André Nuno Carvalho Souto

Levantamentos ao espaço tangente de medidas em variedades

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Dezembro de 2005

Aprovada.
Maria Pires de Carvalho

André Nuno Carvalho Souto

Levantamentos ao espaço tangente de medidas em variedades

Tése submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Dezembro de 2005

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho aborda o estudo dos sistemas dinâmicos discretos. Por sistema dinâmico discreto entende-se um par (X, T) em que X é um conjunto com alguma estrutura adicional e T é uma aplicação de X em X que, de certa forma, preserva a estrutura adicional do espaço X. Quando X é um espaço topológico (por exemplo um espaço métrico) então é normal supor que T é contínua para garantir que a imagem recíproca $T^{-1}(A)$, de um aberto A de X ainda é um aberto. É neste sentido, de a imagem recíproca de um aberto ser um aberto, que dizemos que T preserva a estrutura topológica. No caso de em X estar definida uma medida μ, T preservar a medida μ vai significar que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Para todo o $n \in \mathbb{N}$ temos definido em X, $T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ vezes}}$. Para $x \in X$ temos, então, definida a sucessão $x_n = T^n(x)$ para $n \geq 0$ que é designada pela órbita do ponto x. Muitas vezes referimo-nos à aplicação T como a dinâmica em X e a X como o espaço de fase ou espaço dos "pontos" ou ainda dos estados iniciais. É também frequente designar n como o tempo para a dinâmica determinada por T.

O estudo dos sistemas dinâmicos discretos incide na análise global de órbitas e, em particular, das suas propriedades assimptóticas.

Quando X está munido de uma medida de probabilidade μ (isto é, $\mu(X) = 1$) e T preservar μ, dizemos que μ é ergódica (em relação a T) quando T "mistura" os pontos do espaço de fases, no sentido que, se A é T-invariante, isto é $T^{-1}(A) = A$, então, sob o ponto de vista da medida, A é trivial, ou seja, $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. Muitas vezes referimo-nos a esta situação dizendo que a dinâmica T é ergódica.

No contexto de uma dinâmica ergódica um dos resultados mais importante, senão o mais importante, é o conhecido teorema de Birkhoff (teorema 4.1.3 e a proposição 4.1.4) que nos garante que para toda a função $\phi \in L^1(\mu)$, as "médias temporais" convergem para as "médias espaciais" para μ quase todo o ponto (abreviadamente μ-qtp) $x \in X$. Mais concretamente para toda a função $\phi \in L^1(\mu)$ existe um conjunto $Y_\phi \subset X$ tal que $\mu(Y_\phi) = 1$ e para qualquer $x \in Y_\phi$ temos que:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k(x)) = \int_X \phi d\mu$$

Quando nos espaços de fase ainda existe uma estrutura de espaço métrico compatível com a estrutura de espaço de medida - no sentido que a medida está definida nos borelianos determinados pela métrica definida em X, (ver secção 3.1) - a proposição 4.1.6 garante a existência de um conjunto Y tal que $\mu(Y) = 1$ e para toda a função $\phi \in L^1(\mu)$ e para todo o $x \in Y$ temos que:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi\left(T^k(x)\right) = \int_X \phi d\mu \tag{1.1}$$

Atendendo a que para um boreliano B temos que:

$$\mu(B) = \int_X \chi_B d\mu$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_B\left(T^k(x)\right) = \frac{1}{n}\sharp\Big\{0 \le k \le n-1 : T^k(x) \in B\Big\}$$

segue então de 1.1 que:

$$\mu(B) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sharp\Big\{0 \le k \le n-1 : T^k(x) \in B\Big\}$$

Aos pontos de Y chamamos pontos típicos (para a medida μ).

Fixado um ponto $x_0 \in Y$, a igualdade anterior diz-nos que $\mu = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}_n$ onde:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{m}_n : & \mathcal{B} & \rightarrow & [0, +\infty[\\ & A & \rightarrow & \dfrac{\sharp\{0 \le k \le n-1 : T^k(x) \in A\}}{n} \end{array}$$

O estudo de propriedades assimptóticas, tais como a igualdade $\mu = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{m}_n$ referida anteriormente pode ser severamente simplificada recorrendo a uma extensão do conjunto dos tempos $\mathbb{N}$ que inclua tempos "infinitos". Esta extensão é garantida recorrendo, ao que hoje se costuma designar por métodos de análise não standard.

A análise não standard foi, pela primeira vez, apresentada e estudada pelo matemático alemão Abraham Robinson que, utilizando formalismo lógico, construiu um corpo $^*\mathbb{R}$ que além de conter $\mathbb{R}$, contém novas entidades a que chamou "infinitesimais" e "infinitamente grandes". Esta teoria, na sua essência, consiste em acrescentar a uma estrutura matemática elementos (não standard) que simplifiquem os conceitos standard como por exemplo o conceito de limite, de derivada, etc...

Com a metodologia da análise não standard podemos estender $\mathbb{N}$ a um conjunto ${}^*\mathbb{N}$, designado por conjunto dos hiper naturais, contendo elementos infinitos com as mesmas propriedades lógicas dos elementos de $\mathbb{N}$. Podemos assim, estender as órbitas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a "hiper órbitas" $(x_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$. De modo similar podemos considerar ${}^*\mathbb{R}$, chamado de conjunto dos hiper-reais, a extensão do corpo dos reais, de tal modo que além de entidades "infinitas", contém também entidades "infinitesimais" ε que satisfazem, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| < c$. Com estas extensões, podemos então dizer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para L ($y_n \to L$) sse $d(y_N, L)$ é um infinitesimal para $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, (ver proposição 2.6.6). Também podemos dizer que α é um ponto de acumulação de uma sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existir um $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que $d(y_n, \alpha)$ é um infinitesimal. A extensão ${}^*\mathbb{N}$ permite também introduzir o conceito de conjunto hiper-finito. Essencialmente, é um conjunto com as mesmas propriedades formais dos conjuntos finitos mas cujo cardinal é um inteiro hiper finito $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Com os conjuntos hiper finitos podemos então definir a função $\mathbb{m}_N$ para $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{m}_N : \ {}^*\mathcal{B} & \to & {}^*[0, +\infty[\\ A & \to & \dfrac{\sharp\{0 \le k \le N-1 : T^k(x) \in A\}}{N} \end{array}$$

Esta função não é uma medida, uma vez que toma valores em ${}^*[0, +\infty[$ que é uma extensão de $[0, +\infty[$. Mas considerando a função $L(\mathbb{m}_N) = st \circ \mathbb{m}_N$ em que $st(a)$ é o número real, que é único pela proposição 2.3.3, e que é infinitesimal com a, segue que esta é uma medida e além disso, como é provado na secção 4.2, $\mu(A) = L(\mathbb{m}_N)({}^*A)$, onde ${}^*A$ é a extensão não standard do boreliano A. Na construção desta medida, que designamos por medida de contagem, recorremos à teoria desenvolvida por Peter Loeb no artigo [17] de 1975 e que expomos no capítulo 3, onde se mostra como obter medidas standard à custa de medidas não standard definidas em espaços, também eles não standard, como é o caso de $\mathbb{m}_N$.

