este movimento ficou conhecido por *Back to Basics*, sendo a manifestação mais avassaladora a preconizada pelo matemático Morris Kline Estas críticas assentavam sobretudo no excessivo uso do simbolismo, na ausência de ligação com o Mundo Real, na relevância dada à Teoria dos Conjuntos na Matemática Elementar e na visão abstracta e rigorosa que ocultava a verdadeira essência da Matemática.

Verificamos também que a dinamização revolucionária característica dos encontros iniciais deu lugar a uma cuidada e moderada organização, onde a metodologia do tratamento das intervenções ganhou especial atenção. Por outro lado, os representantes do Ensino Superior foram gradualmente dominando o debate destas questões nesses encontros, constituindo a sua percentagem mais significativa.

A nossa pesquisa no âmbito de actas institucionais não terminou em 1966. Procuramos as publicações posteriores da UNESCO, tendo constatado que em 1970 e 1973 foram publicados um segundo e terceiro volumes na linha do já divulgado em 1967, para o ensino da Matemática, que foi preparado com a colaboração da ICMI. Continuaram a ser expostas contribuições, reflexões, experiências, assim como, diversas sugestões temáticas e metodológicas.

Uma análise global da repercussão do Movimento em Portugal era um dos nossos intentos. Assim, considerando a divisão estabelecida, procuramos numa primeira fase, evidenciar as linhas base de actuação de Carneiro Pacheco, no Ministério da Educação Nacional.

No início dos anos 40, o Ensino Liceal foi orientado na perspectiva de uma missão educativa da Família e do Estado e o Ensino Universitário esquecido. Verificamos que a principal obra de Carneiro Pacheco foi a criação da *Mocidade Portuguesa*, organização que ia ao encontro do modelo nacionalista defendido. Estas preocupações conduziram a uma simplificação do currículo escolar, nomeadamente, com a anulação da ramificação entre Letras e Ciências, no final do Ensino Liceal.

No que respeita ao ensino da Matemática foi possível assistir a uma dinâmica científica e pedagógica, promovida por um conjunto de personalidades de referência que muito contribuiu para o progressivo fim do isolamento dos cientistas portugueses. Salientamos a criação de iniciativas como a *Portugaliae Mathematica, Gazeta da Matemática,* Sociedade Portuguesa de Matemática, Seminário Matemático de Lisboa, Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa e Porto. Estas criações possibilitaram contactos regulares de matemáticos portugueses de diferentes Universidades e a criação de mecanismos de divulgação de trabalhos de investigação, sendo um exemplo, a criação da Junta de Investigação de Matemática.

Nos anos 40, era patente uma preocupação relativa ao estado do ensino da Matemática. Assim, constatamos alguns alertas relativos à concepção dos programas, ao tempo lectivo destinado à disciplina, à preparação cultural e pedagógica dos professores de Matemática, ao mesmo tempo, que, se propunha a introdução de novas metodologias de ensino e difusão de motivações para a disciplina de Matemática.

Paralelamente, constatamos a realização de algumas conferências que procuravam promover uma via de acesso aos problemas mais prementes, às aplicações e às relações da Matemática com as outras ciências.

O pós-guerra não conduziu a uma viragem na política nacional, tendo continuado o regime de ditadura de Oliveira Salazar, assim como, a vigilância e repressão ao nível de exteriorização de divergências. Neste âmbito, registamos um período particularmente delicado onde foi concretizada a reforma, aposentação ou demissão de diversas personalidades que se encontravam envolvidas num movimento de regeneração de actividades científicas e pedagógicas.

No que concerne ao programa de Matemática nos anos 40, este assentava em três grandes temáticas: a Geometria, a Aritmética e a Álgebra. Apuramos a preocupação de familiarizar o aluno com o cálculo numérico mental e escrito, o cálculo algébrico, as demonstrações no âmbito da Geometria, aspectos conseguidos através da resolução, repetição e mecanização de numerosos exercícios. Diversas críticas foram apresentadas, sendo exemplificadas em alguns artigos da *Gazeta da Matemática*, que expunham uma situação cada vez mais agreste ao nível do ensino e da preparação dos alunos.

Em 17 de Setembro de 1947, uma nova Reforma foi promulgada e novos programas foram estabelecidos um ano mais tarde. O Ensino Liceal sofreu algumas modificações estruturais e delineou-se uma actuação ao nível do combate ao analfabetismo. A rápida evolução da indústria, da economia e o novo mundo da automação exigiam progressos na investigação matemática e uma formação mais actualizada, sendo necessário dinamizar actividades regeneradoras e inovadoras para redesenhar o mundo que a 2.ª Grande Guerra havia inutilizado.

Já com Leite Pinto na governação foram projectados os primeiros passos de uma interligação entre a Educação e a Economia. Deste modo, constatamos um alargamento e generalização do Ensino Primário para ambos os sexos (duração de 4 anos), assim como, a planificação do *Plano de Fomento Cultural*, que culminou com uma iniciativa mais abrangente denominada *Projecto Regional do Mediterrâneo*, que conduziu ao estabelecimento de ligações com a OCDE. Tratou-se de uma iniciativa de grande alcance, uma vez que se planeava a promulgação de um Estatuto de Educação Nacional – carta magna do ensino, que pretendia relacionar as carências sócias/ culturais e económicas.

Ajudados pelos contactos internacionais estabelecidos, nos anos 50 e 60 foram sentidas progressivas e discretas modificações que, apesar de sempre controladas pelas entidades mais conservadoras do regime de Oliveira Salazar, conduziram a um novo alargamento e generalização da escolaridade obrigatória para 6 anos, para ambos os sexos e a um processo de fusão entre o 1.º Ciclo do Ensino Liceal e o 1.º Ciclo do Ensino Técnico.

Relativamente aos programas de 1948, estes foram apoiados por livros únicos e, na sua generalidade, mantiveram-se em vigor até aos anos 60, com pequenas mudanças.

As alterações escolares promovidas e discutidas a nível internacional, às quais Portugal foi aderindo com alguma passividade, conduziram apenas em 1963, à dinamização de uma experiência pedagógica que pretendia renovar a forma e o conteúdo do ensino da Matemática, introduzindo novos temas e novas abordagens dos assuntos já leccionados, procurando uma maior aproximação entre a Matemática do Ensino Secundário e o Ensino Universitário.

Esta experiência foi concebida pelo ilustre matemático José Sebastião e Silva (1914-1972), que a par da sua visão de investigador, sentiu dever de intervenção no Ensino Liceal. Para o efeito foram criadas três turmas piloto do 6.º ano, em cada um dos Liceus Normais de Porto, Coimbra e Lisboa. Inicialmente, os textos surgiam em fascículos, sendo compilados e mais tarde publicados, dando origem a uma obra com três volumes (cinco tomos): os dois primeiros contêm introduções a diversos domínios matemáticos e no último volume, incluem-se os guias para a utilização dos precedentes, concentrando sugestões pedagógicas, históricas e filosóficas. Estes guias didácticos pretendiam não só ser um complemento na planificação das aulas dos professores mas também ser um instrumento de aprendizagem para os próprios estudantes.

Verificamos também que Sebastião e Silva e a sua comissão preconizaram uma actuação ao nível da formação e actualização de professores, criação de textos e sua experimentação em grupos restritos e recurso à televisão para apresentação de programas de Matemática Moderna. Foi então proposta a inclusão de novos temas como a Lógica, Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas, Probabilidades, Estatística, entre outros, bem como, recomendações e orientações metodológicas relativas aos temas dos compêndios.

Constatamos ainda que os compêndios e os guias estão recheados de uma visão pedagógica ímpar, exposta com grande clareza e lucidez, intercalados com considerações culturais, históricas e filosóficas.

Durante o processo de experimentação, verificamos que Sebastião e Silva mantinha proximidade com as dinâmicas internacionais e das suas directivas, tendo feito parte da Comissão que representou Portugal na Conferência de Atenas em 1963.

A partir de 1967, com a criação do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário, o Ensino Liceal sofreu algumas modificações estruturais e passado um ano, foi promulgado um novo programa de Matemática para este ciclo, sob a influência da designada *Matemática Moderna*. Verificamos que o objectivo era uma penetração gradual e prudente dos novos conteúdos, dada a necessidade prévia de actualizar os diversos agentes do ensino. Entendemos igualmente que se pretendia dar à disciplina de Matemática uma base intuitiva e concreta, tanto quanto possível, evitando os assuntos que sobrecarregavam o antigo programa, modernizar progressivamente a linguagem matemática, orientar a aprendizagem com base em textos simples e adequados à faixa etária dos alunos, entre outros aspectos.

No início dos anos 70, Marcelo Caetano sucedeu a Oliveira Salazar na Presidência do Conselho e convidou Veiga Simão para o Ministério da Educação Nacional.

Encetou-se um segundo período, que correspondeu à generalização da Matemática Moderna. Foi então elaborado um novo programa, destinado ao 3.º ano, a ser ensaiado a partir de Outubro de 1972. Verificamos que o programa propunha um conjunto de temáticas, sem ordenação rígida, recorrendo a uma indicação de conhecimentos e capacidades para o aluno e indicações metodológicas destinadas aos professores, assim como, níveis mínimos a atingir pelo discente, recorrendo à Taxonomia de Bloom.

A morte de José Sebastião e Silva em 25 de Maio de 1972, com 57 anos, terá prejudicado os intentos e os passos já dados, uma vez que o espírito que se pretendia inculcar no ensino da Matemática foi esvanecendo.

A queda do regime ditatorial e o processo de democratização iniciado em Portugal em 25 de Abril de 1974 conduziu a novas orientações no ensino da Matemática, sendo incluídas mudanças em relação aos anteriores, fazendo prever um movo rumo.

Salientamos que o estudo relativamente ao caso português se debruçou, assim como o planeado, em questões mais globalizantes e linhas mestre de actuação. Ao explorar estas ideias outras povoaram a nossa consciência. Parece-nos que seria crucial analisar as práticas pedagógicas decorrentes destas concepções, dissecando para o efeito toda a produção escolar, como livros, cadernos de classe, exames. Além disso, depoimentos, entrevistas com actores que vivenciaram o *Movimento da Matemática Moderna* poderiam ser alvo de tratamento a partir dos pressupostos metodológicos do campo da História Oral.

Que o estudo contribua para um percurso sempre frutuoso ao nível da investigação.

BIBLIOGRAFIA

Actas Institucionais

OCDE. (1961a). *Mathématiques Nouvelles*. Paris. OCDE

OCDE. (1961b). *L´enseignement des mathématiques dans les pays de l´OECE* – Monographies. Paris: OCDE

OCDE. (1961c). *Un programme moderne de Mathématiques pour l´enseignement secondaire*. Paris: OCDE

OCDE. (1963). Mathématiques modernes: Guide pour enseignants. Paris: OCDE

UNESCO. (1967). New trends in Mathematics teaching. Vol. I. Paris: UNESCO

UNESCO. (1970). *New trends in Mathematics teaching*. Vol. II. Paris: UNESCO

UNESCO. (1973). *New trends in Mathematics teaching*. Vol. III Paris: UNESCO

Bibliografia Geral

ABRANTES, P. (2004). *A situação actual e o passado recente do ensino da Matemática*. In APM (1988), *A renovação de currículo de Matemática*. Lisboa: APM (Artigo publicado em 2004 na Gazeta da Matemática cedido pela APM)

ALVES, M.T.. (1946). *Resultados de um exame de Matemática – 1.º Ciclo*. Gazeta da Matemática, 30, pp.13-15

ALVES, M.T.. (1947). *Resultados de um exame de Geometria – 1.º Ciclo*. Gazeta da Matemática, 33, pp.13-16

ALVES, M.T.. (1947). *Algumas deficiências em Matemática de alunos dos liceus*. Gazeta da Matemática, 32, pp.14-16

ALVES, M.T.. (1951). *Programa de Matemática da actual reforma do Ensino Liceal* I. Gazeta da Matemática, 48, pp.11-14

ALVES, M.T.. (1951). *Programa de Matemática da actual reforma do Ensino Liceal II.* Gazeta da Matemática, 49, pp.8-11

ALVES, M.T.. (1952). *Programa de Matemática da actual reforma do Ensino Liceal III.* Gazeta da Matemática, 51, pp.7-9

BOGDAN, R. & BIKLEN, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

CARVALHO, R. (1985). *História do Ensino em Portugal.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

CASTELNUOVO, E. (1982). *Para um ensino da Matemática capaz de produzir cultura científica.* Ensino da Matemática: Anos 80. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. Lisboa: Reproscan (pp. 29-41).

CASTELNUOVO, E. (1987). *Didáctica de la matemática moderna.* México: Editorial Trillas. (Tradução do original publicado em italiano em 1970).

CERTEAU, M. (1982). *A escrita da história.* Rio de Janeiro: Forense Universitária.

D'AMBRÓSIO, B. S. (1987). *The Dynamics and Consequences of the Modern Mathematics Reform Movement for Brazilian Mathematics Education.* Tese de Doutoramento. School of Education - Indiana University.

D'AMBRÓSIO, U. (1996). *Educação Matemática: da Teoria à Prática.* São Paulo: Papirus.

DIENES, Z.P.. (1974). *Aprendizado Moderno da Matemática.* Rio de Janeiro: Zahar Editores. (Tradução do original, publicado em inglês em 1960)

DIENES, Z.P.. (1966). *Learning of mathematics by young children.* Mathematics in Primary Education. Hamburgo: UNESCO

FCUL, Departamento de Matemática. (1997). *Homenagem a José Sebastião e Silva*. Actas do Colóquio de Homenagem realizado em 12/12/1997 na Torre do Tombo. Lisboa: Silvas

FEHR, H.. (1970). *Education for Change – What Change?*. New trends in Mathematics teaching. Vol. II. Paris: UNESCO, pp. 199-213

GAZETA DA MATEMÁTICA. (1948). *Programa da disciplina de Matemática para o Ensino Liceal conforme o Decreto n.º 37.112 de 22 de Outubro de 1948*. PEDAGOGIA. N.ºs 37-38, pp.20-27

GIL, J.M.. (1982). *A Matemática do Ensino Secundário no Pensamento de Sebastião e Silva e nos anos oitenta*. Ensino da Matemática: Anos 80. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. Lisboa: Reproscan (pp. 131-138)

JONES, P. & COXFORD, A.F. (1970). Introduction. In National Council of Teachers of Mathematics. *A history of mathematics education in the United States and Canada*. (32nd book, pp. 11-92). Washington, D.C.: NCTM

KENEDDY Jr., T.R.. (1947). *A Máquina calculadora electrónica*. Artigo publicado na Gazeta da Matemática cedido pelo Prof. Mauro Picone e traduzido por José Sebastião e Silva. Gazeta da Matemática , 32, pp.1-4

KLINE, M. (1976). *O Fracasso da Matemática Moderna*. São Paulo: Ibrasa-Instituição Brasileira de Difusão Cultural S.A.. (Tradução do original, publicado em inglês em 1973)

LIMA, Y. (1997). *Modernização da Matemática no Liceu: um programa inédito de Sebastião e Silva*. Actas do Colóquio de Homenagem realizado em 12/12/1997 na Torre do Tombo. Lisboa: Silvas. (pp.99-114)

MATOS, J. M.. (2004) *Cronologia recente da Educação Matemática*. Em www.phoenix.sce.fct.unl.pt/CLIVROS/CLVRSHTM/CRONOL/CRONPRF.HTM

MATOS, J.M. (2004). *A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: Estudos históricos comparativos*. (Projecto no âmbito do convénio GRICES/CAPES).

MOON, B. (1986). *The 'New Maths' Curriculum Controversy: An International Story*. London: The Falmer Press

MORGADO, J.. (1985). *Ruy Luís Gomes, professor e companheiro*. Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 8, pp. 5-31

MORGADO, J.. (1995). *Para a história da Sociedade Portuguesa da Matemática*. Publicações de História e Metodologia da Matemática. Coimbra: Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.

PONTE, J. P. (1993). A educação matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. Quadrante, 2, pp. 95-126.

PONTE, J. P., BOAVIDA, A. M., Graça, M. & ABRANTES, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

PONTE, J.P., MATOS, J.M., & ABRANTES, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

PONTE, J. P. (2003). *O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* In O ensino da Matemática: Situação e perspectivas (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

REIS, F. (2003). *Episódios*. Sociedade Portuguesa de Matemática. http://www.instituto-camoes.pt/cvc/ciencia/e21.html

SILVA, J. C. (1995). *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva*. Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 32, pp. 101-114.

SILVA, J.S. (1951). *A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário*. Gazeta da Matemática, 49, pp.1-4.

SILVA, J.S. (1968). Entrevista ao Diário de Noticias realizada a 23 de Janeiro de 1968.

SILVA, J. S. (1975). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*, (1.º Vol.). Lisboa: Edição GEP do Ministério da Educação e Investigação Científica.

SILVA, J. S. (1977). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*, (2.º e 3.º Vol.). Lisboa: Edição GEP do Ministério da Educação e Investigação Científica.

SPM. (1982). *Ensino da Matemática: Anos 80*. Actas do Colóquio realizado no âmbito do Encontro Internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. Lisboa: Reproscan

Textos Legislativos

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 116, de 14 de Maio de 1936

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 241, de 14 de Outubro de 1936

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 272, de 21 de Novembro de 1941

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 32, de 9 de Fevereiro de 1943

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 241-Sup, de 27 de Outubro de 1952

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 198, de 7 de Setembro de 1954

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 284, de 31 de Dezembro de 1956

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 125, de 28 de Maio de 1960

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 160, de 9 de Julho de 1964

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 305, de 31 de Dezembro de 1964

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 263, de 12 de Novembro de 1966

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 1, de 2 de Janeiro de 1967

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 59, de 10 de Março de 1967

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 213, de 9 de Setembro de 1968

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 88, de 14 de Abril de 1969

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 228, de 27 de Setembro de 1971

PORTUGAL. Leis, Decretos, etc. – Diário do Governo, 1.ª Série, n.º 173, de 25 de Julho de 1973

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

ANEXOS

Fernanda Maria Brito Gonçalves

Tese submetida para obtenção do grau de

Mestre em Ensino da Matemática

Professora Orientadora:

Professora Doutora Maria Helena Castanheira Henriques

Porto, 2007

Índice das Ilustrações contidas nos Anexos

ANEXOS

Anexo 1.[1]

LISTE DES PARTICIPANTS

ALLEMAGNE

ATHEN, Hermann
Oberstudiendirektor
Mathematisch - Naturwiss. und Neusprach Gymnasium für Jungen
Kirchen Str. 7 - 24 b Elmshorn

SCHOEPH, Heinz
Oberschulrat
Ministerium für Unterricht und Kultur
Friedrich v. Pfeifferweg 3 - Rheinland-Pfalz - Mainz

AUTRICHE

SCHEIWEIN, Erwin
Direktor, Bundesrealschule
Waltergasse - Vienne IV

STUDZINSKY, Hermann
Direktor, Bundesrealgymnasium
Albertgasse 18 - Vienne VIII

BELGIQUE

BALLIEU, Robert
Professeur, Université de Louvain
8, place d'Arenberg - Heverlee - Louvain

VAN BERCKE, Jean J.
Secrétaire Général de la Commission de Réforme
Enseignement Moyen
Ministère de l'Instruction Publique
155, rue de la Loi - Bruxelles

Ilustração 1: Lista dos participantes no Simpósio de Royaumont, 1959

[1] Fonte: OCDE, 1961 a), pp.233-237

DANEMARK

RINDUNG, Ole

Inspector of Mathematics
25 Kloverbakken - Virum

FRANCE

HUISMAN, André

Professeur de Mathématiques, Lycée Montaigne
rue Auguste-Comte - Paris Ve

THERON, Pierre

(Président de la Section III)
Inspecteur Général
Ministère de l'Éducation Nationale
38, rue Lacépède - Paris Ve

GRECE

GEORGONTELIS, Kanellos

Professeur de Mathématiques
Karpathon 112 - Piraeus

SOTIRAKIS, Nicolaos

Professeur de Mathématiques
Pleiadon 31 - Paleon Faliron

IRLANDE

CAMPBELL, John

Senior Mathematical Master
Mountjoy School
150, Castle Avenue - Dublin

FORDE, John Martin

Senior Lecturer in Mathematics
College of Technology
Kevin Street - Dublin

ITALIE

CAMPEDELLI, Luigi

Professeur
Università di Firenze
Via Crimea 6 - Florence

CASTELNUOVO, Emma

Professeur
Via Boncompagni 16 [illegible]

LUXEMBOURG

KIEFFER, Lucien

Professeur de Mathématiques
Lycée de Garçons de Luxembourg et Cours Supérieur Univ[illegible]
1, rue Jean-Jaurès - Luxembourg

MICHELS, Marcel

Professeur de Mathématiques
Athénée Grand-Ducal de Luxembourg
109, Val Ste Croix - Luxembourg

NORVEGE

GJELSVIK, Ingvald

Directeur
Gubrandsdalens Landsgymnas
Vinstra

JOHANSSON, Ingebrigt

Professeur de Mathématiques
Institute of Mathematics
Oslo-Blindern

PIENE, Kay

Directeur
Pedagogical Seminar
Skjerstadvei 2a - Oslo

PAYS-BAS

LEEMAN, Henri [illegible]

Président de la Commission d'Examen
des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Secondaire
Cominius Straat 549^{1} - Amsterdam (W)

VREDENDUIN, Pieter G. J.

Professeur de Mathématiques
Directeur-adjoint
Gymnasium Arnhem
Kneppelhoutweg 12 - Oosterbeek

Ilustração 2: Lista de participantes no Simpósio de Royaumont, 1959

ROYAUME-UNI

HOPE, Cyril
Principal Lecturer in Mathematics
City of Worcester Training College
68 Malvern Road, Powick - near Worcester

LAND, Frank William
Senior Lecturer
Department of Education
University of Liverpool
129 Beresford Road - Birkenhead

SUEDE

FROSTMAN, Otto
Professeur
Université de Stockholm
Auravägen 21 - Djursholm

SANDGREN, Carl Lennart
Inspecteur général, Education Nationale
Kungl. Skolöverstyrelsen
Fack, Stockholm 8.

SUISSE

PAULI, Laurent
Professeur de Mathématiques
Directeur du Gymnase Cantonal
Neufchatel

SAXER, Walter
Professor für Mathematik
Eidgenössische Technische Hochschule
Boglernstrasse 63 - Kusnacht bei Zürich

TURQUIE

KODAMANOGLU, Nuri
Ministère de l'Education
14/1 Namik Kemal Mahallesi Cadde 3 - Ankara

YOUGOSLAVIE

DJERASIMOVIC, Bozidar
Professeur
Faculté de Mathématiques et des Sciences Naturelles
Université de Belgrade
Teslina 4 - Belgrade

Ilustração 3: Lista dos participantes no Simpóso de Royaumont, 1959

CANADA

BURWELL, James Hugh

Head of Mathematics Dept.
479 Richardson Ave. - Ottawa

ETATS-UNIS

STONE, Marshall H. (Président de la Session d'Etudes)

Professor
(Chairman, Commission on Mathematical Instruction -
International Union of Mathematicians)
Department of Mathematics
University of Chicago
Chicago 37, Illinois

TUCKER, Albert W.

Professor
Princeton University
Princeton, New Jersey

Ilustração 4: Lista dos participantes no Simpósio de Royaumont, 1959

Anexo 2.[2]

LISTE DES CONFÉRENCIERS

BEGLE, E. G.
Director
School Mathematics Study Group
Yale University
2502A Yale Station
New Haven, Connecticut
ETATS-UNIS

BOTSCH, O.
Dr. Oberstudiendirektor
Helmholtz-Gymnasium
Heidelberg
ALLEMAGNE

BRUNOLD, Charles
Directeur Général de l'Enseignement du Second Degré
Ministère de l'Education Nationale
110, rue de Grenelle - Paris 7e
FRANCE

Ilustração 5: Lista dos Conferencistas no Simpósio de Royaumont, 1959

[2] Fonte: OCDE, 1961 a), pp.237-239

BUNDGAARD, Svend
Professeur
Departement des Mathématiques
Université d'Aarhus
DANEMARK

BUNT, Luke N. H.
Ecole Normale des Professeurs
de l'Enseignement Secondaire
Université d'Utrecht
Lucas Bolwerk 11 - Utrecht
PAYS-BAS

CHOQUET, Gustave
Professeur,
Institut Henri-Poincaré
Université de Paris
112, rue du Bac - Paris 7e

DIEUDONNÉ, Jean (Président de la Section I)
Professeur,
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
58, rue de Verneuil - Paris 7e
FRANCE

FEHR, Howard F. (Président de la Section II)
Professor
Head of Department of Teaching of Mathematics
Teachers' College
Columbia University
New York 27
ETATS-UNIS

FELIX, Lucienne
Professeur de Mathématiques
Lycée la Fontaine
2, rue Octave-Feuillet - Paris 16e
FRANCE

MAXWELL, E. A.
Professor
Queen's College - Cambridge
ROYAUME-UNI

ROURKE, Robert E. K.
Head of Department of Mathematics
Kent School
Kent, Connecticut
ETATS-UNIS

SERVAIS, W.
Secrétaire, Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration
de l'Enseignement des Mathématiques
60, rue des Déportés - Morlanwelz
BELGIQUE

WALL, W. D.
Director
National Foundation for Education Research
79, Wimpole Street - London W. 1.
ROYAUME-UNI

Ilustração 6: Lista dos Conferencistas no Simpósio de Royaumont, 1959

Anexo 3.[3]

ESQUISSE D'UN PROGRAMME MODERNE

122. Ceci posé, je vais maintenant esquisser la façon dont on pourrait concevoir un programme moderne. Je subdiviserai ce programme selon l'âge des élèves (afin d'échapper aux particularités nationales et aux différences dans la répartition des enfants par cycles et par classes) ; et à chaque niveau j'examinerai les aspects expérimentaux et déductifs des diverses questions figurant au programme.

123. *Avant 14 ans.* Durant cette période, il serait sage de limiter l'enseignement des mathématiques à un travail expérimental sur l'algèbre et la géométrie plane, sans tenter de réduire les notions enseignées à des axiomes ; cela ne signifie pas qu'on ne doive pas insister sur les déductions logiques, chaque fois qu'il est possible de les exposer de façon parfaitement claire.

124. En algèbre, il s'agit de familiariser complètement les élèves avec les techniques du calcul littéral, la notion de nombre négatif et la résolution de problèmes du premier degré à une ou deux inconnues. C'est généralement ce que l'on fait aujourd'hui et je n'ai aucune modification à proposer sur ce point, si ce n'est qu'à ce stade je voudrais voir consacrer plus d'heures à l'algèbre qu'à la géométrie.

125. Quant à la géométrie, je sais que récemment on a fait beaucoup de recherches et d'expériences dans les milieux pédagogiques (en particulier en Belgique) sur les méthodes permettant d'enseigner la géométrie pour ainsi dire comme un chapitre de la physique. Je pense que ces initiatives sont à encourager fortement, pourvu qu'on mette l'accent, non sur des joujoux artificiels comme les triangles, mais sur des notions fondamentales, telles que symétries, translations, produits de transformations, etc.

126. Enfin, dans toutes ces mathématiques expérimentales, on devrait introduire dès que possible le langage et les nota-

Ilustração 7: Programa proposto por Dieudonné, Royaumont, 1959

[3] Fonte: OCDE, 1961a, pp.41-47

tions actuellement utilisés partout. Il n'y a rien de mystérieux ni de rébarbatif à représenter « appartient à » par $\in$ ou « entraîne » par $\Rightarrow$, ou à parler de « sous-ensemble » au lieu de « lieu géométrique ». Appeler un objet par son véritable nom, « groupe » ou « relation d'équivalence », par exemple, chaque fois que cet objet apparaît naturellement au cours d'une démonstration algébrique ou géométrique n'implique nullement qu'on soit obligé de développer à l'avance la théorie *abstraite* des groupes et des relations d'équivalence.

127. Si l'on juge bon, du point de vue psychologique, de commencer alors à parler d'axiomatique, nous devrons, suivant notre principe général, nous tourner vers la partie des mathématiques avec laquelle les enfants ont eu le contact le plus prolongé du point de vue « expérimental », c'est-à-dire l'arithmétique élémentaire.

128. C'est d'ailleurs un des plus simples et des plus beaux exercices de logique que de développer les règles ordinaires de l'arithmétique à partir des axiomes de Peano et je ne vois pas pourquoi on n'essaierait pas de le faire le plus tôt possible ; cela aurait d'ailleurs l'avantage de présenter à l'élève un des outils les plus fondamentaux des mathématiques classiques et modernes, à savoir l'emploi du raisonnement par récurrence.

129. Il va sans dire qu'on ne devrait pas aborder cette étude avant d'être à même de faire comprendre à l'élève la nécessité d'un tel traitement axiomatique, en l'incitant à réfléchir à ce que nous voulons dire, lorsque nous parlons de nombres entiers très grands, et en lui montrant pourquoi nous acceptons la validité des lois de l'arithmétique pour ces nombres qui sont complètement au-delà de notre intuition ; mais je ne pense pas avoir besoin d'insister sur ces points que vous connaissez beaucoup mieux que moi.

130. *14 ans.* Au point de vue « expérimental », c'est l'âge auquel on présente la notion de courbe représentative d'une fonction et il ne faudrait certainement pas remettre à plus tard cette présentation. Cette notion doit être immédiatement reliée à la méthode générale de résolution d'une équation $f(x) = 0$ par la courbe représentant la fonction $y = f(x)$, et aux différentes méthodes d'approximation (Lagrange, Newton) pour le calcul numérique des racines de la fonction.

131. On doit insister particulièrement sur les solutions par approximation et *jamais* sur des formules de résolution pour le calcul des racines. Il faut avertir l'élève qu'il ne doit pas s'attendre à rencontrer de telles formules en dehors de circonstances extrêmement spéciales ; à ce stade, c'est tout juste si on signalera la formule permettant de résoudre une équation du second degré et l'on s'abstiendra d'étudier spécialement ce type d'équation au détriment de la théorie générale, comme on le fait si souvent dans beaucoup de pays (notamment en France).

132. Au point de vue « logique », il semble qu'à ce stade. après plusieurs années d'algèbre, le temps soit venu de procéder à l'étude axiomatique des nombres réels. Bien entendu, je n'entends pas par là la *définition* traditionnelle des nombres réels au moyen des coupures de Dedekind ou des suites fondamentales de Cantor à partir des nombres rationnels. A ce niveau (et même beaucoup plus tard) ces définitions hautement abstraites n'ont aucune signification et elles doivent être réservées aux mathématiciens spécialisés.

133. Ce à quoi je pense est beaucoup plus prosaïque (et aussi beaucoup plus utile et plus fructueux) : il s'agit tout simplement d'énumérer les propriétés fondamentales des nombres réels, dont on peut logiquement faire dériver toutes les autres. On peut, comme on le sait, résumer ces propriétés en disant que les nombres réels forment un corps archimédien ordonné, auquel s'applique le principe des intervalles emboîtés.

134. Je ne propose pas non plus qu'on essaie dans l'enseignement secondaire de donner des démonstrations des théorèmes difficiles sur les nombres réels : existence du maximum, par exemple, ou théorème de Bolzano sur l'existence des racines (même pour les polynômes). Mais on devrait bien préciser que ces résultats, si évidents qu'ils paraissent, peuvent se démontrer à partir des axiomes.

135. *15 ans.* A cet âge, l'étude préalable de la géométrie plane par des procédés expérimentaux doit avoir préparé les élèves à l'énoncé des axiomes (A) et (B) donnés plus haut.

Naturellement, on doit s'attacher à développer les conséquences de ces axiomes, tant au point de vue algébrique qu'au point de vue géométrique, c'est-à-dire que chaque notion doit être donnée avec les deux types d'interprétation. Comme toujours il faut insister sur les transformations linéaires, leurs différents types et les groupes qu'elles forment. Bien entendu, au cours de ces développements les matrices et les déterminants d'ordre 2 apparaîtraient naturellement.

136. Parvenue à ce point, l'étude « expérimentale » des mathématiques dans les établissements secondaires est, à proprement parler, terminée, puisqu'on a désormais formulé tous les axiomes ; mais dans l'étude de toute théorie, on peut encore porter l'accent soit sur le côté technique, soit sur le côté conceptuel des notions à présenter. Conformément à notre principe, toute théorie nouvelle a plus de chances d'être assimilée par ses aspects techniques que par des déductions logiques délicates.

137. Cette observation s'applique en particulier au début du calcul différentiel (pour les fonctions d'*une seule* variable) qui doit, à mon sens, intervenir à cet âge. Je n'ai donc rien à reprocher à la façon dont cet enseignement se fait habituellement, pourvu que l'on ait correctement défini les notions fondamentales de limite et de continuité ; il vaut mieux sauter les démonstrations de tous les théorèmes du calcul différentiel (mais non leur énoncé précis) et se concentrer sur les techniques pratiques du calcul des dérivées et l'emploi de celles-ci pour la représentation graphique des fonctions et la résolution des équations.

138. *16 ans.* Dans la partie axiomatique du cours, on devrait développer davantage les conséquences des axiomes et se livrer à une étude plus approfondie des groupes de la géométrie plane, notamment en ce qui concerne l'emploi des angles et des fonctions trigonométriques. On devrait définir d'une façon précise la mesure des angles (comme un homomorphisme[1] du groupe des nombres réels sur le groupe des rotations) ; mais son existence sera admise sans démonstration. Cela entraîne naturellement l'introduction des nombres complexes et leur interprétation géométrique.

139. Enfin, une autre question intéressante pourrait être la discussion de toutes les formes quadratiques possibles dans le plan, ce qui équivaut à la classification des coniques.

140. Du point de vue « technique », on pourrait commencer l'étude de la notion de fonction primitive et de la notion d'aire pour des types simples de domaines, avec des exemples élémentaires ; on pourrait aussi commencer à apprendre aux élèves à construire des courbes données sous forme paramétrique.

141. *17 ans.* Au cours de la dernière année de l'enseignement secondaire, on présenterait enfin les axiomes de la géométrie à trois dimensions, ainsi que leurs conséquences habituelles, y compris naturellement l'emploi des matrices et des déterminants d'ordre 3.

142. D'un point de vue plus technique, on pourrait expliquer l'utilisation des fonctions primitives pour calculer les types simples de volumes, et on pourrait introduire la notion de coordonnées polaires ainsi que la méthode de construction d'une courbe donnée par une équation en coordonnées polaires.

143. Enfin, on peut certainement à cet âge définir et étudier les logarithmes et les exponentielles (sans en démontrer l'existence), en insistant sur le fait qu'il s'agit là d'homomorphismes de groupes.

144. Pour achever l'exposé de ce programme, permettez-moi d'ajouter quelques mots pour indiquer comment il pourrait se relier directement au programme actuel des premières années d'études universitaires, dont les principaux sujets sont :

a) l'algèbre linéaire sous sa forme générale (espaces vectoriels à un nombre quelconque de dimensions, théorie générale des matrices et des déterminants) ;

b) les formes quadratiques et les espaces euclidiens à un nombre fini de dimensions ;

1. C'est-à-dire une application qui associe à tout nombre réel x un angle $\theta(x)$ tel que $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$.

Ilustração 8: Programa proposto por Dieudonné, Royaumont, 1959

c) les dérivées et intégrales de fonctions de plusieurs variables réelles, avec leurs diverses applications ; les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles ; la géométrie différentielle élémentaire ;

d) la théorie élémentaire des espaces métriques, espaces de Banach, espace de Hilbert et autres espaces fonctionnels, et l'analyse fonctionnelle élémentaire.

Le programme proposé prévoit des interprétations intuitives immédiates

145. Vous remarquerez que dans tout ce programme, j'ai eu soin de n'introduire aucune notion mathématique qui n'ait pas une interprétation intuitive immédiate de quelque nature ; c'est là à mon avis ce qui différencie les mathématiques de l'enseignement secondaire des mathématiques universitaires.

146. A l'Université l'abstraction doit réellement commencer ; mais je pense que des étudiants qui auraient suivi le programme précédent y seraient bien préparés, car ils possèderaient un acquis étendu, qui leur fournirait des exemples des notions plus abstraites des mathématiques supérieures ; et d'autre part ils seraient familiarisés avec le processus d'axiomatisation.

147. Dans ce programme, je n'ai parlé nulle part de mathématiques « appliquées ». La question de savoir s'il faut en introduire dès l'école secondaire sort du domaine de ma compétence ; mais je pense que si une telle proposition était admise, on disposerait déjà des bases théoriques permettant d'enseigner ces questions.

148. Pour éviter tout malentendu, je tiens à préciser que, bien qu'il puisse vous sembler que j'ai critiqué sévèrement la géométrie, je n'envisage nullement de diminuer son importance ; aujourd'hui plus que jamais le langage et les idées tirés de la géométrie jouent un grand rôle dans les mathématiques supérieures, et il est tellement évident que les mathématiques appliquées se fondent sur la géométrie qu'il est à peine nécessaire d'en faire mention.

Nécessité de l'intuition de l'espace

149. Je pense donc que l'une des tâches principales des établissements secondaires est de former et de développer chez les élèves l'intuition de l'espace, tout en la faisant entrer dans le cadre logique qui permettra aux jeunes gens de l'utiliser plus tard. Il ne faut rien négliger pour atteindre ce but aussi tôt et aussi complètement que possible.

150. Mes critiques visent donc, non pas le but, mais les *méthodes* de l'enseignement de la géométrie ; j'affirme surtout qu'il vaudrait beaucoup mieux fonder cet enseignement, *non* sur des notions et des résultats artificiels qui, dans la plupart des applications, n'ont aucune utilité, mais sur les notions fondamentales qui dominent et éclairent toute question où la géométrie intervient.

151. Alors que par exemple la notion de *vecteur* a une importance capitale dans toute la science moderne, la notion de *triangle* est artificielle et n'a pratiquement aucune application en dehors des domaines hautement spécialisés de l'astronomie et de la géodésie.

152. Insisterait-on autant pour en faire la base de la géométrie élémentaire, sans cet accident historique que ce procédé fut employé par Euclide faute de meilleurs outils ? Devrons-nous donc continuer indéfiniment à suivre aveuglément la tradition, et fermer les yeux devant l'évidence écrasante qu'il y a de bien meilleures méthodes pour arriver au même résultat ? Je ne puis croire que notre profession manque à ce point d'audace et d'imagination.

***

Une vive controverse s'ensuit

153. Comme il fallait s'y attendre, la communication du professeur Dieudonné a été à la fois fortement approuvée par certains participants et accueillie avec de sérieuses objections par d'autres. Après un débat, les deux groupes ont modifié

Ilustração 9: Programa proposto por Dieudonné, Royaumont, 1959

Anexo 4.[4]

[illegible]

Ilustração 10: Lista dos responsáveis pelo preenchimento do inquérito, Dezembro 1959

[4] Fonte: OCDE, 1961a, pp. 259-262

GRECE

GLAVAS, Christos B.
Ministère de l'Éducation
Athenes

IRLANDE

O'FLANAGAN, Michael J.
Senior-Inspector in the Technical
Branch of the Department of Education
Talbot House, Dublin

ISLANDE

THORLACIUS, Birgir
Secrétaire Général
Ministère de l'Éducation
Reykjavik

ITALIE

CAMPEDELLI, Luigi
Professeur
Université de Florence
Via Crimea 6, Florence 408

LUXEMBOURG

KIEFFER, Lucien
Professeur de Mathématiques
aux Cours Supérieurs Universitaires
Luxembourg

NORVEGE

PIENE, Kay
Rektor
Pedagogical Seminar
Skjerstadvei 2a, Oslo.

PAYS-BAS

VAN DER NEUT, Dr. D. N.
Inspecteur - Enseignement secondaire
Ministère de l'Éducation
Mauritskade 39, The Hague

PORTUGAL

de CAMPOS TAVARES, Pedro
Professeur de Mathématiques
Lycée de Camões
Lisbonne

ROYAUME-UNI

ROLLET, A. P.,
H.M. Staff Inspector for Mathematics
Ministry of Education
Curzon Street, London W. 1.

SUEDE

SANDGREN, Lennart
[illegible]
Min[illegible]cation
Kungl. Skolöverstyrelsen,
Fack, Stockholm 8

SUISSE

PAULI, Laurent
Professeur de Mathématiques,
Directeur du Gymnase Cantonal [illegible]

TURQUIE

KODAMANOGLU, Nuri
Ministère de l'Éducation
II, I Namik Kemal
Mahallesi Cadde [illegible]
Ankara

YOUGOSLAVIE

DJERASIMOVIC, Bosidar
Faculté de Mathématiques et des Sciences Naturelles
Université de Belgrade
Teslina 4, Belgrade

CANADA

ROBINSON, Dr. F. G.
Research Director,
Canadian Teachers' Federation
444, Maclaren Street, Ottawa

ÉTATS-UNIS

FEHR, Howard F.
Head, Department of Teaching of Mathematics
Teachers' College
Columbia University
New York 27-N. Y.

Ilustração 11: Lista dos responsáveis pelo preenchimento do questionário, Dezembro 1959

Anexo 5.[5]

ÉTAT ACTUEL [illegible]SEIGNEMENT
DES MA[illegible]QUES
TENDANCES [illegible]OLUTION

FEUILLE DE RENSEIGNEMENTS

(à retourner avec le questionnaire)

1. Veuillez énumérer ci-dessous les types d'écoles classées dans les catégories proposées d'établissement de l'enseignement secondaire.*

Catégorie A. PRÉPARATION AUX ÉTUDES UNIVERSITAIRES		Catégorie B ÉTABLISSEMENTS NE PRÉPARANT PAS AUX ÉTUDES UNIVERSITAIRES
I. ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE	II. ENSEIGNEMENT NON SCIENTIFIQUE	

2. On sait que les données statistiques dont on peut dispo[illegible] d'un pays à l'autre. Veuillez indiquer les renseignements les p[illegible] dont vous disposez en précisant ci-dessous l'année à laquelle ils [illegible]

	ANNÉE

3. Dans tout le questionnaire, il est fait mention de l'année scolaire et parfois de l'âge réel correspondant des élèves. Aux fins de comparaison, vous êtes invités à désigner la première année de fréquentation d'une école primaire comme l'*ANNÉE SCOLAIRE nº 1* et ainsi de suite pour les années ultérieures jusqu'à la sortie de l'école secondaire, c'est-à-dire : années scolaires 1 à 11, 12 ou 13, selon le cas. Veuillez indiquer ci-dessous l'âge moyen des élèves qui correspond à chaque année scolaire

* Se référer aux titres utilisés dans le volume II de l'ouvrage publié [illegible] l'UNESCO sous le titre « l'Éducation dans le monde ». Les diagrammes et les g[illegible] de ce volume sont joints

Ilustração 12: Questionário enviado a todos os países, Dezembro de 1959

[5] Fonte: OCDE, 1961a, pp. 243-257

ANNÉE SCOLAIRE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
AGE DES ÉLÈVES													

4. Qui a rempli le questionnaire ? (c'est-à-dire qui est responsable des réponses) ?

NOM

FONCTION OCCUPÉE DANS LE SERVICE

5. Les renseignements portés dans la réponse ont-ils été exclusivement puisés à des sources officielles ?

MARQUEZ D'UNE CROIX

oui

non

DANS LA NÉGATIVE : Quels sont les autres organismes ou sources d'information qui ont été consultés ?
(Veuillez indiquer le nom des organismes)

Signature ....