Pelo o exposto até agora podemos caracterizar uma medida de probabilidade ergódica para uma dinâmica T definida num espaço métrico X através de uma medida de contagem $\mathbb{m}_N$ em que, de facto, $\mu(A)$ conta o tempo médio que um ponto típico x_0 permanece na extensão ${}^*A$. Com isto queremos significar que, num universo não standard, escolhendo $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$

$$\mu(A) = st\left(\frac{\sharp\left\{0 \le k \le N-1 : T^k(X) \in {}^*A\right\}}{N}\right).$$

Esta caracterização de medidas ergódicas vai-nos então permitir, quando X é uma variedade riemanniana $\mathbf{M}$ compacta e de dimensão finita e a dinâmica T é dada por um difeomorfismo $f : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ de classe C^1, definir o que chamamos de levantamentos da medida μ ao espaço projectivo tangente. Para isso, sendo $\mathbf{TM}$ o fibrado tangente, consideramos $\mathbf{S}^1\mathbf{M} = \big\{(x, v) \in \mathbf{TM} : ||v|| = 1\big\}$ e a relação de equivalência $(x, v) \sim (x, -v)$

e definimos o espaço quociente $\mathbf{PM} = \mathbf{S}^1\mathbf{M}/_{(x,v)\sim(x,-v)}$ a que chamamos espaço projectivo tangente. Designando por $[x,v]$ a classe de equivalência de $(x,v) \in \mathbf{TM}$ temos então uma aplicação $\mathbf{P}f$ induzida pela derivada de f através de:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{P}f: & \mathbf{PM} & \rightarrow & \mathbf{PM} \\ & (x,v) & \rightarrow & \left[f(x), \dfrac{D_x f(v)}{||D_x f(v)||}\right] \end{array}$$

Esta aplicação $\mathbf{P}f$ resulta ser um homeomorfismo. Através de uma medida de contagem, para cada $v_0 \in T_{x_0}\mathbf{M}$, onde x_0 é um ponto típico para μ, podemos construir medidas $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ invariantes por $\mathbf{P}f$ e tais que $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(\pi^{-1}(A)) = \mu(A)$, sendo $\pi : \mathbf{PM} \rightarrow \mathbf{M}$ dada por $\pi[x,v] = x$ e A é um boreliano de $\mathbf{M}$. Esquematicamente temos a comutação do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{PM}, \hat{\mu}_{x_0,v_0}) & \xrightarrow{\mathbf{P}f} & (\mathbf{PM}, \hat{\mu}_{x_0,v_0}) \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ (\mathbf{M}, \mu) & \xrightarrow{f} & (\mathbf{M}, \mu) \end{array}$$

Estas medidas resultam ser ergódicas para a aplicação $\mathbf{P}f$, conforme comprova o teorema 5.2.5. Assim, aplicando o teorema de Birkhoff para $T = \mathbf{P}f$ e $\phi = \log ||Df||$ concluímos na secção 5.4 que $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x,v)||$ é igual a $\int_{\mathbf{PM}} \phi d\hat{\mu}_{x,v}$ para μ-qtp $x \in \mathbf{M}$ e para todo o $v \in T_x\mathbf{M}$. O limite anterior é designado, em sistemas dinâmicos, por expoente de Lyapunov e permite, em grande parte dos casos, uma caracterização assimptótica das órbitas da dinâmica em causa. Esta prova de existência de expoentes de Lyapunov através do teorema ergódico de Birkhoff, assentando na construção de medidas no espaço projectivo tangente e usando métodos de análise não standard foi o objectivo principal deste trabalho.

Capítulo 2

Fundamentos da Análise não standard

Neste capítulo pretende-se que o leitor se familiarize com os conceitos de análise não standard cruciais para o desenrolar deste trabalho. Começamos por construir o conjunto dos hiper-reais fornecendo uma motivação e um roteiro para a construção do universo não standard associado a outras entidades de maior complexidade.

2.1 Construção dos Hiper-reais

Todo o trabalho que aqui se vai desenvolver tem como suporte básico, conceitos de análise não standard. Vamos aqui apresentar as ideias subjacentes a esta área da matemática, uma vez que os seus modelos não são frequentemente utilizados. A análise não standard parte de uma construção lógica cuja consistência deriva da consistência do modelo de Zermelo Frankel. Começamos por construir um novo corpo ${}^*\mathbb{R}$[1], que seja um alargamento do corpo $\mathbb{R}$ e, possuindo muitas das propriedades deste. Novas entidades serão criadas: os infinitesimais e os infinitamente grandes. Estes novos elementos dão-nos a possibilidade de interpretar de uma maneira muito clara o conceito de limite. A ideia intuitiva é a seguinte:

- Um número é *infinitesimal* se em valor absuluto for menor que todos os números reais positivos, isto é, um número que, como o próprio nome indica, está infinitamente perto de zero.
- Um número é *infinitamente grande positivo* se, de facto, for realmente grande, ou seja, se for maior que qualquer número real positivo.