Date ....

Ilustração 13: Questionário enviado a todos os países, Dezembro de 1959

ÉTAT ACTUEL DE L'ENSEIGNEMENT
DES MATHÉMATIQUES
TENDANCES ET ÉVOLUTION

PAYS :

I. Les questions statistiques qui suivent immédiatement ont pour objet de fournir des données générales facilitant la compréhension et l'interprétation des questions ultérieures.

Première question :

QUELS SONT LE NOMBRE ET LE POURCENTAGE DES ÉLÈVES DE L'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE SUIVANT RÉGULIÈREMENT DEUX LEÇONS OU PLUS D'ARITHMÉTIQUE PAR SEMAINE ?

Veuillez remplir le tableau suivant et indiquer le nombre et le pourcentage des élèves correspondant à l'âge inscrit en haut de chaque colonne.

	AGE EN ANNÉES							
	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'enfants								
Pourcentage des enfants du groupe d'âge considéré								

Commencer par la colonne correspondant à la première année d'étude de l'enseignement primaire.

*
* *

Deuxième question :

QUELS SONT LE NOMBRE ET LE POURCENTAGE DES ÉLÈVES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SUIVANT RÉGULIÈREMENT DEUX COURS OU PLUS DE MATHÉMATIQUES PAR SEMAINE ?

Veuillez remplir le tableau suivant et indiquer pour chaque groupe d'âge, le nombre d'enfants suivant les cours de mathématiques et le pourcentage qu'ils représentent par rapport à l'ensemble des enfants de ce groupe d'âge.

Ilustração 14: Questionário enviado a todos os países, Dezembro de 1959

Catégorie d'école secondaire (voir notes de couvertures) :	ÂGE EN ANNÉES																			
	10		11		12		13		14		15		16		17		18		19	
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
A. Enseignement scientifique																				
A. Enseignement non scientifique																				
B. Enseignement ne préparant pas aux études universitaires																				

Commencer par la colonne correspondant à la première année d'étude de l'enseignement secondaire.

***

Troisième question :

QUEL EST LE NOMBRE HEBDOMADAIRE MOYEN D[illegible]RES CONSACRÉES A L'ENSEIGNEMENT [illegible] AU COURS DE [illegible] DANS CHAQUE CLASSE ET QUEL EST LE NOMBRE DE [illegible] SONT RÉSERVÉES A L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ?

Veuillez indiquer le nombre total des heures dans la première colonne du tableau suivant et mentionner à côté le nombre moyen d'heures réservées à l'étude des mathématiques en tant que matière régulière d'enseignement, faisant l'objet de deux leçons ou plus par semaine, pour chaque année scolaire.

Catégorie d'école secondaire :	ÉCOLES SECONDAIRES - ANNÉE SCOLAIRE																			
	5		6				8		9		10		11		12		13		14	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
A. Enseignement scientifique																				
A. Enseignement non scientifique																				
B. Enseignement ne préparant pas aux études universitaires																				

de l'enseignement se[illegible]

Quatrième question :

COMBIEN L'ANNÉE SCOLAIRE COMPORTE [illegible]

Cinquième question :

EN DEHORS DES HEURES DE [illegible] SCOLAIRE LE NOMBRE MOYEN D'HEU[illegible] L'ÉTUDE DES MATHÉMATIQUES ?

Catégorie d'école secondaire :

A. Enseignement scientifique ..

A. Enseignement non scientifique

B. Enseignement ne préparant pa[illegible] aux études universitaires ..

Commencer par la colonne [illegible] de l'enseignement second[illegible]

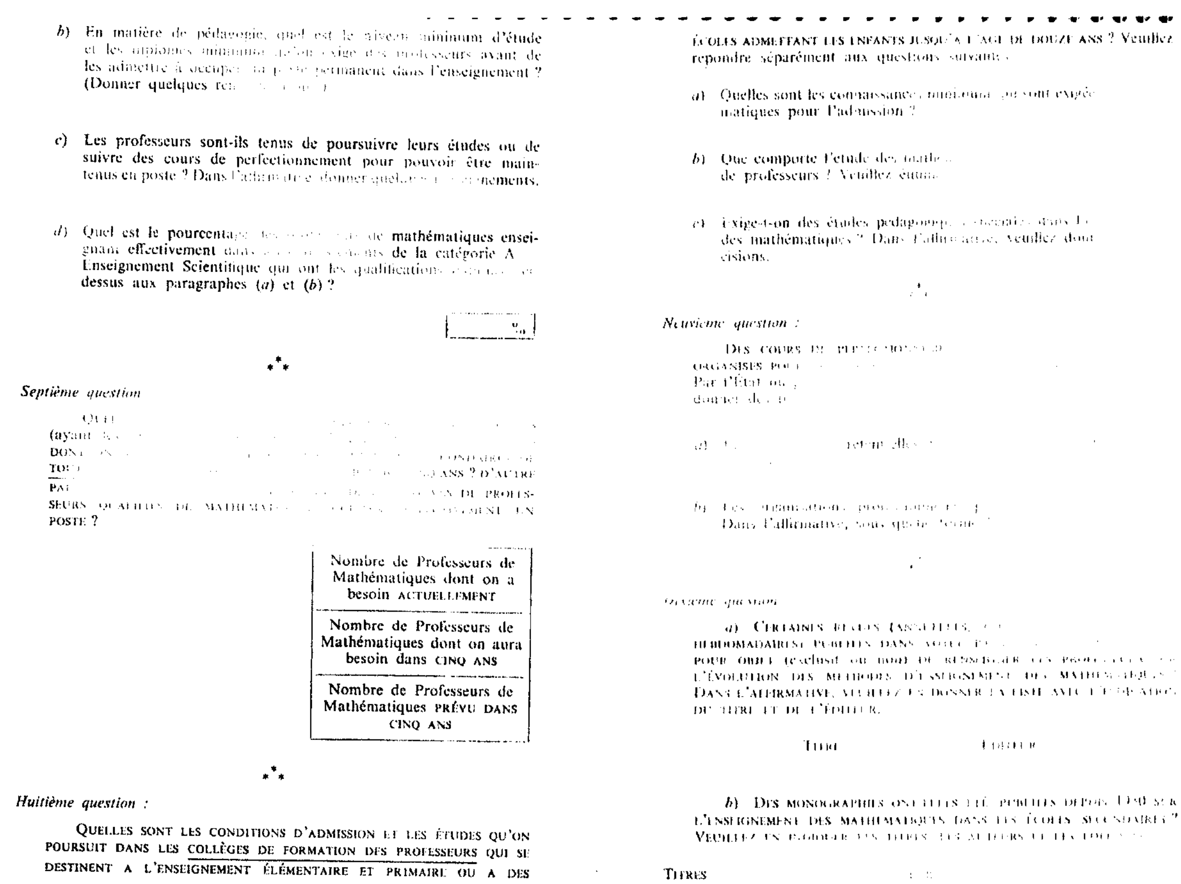
Sixième question :

QUELS SONT LES TITRES ET L'EXPÉRI[illegible] DE MATHÉMATIQUES DES ÉCOLES [illegible] DISPENSENT UN ENSEIGNEMENT SCI[illegible]

Veuillez répondre séparément à chacune des questions suivantes

a) En mathématiques, quel est le niveau minimum d'étude et [illegible] diplômes minimum qu'on exige des professeurs avant de [illegible] admettre à occuper un poste permanent dans l'enseignement [illegible] (Donner quelques renseignements.)

Ilustração 15: Questionário enviado a todos os países, Dezembro de 1959



b) En matière de pédagogie, quel est le niveau minimum d'étude et les diplômes minima [illegible] exige des professeurs avant de les admettre à occuper [illegible] permanent dans l'enseignement ? (Donner quelques [illegible])

c) Les professeurs sont-ils tenus de poursuivre leurs études ou de suivre des cours de perfectionnement pour pouvoir être maintenus en poste ? Dans l'affirmative donner quel[illegible]nements.

d) Quel est le pourcenta[illegible] de mathématiques enseignant effectivement [illegible] de la catégorie A Enseignement Scientifique qui ont les qualifications [illegible] dessus aux paragraphes (*a*) et (*b*) ?

%

Septième question

[illegible]

Nombre de Professeurs de Mathématiques dont on a besoin ACTUELLEMENT
Nombre de Professeurs de Mathématiques dont on aura besoin dans CINQ ANS
Nombre de Professeurs de Mathématiques PRÉVU DANS CINQ ANS

Huitième question :

QUELLES SONT LES CONDITIONS D'ADMISSION ET LES ÉTUDES QU'ON POURSUIT DANS LES COLLÈGES DE FORMATION DES PROFESSEURS QUI SE DESTINENT A L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE ET PRIMAIRE OU A DES ÉCOLES ADMETTANT LES ENFANTS JUSQU'A L'AGE DE DOUZE ANS ? Veuillez répondre séparément aux questions suivantes :

a) Quelles sont les connaissances minima [illegible] matiques pour l'admission ?

b) Que comporte l'étude des math[illegible] de professeurs ? Veuillez [illegible]

c) Exige-t-on des études pédagogiques [illegible] des mathématiques ? Dans l'affirmative, veuillez [illegible] cisions.

Neuvième question :

[illegible]

Dixième question

a) CERTAINES REVUES [illegible] HEBDOMADAIRES PUBLIÉES DANS VOTRE [illegible] POUR OBJET [illegible] L'ÉVOLUTION DES MÉTHODES D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ? DANS L'AFFIRMATIVE, VEUILLEZ EN DONNER LA LISTE AVEC [illegible] DU TITRE ET DE L'ÉDITEUR.

Titre Éditeur

b) DES MONOGRAPHIES ONT-ELLES ÉTÉ PUBLIÉES DEPUIS 1950 SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LES ÉCOLES SECONDAIRES ? VEUILLEZ EN DONNER LES TITRES [illegible]

TITRES

Ilustração 16: Questionário enviado a todos os países, Dezembro de 1959

Onzième question :

Les programmes adoptés par de nombreux pays constituent un cadre essentiel pour l'enseignement des mathématiques ; c'est pourquoi dans cette enquête il est demandé quand ces programmes ont été adoptés ainsi que les changements qui y ont été apportés depuis leur adoption.

a) QUI ÉTABLIT LE PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DES ÉCOLES SECONDAIRES ? INDIQUER L'AUTORITÉ RESPONSABLE SELON LA CATÉGORIE DE L'ÉCOLE.

i) ***Catégorie A.*** **Enseignement scientifique.**

ii) *Catégorie A.* Enseignement non scientifique.

iii) *Catégorie B.* [illegible] l'Université.

b) INDIQUER BRIÈVEMENT LES MODALITÉS D'ÉTABLISSEMENT DU PROGRAMME POUR ÉCOLES SCIENTIFIQUES DE LA CATÉGORIE A.

* * *

Douzième question :

JOINDRE AU QUESTIONNAIRE LES DERNIERS PROGRAMMES IMPRIMÉS DES COURS D'ARITHMÉTIQUE ET DE MATHÉMATIQUES POUR LES ÉTABLISSEMENTS D'ENSEIGNEMENT PRIMAIRE ET SECONDAIRE EN INDIQUANT LA DATE DE LA PUBLICATION.

* * *

Treizième question :

EXISTE-T-IL DANS VOTRE PAYS UN CORPS D'INSPECTEURS D'ENSEIGNEMENT POUR LES MATHÉMATIQUES ?

OUI [ ]

NON [ ]

Dans l'affirmative :

i) Quels sont les [illegible]

ii) Comment les inspecteurs sont-ils [illegible] ?

iii) Quelles sont leurs fonctions ?

iv) Rapport du nombre [illegible]

* * *

Quatorzième question :

ACTUELLEMENT, [illegible] OU SE MODIFIE-T-IL [illegible] MATIVE, EXPOSER LA SITUATION [illegible]

* * *

Quinzième [illegible]

DE [illegible] MODIFI [illegible] LA [illegible]

Seizième question

Depuis quelques [illegible] cerne les méthodes d'enseignement [illegible] dans de pareils cas, les avis divergent quant aux méthodes à adopter. On a posé les questions [illegible] des mesures que les pays [illegible]

[illegible] LE PROGRAMME [illegible] LES MÉTHODES [illegible] MATHÉMATIQUES. DÉCRIRE CHAQUE [illegible] EFFECTUÉE PAR UN ORGANISME [illegible] ORGANISME AYANT UN APPUI OFFICIEL OU DES ORGANISMES [illegible]

* * *

Ilustração 17: Questionário enviado a todos os países, Dezembro de 1959

Dix-septième question :

Des quels manuels courants se sert-on le plus souvent dans les écoles secondaires scientifiques de la catégorie A ? Indiquer les titres, le nom des auteurs et leurs fonctions actuelles ainsi que les éditeurs.

***

Dix-huitième question :

a) Qui choisit les manuels devant etre utilisés pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires scientifiques de la catégorie A ?

On peut cocher plusieurs rubriques.

	Cocher les cases correspondantes
a) Le Professeur ...	
b) Le Chef de la Section ou le Directeur de l'Établissement	
c) Le Directeur régional de l'Enseignement	
d) Un Comité nommé à cette fin....	

b) Les manuels doivent-ils satisfaire a un ensemble de normes ou de règles applicables a l'échelon national ? Dans l'affirmative, exposer la situation.

***

Dix-neuvième question :

Existe-t-il des revues publiées a l'intention des élèves des écoles secondaires s'intéressant aux mathématiques ou particulièrement doués ? Dans l'affirmative, indiquer ci-dessous les titres de ces revues, le nom des éditeurs et leur tirage.

Titre	Éditeur	Tirage

Vingtième question :

Existe-t-il en dehors des activités scolaires officielles des clubs d'étudiants ou l'on s'intéresse aux questions mathématiques ?

	Cocher les cases correspondantes
a) Il existe de nombreux clubs de ce genre	
b) Il existe quelques clubs de ce genre	
c) Il n'existe pas de tels clubs	

***

Vingt-et-unième question :

Répondre aux questions suivantes relatives a l'arithmétique et aux mathématiques.

Sans faire de distinction entre les différentes catégories d'Écoles, répondre aux Questions suivantes relatives aux Mathématiques.

A. Arithmétique. Au cours de quelle année scolaire les problèmes ci-dessous figurent-ils pour la première fois au programme ?

	Année scolaire
a) 68 + 25	
b) 804 − 347	
c) Les tables de multiplication jusqu'à 10 × 10 ou au-delà	
d) addition 784,92 27,38 63,67 591,59	
e) $2\frac{3}{5} + 5\frac{7}{12}$	
f) 684 × 342	
g) $2\frac{3}{4} : 1\frac{5}{8}$	
h) 375,24 divisé par 17,3	
i) Calculer mentalement 4 × 239	
j) De quel nombre 6 est-il les 15 % ?	
k) L'enseignement des opérations arithmétiques, décrites ci-dessus, est-il complété par des explications théoriques destinées à faciliter la compréhension de ces questions ? Dans l'affirmative, expliquer brièvement comment et quand ces explications sont données.	

Ilustração 18: Questionário enviado a todos os países, Dezembro de 1959

Répondre aux questions suivantes relatives aux élèves fréquentant les écoles de la Catégorie.

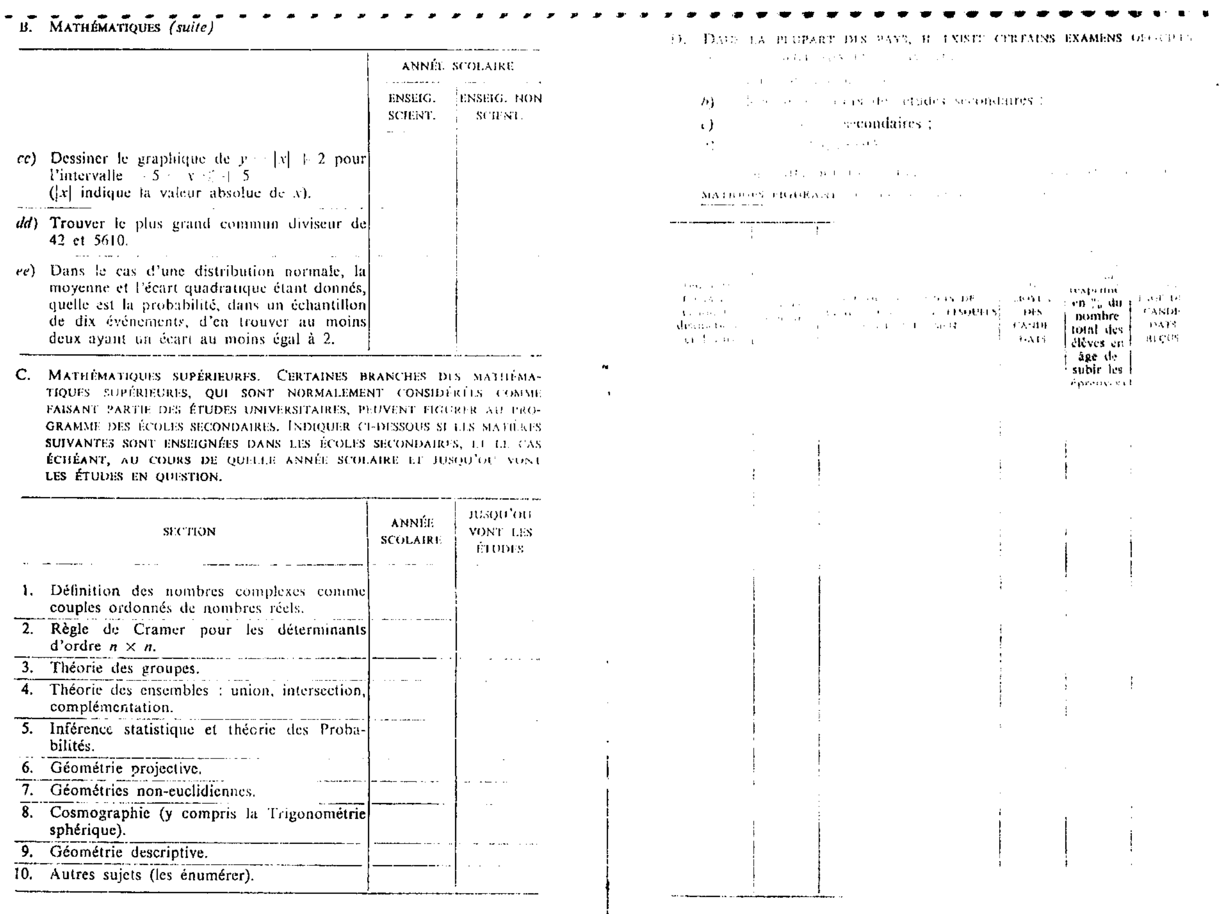
B. MATHÉMATIQUE. AU COURS DE QUELLE ANNÉE SCOLAIRE LES ÉLÈVES FRÉQUENTANT LES ÉCOLES SECONDAIRES DE LA CATÉGORIE A. APPRENNENT-ILS A RÉSOUDRE LES PROBLÈMES SUIVANTS ? INDIQUER SI LA MATIÈRE CONSIDÉRÉE N'EST PAS ENSEIGNÉE.

		ANNÉE SCOLAIRE	
		ENSEIG. SCIENT.	ENSEIG. NON SCIENT.
a)	Résoudre $3x - 7 = 2x + 4$		
b)	Résoudre $3x^2 - 15x + 18 = 0$		
c)	Résoudre $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$		
d)	Deux trains parcourent chacun 960 kms. Le premier met 4 heures de plus que l'autre. Il fait en moyenne 20 kms à l'heure de moins que l'autre. Trouver la vitesse de chaque train.		
e)	Résoudre et discuter suivant les valeurs de m : $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + (m - 2) = 0$		
f)	37 est un nombre écrit en numération décimale. L'écrire dans le système à base 6.		
g)	Représentation graphique de $y = 3x + 2$		
h)	Représentation graphique de $y = \frac{3x + 5}{4x - 5}$		
i)	Développer $(3x - 2y)^8$		
j)	Prouver par récurrence l'égalité : $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}(2n + 1)(n + 1)$		
k)	Donner la valeur $\frac{\sqrt{16} - \sqrt{3}}{\sqrt{49} - \sqrt{2}}$		
l)	Formule relative à $\cos(\alpha + \beta)$ et démonstration.		
m)	Formule concernant le cosinus d'un angle d'un triangle quelconque et démonstration.		
n)	Calcul de l'aire d'un triangle de base 8 cm et de hauteur 5 cm.		

B. MATHÉMATIQUES (suite)

		ANNÉE SCOLAIRE	
		ENSEIG. SCIENT.	ENSEIG. NON SCIENT.
o)	Trouver le volume d'une pyramide dont la base mesure 16 cm² et la hauteur 12 cm.		
p)	Calculer un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle sachant que l'autre mesure 5 unités et l'hypothénuse [illegible]		
q)	[illegible]		
r)	Trouver la dérivée de la fonction [illegible]		
s)	[illegible]		
t)	Période de Y = 2,6 sin [illegible]		
u)	Étant donné deux vecteurs non nuls AB et CD 1° trouver AB + CD 2° trouver le produit scalaire [illegible]		
v)	[illegible] des nombres réels posi[illegible]		
w)	Prouver que si une droite est perpendiculaire à deux droites concourantes, elle est perpendiculaire au plan de ces droites.		
x)	Équation de la droite passant par les points A(3,2) et B(4,1)		
y)	Calculer les racines de [illegible]		
z)	Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 « faces » en jetant 5 pièces de monnaie.		
aa)	Résoudre l'inéquation [illegible]		
bb)	Résoudre le système [illegible]		

Ilustração 19: Questionário enviado a todos os países, Dezembro de 1959



B. MATHÉMATIQUES *(suite)*

	ANNÉE SCOLAIRE	
	ENSEIG. SCIENT.	ENSEIG. NON SCIENT.
cc) Dessiner le graphique de $y = |x| + 2$ pour l'intervalle $-5 \leq x \leq +5$ ($|x|$ indique la valeur absolue de x).		
dd) Trouver le plus grand commun diviseur de 42 et 5610.		
ee) Dans le cas d'une distribution normale, la moyenne et l'écart quadratique étant donnés, quelle est la probabilité, dans un échantillon de dix événements, d'en trouver au moins deux ayant un écart au moins égal à 2.		

C. MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES. CERTAINES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES, QUI SONT NORMALEMENT CONSIDÉRÉES COMME FAISANT PARTIE DES ÉTUDES UNIVERSITAIRES, PEUVENT FIGURER AU PROGRAMME DES ÉCOLES SECONDAIRES. INDIQUER CI-DESSOUS SI LES MATIÈRES SUIVANTES SONT ENSEIGNÉES DANS LES ÉCOLES SECONDAIRES, ET LE CAS ÉCHÉANT, AU COURS DE QUELLE ANNÉE SCOLAIRE ET JUSQU'OÙ VONT LES ÉTUDES EN QUESTION.

SECTION	ANNÉE SCOLAIRE	JUSQU'OÙ VONT LES ÉTUDES
1. Définition des nombres complexes comme couples ordonnés de nombres réels.		
2. Règle de Cramer pour les déterminants d'ordre $n \times n$.		
3. Théorie des groupes.		
4. Théorie des ensembles : union, intersection, complémentation.		
5. Inférence statistique et théorie des Probabilités.		
6. Géométrie projective.		
7. Géométries non-euclidiennes.		
8. Cosmographie (y compris la Trigonométrie sphérique).		
9. Géométrie descriptive.		
10. Autres sujets (les énumérer).		

Ilustração 20: Questionário enviado a todos os países, Dezembro de 1959

Anexo 6.[6]

III - Programmes

Les programmes sont les mêmes pour tout le pays, pour les écoles de l'Etat et pour les établissements d'enseignement libre.

Nous indiquons ci-dessous les programmes des 4 années de l'enseignement primaire et des 7 années de l'enseignement des lycées.

(i) Enseignement primaire

1ère année - Numération décimale; unités et dizaines. Lecture et écriture des nombres jusqu'à 99; les quatre opérations à l'intérieur de ces limites. Calcul mental. Problèmes simples.

2ème année - Numération décimale; nombres entiers jusqu'à six chiffres. Les quatre opérations et leurs preuves. Fractions ordinaires à un chiffre; l'argent. Chiffres romains. Calcul mental. Problèmes simples.

Ilustração 21: Programas indicados por Tavares para o Ensino Primário e Liceal em Portugal, 1960

[6] Fonte: OCDE, 1961b, pp.79-83

<u>3ème année</u> - Les quatre opérations avec nombres entiers et décimaux. Système métrique décimal. Mesures de temps. Calcul mental. Problèmes. Notions concrètes de géométrie. Polygones. Circonférence et cercle. Parallélépipèdes, cube, cylindre et sphère.

<u>4ème année</u> - Fractions. Conversion en dixièmes. Simplification de fractions. Les quatre opérations sur des fractions. Nombres complexes et incomplexes. Les quatre opérations sur des nombres complexes appliquées à la mesure du temps et de la circonférence. Système métrique décimal; applications pratiques. Exercices et problèmes. Mesures d'arcs; rapporteur. Evaluations pratiques de la surface du polygone.

Durant tout cet enseignement, on laisse de côté les méthodes abstraites; on enseigne à l'enfant les procédés d'exécution des opérations essentiellement au moyen de l'expérience. Les notions nouvelles sont toujours précédées d'exercices prolongés sur les notions précédentes. Pour la fixation du calcul, les élèves doivent refaire constamment leurs tables d'addition et de multiplication. L'enseignement du système métrique est essentiellement pratique et objectif.

(ii) <u>Enseignement des lycées</u>

(a) <u>Premier cycle</u>

<u>5ème année</u> - Notions sur les solides géométriques et les figures planes. Système métrique décimal. Mesures de longueur. Longueur d'un segment. Distance entre deux points. Périmètre de polygones et de lignes courbes. Prendre les mesures effectuées comme base pour la lecture et l'écriture de nombres entiers et décimaux, évaluation de mesures; les quatre opérations avec nombres entiers et décimaux et leurs propriétés; approximation, expressions numériques; utilisation des parenthèses, calcul mental. Mesures de superficie; surface du rectangle et du carré. Prendre les mesures effectuées sur le carré comme point de départ pour l'étude des puissances et de la racine carrée. Mesures de volume et de masse. Surfaces et volumes du parallélépipède rectangle et du cube. Nombres fractionnaires; représentation graphique. Propriétés des angles. Positions relatives de deux droits. Triangle. Réduction des nombres complexes à des nombres incomplexes, et vice-versa. Opérations.

<u>6ème année</u> - Triangle. Egalité des triangles. Perpendiculaires et obliques. Quadrilatères. Circonférence. Périmètre; détermination expérimentale de la valeur de . Equivalence du parallélogramme et du trapèze au rectangle et du triangle au parallélogramme. Surfaces. Surfaces et volumes du prisme droit, de la pyramide régulière, du cylindre et du cône de révolution. Notions de multiple et sous-multiple d'un nombre. Critères de la divisibilité par 10, 2, 5, 9 et 3. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. Décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers. Fractions. Opérations. Fractions généralisées. Proportionnalité directe et inverse. Proportions géométriques. Règles de trois simples et composées. Pourcentages. Règles de société et d'intérêt.

L'arithmétique, dans ces deux années du premier cycle, a un caractère intuitif et pratique, sans recours à des démonstrations. La géométrie, que l'on considère comme la base du programme, est intuitive et expérimentale et son enseignement a pour objectif le développement de l'observation et de l'expérience.

Dans les deux années du premier cycle de l'enseignement technique, le programme est sensiblement identique.

(b) <u>Deuxième cycle</u>

<u>7ème année</u> - Algèbre. Nombres positifs et négatifs. Expressions algébriques. Opérations sur des monômes et polynômes. Fractions algébriques avec les deux termes monômes. Equations numériques du 1er degré à une inconnue. Systèmes de deux équations numériques du 1er degré à deux inconnues. Problèmes simples du 1er degré. Représentation d'un point sur un plan. Notions élémentaires de variables et de fonctions. Représentation graphique de $y = ax$ et $y = ax + b$, avec a et b numériques. Résolution graphique d'équation du 1er degré à une inconnue et du système du 1er degré à deux inconnues. Inégalités du 1er degré à une inconnue.
Géométrie plane - La droite. Angles. Parallélisme et perpendicularité dans le plan. Triangles. Quadrilatères.

<u>8ème année</u> - Algèbre. Décomposition de polynômes en facteurs. Fractions algébriques, simplification et opérations. Equations numériques et littérales du 1er degré à une inconnue. Système de deux équations numériques et littérales du 1er degré à deux inconnues et système numérique de trois équations du 1er degré à trois inconnues. Problèmes du 1er degré avec 1, 2 et 3 inconnues. Successions numériques. Notions d'infiniment grand et d'infiniment petit. Notion de limite d'une succession.
Géométrie - Cercle. Mesures d'angles et d'arcs. Angles dans le plan d'une circonférence. Lieux géométriques. Proportionnalité dans le plan. Similitude. Théorème de Pythagore. Polygones réguliers. Polygones réguliers inscrits. Périmètre de la circonférence. Longueur d'un are.Surfaces.

<u>9ème année</u> - Algèbre. Puissances à exposant nul et négatif. Notion de nombre irrationnel. Radicaux. Puissance à exposant fractionnaire. Equation du 2ème degré à une inconnue et problèmes du 2ème degré. Progressions arithmétiques et géométriques.

Ilustração 22: Programas indicados por Tavares para o Ensino Primário e Liceal em Portugal, 1960

Géométrie dans l'espace - Le plan. Droites et plans parallèles et perpendiculaires. Angles. Distances. Dièdres. Trièdres. Angles solides. Polyèdres. Polyèdres réguliers. Surfaces du prisme, de la pyramide, du cylindre et du cône. Prisme et pyramide; sections. Les trois corps ronds. Surface et volume des solides.

Dans les trois années du 2ème cycle, on étudie l'algèbre en augmentant progressivement la rigueur et la technique du calcul; divers théorèmes et démonstrations sont exigés en 9ème année. On procède, dans ce cycle, à l'étude logique et déductive de la géométrie, dès le début, mais basée dans une axiomatique très générale, et l'on s'efforce d'insister sur le caractère formatif de cette matière.

(c) Troisième cycle

10ème année - Algèbre. Notions sur les généralisations successives du concept de nombre. Nombres complexes à deux unités. Notion de variable et de fonction. Classification des fonctions. Fonctions inverses. Représentation géométrique. Nombres infiniment grands. Infinitésimaux. Limites d'une variable et d'une fonction. Opérations sur les limites. Notion élémentaire de continuité d'une fonction. Dérivés. Application à l'étude des fonctions dans les cas les plus simples. Propriétés des polynômes. Division par x-a. Fractions algébriques.
Trigonométrie - Fonctions circulaires directes et inverses. Définition, variation et représentation graphique.
Arithmétique rationnelle - Théorie des nombres entiers et des opérations fondamentales. Systèmes de numération. Divisibilité. Nombres premiers. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple.
Géométrie descriptive - Projection du point. Représentation de la droite : détermination de ses traces. Représentation du plan; détermination de ses lignes principales. Intersection de deux plans et d'une droite avec un plan. Rabattements. Projections de polygones et de la circonférence reposant sur les plans de projection et sur les plans perpendiculaires à un des plans de projection. Projections de prismes et de pyramides dont la base repose sur l'un des plans de projection ou sur des plans parallèles ou perpendiculaires à l'un d'eux. Sections de ces solides par des plans perpendiculaires à un des plans de projection et détermination de la grandeur véritable des sections. Construction d'ombres.

11ème année - Algèbre. Analyse combinatoire. Binôme de Newton. Equations. Résolutions algébriques et graphiques et discussion des équations du 1er et du 2ème degré à une inconnue. Système de deux équations du 1er degré à une inconnue; résolution algébrique et graphique et discussion. Equations bicarrées; résolution algébrique et discussion. Equations irrationnelles réductibles au 2ème degré. Trinômes du 2ème

Ilustração 23: Programas indicados por Tavares para o Ensino Primário e Liceal em Portugal, 1960

degré; représentation graphique et propriétés. Inéquations du 2ème degré à une inconnue. Inéquations fractionnaires pouvant être résolues au moyen d'inéquations du 1er ou du 2ème degré à une inconnue. Problèmes du 1er et du 2ème degré; discussion. Fonction exponentielle et sa fonction inverse. Logarithmes décimaux.

Trigonométrie - Formules de la somme et de la différence de deux angles, de duplication et de bissection de l'angle et de transformation logarithmique. Dérivées des fonctions circulaires directes. Utilisation des tables naturelles et logarithmiques. Résolution d'équations trigonométriques simples. Résolution de triangles rectangles et obliquangles. Calcul de surfaces. Application à des problèmes de topographie.

Géométrie analytique plane - Coordonnées cartésiennes et polaires. Distance de deux points. Lieu géométrique. Equations cartésiennes de la droite. Problèmes sur la droite. Equations cartésiennes de la circonférence, de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole.

Géométrie descriptive - Projections et ombres du cône et du cylindre de révolution dont la base repose sur un des plans de projection ou sur des plans parallèles ou perpendiculaires à l'un d'eux. Section de ces solides par des plans perpendiculaires à un des plans de projection. Intersection de droites avec des solides. Projections et ombres de deux solides superposés.

L'enseignement des mathématiques dans le 3ème cycle se propose d'amener l'élève à raisonner correctement et clairement, en exigeant la rigueur caractéristique de cette matière, en vue de la préparation aux études supérieures. En arithmétique, on inculque la connaissance des nombres sous la forme d'une théorie déductive.

Ilustração 24: Programas indicados por Tavares para o Ensino Primário e Liceal em Portugal, 1960

Anexo 7.[7]

SPECIALISTES DU GROUPE DE TRAVAIL DESTINE A DRESSER UN PROGRAMME MODERNE POUR LES MATHEMATIQUES SCOLAIRES

Professor Emil ARTIN,	Professeur de Mathématiques, Mathematisches Seminar, Université de Hambourg. Rothenbaumschaussee 67, HAMBOURG, Allemagne
Dr. O. BOTSCH,	Oberstudiendirektor, Helmholtz-Gymnasium, HEIDELBERG, Allemagne
Professeur Gustave CHOQUET,	Professeur de Mathématiques, Institut Henri Poincaré, Université de Paris, 11, rue Pierre-Curie, PARIS 5e, France
Dr. Bozidar DERASIMOVIC,	Professeur de Mathématiques, Studentski TRG 3, BELGRADE, Yougoslavie
Professor Howard F FEHR,	Head, Department of Mathematics, Teachers College Columbia University, NEW YORK 27, Etats-Unis
Mr. Cyril HOPE,	Principal Lecturer in Mathematics, 68, Malvern Road, Powick, Nr. WORCESTER, Royaume-Uni
Mr. Erik KRISTENSEN,	Matematisk Institut, Aarhus Universitet, AARHUS, Danemark
Professor Djuro KUREPA,	Professeur de Mathématiques, Institut de Mathématiques, University of Zagreb, 6, Vincovicera, ZAGREB, Yougoslavie
Professeur P. LIBOIS,	Professeur de Mathématiques, Président de la Faculté des Sciences, 50, Avenue F.-D. Roosevelt, BRUXELLES, Belgique

Ilustração 25: Grupo de especialistas encarregue de elaborar o programa moderno para as Matemáticas, 1960

[7] Fonte: OCDE, 1961c), pp.249-250

Professeur L. PAULI,	Directeur du Gymnase Cantonal, NEUCHATEL, Suisse
Mr. Lennart RADE,	Oyre Fogelbergsgatan 3, GOTEBORG C, Suède
Professor B. SCHOENEBERG,	Erikastrasse 101, HAMBOURG 20,Allemagne
M. W. SERVAIS,	Secrétaire de la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseigne- ment des Mathématiques, 60, rue des Déportés, MORLANWELZ, Belgique
Professor Marshall STONE,	Head, Department of Mathematics, University of Chicago, CHICAGO, Illinois, Etats-Unis
M. Pierre THERON,	Inspecteur Général, Conseiller Technique, Cabinet du Ministre, Ministère de l'Education Nationale, 110, rue de Grenelle, PARIS 7e, France
Professor Mario VILLA,	Directeur, Institut de Mathématiques de l'Université de Bologne BOLOGNE, Italie

Secrétariat du Bureau du
Personnel Scientifique et Technique de l'O.E.C.E.

M. Robert GANEFF — Administrateur

Ilustração 26: Grupo de especialistas encarregue de elaborar o programa moderno para as Matemáticas, 1960

Anexo 8.[8]

Algèbre

Behnke, H; Fladt, K; Suss, W. Arithmetik und Algebra Grundlagen der Mathematik Band I. Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen. 1958.

Birkhoff G. and MacLane, S. A Survey of Modern Algebra. Macmillan, New York. 1941.

Cohen. Linear Equations. Manchester University Press. England.

Felix, L. Exposé Moderne des Mathématiques Elémentaires. Dunod, Paris. 1959.

Kelley, J. Introduction to Modern Algebra. Van Nostrand, Princeton. 1960.

Littlewood. The Skeleton Key of Mathematics. Hutchinsons, London.

Lentin, A. et Rivaud, J. Eléments d'Algèbre Moderne. Vuibert, Paris. 1958.

Sawyer, W.W. A concrete Approach to abstract Algebra. Freeman & Co. San Francisco. 1959.

Van der Waerden. Modern Algebra. Ungar, New York. 1949; Springer, Berlin. 1931.

Géométrie

Artin, E. Geometric Algebra. Inter Science Publishers. New York. 1957.

Bachmann, F. Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Springer. Berlin. 1959.

Behnke, H; Fladt, K; Süss, W. Geometrie. Grundlagen der Mathematik. Band II. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. 1960.

Levi, H. Foundations of Geometry and Trigonometry. Prentice Hall, New York. 1960.

Löffler, E. Axiomatik und Geometrie unterrichts. Mathematik-unterrichts. 1959, Heft 3. Ernst Klett, Stuttgart. 1959.

Ilustração 27: Referências bibliográficas indicadas para a Álgebra e Geometria, 1960

[8] Fonte: OCDE, 1961c, pp.251-252

Anexo 9.[9]

Bibliographie

1. Bunt, L.N.H., Statistick voor het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs. J.B. Wolters, Groningen, 1956. /Néerlandais/

2. Cramer, H., The Elements of Probability Theory and its Application. New York : John Wiley and Sons, Inc., 1955.

3. COLLEGE ENTRANCE EXAMINATION BOARD, Introductory Probability and Statistical Inference for Secondary Schools. New York : The Board, 1957.

4. DARTMOUTH COLLEGE WRITING GROUP, Modern mathematical methods and models II, 1958.

5. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York : John Wiley and Sons, Inc., 1957.

6. Fisher, F., The lady tasting tea/Reprinted in Newman, The world of Mathematics, New York, Simon and Schuster, Inc., 1956/

7. Fog, D., Om sandsynlighedsregning med statistik i det danske gymnasium. Nordisk Matematisk Tidskrift, V,3,1957. /Danois/

8. Hald, A., Statistical Theory with Engineering Applications. New York. John Wiley and Sons. 1952.

9. Huff, D., How to Lie with Statistics. New York ; W. W. Norton and Company, Inc. 1954.

10. Kemeny, J., Snell, J., Thompson, G., Introduction to Finite Mathematics. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, Inc., 1957.

11. Kristensen, E., Elementaer Sandsynlighedsregning. Aarhus 1959 /Danois/

12. Kolomogoroff, A Foundations of Probability. New York : Chelsea Publishing Company. 1950.

13. Neyman, J., First Course in Probability and Statistics. New York : Henry Holt Company. 1950.

14. Page, D.A., "Probability." and Pieters, R.S. ; Kinsella, J.J., "Statistics." Growth of Mathematical Ideas. Grades K - 12. Twenty-fourth Year Book. Washington,D.C.: The National Council of Teachers of Mathematics. 1959.

15. Rade, L., Statistik for gymnasiet. Hermods Korrespondens-institut. Malmo. 1957. /Suédois/

16. Robbins, H., "The Theory of Probability." Insights into Modern Mathematics. Twenty-third Year Book. Washington, D.C. : The National Council of Teachers of Mathematics. 1957.

17. Wallis, W.A., Roberts, H.V., Statistics, a New Approach. Glencoe, Ill. : The Free Press. 1956.

18. Wilks, S.S., Teaching Statistical Inference in Elementary Mathematics Curricula. American Mathematical Monthly, 65 : 145, March 1958.

Ilustração 28: Referências bibliográficas indicadas para Probabilidades e Estatística, 1960

[9] Fonte: OCDE, 1961c), pp. 236-237

Anexo 10.[10]

REUNION INTERNATIONALE DE TRAVAIL SUR LES

METHODES NOUVELLES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Président	Prof. C.P. Papaioannou Vice-Président de [illegible]
Rapporteur Général	Prof. H. Fehr Chef du Département des Mathématiques Teachers College, Université de Columbia, New York.

Dimanche 17 Novembre 1963

10 h - 16 h	Excursion à Corinthe et à divers sites archéologiques
18 h - 20 h	Accueil

Lundi 18 Novembre 1963

Grande salle de l'Université d'Athènes 9 h 15	Ouverture de la Conférence Allocution de bienvenue

Les nouveaux programmes de mathématiques dans l'enseignement secondaire

Président de séance:	L.N.H. Bunt (Pays-Bas)
Secrétaire	M. Hastad (Suède)
9 h 30 - 11 h Hotel des Ambassadeurs	Cinq communications (de dix minutes) sur les Mathématiques nouvelles dans les programmes de l'Enseignement secondaire 1) Vecteurs (L. Pauli) 2) Ensembles (J. Laub) 3) Géométrie - premier cycle (T. Viola) 4) Géométrie - second cycle (N.Kritikos) 5) Algèbre (E.G. Begle) Discussion.

Ilustração 29: Plano de trabalhos da Conferência realizada em Atenas, 1963

[10] Fonte: OCDE, 1963, pp.313-317

11 h 15 - 12 h 15 — [illegible]

12 h 45 - 14 h — Déjeuner

14 h 30 - 15 h 45 — Exposé: Un programme moderne de mathématiques pour les sections scientifiques de l'enseignement secondaire (W. Servais)

16 h - 17 h — Discussion de Groupe sur le contenu de l'exposé

Mardi 19 Novembre 1963

Enseignement des concepts et des méthodes mathématiques modernes

Président de séance — L. Pauli (Suisse)

Secrétaire — B. Thwaites (Grande Bretagne)

9 h 30 - 11 h — Cinq communications (de dix à quinze minutes) exposant les nouveaux concepts et les nouvelles méthodes en mathématiques:

1) Recherche de lois (M. Beberman)
2) Relations et fonctions (H. Steiner)
3) Calcul des probabilités (L. Rade)
4) Groupes (E. Kristensen)
5) Semi-groupes (à l'âge de 11 à 12 ans) (P. Abellanas)

Discussion.

11 h 15 - 12 h 15 — Discussion sur l'enseignement des mathématiques modernes

12 h 45 - 14 h — Déjeuner

18 h - 20 h 30 — Exposé: Méthodes et techniques pour présenter les mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire (G. Papy)

Discussion de groupe sur le contenu de l'exposé.

[illegible]

Président de séance — [illegible]

Secrétaire — [illegible]

9 h - 11 h — [illegible]

11 h 15 - 12 h 15 — [illegible]

12 h 30 - 14 h — [illegible]

18 h - 21 h — [illegible]

Jeudi 21 Novembre 1963

[illegible]

Président de séance — [illegible]

Secrétaire — [illegible]

9 h 15 - 10 h 30 — [illegible]

10 h 45 - 11 h 45 — [illegible]

11 h 45 - 12 h 45 — [illegible] autres réunions.

12 h 45 - 14 h — Déjeuner.

14 h 30 - 15 h 30 — Exposé: Les mathématiques considérées comme l'une des humanités (H. Athen)

15 h 45 - 17 h — Discussion de groupe. Modifications à apporter aux programmes scientifiques pour les sections non-scientifiques de l'enseignement secondaire.

19 h 30 - 21 h — Réception officielle par le Gouvernement Grec.

Vendredi 22 Novembre 1963

La formation mathématique des professeurs

Président de séance — P. Théron (France)

Secrétaire — A. Ory (Suisse)

9 h 30 - 11 h — Exposé (une demi-heure). Les mathématiques qu'un professeur doit connaître (A. Revuz)

Contributions diverses des participants.

11 h 15 - 12 h 15 — Discussion de groupe sur les connaissances des professeurs.

12 h 45 - 14 h — Déjeuner.

14 h 30 - 15 h 45 — Exposé (une demi-heure). La formation mathématique permanente des professeurs au cours de leur carrière (H. Fehr)

Contributions diverses des participants.

16 h - 17 h — Discussion de groupe sur les connaissances des professeurs

17 h. — Désignation du groupe de synthèse.

17 h 15 - 19 h 15 — Réunion du Comité de rédaction (H. Fehr, K. Piene, A. Revuz, H. Steiner), pour la préparation du résumé de la conférence.

[illegible]

Président de séance — [illegible]

Secrétaire — [illegible]

9 h 30 - 11 h — [illegible]

11 h 15 - 12 h — Résolutions, [illegible] supplémentaires, [illegible]

12 h 45 - 14 h — Déjeuner.

14 h 15 - [illegible] — Réunion du Comité [illegible]

Ilustração 30: Plano de Trabalhos da Conferência realizada em Atenas, 1963

Anexo 11.[11]

ANNEXE C

LISTE DES PARTICIPANTS

Président	Professeur C.P. PAPAIOANNOU Membre de l'Académie d'Athènes Athènes (9)	GRECE
Rapporteur général	Professeur Howard FEHR Consultant de l'O.C.D.E. Chef du Département de Mathématiques Teachers College Université de Columbia New York 27	ETATS UNIS

AUTEURS DES COMMUNICATIONS ET MEMBRES DU COMITE DE REDACTION

Hermann ATHEN	Oberstudiendirektor 22 Elmshorn Kirchenstrasse 7	ALLEMAGNE
Georgos PAPY	Professeur à la Faculté des Sciences 50, avenue Franklin Roosevelt Bruxelles	BELGIQUE
Kay PIENE	Rector Wergelandsvegen 15 Oslo II	NORVEGE
Henry POLLAK	Bell Telephone Laboratories Murray Hill New Jersey, New York	ETATS UNIS
André REVUZ	Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers 16, rue de Rome Les Essarts le Roi (S & O)	FRANCE
Hans Georg STEINER	Professeur de pédagogie des mathématiques I. Mathematisches Institut der Universität 44 Münster Överbergstr. 4	ALLEMAGNE
Willy SERVAIS	Secrétaire de la Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'En- seignement des Mathématiques 60, rue des Déportés Morlanwelz	BELGIQUE
P. ABELLANAS CEBOLLERO	Prof[illegible] Président [illegible] ment de l'Enseignement des Mathématiques Isaac Peral 3 Madrid 15	ESPAGNE
Hermann ATHEN	Oberstudiendirektor 22, Elmshorn Kirchenstrasse 7	ALLEMAGNE
N. FARKAS	Doyen de l'Ecole Normale de l'Enseignement Secondaire Athènes	GRECE
Max BEBERMAN	University High School College of Education University of Illinois Urbana, Illinois	ETATS UNIS
E. G. BEGLE	School of Education Stanford University Palo Alto, California	[illegible]
Bjorn BJARNASSON	Senior Teacher of Physics & Mathematics Reykjavik Gymnasium Reykjavik	ISLANDE
L.N.H. BUNT	Chef du Département des Mathématiques et des Sciences Institut pour la formation des profes- seurs de l'enseignement secondaire Université d'Utrecht Lucas Bolwerk 11 Utrecht	PAYS BAS
J. CASULLERAS REGAS	Professeur de Mathématiques Institut National d'Enseignement Secondaire "Mola y Fontanals" Barcelone	ESPAGNE
C. ARF	Professeur au Robert College Bebek-Istambul	TURQUIE
Robert CHAFE	Chef du Département des Mathématiques Sydney Academy Sydney (Nouvelle E[illegible]	[illegible]

Ilustração 31: Lista dos participantes e autores de comunicações na Conferência de Atenas, 1963

[11] Fonte: OCDE, 1963, pp.318-322

R. DIESCHBOURG	Professeur au Lycée de Garçons 145, rue Pierre Krier Luxembourg	LUXEMBOURG
M. H. FRIEDLI	Steinerstrasse 24 Berne	SUISSE
M. HASTAD	Nordiska kommittén för modernisering av Matematikundervisningen Ecklesiastikdepartementet Stockholm 2	SUEDE
N. KRITIKOS	Professeur à l'Université Technique d'Athènes Athènes	GRECE
E. KRISTENSEN	Lektor Matematisk Institut Aarhus Universitet Aarhus	DANEMARK
J. LAUB	Director Bundesrealschule Vienne 1 Schottenbastei 7-9	AUTRICHE
Jaime LEOTE	Professeur du Second degré Avenida Alvares Cabral 22 1eD Lisbonne	PORTUGAL
R. LEVARLET	Directeur Général Ministère de l'Instruction Publique 155, rue de la Loi Bruxelles	BELGIQUE
S. O'LAOGHAIRE	Senior Inspector Technical Instruction Branch Department of Education Dublin	IRLANDE
J.R. TIMONEY	Lecturer in Mathematics University College Dublin	IRLANDE
A.A. LOPES	Professeur au Lycée Normal D. Manuel II Porto	PORTUGAL
R.W. MORRIS	Ministry of Education Curzon Street London, W.1	ROYAUME UNI
N. KARCIOGLU	Board of Education Ankara	TURQUIE
A. ORY	172, rue du Stand Bienne	SUISSE
[illegible]	[illegible] 50, Avenue Franklin [illegible] Bruxelles	
L. PAULI	Directeur du Gymnase Cantonal Neuchâtel	
K. PIENE	Wergelandsveien 15 11 Oslo	
H. POLLAK	Bell Telephone Laboratories Murray Hill New Jersey, New York	
L. RAADE	Universitetslektor Chalmers Tekniska Hogskola Goeteborg	[illegible]
A. REVUZ	Professeur à la Faculté des Sciences [illegible] 16, rue de Rome Les Essarts-le-Roi (Seine et Oise)	
O. [illegible]	Lektor [illegible]loverbakken 25 Virum	[illegible]
J. SEBASTIAO-e-SILVA	Professeur à la Faculté des Sciences de Lisbonne Rua BMI, 17 Restelo Lisbonne 3	PORTUGAL
Willy SERVAIS	Secrétaire de la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'enseignement des Mathématiques 60, rue des Déportés Morlanwelz	
R. SOLVANG	Lektor Plogvn. 34 E Manglerud Oslo	
H. STEINER	I.Mathematisches Institut der Universität Münster 44 Münster (Westphalie) Schlossplatz 2	
P. THERON	Inspecteur Général Ministère de l'Education [illegible] 110, rue de Grenelle Paris 7ème	
B. THWAITES	Professor of Theoretical Mechanics Southampton University Southampton	ROYAUME UNI
T. VIOLA	Ordinario nella Facolta di Scienze dell'Universita di Torino Istituto Matematico dell'Università Torino	ITALIE

Ilustração 32: Lista dos participantes e autores de comunicações na Conferência de Atenas, 1963

Anexo 12.[12]

UNE REPARTITION MODERNE DES MATIERES MATHEMATIQUES POUR LES SECTIONS SCIENTIFIQUES DES ECOLES SECONDAIRES

I. Ensembles

1. Ensemble, objet, appartenance $\in$, égalité.
Inclusion, $A \subset B$, parties d'un ensemble E. Ensemble des parties P(E).
Ensemble vide, diagramme de Venn.
Détermination d'une partie de E par une condition en une variable $x \in E$.
Equivalence et implication de conditions sur un ensemble E.

2. Algèbre des ensembles. Intersection $A \cap B$, réunion $A \cup B$, différence $A \setminus B$ en liaison avec les opérations logiques conjonction $\wedge$, disjonction $\vee$ et négation. Complément $E \setminus A$ d'une partie de E. Différence symétrique $A \triangle B$.
Associativité, distributivité.
Intersection et réunion d'une famille d'ensembles.
Quantificateurs $\forall x \in E$, $\exists x \in E$.
Partition et recouvrement d'un ensemble.
Ensemble produit A x B d'un couple, d'une suite d'ensembles.

II. Relations

1. Relation de l'ensemble A vers l'ensemble B.
Représentation par un graphe, par une table.
La relation R comme ensemble de couples, partie de A x B.
Domaine et image d'une relation.
Condition à deux variables x r y déterminant une relation dans A x B.

2. Réciproque d'une relation, composée de deux relations.
Relations réflexives (antiréflexives), symétriques, antisymétriques, transitives, (connexes).
Relations d'équivalence; partition, ensemble-quotient.
Relations d'ordre, ordre strict, ordre total, ordre partiel.

40

III. Fonctions

1. Relation fonctionnelle de l'ensemble E vers l'ensemble F.
Application de E dans et sur F: $E \xrightarrow{f} F: x \longrightarrow f(x)$.
Familles indexées.
Images de parties de E par f: $f(A)$, $f(A \cup B)$, $f(A \cap B)$.
Réciproque d'une fonction, images réciproques.
Ensemble quotient de E par f.
Injection, surjection, bijection, fonction réciproque ou inverse. Composition.

2. Groupe des permutations (bijections) d'un ensemble E.

3. Equipotence d'ensembles. Nombre cardinal.

4. Homomorphisme et isomorphisme d'ensembles structurés par des relations ou des opérations.

IV. L'ensemble des nombres naturels

1. Les nombres naturels. Ensembles finis, ensembles [illegible]brables, suites d'éléments d'un ensemble.
Addition et multiplication définies à partir [illegible] et du produit d'ensembles.
Ordre total des nombres naturels, compatibilité avec l'addition et la multiplication.

2. Axiomes de Peano. Induction

3. Division, reste. Anneau des classes de [illegible].

4. Diviseur, nombres premiers, factorisation, nombres primaires. Plus grand commun diviseur, plus petit multiple.
Liaison avec les opérations $\cap$ et $\cup$ sur les ensembles de diviseurs primaires des nombres considérés.

5. Systèmes de numération binaire et décimal.

6. Combinatoire.
Arrangements avec répétitions de m objects n à n: applications d'un ensemble de n objets dans un ensemble de m objets.
Arrangements simples de m objets n à n: injections d'un ensemble de n objets dans un ensemble de m objets.
Permutations (simples) d'un ensemble de m objets et bijection de cet ensemble sur un ensemble équipotent.

41

Combinaisons de m objets pris n à n: ensembles de parties de n éléments contenues dans un ensemble de m objets.
Nombre des parties d'un ensemble fini.

V. La droite et le plan - Dilatations

Le plan ensemble de points, les droites parties du plan.
Axiomes d'incidence, de parallélisme, direction, projection parallèle. Axiomes d'ordre total sur chaque droite, demi-droite, intervalles, segment, ensemble convexe de points. La projection parallèle d'une droite sur une autre est une fonction croissante ou décroissante.
Dilatations: bijections du plan appliquant une droite sur une droite parallèle.
Homothéties et translations. Composition. Propriétés de groupe. Couples équipollents, vecteurs, projection des équipollences, milieu.
Addition des vecteurs. Propriétés de groupe.
Addition dans le plan muni d'une origine. Groupes isomorphes.

VI. Groupes

1. Exemples. Groupes additifs et multiplicatifs dans l'ensemble des classes de restes modulo n. Tables de groupe.
Le groupe (Z +) des entiers rationnels. Groupe des bijections d'un ensemble. Permutations d'un ensemble fini.
Groupe des déplacements et des retournements qui appliquent sur lui-même un ensemble de points du plan (un point, deux points, trois points, quatre points, cinq points). Examiner le cas où les points sont les sommets d'un triangle équilatéral, d'un carré, d'un pentagone régulier. Groupe des translations du plan, groupe additif des vecteurs du plan.
Groupe additif du plan muni d'une origine.
Groupe des homothéties de centre donné. Groupe des dilatations.

2. Définition d'un groupe $(G, *)$, loi de composition interne partout définie, associativité, élément neutre, symétrique d'un élément.

Equations $a * x = b$ $y * a = b$ dans un groupe.
Simplifiabilité.
Groupe commutatif. Notation additive et multiplicative.
Symétrique d'une somme ou d'un produit.
Multiples ou puissances d'un élément [illegible] groupe.
Groupes cycliques.
Sous-groupes.

VII. Anneau ordonné des entiers rationnels

Le groupe (Z, +) et le groupe additif engendré par un point sur une droite munie d'une origine.
Ordre sur la droite et ordre dans (Z, +)
Multiplication des entiers rationnels.
L'anneau ordonné $(Z, +, \cdot, \leqslant)$.

VIII. La droite et le champ réels

1. Graduation d'une droite munie d'une origine et d'un point unitaire.
Axiome d'Archimède.

2. Sous-graduation par subdivisions successives en [illegible]
Développements binaires (décimaux) limités.
Binaires (décimaux) illimités. Axiome de continuité.
Projection parallèle d'une graduation sur une autre.
Théorème de Thalès.

3. Nombres réels déterminés par les développements binaires (décimaux).
Rapport des vecteurs, produit d'un vecteur par un [illegible] réel.
Addition des réels et addition des vecteurs.
Multiplication des réels et multiplication des homothéties
Distributivité de la multiplication sur l'addition.
Le corps totalement ordonné des réels.

4. Les nombres rationnels comme quotients d'[illegible] produit.
Corps commutatif et totalement ordonné des rationnels $(Q, +, \cdot, \geqslant)$
Valeurs rationnelles approchées d'un nombre réel.

Ilustração 33: Programa para as secções científicas do Ensino Secundário proposto por Servais, 1963

12 Fonte: OCDE, 1963, pp.40-57

5. Le corps commutatif totalement ordonné complet des réels $(R, +, \cdot, \geqslant)$

IX. Calculs numériques

1. Addition, soustraction, multiplication, division des réels à partir de valeurs approchées.
Erreurs absolues et erreurs relatives
Nombre de chiffres exacts dans un développement décimal approché.

2. Logarithmes.
Groupe multiplicatif engendré par un nombre réel q, positif différent de l'unité.
(Progression géométrique illimitée G)
Groupe additif engendré par un nombre réel non nul r
(Progression arithmétique illimitée A)
Isomorphisme $G \longrightarrow A$: fonction logarithme définie sur G.
Base, logarithmes à base 10. Si on prend $q = 1{,}0002303115$ et $r = 0{,}0001$
$q^{10000} = 10$ et $10000\ r = 1$
Calculs logarithmiques, tables et règles.
Racines $n^{\text{ième}}$ des nombres réels strictement positifs.

3. Notion sur les fonctions logarithmiques et exponentielles: isomorphismes du groupe multiplicatif $(R^+_0, \cdot)$ des réels strictement positifs et du groupe additif R + des réels.

X. Polynômes à coefficients réels

1. Anneau des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un corps, sur un anneau.
Valeur numérique, fonction polynôme de R vers R.

2. La division euclidienne dans l'anneau des polynômes à coefficients réels.
Divisibilité par x - a. Zéros d'un polynôme dans un ensemble donné.
Factorisation.

3. Equation du second degré à une inconnue. Equations [illegible] solvantes du second degré.
Inéquations du premier et du second degré à une inconnue.

XI. Plan vectoriel et géométrie affine

1. Le groupe commutatif (V,+) des vecteurs du plan.
Multiplication des vecteurs par les nombres réels.
Structure de vectoriel réel (R, V, +)

2. Structure de vectoriel réel du plan muni d'une origine.
Coordonnées cartésiennes de vecteurs et de points.
Equations paramétriques et équations cartésiennes d'une droite.
Système d'équation du premier degré à deux [illegible]
Matrices et déterminants à quatre éléments.
Inéquation et système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.
Programmation linéaire.
Aire des parallélogrammes et orientation.
Changement de coordonnées de vecteurs et de points.

3. Transformation affine générale.
Translations, symétries centrales, homothéties, symétries axiales affines, affinités axiales.

XII. Géométrie métrique euclidienne du plan

1. Perpendicularité des droites. Axiomes.
Droites perpendiculaires et droites parallèles.
Symétrie (axiale) orthogonale. Axiome de la bissectrice.

2. Groupe engendré par les symétries orthogonales: isométries
Figures isométriques. Cercle.
Groupe des déplacements, rotations et translations.
Axiomes de rigidité. Invariance de la perpendicularité.

3. Vecteurs unitaires isométriques. Distance de deux points.
Produit scalaire. Cosinus d'un angle.
Théorème de Pythagore. Inégalité triangulaire.
Base orthonormée. Cercle trigonométrique.
Sinus, cosinus, tangente d'un angle.
Formules fondamentales de la trigonométrie.

4. Similitudes du plan. Le groupe de la géométrie euclidienne
Equation du cercle dans une base orthonormée.
Equation canonique des coniques. Equivalence affine et métrique.

XIII. Statistique descriptive

1. Les relevés statistiques dans un ensemble (population) partagé en classes.
Effectifs et fréquences.
Fréquence totale et fréquence composée.

2. Distributions statistiques à une variable.
Histogrammes, polygones de fréquence, polygones de fréquence cumulée.
Mode, médiane, moyenne.
Quartiles et déciles.
Etendue, écart interquartile, écart-type.

3. Distributions statistiques à deux variables.
Distributions marginales et conditionnelles.
Régression de la moyenne. Régression linéaire.
Corrélation.

XIV. Le plan et le champ complexes

1. L'égalité et l'addition des nombres complexes et le groupe additif d'un plan muni d'une origine O.
Forme cartésienne a + ib. Opposé d'un nombre complexe.
Complexe conjugué.

2. La multiplication des nombres complexes et le groupe des similitudes de centre O.
Forme trigonométrique des nombres complexes (coordonnées polaires).
Inverse d'un nombre complexe non nul.

3. Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Le champ des nombres complexes. Fonction linéaire d'une variable complexe et le groupe des similitudes du plan.

4. Formule de Moivre et racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe.
Enoncé du théorème de Dalembert.

XV. Groupes, anneaux et corps

1. Groupes, sous-groupes.
Intersection d'un ensemble de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Parties génératrices.
[illegible] d'ordre fini.
Sous-groupe normal, groupe quotient.

2. Anneaux, corps, champs.

3. Anneau de polynômes à une (plusieurs) indéterminée(s) sur un anneau, sur un corps.
Division euclidienne dans l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un [illegible]

4. Corps des fractions rationnelles.
Homomorphismes et isomorphismes.

XVI. Espaces vectoriels

1. Les plans et les droites de l'espace, inc[illegible] section, parallélisme.
Groupes des dilatations de l'espace, translations, homothéties.
Vecteur, espace vectoriel.
L'espace muni d'une origine comme espace [illegible]

2. Définition des espaces vectoriels et exemples.
Combinaisons linéaires de vecteurs.

3. Sous-espaces vectoriels. Intersection d'un [illegible] sous-espaces vectoriels.
Sous-espace engendré par une partie.

4. Dépendance linéaire. Familles liées, familles [illegible]
Familles génératrices. Bases, coordonnées.
Espaces de dimension finie. Dimensions.

5. Applications linéaires. Matrice d'une application linéaire par rapport à une base. Isomorphisme des espaces vectoriels de même dimension sur un champ.

6. Changement de base. Eléments [illegible]

7. Formes linéaires. Espaces duals.

8. Résolutions des systèmes d'équations [illegible] nation à l'aide de combinaisons linéaires.

9. Déterminants. Application à la théorie des équations linéaires. Orientation.

Ilustração 34: Programa para as secções científicas do Ensino Secundário proposto por Servais, 1963

XVII. Géométrie de l'espace affin

1. Equations paramétriques de la droite, du plan, d'un segment. Rapport de section.
Equation cartésienne du plan dans l'espace.
Droites et plans parallèles.

2. Transformations affines. Groupe.
Invariance de l'ensemble des droites et de l'ensemble des plans.
Conservation du parallélisme et de l'incidence.
Equivalence affine des quadriques.
Transformations particulières. Sous-groupe.

XVIII. Géométrie euclidienne de l'espace

1. Produit scalaire. Métrique euclidienne. Sphère.
Base orthonormée.
Perpendicularité des droites et des plans.
Expression analytique.
Produit vectoriel.
Symétrie orthogonale par rapport à un plan.
Le groupe des isométries engendré par les symétries orthogonales.
Rotation autour d'un axe, symétrie axiale, déplacement, déplacement hélicoïdal. Figures invariantes dans ces transformations.
Le groupe des déplacements.
Le groupe des similitudes de l'espace euclidien.

XIX. Espaces de probabilité finis

1. Expériences aléatoires ayant un ensemble fini E de cas élémentaires possibles.
Evénements: parties de E.

2. Probabilité élémentaire définie sur E.
Probabilité d'un événement $P(A)$ d'un événement $A \subset E$
$P(E) = 1 \quad P(\emptyset) = 0 \quad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
si $A \cap B = \emptyset \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Evénements indépendants
$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

3. Variable aléatoire définie sur E.
Espérance mathématique d'une fonction d'une ... aléatoire. Moyenne, variance, écart-type d'une var... aléatoire. Inégalité de Tchebycheff.

4. Distribution conjointe de deux vari... finies sur E.
Distributions marginales.
Espérance mathématique de la somme et du ... sieurs variables aléatoires définies sur E.

5. Distribution binominale. Moyenne et variance.
Loi des grands nombres.

XX. Espace métrique et topologie

1. Intervalle ouvert, intervalle fermé sur la droite réelle R. Disque ouvert, disque fermé dans le plan réel R^2.
Boule ouverte, boule fermée dans l'espace réel R^3.
Les ouverts de la droite, du plan et de l'espace.

2. Définition d'une distance. Exemple d'une distance affine.
Structure d'espace métrique correspondant.

3. Espace topologique. La topologie des ouverts.
Les voisinages, les fermés.

XXI. Fonctions continues

1. Fonction continue d'un espace topologique E vers un espace topologique F.
Continuité en un point de E, continuité sur une partie de E
Exemples: Fonction identique sur E. Fonction constante de E dans F.
Translation, homothétie, projection parallèle dans l'espace affin, isométrie dans l'espace euclidien métrique.

2. Bijection continue à réciproque continue.
Homéomorphisme. Parties homéomorphes de l'espace.

3. Composition de deux fonctions continues.
Composition de deux homéomorphismes.

4. Fonctions continues à valeurs dans le plan muni d'une origine. Somme de fonctions continues, multiplication scalaire d'une fonction continue par un nombre réel.
Vectoriel de ces fonctions.

5. Fonctions continues à valeurs dans R, continuité de la somme et du produit de deux fonctions continues.
Quotient de deux fonctions continues.

6. Fonctions continues de R (ou d'une partie de R) dans R.
Exemples: sin, exp, log.
Image d'un segment par une fonction continue.
Anneau des fonctions continues de R dans R.
Sous-anneau des fonctions polynômes engendrées par la fonction identique $R \longrightarrow R : x \longrightarrow x$ et les constantes.

7. Limite d'une fonction en un point.
Suite et limite d'une suite. Théorème de convergence de Cauchy.
Séries, théorèmes des séries majorantes.

XXII. Calcul différentiel

1. Infiniment petits ou fonctions continues et nulles en un point.
Dérivée. Règles de calcul des dérivées de somme, de produit, de quotient, de fonctions dérivables en un point ou sur un ensemble de points de R.
Dérivées successives.
Calcul des dérivées des fonctions exp, log, sin, cos, tg.

2. Primitives

3. Fonction différentiable en a, fonction n fois différentiable en a. Calcul des différentielles.
Développement limité d'ordre n.

4. Formule de Taylor et Mac-Laurin.
Développements limités des fonctions exp, log, sin, cos.

5. Graphique des fonctions réelles d'une variable réelle.
Tangentes, croissance et décroissance, maximum et minimum
Concavité. Asymptotes.

XXIII. Calcul intégral

1. La notion d'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$
Si c est une constante, par définition $\int_a^b c \; dx = c \; (b-a)$
Intégrale d'une fonction étagée.
Intégrale supérieure et intégrale inférieure ... tion bornée.
Lorsque ces deux intégrales sont égales, ... commune est:
par définition $\int_a^b f(x) \, dx$
Intégrale d'une fonction monotone sur $[a,b]$.
Intégrale d'une fonction continue sur $[a,b]$.
Intégrale comme limite de sommes.

2. Linéarité de l'intégrale.
Formule de Chasles.
Formule de la moyenne.

3. L'intégrale $F(x) = \int_a^x f(u)du$ admet $f(x)$ ... tout où cette fonction est continue. ... fonction continue.

4. Méthode d'intégration ... variable.

5. La fonction logarithmique définie par
$$L\,x = \int_a^x \frac{du}{u}$$

6. Utilisation de l'intégrale pour le calcul ... volumes, de masses.

XXIV. Probabilité sur la droite réelle

1. Variable aléatoire réelle définie sur l'en...
Distribution de probabilité.
Distribution rectangulaire. Distribution binomiale.
Distribution donnée par une intégrale.
Espérance mathématique d'une fonction réelle d'une valeur aléatoire.
Moyenne, variance, écart-type, variable réduite.
Inégalité de Tchebycheff.
La distribution normale.

2. Echantillonnage. Estimation d'une probabilité.
Estimation de la moyenne.
Intervalle de confiance de la moyenne et ... pour les grands échantillons.

Ilustração 35: Programa para as secções científicas do Ensino Secundário proposto por Servais, 1963

3. Définition axiomatique d'un espace de probabilité.
Un espace de probabilité est un ensemble E muni de la structure suivante:

1) Dans l'espace E est donnée une famille F de parties: les événements, qui est telle que:
E et $\emptyset$ sont des événements
si $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$, sont des événements.
Il en est de même de
$E \setminus A,\ A \cup B,\ A \cap B,\ \bigcup_{i \in N} A_i,\ \bigcap_{i \in N} A_i$

2) Sur F est définie une fonction à valeur réelle, la probabilité P, telle que
$P(E) = 1 \qquad P(\emptyset) = 0$
et pour tout événement $A \in F$
$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

3) Pour tout événement A et tout événement B
$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ est une suite d'événements telle que
$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ et $\bigcap_{i \in N} A_i = \emptyset$ On a
$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$

NB. Dans les espaces finis, $F = P(E)$ et 1) 2) et 3) découlent de la probabilité élémentaire définie sur E.

Note du rapporteur

Pour montrer comment le programme ci-dessus convient à un enseignement unitaire global, il est nécessaire de savoir quand et comment chaque partie doit en être développée. M. Servais a fourni le découpage suivant par année d'étude. Dans l'expérience à la direction de laquelle il participe, beaucoup des sujets indiqués pour la 1ère année (15 à 16 ans) ont déjà été étudiés dans le cycle précédent de l'enseignement secondaire.

Première année (15 à 16 ans)

I. Ensembles. II. Relations. III. Fonctions

Parmi ceux qui se sont intéressés à la modernisation de l'enseignement, l'accord est général sur le fait que la base de cette modernisation ne peut être que celle des mathématiques elles-mêmes: ensembles, relations, fonctions. Dans les pays où les nouvelles méthodes ont été introduites dans le premier cycle de l'enseignement secondaire, on commence à enseigner ces notions dès l'âge de 12 ans. Nous rappelons seulement ici ce qui sera constamment utilisé tout au long du second [illegible] (15 à 18 ans).

IV. L'ensemble des nombres naturels

Les nombres naturels sont les nombres cardinaux des ensembles finis. On étudie les opérations sur ces nombres, leur représentation dans des systèmes de numération binaire et décimal, et leur utilisation dans les calculs.

V. La droite et le plan - Dilatations

Les droites et les plans sont considérés comme des ensembles de points. Le concept moderne de droites parallèles (droites identiques ou disjointes d'un même plan) permet une définition de la projection parallèle (du plan sur une droite du plan) et des dilatations.

Les couples et les vecteurs équipollents [illegible] à partir des translations. Le plan muni d'une origine [illegible] l'addition est un groupe isomorphe à celui des translations [illegible] plan.

VI. Groupes

Le concept de groupe est développé à l'aide de nombreux exemples et on fait une étude élémentaire des groupes abstraits.

VII. L'anneau ordonné des entiers de signe quelconque

L'anneau $(Z, +, \cdot, \leqslant)$ est étudié en même temps que la représentation des entiers sur une droite graduée.

VIII. La droite et le corps des nombres réels

La sous graduation d'une droite par des divisions successives par 2 (ou 10) et le marquage des points par cette construction (linéaire ou décimale) effectuée un nombre fini de fois, ou poursuivie indéfiniment, donne simultanément une construction de l'ensemble des nombres réels et de la droite munie d'une origine.

Les nombres rationnels sont introduits comme quotients d'entiers. De cette manière, la question épineuse des réels et des rationnels est résolue.1/

IX. Calcul numérique

Les quatre opérations sur les nombres réels sont exécutées avec des valeurs approchées. On calcule une borne supérieure des erreurs. Une présentation élémentaire des logarithmes permet l'usage des tables et de la règle à calcul.

X. Polynômes à coefficients réels

Sur la base de l'enseignement du premier cycle, on introduit l'anneau des polynômes, à une ou plusieurs variables, sur un anneau. On distingue forme polynômiale et fonction polynômiale. La division euclidienne, la divisibilité par (x-a), conduisent à la factorisation des polynômes en x à coefficients réels. Les équations et inéquations du premier et du second degré à une seule variable sont résolues.

XI. Le plan vectoriel et la géométrie affine

Le plan, muni d'une origine donnée, a la même structure que l'ensemble des vecteurs réels à deux dimensions. Les coordonnées cartésiennes sont définies et les équations et inéquations du premier degré à deux variables sont étudiées ainsi que leurs applications à la programmation linéaire. On introduit les matrices et déterminants à quatre éléments. On étudie aussi dans cette partie l'aire des parallélogrammes et l'orientation du plan, ainsi que les transformations affines du plan.

1/ Cette méthode d'introduction des nombres réels a été développée par le Centre de Pédagogie des Mathématiques sous la direction du Professeur G. Papy. Voir "Plan géométrique affine et nombres réels", par G. Papy en collaboration avec F. Debbaut. D'une certaine manière, elle représente les idées exprimées par H. Lebesgue dans "La mesure des grandeurs".

XII. Géométrie euclidienne du plan

Le groupe des déplacements et des isométries [illegible] par les symétries par rapport à un axe. On introduit la distance entre deux points, l'angle de deux demi-droites, le produit scalaire de deux vecteurs et les rapports trigonométriques. On étudie aussi dans cette partie les similitudes d'un plan.

XIII. Statistique descriptive

L'étude d'éléments de statistique permet l'utilisation d'idées acquises pendant l'étude du calcul numérique [illegible] représentations graphiques.

Seconde année (16 à 17 ans)

XIV. Le plan et le corps des nombres complexes

Tout comme les nombres réels ont été intro[illegible]son avec le groupe des translations et des homothéties, les nombres complexes sont introduits en relation avec le groupe des similitudes du plan.

XV. Groupes, anneaux, corps

Les exemples de groupes, d'anneaux et de corps rencontrés dans l'étude précédente éclairent maintenant une étude plus générale de ces notions.

XVI. Les espaces vectoriels

La structure vectorielle d'un espace ayant une origine sert de base à l'introduction de l'algèbre linéaire qui est présentée de façon générale.

XVII. Géométrie de l'espace affine

L'étude de la géométrie de l'espace affine réel [illegible] à l'aide de représentations vectorielle et analytique.

Ilustração 36: Programa para as secções científicas do Ensino Secundário proposto por Servais, 1963

XVIII. Géométrie euclidienne de l'espace

Le produit scalaire de deux vecteurs permet la définition des notions métriques. Les symétries par rapport à un plan engendrent le groupe des isométries et le groupe des déplacements de l'espace. La composition des déplacements et des homothéties de l'espace donne les similitudes de l'espace.

XIX. Les espaces finis de probabilité

A l'aide d'expériences concrètes de tirage au hasard sont présentés certains concepts du calcul de probabilité limités aux ensembles ayant un nombre finis d'éléments, aussi simples que possible.

Troisième année (17 à 18 ans)

XX. Espaces métriques et topologie

La fonction distance euclidienne nous permet de définir un ouvert de la droite, du plan ou de l'espace. On étend ensuite ces notions à une distance quelconque et on met ainsi à jour les concepts fondamentaux de la topologie.

XXI. Les fonctions continues

La notion de continuité d'une fonction en un point et sur un ensemble est présentée dans toute sa généralité et spécifiée sur un certain nombre d'exemples - en particulier les fonctions exponentielles, logarithme, sinus, cosinus, tangente. La limite d'une fonction est définie en liaison avec la continuité en un point.

XXII. Calcul différentiel

La définition de la dérivée conduit aux règles permettant de trouver la dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions ayant une dérivée en un point ou sur un sous-ensemble de R. Les dérivées des fonctions exponentielles, logarithme, sinus, cosinus, et tangente sont calculées. La recherche des primitives est introduite en tant que réciproque de la dérivation. Les fonctions différentiables en un point sont introduites en liaison avec les développements limités. Les formules de Taylor et de Mac Laurin fournissent de tels développements. Ces formules sont appliquées aux fonctions exponentielles, logarithme, sinus, cosinus et tangente. Les dérivées sont utilisées dans l'étude des graphes de fonctions réelles de variables réelles.

XXIII. Calcul intégral

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est définie à l'aide des intégrales des fonctions étagées. Les propriétés élémentaires des intégrales sont données. L'intégrale $\int_a^x f(u)du$ d'une fonction continue est une primitive de cette fonction. On applique ces résultats comme dans le calcul intégral classique.

XXIX. Probabilité sur la droite réelle

Notions élémentaires sur la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle sur l'ensemble des nombres réels. Partant de l'échantillonnage pratiqué avec de grands échantillons, on explique ce que sont les estimations et les intervalles de confiance. On atteint la notion d'espace probabilisé.

Ilustração 37: Programa para as secções científicas do Ensino Secundário proposto por Servais, 1963

Anexo 13.[13]

ANNEXE A

LE PROGRAMME DE DÜSSELDORF

PREMIER NIVEAU(1)

1. Notions générales d'algèbre.

Ensembles, sous-ensembles, ensembles produits, fonctions. Ensembles finis et analyse combinatoire. Entiers rationnels, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes.

Relations définies sur un ensemble : relations d'équivalence, relations d'ordre.

Lois de composition définies sur un ensemble.

Structure de groupe, d'anneau, de corps (se borner à des définitions et à quelques exemples, sans théorie générale). Anneau des polynômes à coefficients rationnels, réels ou complexes. Formule du binôme. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes. Plus grand commun diviseur. Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. Enoncé du théorème d'Alembert-Gauss. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

2. Géométrie analytique et géométrie différentielle classique à 2 et 3 dimensions

Equations des droite, plan cercle, sphère. Problèmes d'angles et de distances dans R^2 et R^3.

Coordonnées polaires dans R^2.

Etude (à titre d'exemple) de quelques propriétés des coniques par des procédés analytiques. Etude sommaire de quelques quadriques (à titre d'exemple). Génération et représentation de surfaces diverses.

(1) L'énumération des matières du programme n'implique pas un ordre pour les traiter.

Notions de géométrie affine et de géométrie projective.

Etude d'une courbe plane donnée sous la forme $y = f(X)$ ou sous forme paramétrique: allure générale, étude locale en un point à distance finie ou à l'infini. Etude locale d'une courbe de R^3 au voisinage d'un point: plan osculateur, courbure, formules de Frenêt; vitesse et accélération d'un mobile, accélération tangentielle et accélération normale.

3. Algèbre linéaire (niveau 1)

Définition des espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, produits d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels.

Indépendance linéaire, bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Applications linéaires; somme, produit, noyau, image, rang.

Calcul matriciel.

Formes linéaires, équations linéaires.

Formes multilinéaires; déterminants. Vecteurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme; équation caractéristique.

Réduction d'une matrice à la forme diagonale dans le cas des racines distinctes, et à la forme triangulaire dans le cas général.

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques; formes hermitiennes. Espaces affines; parallélisme, vecteurs libres, barycentre, ensembles convexes.

Notions métriques dans les espaces vectoriels sur R: norme, distance, produit scalaire et normes associées: inégalité de Cauchy-Schwarz . Bases orthonormales dans R^n.

Groupe des déplacements, groupe des rotations autour d'un point, angle de deux vecteurs, orientation de R^n; produit vectoriel dans R^3.

4. Nombres réels, fonctions continues, calcul différentiel élémentaire

On pourra soit donner une construction du corps des nombres réels, soit en donner une définition axiomatique.

Ensemble de nombres réels: majorants, minorants. Borne supérieure et borne inférieure.

Intervalles. Suites bornées, suites convergentes. Théorèmes fondamentaux sur les limites. Critère de Cauchy; théorème de Bolzano-Weierstrass.

Fonctions d'une variable réelle: limites, continuités. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues numériques sur un intervalle (valeurs intermédiaires, bornes, continuité uniforme). Fonctions monotones; existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone. Exemples de fonctions discontinues.

Dérivées. Calcul des dérivées. Dérivée d'une fonction composée, d'une fonction réciproque.

Théorème de Rolle; théorème des accroissements finis. Formule de Taylor. Maxima et minima des fonctions numériques d'une variable réelle.

Fonction exponentielle, fonction logarithme, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

Comparaison des croissances de deux fonctions. Développements limités, applications; division des polynômes suivant les puissances croissantes.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle. Continuité, dérivation, formule de Taylor.

Fonctions de plusieurs variables; continuité. Fonction différentiable en un point, différentielle en ce point.

Dérivées partielles en un point, différentiabilité d'une fonction possédant des dérivées partielles continues.

Dérivées d'une fonction composée. Interprétation géométrique. Tangente, plan tangent. Calcul des dérivées d'une fonction implicite. Dérivées partielles d'ordre supérieur; permutabilité. Formule de Taylor. Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

5. Calcul intégral

Définition et propriétés de l'intégrale définie d'une fonction intégrable au sens de Riemann; intégrabilité des fonctions continues, des fonctions monotones. Propriétés de la forme linéaire définie par l'intégrale relation entre intégrale

indéfinie et fon[illegible] primitives. Exemples de fonctions définies [illegible] thodes d'intégration. Intégration des fract[illegible] des fonctions qui s'y ramènent.

Intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle quelconque (éventuellement infini): convergence [illegible] gence absolue. Définition et propriétés élémentaires [illegible] grale de Riemann-Stieltjes par rapport à une mesure sur la droite numérique.

Longueur d'une courbe paramétrée; expression [illegible] gueur pour une paramétrisation continûment dérivable. Intégrales curvilignes.

Notions élémentaires sur les intégrales doubles et triples, et sur leur mode de calcul. Règles du calcul différentiel extérieur, leur application aux intégrales de surface, à la formule du changement de variables dans les intégrales multiples et aux transformations des intégrales multiples (Stokes). On ne donnera pas de démonstrations; on pourra se borner à démontrer la formule de Riemann, dans le plan, pour un contour simple. Cas particuliers: gradient, divergence, rotationnel.

6. Séries

Séries à termes réels ou complexes; convergence, critère de Cauchy.

Séries à termes positifs: comparaison, critères classiques de convergence.

Séries à termes positifs décroissants: comparaison avec une intégrale.

Séries absolument convergentes. Séries non absolument convergentes, séries alternées.

Suites et séries de fonctions: convergence simple, convergence uniforme. Continuité, dérivation et intégration des suites et séries dans le cas de la convergence uniforme.

Développements en séries de e^x, sin x, cos x, log (1+x), $(1 + x)^x$, arc tg x, arc sin x.

Théorie élémentaire des séries entières d'une variable, réelle ou complexe. Cercle de convergence. Dérivation: intégration dans le domaine réel. Définitions et propriétés de e^x,

Ilustração 38: Programa de Düsseldorf para o Ensino Universitário, 1963

[13] Fonte: OCDE, 1963, pp. 300-311

sin z et cos z pour z complexe.

Notions élémentaires sur les séries de Fourier: Calcul des coefficients.

7. Equations différentielles

Notions fondamentales sur les équations différentielles; trajectoires d'un champ de vecteurs, problèmes de valeurs initiales, problèmes aux limites. Illustration de ces problèmes par des équations intégrales par quadrature; équations linéaires à coefficients constants.

Théorème de superposition linéaire pour les solutions des équations ou des systèmes d'équations linéaires à coefficients variables, avec ou sans second membre.

8. Analyse numérique

Systèmes d'équations linéaires; méthodes d'élimination et méthode d'approximations successives. Optimation linéaire; approximation au sens de Tchebycheff et au sens de Gauss. Algorithmes simples pour le calcul des valeurs propres.

Polynômes et algorithmes de division, comme exemples simples d'algorithmes.

Majoration et calcul des racines, méthode d'approximation de Newton, interpolation par les polynômes; fractions continues. Procédés d'intégration numérique. Equations différentielles ordinaires: méthodes d'itération, méthode de Runge-Kutta pour des valeurs initiales. Méthode des différences pour des problèmes aux limites.

Travaux pratiques sur des machines.

9. Cinématique et cinétique

Equivalence des systèmes de vecteurs: torseurs.

Cinématique

Définition d'un mouvement par rapport à un repère. Compléments de cinématique du point. Exemples simples de détermination de mouvements à partir de l'accélération et des conditions initiales (mouvements à accélération centrale).

Champ des vitesses d'un solide. Changement de repère: composition des vitesses et des accélérations.

Cinétique

Masse d'un système. Conservation d'une masse. Centre d'inertie. Torseur des quantités de mouvement. Torseur des quantités d'accélération. Energie cinétique. Cas du solide. Torseur d'inertie. Exemples simples de mouvements de solides.

10. Introduction au calcul des probabilités

Axiomes du calcul des probabilités.

Quelques lois de probabilité à une dimension ... miale, loi de Poisson, loi de Laplace-Gauss.

Espérance mathématique d'une fonction, fonction génératrice des moments. Valeurs typiques.

Lois de probabilité à deux dimensions. ... dres carrés, corrélation, régression.

DEUXIEME NIVEAU - Mathématiques pures

11. Algèbre des ensembles et algèbre (niveau 2)

Notions élémentaires sur le calcul logique.

Opérations sur les ensembles; notations. Produits d'ensembles. Applications d'un ensemble dans un autre; image directe, image réciproque, formules.

Relations binaires: relation d'ordre, relation d'équivalence.

Notions sur les cardinaux; puissance du dénombrable, puissance du continu.

Axiome du choix; théorème de Zorn (sans démonstration).

Lois de composition; propriétés (associativité, etc.)