É imperativo descrever com todo o rigor estes novos elementos. Sejam $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências de números reais. Dizemos que s é equivalente a r se as sequências

[1] omitimos por agora as operações

coincidem num número "grande" de índices, isto é, se o conjunto $\{i \in \mathbb{N} : s_i = r_i\}$ é "grande". Para formalizar o conceito de "grande" introduzimos a noção de filtro:

Definição 2.1.1. *Seja I um conjunto não vazio. Um filtro sobre I é uma colecção não vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de I que satisfazem os seguintes axiomas:*

1. *Se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cap B \in \mathcal{F}$;*
2. *Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B \subset I$ então $B \in \mathcal{F}$.*

O filtro $\mathcal{F}$ diz-se próprio se $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Um filtro próprio que satisfaz o seguinte axioma diz-se um ultrafiltro:

3. *Para cada $A \subset I$, um e um só dos conjuntos A ou $I - A$ pertence a $\mathcal{F}$.*

Um filtro é, de certa forma, uma rede que separa os conjuntos de acordo com os seus elementos. Um qualquer subconjunto é grande, relativamente ao filtro $\mathcal{F}$ se é um seu elemento. É claro que um filtro $\mathcal{F}$ que contenha todos os subconjuntos é desinteressante, uma vez que, para este filtro, todos os conjuntos são grandes e portanto este não "filtra" qualquer tipo de informação.

Podemos associar a cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ uma medida finitamente aditiva nas partes de I, isto é, uma função $\mathfrak{u}$ tal que $\mathfrak{u}(\emptyset) = 0$ e se A, B são dois conjuntos disjuntos então $\mathfrak{u}(A \cup B) = \mathfrak{u}(A) + \mathfrak{u}(B)$. Essa função é:

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{u}: & \mathcal{P}(I) & \to & [0, +\infty[\\ & A & \to & \begin{cases} 1 & \text{se } A \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } A \notin \mathcal{U} \end{cases} \end{array}$$

Note-se que, se $A \in \mathcal{U}$ e B é disjunto de A então $A \subset B^c$ e portanto, pelo primeiro axioma de filtro, temos que $B^c \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ é um ultafiltro então concluímos que $B \notin \mathcal{U}$. Assim, $\mathfrak{u}(A \cup B) = 1$ e $\mathfrak{u}(A) + \mathfrak{u}(B) = 1 + 0 = 1$. Por outro lado, se $A, B \notin \mathcal{U}$, então $A^c, B^c \in \mathcal{U}$ e novamente pelo primeiro axioma de filtro $A^c \cap B^c \in \mathcal{U}$, ou seja $(A \cup B)^c \in \mathcal{U}$. Daqui resulta que $A \cup B \notin \mathcal{U}$. Logo $\mathfrak{u}(A \cup B) = 0$. Em qualquer dos casos, concluímos que $\mathfrak{u}(A \cup B) = \mathfrak{u}(A) + \mathfrak{u}(B)$ como era exigido pela definição de medida.

O ultrafiltro que aqui vamos considerar é o menor ultrafiltro que contém a família dos subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$, ou seja, a família dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ cujo complementar é um conjunto finito. A família dos conjuntos cofinitos é apenas um filtro, mas pelo lema de Zorn um qualquer filtro não principal, isto é, que não contém conjuntos finitos, pode ser extendido a um ultrafiltro principal. Este resultado pode ser encontrado em [9] e em [22].

Seja $\mathfrak{u}$ a medida em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ que caracteriza o ultrafiltro. Considerar um ultrafiltro não principal deve-se ao facto de, com este, a caracterização do conceito de "grande", na relação descrita atrás por:

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \equiv (r_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{sse} \quad \mathfrak{u}(\{i \in \mathbb{N} : s_i = r_i\}) = 1 \tag{2.1}$$

ou seja, sse $\{i \in \mathbb{N} : s_i = r_i\} \in \mathcal{U}$, é uma relação de equivalência que produz um conjunto de classes de equivalência que não é isomorfo ao corpo $\mathbb{R}$:

Sejam $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. A reflexividade é óbvia pois sendo $\mathcal{U}$ um ultrafiltro, $\mathbb{u}(\emptyset) = 0$ e portanto $\mathbb{u}(\mathbb{N}) = 1$;

2. A simetria resulta do facto de a relação de igualdade ser também ela simétrica.

3. Se $s \equiv r$ e $r \equiv t$ então $\mathbb{u}(\{i \in \mathbb{N} : s_i = r_i\}) = 1$ e $\mathbb{u}(\{i \in \mathbb{N} : r_i = t_i\}) = 1$. Assim, $\mathbb{u}(\{i \in \mathbb{N} : s_i = r_i = t_i\}) = 1$. Como $\{i \in \mathbb{N} : s_i = r_i = t_i\} \subset \{i \in \mathbb{N} : s_i = t_i\}$, então $\mathbb{u}(\{i \in \mathbb{N} : s_i = t_i\}) = 1$, ou seja, $s \equiv t$.

Notação 2.1.2. *Denotamos a classe de equivalência de* $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *por* $[s_n]$.

No conjunto ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\equiv$ definam-se as seguintes operações usuais:

- $[s_n]{}^*{+}[r_n] = [s_n + r_n]$;
- $[s_n]{}^*{\times}[r_n] = [s_n \times r_n]$;

Teorema 2.1.3. *Com as operações anteriores,* $({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\times)$ *é um corpo, em que* $0 = [0]$ *é o elemento neutro de* ${}^*+$ *e* $1 = [1]$ *é o elemento* 1 *de* ${}^*\times$.

Demonstração. Em primeiro lugar é necessário verificar que as operações de soma e produto estão bem definidas. Para isso, basta verificar que se $[r_n] \equiv [s_n]$ e $[r'_n] \equiv [s'_n]$ então $[r_n]{}^*{+}[r'_n] \equiv [s_n]{}^*{+}[s'_n]$ e $[r_n]{}^*{\times}[r'_n] \equiv [s_n] \times [s'_n]$. Como $[r_n] \equiv [s_n]$ e $[r'_n] \equiv [s'_n]$ então definindo os conjuntos, $R = \{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\}$ e $R' = \{i \in \mathbb{N} : r'_i = s'_i\}$, temos que $\mathbb{u}(R) = 1$ e $\mathbb{u}(R') = 1$. Logo $\mathbb{u}(R \cap R') = 1$. Mas $R \cap R' \subseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i + r'_i = s_i + s'_i\}$ donde resulta que $\mathbb{u}(\{i \in \mathbb{N} : r_i + r'_i = s_i + s'_i\}) = 1$, ou seja, $[r_n]{}^*{+}[r'_n] \equiv [s_n]{}^*{+}[s'_n]$. Do mesmo modo, $R \cap R' \subseteq \{i \in \mathbb{N} : r_i \times r'_i = s_i \times s'_i\}$ e portanto concluímos que $\mathbb{u}(\{i \in \mathbb{N} : r_i \times r'_i = s_i \times s'_i\}) = 1$, ou seja $[r_n]{}^*{\times}[r'_n] \equiv [s_n] \times [s'_n]$.