Groupes, sous-groupes, groupes quotients; théorème d'homomorphisme. Exemple Z/Zn, R/Z. Plongement d'un ensemble muni d'une loi commutative et associative, régulière, dans un groupe. Exemples. Produits de groupes: produit direct de sous-groupes.

Groupe symétrique; signature d'une permutation.

Groupe de transformations, transitivité; transitivité simple; trajectoires: exemples.

Exercice possible: théorème de Sylow.

Anneaux et algèbres, idéaux; anneau-quotient. Exemples (quaternions).

Algèbre des polynômes à une ou plusieurs variables.

Corps, règles de calcul. Caractéristique d'un corps. Exemples.

12. Algèbre linéaire (niveau 2)

Révision de l'algèbre linéaire (niveau 1).

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie).

Dualité des espaces vectoriels de dimension finie; application aux équations linéaires.

Eléments d'algèbre extérieure.

Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes; orthogonalité. Formes quadratiques et hermitiennes; réduction à une somme de carrés; loi d'inertie. Groupe orthogonal, groupe unitaire, opérateurs hermitiens.

13. Topologie générale

Topologie de R, de R^n, théorème de Borel-Lebesgue.

Définition générale d'un espace topologique (par les ouverts ou par les fermés).

Exemples des espaces métriques. Fonctions continues. Produits d'espaces topologiques.

Espaces compacts; théorèmes classiques. Espaces localement compacts.

Espaces connexes; image d'un espace connexe par une application continue.

Espaces métriques (nombreux exemples). Critère de compacité des espaces métriques. Continuité uniforme; cas d'une application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique. Espaces métriques complets (sans traiter de la complétion).

Méthodes des approximations successives.

Familles sommables dans un espace normé complet: convergence normale.

14. Espaces fonctionnels

Distance de la convergence uniforme sur l'... applications dans un espace métrique; cas où ce dernier est complet; cas des applications continues. Espaces vectoriels normés; espaces de Banach. Exemples: norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de Stone-Weierstrass, ou tout au moins théorème de Weierstrass (approximation par des polynômes).

Espaces préhilbertiens: exemples. L'espace L^2 est complet (avec l'intégrale de Lebesgue). Inégalités. Projection sur un sous-espace vectoriel complet et plus généralement sur un convexe complet; la projection est une application contractante.

Espaces préhilbertiens à base dénombrable; orthogonalisation de Schmidt. Applications: suites de polynômes spéciaux, séries de Fourier.

15. Intégration (niveau 2)

Intégrale (Riemann ou Lebesgue, de préférence Lebesgue), de fonctions numériques définies dans R^n. Théorème de Lebesgue Fubini (intégrations successives). Changement de variables. Application: calcul de volumes.

Séries et intégrales dépendant de paramètres ... dérivation, intégration.

Nombreux exercices comportant des cont...

16. Calcul différentiel

Différentielle (du premier ordre) d'une application d'un ouvert d'un espace vectoriel normé dans un autre. Propriétés; calcul. Théorème des fonctions implicites pour les fonctions continûment différentiables.

Formes différentielles: ... Formule de Stokes dans des cas simples. Primitives ... d'une forme différentielle fermée de degré un.

Systèmes différentiels: existence et unicité ... dans le cas lipschitzien.

Ilustração 39: Programa de Düsseldorf para o Ensino Universitário

Variation de la solution en fonction des données. Cas d'un système différentiel linéaire.

Intégrales premières d'un système différentiel: résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre. Eléments de calcul des variations.

17. Fonctions analytiques d'une variable complexe

Séries entières formelles, séries entières convergentes.

Intégrale de Cauchy.

Développements de Taylor et de Laurent. Théorème du maximum. Résidus.

Topologie de la convergence uniforme sur tout compact; critère de compacité (familles normales).

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis; exemples.

Notions sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. Systèmes différentiels holomorphes: méthodes des majorantes. Représentation conforme. Notions sur les surfaces de Riemann; exemples.

18. Géométrie différentielle des courbes et des surfaces de R^3

Notamment: les deux formes fondamentales d'une surface. Méthode du repère mobile: courbure normale, courbure géodésique, torsion géodésique d'une courbe tracée sur une surface.

Géodésiques d'une surface. Courbure totale d'une surface, et peut-être formule de Gauss-Bonnet.

19. Bloc élémentaire

Théorie des entiers naturels; opérations; divisibilité, nombres premiers, théorème d'une unique factorisation. Corps des entiers modulo p (p premier).

Corps des rationnels. Corps des réels: caractérisation axiomatique et existence.

Corps des complexes.

Existence des représentations continues du groupe additif R sur le groupe multiplicatif des nombres complexes dont la valeur absolue est égale à 1.

Géométrie de R^2 ou de R^3 muni du produit scalaire canonique: déplacements; angles, orientation. Modèles euclidiens de géométrie non euclidienne.

Axiomatisation de la géométrie euclidienne: notions succinctes.

DEUXIEME NIVEAU - Mathématiques appliquées

20. Compléments d'algèbre

Groupes: sous-groupes, groupes quotients, théorème d'homomorphisme. Exemples.

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). Dualité des espaces vectoriels de dimension finie. Matrices et valeurs propres (révision).

Produit tensoriel d'espaces vectoriels; a[illegible] rielle, contraction.

Formes quadratiques et hermitiennes: loi d'inertie; réduction simultanée de deux formes dont l'une est définie positive. Groupe orthogonal, groupe unitaire.

21. Fonctions analytiques d'une variable complexe

Séries entières convergentes.

Intégrale de Cauchy.

Développement de Taylor et de Laurent. Th[illegible] mum. Résidus.

Fonctions définies par des séries ou [illegible] nis; exemples.

Exemples de surface de Riemann. Représentation conforme.

22. Compléments de calcul intégral

Intégrale de Lebesgue-Stieltjes dans R^n pour les fonctions numériques: énoncé (sans démonstration) des théorèmes fondamentaux.

23. Espaces fonctionnels

Espaces métriques; limite, continuité. Espaces métriques complets. Espaces vectoriels normés; espaces de Banach.

Exemples: norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de Weierstrass (approximation par les polynômes)

Approximations successives pour une application strictement contractante. Application aux fonctions définies par des équations (fonctions implicites).

Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens: exemples. L'espace L^2 est complet.

24. Equations intégrales

Equation de Volterra.

Equation de Fredholm: cas d'un noyau continu, cas qui s'y ramènent. Cas d'un noyau hermitien.

Développement en séries de fonctions orthogonales.

25. Equations différentielles ordinaires

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas analytique complexe. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires.

Théorèmes de Fuchs pour une équation linéaire du second ordre. Théorème d'existence et d'unicité dans le cas réel. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires dans le domaine réel.

Etude, sur quelques exemples, des solutions d'un système différentiel au voisinage d'un point singulier (col, noeud, foyer).

Problèmes aux limites du type Sturm-Liouville.

26. Equations aux dérivées partielles

Une équation quasi-linéaire du premier ordre: problème de Cauchy, caractéristiques.

Définition des caractéristiques d'un système quasi linéaire de deux équations du premier ordre à deux variables.

Equation de Pfaff complètement intégrale.

Equation du deuxième ordre: séparation des variables.

Equations du deuxième ordre à coefficients constants:

- Type elliptique: équation $\Delta\varphi = 0$ théorème de la moyenne, solution élémentaire; unicité pour les problèmes de Neumann et de Dirichlet; fonction de Green, formule de Poisson pour la sphère; intégrale d'énergie (Dirichlet). Equation $\Delta\varphi + K^2\varphi = 0$ la condition de radiation; réduction à une équation intégrale.

- Type hyperbolique: équation des ondes à 1, 3 et 2 variables d'espace; solution élémentaire; problème aux limites: formules de Poisson et de Kirchhoff, [illegible] d'énergie.

- Type parabolique: équation de la chaleur à une [illegible] pace; solution élémentaire; problème aux limites.

27. Calcul des variations

Equations d'Euler-Lagrange pour les intégrales simples ou multiples. Conditions aux limites naturelles. Multiplicateurs de Lagrange.

28. Distributions, transformations de Fourier et de Laplace

Définition des distributions sur R^n. Dérivation des distributions; exemples.

Transformations de Fourier et de Lapl[illegible] la théorie. Applications aux dérivées partielles.

Exemples de développements asymptotiques.

29. Fonctions spéciales

1) Fonction $\Gamma(z)$. Développements asymptotiques.

2) Un choix entre les fonctions suivantes:
- fonctions de Bessel-Hankel-Neumann, expression asymptotique, expressions intégrales,
- fonctions de Legendre, de Legendre associées, fonctions harmoniques sphériques.

3) Eventuellement, un choix parmi les fonctions suivantes:
- fonctions hypergéométriques
- polynômes de Laguerre
- polynômes d'Hermite
- fonctions de Mathieu
- fonctions elliptiques.

Ilustração 40: Programa de Düsseldorf para o Ensino Universitário

Anexo 14.[14]

RESOLUTIONS ET RECOMMANDATIONS

I. SERVICE D'INFORMATION

L'O.C.D.E. devrait assurer aux pays Membres [illegible] d'informations sur l'évolution actuelle de l'ens[illegible] mathématiques dans ces pays.

II. VISITES

Les participants à la Conférence sont d'avis que des échanges de personnalités s'intéressant à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques sont extrêmement importants et rentables à longue échéance.

Ils recommandent à l'O.C.D.E. et aux organismes compétents des pays Membres de prendre l'initiative de [illegible] visites de ce type.

III. RECHERCHES A EFFECTUER

Les participants à la Conférence recommandent qu'on entreprenne d'importantes recherches sur les possibilités offertes par les films, la télévision et l'instruc[illegible] ce qui concerne l'enseignement des mathém[illegible]

IV. CLASSES PILOTES

Les participants soulignent l'importance [illegible] classes expérimentales de mathématiques pour faciliter l'adoption des nouvelles méthodes et des nouveaux programmes.

Etant donné la rapidité de l'évolution, ils rec[illegible] qu'on fasse un emploi permanent de ces classes pilotes.

V. FORMATION DES PROFESSEURS

Il est évident que la formation d'un futur professeur de

Ilustração 41: Resoluções e Recomendações, Conferência de Atenas, 1963

[14] Fonte: OCDE, 1963, pp. 245-249

mathématiques devrait avoir deux aspects: pédagogique et mathématique.

La formation mathématique des futurs professeurs devrait leur assurer des connaissances très supérieures au niveau de l'enseignement qu'ils auront à donner. Ceci implique une maîtrise des principes fondamentaux des mathématiques modernes, ainsi que d'un certain nombre de leurs applications.

La formation pédagogique devrait être étroitement liée aux mathématiques que le professeur enseignera, et comprendre des éléments de la psychologie des enfants qu'il aura pour élèves.

Cette double formation devrait être telle que le futur professeur soit capable de poursuivre sa propre éducation et de s'adapter aux changements qu'il ne manquera pas de rencontrer au cours de sa vie professionnelle.

Les considérations ci-dessus devraient s'appliquer à toute mesure d'urgence prise en vue de pallier une pénurie de professeurs.

En outre, si la préparation des professeurs de l'enseignement secondaire comporte plusieurs niveaux, il est judicieux de concevoir la formation du niveau inférieur de telle façon que ceux qui l'auront reçue puissent ensuite accéder facilement au niveau supérieur.

VI. FORMATION EN COURS DE CARRIERE

L'amélioration et la modernisation de l'enseignement des mathématiques ne peut se faire sans consacrer un effort considérable à créer et développer les moyens permettant de perfectionner les connaissances des professeurs en fonction.

On peut y parvenir de diverses manières, et notamment en organisant des cours par correspondance, mais les participants soulignent qu'il est indispensable que les professeurs retournent périodiquement dans une université ou un centre d'enseignement supérieur de niveau analogue.

Il est également capital que les professeurs puissent être déchargés des tâches d'enseignement et éventuellement obtenir [illegible] bilités de perfectionnement qui leur sont offertes, une aide financière appropriée, les associations [illegible] professionnels pourront apporter à côté des facultés et universités une contribution importante à la formation en cours de carrière.

VII. MAT[illegible]

Etant donné l'importa[illegible] mathématiques et les utilisations sans cesse croissantes de cette discipline, tous les élèves devraient recevoir une formation mathématique suffisante au cours de leurs études secondaires. Dans ce contexte, les ensembles, les relations et les fonctions jouent un rôle fondamental [illegible] des mathématiques.

Il est indispensable de reconnaître pour ceux qui se spécialisent dans les sciences l'importance des [illegible] suivantes: espaces vectoriels, calcul [illegible] probabilités et statistique.

Les autres élèves devraient aussi recevoir une formation mathématique. Leurs cours devraient être [illegible] ment mathématiques et comprendre aussi bien les principes fondamentaux que leurs applications. Ils devraient notamment comprendre les probabilité[illegible]

VIII. UTILISATION DE CALCULATRICES

Les participants à la Conférence reconnaissent que l'utilisation de calculatrices prendra de plus en plus d'importance en tant qu'élément [illegible] dra d'en tenir com[illegible] écoles secondaires.

IX. RYTHM[illegible]

Les partici[illegible] moderniser les programmes de mathématiques [illegible] écoles aussi profondément et aussi rapidement q[illegible]

Ilustração 42: Resoluções e Recomendações, Conferência de Atenas, 1963

compte tenu des moyens de formation dont ils disposent.

X. EXAMENS

Les examens devraient être modifiés conformément aux objectifs d'un enseignement mathématique moderne. Des examens portant sur un programme fixe et comportant un examen écrit de type normalisé risquent fort de constituer un obstacle à l'amélioration de l'enseignement scolaire.

XI. L'ENSEIGNEMENT A PARTIR DE SITUATIONS REELLES

Le spécialiste des mathématiques appliquées construit des modèles mathématiques à partir de situations tirées de la réalité. Il utilise les modèles pour en tirer des déductions et élabore une structure mathématique appropriée puis il confronte les résultats et la situation originale. Les mathématiques pures suivent une ligne identique.

Il est recommandé que l'enseignement des mathématiques adopte une démarche semblable: les étudiants devraient être mis en face de situations et invités à y réfléchir; ils procéderaient d'abord intuitivement puis élaboreraient des notions mathématiques à partir de ces situations.

XII. VALEUR DE L'ENSEIGNEMENT PAR LES APPLICATIONS

Il importe de faire comprendre aux élèves que les mathématiques sont utiles à la société. L'un des moyens simples d'y parvenir consiste à justifier de temps à autre l'enseignement des notions mathématiques par les applications que l'on en fait dans un grand nombre de domaines variés et à placer aussi la pratique des mathématiques dans le contexte de ses applications. Il s'ensuit, entre autres, que le professeur de mathématiques doit coopérer étroitement avec les professeurs d'autres disciplines utilisant les mathématiques.

XIII. NATURE DES MATHEMATIQUES

Les mathématiques constituent une discipline [illegible] et non pas une série d'artifices isolés.

Dans l'enseignement des mathématiques, la structure doit être utilisée comme outil fondamental.

XIV. RAPPORTS AVEC LES PHYSICIENS

L'enseignement des mathématiques a des rapports [illegible] avec l'enseignement d'autres sciences. Il y a de nombreux avantages à examiner en commun les programmes et les problèmes pédagogiques. C'est pourquoi les participants à la Conférence recommandent à l'O.C.D.E. d'inviter des mathématiciens à toute réunion ultérieure sur l'enseignement d'autres sciences, et des spécialistes des sciences à toute réunion concernant les mathématiques.

XV. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Tous les termes et symboles mathématiques qui sont employés dans les rapports imprimés de l'O.C.D.E. et ne sont pas couramment utilisés dans les mathématiques scolaires classiques devraient faire l'objet d'explications complètes insérées dans le texte et illustrées par des exemples si besoin est.

REMERCIEMENTS

Les participants à la Conférence souhaitent exprimer au Gouvernement de la Grèce leur gratitude pour l'hospitalité qui leur a été accordée et pour l'organisation matérielle de leur séjour. Il était particulièrement à propos de tenir cette Conférence dans le pays qui a donné naissance aux mathématiques.

C'est un privilège d'avoir eu l'occasion de réunir cette Conférence, dans un milieu aussi agréable et aussi favorable aux discussions. Les participants souhaitent aux autorités grecques la plus grande réussite dans les efforts qu'elles déploient actuellement pour améliorer [illegible] aux enfants.

Ilustração 43: Resoluções e Recomendações, Conferência de Atenas, 1963

Anexo 15.[15]

ALLEMAGNE (Rép. Féd. d') (suite)

Seminar für Didaktik der Mathematik (Séminaire pour la didactique des mathématiques)

Universität Münster, Münster/Westfalen, Schlossplatz, 2

Directeurs-promoteurs : Prof. Dr. H. Behnke, A. Steiner

ARGENTINE

Comision nacional para la Ensenanza de la Matematica (Commission nationale pour l'Enseignement des Mathématiques)

Azcuénaga 1234, Buenos Aires

Directeurs-promoteurs : Ing. José Babini, Comision nacional para la Ensenanza de la Matematica (Commission nationale pour l'enseignement des Mathématiques) Direccion general de ensenanza secundaria del Ministerio de Educacion (Direction générale de l'enseignement secondaire du Ministère de l'Education).

Objectifs: Mise à jour des programmes, amélioration des méthodes d'enseignement, formation et perfectionnement des maîtres, publication des textes et préparation des moyens qui contribuent au perfectionnement de l'enseignement des mathématiques. Depuis 1963, les membres de la Sous-Commission argentine de la CIEM, avec l'approbation du Ministère de l'Education, ont élaboré les nouveaux programmes contenant les aspects des mathématiques modernes qui seront introduits, dès l'année scolaire 1966.

Niveau de l'enseignement : enseignement secondaire; enseignement primaire en préparation.

Revue : Elementos

Matériel et publications : Guide pour l'enseignement de la géométrie, textes adaptés aux nouveaux programmes, matériel concret du type élaboré par le Prof. Emma Castelnuovo.

AUSTRALIE

Adelaïde Mathematics Project (Member ISGML) -(Projet mathématique d'Adelaïde)

University of Adelaïde

Directeur-promoteur : Z. P. Dienes

AUSTRALIE (suite)

Objectifs : Section théorique : recherche des problèmes psychologiques concernant l'enseignement des structures. Section de la pratique de l'éducation: recherche de la construction rationnelle de l'enseignement des mathématiques fondée sur les notions ensemblistes, la logique, l'étude des relations, des nombres, des bases différentes d'énumération etc. conduisant à l'arithmétique, à l'algèbre, aux vecteurs, à la géométrie des transformations, aux groupes mathématiques, etc.

Niveau de l'enseignement : enseignement primaire et secondaire

Matériel et publications : Ouvrages différents consacrés à la recherche psychopédagogique; matériaux concrets destinés à la recherche libre en classe et à la prise de conscience par l'élève des structures fondamentales des mathématiques contemporaines; guides à l'usage des maîtres.

Education Department, New South Wales (Département de l'Education, Nouvelle Galles du Sud)

Bridge Street, Sydney

Directeurs-promoteurs: Présidents du Comité des Programmes
7ème à 10ème année d'enseignement : Miss D. M. Wallant
11ème et 12ème années d'enseignement : T. G. Room

Objectifs . Programmes élaborés pour les examens publics. Série de programmes de transition de l'enseignement traditionnel à l'enseignement moderne.

Niveau de l'enseignement : 7ème à 12ème année d'enseignement

Matériel et publications : Programmes et notes pour les enseignants

Education Department, Victoria (Département d'Education), Victoria

Treasury Place, Melbourne

Directeur-promoteur : R. H. Cowban

Papua New Guinea Mathematics Project (Projet Mathématiques des Papous de la Nouvelle Guinée)

Université d'Adelaïde

Directeur-promoteur : Z. P. Dienes

AUSTRALIE (suite)

Objectifs : En premier lieu l'enseignement des mathématiques à l'école primaire organisé selon les principes du Projet d'Adelaïde. Le projet de modernisation de toutes les écoles primaires et eventuellement de toutes les écoles secondaires.

Niveau de l'enseignement : école primaire

Western Australia Mathematics Project (Projet de Mathématiques de l'Australie occidentale)

State Education Department, Perth.

Directeur-promoteur : A. L. Blakers

BELGIQUE

Centre belge de pédagogie de la Mathématique

183 avenue Brugmann, Bruxelles 6

Directeur-promoteur : Prof. G. Papy, Université libre de Bruxelles

Objectifs : Recherche fondamentale en pédagogie de la mathématique effectuée par le promoteur avec la collaboration de 4 assistants belges et de 4 assistants étrangers. Information des enseignants par des cours organisés dans 21 villes belges ; organisation de stages pour les cadres et d'une réunion plénière annuelle à Arlon; commission d'élaboration des projets de programmes modernes à l'intention des autorités scolaires.

Niveau de l'enseignement : de 6 à 18 ans

Matériel et publications : articles, manuels, livres d'étude et guides pour les professeurs, annuaire "Arlon".

CANADA

Canadian Teachers' Federation (Fédération des maîtres canadiens)

Directeur-promoteur : Dr. Blair, Greensfield, 444 McLaren Street
Ottawa 4

DANEMARK.

Institut mathématique de l'Université d'Aarhus

Directeur-promoteur : Professeur Bundgaard.

Objectifs : Collaboration étroite avec le Comité Nordique pour la modernisation des mathématiques scolaires (v. Suède). Travaux dirigés par le Prof. Bent Christiansen (Collège Royal Danois d'Education, Département de Mathématiques, Drupvej 101, Copenhague, N. V.); préparation d'une série de textes pour l'enseignement des mathématiques modernes à l'usage de la radiodiffusion télévision danoise; écoles expérimentales, manuels modernes.

ESPAGNE

Comision nacional para el mejoramiento de la enseñanza de la matématica (Commission nationale pour l'amélioration de l'enseignement mathématique).

Instituto Jorge Juan de Matematica. Consejo superior de Investigaciones cientfficas, Serrano 123, Madrid 6

Directeur-promoteur : Prof. Pedro Abellanas

Objectifs : Etude de nouvelles méthodes pour l'enseignement de la mathématique, rédaction de textes pilotes et de nouveaux programmes.

Niveau de l'enseignement : Enseignement dans les lycées de 10 à 17 ans

Matériel et publications : Textes pilotes pour les deux premières années (âge de 10 à 11 ans et de 11 à 12 ans)

FRANCE

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public

29 Rue d'Ulm, Paris Vème

Objectifs : Modernisation de l'enseignement mathématique. Elaboration de programmes, organisation de conférences d'information des professeurs, relations pédagogiques internationales.

Niveau de l'enseignement : tous les niveaux: école élémentaire à faculté.

Revue : Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement public.

Ilustração 44: Lista de centros que se dedicavam ao estudo dos problemas, no âmbito do ensino das Matemáticas, 1967

[15] Fonte: UNESCO, 1967, pp. 406-422 e pp. 426-438

FRANCE (suite)

Matériel et publications : brochures consacrées aux problèmes de la modernisation de l'enseignement des mathématiques.

Chantiers mathématiques

29 rue d'Ulm Paris Vème

Directeur-promoteur : Prof. A. Revuz

Objectifs : Faire des émissions télévisées spécialement destinées à l'information des professeurs de mathématiques, réalisées par la Radio-Télévision scolaire, 29 rue d'Ulm, Paris Vème, sous la responsabilité scientifique du Bureau de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

Matériel et publications : Documents d'accompagnement des émissions télévisées de la série portant le même titre : 1. Premier album d'images mathématiques, 306 p. - 2, Apprentissages(en cours d'édition) Service d'édition et de vente des publications de l'Education Nationale.

Centre d'Etudes du Processus d'Apprentissage en Mathématiques

65 rue Claude-Bernard, Paris Vème

Directeur-promoteur : R. Biemel

Objectifs : Diffusion des méthodes et du matériel didactique fondé sur les conceptions psychopédagogiques modernes.

Niveau de l'enseignement : école primaire

Matériel et publications : Matériel de Dienes, blocs logiques, réglettes blocs multibases, matériel algébrique et géometrique, livres sur la psychopédagogie et méthodologie de l'enseignement des mathématiques.

Institut Pédagogique National, Département de la Recherche pédagogique

29 rue d'Ulm, Paris Vème

Directeur-promoteur : Mme N. Pickard

Objectifs : Modernisation des méthodes d'enseignement des mathématiques, expériences dans les écoles élémentaires de divers départements, information des maîtres.

FRANCE (suite)

Niveau de l'enseignement : école primaire et 1er cycle de l'école secondaire

Revues : Education et mathématiques. Bulletin de liaison et d'échanges pour un enseignement moderne des mathématiques.

FINLANDE

Collaboration étroite avec le Comité Nordique pour la modernisation des mathématiques scolaires (v. Suède). Les écoles expérimentales, manuels modernes.

HONGRIE

Comité pour la didactique mathématique de l'Université "Lorand Eötvös" Département des Sciences

Budapest VIII, Muzeum Krt. 6-8

Objectifs : Programmes, préparation de manuels, méthodes actives

Institut de la Recherche mathématique de l'Académie hongroise des Sciences, Département de l'enseignement mathématique

Budapest V, Reàltanoda u. 13-15

Directeur-promoteur : Prof. Dr. Janos Surànyi

Objectifs : Programmes pour les classes de mathématiques spéciales du lycée; séminaires sur la modernisation de l'enseignement des mathématiques

Niveau de l'enseignement : secondaire

Institut National Pédagogique Chaire Mathématique

Budapest VII, Gorkij fasor 17-21

Directeur-promoteur : Cser Andor

HONGRIE (suite)

Objectifs : Réforme des programmes, manuels, enseignement télévisé des classes expérimentales primaires

Niveau de l'enseignement : primaire et secondaire

ITALIE

Commissione Nazionale italiana per la modernizzazione dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria (Commission nationale pour la modernisation de l'enseignement de la mathématique dans les écoles secondaires.

A.I.M. del Ministero della Pubblica Istruzione e presso Istituto di Geometria dell'Università di Bologna

Directeur-promoteur : Prof. Mario Villa, Università Bologna

Objectifs : organisation de cours pilotes pour les enseignants se préparant aux programmes modernes dans les classes pilotes, organisation de classes pilotes.

Matériel et publications : manuels pour les classes pilotes

Istituto di Matematiche complementari dell'Università di Torino (Institut de Mathématiques complémentaires de l'Université de Turin)

Via Carlo Alberto 10, Torino

Directeur-promoteur : Tullio Viola

Objectifs : organisation de la recherche dans le domaine de l' "histoire, la philosophie et la psychologie des mathématiques", applications des questions étudiées à la pédagogie des mathématiques, expériences dans les écoles élémentaires et moyennes

Matériel et publications : concernent surtout l'histoire des mathématiques et se trouvent dans différentes revues spécialisées.

Seminario di didattica della matematica (Séminaire de didactique des mathématiques)

ITALIE (suite)

Istituto matematico dell'Università, Viale Morgagni, 67 A, Firenze

Directeur-promoteur : Luigi Campedelli

Objectifs : Préparation culturelle et didactique du jeune professeur. Orientation moderne de l'enseignement selon les nouveaux développements des mathématiques

Niveau de l'enseignement : jeunes gens qui ont terminé leurs cours universitaires et qui se proposent de s'adonner à l'enseignement

Matériel et publications : Matériel didactique (collection de modèles géométriques, appareils optiques, films, etc.) livres et revues, textes scolaires, etc.

NORVEGE

Conseil d'Etat pour les expériences à l'Ecole

Munkedamsvn. 62, Oslo 2

Directeur-promoteur : Hjalmar Seim

Objectifs : Consultation au Ministère de l'Education concernant les programmes et les expériences à l'école (contenu et buts de l'enseignement, programmes et moyens intuitifs, etc.); comité spécial pour les expériences en mathématiques à l'école (sous la direction de K. Piene).

Niveau de l'enseignement : de la 1ère à la 12ème année d'enseignement.

Matériel et publications : Traduction en norvégien des manuels expérimentaux de mathématiques élémentaires modernes (préparée par le Comité nordique pour la modernisation des mathématiques).

Sous-Comité norvégien du Comité nordique pour la modernisation des mathématiques à l'école

Wergelandsvn. 15 II, Oslo 1.

Directeur-promoteur : K. Piene

Objectifs : Participation aux travaux du Comité nordique pour la modernisation des mathématiques à l'école (v. Suède). Classes

Ilustração 45: Lista de centros que se dedicavam ao estudo dos problemas, no âmbito do ensino das Matemáticas, 1967

expérimentales, rédaction de manuels préparés par le Comité nordique en Norvège pour l'usage de ces classes.

PAYS-BAS

Commissie modernizering leerplan wiskunde (Commission pour la modernisation des programmes mathématiques à l'école secondaire)

Boothstraat 17, Utrecht

Directeurs-promoteurs : Prof. H. Th. M. Leeman; Prof. Dr. F. van der Blij

Objectifs : Elaboration de nouveaux programmes, préparation des manuels; expériences en classe concernant les programmes modernisés; cours pour les maîtres en fonction, organisés en collaboration avec les universités d'Utrecht et Groningue et l'Ecole supérieure technique d'Eindhoven.

Niveau de l'Enseignement : de la 7ème à la 12ème année d'enseignement.

Matériel et publications : manuels

POLOGNE

Katedra metodyki nauczania matematyki - Wyzsza Szkola Pedagogiczna w Krakowie (Chaire de méthodologie de l'enseignement des mathématiques, Ecole normale supérieure de Cracovie)

Straszewskiego 22, Krakow

Directeur-promoteur : Prof. Anna Zofia Krygowska

Objectifs : Recherche fondamentale dans la pédagogie des mathématiques; expériences à l'école

Niveau de l'enseignement : de la 5ème à la 12ème année d'enseignement

Matériel et publications : volumes spéciaux des annuaires édités par l'Ecole Normale Supérieure de Cracovie, articles, manuels.

ROYAUME-UNI

The School Mathematics Project (SMP) - (Projet de mathématiques scolaires)

The School Mathematics Project, The University, Southampton

Directeur-promoteur : Prof. Bryan Thwaites

Objectifs : Développement d'un programme moderne pour tous les élèves des "grammar Schools", de l'âge de 11 à 18 ans, élaboration et production d'une série complète de manuels pour les élèves et guides du professeur, préparation de textes adéquats pour les examens ("ordinary level" et "advanced level")

Niveau de l'enseignement : de l'âge de 11 à 18 ans

Matériel et publications : manuels, guides pour professeurs, textes d'examens, rapports de conférences organisées par le centre.

The Association of Teachers of Mathematics

Vine Street Chambers, Nelson, Lancs

Objectif : Amélioration de l'enseignement mathématique

Revue : Mathematics Teaching

St. Dunstan project (Projet de St. Dunstan)

St. Dunstan College, Catford

Psychology and Mathematics Project (Projet psychologique et mathématique)

University of Manchester

Directeur-promoteur : Dr. R. R. Skemp

Objectifs : amélioration des méthodes d'enseignement, recherches dans la psychopédagogique concernant l'enseignement des mathématiques

The Midlands Mathematics Experiment (M. M. E.) - (Expérience mathématique dans les Midlands)

Directeur-promoteur : Cyril S. Hope, of Worchester Training College

Objectifs : Modernisation des programmes

SUEDE

Bureau national d'Education

Fack, Stockholm 22

Objectifs : expériences avec matériel auto-instructif

Niveau de l'enseignement : de la 7ème à la 9ème année d'enseignement et de la 10ème à la 12ème année (lycée)

Matériel et publications : Tests. Projet d'emploi du matériel produit commercialement.

Nordiska kommittén för modernisering av matematikundervisningen (Comité nordique pour la modernisation des mathématiques à l'école)

Ecklesiastikdepartementet, Fack, Stockholm 25

Directeurs-promoteurs : Lennart Sandgren, Prof. Matts Håstad

Objectifs : réforme des programmes au Danemark, en Finlande, Norvège et Suède. Le travail consiste dans la production de nouveaux manuels, dans l'enseignement expérimental, et dans des enquêtes auprès des professeurs sur les manuels et les programmes modernes préparés par le Comité, etc.

Niveau de l'enseignement : Les 12 années d'enseignement, (l'âge des étudiants variant de 7 à 18 ans)

Matériel et publications : environ 20 manuels expérimentaux; quelques courts rapports.

SUISSE

Centre d'information mathématique du canton de Berne

Gymnase français de Bienne (canton de Berne)

Directeurs-promoteurs : J. Binz, E. Blanc

Objectifs : développer les contacts entre tous ceux qui, en Suisse ou à l'extérieur, s'intéressent à la modernisation de l'enseignement mathématique, informer les collègues au moyen de bulletins, conférences, cours de recyclage, etc., établir un programme de recherche et d'expériences dans les classes de l'enseignement secondaire, obtenir l'accord des autorités intéressées sur l'éxécution de ce programme.

Réalisations : Nombreux colloques, conférences et cours de recyclage d'un programme expérimental.

Centre Vaudois pour l'Enseignement mathématique

A. Delessert, Ecole Polytechnique de l'Université, 1000 Lausanne

Directeurs-promoteurs : T. Bernet A. Delessert

Objectifs : a) Assurer la mise à jour continue des enseignants en Mathématiques de l'enseignement secondaire, b) établir ou coordonner des expériences sur l'enseignement mathématique, c) faciliter les contacts entre les Universités et les écoles secondaires dans le domaine de l'enseignement mathématique.

Réalisations : Série de séminaires pour les enseignants. Dans chaque école secondaire du Canton de Vaud, les enseignants en mathématiques sont invités à de petites séances de travail. Du matériel théorique écrit et des problèmes leur sera diffusés par une unité d'édition attachée au centre.

Matériel : brochures mathématiques pour les enseignants.

TCHECOSLOVAQUIE

Kabinet pro modernizaci vyucovani Jednoty cs. matematiku a fyziku (Centre pour la modernisation de l'enseignement de l'Union des mathématiciens et physiciens de Tchécoslovaques)

Zitna 25, Praha 1

Directeur-promoteur : Prof. Miloslav Valouch

Objectifs : Coordonner toutes les activités concernant la modernisation de l'enseignement de la mathématique et de la physique; étudier et reunir des matériels étrangers, préparer des programmes nouveaux, élaborer des textes expérimentaux, diriger et contrôler l'enseignement dans les classes-pilotes et propager les idées de la réforme scolaire.

Ilustração 46: Lista de centros que se dedicavam ao estudo dos problemas, no âmbito do ensino das Matemáticas, 1967

Niveau de l'enseignement : enseignement primaire et secondaire (de la 1ère à la 12ème année de l'enseignement)

Matériel et publications : Le centre vient d'être fondé en fin d'année 1965. A présent il ne dispose que de textes préliminaires pour quelques classes-pilotes.

U.S.A.

Boston College Mathematics Institute (Institut de Mathématiques du Collège de Boston)

Mathematics Department, Boston College, Chestnut Hill Massachusetts 02167

Directeur-promoteur : Stanley Bezuska

Objectifs : Préparation des maîtres aux notions des mathématiques modernes et préparation des textes et matériaux à l'usage des élèves et des professeurs

Niveau de l'enseignement : élémentaire et secondaire

Matériel et publications : Manuels, livres d'orientation, textes pour l'enseignement programmé

Calandra's Physical Science & Mathematics Project (Projet de sciences physiques et mathématiques de Calandra)

Alexander Calandra Physics Department, Washington University, St. Louis, Missouri

Niveau de l'enseignement : de la 2ème à la 9ème année d'enseignement

Computer-Based Mathematics Instruction (CBMI) - (L'Enseignement des mathématiques basé sur les machines à enseigner)

Ventura Hall, Stanford University, Stanford, California

Directeur-promoteur : Prof. Patrick Suppes

Objectifs : développement et expériences dans l'utilisation des machines à enseigner les mathématiques à l'école élémentaire

Niveau de l'enseignement : classes 1, [illegible] mathématique pour la classe 5

Matériel et publications : textes pour l'enseignement programmé, textes d'information pour les maîtres

Entebbe Mathematics Workshop - (Laboratoire mathématique d'Entebbe)

Education Services Inc., 164 Main Street, Watertown, Mass. (African Education Project)

Directeurs-promoteurs : Prof. W.T. Martin, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.; Prof. John Oyelese, University of Ibadan, Western Nigeria; Prof. Donald E. Richmond, Williams College, Williamstown, Mass.

Objectifs : Préparation de manuels pour les élèves des écoles secondaires et primaires des pays d'Afrique et pour les maîtres, ainsi que des matériaux pour la préparation des maîtres; enseignement programmé; organisation des travaux collectifs dans ces domaines (séminaires annuels)

Niveau de l'enseignement : école primaire et secondaire; préparation des maîtres

Matériel et publications : séries de livres et de manuels pour les élèves et pour les maîtres

Greater Cleveland Mathematics Program (Programme des mathématiques de Greater Cleveland)

Rockefeller Building, Cleveland, 13, Ohio

Directeur-promoteur : George Cunningham

Objectifs : Développement du nouveau programme de mathématiques pour les écoles primaires et secondaires

Niveau de l'enseignement : primaire et secondaire

Matériel et publications : publications de "Science Research Associates", Chicago, 111

The Madison Project of Syracuse University & Webster College (Projet Madison de Syracuse du Collège de l'Université de Webster)

Webster College, St. Louis 19, Missouri 63119

Directeur-promoteur : Robert B. Davis

Objectifs : développer, propager et mettre en oeuvre le programme supplémentaire des mathématiques pour les classes enseignées traditionnellement de l'école maternelle jusqu'à la douzième année d'enseignement ; développement de l'activité de l'élève; organisation sociale du travail en classe; géométrie systématique traitement de l'axiomatique de l'algèbre, de la logique mathématique, des applications à la physique.

Niveau de l'enseignement : de l'école maternelle à la 9ème année d'enseignement

Matériel et publications : nombreux textes, matériel pour l'enseignement des mathématiques, films, tests.

Minnesota Mathematics and Science Teaching Project (Minnemast) (Projet d'enseignement des mathématiques et des sciences de Minnesota)

TSCE University of Minnesota, Minneapolis 55455

Directeurs-promoteurs : Dr. Paul C. Rosenbloom; Paul C. Berry

Objectifs : programme coordonné de mathématiques et de sciences jusqu'à la 9ème année d'enseignement, cours pour la formation des maîtres au cours de leurs études et des maîtres en fonction.

Niveau de l'enseignement : élémentaire et secondaire

Revue : Minnemast reports (trimestriel)

Matériel et publications : différents ouvrages d'information concernant l'enseignement des mathématiques et des sciences.

National Council of Teachers of Mathematics (Conseil national des professeurs de mathématiques)

1201 Sixteenth Street, N.W., Washington, D.C.

Revue : Teacher of Mathematics

School Mathematics Study Group (Groupe d'étude de mathématiques scolaires)

SM SG Cedar Hall, Stanford University, Stanford, California

Directeur-promoteur : E.C. Begle

Objectifs : la recherche dans le contenu et les méthodes modernes de mathématiques à l'école, en coopération avec d'autres organisations de mathématiques, en vue d'encourager les recherches concernant l'éducation mathématique; préparation des maîtres.

Niveau de l'enseignement : de l'école maternelle à la 12ème classe

Matériel et publications : nombreuses publications (articles et livres d'orientation pour les maîtres, manuels modernes, rapports et conférences), matériel pour l'enseignement programmé, films, tests. Serie de publications spéciales sous le titre "Newsletters"

Stanford Elementary School Mathematics Project (Projet de Stanford de mathématiques pour l'école élémentaire

Stanford University, California

Directeur-promoteur : Prof. Patrick Suppes

Objectifs : développer et compléter le programme de l'école élémentaire commençant par des ensembles et des nombres, la construction géométrique et la logique. Donner une fondation plus solide aux mathématiques au niveau de l'école élémentaire.

Niveau de l'enseignement : de l'école maternelle à la 6ème année d'enseignement.

University of Illinois Arithmetic Project at Educational Services Inc. (Projet arithmétique de l'Université d'Illinois auprès des Services d'Education)

Educational Services Inc., 371 Main Street, Watertown, Massachusetts

Directeur-promoteur : David A. Page

Ilustração 47: Lista de centros que se dedicavam ao estudo dos problemas, no âmbito do ensino das Matemáticas, 1967

Objectifs : préparation de films et de textes pour les maîtres de l'école primaire

Niveau de l'enseignement : en principe de la 1ère à la 6ème année d'enseignement

Matériel et publications : matériel pour l'enseignement des mathématiques et ses applications, textes pour l'instruction des maîtres.

University of Illinois Committee on School Mathematics (Comité de mathématiques scolaires de l'Universite d'Illinois)

University of Illinois, Urbana 1208 West Springfield Street

Directeur-promoteur : Max Beberman

Objectifs : Programme moderne pour les classes supérieures de l'école secondaire. Préparation et expérimentation du matériel pour l'école secondaire. Recherche dans la théorie de l'enseignement, en liaison avec l'enseignement des mathématiques. Recyclage des maîtres de mathématiques du point de vue des programmes modernes.

Niveau de l'enseignement : de la 7ème à la 12ème année d'enseignement

Matériel et publications : textes pour les élèves et les maîtres; films.

University of Maryland Mathematics Project (UMMaP) - (Projet de mathématiques de l'Université de Maryland)

University of Maryland, Mathematical Project, College Park, Maryland 20742

Directeur-promoteur : John R. Mayor

Objectifs : Production de matériel important et significatif pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires. Recherche de l'utilisation du matériel mathématique pour l'enseignement programmé.

Niveau de l'enseignement : élémentaire et première année de l'école secondaire

Matériel et publications : manuels et textes

Ilustração 48: Lista de centros que se dedicavam ao estudo dos problemas, no âmbito do ensino das Matemáticas, 1967

SECTION V

REVUES

PERIODICALS

Allemagne (Rép. dém. d')

MATHEMATIK IN DER SCHULE (Mathématique à l'école)
(1963); 12;....: 80 pp.
Ministerium für Kultur der Deutschen Demokratischen Republik Berlin
(Ministère de la Culture de la République Démocratique d'Allemagne)
Volk und Wissen, Volkseigener Verlag, Berlin W. 8, Lindenstr. 54

Allemagne (Rep. Féd. d')

ARCHIMEDES (Anregungen und Aufgaben für Lehrer, Schüler und Freunde der Mathematik).
Suggestions et problèmes pour les maîtres, les élèves et les amis des mathématiques.
(....); 9;....; ....
Verlag Josef Habbel, Regensburg

DER MATHEMATIKUNTERRICHT (Beiträge zu seiner wissenschaftlichen und methodischen Gestaltung) / L'enseignement mathématique - contributions à sa formation scientifique et méthodologique.
(....); 5;....;.....
Klett Verlag, Stuttgart

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SEMESTERBERICHTE* (Zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität) / Rapport semestriel mathématique-physique pour la promotion des relations entre l'école et l'université.
(1963); 2; 1,200;....
Verlag Vandenhoeck Ruprecht, Göttingen

DER MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE UNTERRICHT* (Zeitschrift des deutscher Vereins zur Förderung der mathematischen und natürwissenschaftlichen Unterrichts e.V.) / L'enseignement mathématique et scientifique - revue de l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des mathématiques et des sciences) /
(1948); 10; 5,000; 50 p.
Ferd. Dummlos Verlag, Bonn u. Hirschgraben Verlag, Frankfurt a/M.

PRAXIS DER MATHEMATIK (Monatschrift der reinen und der angewandten Mathematik in Unterricht) / Pratique des mathématiques - Cahier mensuel des mathématiques pures & appliquées dans l'enseignement).
(1959); 12; 2,500; 30 p.
Aulis Verlag Denbner & Co., Antwerpenstr. 6-12, Köln.

Argentine

ELEMENTOS (Revista de Mathemàtica para la Enseñanza Media / Revue de Mathématiques pour l'enseignement secondaire)
(1963); 4; 2,000; 48 pp.
en castellano (en castillan)
Fernàndez Blanco 2045, Buenos Aires

Australia

AUSTRALIAN MATHEMATICS TEACHER (Le Professeur Australien de Mathématiques)
(1945); 3; 1,500; 32 p.
New South Wales Mathematical Association (Association mathématique de la Nouvelle Galles du Sud.)
(Rédacteur) J.H. Veness
Sydney Teachers' College, University Grounds, Sydney

VINCULUM
(1964); 3; 1,200; 12 p.
Victoria Mathematical Association (Association Mathématique de Victoria)
Rédacteur : G. L. Watson, Melbourne High School, South Yarra, Victoria

Belgique

MATHEMATICA ET PEDAGOGICA
Revue trimestrielle publiée par la Société belge de professeurs de mathématiques - (1953); 4; 700; .... (bil. français-flamand)
24, rue Paul Janson, La Louvière

MATHESIS
Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne
- (1881); 3; ....; ....
Jules Duculot, 11 rue Duculot, Gembloux

Canada

BULLETIN DE L'ASSOCIATION MATHEMATIQUE DE QUEBEC
(....) ; 3; ....;
Association mathématique de Québec

THE JOURNAL OF THE BRITISH COLUMBIA ASSOCIATION OF MATHEMATICS TEACHERS
(Journal de l'Association des professeurs de mathématique de la Colombie britannique)
(....); ....; ....
British Columbia Teachers' Federation, 1815, West Seventh Avenue, Vancouver, B.C.

ONTARIO MATHEMATICS GAZETTE (Gazette de Mathématique d'Ontario)
(....); ....; ....
Ontario Mathematics Commission, 1260 Bay Street, Toronto

Chili

BOLETIN* (Bulletin)
(....); 1; 400; .....
Centro de Profesores de Matemàticas y Fisica, Instituto Pedagogico, (Centre de Professeurs de Mathématiques et de Physique, Institut Pédagogique)
Universidad de Chile (Université de Chili)
Mascul 774, Santiago

Espagne

GACETA MATHEMATICA (Gazette mathématique)
(....) 8; 1,100; 250 pp.
Instituto Jorge Juan de Matemàtica, Serraño 123, Madrid 6.

Finlande

ACTA PEDAGOGICA FENNICA *
(....); ....; ......; ...
Société pédagogique de Finlande.
Rédacteur en chef : Prof. Matti Koskenniemi,
Université d'Helsinki, Fabianink 33, Helsinki

ARKHIMEDES
(1949); 2; 500; 50 pp.
(bil. en finnois et suédois) Société finnoise de mathématiques et de physique)
Rédacteur en chef : Prof. P.J. Myrberg
Vakaustomisto Box, Helsinki

MATEMAATTISTEN AINEIDEN AIKAKAUSKIRJA
(1937); 4; 1 200; 35 pp.
(bil. en finnois et suédois avec résumés en anglais)
(Association des professeurs de mathématiques, physique et chimie)
Rédacteur en chef : Dr. Urpe Kuuskoski
Linnankoskenk. 12 A 8, Helsinki.

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT (Journal scandinave de mathématiques)
(1953); 4; 2200; 50 pp.
(en danois, norvégien et suédois avec résumés en anglais)
Rédacteur en cher. Prof. Ernst S. Selmer
Matematisk Institutt. Allégt. 34, Bergen, Norvège
Rédacteur Finnois : Prof. Gunnar Hällström, Abo Akademi, Abo, Finlande.

Ilustração 49: Lista dos jornais e revistas que se dedicavam ao ensino das Matemáticas, 1967

OPETTAJAIN LEHTI

(....); ....; ....; ....

Association des maîtres d'écoles primaires de Finlande, Helsinki

Rédacteur: Antti Hentonen, Lönnrotink 25, Helsinki

France

BULLETIN DE L'ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

(1910); 5; 7 300;
29, Rue d'Ulm, Paris Vème

LES CAHIERS PEDAGOGIQUES *

(1945); 10; 15 000;

Service d'Edition et de vente des publications de l'Education Nationale, 13, rue du Four, Paris VIème

EDUCATION ET MATHEMATIQUES

(1961); 8; .... (multigraphié)

29, rue d'Ulm, Paris Vème

L'EDUCATION MATHEMATIQUE - problèmes et corrigés pour élèves de 13 à 17 ans
(1897); 20; ....;
Editions Vuibert, 63 boulevard Saint-Germain, Paris Vème

JOURNAL DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES - problèmes et corrigés pour élèves de 17 & 18 ans.

(1875) 20; ....; ....

Librairie Vuibert, 63, boulevard Saint-Germain, Paris Vème

MATHEMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES *

(1962); 4; .... (multigraphié)
Centre de Mathématique sociale et de Statistique, 17, rue Richer Paris IXème

REVUE DE MATHEMATIQUES SPECIALES

(1890); 10; ....;
Librairie Vuibert, 63, Boulevard Saint-Germain, Paris Vème

Hongrie

A MATEMATIKA TANITASA (Enseignement des mathématiques)
(1953); 6; 6000; 32 pp.

Ministère de l'Education et Société Mathématique Jànos Bolyai, Posta Központi Hirlapiroda Jozsef Nàdortér 1, Budapest V.

MATEMATIKAI LAPOK (Journal Mathématique)

(....); 4; ....;

Société Mathématique Jànos Bolyai, Budapest

Inde

MATHEMATICS SEMINAR (Séminaire mathématique)

- (1957); 4; 265;
Bharti Printing Press, VIII/60 Ajmeri Ghate, Delhi

THE MATHEMATICS STUDENT (L'étudiant en mathématiques)

(....); 4; ....
Prof. Shanti Narayan, Principal, Hansraj College, Delhi-6,

Italie

ARCHIMEDE - per gli insegnanti ed i cultori di matematiche pure e applicate (pour les enseignants et la culture des mathématiques pures et appliquées)

(1949); 6; 56
Via G. Bausan 12, Roma

PERIODICO DI MATEMATICHE (Périodique de mathématique)
Storia, Didattica, filosofia (histoire, didactique, philosophie)
(1921): 5; 1 600; 60

Nicola Zanichelli, Viale Jrnerio, Bologna

RIFORMA DELLA SCÚOLA (Réforme de l'école) *
(1955); 12; ....; 72

Rédacteur ; Lucio Lombardo-Radice et Mario Monacorda
rédaction : Via del Conservatorio 55, Rome
adiministration : Via delle Zoccolette 30, Rome.

Japon

Issue of the Secondary Education (Publication d'Education secondaire) *

(....); ....; .....;

Ministry of Education, Kasumigaseki, Chiyoda-ku, Tokyo.

JOURNAL OF THE JAPANESE SOCIETY OF MATHEMATICAL EDUCATION (Journal de la Société d'Education mathématique du Japon)

(1946); ....; 6 000; 35 pp.

Part I : Arithmetical education (Education arithmétique) *
Part II: Mathematical education (Education mathématique)
Tokyo Kyōiku Daigaku (Tokyo University of Education)
24, Otsuka, Bunkyō-ku, Tokyo

MATHEMATICAL SCIENCE (Science mathématique)

(...); ....; ....

Diamond-sha
Kasumigaseki 3-3, Chiyoda-ku, Tokyo

SUGAKU SEMINAR (Séminaire de mathématiques) *

(....); ....; ....

Nihon-hyoron-sha
Suga-machi, Shinjuku-ku, Tokyo

Norvège

NORDISK MATEMATISK TIDSKRIFT (Journal scandinave de mathématiques)
(1953); 4; 2200; 50 pp.
(en danois, norvégien et suédois avec résumés en anglais)
Matematisk Institut, Blindern, Oslo

Rédacteur: Allégt. 34, Bergen

(Rédacteur en chef: Prof. Ernst S. Selmer)
Rédacteur finnois : Prof. Gunnar af Hällström, Abo Akademi, Abo, Finlande

Pays-Bas

EUCLIDES - Maanblad voor de Didactick der Exacte Vakken (Journal mensuel pour l'enseignement des mathématiques)
(1924); 10; 1300; 48 pp.
Dutch Associations: Wimecos, Liwenagel & W. V. O.

Pologne

MATEMATYKA (Mathématiques)
(1948); 4; 14 500; 48 pp.
Rédacteur : Wrocław 9, rue 9 Maja 84
Editeur : PZWS (Etablissement d'Etat pour les livres scolaires), Warszawa, rue Kredytowa 9

NOWA SZKOŁA (L'école nouvelle) *
(....); 12; ....
Ministère de l'Instruction Publique PZWS, Warszawa, Plac Dabrowskiego 8

WIADOMOSCI MATEMATYCZNE (Informations mathématiques)
(1897); 3; .....; 100-150 pp.
Publié par la Société Mathématique Polonaise PWM
Rédaction : Warszawa, rue Sniadeckich 8
Editeur : PWM (Editions scientifiques d'Etat), Warszawa, rue Miodowa 10

République arabe unie

AL-RIYADIYAT (Mathématiques)
(1956); 3; 3500; 110 pp.
Râbitat Undarrisf al-Riyâdiyat bil-Jumhūrîyan al-Arab-r'yah al Muttahidah (Association des Professeurs de mathématiques de la République arabe unie)
Taftish al-Riyâdah, Al-Mabira al-Mujamma, Maydân al Tahrîr, Le Caire

Ilustração 50: Lista dos jornais e revistas que se dedicavam ao ensino das Matemáticas, 1967

Roumanie

GAZETA MATEMATICĂ SI FIZICĂ* (Gazette des sciences mathématiques & physiques)
Seria A - pentru profesori si studenţi (Série A - pour les professeurs et les étudiants)
(1895/1946); 12; 2500; 56 pp.
Societatea de Stiinţe matematice si fizice din R.P. România (Société des sciences mathématiques et physiques)
(Série B - pour élèves et jeunesse)
(1950); 2; 22 000; 64 pp.
Societatea de Stiinte matematice si fizice din R.P. România (Société des Sciences mathématiques et physiques de la R.P. roumaine)
Str. Academiei 14, Bucuresti

MATEMATIKAI ES FIZIKAI LAPOK (Gazette des sciences mathématiques et physiques)
(1953); 12; 2500; 48 pp.
Român Matematikai és Fizikai Tudományos Társaság (Association roumaine de mathématiques et de physique)
Str. Arany Jànos 11, Cluj

Royaume-Uni

MATHEMATICAL GAZETTE (Gazette mathématique)
The Journal of the Mathematical Association (journal de l'Association mathématique)
(1894); 4; ...... ; 129 pp.
Rédacteur en chef : Dr. E.A. Maxwell
G. Bell and Sons, Ltd.,
Portugal Street, Kingsway, London, W.C.2.
&
The Mathematical Association, 22 Bloomsbury Square, London, W.C.1.

MATHEMATICS TEACHING (Enseignement mathématique)
The Bulletin of the Association of Teachers of Mathematics (bulletin de l'Association des professeurs de mathématique)
(1955); 4 ; .... ; 80 pp.
Rédacteur en chef : Mr. Claude Birtwistle,
Association of Teachers of Mathematics,
Vine Street Chambers, Nelson, Lancashire.

TEACHING ARITHMETICS (Enseignement de l'arithmétique)
The British Journal of elementary mathematics (journal britannique de mathématiques élémentaires)
(1963); 3; ....; .....;
Pergamon Press, Oxford, England and 122E. 55th Street, New York, N.Y. 10022

Suède

ELEMENTA
(....); 4; ....; 50 pp.
Fredsgatan 10, Uppsala

Suisse

ELEMENTE DER MATHEMATIK (Révue de mathématiques élémentaires)
(1946); 6; .....; 24 pp.
Verein schweizerischer Mathematik-und Physik-Lehrer (Association suisse de professeurs de mathématiques et de physique)
Rédacteur : Prof. Dr. E. Trost, Birkhäuser-Verlag, Bâle

L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE (Revue internationale)
Série II
Organe officiel de la CIEM
(1893); ....; .....
Institut de Mathématiques, Université, Genève

Tchécoslovaquie

MATEMATIKA VE SKOLE (Les mathématiques à l'école)
(1950); 10; 64;
(en tchèque et slovaque)
Lazarska 8, Praha 2

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE*
(Progrès des mathématiques, physique et astronomie)
(1956); 6; ....; 64 pp.
(en tchèque et slovaque)
Jednota ceskoslovenskych matematiku a fyziku (Union des mathématiciens et physiciens tchèques)
Maltézské nam 1, Praha 1

U.R.S.S.

MATEMATIKA V SKOLE (Les mathématiques à l'école)
Metodiceskij zurnal Ministerstva Prosvescenija R.S.F.S.R. (Journal méthodologique du Ministère de l'Instruction publique de l'U.R.S.S.)
(1934); 6; 150.000; 96 pp.
Ucpedgiz, 3 proezd Mar'inoj Rosci, 41, Moskva

U. S. A.

AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY
(Journal américain mensuel de mathématiques)
(1894); 10; 11.000; ....
Mathematical Association of America (Association mathématique d'Amérique)
New York University, New York 53, N.Y.

ARITHMETIC TEACHER (Le professeur d'arithmétique)
(1954); ....; 16.000; ...
National Council of Teachers of Mathematics (Conseil national de professeurs de mathématiques)
1201 16th Street, N.W., Washington 6, D.C.
Rédacteur : E. Glenadine Gibb, State College of Iowa, Cedar Falls, Iowa

ELEMENTARY SCHOOL JOURNAL* (Journal de l'école élémentaire)
(....); ...; ...; ...
University of Chicago, Chicago, Illinois

INTERNATIONAL STUDY GROUP FOR MATHEMATICS LEARNING BULLETIN (Bulletin du groupe d'études international pour l'enseignement des mathématiques)
(1962); ....; 500 (multigraphié)
International Study Group for Mathematics Learning, California,
Palo Alto, California 94306

MATHEMATICS MAGAZINE (Revue de mathématiques)
(1947); 5; 2300; ....
Rédacteur : R.E. Horton
Mathematical Association of America, University of Buffalo, Buffalo 14, N.Y.

MATHEMATICS STUDENT JOURNAL
(Journal des étudiants en mathématiques)
(1954); 4; 80.000; ...
Rédacteur: Myron F. Rosskopf, Teachers College, Columbia University, New York 27, N.Y.
National Council of Teachers of Mathematics (Conseil national de professeurs de mathématiques) 1201 16th Street N.W., Washington 6, D.C.

THE MATHEMATICS TEACHER (Le professeur de mathématiques)
(1908); 8; 26.000; ...
National Council of Teachers of Mathematics (Conseil national de professeurs de mathématiques), 1201 16th Street, N.W., Washington 6, D.C. 20036

SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS
(La science et les mathématiques à l'école)
Journal for all science and mathematical teachers (Journal pour tous les professeurs de science et de mathématiques)
(1901); 12; 6.500; ...
Rédacteur: G. Mallinson, Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan

SCIENTIFIC AMERICAN* (L'américain scientifique)
(1845); 12; ....; 180 pp.
415 Madison Avenue, New York 17, N.Y.

SCRIPTA MATHEMATICA
devoted to the philosophy, history and expository treatment of mathematics (consacré à la philosophie, l'histoire et l'enseignement des mathématiques)
(1933); 3; ....; ....
A. Celbort, Amsterdam avenue, 186th, New York, N.Y. 10033

Yougoslavie

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST ZA UČENIKE ŠREDNJICH ŠKOLA*
(Journal des mathématiques et de la physique pour les élèves des écoles secondaires)
(1951); 4; 19.000; 45 pp.
Drustvo matematicara i fizicara H R Hrvatske (Association des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Croatie)
Llica 16, Zagreb

NASTAVA MATEMATIKE I FIZIKE*
(L'enseignement des mathématiques et de la physique)
(1951); 4; ....; 80 pp.
table des matières en français et en russe
Društvo matematičara i fizičara N.R. Srbije (Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie)
Boîte postale 791, Beograd

Ilustração 51: Lista dos jornais e revistas que se dedicavam ao ensino das Matemáticas, 1967

Anexo 16.[16]

BIBLIOGRAPHY

ELEMENTARY SCHOOL MATHEMATICS

Abellanas, P. Mathematica 1er Curso. University of Madrid, Spain, 1964.

Anglade. Arithmétique, Etude Axiomatique. Magnard, Paris, 1961.

Banks, J.H. Learning and Teaching Arithmetic, Revised edition, Allyn and Bacon, 1964.

Bell, Hammond and Herrera. Fundamentals of Arithmetic for Teachers. Wiley & Son, 1962.

Crouch and Baldwin. Mathematics for Elementary Teachers. Wiley & Son, 1964.

Corzes. Arithmétique, Masson et Cie, Paris, 1956.

Donneddu, A. Arithmétique Générale. Dunod, Paris, 1962.

Entebbe Mathematics Project. Educational Services Inc., Watertown, Mass. 1963-1964.

Hacker, Barnes and Long. Fundamental Concepts of Arithmetic. Prentice Hall, 1963.

Meserve and Sobel. Introduction to Mathematics, Prentice Hall, 1964.

Peterson and Hashisaki. Theory of Arithmetic, Wiley and Sons, 1963.

Smart, J.R. New Understanding in Arithmetic, Allyn and Bacon, 1963.

School Mathematics Study Group. Number Systems ; Studies in Mathematics, Vol. VI, A.C. Vroman and Co., 1961.

School Mathematics Study Group. A Brief Course in Mathematics for Elementary School Teachers ; Studies in Mathematics, Vol. XX, A.C. Vroman and Co., 1963.

Ward and Hardgrove, Modern Elementary Mathematics, Addison-Wesley, 1964.

Webber, G.C. and Brown, J.A. Basic Concepts of Mathematics, Addison-Wesley, 1963.

Geometry in the Elementary School

Hawkes and Suppes, Geometry for the Primary Grades, Holden-Day, San Francisco, California.

School Mathematics Study Group, Studies in Mathematics, Vol. VII, Intuitive Geometry, AC. Wroman, Pasadena, California.

School Mathematics Study Group, Studies in Mathematics, Vol. V, Informal Geometry, A.C. Vroman, Pasadena, California.

Piaget and Inhelder, The Child's Conception of Space, Routhledge and Paul, London.

Piaget and Inhelder, The Child's Conception of Geometry, New York Basic Books.

Lovell, K. The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children, Philosophical library.

The Arithmetic Teacher, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C. : A magazine devoted to all aspects of teaching mathematics in the elementary school.

HIGH SCHOOL MATHEMATICS

Italy.

- Per un insegnamento moderno della matematica nei Licei classici, nei Licei scientifici o negli Istituti magistrali, Bologna, 1963.
- Per un insegnamento moderno della matematica, negli Istituti Tecnici, 1963.
- Per un insegnamento moderno della matematica, negli Istituti Tecnici, 1964.
- Per un insegnamento moderno della matematica, nella Scuola media, 1964.

Greece.

- Experimental Teaching of Mathematics, Book I, Grade A', Ministry of Education, Athens, 1962.
- Experimental Teaching of Mathematics, Book II, Grade B', Ministry of Education, Athens, 1963.
- Experimental Teaching of Mathematics, Book III, Grade C', Ministry of Education, Athens, 1964.

Scandinavia.

- Geometry, grades 7 - 9, two parts
- Algebra, grades 7-9, three parts
- Geometry, grades 10-12, three parts
- Algebra, grades 10-11, two parts
- Calculus, grades 11-12, one part
- Differential equations, grades 11-12, one part
- Probability and statistics, grades 11-12, one part

(All of these books are published from 1961-64 and available from M. Hastad, Eckleisiastik-departmentet, Stockholm 2, Sweden).

United States of America.

- Mathematics for Junior High School, Vol. I, two parts.
- Mathematics for Junior High School, Vol. 2, two parts
- First Course in Algebra, two parts
- Geometry with Co-ordinates, two parts
- Intermediate Mathematics, parts I & II
- Elementary Functions
- Introduction to Matrix Algebra

All of these books were produced by The School Mathematics Study Group 1959-1962, and are available from Yale University Press, New Haven, Conn., U.S.A.

- Arithmetic of the Real Numbers, Unit I
- Generalizations and Algebraic Manipulation, Unit II
- Equations and Inequations, Unit III
- Ordered Pairs and Graphs, Unit IV
- Relations and Functions, Unit V
- Geometry, Unit VI
- Mathematical Induction, Unit VII
- Sequences, Unit VIII
- Elementary Functions, Unit IX

All these units were produced by the University of Illinois Committee on School Mathematics, under the direction of Max Beberman and Herber Vaughn, and are available from D.C.

Ilustração 52: Bibliografia proposta por Fehr, no âmbito do ensino das Matemáticas, Congresso de Dakar, 1965

[16] Fonte: UNESCO, 1967, pp.77-82

- Circular Functions and Trigonometry, Unit X — Heath and Co., Boston, Mass. U.S.A.
- Complex Numbers, Unit XII

France.

- Breard C. Mathématiques 2e, L'Ecole, Paris VIe.
- Breard C. Mathématiques Elémentaires, Vol. I, II, L'Ecole, Paris VIe.
- Breard C. Mathématiques 6th through 3, 4 Vol., L'Ecole, Paris VIe.

Others.

- Kristensen and Rindung : Matematik I (Grade 10), 1962. Gads Forlag, Copenhagen.
- Kristensen and Rindung : Matematik II (Grade 11), 1963. Gads Forlag, Copenhagen.
- Kristensen and Rindung : Matematik III (Grade 12), 1964. Gads Forlag, Copenhagen.
- Fenchel, Handest, Meyer and Neerup, Elementaer Matematik I, Munksgaard, Copenhagen, 1964.
- Råde, L. Probability and Statistics, Förlaget, Stockholm, 1963.
- Fehr, Bunt and Grossman, Introduction to Sets, Probability and Hypothesis Testing, D.C., Heath and Co., Boston, Mass. 1964.
- Fehr, Carnahan and Beberman, Algebra with Trigonometry, Second Course, D.C. Heath and Co., Boston, Mass. 1963.
- Papy, G. Mathematiques Modernes, Didier, Brussels.
- School Mathematics Project, Book T, Cambridge University Press, London, 1964.

TRAINING OF SECONDARY

SCHOOL TEACHERS

Set theory.

- Breur and Fehr, Introduction to the Theory of Sets. Prentice Hall, 1958 (also in German and in French).
- Halmos, P. Naive Set Theory, Van Nostrand, 1960.
- Hamilton and Landin, Set Theory, Structure of Arithmetic, Allyn and Bacon.
- Suppes, D. Axiomatic Set Theory, Van Nostrand, 1960.

Algebra.

- Birkhoff and Mac Lane, Survey of Modern Algebra, revised edition, MacMillan Co., 1965.
- Kurosh, A.G. General Algebra, Chelsea Publishing Co., 1963.
- Lentin and Rivaud, Elements d'Algebre Moderne, Vuibert, Paris, 1958.
- Page and Swift, Elements of Linear Algebra, Ginn and Co., 1961.
- Papy, G. Groupes, Dunod, Paris, 1961.

Probability.

- Fehr, Bunt and Grossman, Introduction to Sets, Probability and Hypothesis Testing, D.C. Heath and Co., Boston, Mass., 1964.
- Goldberg, Probability, An Introduction, Prentice Hall, 1960.
- Parzen, Modern Probability Theory and its Application, John Wiley and Co., 1960.

Geometry.

- Blumenthal, A Modern View of Geometry, Freeman, San Francisco, 1961.
- Choquet, G. L'Enseignement de la Géométrie, Hermann, Paris, 1964.
- Coxeter, Introduction to Geometry, John Wiley and Co., 1961.
- Libois, P. Introduction à la Géométrie, Presses Universitaires de Bruxelles, Belgique, 1963.
- Moise, Geometry from an Advanced Standpoint, Addison-Wesley, 1964.
- Wylie, Foundations of Geometry, McGraw-Hill, 1964.

Analysis.

- Dieudonné, J. Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 1960.
- Johnson and Kiokemeister, Calculus with Analytic Geometry, Allyn and Bacon, 1961.
- Lang, S. A First Course in Calculus, Addison-Wesley, 1964.
- Lang S. A Second Course in Calculus, Addison-Wesley, 1964.

Topology.

- Cairnes, S.S. Introductory Topology, Ronald Press, 1961.
- Kelley, J. General Topology, Van Nostrand, 1955.
- Kuratowski, K. Introduction to Set Theory and Topology, Pergamon Press, 1961.

General.

- Doneddu, A. Les Bases de l'Analyse Mathématique Moderne, Dunod, 1963.
- Felix, L. Exposé Moderne des Mathématiques élémentaires, Dunod, 1959.
- Per un Insegnamento Moderno della Matematica nelle Scuole Secondarie, Ministero Della Pubblica Istruzione, Bologna, 1962.
- European Students' Handbook - Mathematics, University of Munster, Münster, Westfalen, Germany.
- Courant and Robbins, What is Mathematics, Oxford, University Press.
- Exner and Rosskopf, Logic in Elementary Mathematics McGraw-Hill Book Co.

Ilustração 53: Bibliografia proposta por Fehr, no âmbito do ensino das Matemáticas, Congresso de Dakar, 1965

Anexo 17.[17]

Problème du programme de l'étude en méthodologie de l'enseignement des mathématiques.

Nos expériences nous permettent de suggérer les objectifs suivants:

Le programme de la méthodologie mettrait en évidence les problèmes de la pédagogie générale des mathématiques et ses problèmes particuliers.

L'étude générale concernerait :

1. L'analyse et la discussion multilatérales et profondes des problèmes de l'enseignement des mathématiques du point de vue de ses bases spécifiques et philosophiques mathématiques (contenu, structure, méthodologie de la recherche), logique, psychologique, pédagogiques et sociologiques ;
2. le rôle et les objectifs de l'enseignement des mathématiques dans le système actuel de l'éducation et dans la perspective de son développement ;
3. L'analyse du programme scolaire actuel, la perspective de ses transformations, l'étude comparative des programmes élaborés dans les autres pays à l'échelle internationale ;
4. l'organisation du processus de l'enseignement des mathématiques et ses techniques particulières ;
5. les méthodes de l'amélioration continue du travail professionnel, les éléments de la méthodologie de la recherche dans le domaine de l'enseignement des mathématiques.

En choisissant des problèmes particuliers, il faudrait prendre en considération avant tout :

1. les problèmes particulièrement importants du point de vue de la réalisation des objectifs de l'enseignement des mathématiques ;
2. les problèmes particulièrement difficiles concernant soit la structure mathématique du sujet en question et sa présentation élémentaire, soit les difficultés psychologiques, soit les difficultés dans l'organisation même du processus de l'enseignement, liées au thème donné ;
3. les problèmes nouveaux, inconnus dans les mathématiques élémentaires traditionnelles, exigeant la recherche profonde et très perspicace à l'étape de "la réforme en marche",
4. les problèmes particulièrement favorables à la présentation synthétique des tendances nouvelles et des illustrations des considérations générales ainsi qu'à l'initiation de l'étudiant au travail méthodologique créateur.

Ilustração 54: Programa de Metodologia do Ensino das Matemáticas levado a cabo na *École Normale Supérieure de Cracovie*, Krygowska, 1967

[17] Fonte: UNESCO, 1967, pp. 215-216

Anexo 18.[18]

Centre Belge de Pédagogie
de la Mathématique

PROGRAMME DE MATHEMATIQUE
POUR LES CLASSES DE 6è, 5è et 4è

CLASSE DE SIXIEME
(12 à 13 ans)

A. ENSEMBLES

1. Ensembles
Exemples - éléments d'un ensemble - représentation par les diagrammes de Venn - ensemble vide - ensemble comprenant un seul élément.

Termes et objets - égalité.

Les symboles $=, \in, \emptyset$; la notation $E = \{x \mid P(x)\}$ et ses variantes.

2. Parties d'un ensemble
Parties ou sous-ensembles d'un ensemble.
Inclusion - les symboles $\subset, \supset$.
Ensemble des parties de certains ensembles.

3. Algèbre des ensembles
Intersection - Réunion - Différence (facultativement la différence symétrique).
Commutativité et associativité de $\cup$ et de $\cap$.
Distributivités mutuelles de $\cap$ et de $\cup$.
(Quelques "contre-exemples" : non associativité de $\setminus$; situations relatives de $\setminus$ et de $\cup$).

4. Partition
Exemples de partitions d'un ensemble - définition.

B. RELATIONS ET GRAPHES

5. Relations et graphes
Nombreux exemples de relations.
Graphe d'une relation.
Les relations regardées comme ensembles de couples.
Relation de l'ensemble A vers l'ensemble B.
Le produit A x B.
Réciproque d'une relation.
Image d'un ensemble par une relation.
Propriétés relatives de $\times$, $\cap$, $\cup$.

6. Propriétés de certaines relations.
Réflexivité - symétrie - transitivité - antisymétrie.

7. Composition des relations
Associativité de la composition - réciproque d'une composée.

8. Fonctions.
Fonctions - applications - bijections - composition de fonctions - transformations et permutations d'un ensemble.
(Facultativement, injections et surjections).

9. Equivalence
Equivalence et partition.

10. Ordre
Ordre - ordre total.
Les symboles $<$, $>$

C. NOMBRES ENTIERS RATIONNELS

11. Entiers Naturels
Ensembles équipotents - cardinal d'un ensemble (notions très élémentaires).
Ensembles finis et ensembles infinis.
Nombres naturels: cardinaux des ensembles finis.
Problèmes relatifs au cardinal de la réunion, de l'intersection et du produit d'un couple d'ensembles.
Recherche de la définition de l'addition et de la multiplication des entiers naturels à partir des opérations ensemblistes.
Eclairer et justifier les propriétés élémentaires de l'addition et de la multiplication à partir des propriétés ensemblistes.

12. Systèmes de numération
Numération binaire et numération décimale.

13. Etude élémentaire de Z, +, .
Propriétés élémentaires de Z, +, ., notamment les produits remarquables.
Equations dans Z, +
Exercices de calcul numérique et littéral.

D. GEOMETRIE

14. Plan - point - droite
Le plan, ensemble infini de points.
Les droites, parties propres du plan.
Ensemble des droites du plan.
Propriétés d'incidence - utilisation des diagrammes de Venn.
Parallélisme - le symbole $\parallel$.
La direction d'une droite, partition du plan.

15. Parallèles et perpendiculaires
Droites et directions perpendiculaires - le symbole $\perp$.
Relations entre $\perp$ et $\parallel$.

16. Droites orientées
Les deux ordres totaux réciproques de toute droite.
Orientation des droites.
Demi-droites ouvertes et demi-droites fermées.
Segments ouverts, segments fermés, segments semi-ouverts.
Recherche de la définition des ensembles convexes.

17. Projections parallèles.
Projection parallèle du plan sur une droite.
Image d'une partie du plan par une projection.
Projection parallèle d'une droite A sur une droite B.
La projection parallèle d'une droite orientée sur une droite orientée est croissante et décroissante.
Cas particulier de la projection d'une droite orientée sur une droite parallèle orientée.
Droites parallèles orientées de même sens ou de sens opposé.

18. Equipollence et translations
Couples équipollents.
L'équipollence est une équivalence.
Projection de couples équipollents - petit théorème de Thalès.
Milieu d'un segment - théorèmes du parallélogramme.
Propriétés des équipollences - croisement des équipollences.
Translations ou vecteurs.
Images de parties du plan par une translation.
Images de droites, de demi-droites, de segments et de couples de points par une translation.

CLASSE DE CINQUIEME
(13 à 14 ans)

1. Le groupe des translations ou vecteurs.
Composition des translations.
Le groupe commutatif des translations du plan.
Traduction en notations vectorielles additives.
Premiers éléments de calcul vectoriel.

2. Le groupe Π_o, +
Nouvelle représentation du groupe des translations ou du groupe des vecteurs.
Sous groupes de Π_o, +
Somme de parties de Π_o, +
Calcul dans Π_o, + - Equations - Problèmes.

3. Le groupe totalement ordonné D_o, +
Toute droite D_o comprenant o est un sous-groupe de Π_o, +
Etude du groupe ordonné D_o, +, $<$
Somme de segments - Première idée de l'approximation d'une somme.

4. Première synthèse de la notion de groupe
Mise en évidence de la notion de groupe à partir des exemples déjà rencontrés.
Nouveaux exemples, notamment groupe cyclique.
Calcul dans un groupe quelconque.
Notation additive et notation multiplicative.
Coefficients et exposants entiers rationnels.
Equations dans un groupe.

5. Nombres réels
Graduation de la droite - Axiome d'Archimède.
Sous-graduations binaires ou décimales.
Binaires et décimaux limités.
Binaires et décimaux illimités.
Axiome de continuité.
Première apparition du concept de nombre réel.

6. Théorème de Thalès
Théorème de Thalès sous sa forme générale.
Rapport de vecteurs parallèles.

Ilustração 55: Programa experimental belga durante os primeiros cinco anos do Ensino Secundário, Papy, 1967

[18] Fonte: UNESCO, 1967, pp.294-301.

7. Homothéties
Images de parties du plan par une homothétie.
Rapport d'homothétie.
Les homothéties de rapport $\neq$ O conservent: la linéarité, l'incidence, le parallélisme, le milieu, le rapport de vecteurs parallèles, l'ensemble des segments.
Composée d'homothéties de même centre.
Groupe commutatif des homothéties de même centre et de rapport $\neq$ O.
A titre facultatif: groupe des homothéties et translations ou groupe des dilatations.

8. Addition des réels.
Le groupe additif ordonné des réels.
Equations et inéquations - Calcul approché - Valeur absolue.

9. Multiplication des nombres réels.
Pour les homothéties de rapport entier rationnel et de même centre: le rapport de la composée de deux homothéties égale le produit des rapports.
Définition de la multiplication des nombres réels par généralisation de la propriété précédente.
Associativité et commutativité de la multiplication des réels.
Le groupe R_0, . des réels non nuls.
Equations dans R_0, .

10. Multiplication des vecteurs par un réel
Associativité mixte.
Double distributivité.
Combinaisons linéaires et projections.

11. Le champ réel ordonné R, +, . , <
Mise en évidence de la structure de champ ordonné.
Calcul dans ce champ.
Problèmes.

12. Fractions
Fractions à termes réels.
Règles et exercices de calcul de fractions.
Le champ des nombres rationnels.

13. Equations linéaires à une inconnue dans le champ des réels.
Equations à une inconnue - Problèmes.

14. Inéquations - Approximations - Premiers éléments d'un calcul d'erreurs

15. Le vectoriel du plan
Calcul vectoriel.
Equation vectorielle de la droite.
Bases et coordonnées.
Problèmes.

16. Symétries centrales
Images de parties du plan par une symétrie centrale.
Centre(s) de symétrie d'une partie du plan.
Composée de deux et de plusieurs symétries centrales.
Groupe des symétries centrales et des translations.

17. Symétries parallèles et symétries orthogonales.
Images de parties du plan et notamment de droites.
Propriétés conservées.
Axe(s) de symétrie d'une partie du plan.

CLASSE DE QUATRIEME
(14 à 15 ans)

A.
1. La relation "divise" dans Z et dans l'ensemble des entiers naturels.
Diviseurs premiers et primaires d'un nombre.
Parties stables et sous-groupes de Z, +
Tous les sous-groupes de Z, + sont cycliques.
P.G.C.D. et P.P.C.M. d'une partie de Z.
Relation de Bezout.

2. Equations de la droite
Equation vectorielle, équations paramétriques et équation cartésienne de la droite.

3. Fonctions de R dans R - Fonctions polynomes.
Exemples
Représention cartésienne.
Addition et multiplication de fonctions.
Anneau des applications de R dans R.

4. Algèbre des polynomes réels en une indéterminée
Algèbre des polynomes.
Division par (x-a) - Division avec reste.
Exercices de factorisation dans les cas simples.

5. Racine carrée d'un nombre réel positif
Racine carrée et ses approximations.

6. Systèmes d'équations linéaires à une, deux et trois inconnues
Résolution par la méthode de Gauss.
Problèmes.

7. Systèmes d'équations et d'inéquations linéaires à deux inconnues
Résolution de systèmes simples.
Problèmes. Interprétation géométrique.

B.
8. Groupe des déplacements et groupe des isométries du plan
Symétries orthogonales.
Translations, rotations et retournements, comme composées de symétries orthogonales.
Tout retournement comme composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation parallèle à l'axe de la symétrie.
Groupe commutatif des rotations de centre donné.
Groupe des déplacements. Groupe des isométries.

9. Distance
Distance - cercles - disques ouverts et fermés.

10. Angles (orientés et non orientés)
Angle (orienté) d'une rotation.
Angle (orienté) d'un couple de demi-droites.
Groupe des angles (orientés).
Angle (non orienté) d'une paire de demi-droites.
Mesure des angles.

11. Cosinus et produit scalaire
Cosinus d'un angle.
Un angle non orienté est déterminé par son cosinus.
Produit scalaire et son invariance par les isométries.
Théorème de Pythagore.
Formules élémentaires de Trigonométrie.

12. Inégalité triangulaire
Inégalité de Cauchy-Schwarz - Inégalité triangulaire
Convexité du disque.
Intersection d'une droite et d'un disque ou d'un cercle.
Calcul approché dans le plan.

13. Congruences et congruences directes
Parites congruentes du plan.
Parties directement congruentes du plan.
Couples de points congruents.
Triples de points congruents.

14. Groupe des similitures du plan et sous groupe des similitudes directes

15. Les aires et leur mesure
Aires de parties élémentaires du plan.
Calcul des aires en s'aidant du calcul vectoriel et de la trigonométrie.

Ilustração 56: Programa experimental belga durante os primeiros cinco anos do Ensino Secundário, Papy, 1967

Anexo 19.[19]

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES

1. [A] ARTIN : - Geometric Algebra (Interscience Publishers, New York 1957)
   : - Algèbre Géométrique (Gauthier-Villars, 1962)
2. [D1] DIEUDONNE : - Foundations of Modern Analysis (Academic Press Inc., New York 1960)
   : - Fondements de l'Analyse Moderne Gauthier-Villars, Paris 1963)
3. [D2] DIEUDONNE : - Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire (Herman, Paris 1964)
4. [G] PAPY : - Groupes (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles - Dunod, Paris 1961)
   : - Groups (Macmillan, London 1964)
   : - I Gruppi (Feltrinelli Editore, Milano, 1964)
5. [EE] PAPY : - Erste Elementen der Moderne Mathematik (Otto Salle Verlag, Frankfurt-Hamburg 1962 - 1963)
6. [F1] PAPY-DEBBAUT : - Géométrie affine plane et nombres réels (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles - Gauthier-Villars, Paris 1962)
   - Ebene Affine Geometrie und reelle Zahlen (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)
7. [F2] PAPY : - Initiation aux Espaces Vectoriels (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles - Gauthier-Villars, Paris 1963)
   - Einführung in die Vectorraumlehre (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965)

Ilustração 57: Obras e artigos de autoria de Papy e Dieudonné

[19] Fonte: UNESCO, 1967, pp.291-293

8. [MM1] PAPY : - Mathématique Moderne 1
(Editions Didier - Bruxelles - Paris 1963
: - Moderne Wiskunde 1
(Didier, Bruxelles - Paris 1965)
: - Matematica Moderna 1
(Editura Tineretului, Bucuresti 1965)
: - Modern Mathematics 1
(Collier-Macmillan, London - New York 1965

9. [MM2] PAPY : - Mathématique Moderne 2
(Didier - Bruxelles, Paris 1965)

10. [A7] PAPY (avec la collaboration des Assistants du C. B. P. M.)
: - Arlon 7. Documentation pour l'enseignement du Vectoriel euclidien plan.
(Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique - 183, avenue Brugmann, Bruxelles 6).

11. [GP] PAPY : - Géométrie Plane
(Labor, Bruxelles - Nathan, Paris 1966)

12. [MM3] PAPY : - Mathématique Moderne 3
(Didier - Bruxelles, Paris 1966).

ARTICLES

13. PAPY : - Introduction aux espaces vectoriels
(La math. du 20e siècle. Vol. II - Bruxelles 1961 - 33 pages).

14. PAPY : - Méthodes et techniques de présentation des nouveaux concepts de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement secondaire
(Mathématique moderne, OCDE, Athènes 1963).
: - Médios y técnicas para exponer los conceptos de matematica moderna.
(Elementos n°9, Nov. Dic. 1964, pp 73-80 n°10 En. Feb. 1965 pp 99-104, n°11 Mar. Abr. 1965 pp 127-130).
Methods and techniques of explaining new mathematical concepts in the lower forms of secondary schools.
(The Mathematics Teacher - Vol. LVIII n° 4 April 1965 pp 345-352, n° 5 May 1965 pp 448-453).