Todas as restantes condições para que $({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\times)$ seja um corpo são verificadas de modo análogo. É de salientar que as propriedades de corpo para $({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\times)$ resultam directamente do facto de $\mathbb{R}$ ser corpo para as operações usuais e do facto de estas se verificarem para conjuntos de medida $\mathbb{u}$-total. $\square$

Podemos ainda definir em ${}^*\mathbb{R}$ uma relação de ordem de maneira óbvia. Dizemos que $[r_n]{}^* {<} [s_n]$ sse $\mathbb{u}(\{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\}) = 1$. Desta forma $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\times, {}^*< \rangle$ é um corpo ordenado.

Definição 2.1.4. *Aos elementos de* ${}^*\mathbb{R}$ *damos o nome de hiper-reais.*

Podemos ver os elementos $r \in \mathbb{R}$ como elementos de $^*\mathbb{R}$ através da classe de equivalência da sequência constante igual a r, ou seja, $^*r = [r]$. Esta observação justifica o facto de se dizer que $^*\mathbb{R}$ é extensão de $\mathbb{R}$. Pela maneira como foi feita a identificação e pela forma como definimos as operações em $^*\mathbb{R}$ temos que:

1. $^*r\,^*{+}\,^*s = {}^*(r+s)$;

2. $^*r\,^*{\times}\,^*s = {}^*(r \times s)$;

3. $^*r = {}^*s$ sse $r = s$;

4. $^*r \;^*{<}\, ^*s$ sse $r < s$;

Nota 2.1.5. *Por simplificação de notação, iremos designar* $^*+$, $^*\times$ *e* $^*<$ *respectivamente por* $+$, $\times$ *e* $<$.

Provada a existência de hiper-reais que não são classe de equivalência de sucessões reais constantes prova-se automaticamente que $^*\mathbb{R}$ é uma extensão própria de $\mathbb{R}$. A existência de novas entidades em $^*\mathbb{R}$ é confirmada na próxima secção.

2.2 Os infinitesimais e os infinitamente grandes

Depois da construção formal do novo corpo $^*\mathbb{R}$ estamos em condições de dar uma definição matemática de *infinitesimais* e de *infinitamente grandes*.

Consideremos $\varepsilon = \left[\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]$. Como para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} > 0$ então, por definição temos que $\varepsilon > 0$ [1]. Por outro lado, dado $r \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < r$, para todo o $m > n$, donde resulta que o conjunto $\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < r\right\}$ é cofinito e portanto é um conjunto grande, isto é, de medida $\mathfrak{u}$ total. Concluímos assim que $\varepsilon < [r]$, com $r \in \mathbb{R}^+$. Enquanto classe de equivalência de sucessão de números reias, ε é um número hiper-real positivo e como $\varepsilon < [r]$ qualquer que seja $r \in \mathbb{R}^+$, tem-se que ε não é classe de equivalência de uma sucessão constante, ou seja, $\varepsilon \notin \mathbb{R}$. Aos números que satisfazem as mesmas condições que ε dá-se o nome de infinitesimais. Acabamos de provar que estes números são entidades de $^*\mathbb{R}$ que não pertencem a $\mathbb{R}$, ou seja, $^*\mathbb{R}$ é, como havíamos afirmado, uma extensão própria de $\mathbb{R}$.

Consideremos agora $\omega = [(n)_{n\in\mathbb{N}}]$. O conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n < r\}$ é cofinito qualquer que seja $r \in \mathbb{R}^+$ e portanto é um elemento de $\mathcal{U}$, ou seja, é um conjunto de medida $\mathfrak{u}$ total,

[1] Note-se que isso significa que $^*\varepsilon > 0$

o que prova que $\omega > [r]$. Novamente, enquanto classe de equivalência de uma sucessão de números reais ω é um hiper-real, maior que todos os números reais. Aos números que satisfaçam a mesma condição que ω dá-se o nome de infinitamente grandes ou ilimitados.

Note-se que $\omega \times \varepsilon = [1]$ e portanto ω é o inverso multiplicativo de ε em $^*\mathbb{R}$. De forma mais geral, o inverso multiplicativo de um infinitesimal não nulo é sempre um infinitamente grande e vice-versa.

Definição 2.2.1. *Um número hiper-real $x \in {}^*\mathbb{R}$ diz-se:*

1. *Finito ou limitado sse $|x| < r$ para algum $r \in \mathbb{R}^+$;*
2. *Infinito ou ilimitado sse $|x| > r$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$;*
3. *Infinitesimal sse $|x| < r$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$;*

Nota 2.2.2. *Segundo a caracterização dos hiper-reais anterior, o único número real que é infinitesimal é o* 0.

Proposição 2.2.3 (Propriedades aritméticas dos hiper-reais). *Consideremos ε, δ infinitesimais e H, K ilimitados, todos elementos de $^*\mathbb{R}^+$. Então temos que:*

- *Soma*
  1. *$\varepsilon + \delta$ é infinitesimal;*
  2. *$\varepsilon + H$ é ilimitado;*
  3. *$K + H$ é ilimitado;*
- *Produto*
  1. *$\varepsilon \times \delta$ é infinitesimal;*
  2. *$K \times H$ é ilimitado;*

Demonstração. A prova desta proposição usa apenas as propriedades de ultrafiltro.