15. PAPY : - Comment introduire les notions d'ensembles et de relations
(Publications de l'Unesco).

16. PAPY : - L'enseignement de la géométrie aux enfants de 12 à 15 ans.
(Publications de l'Unesco).

Ilustração 58: Obras e artigos de autoria de Papy e Dieudonné

Anexo 20.[20]

Lista dos Professores Efectivos do 8.º Grupo dos liceus, com indicação do tempo de serviço, referido a 30 de Setembro de 1950

N.º de ordem	NOMES		LICEUS	Data de nascimento	TEMPO DE SERVIÇO							
					Provisório		Agregado eventual		Agregado permanente ou aux.		Efectivo	
					Anos	Dias	Anos	Dias	Anos	Dias	Anos	Dias
1	Alberto Eduardo de V. Lomelino		Portalegre	13- 1-894	—	288	—	—	4	200	15	254
2	Alberto Rodrigues de Miranda		Évora	2-10-899	5	229	—	—	2	273	16	90
3	Alberto Sá de Oliveira	(1)	D. João III	7-11-894	—	260	—	—	—	51	30	349
4	Alberto Soares Fernandes Beirão		Camões	14- 9-893	—	201	—	—	1	264	29	79
5	Alberto Vaz de Almeida Neves		Beja	16- 3-901	2	190	—	—	—	178	20	173
6	Albino Honório de Freitas		Portalegre	12- 2-891	3	53	—	—	1	40	21	325
7	Alexandre Horácio da Silva Rodrigues		Viana do Castelo	8- 6-906	—	65	—	249	1	6	3	279
8	Alfredo da Fonseca		Lamego	19- 9-912	—	—	1	221	5	124	2	228
9	Alfredo Tenório de Figueiredo		Leiria	19-10-895	5	138	—	—	—	315	20	276
10	Alice Fernandes da Silva Morais		Carolina Michaëlis	8-11-903	2	283	3	5	5	121	6	360
11	Alvaro dos Santos Lemos		D. João de Castro	6- 5-912	—	35	—	319	2	253	8	66
12	Alvaro Sequeira Ribeiro		Setúbal	16-11-900	1	110	—	—	1	23	23	177
13	Amélia dos Prazeres Lopes Monteiro		Carolina Michaëlis	10- 5-895	1	267	—	—	5	51	25	—
14	Ana Joaquina Mendes da Silva		D. F. Lencastre	16- 9-897	1	43	—	—	3	25	18	264
15	Angelo Augusto da Silva		Funchal	20- 2-896	—	100	—	—	—	359	29	96
16	Antónia da Luz Correia		Viseu	26-12-910	—	—	5	202	—	—	5	112
17	António Aires de Abreu		Setúbal	17-12-893	2	229	—	—	—	194	27	97
18	António Augusto Lopes	(2)	Alex. Herculano	21- 3-917	—	36	1	205	4	238	2	227
19	António Francisco de Oliveira		D. Manuel II	20- 3-892	3	244	—	—	—	307	28	58
20	António Lino Lopes dos Santos		Gil Vicente	29- 1-891	2	354	—	—	—	37	20	313
21	António do N. Palma Fernandes		Pedro Nunes	25-12-907	—	—	—	84	2	24	11	242
22	António Nicodemos de Sousa Pereira		Passos Manuel	15- 9-892	1	156	—	—	—	283	24	203
23	António Pacheco de Carvalho e Pina		Guarda	15- 6-911	—	48	5	328	1	179	2	229
24	António de Sousa Agostinho Júnior		Faro	13- 9-894	3	98	—	—	—	225	22	250
25	Armando Cassiano		Faro	6- 4-895	—	345	—	—	—	233	28	188
26	Augusta Faria Gersão		Infanta D. Maria	12- 8-892	1	181	—	—	—	204	31	102
27	Augusto Cardoso		Vila Real	10- 8-898	2	94	—	—	—	146	24	30
28	Carlos Fernandes Murteira		Bragança	9- 5-915	—	67	1	144	4	52	2	141
29	Diamantino Augusto da Costa Soares		Beja	27- 2-914	—	—	1	223	5	150	2	229
30	Eduardo de Almeida Esteves		Castelo Branco	11-10-891	—	12	—	—	—	180	24	36
31	Ema Alves das Neves		D. F. Lencastre	12- 4-903	—	—	4	315	—	—	5	34
32	Eurialo Roseiro Caldeira Boavida		Guimarães	29- 5-900	2	51	—	—	9	172	7	166
33	Florência de Jesus Custódia Frederico		R. St.ª Isabel	27- 6-917	—	99	1	355	5	269	—	270
34	Francisco Amaro Lopes Subtil		Chaves	16- 5-894	(*)	(*)	—	282	10	205	2	218
35	Francisco Dias Agudo		Gil Vicente	10- 6-901	2	76	—	—	—	—	21	323
36	Francisco Ferreira Neves		Aveiro	24-12-892	—	500	—	—	—	50	30	348
37	Francisco Maria Gonçalves		Camões	28- 2-912	—	144	—	78	5	116	8	153
38	Helena Simões dos Reis		Rainha D. Leonor	15- 7-900	—	327	—	—	17	97	3	20
39	Henrique Francisco dos Santos	(3)	Braga	19-12-913	—	32	3	256	—	—	4	220
40	Henrique Rodrigues de Oliveira Sá		D. Manuel II	11- 2-888	—	325	—	—	—	51	34	103
41	Jacinto Augusto Guedes		Vila Real	18- 4-890	3	17	—	—	2	109	23	12
42	Jaime Furtado Leote		Pedro Nunes	15- 9-902	1	30	—	—	—	354	19	82
43	Jaime Maximiano G. Xavier de Brito		Passos Manuel	16- 7-893	2	198	—	—	1	259	23	246
44	João da Conceição Dâmaso Rego		Camões	11-12-891	2	79	—	—	—	—	30	346
45	João Gomes dos Santos Rigueira	(4)	D. Manuel II	8- 7-906	—	269	—	—	1	202	15	152
46	João Matilde Xavier Lobo	(5)	Passos Manuel	14-10-893	—	285	—	—	—	—	31	305
47	João dos Ramos Seruca		Évora	28- 8-909	—	247	—	10	2	287	13	53
48	Joaquim Lopes Dias		Castelo Branco	22- 8-904	1	165	—	—	4	99	15	7
49	José Alves Baptista de Mendonça		D. João de Castro	26- 3-903	—	270	—	—	1	10	21	125
50	José de Andrade Novais		Póvoa de Varzim	28- 7-891	—	325	—	—	—	97	28	160
51	José Augusto Cardoso	(6)	D. João III	19- 1-891	—	—	—	—	—	—	35	305
52	José de Bettencourt Forjaz de Lacerda		Ang. do Heroísmo	26- 4-896	1	174	—	—	—	—	21	316
53	José Carneiro da Silva		Aveiro	20- 4-811	—	—	1	186	—	97	11	—
54	José Duarte da Silva Paulo		Leiria	25-10-905	—	—	1	107	4	330	2	137
55	José Gonçalves Bigote de Almeida		Viseu	10- 1-917	—	61	1	14	5	79	2	140
56	José Jorge Gonçalves Calado		Pedro Nunes	12- 8-903	—	500	—	—	—	113	16	241
57	José de Lemos de Castro Serrão		Viseu	29- 4-894	—	252	—	—	—	275	27	124
58	José Maria Pereira	(7)	Passos Manuel	22- 3-886	—	—	—	—	—	—	—	—
59	José de Meneses Torres	(8)	D. Manuel II	26- 6-895	—	332	—	—	1	316	22	264
60	José Silvestre de Albuquerque		Bragança	13- 9-902	—	—	—	291	10	124	2	221
61	Lúcio Santana B. do Rosário Miranda		Ponta Delgada	24- 8-904	1	125	—	—	—	198	20	11
62	Luís da Ascensão Afonso		Faro	29- 5-902	1	202	—	—	1	158	19	129
63	Luís de Castro Marques		Alex. Herculano	19- 8-901	1	63	—	—	—	219	20	140
64	Luís Maria de Passos da Silva		Gil Vicente	31-10-888	2	160	—	—	—	37	33	255
65	Manuel António Braga da Cruz		Braga	19-10-897	1	359	—	—	—	60	26	110
66	Manuel Augusto Rabaça		Guarda	28-10-901	4	305	—	—	—	354	20	—
67	Manuel Augusto da Silva	(9)	Alex. Herculano	1- 7-910	—	—	2	180	5	141	2	225
68	Manuel Luís da Rocha Silveiro		Horta	20- 1-921	—	—	2	78	—	259	1	—
69	Manuel Pedrosa de Oliveira Afonso		Alex. Herculano	14- 8-898	—	298	—	—	—	357	28	53
70	Manuel Ribeiro Cardona		Vila Real	9- 5-899	1	279	—	—	—	—	26	323
71	Maria Baptista dos S. Guardiola	(10)	M. A. V. Carvalho	13- 1-895	—	296	—	—	5	90	23	332
72	Maria da Conceição M. Magalhães		M. A. V. Carvalho	2- 9-892	4	15	—	—	6	49	21	284
73	Maria das Dores Mota Alves		Carolina Michaëlis	9-12-901	—	—	—	—	1	58	21	316
74	Maria Helena Guimarães F. Cardoso		R. St.ª Isabel	19- 9-905	2	158	1	317	—	229	13	58
75	Maria Júlia da Costa Canhão		D. F. Lencastre	11- 3-893	2	299	—	—	3	5	26	51
76	Maria de Lurdes Pereira de S. Avenal		Guarda	28- 3-915	—	51	6	192	—	220	—	279
77	Maria Luísa Belmonte Canhão		Rainha D. Leonor	13- 4-914	—	31	2	21	5	195	1	170
78	Maria Luísa Hauet Leal		Infanta D. Maria	4- 1-908	—	—	5	164	2	220	2	146
79	Maria Margarida de Morais Sarmento		M. A. V. Carvalho	10- 3-905	1	176	1	307	2	17	11	304
80	Maria da Piedade Pires C. da S. Mendes		M. A. V. Carvalho	28- 9-911	—	—	—	286	—	165	12	200
81	Maria Rodrigues dos Santos		R. St.ª Isabel	21-12-893	1	255	—	—	6	79	21	331
82	Maria Sara de Figueiredo Figueiral		Infanta D. Maria	5- 7-894	—	273	—	—	6	167	21	183
83	Marieta Especiosa Olinda dos Remédios		Rainha D. Leonor	2- 7-909	—	—	9	261	—	76	2	—
84	Marília Alda de Lima Monteiro		Carolina Michaëlis	21-11-907	—	298	—	—	2	319	13	58
85	Mário António da Cunha Mura		D. João de Castro	17- 9-899	—	—	—	61	—	182	13	102
86	Mário Rego Costa		Ponta Delgada	27- 8-900	2	83	—	—	—	58	19	286
87	Mário dos Santos Guerra	(11)	Castelo Branco	21- 6-901	1	19	—	—	—	—	21	316
88	Nicolau da Silva Gonçalves		Camões	6-10-886	—	362	—	—	—	—	35	259
89	Ofélia de Mendonça Azinheira		M. A. V. Carvalho	15-10-899	3	141	2	128	4	207	8	148
90	Pedro Cabral Sacadura		Pedro Nunes	23- 3-890	—	—	—	352	—	146	10	313
91	Pedro Pinheiro Gonçalves		Angra do Heroísmo	20- 4-910	—	—	1	71	—	213	2	8
92	Pedro de Campos Tavares	(12)	Camões	18- 9-903	—	280	—	—	1	26	22	323
93	Rafael Diaz Cortada Júnior		Lamego	31- 7-905	1	98	—	64	12	150	2	136
94	Rita Vaz Palma		Braga	27- 8-911	—	89	5	10	—	60	—	356
95	Rui da Silva Leitão		Santarém	25- 3-892	—	31	—	—	—	—	33	176
96	Sérgio Valentim Camacho		Funchal	14- 2-914	—	72	4	280	—	144	2	—
97	Sílvio Gonçalves Lisboa		Santarém	17- 9-907	—	—	—	60	2	102	12	193
98	Virgílio Ribeiro dos Reis	(13)	Gil Vicente	1-11-911	—	68	—	169	2	163	7	28
99	Waldemar J. Barbas de Passos e Sousa		Évora	31-12-909	—	32	1	217	4	25	5	61
100	Zulmira da Luz Campeans de Oliveira		D. F. Lencastre	17- 7-907	—	20	1	209	1	256	6	110

Ilustração 59: Lista dos professores efectivos, 1950

[20] Fonte: Labor, 16, (120), pp. 516-519, Cit. em Matos, 2004

Anexo 21.[21]

P E D A G O G I A

PROGRAMA DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA DO ENSINO LICEAL, CONFORME O DECRETO N.º 37.112 DE 22 DE OUTUBRO DE 1948

1.º Ano

Conhecimento dos sólidos geométricos (paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro e cone de revolução, esfera) e das figuras planas (triângulo, quadrado, rectângulo, losango, paralelogramo, trapézio, polígono convexo e círculo). Elementos geométricos.

Sistema métrico decimal:

Medidas de comprimento; emprego dos instrumentos usuais (metro articulado, fita métrica, cadeia do agrimensor). Comprimento de um segmento; distância entre dois pontos; perímetro de uma linha poligonal; perímetro de um polígono regular; perímetro de uma linha curva.

Tomar as medidas feitas como centro dos seguintes estudos: *a*) Leitura e escrita dos números inteiros e decimais; estima das medidas; *b*) As quatro operações fundamentais sobre números inteiros; propriedades mais importantes; sua aplicação às provas das operações; *c*) As mesmas operações sobre números decimais; *d*) Cálculo do quociente de dois números inteiros ou decimais, com uma dada aproximação; *e*) Cálculo mental; *f*) Expressões numéricas; uso do parentesis; cálculo de valor numérico de uma expressão.

Medidas de superfície; inconvenientes da medição directa de superfícies; áreas do rectângulo e do quadrado; emprego do papel milimétrico; áreas das superfícies do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

Tomar as medidas feitas no quadrado como ponto de partida para os seguintes estudos: *a*) Potenciação; multiplicação e divisão de potências de base igual ou de expoente igual; potência de uma potência; expressões numéricas. *b*) Raiz quadrada; regra prática; extracção da raiz quadrada de um número inteiro ou decimal com uma dada aproximação.

Medidas de volume e de capacidade; emprego de medidas graduadas e de provetas; volumes do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

Medidas de massa; emprego da balança de Roberval.

Números fraccionários; representação gráfica; propriedades; comparação de frações.

Noção de ângulo e de arco de circunferência; igualdade e desigualdade de ângulos; ângulos adjacentes; operações sobre ângulos; unidades de ângulo; emprego do transferidor; ângulos complementares, suplementares e verticalmente opostos. Propriedades mais elementares destes ângulos.

Posição relativa de duas rectas no plano; ângulos formados por um sistema de duas rectas cortadas por uma terceira; relações entre estes ângulos quando as duas primeiras forem paralelas: ângulos de lados respectivamente paralelos e perpendiculares.

Ângulo interno e ângulo externo de um triângulo e de um polígono convexo qualquer: soma dos ângulos externos; soma dos ângulos internos.

Redução de número complexo a incomplexo e vice-versa; operações sobre números complexos.

Gráficos: gráficos de barras; gráficos cartesianos.

Ilustração 60: Programa de Matemática, 1948, Portugal

[21] Fonte: Gazeta da Matemática, nºs 37 e 38, pp.20-27

Notas ao programa. Os números começam por ser considerados concretamente, como resultado de medidas, e só depois como números abstractos.

As propriedades das operações limitam-se às duas ou três mais importantes de cada operação e devem ser concretizadas por meio de pequenos problemas.

No cálculo das expressões numéricas devem evitar-se dados que conduzam a resultados com mais de três algarismos.

O estudo dos números fraccionários deve iniciar-se por problemas concretos.

Os números complexos a considerar representam, de preferência, medidas de ângulo e de tempo.

2.º Ano

Geometria

Triângulos; relações entre os seus elementos; altura de um triângulo; igualdade de triângulos; casos de igualdade de triângulos.

Comparação dos segmentos da perpendicular e da oblíqua tirados do mesmo ponto para a mesma recta: distância de um ponto a uma recta; distância de duas rectas paralelas.

Quadriláteros: paralelogramo, losango, rectângulo, quadrado e trapézio; propriedades mais importantes.

Circunferência; arco de circunferência; raio, corda, diâmetro, secante e tangente; circunferência inscrita e circunscrita a um triângulo; círculo; segmento de círculo; sector circular; coroa circular. Posição relativa de duas circunferências.

Perímetro de uma circunferência; determinação experimental do valor de π.

Figuras equivalentes; equivalência do paralelogramo e do trapézio ao rectângulo e do triângulo ao paralelogramo. Áreas destas figuras, do polígono irregular, do polígono regular e do círculo.

Áreas das superfícies do prisma recto, da pirâmide regular, do cilindro e do cone de revolução.

Volumes dos sólidos indicados.

Aritmética

Noções de múltiplo e submúltiplo de um número; restos da divisão de um número inteiro por 10 e potências de 10, por 2 e 5, por 9 e 3; critérios de divisibilidade por estes números. Prova dos nove das operações.

Divisores comuns de dois ou mais números; máximo divisor comum de dois ou mais números: determinação do máximo divisor comum de dois números pelas divisões sucessivas. Múltiplos comuns de dois ou mais números; menor múltiplo comum de dois ou mais números: determinação do menor múltiplo comum de dois números partindo do máximo divisor comum.

Noção de número primo; decomposição de um número num produto de factores primos; cálculo do máximo divisor comum e do menor múltiplo comum de vários números utilizando a decomposição em factores primos.

Fracções; simplificação e redução ao menor denominador comum; dízimas; redução de uma fracção a dízima; operações sobre fracções. Fracções generalizadas; valores numéricos de expressões de termos fraccionários.

Proporcionalidade directa e inversa; proporções geométricas; propriedades fundamentais. Aplicações da proporcionalidade a regras de três simples e composta, porcentagens, regras de companhia e juros simples.

Representação gráfica da proporcionalidade directa; aplicação à resolução de problemas simples.

Notas ao programa. Nos «casos de igualdade de triângulos» não se devem destacar os «casos de igualdade de triângulos rectângulos».

No cálculo das fracções deve evitar-se a multiplicidade das regras. Se algum número dado for inteiro, escrever-se-á sob a forma de fracção com o denominador mais conveniente.

As operações sobre fracções incluem a raiz quadrada, calculada com uma dada aproximação.

Os problemas de regra de três composta devem restringir-se ao caso em que figuram apenas três grandezas; os problemas de juros serão ùnicamente tratados como problemas de regra de três composta, sem lhes dar relevo que os destaque dos outros problemas do mesmo género.

Ao tratar de percentagens e juros o professor mostrará algumas facturas, cadernetas de depósito, letras e cheques.

No 2.º ano o programa inicia-se pela geometria.

3.º Ano

Álgebra

Exemplos de grandezas que podem variar em dois sentidos opostos; números positivos e negativos; posição de um ponto sobre um eixo; operações sobre números qualificados.

Expressões algébricas; monómios e polinómios; valores numéricos de expressões algébricas de uma ou duas variáveis.

Representação de um ponto num plano (em coordenadas cartesianas rectangulares). Noção elementar de variável e de função, dada a partir de grandezas de uso corrente; a representação gráfica de $y=ax$ e $y=ax+b$, em que a e b são valores numéricos.

Monómios inteiros de uma e duas variáveis: adição algébrica, multiplicação, divisão e potenciação.

Polinómios inteiros de uma variável e homogéneos de duas variáveis: adição algébrica; multiplicação; casos notáveis da multiplicação; divisão.

Fracções algébricas; simplificação e operações, apenas no caso de termos monómios.

Equações numéricas do 1.º grau a uma incógnita: resolução algébrica e gráfica.

Sistemas de duas equações numéricas do 1.º grau a duas incógnitas: resolução algébrica e gráfica.

Problemas muito simples que se resolvam por meio de uma equação numérica do 1.º grau a uma incógnita ou por um sistema de duas equações numéricas do 1.º grau a duas incógnitas.

Desigualdades inteiras do 1.º grau a uma incógnita: resolução algébrica e gráfica.

Geometria plana

Recta, semi-recta e segmento de recta.

Ângulos; ângulos adjacentes; ângulos complementares e suplementares; ângulos verticalmente opostos.

Triângulos; os três primeiros casos de igualdade de triângulos; relações entre os elementos de um triângulo.

Perpendicular ao meio de um segmento de recta; bissectriz de um ângulo. Linhas e pontos notáveis no plano do triângulo.

Rectas paralelas; propriedades angulares; ângulos de lados respectivamente paralelos e perpendiculares. Soma dos ângulos do triângulo; ângulo externo.

Construções gráficas.

Quadriláteros: propriedades características do paralelogramo, losango, rectângulo, quadrado e trapézio.

Círculo: arcos, cordas e apótemas; arcos e ângulos ao centro; medidas de arcos e de ângulos; unidades respectivas.

Ângulo inscrito; ângulo de um segmento; ângulo ex-inscrito; ângulo formado por duas cordas; ângulo formado por duas secantes; relações entre as medidas destes ângulos e as dos arcos correspondentes.

Notas ao programa. A representação gráfica das funções indicadas deve ser precedida da revisão dos gráficos do 1.º ciclo que possam servir de base a este estudo.

Os casos notáveis da multiplicação referem-se apenas ao quadrado de binómios e à diferença de quadrados.

Os princípios de equivalência das equações, sistemas de equações e inequações são apenas enunciados e verificados em face de exemplos numéricos.

Na resolução algébrica dos sistemas devem empregar-se apenas os métodos de substituição e redução ao mesmo coeficiente.

O estudo das equações será iniciado pela representação e consequente resolução de problemas muito simples.

A resolução das desigualdades fraccionárias não está incluída neste programa.

O estudo do triângulo e do círculo dará oportunidade ao conhecimento de proposições recíprocas.

O estudo da circunferência, da perpendicular ao meio de um segmento e da bissectriz de um ângulo introduzirá o conceito de «lugar geométrico».

Ao estudar os «três primeiros casos de igualdade de triângulos» o professor referir-se-á à existência do quarto caso.

4.º ano

Álgebra

Expressões algébricas; decomposição de polinómios em factores, pondo em evidência factores comuns ou aplicando os casos notáveis da multiplicação.

Fracções algébricas; simplificação e operações nos casos em que é possível a factorização indicada.

Equações numéricas e literais do 1.º grau a uma incógnita. Sistemas de duas equações numéricas e literais do 1.º grau a duas incógnitas; sistemas de três equações numéricas do 1.º grau e três incógnitas.

Problemas do 1.º grau a uma, duas e três incógnitas.

Generalização da noção de potência; potências de expoente nulo e de expoente negativo; operações.

Noção de número irracional; radicais; cálculo de radicais. Potências de expoente fraccionário; operações.

Sucessões numéricas. Noção de infinitamente grande e de infinitamente pequeno; noção de limite de uma sucessão.

Geometria plana

Lugares geométricos: pontos equidistantes de um ponto dado; de dois pontos dados; de uma recta dada: de duas rectas dadas. Aplicação a problemas de construção.

Razão de dois segmentos; relações entre segmentos de concorrentes intersectadas por paralelas; teorema de Thales e suas consequências. Homotetia; simetria em relação a um ponto. Semelhança; triângulos semelhantes e casos de semelhança dos triângulos. Consequências numéricas da semelhança dos triângulos: teoremas relativos a meias proporcionais no triângulo rectângulo, teorema de Pitágoras, teoremas relativos ao quadrado do lado oposto a um ângulo agudo e a um ângulo obtuso, relações determinadas pelas bissectrizes; segmentos proporcionais no círculo.

Polígonos; semelhança de polígonos. Polígonos regulares: propriedades elementares.

Expressões que dão os valores dos lados e dos apótemas do quadrado, do hexágono regular e do triângulo equilátero em função do raio da circunferência circunscrita.

Perímetro da circunferência; comprimento de um arco.

Áreas; unidade de área. Figuras equivalentes. Áreas do rectângulo, do quadrado, do paralelogramo, do triângulo, do losango, do trapézio e do polígono; áreas do círculo e do sector circular.

Notas ao programa. No estudo dos radicais consideram-se índices apenas inteiros e superiores à unidade.

O estudo dos limites resume-se às noções indicadas, dadas por intermédio de exemplos da aritmética e da geometria.

5.º Ano

Álgebra

Logaritmos; teoremas relativos ao cálculo logarítmico; logaritmos decimais; uso de tábuas (de cinco decimais).

Equações do 2.º grau a uma incógnita; resolução algébrica. Problemas do 2.º grau.

Progressões aritméticas e geométricas; termo geral e soma de n termos.

Geometria no espaço

Noção de plano; modos de definir o plano.

Posição relativa de duas rectas no espaço. Posição relativa da recta e do plano; paralelismo da recta ao plano. Posição relativa de dois planos; paralelismo de dois planos. Ângulo de duas rectas no espaço; perpendicularidade da recta ao plano.

Diedros; perpendicularidade de dois planos. Ângulo de uma recta com um plano.

Distâncias.

Ângulos sólidos; seus elementos. Triedros: relações entre as faces.

Poliedros; poliedros regulares. Superfícies prismática e piramidal; superfícies cilíndrica e cónica. Prisma, pirâmide e troncos respectivos; cilindro, cone e troncos respectivos. Superfícies e sólidos de revolução (cilindro, cone, tronco de cone e esfera).

Esfera; zona, calote e segmentos esféricos; lúnula e cunha esféricas; camada esférica.

Áreas das superfícies do paralelepípedo, prisma, pirâmide, tronco de pirâmide regular, cilindro, cone e tronco de cone de revolução. Áreas da zona esférica e da superfície da esfera.

Volumes do paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

Notas ao programa. No estudo das progressões não se deve tratar do problema da inserção de meios.

Os logaritmos, que são considerados como expoentes, têm neste programa uma feição nitidamente prática; por vezes deve pedir-se uma dada aproximação no resultado. Equações envolvendo logaritmos, ou qualquer outro tipo de problemas teóricos, são inteiramente banidas.

O estudo das equações do 2.º grau deve ser iniciado de modo análogo ao das equações do 1.º grau, isto é, a partir de problemas simples. Os exemplos devem limitar-se ao caso de raízes reais.

6.º Ano

Álgebra

Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções.

Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.

Noção elementar de continuidade de uma função.

Propriedades dos polinómios inteiros.

Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios.

Divisão por $(x-a)$; polinómio idênticamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.

Fracções algébricas. Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma $0/0$, ∞/∞ e $0\times\infty$; verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.

Equações: noções gerais e princípios de equivalência. Equação do 1.º grau a uma incógnita: resolução algébrica e gráfica; discussão.

Ilustração 61: Programa de Matemática, 1948, Portugal

Equação do 1.º grau a duas incógnitas: soluções inteiras, soluções inteiras e positivas; resolução numérica e gráfica.

Sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas: resolução algébrica e gráfica; discussão.

Trigonometria

Generalização da noção de ângulo e de arco; medidas.

Funções circulares directas: definição, variação e representação gráfica; funções circulares correspondentes a ângulos complementares, suplementares, que diferem de π radianos, simétricos, e cuja soma é igual a 2π radianos. Redução de um ângulo ao 1.º quadrante.

Relações entre as funções circulares do mesmo ângulo; valores destas funções para alguns casos particulares.

Funções circulares inversas.

Aritmética racional

Teoria dos números inteiros e das operações fundamentais.

Potenciação; sistemas de numeração.

Divisibilidade.

Números primos.

Máximo divisor comum e menor múltiplo comum.

Notas ao programa. No estudo das funções consideram-se apenas funções de uma variável real, mas inclui-se o caso em que há uma variável intermediária e uma final (função de função).

Para a determinação do verdadeiro valor, as expressões a considerar são apenas funções racionais fraccionárias ou expressões redutíveis a estas funções.

No estudo dos números inteiros ter-se-à em atenção que a teoria da adição e da multiplicação são apresentadas pelo método de indução; as anologias entre estas duas operações serão realçadas de modo a permitir abreviar o seu estudo e torná-lo simultâneamente mais profícuo.

7.º Ano

Álgebra

Análise combinatória — elementos distintos e sem repetição. Binómio de Newton.

Números complexos a duas unidades; forma algébrica: igualdade, desigualdade e operações.

Equação do 2.º grau a uma incógnita; resolução algébrica e gráfica; discussão.

Equação biquadrada; resolução algébrica; discussão. Transformação de um radical duplo na soma algébrica de dois radicais simples.

Equações irracionais redutíveis ao 2.º grau.

Trinómio do 2.º grau; representação gráfica; propriedades. Inequações: noções gerais e princípios de equivalência. Inequações do 2.º grau a uma incógnita; inequações fraccionárias que se resolvam por meio de inequações do 1.º ou 2.º grau a uma incógnita.

Problemas do 1.º e 2.º grau; discussão.

O problema das tangentes e o das velocidades: noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas e das funções circulares directas; derivada da função de função.

Trigonometria

Fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos.

Fórmulas da duplicação e bissecção do ângulo.

Fórmulas de transformação logarítmica.

Tábuas trigonométricas: uso das tábuas naturais e logarítmicas.

Resolução de algumas equações trigonométricas simples.

Resolução de triângulos rectângulos e obliquângulos (casos clássicos); cálculo de áreas.

Aplicações a problemas simples de topografia.

Geometria

Introdução à geometria analítica plana:

- Coordenadas cartesianas e polares; suas relações.
- Distância de dois pontos; coordenadas do ponto médio de dois pontos dados.
- Noção de lugar geométrico definido por uma equação e de equação de uma linha; determinação das equações correspondentes a alguns lugares geométricos muito simples.
- Equações cartesianas da recta: problemas sobre a recta: equações da recta que passa por um e dois pontos; ponto de intersecção de duas rectas; ângulo de duas rectas; condições de paralelismo e perpendicularidade de duas rectas; distância de um ponto a uma recta.
- Estudo elementar dos lugares geométricos definidos por equações numéricas da forma: $x^2+y^2=r^2$; $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$; $b^2x^2 \pm a^2y^2=a^2b^2$; $xy=k$; $y^2=2px$; $x^2=2qy$.
- Equações cartesianas: *a*) Da circunferência; *b*) Da elipse e da hipérbole, referidas aos eixos; *c*) Da parábola, referida ao eixo e à tangente no vértice.

Notas ao programa. As equações a que o programa se refere limitam-se a «equações de coeficientes reais».

As equações trigonométricas a considerar são as que se podem reduzir a equações algébricas dos programas do 6.º e 7.º anos, quando se toma para incógnita $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{tg} x/2$.

Não se incluem no programa as demonstrações de equivalência das fórmulas relativas aos três teoremas fundamentais da resolução de triângulos.

As coordenadas cartesianas referem-se apenas a eixos rectangulares.

Ilustração 62: Programa de Matemática, 1948, Portugal

Anexo 22.[22]

O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DA ACTUAL REFORMA DO ENSINO LICEAL

I

por Maria Teodora Alves

Não se pode apreciar o programa de uma disciplina do ensino liceal, sem considerar o conjunto das outras disciplinas e os respectivos programas.

No estudo crítico que farei aos programas de Matemática, atenderei a esse facto, tanto mais que algumas disciplinas que constituíam o antigo 2.º ciclo liceal, foram desdobradas, pela actual reforma.

No 2.º ciclo liceal, além da Matemática, há as seguintes disciplinas: Português, Francês, Inglês, História, Geografia, Ciências Naturais, Ciências Físico-Químicas e Desenho. A estas actividades há ainda que acrescentar: Canto Coral, Educação Física, Religião e Moral e Mocidade Portuguesa.

Com verdade, não se poderá dizer que os alunos do 2.º ciclo liceal (13 a 15 anos) na época crítica do seu desenvolvimento, estejam aliviados de trabalho intelectual e físico.

Ao desdobramento de disciplinas corresponde sempre uma maior extensão de programas, maior exigência dos professores e dos pontos de exame.

Aquele programa de História do 2.º ciclo, no género, pode considerar-se um modelo perfeito de exagero e e de minúcia. Na edição «Programas das disciplinas do ensino Liceal» começa na página 99 e termina na pág. 110.

É um saber estupendo e aflitivamente instrutivo, para rapazes e raparigas dos 13 aos 15 anos.

Com razão, afirma o Dr. Decroly, o eminente pedagogo belga: «Les programmes ont été inspirés par des hommes très savants dans leur specialité, mais trop peu préoccupés de la psychologie, pour eux l'enfant est accessoire».

O período de desenvolvimento das crianças até aos 15 anos exige da parte da escola (professores e legisladores) os maiores cuidados e a maior prudência.

Com efeito, o crescimento mental atinge o máximo desenvolvimento à volta dos 16 anos (experiências de Terman) mas há outros psicólogos e experimentadores, tão categorizados como Terman, que reduzem o período de crescimento mental à volta dos 15 anos e, mesmo alguns deles, à volta dos 14 anos.

Ora a inteligência significa antes aptidão para adquirir conhecimentos do que os próprios conhecimentos já adquiridos.

Longe de mim a ideia de que seja possível desenvolver a inteligência sem comunicar informações e sem transmitir conhecimentos. Mais longe também a ideia de que o único propósito da educação é o desenvolvimento da inteligência.

Mas devo considerar que é esse um dos grandes propósitos da educação e aquele que mais de perto se liga aos programas e às disciplinas que constituem o curriculum. Analisarei os programas de Matemática, nos três ciclos liceais, tendo em atenção estas considerações.

O n.º 39 da «Gazeta de Matemática» insere um artigo de crítica aos programas de Matemática da actual reforma de ensino liceal, da autoria dos

Ilustração 63: Análise crítica ao programa de Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino Liceal, 1951

[22] Fonte: *Gazeta da Matemática*, 1951, n.º 48, pp.11-14; *Gazeta da Matemática*, 1951, n.º 49, pp.8-11; *Gazeta da Matemática*, 1952, n.º 51, pp.7-9

Senhores Drs. L. Barros e F. David. Essa crítica põe em evidência faltas de rigor, incorrecções e impropriedades de linguagem e desconexões no encadeamento dos assuntos versados no programa. Embora eu divirja, num ou outro pormenor, da crítica feita, devo dizer que concordo com a sua linha geral.

O objectivo desta minha crítica será, em cada ciclo, a didáctica da Matemática imposta pelo respectivo programa, a concatenação dos tópicos e a coordenação do programa com o das outras disciplinas.

Programa de Matemática do 1.º ciclo

O programa apresenta neste ciclo, em cada um dos anos que o constituem, características muito diferentes.

No 1.º ano não há separação entre a Aritmética e a Geometria — o que acho muito bem.

No 2.º ano já está estabelecida essa separação, com a obrigatoriedade do estudo começar pela Geometria — o que acho muito mal.

O pedagogista inglês W. Sumner, em «The teaching of Aritmetic and Elementary Mathematics», diz: «In secondary modern schools there should be no artificial separation of mathematical subjects».

Os metodologistas da Matemática, Breslich, Nunn, Inglis e Judd e muitos outros, são da mesma opinião.

Os programas de Matemática dos dois anos deste ciclo, são tão divergentes, quanto à sua metodologia, que parecem ter sido delineados por duas pessoas diferentes que, a tal respeito, não trocassem impressões.

Por outro lado, os programas do 1.º e 2.º anos estão descompensados, quanto à distribuição das matérias versadas.

Em primeiro lugar, houve um acrescentamento de matéria ao programa da reforma anterior. Só pode afirmar que a actual reforma de ensino trouxe redução no programa de Matemática do 1.º ciclo, quem não tenha feito a leitura comparativa dos programas de Matemática, neste ciclo, das duas reformas.

Eu vou citar as rúbricas do actual programa, de que o programa da reforma anterior foi acrescido:

«Gráficos: gráficos de barras, gráficos cartesianos. Regra de companhia. Representação gráfica da proporcionalidade directa; aplicação à resolução de problemas simples».

Como se vê, não houve redução; pelo contrário, houve substancial acréscimo.

Vejamos, agora, como se dá a descompensação das matérias no programa do 1.º ano e no do 2.º ano.

Se é certo que as rúbricas relativas ao sistema métrico décimal, números complexos e raiz quadrada de números inteiros transitaram do antigo programa do 2.º ano para o do 1.º ano, o programa do 2.º ano foi acrescido da maior e mais difícil parte da Aritmética do 1.º ano da antiga reforma (critérios de divisibilidade, m. d. c. e m. m. c. de vários números, decomposição em factores primos e operações com números fraccionários).

Consideremos mais particularmente o programa do 1.º ano.

É uma lista de assuntos a versar e o professor é legalmente obrigado a «não alterar a ordem por que as matérias se encontram distribuidas no programa». Qual é o elo de ligação entre todas aquelas rúbricas? É evidente que a resposta a esta pergunta não pode ser dada pelo recitativo das próprias rúbricas; mas as instruções que acompanham o programa, conservam-se a esse respeito silenciosas.

O programa do 1.º ano apresenta-se por esse motivo desconexo. As desconexões vincam-se mais nitidamente quando pretendemos estabelecer ligação com o programa do 2.º ano.

A meu ver, uma simples frase, nas instruções ao programa, como mostrarei dentro em pouco, bastaria para lhe dar unidade em cada um dos anos do ciclo, estabelecendo entre eles a necessária ligação. Mas essa frase não aparece nas instruções ao programa, nem se suspeita que possa existir.

Quanto ao programa do 2.º é imposto que o seu estudo comece pela Geometria.

O primeiro período lectivo, no 2.º ano, será ocupado pelo estudo da Geometria, desligado da Aritmética.

Restam dois períodos lectivos para o estudo da aritmética do 2.º ano, que é *somente* isto:

«Noções de múltiplo e submúltiplo de um número; restos da divisão de um número inteiro por 10 e potências de 10, por 2 e 5, por 9 e 3; critérios de divisibilidade por estes números.

Prova dos nove das operações.

Divisores comuns de dois ou mais números; máximo divisor comum de dois ou mais números: determinação do máximo divisor comum de dois números pelas divisões sucessivas. Múltiplos comuns de dois ou mais números; determinação do menor múltiplo comum de dois numeros partindo do máximo divisor comum.

Noção de número primo; decomposição de um número num produto de factores primos; cálculo do máximo divisor comum e do menor múltiplo comum de vários números utilizando a decomposição em factores primos.

Fracções; simplificação e redução ao menor denominador comum; dízimas; redução de uma fracção a dízima; operações sobre fracções.

Fracções generalizadas: valores numéricos de expressões de termos fraccionários.

Proporcionalidade directa e inversa; proporções geométricas: propriedades fundamentais. Aplicações

Ilustração 64: Análise crítica ao programa de Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino Liceal, 1951

da proporcionalidade a regras de três simples e composta, percentagens, regras de companhia e juros simples.

Representação gráfica da proporcionalidade directa; aplicação à resolução de problemas simples.»

Em dois periodos lectivos o aluno (12 anos) terá que adquirir os conceitos e a técnica de cálculo que corresponde a todas estas rúbricas.

Este saber, assim acumulado é um monte intransponivel e indesbastável!

No ensino da Matemática há dois aspectos distintos a considerar:

Os conceitos e a sua ordenação lógica;

A técnica de cálculo e as suas aplicações.

Se a função formativa da Matemática é dada principalmente pelos conceitos e pela ordenação lógica, a técnica de cálculo — que não pode ser menosprezada — é obtida quase que exclusivamente, pelos exercícios de aplicação.

Todos os psicopedagogistas que conheço afirmam que a técnica de cálculo, para ter segurança e não ser automática — o automatismo no ensino é considerado por todos eles como o maior dos males — tem que ser obtida com repetidos exercícios, em intervalos espaçados, mas sucessivos.

É uma consequência das leis da aprendizagem (THORNDIKE, PIAGET, WATSON, HYDE, etc.).

Mas há outra grande dificuldade a remover: A técnica de cálculo em Aritmética, não dá «transfert» para o raciocínio aritmético. — «Practice in arithmetical computation did not transfer to arithmetical reasoning». — (Experiências de WINCH).

Mas no último período lectivo do 2.º ano os alunos são ainda sobrecarregados com trabalhos de revisão em todas as disciplinas. (Aproxima-se o Fantasma do exame...) Quer dizer, o aluno é obrigado a pensar à pressa e, por grosso, sobre o programa da Aritmética do 2.º ano. Adquirirá necessàriamente um saber que se escoa como água absorvida pela areia.

A leitura do programa de Aritmética do 2.º ano, atrás transcrito, mostra que nenhuma referência há ao importantissimo conceito de razão de duas grandezas e razão de dois números e que o conceito de proporcionalidade precede o de proporção.

É certo que se pode definir a proporcionalidade independentemente do conceito de razão. Do ponto de vista lógico não há reparos a fazer, mas do ponto de vista pedagógico é erro tão grosseiro que, suponho, ninguém defenderá.

Exposta a minha opinião sobre as deficiências do programa de Matemática do 1.º ciclo da actual reforma resta-me indicar as alterações a introduzir, sujeitando-as à critica de quem se interesse pelo assunto.

Antes porém de apresentar essas alterações ao programa do 1.º ciclo, permito-me fazer algumas considerações sobre o ensino da Matemática, neste ciclo.

Constitue já um lugar comum a afirmação de que o ensino da Matemática, nos primeiros anos da escola secundária deve ser intuitivo e experimental, Está confirmado pelos trabalhos de NUSS, THORNDIKE, PIAGET, JUDD e outros nomes de categoria internacional e ninguém ousa afirmar o contrário.

O professor do Teacher's College da Universidade de Colúmbia, W. REEVE, que é também um notável metodologista da Matemática, sintetiza nesta frase, essa orientação: «He (o aluno) must handle, measure, cut, count, draw, make models, draw graphs, in order to learn.»

H. SIMON, outro ilustre metodologista da Matemática, em «Pre[illegible] teaching», a propósito do ensino da Aritmética, dirige-se aos professores de Matemática, dizendo-lhes: «Your teaching of arithmetic ... may merely train your class in a number of process wich will let them pass an examination at [illegible] the term.»

That is «usefull». It may also help [illegible] manage their savings accounts better or get a [illegible] graduation. That is usefull too-and this time without quotation marks. But if you can develop in them an understanding of number relations, if you can teach them to visualize distances and quantities... then you are training them culturally: They will for, ever after be more sentive more apreciative, more understanding even though they may do not better on a formal examination».

Esta orientação, peconizada por estes ilustres metodologistas da Matemática, não se compraz com turmas de 40 alunos, sentados em bom alinhamento, em carteiras vulgares e dispondo apenas de lápis, papel e do quadro preto.

E' um ensino activo, dinâmico em que o aluno observa, experimenta, regista e redige as conclusões das experiências que realizou. Todos os sentidos do aluno devem intervir.

O professor não ministra conhecimentos, orienta as experiências do aluno de modo a conduzi-lo às necessárias conclusões.

Em sucessivas alíneas, indicarei agora as alterações a fazer ao programa de Matemática do 1.º ciclo (à parte o número de alunos por turmas e as condições da sala de aula), para que se torne eficiente, quanto ao desenvolvimento e formação mental dos alunos.

a) Deslocar a divisibilidade e [illegible] números fraccionários do 2.º ano para o 1.º ano. (m. d. c., m. m. c. e a decomposição em factores primos, conservar-se-iam no 2.º ano).

Ilustração 65: Análise crítica ao programa de Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino Liceal, 1951

Deste modo os dois programas ficariam mais compensados.

b) Centrar o programa do 1.º ano no problema de mudança de unidade, constituindo um todo com a divisão de números inteiros, números decimais e com o número fraccionário.

Problema de mudança de unidade é a frase que falta nas instruções ao programa de Matemática do 1.º ciclo e que lhe daria unidade e que estabeleceria o elo de ligação entre o programa do 1.º ano e do 2.º ano. Mas as instruções ao programa não deixam transparecer a mais leve suspeita da existência desse problema.

Esta frase seria, para o programa de Matemática do 1.º ciclo, com a palavra *Sésamo* do «Abre-te Sésamo» da história para crianças da Caverna de Ali-Bábá.

O problema de mudança de unidade, quer em ciência, quer na vida diária, é de uso corrente e, por isso, de alta importância.

A resolução de problemas de mudança de unidade sòmente com as unidades do sistema métrico decimal conduz o aluno a essa *triste regra* que eles inconscientemente recitam assim:

«Para multiplicar um n.º por 10 *anda-se* com a virgula uma casa para a direita e para dividir *anda-se* para a esquerda».

O aluno, para adquirir o domínio do problema de mudança de unidade, deve medir comprimentos, tomando por unidade, os mais variados comprimentos, o palmo, o pé, etc. e converter as medidas obtidas umas nas outras pelas relações que haja entre elas. O mesmo procedimento na medição de áreas e de volumes.

Iniciados, deste modo, os alunos do 1.º ciclo no problema de mudança de unidade, talvez que os professores de Ciências Físico-Químicas não tivessem ocasião de encontrar alunos para os quais os problemas de mudança de unidade, respeitantes às grandezas físicas, são problemas transcendentes, mesmo no 7.º ano.

A interdependência do problema de mudança de unidade e da divisão de números inteiros e de números decimais e do conceito de número fraccionário, constitue um todo (a unit) a que o metodologista da Matemática Wheat chama «The three kinds of problems»:

1) Calcular um número considerando-o como parte de um todo.

2) Dados dois números, calcular um deles que parte é do outro.

3) Calcular um número conhecendo uma parte determinada dele.

O elo de ligação entre o programa do 1.º ano e o do 2.º ano, seria feito por intermédio do número fraccionário, os problemas com fracções de denominador 100 permitiriam estabelecer o conceito de percentagem, do programa do 2.º ano. Os problemas de percentagem podem reduzir-se a problemas de fracções com denominador 100. Do conceito de percentagem, assim estabelecido, resultaria o conceito de razão de duas grandezas e razão de dois números.

Com a operação divisão de dois números inteiros e decimais, conceito de número fraccionário e razão de dois números, ficaria estudado o problema de mudança de unidade completamente e em relação com «The three kinds of problems», de Wheat.

Quanto à metodologia, a meu ver, é das deficiências mais graves do programa do 1.º ciclo, ignorar o problema de mudança de unidade, que é basilar em Ciência, na vida diária e também na didáctica da Matemática.

c) Centrar o programa de Matemática do 2.º ano no conceito de proporcionalidade de grandezas.

d) Manter no 2.º ano a orientação do 1.º ano, isto é, não separar a Geometria da Aritmética e também não impor ao professor a obrigação de respeitar a ordem das rúbricas do programa.

Desde que todas as rúbricas do programa fossem cumpridas, a ordem das rúbricas surgiria conforme as necessidades dos problemas a resolver.

e) Substituir a determinação de que «as demonstrações lógicas são totalmente banidas e substituídas por verificações experimentais» de modo que fosse permitido inferir das propriedades verificadas experimentalmente as consequências lógicas convenientes.

Com efeito, geometria intuitiva e experimental, por exemplo, não exclue a demonstração lógica: pelo contrário, associa a intuição, a experiência e a dedução sempre que seja possível.

Julgo que o programa de Matemática do 1.º ciclo, depois destas correcções, teria maior eficiência e seria superior aos programas das anteriores reformas.

(Continua)

Ilustração 66: Análise crítica ao programa de Matemática para o 1.º Ciclo do Ensino Liceal, 1951

O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DA ACTUAL REFORMA DO ENSINO LICEAL

II

por Maria Teodora Alves

As considerações que farei neste artigo referem-se ao 2.º ciclo liceal e, em especial, ao programa de Matemática.

A idade dos alunos, no 2.º ciclo da escola secundária, vai dos 13 aos 16 anos. É o período mais delicado da vida dos alunos.

O aluno, neste período da sua vida, é um mixto constantemente variável das qualidades da criança e do adulto. A evolução da sua mentalidade e do seu carácter não é gradual. Pelo contrário, é caracterizadamente oscilante. O aluno, que hoje se mostra atento e disciplinado, amanhã será desatento e insubmisso. Se hoje revela vivacidade de espírito e interesse, amanhã estará bronco e desinteressado.

Neste período da sua vida, o aluno é o joguete de uma emotividade que ainda não se disciplinou.

Não é necessário que o professor tenha grandes qualidades de observação ou longa experiência profissional — é o meu caso — para que possa produzir estas afirmações.

E não é sòmente o professor que tem de atender a este período crítico da vida dos alunos e no qual cada aluno pode dizer-se que é um caso particular. A escola, se quizer evitar a falência da sua missão, não pode organizar-se, ignorando este período crítico da vida dos alunos.

Ora, os principais objectivos da escola secundária, consistem na formação do carácter e mentalidade do aluno e, se é certo, como afirma Burloud, que «o passado que se conserva e se transmite na hereditariedade, não é o passado sob a forma de recordações, mas de hábitos específicos, aptidões e disposições para agir deste ou daquele modo», as responsabilidades que impendem sobre a escola são enormes.

A escola tem que organizar-se, tendo em vista que o aluno não é um motor cujo rendimento possa ser forçado. E, mesmo os próprios motores, precisam de repouso. O aluno é um ser vivo em evolução e que, se está sujeito à acção da escola, não deve ser subtraído à vida familiar que tem também a sua função educativa a qual é insubstituível. Há pois que contar com o tempo destinado à vida familiar do aluno, ao tempo para as suas distracções e para o repouso. As 24 horas do dia têm que ser distribuídas pela escola, pela vida familiar, pelas distracções e repouso do aluno.

Se não houver o justo equilíbrio entre todos estes factores, o regime de educação do aluno entrará em deficit. Se houver a tendência para cobrir esse deficit à custa do repouso, especialmente do sono, então o caso assumirá, em breve, proporções de catástrofe.

Estou a lembrar-me que o genial Cervantes apresenta, aos seus leitores, D. Quixote a ler muito e a dormir pouco, antes de o apresentar enlouquecido.

Ilustração 67: Análise crítica ao programa de Matemática para o 2.º Ciclo do Ensino Liceal, 1951

Na actual reforma do ensino liceal, o aluno do 2.º ciclo é obrigado a dispersar-se por 9 disciplinas, além de outras actividades obrigatórias. Deste facto, infere-se imediata e necessàriamente que os programas das diversas disciplinas têm que ser mínimos, o que não quer significar que devam perder eficiência.

Eu vou estabelecer as condições que devem, a meu ver, orientar essa redução de programas.

A escola secundária, em vez de se preocupar em ensinar aos alunos os resultados do pensamento científico, deverá preocupar-se em ensinar-lhes os métodos de pensar em ciência, baseando-se sòmente no número suficiente de factos que possa servir para estabelecer esses métodos. E porque os métodos científicos são deduzidos de conceitos e agem sobre conceitos e não sobre factos, embora os conceitos sejam extraídos dos factos, a escola deverá conduzir o aluno a criar uma atitude perante o aglomerado de factos.

Quer dizer, os programas da escola secundária devem reduzir os factos ao número mínimo, embora suficiente para que os métodos científicos, perante os alunos, possam ser estabelecidos.

Com efeito, muitas vezes a acumulação de factos, em vez de facilitar a clara formulação do conceito, perturba-a e confunde-a.

H. Poincaré, um dos mais eminentes matemáticos franceses de todos os tempos, preconizando o primado da capacidade de utilizar factos, sobre o conhecimento dos factos, serviu-se desta imagem brilhantemente sugestiva e verdadeira:

«A ciência constroe-se com factos como uma casa se constroe com materiais de construção, mas uma ciência não é uma colecção de factos, do mesmo modo que uma casa não é um monte de materiais de construção».

Eu não pretendo depreciar o valor da informação, o valor do conhecimento de factos. Mas o que afirmo é que, na escola secundária, o valor dos materiais oferecidos por qualquer ramo de estudo não está nos próprios materiais de informação mas na utilidade que possam fornecer para que o pensamento do aluno possa agir de modo a adquirir a arte de investigar relações, de fortalecer capacidades, de formar hábitos, de perseverança, de observação e clareza de raciocínio.

Eu vou tentar esclarecer a ideia que acabei de expor, exemplificando-a com questões do actual programa do 2.º ciclo.

Que importa que o aluno, ao concluir o 2.º ciclo, nada saiba dizer acerca de Hamurabi e o seu código, da reforma política do império romano ou da paz de Vestefália e de muitas outras rubricas do actual programa de história, apresentadas em estado de pulverização?

Desde que o aluno se mostre capaz, servindo-se do seu manual de história, ou de qualquer outro compêndio, de obter sobre esses temas a informação julgada suficiente, em nada importa a ignorância que possa revelar sobre eles, uma dada ocasião.

Que importa que um aluno do 2.º ciclo, perguntado sobre a centopeia: aparelhos circulatório e respiratório, sobre o micaxisto ou sobre a funária, nada saiba dizer?

Confesso que acho preferível que o aluno nada saiba dizer a esse respeito do que faça uma prolixa peroração, oral ou escrita, de uma descrição que decorou e não de factos que tivesse observado.

As ciências naturais têm na escola secundária uma função inestimável e insubstituível, quando são verdadeiramente ensinadas como ciências de observação. É a disciplina que melhor se presta a educar o espírito de observação dos alunos pondo-os em contacto com a realidade concreta. Para nós, portugueses, as ciências naturais, quando estudadas pela observação e experiência, teriam função correctiva à nossa tendência para a divagação, alheia a toda a realidade.

Mas as ciências naturais estudadas como factos de informação, que não foram observados, têm uma função perniciosa, pois deixam de ser correctoras de males para se transformarem em amplificadoras desses males.

Na escola secundária, as ciências naturais, como instrução, têm importância reduzida, como educação têm, na hierarquia das disciplinas, uma elevada cota.

Claparède, o eminente pedagogo suisso, estabelece essa distinção de uma maneira perfeita:

«L'éducation doit viser à développer les fonctions intellectuelles et morales, plus qu'à bourrer le crâne d'une masse de connaissances qui (lorsqu'ils ne sont pas aussitôt oubliées) restent le plus souvent des connaissances mortes, séjournant dans la mémoire comme des corps étrangers, sans rapport avec la vie».

Que importa que o aluno não saiba onde fica o mar de Azoff, as ilhas do Almirantado ou Glasgow, desde que ele se mostre capaz de obter essa informação, recorrendo a um dicionário geográfico, a uma enciclopédia ou ao próprio compêndio?

É neste sentido que eu afirmo haver possibilidade de redução nos programas das disciplinas do 2.º ciclo: Seleccionar em cada disciplina apenas o número de factos que seja considerado suficiente para que o aluno possa ser educado nos métodos de trabalho. Aqueles factos que sejam considerados conjunto necessário de conhecimentos seriam distribuídos pelos diversos anos do curso geral e, sempre que possível, constituindo núcleos de revisão, embora com alargamentos sucessivos.

Por exemplo, todos estão de acordo que, em ciências naturais, um dos núcleos do conhecimentos essen-

Ilustração 68: Análise crítica ao programa de Matemática para o 2.º Ciclo do Ensino Liceal, 1951

cial para os alunos, é uma ideia geral do corpo humano. Esse nucleo de conhecimentos não surgiria sòmente em um dos anos do curso geral. Surgiria, sendo possível, em vários anos do curso geral, embora alargado e com novas relações. O mesmo se poderá dizer de muitos outros núcleos de conhecimentos das ciências naturais, e também de outras disciplinas.

Se as responsabilidades das directrizes da organização da escola cabem ao legislador, neste pormenor da organização dos programas, as responsabilidades cabem exclusivamente à comissão que os organizou.

E só depois de estabelecidos os programas, acompanhados de instruções que indiquem os princípios guias que presidiram à sua coordenação, é que vem as responsabilidades do professor que lhes deve aplicar as regras da melhor didática que estejam de acordo com elos e com as possibilidades dos alunos a seu cargo.

Todavia é ao professor que são atribuídas todas as responsabilidades da falência dos alunos. É uma leviandade e uma grave injustiça cometidas, muitas vezes, por quem tinha a obrigação de conhecer a complexidade do problema educativo. Quando essa injustiça é cometida pelos encarregados de educação de alunos que falharam, ainda é suportável e poderá ter alguma desculpa...

Vem a propósito discriminar as responsabilidades dos professores e dos alunos, perante uma dada organização da escola e de programas e também porque essa discriminação esclarece o meu ponto de vista, acerca da redução de programas.

Se é da responsabilidade do professor ministrar aos alunos os conhecimentos considerados suficientes pelos programas, donde possam ser extraídos os métodos de trabalho científico, é da responsabilidade do aluno usar desses métodos e obter, por si próprio, os frutos dos métodos que usou. Isto é, se o professor deve guiar o aluno no uso dos métodos da ciência, é o aluno que tem que adquirir a técnica respectiva.

Se o professor deve instruir o aluno, o aluno não deve ser um receptor passivo dos conhecimentos ministrados.

Se as analogias ou diferenças entre as questões postas são da responsabilidade do professor, o uso dessas analogias ou diferenças é da responsabilidade do aluno que deverá aprender a usá-las, conforme as circunstâncias e como meios de desenvolver o próprio pensamento.

O professor não pode pensar pelo aluno. É o aluno que tem de pensar por si próprio.

É o que o eminente H. Wheat afirma, nesta síntese perfeita: «The teacher should teach methods of work, but the pupil may become his own best teacher through his use of the methods».

Considero de justiça lembrar que, na Imprensa portuguesa, um professor ilustre, o Senhor Doutor Serras e Silva, tem defendido com brilho, rara e infatigável perseverança, o ponto de vista de que a escola secundária, mesmo em instrução, tem de educar o aluno numa atitude perante a ciência, em vez de o transformar numa enciclopédia viva de conhecimentos.

Tem sido sempre essa a posição daquele ilustre professor perante as várias reformas de ensino secundário. Mas as ideias têm um poder de penetração muito lento, sobretudo quando colidem com as ideias que o hábito e a rotina acumulam, como os pólos de um iman acumulam a limalha de ferro. A resistência das linhas de força das ideias assim acumuladas, a uma mudança de direcção, faz desanimar os mais perseverantes e, por isso, mais meritória é a atitude persistente do Senhor Doutor Serras e Silva.

Já me alonguei demasiadamente em considerações de ordem geral sobre programas do 2.º ciclo e devo agora aplicá-las à organização de um programa de matemática neste ciclo, que seja compatível com o número de horas que está destinado a essa disciplina.

Em vez do professor se preocupar em ensinar aos alunos os conhecimentos e os factos da Matemática, deverá ensinar-lhes os métodos pelos quais os alunos possam construir as ideias em Matemática, estimulando-os no uso desses métodos.

A Matemática, quanto à sua função na escola secundária, deverá ser considerada como um sistema de ideias, uma sequência de relações destinada a ser entendida pelo aluno, de preferência a uma técnica. O único caminho para obter esse objectivo consiste em usar os métodos de pensamento que lenta e gradualmente provoquem essas ideias de relação.

A técnica de cálculo no 2.º ciclo da escola secundária deverá ser apenas a suficiente para a compreensão dos métodos e claro entendimento da sequência das ideias de relação, postas em jogo por esses métodos.

A sobreposição da técnica de cálculo à correlação das ideias e dos métodos de pensamento, provoca a inversão do objectivo do ensino da Matemática, neste ciclo da escola secundária.

A meu ver, o programa de Matemática de qualquer dos anos do 2.º ciclo é incompatível para 3 horas semanais atribuídas à Matemática; e, na impossibilidade de ser aumentado esse número de horas, dado o quadro de disciplinas, impõe-se uma redução nos programas.

Eu atrevo-me a propor a supressão das seguintes rubricas do programa do 5.º ano:

«Logaritmos; teoremas relativos ao cálculo logaritmo, logaritmos decimais; uso de tábuas (de cinco decimais).

Ilustração 69: Análise crítica ao programa de Matemática para o 2.º Ciclo do Ensino Liceal, 1951

O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DA ACTUAL REFORMA DO ENSINO LICEAL *

III

por *Maria Teodora Alves*

O programa de Matemática do 3.º ciclo consta de Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria Analítica.

A Aritmética é estudada no 6.º ano, a Geometria Analítica no 7.º ano e a Álgebra e Trigonometria são estudadas tanto no 6.º como no 7.º anos.

O programa de Matemática neste ciclo é, pois, dispersivo. Mas, pior do que a dispersão por quatro ramos da Matemática, há a dispersão que provém dos assuntos tratados em cada um destes ramos não terem sido bem coordenados, apresentando soluções de continuidade, até com saltos bruscos.

Na Aritmética, no 6.º ano, a teoria dos números inteiros é estudada com a recomendação expressa de que «A teoria da adição e da multiplicação são apresentadas pelo método da indução»; em Álgebra no 7.º ano é estudado o número complexo a duas unidades; mas o número fraccionário não é objecto de estudo neste ciclo. O aluno é, portanto, deixado com as ideias intuitivas, e referidas apenas à tecnica de cálculo, que adquiriu no 1.º ciclo. Quanto ao número irracional, o aluno é também deixado com a noção a que se refere o programa do 1.º ano, o que equivale a dizer que é deixado sem nenhumas ideias a tal respeito.

Em resumo: O aluno termina o curso dos liceus sem ter adquirido o conceito de número: ignora os métodos a que a Matemática recorreu para generalizar sucessivamente o conceito de número e as condições de unificação desse conceito nas generalizações e analogias que foram estabelecidas.

O aluno opera com números mas não tem o conceito de número!

O programa de Algebra do 6.º ano inclui as seguintes rubricas:

«Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultaneos, teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos.

Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites. Noção elementar de continuidade de uma função».

A estas rubricas segue-se esta outra: «Propriedades dos polinómios inteiros».

Mas no programa do 7.º ano surge desgarrado o conceito de derivada de uma função, perdido entre estas duas rubricas: «Problemas do 1.º e 2.º grau; discussão» e «Fórmulas da soma e da diferença de de dois ângulos».

Já tive ocasião de me referir na *Gazeta de Matemática* (N.º 43) à má localização do conceito de derivada de uma função, no programa de Matemática do 3.º ciclo, e também ao facto desse programa não pedir nenhuma das aplicações desse importantissimo conceito.

Não vale a pena introduzir no programa o conceito de derivada de uma função somente para que o aluno aprenda a derivar funções constituidas por radicais e fracções empoleiradas umas nas outras, que a imaginação dos autores dos livros de exercícios, ou dos professores, possa constituir.

Se não é possivel introduzir no programa algumas aplicações do conceito de derivada de uma função, é preferivel que esse conceito seja suprimido. Por outro lado, há uma omissão no programa de Matemática do 3.º ciclo que afecta gravemente todos os alunos que terminam o curso dos liceus: Não há nenhuma referência ao cálculo aproximado das operações numéricas nem aos erros dos resultados operatórios.

É vulgar, na resolução de problemas de Matemática, em que intervenham medidas, os alunos apresentarem resultados sem nenhum significado, porque excedem — e em muito — os limites dos erros cometidos nos dados do problema.

Em Física é também vulgarissimo os alunos apresentarem resultados com seis e mais casas decimais de aproximação, quando a 3.ª casa decimal é já incerta.

Medir e operar com medidas, sem a consciência dos erros cometidos, é medir mal. E é dificilmente justificável que a escola secundária, ensinando o aluno a medir as mais diversas grandezas, e em vários sistemas de unidades, não dê ao aluno o sentido justo da medição.

É, por isso, que surgem casos como este: Um número recente de uma categorizada revista científica portuguesa, com expansão no estrangeiro, insere um artigo em que há medidas estatísticas aproximadas a décimas, com erros prováveis aproximados a sete casas decimais!.

Pouco depois da guerra, em 1945, o importante hebdomadário londrino «*The Observer*» entrevistou, por intermédio de um correspondente especial, Sir Edward Appleton, que durante a guerra ocupou o importante cargo de «Secretary of the Departament of Scientific and Industrial Research».

Vou transcrever alguns períodos da notável entrevista, inserta em «*The Observer*», onde a meu ver, a função da escola secundária é posta com justo relevo: Sir Edward is in favour of a good general education even for those who will later become scientific specialists.

He emphasises the dangers of too early specialisation and thinks the examination system should be adjusted to prevent this.

«It is wrong» he says «that schoolboys should be asked to answer easy questions about advanced science when they ought be asked difficult questions about elementary science.»

Devo transcrever mais alguns períodos dessa notável entrevista, para que se não julgue, com a transcrição que acaba de ser feita, que Appleton pretende diminuir a importância da especialialização: Sir Edward believes that the day of the lonely genius, working alone in his secluded laboratory, may be almost over: the future lies mainly with teams.

Com efeito, o radar, os anti-bióticos, os estudos da Física nuclear, etc. confirmam a opinião de Appleton acerca do trabalho de investigação científica por equipes.

Este ilustre professor e investigador, considerado actualmente dos mais notáveis homens de ciência, entende que a especialização é uma necessidade imperiosa imposta pelo enorme desenvolvimento da ciência, mas deve ter por base sólida cultura geral.

E é a escola secundária que deverá fornecer essa cultura geral.

Os programas da escola secundária têm que ser bem estudados e coordenados.

Os professores de todos os graus de ensino devem colaborar na organização dos programas da escola secundária. Em especial, a organização dos programas das disciplinas do 3.º ciclo precisa da colaboração dos professores do ensino superior. Trata-se da resolução de um alto problema científico que interessa a toda a mocidade do nosso país. Nenhum professor pode eximir-se a colaborar na resolução e discussão desse problema.

Indicadas as deficiências do actual programa de Matemática do 3.º ciclo, na minha opinião, apresentarei as directrizes gerais a que esse programa deverá obedecer. Julgo não esquecer que a característica da escola secundária, mesmo no 3.º ciclo, é essencialmente formativa, de carácter geral, e não de técnica.

É possível imaginar vários arranjos nas matérias que podem constituir o programa de Matemática do 3.º ciclo e eu manifesto a minha preferência por aquele que a seguir exponho e que fica submetido à apreciação de quem se interesse por estes assuntos.

No 6.º ano seria sòmente estudada Álgebra e Trigonometria.

No 7.º ano seria também sòmente estudada Álgebra e Aritmética Racional.

O actual programa de Álgebra do 6.º ano seria acrescido do conceito de derivada de uma função, colocado a seguir à rubrica do programa actual «Conceito de continuidade de uma função» e tendo como aplicação o estudo da variação das seguintes funções:

$$y = ax + b; \quad y = ax^2 + bx + c \quad \text{e} \quad y = \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

Ainda o actual programa de Álgebra do 6.º ano seria acrescido do estudo da função exponencial e dos logarítmos. (Matéria a deslocar do programa do 5.º ano. Veja-se *Gazeta de Matemática*, número 49).

No 7.º ano seria estudada a Álgebra que consta do actual programa e a Aritmética Racional, acrescida da teoria do número fraccionário, do número irracional e do cálculo das aproximações numéricas.

A propósito do estudo do número irracional e das dificuldades que o aluno encontra nesse estudo, R. Courant, que é um investigador e tratadista notável das ciências Matemáticas, diz o seguinte:

Some modern text books on mathematics repel many students by starting with a pedantically complete analysis of the real number system.

Mas eu considero que, de fazer uma completa análise do sistema de números reais, a não fazer nenhuma, há muitíssimas situações intermediárias e é uma dessas situações intermediárias que preconizo para o programa de Matemática do 3.º ciclo, tanto mais que o estudo do número irracional permitiria ao aluno aplicar o conceito de limite, que estudou no 6.º ano, firmando e esclarecendo as suas ideias a respeito desse importantíssimo conceito.

Estes acrescentamentos ao programa de Matemática do 3.º ciclo torná-lo-iam mais homogéneo e, no arranjo final das matérias que o constituiriam, também mais, aliviado, porquanto a Aritmética Racional seria deslocada para o 7.º ano e a Geometria Analítica seria suprimida.

Poderá parecer descabida a supressão da Geometria Analítica, no programa do 3.º ciclo. Mas vejamos: No 1.º ano do Liceu, o aluno é iniciado na leitura e construção de gráficos cartesianos. No 2.º ano estuda a representação gráfica da proporcionalidade directa, aplicando-a à resolução de problemas simples. No 3.º, estuda a representação de um ponto num plano (em coordenadas cartesianas rectangulares) e representação gráfica de $y = ax$ e $y = ax + b$ em que a e b são valores numéricos. Ainda no 3.º ano, estuda a resolução gráfica da equação numérica do 1.º grau a uma incognita; de um sistema de duas equações numéricas do 1.º grau a duas incognitas e desigualdades inteiras do 1.º grau a uma incógnita. No 7.º ano estuda a resolução gráfica da equação do 2.º grau e a representação gráfica do trinómio do 2.º grau.

Depois de tudo isto, o actual programa intercala o estudo da Trigonometria, seguindo-se depois, finalmente, a Geometria Analítica.

Leia-se, agora, o programa de Geometria Analítica e ver-se-á que é constituido por «easy questions about advanced science...», a que se refere o ilustre Appleton.

Mas se se quiser que seja dada aos alunos uma ideia da existência da Geometria Analítica, como ramo próprio das ciências matemáticas, bastará que as instruções que acompanhem o programa destinem uma ou duas lições para que o professor apresente uma síntese dos conhecimentos dos anos anteriores que os alunos já possuem desse ramo da Matemática.

* Vide *Gazeta de Matemática*, n.os 48 e 49.

Ilustração 70: Análise crítica ao programa de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Liceal, 1951

Anexo 23.[23]

1.º ano

I) Conjuntos e números

1. As noções intuitivas de conjunto e de elemento de um conjunto, com base em exemplos familiares, mais ou menos relacionados com os interesses e a actividade lúdica do aluno. Conjuntos construídos a partir dos seus elementos e representados pela indicação destes entre chavetas (evitar o uso de letras isoladas para designar objectos, sejam eles conjuntos ou elementos).

Exemplos de conjuntos definidos por meio de propriedades num conjunto de referência (universo lógico). Conjuntos singulares. Conjunto vazio, introduzido a partir de propriedades irrealizáveis no conjunto de referência. Designação de tais conjuntos pela notação das chavetas.

Eventualmente, em coordenação com o estudo da Língua Portuguesa:

Substantivos próprios, substantivos comuns e substantivos colectivos; relacionação destas categorias gramaticais com as categorias lógicas de elemento e de conjunto. O papel dos adjectivos na definição de conjuntos por meio de propriedades. (A coordenação com o estudo da Língua Portuguesa, em casos como este, poderá também ser feita mais tarde, em revisões).

2. Relações de pertença e de não pertença; símbolos que as exprimem.

Relação de inclusão e uso do respectivo símbolo, para conjuntos designados pela notação das chavetas. Exemplos de inclusão entre conjuntos definidos por meio de propriedades.

Subconjuntos (ou partes) de um conjunto. Partes pròpriamente ditas (ou partes estritas).

O uso do sinal = como indicativo de identidade lógica entre objectos em geral. Identidade entre conjuntos.

Eventualmente: O verbo «ser» na linguagem corrente e as relações «pertença», «inclusão» e «igualdade».

3. Correspondências biunívocas. Exemplo do processo primitivo de contagem dos animais de um rebanho, por correspondência biunívoca com pedras ou riscos. Exemplos de correspondências unívocas num só sentido entre dois conjuntos.

O número de elementos de um conjunto (ou «número cardinal») como propriedade comum aos conjuntos que se possam pôr em correspondência biunívoca com esse. A letra N, como abreviatura da expressão «número de elementos de» (ou «número cardinal de»), aplicada a conjuntos representados pela notação das chavetas, em exemplos variados, a fim de marcar bem a distinção entre conjuntos e números. Os conjuntos singulares e o número 1; o conjunto vazio e o número 0.

4. A relação *menor que* entre números, deduzida da relação de inclusão entre conjuntos. Uso dos sinais < e > entre cardinais de conjuntos representados pela notação das chavetas.

5. Sistemas de numeração. O processo primitivo das sequências de riscos para representar números; sua evolução para o sistema de numeração romana.

O sistema de numeração decimal; leitura da escrita de números neste sistema. Breve notícia histórica ilustrada acerca do sistema decimal; suas vantagens sobre a numeração romana. Distinção entre *número* e *numeral* (nome de número).

Representação de números inteiros por meio de rectângulos ou réguas a cores. Arredondamento de números (por exemplo, em populações de países ou cidades); sua representação comparativa em gráficos de barras ou colunas, usando eventualmente papel milimétrico.

6. Exemplos de conjuntos finitos de números e respectivos cardinais. Números muito grandes: exemplos recreativos como o do *googol* e o do *googolplex*. Ideias intuitivas de «conjunto finito» e do «conjunto infinito». Os números inteiros (0, 1, 2, . . .) definidos como cardinais de conjunto finitos. O conjunto de *todos* os números inteiros como primeiro exemplo de conjunto infinito.

7. Os números inteiros como indicativos de ordem de objectos (números ordinais); exemplos que distingam os números ordinais dos cardinais, tais como: o número de cada aluno de uma turma e o número de alunos da turma; o número de cada página de um livro e o número de páginas do livro, etc. (em francês usa-se «numéro» com o significado de «número ordinal» e «nombre» com o de «número cardinal»; a operação vulgar de contagem faz corresponder a cada elemento contado um número ordinal).

Os números ordinais na linguagem corrente: *primeiro*, *segundo*, *terceiro*, etc.

Referência eventual aos instrumentos de contagem no mundo moderno: os contadores de água, gás e electricidade, os conta-quilómetros, os computadores, etc.

Nota. — A expressão «número inteiro», na acepção em que é aqui usada, será mais tarde substituída pela expressão «número inteiro absoluto», quando forem introduzidos os números negativos. Por enquanto não haverá risco de confusão. *Também não será ainda oportuna a introdução de símbolos para designar universos numéricos.*

II) Operações com números inteiros

a) Adição

1. As noções intuitivas de reunião e de intersecção de conjuntos, com base em exemplos concretos, relativos quer a conjuntos definidos por meio de propriedades (num dado universo) quer a conjutos construídos a partir dos seus elementos. Noção de «conjuntos disjuntos».

Eventualmente: O papel da conjunção copulativa «e» e da conjunção disjuntiva «ou» na intersecção e na reunião de conjuntos definidos por meio de propriedades.

2. A noção de soma de dois ou mais números, como cardinal da reunião de conjuntos mùtuamente disjuntos (partindo de exemplos concretos adequados que permitam estabelecer nìtidamente a distinção entre «soma de números» e «reunião de conjuntos»). Tabuada da adição (de dupla entrada).

3. Propriedades comutativa e associativa da adição, observadas em exemplos com números pequenos. *Inicia-*

Ilustração 71: Programa de Matemática para o Ciclo Preparatório, 1968, Portugal

[23] Fonte: Portaria n.º 23 601 de 9 de Setembro de 1968

ção no uso dos parênteses a propósito da propriedade associativa. O zero como elemento neutro da adição. Uso dos sinais $=$, $\neq$ $<$ e $>$ para construir frases matemáticas.

4. Intervenção das propriedades associativa e comutativa no processo usual do cálculo da soma (exemplos numéricos simples). Eventual referência às máquinas de somar do tipo digital.

5. Referência a outras aplicações das propriedades comutativa e associativa: provas reais da adição, cálculo da soma quando é grande o número de parcelas, cálculo mental, etc. Reconhecimento destas propriedades em tabelas estatísticas de dupla entrada. Exercícios de completação de fórmulas, de modo a obter frases verdadeiras.

Eventualmente: Distinção entre «conjunto de conjuntos» e «reunião de conjuntos». Exemplo: conjunto das turmas de um liceu e conjunto dos alunos do liceu (estes conjuntos não têm o mesmo número cardinal: o cardinal do segundo é a soma dos cardinais das diferentes turmas).

b) Subtracção

1. Noção intuitiva de conjunto complementar de um dado conjunto em relação a um outro que o contenha (com base em exemplo concreto, como no caso da adição). Introdução do símbolo $\setminus$ de complementação (ler «menos»).

Eventualmente: O advérbio «não» e o conceito de «conjunto complementar».

2. A diferença entre dois números como cardinal do conjunto complementar (partindo de exemplos adequados, como no caso da adição).

3. A subtracção como operação inversa da adição. Equações do tipo $a+x=b$, considerando a princípio o caso em que a é um número dígito e b um número igual ou maior que a e menor que 20.

4. Propriedades da subtracção relativas aos seguintes tipos de operações: subtrair de uma soma um número menor ou igual a uma das parcelas; subtrair de um número uma soma; subtrair de uma soma outra soma, cujas parcelas sejam ordenadamente inferiores ou iguais às da primeira (partindo de exemplos concretos simples, mas progressivos, evitando enunciadas verbais). Propriedade da invariância do resto. *Novas instruções sobre o uso dos parênteses a propósito destas propriedades.*

5. Intervenção das referidas propriedades na justificação do processo usual do cálculo da subtracção (com exemplos simples). A prova real da subtracção baseada na própria definição. Nova referência eventual às máquinas de calcular digitais.

6. Equações dos tipos $a-x=b$ e $x-a=b$; sua resolução baseada na definição de subtracção (segundo a qual o aditivo é sempre igual à soma do subtractivo com o resto). Problemas concretos conducentes a tais equações.

7. Cardinal da reunião de conjuntos não disjuntos, em problemas simples de tipo estatístico. Uso dos diagramas de Venn (a cores).

c) Multiplicação

1. Exemplos de reuniões de dois ou mais conjuntos disjuntos com o mesmo número de elementos. Utilização desses exemplos para introduzir a noção de produto de dois números (multiplicador e multiplicando) como soma de parcelas iguais ao multiplicando. Numerais multiplicativos: «o dobro», «o triplo», etc. Tabuada pitagórica da multiplicação.

2. Contagem dos elementos de uma matriz (quadro de figuras, de nomes, de carteiras, de aulas, etc.), por linhas e por colunas, com o objectivo de levar o aluno a *ver* a propriedade comutativa da multiplicação. Multiplicação de um número por 1 (elemento neutro) e por 0.

A propriedade distributiva da multiplicação a respeito da adição, induzida de exemplos simples da vida corrente e usada nos dois sentidos da igualdade que a exprime. *Novas instruções sobre o uso dos parênteses.*

3. Mutiplicações por 10, 100, 1000, etc. Intervenção das propriedades comutativa e distributiva no processo usual de cálculo do produto (em exemplos simples, considerando primeiro o caso do multiplicador com um só algarismo e depois, eventualmente, o caso do multiplicador com dois algarismos). Nova referência ocasional às máquinas de calcular digitais. Exercícios de completação de fórmulas, de modo a obter frases verdadeiras.

4. A multiplicação sucessiva (ou iterada). Propriedades associativa e comutativa. Cálculo de expressões numéricas *muito simples*, em que intervenham quando muito parênteses redondos, segundo as convenções usuais.

5. As potências introduzidas como abreviaturas de produtos de factores iguais. As propriedades do ***produto de potências com a mesma base*** ou *com o mesmo expoente*, reconhecidas como consequências das propriedades comutativa e associativa da multiplicação em exemplos numéricos simples.

d) Divisão

1. Exercícios simples de decomposição de um dado conjunto em dois ou mais conjuntos disjuntos com o mesmo número de elementos (quando tal seja possível). Exemplos da vida corrente que conduzem a tais repartições equitativas. Utilização desses exemplos para introduzir o conceito de *divisão* (exacta), como operação inversa da multiplicação. Equações do tipo $a\times x=b$ (a princípio, com $a<10$ e $b<100$); casos particulares: $a=b$, $a=1$ e $b=0$.

2. A divisão de um produto de dois números por um deles, aplicando a própria definição de divisão; extensão ao caso de mais de dois factores. Propriedade relativa à divisão de um produto por um número, quando um dos factores é divisível por esse número (sem exigência de enunciados a decorar).

3. Exemplos de casos em que a divisão exacta não é possível: tenta-se resolver uma equação do tipo $a\times x=b$ (com $a<10$ e $b<100$) e encontram-se dois números inteiros consecutivos cujo produto por a é respectivamente menor e maior que b. Conceito de *divisão inteira* (com *quociente inteiro e resto*). Divisões por 10, 100, etc. Exemplos concretos.

Eventualmente: Outro modo de achar o quociente e o resto: por subtracções sucessivas do divisor a partir do dividendo (referência às máquinas de calcular). Justificação do processo habitual da divisão com exemplos simples.

4. Noções de múltiplo e de submúltiplo de um número.

Relacionação dos *numerais partitivos* com a divisão exacta por 2, por 3, etc. (*metade de um número*, a *terça parte de um número*, etc.) e com os numerais multiplicativos (o dobro da metade, a metade do dobro, o triplo da terça parte, etc.). Numerais *partitivo-multiplicativos* (dois terços de um número, cinco quartos de um número, etc.) e *sua expressão abreviada em forma de fracção.*

5. Exercícios mentais recreativos: jogos que consistam em «adivinhar» o número em que pensa outra pessoa, depois de esta dizer o resultado de duas operações simples sucessivas efectuadas a partir desse número. Tradução desses problemas em equações dos tipos $(x+a)\times b=c$, $a\times x+b=c$, etc., sendo a, b e c números pequenos. Operações inversas das operações representadas por fracções, nos referidos jogos; por exemplo: sabendo que $^2/_3$ de um número é *tanto*, achar esse número (verifica-se então que o inverso de $^2/_3$ é $^3/_2$, o inverso de $^4/_3$ é $^3/_4$, etc.).

III) Números racionais

1. Estudo de situações concretas em que a divisão exacta não é possível com quociente inteiro, mas em que pode ser efectuada *dividindo* (partindo ou fraccionando) os objectos em partes iguais, o que conduz naturalmente a considerar *números fraccionários*. Por exemplo: 3 *tablettes* de chocolate a dividir por 4 pessoas (resultado: $^3/_4$ de *tablette* por pessoa); 7 bolos a dividir por 3 pessoas (resultado: $^7/_3$ de bolo a cada pessoa), etc. Exemplos como o último, em que o dividendo é maior que o divisor, levam a substituir o resultado em forma de fracção simples pelo resultado em *forma mista* ($2\frac{1}{3}$, no exemplo anterior). *Exercícios de divisão em que seja pedido o quociente exacto sob forma mista.*

Casos concretos em que as unidades não podem ser fraccionadas: por exemplo, a divisão exacta de 3 discos de música por 4 pessoas é impossível sem destruir os discos.

Casos em que as unidades são fraccionadas mentalmente (por exemplo: $^3/_4$ de hora).

2. Exemplos concretos progressivos que levem o aluno a admitir intuitivamente a propriedade de equivalência de fracções ($^2/_4$ de hora é o mesmo que meia hora, $^1/_3$ de hora é o mesmo que $^2/_6$ de hora ou $^{20}/_{60}$ de hora; $^5/_4$ de litro é o mesmo que $^{10}/_8$ de litro, etc.). Uso de figuras (rectângulos, círculos, etc.) para o mesmo fim.

Caso em que a fracção representa um número inteiro (exemplo: $^{12}/_4$ da hora é o mesmo que 3 horas). Fracções de denominador 1.

3. Os números fraccionários definidos como operadores representados por fracções. Identidade dos números representados por fracções equivalentes. Números racionais; o conjunto dos racionais como reunião de dois conjuntos disjuntos: o conjunto dos inteiros e o conjunto dos fraccionários.

Ilustração 72: Programa de Matemática para o Ciclo Preparatório, 1968, Portugal

4. Aplicações da propriedade da equivalência de fracções: *a*) Simplificação de fracções; *b*) Substituição de duas fracções equivalentes com o mesmo denominador, para comparar os respectivos valores. Exercícios de completação de fórmulas.

5. Exemplos concretos progressivos que levem o aluno a admitir intuitivamente os conceitos de soma e de diferença de números racionais ($^2/_4$ de hora$+^3/_4$ de hora$=^5/_4$ de hora, 1 litro de leite$-^1/_4$ de litro de leite$=^3/_4$ de litro de leite, etc.). Regras da adição e da subtracção de fracções.

6. Observar que a preposição «de» equivale ao sinal de multiplicação quando liga numerais multiplicativos; *exemplo:* o dobro do triplo de um número é 6 vezes esse número ($2\times3=6$). Adopção da mesma equivalência para numerais partitivos: $^1/_2$ de $^1/_3=^1/_6$; escreve-se então $^1/_2\times^1/_3=^1/_6$ (por convenção). Convenção análoga para os numerais partitivo-multiplicativos. Produto de dois ou mais números racionais.

7. Problemas de carácter lúdico, cuja resolução consista em inverter um número racional, inteiro ou fraccionário (treinos em jogos de «pensar em números»). Equações do tipo $a\times x=b$, sendo a e b números racionais ($a\neq o$), considerando primeiro o caso em que b e x são inteiros. A divisão de um número racional por outro, como operação inversa da multiplicação (equivalente a multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor). Tomada de consciência do facto culminante no estudo dos racionais: *a divisão exacta entre números racionais diferentes de zero é sempre possível (ao contrário do que sucede com os inteiros).* Verificação da permanência, no campo racional, das propriedades indicadas para as operações no campo dos inteiros (de maneira natural e progressiva, quando venha a propósito, no decurso dos cálculos). *Verificar que a divisão não é comutativa nem associativa e que só tem elemento neutro à direita.*

8. O uso do traço de fracção como sinal de divisão. Fracções com termos fraccionários. Cálculo de expressões numéricas fraccionárias *bastante simples*, em que intervenham, quando muito, parênteses redondos (segundo as convenções usuais).

9. Equações dos tipos $a:x=b$, $x:a=b$ e dos tipos equivalentes:

$$\frac{a}{x}=b,\ \frac{x}{a}=b,\ a=\frac{b}{x},\ a=\frac{x}{b},$$

sendo a, b números racionais (aplicando sempre a definição de divisão). Problemas concretos que se resolvem por meio de tais equações.

10. Potências de números fraccionários. Propriedades do quociente de potências com a mesma base ou com o mesmo expoente, aplicando propriedades anteriores e usando o traço de fracção como sinal de divisão.

> *Notas.* — *a*) Como ainda não se introduziram os números negativos, a designação «número racional» é aqui usada, evidentemente, na acepção de «número racional absoluto» (isto é «não negativo»); *b*) Embora o estudo sistemático da medição de grandezas deva ser feito mais tarde, convém desde já recorrer moderadamente, em exercícios, a unidades de medida conhecidas do aluno.

IV) Cálculo com decimais

1. Distinção entre «fracção ordinária» e «fracção decimal». Transformação de fracções ordinárias simples (de denominadores 2, 5, 25 ou 4) em fracções decimais equivalentes, aplicando a propriedade fundamental da equivalência. Escrita abreviada das fracções decimais por meio de vírgulas.

> *Nota.* — Genèricamente, todas as expressões do sistema de numeração decimal, incluindo as de inteiros, serão chamadas «numerais decimais» (não existem pròpriamente *números decimais*, mas apenas números racionais, que podem eventualmente ser representados por fracções decimais ou numerais decimais). Parte inteira e parte decimal; unidades decimais; leitura de numerais decimais. Concretizações com gráficos e unidades de comprimento (metro, decímetro, etc.).

Número de décimos, centésimos, etc., contidos num dado número inteiro.

2. Operações de adição, subtracção e multiplicação, com fracções decimais, segundo as regras aplicáveis a fracções quaisquer. Tradução desses cálculos em escrita abreviada (isto é, utilizando numerais decimais), a fim de justificar o cálculo com decimais já aprendido na escola primária, e reconhecido agora como caso particular do cálculo com fracções.

3. Multiplicação e divisão por potências de 10. Divisões que conduzem a quociente com vírgula e a resto zero (por exemplo, dividir 13 por 4 equivale a dividir 1300 *centésimos* por 4, o que dá 325 *centésimos*, ou seja $\frac{13}{4}=3{,}25$, etc.). Observação de casos em que *nunca* se pode chegar a resto zero; noção intuitiva de dízima infinita periódica. Arredondamento de numerais decimais; valores aproximados de um número a menos de $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, etc., ou a menos de 1, 10, 100, etc.

4. O papel do cifrão como vírgula nas contas de dinheiro em moeda portuguesa. Problemas concretos relativos a preços, lucros, despesas, etc.

5. As percentagens como nova forma das fracções decimais. Passagem de umas formas a outras; por exemplo:

$$38\,\%=\frac{38}{100}=0{,}38;\qquad 78{,}5\,\%=\frac{78{,}5}{100}=0{,}785;$$

$$140\,\%=\frac{140}{100}=1{,}4;\qquad \frac{21}{36}\approx0{,}583=58{,}3\,\%,\ \text{etc.}$$

O cálculo de percentagens, *reduzido ao cálculo com decimais*, em problemas directos ou inversos, referentes a dados estatísticos, descontos, acréscimos relativos, composições de misturas, etc. (partindo de situações familiares ao aluno e aproveitando a oportunidade para rever as noções de reunião e intersecção de conjuntos, conjunto complementar, etc.). Gráficos de percentagens: gráficos de sectores circulares e gráficos de barras ou colunas. Tabelas numéricas estatísticas de dupla entrada.