- Soma
  1. Seja $r \in \mathbb{R}^+$. Como ε e δ são infinitesimais então $\mathbb{u}\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n < \frac{r}{2}\right\}\right) = 1$ e $\mathbb{u}\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \delta_n < \frac{r}{2}\right\}\right) = 1$. Portanto a sua intersecção é ainda um conjunto de medida $\mathbb{u}$-total. Assim, temos que $\mathbb{u}(\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n + \delta_n < r\}) = 1$. Como $r \in \mathbb{R}^+$ é qualquer então $\varepsilon + \delta$ é infinitesimal;
  2. Como $\varepsilon > 0$ então $H + \varepsilon > H$. Logo $H + \varepsilon$ é ilimitado;
  3. Como $H > 0$ então $K + H > H$. Logo $K + H$ é também ilimitado;

- Produto

1. Seja r um número real positivo arbitrário. Como ε e δ são infinitesimais então $\mathbb{u}(\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n < \sqrt{r}\}) = 1$ e $\mathbb{u}(\{n \in \mathbb{N} : \delta_n < \sqrt{r}\}) = 1$. Logo, a intersecção dos dois conjuntos ainda tem medida $\mathbb{u}$-total. Assim, $\mathbb{u}(\{n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n \times \delta_n < r\}) = 1$. Como $r \in \mathbb{R}^+$ é qualquer concluímos que $\varepsilon \times \delta$ é infinitesimal;

2. Como H e K são ilimitados então, em particular, $K > 1$. Logo, $H \times K > H$ e portanto $H \times K$ é ilimitado.

□

Podemos aplicar as ideias anteriores para obter extensões "não standard" de outro tipo de entidades matemáticas, nomeadamente conjuntos, relações e, em particular, funções.

Definição 2.2.4. *Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é estendido a um conjunto $^*A$ de $^*\mathbb{R}$ definido seguinte modo:*

$$[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in {}^*A \text{ sse } \mathbb{u}\big(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\}\big) = 1.$$

Exemplo 2.2.5. *$^*\mathbb{N}$ é o conjunto formado por todas as classes de equivalência de sucessões de valores em $\mathbb{N}$, ou seja, $^*\mathbb{N} = \big\{[(n_i)_{i\in\mathbb{N}}] : n_i \in \mathbb{N}\big\}$.*

Quanto a funções, estendemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a uma função $^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ definida através da expressão:

$${}^*f\left(\big[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}\big]\right) = \Big[\big(f(r_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big].$$

De facto, dado $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ temos que $f \circ r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e além disso, se $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni r \equiv s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ então isso significa que $\mathbb{u}(\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} = 1$ e portanto, aplicando f, $\mathbb{u}(\{i \in \mathbb{N} : f(r_i) = f(s_i)\}) = 1$, ou seja, ${}^*f([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]) \equiv {}^*f([(s_n)_{n\in\mathbb{N}}])$. De forma mais geral, dada uma função $f : A \to \mathbb{R}$ onde A é subconjunto de $\mathbb{R}$, define-se ${}^*f : {}^*A \to {}^*\mathbb{R}$, a extensão de f, pela expressão ${}^*f\left(\big[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}\big]\right) = \Big[\big(f(r_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big]$ para $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in {}^*A$.

Para estender relações procede-se da seguinte forma. Uma qualquer relação k-ária P definida num qualquer conjunto A é um subconjunto de A^k. Assim, estendemos P a ${}^*P$ como a extensão do subconjunto de A^k que define P. Usando a notação $P(a_1, ..., a_k)$ para expressar que $(a_1, ..., a_k)$ verifica a relação P, a extensão de P é definida por ${}^*P([r^1], ..., [r^k])$ sse $\mathbb{u}\left(\{n \in \mathbb{N} : P(r^1_n, ..., r^k_n)\}\right) = 1$. Do facto de identificarmos ${}^*r$ com r sempre que $r \in \mathbb{R}$, resulta que, se $r^1, ..., r^k \in \mathbb{R}$ então $P(r^1, ..., r^k)$ sse ${}^*P({}^*r^1, ..., {}^*r^k)$ o que, mais uma vez, justifica o facto de ${}^*P$ ser uma extensão de P.

2.3 Halos e Sombras

Definição 2.3.1. *Dizemos que um hiper-real b está infinitamente perto de um hiper-real c e escrevemos $b \approx c$, sse $|b - c|$ é infinitesimal, ou seja, sse $|b - c| < \delta$, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.*

A condição de infinitamente perto define em $^*\mathbb{R}$ uma relação de equivalência, pois:

- *Reflexividade*: $b \approx b$ uma vez que 0 é infinitesimal.
- *Simetria*: Se $b \approx c$ então $|b - c|$ é infinitesimal e portanto, por simetria de $|\cdot|$ vem que $|c - b|$ é também infinitesimal donde resulta que $c \approx b$;
- *Transitividade*: Se $b \approx c$ e $c \approx d$ então $|b - c|$ e $|c - d|$ são infinitesimais e como a soma de infinitesimais é infinitesimal concluímos que $|b - d| \leq |b - c| + |c - d|$ é também infinitesimal. Logo $b \approx d$;

Definição 2.3.2. *Define-se halo de um hiper-real b como sendo a classe de equivalência da relação anterior, ou seja, $hal(b) = \{c \in {}^*\mathbb{R} : b \approx c\}$.*

Teorema 2.3.3. *Todo o hiper-real limitado b está infinitamente próximo de exactamente um número real, ao qual chamamos parte standard de b, ou sombra de b. Usualmente, denota-se esse número real por $st(b)$, $sh(b)$, $^\circ b$.*

Demonstração. Seja $b \in {}^*\mathbb{R}$ limitado e consideremos o conjunto $A = \{r \in \mathbb{R} : r < b\}$. Como b é limitado existem números reais t e s tais que $t < b < s$ e portanto A é um subconjunto não vazio e limitado superiormente em $\mathbb{R}$ por s. Logo, admite supremo. Seja c o supremo de A e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Por definição de supremo, $c + \varepsilon \notin A$ e portanto $c + \varepsilon \geq b$. Por outro lado, se $c - \varepsilon \geq b$ então $c - \varepsilon$ seria um majorante de A mais pequeno que c e portanto c não seria o supremo de A. Logo $c - \varepsilon < b$. Concluímos que $c - \varepsilon < b < c + \varepsilon$, qualquer que seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $c \approx b$.

Para provar a unicidade, suponhamos que $st(b) = c$ e que $st(b) = a$. Então $b \approx c$ e $b \approx a$. Logo, $|c - a| \leq |c - b| + |b - a| \approx 0$. Como a e c são elementos standard então $|c - a| \in \mathbb{R}$. Como o único infinitesimal real é 0, então concluímos que $|c - a| = 0$, ou seja, $a = c$. □

Nota 2.3.4.