V) Medição de comprimentos

1. Emprego dos adjectivos «comprido», «largo», «alto», «espesso», «profundo», etc., e seus antónimos, nos graus positivo e comparativo, aplicados a vários objectos: mesas, carteiras, salas, réguas, fitas, etc. Substantivos abstractos correspondentes: «comprimento», «largura», etc. Comparação de comprimentos de objectos (de preferência réguas coloridas de uma colecção) para formular juízos dos seguintes teores:

a) O comprimento do objecto A é *maior* (ou *menor*) que o comprimento do objecto B.

b) Os objectos A e B têm o mesmo comprimento.

c) O comprimento de A é igual à *soma* dos comprimentos de B e de C.

d) O comprimento de A é o dobro (ou o triplo, ou o quádruplo, etc.) do comprimento de B.

2. A ideia intuitiva de segmento de recta sugerida por arestas de sólidos (especialmente réguas), fios esticados, etc. Salientar o seguinte: quando dois segmentos de recta têm o mesmo comprimento, eles são necessàriamente iguais (isto é, *geomètricamente iguais*), ao contrário do que sucede com os objectos de uso corrente; o comprimento de um segmento é, portanto, uma propriedade comum a todos os segmentos que lhe são iguais e *só a esses; mas é óbvio que um segmento não é a mesma coisa que o comprimento desse segmento* (distinção análoga à que se fez entre «conjunto» e «cardinal desse conjunto»); porém, quando o comprimento de um segmento é maior que o de outro, também se diz que o *primeiro segmento é maior que o segundo.*

Observar ainda que os termos «largura», «altura», «profundidade» e «espessura», aplicados a diversos objectos, se referem sempre a *comprimentos* de segmentos de recta considerados nesses objectos.

3. Adição de comprimentos representados por segmentos de recta (por abuso de linguagem, também se pode falar de *adição de segmentos*). Divisão de um segmento de recta em segmentos iguais, por meio de régua e esquadro. Construção de múltiplos e submúltiplos de comprimentos dados, empregando a régua, o compasso e o esquadro.

4. Medição de comprimentos, larguras, alturas, etc., utilizando como unidades o palmo e o pé (da própria pessoa que mede) ou ainda o comprimento de um fio ou de uma régua, e exprimindo o resultado em números inteiros, a menos de uma unidade, por defeito ou por excesso. Medição de comprimentos de segmentos de recta, traçados no papel ou no quadro, tomando para unidade o comprimento de um desses segmentos (em vez de «medir o comprimento de um segmento», também se pode dizer «medir o segmento»). Casos em que a medida é um número inteiro (medida exacta e medida aproximada, por defeito ou por excesso). Submúltiplos da unidade; medidas fraccionárias (exactas ou aproximadas). Razão (ou *quociente*) entre dois comprimentos.

5. Medição do comprimento de linhas quebradas e de linhas curvas (por exemplo, medição do perímetro de uma mesa redonda ou da circunferência de uma coluna por meio de um fio), tomando para unidade um comprimento

Ilustração 73: Programa de Matemática para o Ciclo Preparatório, 1968, Portugal

escolhido arbitràriamente. Noções intuitivas de paralelo e de meridiano, por observação de um globo terrestre (em coordenação com o estudo das ciências).

6. Vantagens da adopção de unidades, tanto quanto possível invariáveis. Primeira definição do metro, a partir do meridiano terrestre. Inconvenientes desta definição; segunda definição do metro. Alusão eventual ao facto de se ter adoptado recentemente uma nova definição de metro.

Múltiplos e submúltiplos usuais do metro. *Medições com réguas graduadas e fitas métricas.* Referências ao nónio e a Pedro Nunes.

7. Comprimentos pequenos. Exemplo das espessuras de um vidro, de um papel e de um cabelo, comparadas em ampliação. Comprimentos microscópicos; submúltiplos decimais do milímetro; o mícron. Alusão eventual à unidade X usada em microfísica (o número de unidades X num milímetro é igual ao número de milímetros em 10 000 quilómetros).

8. Alusão às unidades adoptadas antes do sistema métrico e às unidades inglesas. Vantagens do sistema métrico, relacionadas com o sistema de numeração decimal.

VI) Medição de tempos

1. Comparação de tempos em diversos exemplos concretos: duração de uma aula, duração de um recreio, tempo de execução de um trabalho, tempo decorrido entre dois acontecimentos, etc. Tempos iguais (exemplo dos compassos e ritmos musicais, do metrónomo, do ritmo cardíaco, etc.).

2. A necessidade da escolha de unidades de tempo tanto quanto possível invariáveis. O dia solar verdadeiro e o dia solar médio. As definições usuais de hora, minuto e segundo.

Instrumentos antigos para a medição de tempos: o relógio de sol, a ampulheta e a clepsidra. O relógio humano: observar que a unidade segundo é aproximadamente igual ao tempo de uma pulsação do coração humano, mas que o número de pulsações por minuto é variável.

Referência ao isocronismo das pequenas oscilações do pêndulo. Relógios vulgares e cronómetros. Referência eventual à cronometragem de provas desportivas e de fenómenos físico-químicos.

3. O microssegundo e o nanossegundo como unidades de tempo nos mais modernos computadores (o nanossegundo é para o segundo o que o segundo é para 30 e tal anos). Referência eventual ao relógio atómico e à nova definição de segundo.

Comparação de tempos muito grandes, em assuntos astronómicos, geológicos ou biológicos.

4. Cálculos de tempos em forma complexa (por exemplo, em horas, minutos e segundos, ou em dias, horas, minutos e segundos). Passagem a formas incomplexas e vice-versa. Adição e subtracção de tempos em forma complexa; multiplicação e divisão por números inteiros pequenos.

VII) Medição de velocidades

Uso dos advérbios de tempo «depressa» e «devagar» e dos adjectivos «rápido» (ou «veloz») e «lento» (ou «vagaroso»), nos graus positivo e comparativo. O substantivo abstracto «rapidez» (ou «velocidade») aplicado em diversas circunstâncias.

Velocidade média da marcha de uma pessoa em metros por minuto. Corridas pedestres: *records* registados em diversas modalidades de provas desportivas.

Velocidade média de um veículo em quilómetros por hora durante uma viagem. Noção intuitiva de velocidade num dado instante, como velocidade média num intervalo de tempo muito pequeno a que pertença esse instante. Função do velocímetro de um automóvel comparada com a do conta-quilómetros. O acelerador: noção intuitiva de movimento uniforme (velocidade constante), movimento acelerado (velocidade crescente) e movimento retardado (velocidade decrescente).

A velocidade de um projéctil ou foguetão em metros por segundo. Passagem de medidas em quilómetro-hora (km/h) para metros por segundo (m/s) (e vice-versa), a propósito de viagens espaciais. Outros problemas concretos.

Velocidade do som, aviões supersónicos. Velocidade da luz: distâncias astronómicas em *anos-luz*.

VIII) Introdução concreta à geometria

1. Propriedades geométricas dos corpos: *forma, extensão* e *situação*. Finalidade da geometria: estudo destas propriedades. Sinónimo familiar de «forma»: «feitio»; sinónimos familiares de «extensão»: «tamanho», «grandeza»; sinónimos familiares de «situação»: «sítio», «lugar».

Comparação de objectos nos seguintes casos: *a*) Os objectos têm forma e tamanhos diferentes; *b*) Os objectos têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes; *c*) Os objectos têm a mesma forma e o mesmo tamanho, mas cores diferentes; *d*) Os objectos têm a mesma forma, a mesma grandeza, a mesma cor e a mesma substância: *diferem só pela situação.*

Comparação entre sólidos e líquidos, entre líquidos e gases (neste momento aparece o termo «volume» em vez de «extensão»). Chamar a atenção do aluno para o facto de não existirem corpos perfeitamente sólidos (ou rígidos): exemplo das dilatações com o calor e das compressões; importância deste facto na construção de casas, pontes, máquinas, etc.

2. Observação de sólidos geométricos, com o duplo objectivo de aperfeiçoar a linguagem e a intuição geométrica (sem definições): cubos, esferas, paralelepípedos, cilindros, cones, prismas, pirâmides, octaedros, etc. Os sólidos geométricos na técnica, na arte e na natureza: observação de gravuras, cristais, pedras ou vidros facetados, etc.

3. Os advérbios de lugar «dentro» e «fora» e os adjectivos correspondentes «interior» e «exterior». A *superfície* (ou *fronteira*) de um sólido concebida como a parte do sólido que o *separa* do exterior. Poliedros e sólidos redondos; faces, arestas e vértices de um poliedro.

A noção de superfície sugerida por objectos de espessura desprezável: observação em modelos de madeira, lâmina, cartolina ou plástico (quando possível, construídos pelo aluno). Superfícies abertas e superfícies fechadas (convirá que as superfícies fechadas se possam obter por ligação de superfícies abertas e sejam adaptáveis a superfícies de sólidos da colecção). *Bordo* de uma superfície aberta; observação da *linha* ou das *linhas* de que é formado. Superfícies planas: polígonos (triângulos, quadriláteros, etc.); lados e vértices de um polígono; círculos, coroas circulares e sectores circulares. Superfícies poliédricas, superfícies curvas e superfícies mistas; superfícies laterais e superfícies totais de cilindros e de cones; superfícies esféricas.

Nota. — Emprega-se aqui a expressão «superfície plana» na acepção intuitiva de «porção de plano».

4. A noção de *linha* sugerida por modelos de fio metálico pouco deformáveis. Linhas abertas e linhas fechadas (convirá que as linhas fechadas se possam adaptar ao bordo de superfícies abertas da colecção). Extremos de uma linha *aberta*: pontos. Segmentos de recta, linhas quebradas (ou poligonais), linhas curvas e linhas mistas. Medição de comprimentos (revisão).

5. O conceito de *área* (extensão) de uma superfície, a partir dos exemplos concretos da área de um terreno, de um pavimento, etc. Exemplos intuitivos de duas superfícies que não sejam iguais e tenham a mesma área (utilizando modelos). Medição da área de rectângulos (em particular quadrados), no caso simples em que as dimensões do rectângulo são múltiplas da unidade de comprimento. Unidades de área do sistema métrico; unidades agrárias (revisão sistematizada de conhecimentos adquiridos na escola primária).

6. Extensão de um sólido (*volume*). Exemplos intuitivos de dois sólidos que não sejam iguais e tenham o mesmo volume (utilizando modelos). Medição do volume de paralelepípedos rectângulos (em particular cubos), no caso em que as dimensões são múltiplas da unidade de comprimento. Unidades de volume do sistema métrico; medição do volume de um líquido; unidades de capacidade (revisão sistematizada de conhecimentos adquiridos na escola primária).

> *Nota.* — É recomendado o emprego de colecções de quadrados e de cubos que *concretizem* as unidades de área de volume e sirvam para construir rectângulos e paralelepípedos respectivamente.

7. Complementos circunstanciais de lugar, em exemplos sugestivos que ponham em evidência a *relatividade da noção de lugar* (ou *situação*): «Leiria está situada ao norte de Lisboa e ao sul de Coimbra», «O rato está dentro da caixa, mas fora da ratoeira», «O avião está a voar sobre o monte Branco, a 10 km de altitude», etc. (Assim, o lugar de uma coisa é uma propriedade que essa coisa tem *relativamente a outras* que tomamos para referência; as mudanças de lugar ou posição chamam-se *movimentos*, que têm portanto carácter relativo, tal como os lugares.) Exemplos que ponham em evidência a *relatividade da noção de movimento:* o passageiro que vai sentado e o

Ilustração 74: Programa de Matemática para o Ciclo Preparatório, 1968, Portugal

passageiro que caminha, dentro de um comboio ou de um avião; movimentos em relação à Terra, em relação ao Sol, em relação à Lua, etc.

8. A noção de *ponto material*, como corpo de dimensões nulas — ideia cómoda e prática (tal como a de sólido), sugerida por um grão de pó, pelo sinal que fazemos com a ponta do lápis, etc. Distinção entre «ponto material» e «ponto geométrico»: os pontos geométricos são apenas os *lugares* (ou *posições*) dos pontos materiais, em relação a um corpo de referência, por exemplo a Terra. O *espaço relativo a um corpo*, definido como o conjunto de todos os possíveis pontos geométricos em relação a esse corpo (normalmente, quando se disser «espaço» simplesmente, poderá pensar-se no espaço relativo à Terra). A noção intuitiva de linha, como conjunto das posições de um ponto material que se move (exemplo dos riscos, mais ou menos arbitrários, feitos com o giz ou com o lápis).

Síntese final: um corpo dá-nos a ideia de um *conjunto de pontos materiais*; o lugar ocupado pelo corpo dá-nos a ideia de um *conjunto de pontos geométricos* (linha, superfície, sólido geométrico, etc.). *É destes últimos conjuntos que se ocupa a geometria.*

IX) Elementos de geometria plana (com referência à geometria do espaço)

1. Maneira de verificar se uma aresta de uma régua é aproximadamente rectilínea (quando dois pontos de um sólido se mantêm fixos num movimento, o mesmo sucede com os outros pontos do sólido que estão em linha recta com esses; movimentos de rotação). Verificação experimental da propagação rectilínea da luz. Maneiras de verificar se três pontos do espaço *estão em linha recta:* processo da régua, processo do fio esticado e processo da mira.

A recta como primeiro exemplo de linha ilimitada no espaço — conjunto de todos os pontos do espaço que *estão em linha recta* com dois pontos dados não coincidentes (por dois pontos distintos do espaço passa sempre uma recta e uma só).

2. Uso da preposição «entre» em complementos circunstanciais de lugar (exemplos com objectos, alunos de uma turma, etc.). Aplicação a pontos de uma recta. O segmento de recta como conjunto formado por dois pontos distintos (os extremos) e por todos os pontos situados em linha recta *entre* os primeiros. Uso das locuções «à direita de» e «à esquerda de», em complementos circunstanciais de lugar, em relação a uma pessoa (por exemplo, professor ou aluno). Ordenação dos pontos de uma recta (comparação eventual com ordem no tempo, expressa pelas locuções prepositivas «antes de» e «depois de»). Divisão de uma recta em duas semi-rectas.

3. Maneira de verificar se uma face de um sólido é plana ou empenada. Prolongamento ideal de uma superfície plana no espaço. O plano como primeiro exemplo de superfície ilimitada (que se distingue pela propriedade de conter toda a recta que passa por dois pontos distintos quaisquer da superfície).

4. Linhas fechadas simples no plano. Noções de «ponto interior» e de «ponto exterior» em relação à linha: o conjunto formado pelos pontos interiores à linha e pelos pontos da linha é uma superfície plana limitada, que tem essa linha por *fronteira* (chamada *bordo* da superfície, no espaço»). Exemplos concretos: fronteira de um país (considerada num mapa); periferia de uma cidade; contorno de uma figura; limite (ou estrema) de uma propriedade, etc. O comprimento da fronteira chama-se *perímetro* da superfície. (É preciso não esquecer que os exemplos concretos são sempre realizações imperfeitas dos modelos matemáticos e é importante que o aluno vá tomando consciência desse facto).

5. O caso particular das circunferências. Definições rigorosas de circunferência e de círculo; raios, cordas e diâmetros. Medição de perímetros de objectos circulares e dos respectivos diâmetros para ter a ideia de que é constante a razão entre os primeiros e os segundos. Definição do número π como valor *exacto* dessa razão constante; alusão ao facto de π ser representado por uma dízima infinita não periódica (número irracional); valores aproximados de π usados na prática. Uso da fórmula $C=\pi \times D$, para cálculo do comprimento de uma circunferência a partir do diâmetro; problema inverso (conceito de divisão). Exemplo concreto: cálculo do percurso de um automóvel a partir do número de rotações das rodas e do diâmetro das mesmas (nova referência ao conta-quilómetros).

6. Caso das linhas quebradas (ou poligonais) fechadas simples; os pontos do plano interiores à linha e os pontos da linha formam um *polígono* (não interessa considerar polígonos estrelados). Lados e vértices. Polígonos convexos e polígonos côncavos. Diagonais. Noção geral de «conjunto convexo». Outros exemplos de conjuntos convexos e de conjuntos côncavos. Linhas poligonais inscritas numa curva.

> *Nota.* — O estudo do comprimento da circunferência pode ser feito após o das linhas poligonais inscritas.

7. A noção intuitiva de *igualdade geométrica*, introduzida a partir dos deslocamentos. Reprodução de figuras por decalque ou por impressão. Maneira de verificar se duas figuras são iguais, por correspondência pontual biunívoca em que se mantenham as distâncias (isometrias); caso particular dos triângulos e das circunferências.

8. Construção de um triângulo cujos lados tenham comprimentos dados. Condição para que o problema seja possível: *qualquer lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois* (um segmento de recta é o mais curto caminho entre os seus extremos).

Construção de um triângulo cujos lados sejam três réguas articuladas nos extremos: *o objecto obtido é rígido*. Construção análoga de um quadrilátero: *o objecto construído não é rígido*. A aplicação da rigidez do triângulo nas *cúpulas geodésicas*.

9. Divisão do plano em semiplanos. Semi-rectas com origem comum: ângulo convexo e ângulo côncavo. A noção intuitiva do «ângulo gerado por uma semi-recta»; ângulos nulo, raso e giro. Ângulos *mais abertos* ou *menos abertos* (quando um ângulo é mais aberto que outro também se diz que é maior que o outro); a abertura ou amplitude de um ângulo como propriedade comum a todos os que lhe são iguais.

10. Soma de dois ou mais ângulos. Múltiplos e submúltiplos de um ângulo. Divisão de um ângulo em partes iguais por dobragem do papel. Ângulo recto: maneira de verificar se um ângulo de um esquadro é recto; ângulos agudos e ângulos obtusos. Bissectriz de um ângulo: divisão de um ângulo em duas partes iguais, em quatro partes iguais, etc.; divisão de um ângulo recto em três partes iguais (com régua e compasso). O ângulo recto, o ângulo raso e o ângulo giro, como unidades de medida. O grau, o minuto e o segundo sexagesimais. Medição de ângulos com transferidor. Referência ao teodolito e a outros instrumentos de medição de ângulos; o papel da matemática nos descobrimentos marítimos dos Portugueses; nova referência ao nónio e a Pedro Nunes.

11. Ângulo ao centro, numa circunferência: arco e sector circular correspondentes a esse ângulo; distinção entre *abertura* (ou *amplitude*) de um arco e *comprimento* do mesmo.

Cálculo com medidas de ângulo (ou arco) em forma complexa; passagem à forma incomplexa e vice-versa; adição e subtracção de medidas complexas; multiplicação e divisão por números inteiros pequenos.

Problemas concretos (relativos, por exemplo, a arcos de meridiano).

12. Ângulos internos de um polígono. Etimologia das palavras «triângulo» («trígono» ou «trilátero»), «quadrilátero» («quadrângulo» ou «tetrágono»), «pentágono», «hexágono», etc., e «polígono». Polígonos regulares. Classificação dos triângulos quanto a lados e quanto a ângulos (estudo elementar).

13. Posição relativa de duas rectas no plano: rectas concorrentes e rectas paralelas (em particular, coincidentes); rectas perpendiculares e rectas oblíquas. O caminho mais curto para ir de um ponto a uma recta; definição de distância de um ponto a uma recta. Exemplos de rectas que não se encontram, sem serem paralelas (construção de viadutos para evitar cruzamentos); definição de rectas paralelas no espaço. Exemplos de movimentos de translação: rectilíneos (um esquadro que desliza apoiado numa régua, um comboio que avança numa recta, etc.) e curvilíneos (exemplos como o da Grande Roda do Prater de Viena). Os movimentos de rotação e de translação da Terra *em relação ao Sol*. Traçado de paralelas com régua e esquadro; distância entre duas paralelas. O paralelogramo. Classificação dos quadriláteros (estudo elementar).

As figuras geométricas como motivos artísticos, em pintura, arquitectura, etc.

14. Planos horizontais; rectas horizontais e rectas verticais. O nível da bolha de ar e o fio de prumo na construção civil. (As rectas verticais em Lisboa não são verticais em relação a Nova Iorque: as noções de «vertical», «horizontal», «em cima», «no norte», «a leste», etc., são noções geográficas que deixam de ter sentido numa nave espacial longe da Terra.

15. Leitura e construção de gráficos cartesianos no primeiro quadrante (papel milimétrico).

Ilustração 75: Programa de Matemática para o Ciclo Preparatório, 1968, Portugal

2.º ano

I) Conjuntos e números inteiros

1. Revisão sistematizada dos conhecimentos adquiridos no 1.º ano, dando o máximo relevo aos conceitos de base. Exercícios e complementos.

Igualdades e desigualdades numéricas que ponham em evidência as propriedades das operações, bem como o papel dos parênteses na escrita simbólica da matemática. Substituição dos símbolos numéricos por letras indicativas de números quaisquer, de modo a obter fórmulas que exprimam tais propriedades. Propriedade distributiva da multiplicação a respeito da subtracção (não incluída no programa do 1.º ano); exemplos de aplicação.

Propriedade distributiva da divisão a respeito da adição e da subtracção, quando as parcelas ou termos são múltiplos do divisor; salientar que a divisão é distributiva à *esquerda*, mas não à *direita*.

Jogos de *pensar em números*. Equações simples. Resolução de problemas concretos. Expressões numéricas simples; *introdução do uso dos parênteses rectos*. Resolução de alguns problemas concretos *sem efectuar os cálculos*, isto é, chegando às expressões numéricas que indicam a maneira de calcular o resultado (numa segunda fase tentar-se-á substituir nesses problemas os dados numéricos por letras a fim de obter a fórmula geral que resolve os problemas de cada tipo; em tudo deverá haver a preocupação de não ocupar *excessivamente* o aluno com cálculos numéricos, evitando que as ideias fiquem ocultas sob a matéria informe desses cálculos e procurando estabelecer uma transição suave entre o estudo da aritmética e o da álgebra, que se iniciará posteriormente).

2. Exemplos sugestivos que conduzam às noções de congruência e de classe de congruência a respeito de um dado número inteiro: conjuntos de alunos numerados em ordem circular, com repetição; a *aritmética das horas* no mostrador de um relógio, etc. Propriedades das congruências, a respeito da adição e da multiplicação, estabelecidas progressivamente a partir de exemplos numéricos, em situações concretas como as referidas anteriormente. Tabelas de adição e da multiplicação de classes de congruência em casos simples (tabelas com duas entradas); referência aos contadores mecânicos e às máquinas de somar (no sistema decimal de numeração).

80

Aplicação das propriedades das congruências à dedução intuitiva dos critérios para achar os restos da divisão de um número por 2, 5, 9, 3 e 4. Justificação da prova dos nove para as quatro operações elementares da aritmética.

3. As potências como abreviaturas de produtos de factores iguais. Revisão das propriedades fundamentais das potências reconhecidas como consequências de propriedades da multiplicação e da divisão, e da própria definição de potência (a partir de exemplos numéricos e usando de preferência o traço de fracção como sinal de divisão). Tradução dessas propriedades em fórmulas simbólicas. Cálculo de expressões numéricas simples, em que se torne cómodo aplicar essas propriedades. Uso de tabelas de quadrados e de cubos, para facilitar o cálculo das potências.

4. O papel das potências de 10 no sistema de numeração decimal. Passagem, por analogia, ao sistema de base 2; exemplos de operações com números representados neste sistema; referência aos computadores electrónicos e a sistemas de numeração em outras bases.

Eventualmente: Referência aos circuitos eléctricos fundamentais «e», «ou», «não» e à função de tais circuitos lógicos nos computadores.

5. Conjunto dos divisores comuns de dois números (em exemplos simples, aplicando a ideia de intersecção de conjuntos). *Máximo divisor comum* de dois números. Números primos entre si.

Conjunto dos múltiplos comuns (diferentes do zero) de dois números (em exemplos simples, aplicando a ideia de intersecção de dois conjuntos). *Mínimo múltiplo comum* de dois números.

Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de três ou mais números.

Decomposição de um número em factores que *já não se possam decompor mais*: o conceito de *número primo* (ou *número primitivo*) como número maior que 1 que não se pode decompor num produto de factores menores que esse número (definição equivalente: número maior que 1 que só admite como divisor ele próprio e 1); decomposições de números em factores primos.

Cálculo do máximo divisor comum e do menor múltiplo comum de dois ou mais números, por decomposição em factores primos (exercícios pouco laboriosos, sem complicações inúteis).

81

2. Intersecção de duas rectas, de uma recta com uma circunferência e de duas circunferências; estudo dos diferentes casos possíveis no plano, atendendo às distâncias relativas e introduzindo a nomenclatura adequada a cada caso (relacionar com o problema da construção de um triângulo, dados os comprimentos dos seus lados). Posição relativa da recta tangente a uma circunferência e do raio no ponto de tangência. Tangentes comuns a duas circunferências. Razão entre os comprimentos de duas circunferências. Problemas concretos relativos à transmissão de movimentos entre rodas por meio de engrenagens, correias, veios, etc.; exemplo da transmissão de movimentos em automóveis.

3. Simetrias em relação a pontos e a rectas no plano. Construção da figura simétrica de uma figura dada, por dobragem de papel ou por meio de régua, compasso e esquadro. Centros e eixos de simetria de uma figura. Planos de simetria. A simetria na arte e na natureza.

4. Os adjectivos «quente» e «frio» e os substantivos abstractos «calor» e «temperatura». Leitura das escalas termométricas, em graus e décimos de grau (coordenação com o ensino das Ciências da Natureza). Introdução dos números negativos *como simples abreviaturas de linguagem*, para designar as temperaturas abaixo de zero.

Graduação de uma recta por meio de pontos sucessivos equidistantes, marcados com os números 0, 1, 2, etc., para um lado, e com os números −1, −2, −3, etc., para o lado oposto (por analogia com as escalas termométricas); pontos de abcissa fraccionária. Coordenadas cartesianas no plano. Leitura e construção de gráficos usando papel milimétrico.

IV) Medição de áreas

1. O problema da medição de áreas de terrenos, levantado há milhares de anos no Egipto pelas cheias do Nilo. Significado etimológico da palavra «geometria».

2. Terrenos contíguos; passagem desta noção concreta à noção abstracta de *superfícies contíguas*. Princípios elementares em que assenta a medição da área (ou extensão) de uma superfície: *a*) Superfícies iguais têm a mesma área; *b*) A reunião de duas superfícies contíguas tem área igual à soma das áreas dessas superfícies. Decomposição e composição de superfícies para mostrar que duas superfícies podem ter a mesma área sem serem iguais (por exemplo, decomposição de um quadrado em dois triângulos pela diagonal e construção de um triângulo isósceles formado pela reunião de dois triângulos contíguos, iguais aos primeiros). Superfícies equivalentes, isto é, superfícies com a mesma área.

3. Medição da área de rectângulos desenhados no papel (ou no quadro preto), tomando para unidade a área de um quadrado. Estudo do caso em que as dimensões do rectângulo (comprimento e largura, ou base e altura) são múltiplos das dimensões do quadrado. Estudo do caso oposto: medidas do rectângulo, em números inteiros, por defeito e por excesso. Caso particular em que o rectângulo a medir é também um quadrado.

Medição da área do tampo rectangular de uma mesa em palmos quadrados (por defeito e por excesso). Medição da área de um pavimento rectangular em pés quadrados (por defeito e por excesso).

Unidades de área do sistema métrico; unidades agrárias (revisão dos conhecimentos adquiridos anteriormente).

Medição da área de um rectângulo desenhado em papel milimétrico, tomando para unidade o centímetro quadrado (cm^2) e o milímetro quadrado (mm^2). Fórmula que dá exactamente a medida da área do rectângulo, a partir das suas dimensões. Caso particular em que um rectângulo é um quadrado; justificação da expressão «quadrado de um número».

4. Traçado de uma linha fechada simples em papel milimétrico e medição da área da superfície limitada por essa linha, contando todos os quadrados do reticulado — centímetros quadrados ou milímetros quadrados — *contidos* nessa superfície (medida por defeito) e todos os quadrados que *contêm* pelo menos uma parte da superfície (medida por excesso). Referência ao instrumento usado para a medição de áreas de superfícies limitadas por linhas no papel: o *planímetro*.

5. Transformação de um paralelogramo num rectângulo equivalente, por decomposição e recomposição. Fórmula da área do paralelogramo deduzida por este processo.

Transformação de um triângulo num paralelogramo com o dobro da área, construindo um outro triângulo igual e contíguo ao primeiro. Fórmula da área do triângulo deduzida por este processo.

Determinação da área de um polígono qualquer, por decomposição em triângulos. Fórmula da área de um

Ilustração 76: Programa de Matemática para o Ciclo Preparatório, 1968, Portugal

polígono regular, deduzida por decomposição deste em triângulos iguais.

Ilustração da *propriedade distributiva da multiplicação a respeito da adição*, por meio de áreas de rectângulos contíguos.

6. Estudo da área de um sector circular, por decomposição em sectores cada vez mais estreitos e substituição dos respectivos arcos pelas cordas de modo a obter triângulos. Dedução intuitiva, por este processo, da fórmula da área do sector circular: metade do produto do comprimento do arco pelo raio (aplicando a propriedade distributiva).

Processo análogo para deduzir a fórmula da área do círculo.

7. Problemas de aplicação concreta. Leitura e interpretação de plantas de terrenos, bem como de plantas, alçados, perfis e cortes de casas. Determinação de áreas de superfícies representadas desse modo, atendendo à escala. Cálculos simples de despesas envolvendo áreas, preços unitários, etc.

Densidade populacional de uma dada região.

8. Problema da construção de um quadrado, cuja área seja dada; equações do tipo $x^2=a$, sendo a um número positivo dado; noção de *raiz quadrada*; exemplos com quadrados perfeitos. O operador «raiz quadrada de» como inverso do operador «quadrado de» (o quadrado da raiz quadrada de um número é esse número; a raiz quadrada do quadrado de um número é esse número); tradução desse facto, primeiro em fórmulas numéricas, depois em fórmulas com letras: $(\sqrt{a})^2=a$; $\sqrt{a^2}=a$.

Quadrados perfeitos. Uso de tabelas de raízes quadradas para a determinação das raízes quadradas com um certo número de algarismos exactos; referência ao facto de haver processos que permitem calcular a raiz de um número com a aproximação que se queira; nova alusão aos números irracionais.

Resolução de equações do tipo $a\times x^2=b$, sendo a, b números positivos dados. Determinação do raio de um círculo conhecida a área. Resolução de problemas, alguns dos quais *sem efectuar os cálculos*, isto é, obtendo apenas a fórmula resolvente.

9. Trabalhos práticos de planificação das superfícies de prismas, pirâmides, cilindros e cones (de revolução) e de construção de modelos destes sólidos em cartolina. Dar a ideia de como, uma vez planificada a superfície, é possível determinar a sua área, aplicando as fórmulas anteriores (o que interessa, essencialmente nestes casos, são as *ideias*, não os *cálculos*). Exemplo de uma superfície não planificável: a superfície esférica; alusão à *existência* de uma fórmula que permite achar a área da superfície esférica a partir do raio.

V) Medição de volumes

1. Ideias fundamentais em que assenta o conceito de volume (ou extensão) de um sólido geométrico: *a*) Sólidos iguais têm o mesmo volume; *b*) A reunião de dois sólidos contíguos tem volume igual à soma dos volumes desses sólidos. Noção de sólidos equivalentes (analogia com a noção de equivalência de superfícies).

2. Prismas rectangulares (ou paralelepípedos rectângulos). Medição do volume de um prisma, tomando para unidade o volume de um cubo dado. Processos de medição análogos aos que foram indicados para a área do rectângulo.

Unidades de volume do sistema métrico (revisão dos conhecimentos adquiridos anteriormente).

Fórmula que dá exactamente o volume de um prisma rectangular, a partir das suas dimensões. Caso particular em que o prisma é um cubo; justificação da expressão «cubo de um número».

3. Medição do volume de um líquido por meio de uma proveta graduada. Medição do volume de um sólido por imersão em água contida numa proveta graduada. Volume de um gás a pressão e a temperatura constantes. Referência aos contadores de água e de gás.

O litro e os seus submúltiplos decimais. Equivalências entre estas unidades e as anteriores.

4. Prismas rectos e prismas oblíquos. Modelos que permitam mostrar: *a*) Como um prisma recto, cuja base é um paralelogramo, se pode transformar num prisma rectangular equivalente; *b*) Como dois prismas rectos triangulares iguais se podem reunir num prisma cuja base é um paralelogramo (convirá primeiro usar prismas de altura pequena em relação à base, e mesmo de *altura unitária*, para se ver bem a analogia com o que se fez a respeito das áreas). Dedução intuitiva, por este processo, da fórmula do volume do prisma recto de base triangular. Generalização intuitiva desta fórmula ao caso de um prisma recto qualquer e do cilindro de revolução (justificar a expressão «cilindro de revolução»).

Decomposição de um cubo em seis pirâmides quadrangulares iguais, com o vértice no centro do cubo (alusão às pirâmides do Egipto). Determinação do volume de uma tal pirâmide. *Alusão* à fórmula que dá o volume de uma pirâmide qualquer, bem como o volume de um cone de revolução (justificação desta designação).

5. Problemas da construção de um cubo sendo dado o seu volume; equações do tipo $x^3=a$, sendo a um número positivo dado; noção de *raiz cúbica*: exemplos com cubos perfeitos. O operador «raiz cúbica de» como inverso do operador «cubo de» e as fórmulas respectivas: $(\sqrt[3]{a})^3=a$, $\sqrt[3]{a^3}=a$. Uso de tabelas de raízes cúbicas. Equações do tipo $a\times x^3=b$, sendo a, b números positivos dados.

VI) Medição de pesos e massas

1. Os adjectivos «pesado» e «leve», nos graus positivo e comparativo, e o substantivo abstracto «peso». Conversão da frase «*A é mais pesado* que B» na frase equivalente: «O peso de A *é maior que* o peso de B». O peso de um corpo como *força* (por exemplo a força muscular que empregamos para manter um corpo suspenso com a mão: se o largarmos, o corpo cai — o peso é a *força* que o faz cair). O adjectivo «grave» como sinónimo de «pesado» e o substantivo abstracto «gravidade»; o conceito de peso como *força da gravidade*, que solicita os corpos para o centro da Terra (ou de outros astros). Como medir os pesos: a *balança de mola* ou *dinamómetro* (em que a força é medida pelo deslocamento da mola). Um facto de importância capital: *o peso de um corpo depende do lugar* onde ele estiver (é maior nos pólos do que no equador, diminui com a altitude, é muito menor na Lua do que na Terra, chega a ser nulo em viagens espaciais). O verbo «ponderar» como sinónimo de «pesar»; alusão ao «estado de imponderabilidade».

2. O conceito de *massa* (ou *quantidade de matéria*) baseado nas seguintes ideias: *a*) Dois corpos têm a mesma massa, quando têm o mesmo peso no mesmo lugar; *b*) A massa da reunião de dois corpos (sem pontos comuns) é a soma das massas desses dois corpos; *c*) A massa de um corpo não varia com o lugar.

Como medir as massas: o equilíbrio de forças em alavancas explicado de maneira simples e atraente (exemplo do balancé, multiplicação de forças, a frase atribuída a Arquimedes, etc.). As balanças pròpriamente ditas (balanças de equilíbrio) baseadas no princípio das alavancas. Balança de braços iguais: verificar se dois corpos têm a *mesma* massa ou se a massa de um é *maior* que a massa do outro; utilização de vários corpos com a mesma massa, tomada como unidade, para medir a massa de outros corpos quaisquer por defeitos ou por excesso.

3. O *quilograma*, como unidade de massa do sistema métrico decimal — aproximadamente igual à *massa de um litro de água* (destilada, à temperatura de 4°C). Múltiplos e submúltiplos usuais do quilograma.

Referência a outros tipos de balança de equilíbrio: a balança decimal, a balança romana, as balanças de mostrador actualmente usadas no comércio, etc. Alusão às balanças de alta precisão para fins científicos; as microbalanças e micrograma.

4. O quilograma como unidade de peso (o mais geralmente de força) em determinadas condições. Razão pela qual, nos assuntos da vida corrente, se diz «peso» em vez de «massa» e «pesar» em vez de «medir a massa»; a necessidade de distinguir os dois conceitos em assuntos científicos.

5. Uma frase corrente que é preciso rectificar com a máxima insistência: «O quilo é igual ao litro» (chegando a escrever-se: 1 kg=1 l). Outros abusos de linguagem: «O chumbo é mais pesado que a madeira», «A madeira é mais leve que a água (por isso flutua)», «O ar quente é mais leve que o ar frio (por isso é que sobem os balões)», etc. Em vez de «mais pesado» e «mais leve», deve dizer-se nestes casos: «mais denso» e «menos denso» (donde o substantivo abstracto «densidade»). A noção de densidade de um sólido ou de um líquido em relação à água (destilada a 4°C); cálculo da massa a partir do volume e da densidade; referência ao densímetro. (O abuso de linguagem de «mais pesado» e «mais leve», em vez de «mais denso» e «menos denso» pode admitir-se, desde que esteja subentendido que se trata de comparar pesos de volumes iguais de duas substâncias.)

6. Relacionação do peso com a área; o conceito de *pressão*, com peso (ou força) por unidade de área. Referência à pressão atmosférica e ao barómetro (em coordenação com a disciplina de Ciências da Natureza).

Ilustração 77: Programa de Matemática para o Ciclo Preparatório, 1968, Portugal

VII) Proporcionalidade

1. Noção geral intuitiva de *grandeza*, a partir dos exemplos anteriores. Revisão dos conceitos de «correspondência unívoca» e de «correspondência biunívoca», introduzidos no 1.º ano a propósito da noção de cardinal de um conjunto. Novos exemplos variados, terminando com exemplos de correspondências entre conjuntos de grandezas. Por exemplo: a cada corpo corresponde um determinado volume (correspondência unívoca); ao mesmo corpo corresponde uma determinada massa (correspondência unívoca); assim, ao volume de cada corpo corresponde a massa desse corpo mas esta correspondência pode não ser biunívoca nem sequer unívoca. No entanto, se os corpos considerados são todos feitos da mesma substância (por exemplo, de cobre) a correspondência *volume massa* é aproximadamente unívoca e até biunívoca, sendo expressa pela fórmula:

$$m=8{,}9\times v,$$

em que 8,9 é a densidade do cobre (que, neste caso, se confunde pràticamente com a massa específica: 8,9 kg/dm³).

O mesmo exemplo ou qualquer outro análogo (os exemplos com preços são sempre eficazes, para iniciação) pode servir para construir uma tabela, indicando numa linha diversos valores do volume e, noutra linha, por baixo, os valores correspondentes da massa; o quociente ou razão m/v de cada valor de m pelo valor correspondente de v é evidentemente *constante*, igual a 8,9: diz-se então que a massa do corpo é *proporcional* ao seu volume e que 8,9 é a *constante de proporcionalidade* (ou o *coeficiente de proporcionalidade*).

Procedimento inverso: é dada uma tabela numérica e procura-se ver se há proporcionalidade. Método gráfico: constrói-se um gráfico cartesiano (no 1.º quadrante); se houver proporcionalidade os pontos devem estar, pelo menos aproximadamente, sobre uma recta que passe pela origem.

Exemplos variados da vida corrente, de geometria e da física (exemplos do movimento uniforme, da pressão, etc.). Problemas de proporcionalidade, resolvidos sistemàticamente pelo método da *redução à unidade*, que consiste afinal em determinar a constante de proporcionalidade; o cálculo desta pode ser *efectuado* ou *apenas indicado*, conforme convier mais; por exemplo, admitindo-se que certa variável y é proporcional a outra variável x e sendo a constante proporcionalidade o quociente de um valor a de y pelo valor correspondente b de x, poderá usar-se qualquer das fórmulas:

$$y=\frac{a}{b}\times x, \qquad y=\frac{a\times x}{b}$$

visto que as duas são equivalentes: a primeira fórmula será de preferir (uma vez achado o valor de a e b em decimais, com aproximação suficiente) nos casos em que for necessário calcular vários valores de y correspondentes a valores de x dados.

2. Exemplos de correspondências biunívocas (entre grandezas) que não são proporcionalidades: a área de um círculo não é proporcional ao raio, o volume de um cubo não é proporcional ao comprimento da aresta do cubo, etc. Observar que, no entanto, as próprias fórmulas $A=\pi\times r^2$, $V=a^3$ mostram que A é proporcional ao quadrado de r (constante de proporcionalidade: π) e que V é proporcional a a^3 (constante da proporcionalidade: 1). Referência eventual ao movimento da queda de um grave.

Primeira ideia de função como correspondência unívoca, especialmente entre conjuntos de grandezas. Gráficos cartesianos.

3. Proporcionalidade inversa; escolha de um primeiro exemplo simples e rigoroso, tal como o seguinte: considerando o conjunto de todos os rectângulos cuja área é, por exemplo, 4 cm², tem-se uma correspondência biunívoca entre os comprimentos dos rectângupos e as respectivas larguras, de tal modo que o produto dos valores correspondentes é constante. A construção de uma tabela e de um gráfico ajudará a ter uma ideia mais precisa deste novo tipo de função (proporcionalidade inversa).

As expressões «inversamente proporcional a», «variar na razão inversa de» e «proporcionalidade inversa» tornam conveniente que, em certos casos, para evitar confusões, se diga «directamente proporcional», «variar na razão directa de» e «proporcionalidade directa», onde antes se dizia, respectivamente, «proporcional a», «variar proporcionalmente a» e «proporcionalidade» sem mais complementos.

Os exemplos da física serão de apresentar (com as devidas cautelas), atendendo a que é neste campo que a linguagem da proporcionalidade terá de vir a ser usada com maior frequência: variação do volume de um gás com a pressão, princípio das alavancas, etc. A resolução de problemas de proporcionalidade inversa assentará sempre na determinação da constante de proporcionalidade, bem como na resolução de equações de tipo já conhecido (como no caso da proporcionalidade directa). Um tipo de problema que poderá interessar um bom aluno na época actual é o seguinte:

«Sabe-se que o peso de um corpo é inversamente proporcional ao quadrado da sua distância ao centro da Terra e que o raio da Terra mede cerca de 6400 km. Conhecido o peso de um astronauta à superfície da Terra (por exemplo, 70 kg), calcular o seu peso a uma dada altitude (por exemplo, 2000 km), quando inicia o regresso à Terra (supondo que é nula a força centrífuga).»

Poderá também ser atraente o exemplo da viagem imaginada por Júlio Verne no livro *Da Terra à Lua*.

Proporcionalidade composta. É ainda a geometria que deverá fornecer os primeiros exemplos, ao mesmo tempo simples e rigorosos, de proporcionalidade composta: a *área* de um triângulo é directamente proporcional à *base* e à *altura* do triângulo (constante de proporcionalidade: 1/2); o *volume* de um cilindro é directamente proporcional ao *quadrado do raio da base* e à *altura* do cilindro (constante de proporcionalidade: π), etc. Trata-se agora de *funções de duas variáveis, de três variáveis* (caso dos juros simples), etc.

Como fecho, poderá fazer-se referência à *lei da gravitação universal* e à sua tradução simbólica, terminando com uma notícia histórica sobre Newton e sobre a repercussão das suas descobertas nas investigações espaciais.

Ilustração 78: Programa de Matemática para o Ciclo Preparatório, 1968, Portugal