1. *Podemos considerar st (parte standard) como uma função definida para hiper-reais limitados, ou seja:*

$$\text{dom } st = \{x \in {}^*\mathbb{R} : x \text{ é limitado}\}$$

2. *Se b é um número real então o halo de b é exactamente o conjunto dos pontos de $^*\mathbb{R}$ cuja parte standard é b, isto é, $hal(b) = st^{-1}(b)$;*

Proposição 2.3.5. *A parte standard satisfaz as seguintes propriedades aritméticas:*

1. $st(a \pm b) = st(a) \pm st(b)$;

2. $st(a \times b) = st(a) \times st(b)$;

Demonstração. Seja $a' = st(a)$ e $b' = st(b)$. Por definição de parte standard, sabemos que $a' \approx a$ e $b' \approx b$.

1. Logo $a' + b' \approx a + b$, ou seja, $a' + b' = st(a + b)$ e portanto $st(a) + st(b) = st(a + b)$.

   Um raciocínio análogo ao anterior prova a igualdade para a diferença.

2. Como $a' \approx a$ e $b' \approx b$ então, $a' \times b' \approx a \times b$, ou seja, $a' \times b' = st(a \times b)$ e portanto $st(a) \times st(b) = st(a \times b)$.

□

2.4 O Princípio da Transferência

Depois de estudadas algumas propriedades no novo corpo $^*\mathbb{R}$ é natural tentar responder ao seguinte problema:

Em que subconjuntos do novo corpo $^*\mathbb{R}$ se mantém válidas as propriedades existentes em subconjuntos de $\mathbb{R}$?

Um exemplo clássico, descrito a seguir, mostra que nem todas as propriedades válidas para subconjuntos de $\mathbb{R}$ são válidas para subconjuntos de $^*\mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.1. *Da teoria de conjuntos usual sabemos que $\mathbb{N}$ é um conjunto bem ordenado, isto é, qualquer seu subconjunto tem primeiro elemento. Queremos então saber se todo o subconjunto de $^*\mathbb{N}$ é bem ordenado. Consideremos o conjunto $^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{N}$. Se H fosse o primeiro elemento deste conjunto então teríamos que $H - 1 \in \mathbb{N}$. Logo, $H - 1 + 1 = H$ seria também um elemento de $\mathbb{N}$ e portanto não pertenceria a $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Concluímos assim que não é válido o princípio da boa ordenação em $^*\mathbb{N}$.*

Este exemplo, leva-nos à conclusão que não podemos transferir todas as propriedades existentes em subconjuntos de $\mathbb{R}$ para os seus alargados. É então importante encontrar subconjuntos especiais de $^*\mathbb{R}$ nos quais propriedades "standard" possam continuar a ser verdadeiras.

Como veremos a seguir, a classe dos subconjuntos ditos internos de $^*\mathbb{R}$, para os quais se podem transportar propriedades do mundo standard é suficientemente vasta e tem uma construção bastante intuitiva. Para formalizar a definição de conjunto interno iremos recorrer ao conceito de estrutura relacional.

Uma estrutura relacional é um sistema da forma: $\mathcal{S} = \langle S, Rel(S), Fun(S)\rangle$ onde S é um conjunto não vazio, $Rel(S)$ é um conjunto de relações finitas em S e $Fun(S)$ é uma colecção de funções finitas em S. Se $Rel(S)$ é o conjunto de todas as relações finitas em S e $Fun(S)$ é a colecção de todas as funções finitas em S então $\mathcal{S}$ diz-se uma estrutura completa sobre S.

Denotemos por $\mathcal{R}$ a estrutura completa baseada em $\mathbb{R}$ e consideremos a seguinte estrutura $^*\mathcal{R} = (^*\mathbb{R}, \{^*P : P \in Rel(\mathbb{R})\}, \{^*f : f \in Fun(\mathbb{R})\})$ definida em $^*\mathbb{R}$. Esta estrutura não é completa porque apenas estão consideradas as relações entre hiper-reais que provêm de relações existentes entre os números reais e funções que são extensões de funções reais, não sendo contempladas as relações intrínsecas entre elementos de $^*\mathbb{R}$ bem como funções que não podem ser obtidas como classes de equivalência de funções reais. Às relações e funções que podem ser obtidas através de classes de equivalência chamamos *internas* e às restantes chamamos de *externas*. Ainda não vimos que existem funções externas, mas o exemplo seguinte é um exemplo de uma função externa.

Exemplo 2.4.2. *Consideremos a função $f : {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(N) = N$. Esta função não é interna porque $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ não é um conjunto interno.*

Dada uma estrutura $\mathcal{S}$ podemos associar-lhe uma linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ cujo o alfabeto é composto por conectivos lógicos, quantificadores, parêntesis e uma colecção numerável de símbolos $x, y, z, ...$ aos quais damos o nome de variáveis.

Os termos da linguagem são construídos de forma indutiva:

1. Toda a variável é um termo. Além disso, cada elemento s de S é designado por constante e é também um termo;
2. Se f é uma função m-ária e $r_1, ..., r_m$ são termos então $f(r_1, ..., r_m)$ é um termo.

À custa dos termos de uma linguagem definimos as fórmulas:

1. Uma fórmula diz-se atómica se é do tipo $P(r_1, ..., r_m)$ onde P é uma relação m-ária e $r_1, ..., r_m$ são termos.
2. Se φ e ψ são fórmulas então também o são $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$.
3. Se φ é uma fórmula, x é uma variável e P é uma relação unária então $(\forall x \in P)\varphi$ e $(\exists x \in P)\varphi$ são também fórmulas.

Definição 2.4.3. *A ocorrência duma variável x numa fórmula φ é dita quantificada se é da forma $(\forall x \in P)\varphi$ ou $(\exists x \in P)\varphi$. Uma ocorrência não quantificada diz-se livre.*

Uma sentença é uma fórmula na qual todas as variáveis estão quantificadas.

2.4.1 A *transformação

Dada uma fórmula da linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ dos reais podemos transformá-la numa fórmula de $\mathcal{L}_{^*\mathcal{R}}$ da linguagem dos hiper-reais substituindo cada relação $P \in Rel(\mathbb{R})$ por $^*P \in Rel(^*\mathbb{R})$ e cada função $f \in Fun(\mathbb{R})$ por $^*f \in Fun(^*\mathbb{R})$. Assim podemos definir a *transformação indutivamente:

1. Se Γ é uma variável ou uma constante de $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ então $^*\Gamma$ é simplesmente Γ;

2. Se Γ é $f(\Gamma_1, ..., \Gamma_k)$ então $^*\Gamma$ é $^*f(^*\Gamma_1, ..., ^*\Gamma_k)$;

A *transformada, $^*\varphi$, de uma qualquer fórmula atómica φ é obtida do seguinte modo:

1. Substituímos cada termo Γ que ocorre em φ por $^*\Gamma$;

2. Substituímos cada símbolo relacional P de qualquer fórmula atómica que ocorre em φ por $^*P$;

3. Substituímos P em qualquer quantificador da forma $(\forall x \in P)$ ou $(\exists x \in P)$ que ocorre em φ por $^*P$;

Assim, para definir a *transformada de uma qualquer fórmula recorre-se à *transformada das fórmulas atómicas que as contêm, isto é:

- $^*(P(\Gamma_1, ..., \Gamma_k)) = {}^*P(^*\Gamma_1, ..., ^*\Gamma_k)$;
- $^*(\varphi \wedge \phi) = {}^*\varphi \wedge {}^*\phi$, $^*(\varphi \vee \phi) = {}^*\varphi \vee {}^*\phi$, $^*(\varphi \to \phi) = {}^*\varphi \to {}^*\phi$, $^*(\varphi \leftrightarrow \phi) = {}^*\varphi \leftrightarrow {}^*\phi$, $^*(\neg\varphi) = \neg{}^*\varphi$;
- $^*((\forall x \in P)\varphi) = (\forall x \in {}^*P)^*\varphi$, $^*((\exists x \in P)\varphi) = (\exists x \in {}^*P)^*\varphi$

Com os conceitos introduzidos até aqui estamos em condições de enunciar o *Princípio de transferência*:

Princípio de Transferência: Uma qualquer propriedade φ é verdadeira em $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ sse $^*\varphi$ é verdadeira em $\mathcal{L}_{^*\mathcal{R}}$.

A seguir são dados alguns exemplos que ajudam a perceber como funciona, na prática, o princípio de transferência:

Exemplo 2.4.4.

1. *Princípio da boa ordenação de* $\mathbb{N}$. *Este princípio é traduzido em linguagem de primeira ordem pela sentença:*

$$(\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))[(\exists n \in A)(\forall m \in \mathbb{N})(m \in A \to n \leq m)]$$

*A *transformada desta sentença é:*

$$(\forall A \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}))[(\exists n \in A)(\forall m \in {}^*\mathbb{N})(m \in A \to n \leq m)]$$

Mas esta traduz que qualquer conjunto de ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *é bem ordenado. Note-se que,* ${}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$ *não satisfaz a sentença anterior, como já referimos, donde se conclui que* ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *é um subconjunto próprio de* $\mathcal{P}({}^*\mathbb{N})$*. Designamos, de acordo com o princípio de transferência,* ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$*, por partes internas de* ${}^*\mathbb{N}$*.*

2. *Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$. A reunião de dois conjuntos é descrita pela sentença:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(x \in A \cup B \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B))$$

*A *transformada desta sentença é:*

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x \in {}^*(A \cup B) \leftrightarrow (x \in {}^*A \vee x \in {}^*B))$$

que significa exactamente que ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$*.*

3. *Um argumento semelhante ao anterior prova que* ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$ *e* ${}^*(A - B) = {}^*A - {}^*B$*.*

4. *As propriedades 2 e 3 são válidas para um número finito de conjuntos.*

Até aqui vimos exemplos de como transportar propriedades do mundo standard para conjuntos internos do universo não standard. Contudo, a grande força do Princípio de Transferência reside no facto de o recíproco do princípio também ser válido, ou seja, uma propriedade P válida para conjuntos internos também é válida no universo standard.

Uma aplicação importante do princípio de transferência é a caracterização intuitiva de limite e de continuidade de funções.

Como uma sucessão real $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma função real de domínio natural, isto é $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então esta estende-se a uma função interna de domínio ${}^*\mathbb{N}$, $s : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$[1], ou seja, a uma hiper-sequência $(s_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$. Aos termos definidos para os índices ilimitados damos o nome de termos alargados da sucessão.

Proposição 2.4.5. *Uma sucessão real $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $L \in \mathbb{R}$ sse $s_N \approx L$ para todo o $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. (ou seja, para todo o $N \in {}^*\mathbb{N}$ não limitado.)*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para L. Vamos mostrar que para $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, $s_N \approx L$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrário. Como $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para L então existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que: $(\forall n \in \mathbb{N})(n > m_\varepsilon \Rightarrow |s_n - L| < \varepsilon)$. Por transferência vale a sentença: $(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n > m_\varepsilon \Rightarrow |s_n - L| < \varepsilon)$. Em particular $|s_N - L| < \varepsilon$. Como $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ é qualquer então $s_N \approx L$.

[1]Como já foi referido, utiliza-se apenas s para denotar ${}^*s$

($\Leftarrow$) Fixemos $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Como para todos os ilimitados N temos que $s_N \approx L$ então a sentença:

$$(\exists N \in {}^*\mathbb{N})(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n > N \Rightarrow |s_n - L| < \varepsilon)$$

é verdadeira. Mas esta sentença é a *transformada da sentença

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow |s_n - L| < \varepsilon)$$

e portanto, pelo princípio de transferência, esta última também é verdadeira. Como $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ é arbitrário, então temos provado que a sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para L. □

Teorema 2.4.6. *Seja f uma função real de domínio real. f é contínua num ponto $c \in \mathbb{R}$ sse $f(x) \approx f(c)$ sempre que $x \approx c$, isto é, sse $f(hal(c)) \subset hal(f(c))$.*

Demonstração. A continuidade de uma função é traduzida em linguagem de primeira ordem através da sentença:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$$

($\Leftarrow$) Fixemos $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Tomemos $\delta > 0$ infinitesimal. Assim, se $|x - c| < \delta$, em particular, temos que $x \approx c$ e portanto, por hipótese, $f(x) \approx f(c)$, ou seja, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Assim, a sentença:

$$(\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+)(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon)$$

é verdadeira e portanto por transferência a seguinte sentença também é verdadeira:

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})(|x - c| < \delta \to |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Como $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ era qualquer então concluímos que f é contínua em c.

($\Rightarrow$) Suponhamos agora que f é contínua em c e que $x \approx c$. Para provarmos que $f(x) \approx f(c)$, basta provar que, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, qualquer que seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Fixemos então $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrário. Por continuidade, sabemos que existe δ_ε, tal que se $|y - c| < \delta_\varepsilon$ então $|f(y) - f(c)| < \varepsilon$. Sendo $x \approx c$ então, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, $|x - c| < \delta$. Em particular $|x - c| < \delta_\varepsilon$. Logo $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ como pretendíamos. □

2.5 Conjuntos Internos e conjuntos Externos

Um exemplo trivial de conjunto interno é aquele que se constrói como extensão de um qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ pois, por definição de extensão temos que ${}^*A = [A]$, qualquer que seja $A \subset \mathbb{R}$. Em particular, os conjuntos ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{Q}$ e ${}^*\mathbb{Z}$ são internos.

Um outro exemplo, menos trivial, de um conjunto interno é o conjunto $\{n \in {}^*\mathbb{N} : n \leq N\}$ onde $N \in {}^*\mathbb{N}$ é qualquer. A sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que lhe dá a origem é $A_m = \{n \in \mathbb{N} : n \leq N_m\}$ sendo que $N = [(N_m)_{m \in \mathbb{N}}]$.

A proposição seguinte estabelece algumas das propriedades mais importantes dos conjuntos internos.

Proposição 2.5.1. *A classe dos conjuntos internos é fechada para as operações finitas com conjuntos, ou seja, valem as seguintes igualdades*[1]*:*

1. $[A_n] \cap [B_n] = [A_n \cap B_n]$;

2. $[A_n] \cup [B_n] = [A_n \cup B_n]$;

3. $[A_n] - [B_n] = [A_n - B_n]$;

Demonstração. 1. Dizer que $[r_n] \in [A_n] \cap [B_n]$ é o mesmo que dizer que $[r_n] \in [A_n]$ e $[r_n] \in [B_n]$, o que é equivalente a dizer que $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A_n\}) = 1$ e $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in B_n\}) = 1$. Assim, sendo $\mathfrak{u}$ uma medida $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A_n \cap B_n\}) = 1$, o que significa que $[r_n] \in [A_n \cap B_n]$;

Note-se que, se $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A_n \cap B_n\}) = 1$ então $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A_n\}) = 1$ e $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in B_n\}) = 1$. Esta observação justifica a outra inclusão.

2. Dizer que $[r_n] \in [A_n] \cup [B_n]$ é o mesmo que dizer que $[r_n] \in [A_n]$ ou $[r_n] \in [B_n]$, o que é equivalente a dizer que ou $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A_n\}) = 1$ ou $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in B_n\}) = 1$. Assim, $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A_n \cup B_n\}) = 1$, o que significa que $[r_n] \in [A_n \cup B_n]$;

   Pelo facto de $\mathfrak{u}$ ser uma medida que só toma os valores 0 e 1, resulta que ou $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A_n\}) = 1$ ou $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in B_n\}) = 1$. Mais uma vez esta observação justifica a outra inclusão.

3. Dizer que $[r_n] \in [A_n] - [B_n]$ é o mesmo que dizer que $[r_n] \in [A_n]$ e $[r_n] \notin [B_n]$, o que é equivalente a dizer que $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A_n\}) = 1$ e $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in B_n\}) = 0$, ou seja, $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \notin B_n\}) = 1$. Logo, $\mathfrak{u}(\{n \in \mathbb{N} : r_n \in A_n - B_n\}) = 1$, o que significa que $[r_n] \in [A_n - B_n]$;

   A mesma observação da primeira alínea justifica novamente a outra inclusão.

□

Usando a transferência e as propriedades descritas atrás podemos dar alguns exemplos de conjuntos que não são internos:

Exemplo 2.5.2.

1. $\mathbb{N}$ *é externo. Se fosse interno então* $^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *também seria interno, o que, como vimos no exemplo 2.4.1, é falso.*

[1]Como usualmente, simplificamos a notação $[(A_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ para $[A_n]$

2. $\mathbb{R}$ *também é externo pois se fosse interno então também o seria o conjunto* $\mathbb{N} = \mathbb{R} \cap {}^*\mathbb{N}$.

3. ${}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$ *é externo. Se fosse interno então* ${}^*\mathbb{R} - ({}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *também seria interno, o que, como vimos, é falso.*

4. *Com argumentos semelhantes aos anteriores prova-se que os conjuntos* $\mathbb{Q}$, ${}^*\mathbb{Q} - \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, ${}^*\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$ *são também externos.*

5. *O conjunto dos infinitesimais também é externo, pois é um conjunto limitado superiormente em* ${}^*\mathbb{R}$ *mas não tem supremo, pois se* b *fosse o supremo de* $hal(0)$ *então* b *teria de ser positivo e inferior a todos os números reais positivos isto é* $b \approx 0$ *e portanto* $2b \approx 0$*, donde* b *não era supremo de* $hal(0)$*, pois* $2b > b$.

Em muitas situações torna-se difícil decidir se um determinado conjunto é ou não interno. Por isso enunciámos aqui um princípio muito útil que nos permite, para grande parte dos conjuntos, decidir sobre a sua internalidade.

Princípio da Definição Interna de Conjuntos: Seja $\varphi(x)$ uma fórmula da linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ onde x é a única variável que ocorre livre. Então o conjunto $\{b \in {}^*\mathbb{R} : {}^*\varphi(b)\}$ é interno.

Exemplo 2.5.3. *Sejam* a, b *dois números reais arbitrários tais que* $a < b$. *O intervalo* ${}^*(a,b) = \{x \in {}^*\mathbb{R} : a < x < b\}$ *é interno, uma vez que* ${}^*\mathbb{R}$ *é interno e* $a < x < b$ *é uma fórmula da linguagem de primeira ordem, onde a única variável que ocorre livre é* x.

2.6 As super estruturas

Para os resultados dos capítulos 3 e 4 vamos precisar de estender o universo não standard a entidades matemáticas mais complexas. Esta extensão levará à criação de novas entidades internas onde o princípio de transferência permanecerá válido.

Para obter universos não standard mais gerais precisamos de repetir a construção de ${}^*\mathbb{R}$ para qualquer entidade matemática $\mathbb{X}$ que possa ser necessária. Formaliza-se assim, a versão não standard ${}^*\mathbb{X}$ de $\mathbb{X}$ que contém elementos ideais como os infinitesimais no caso real. $\mathbb{X}$ pode, por exemplo, ser um espaço métrico, um espaço de medida, uma variedades, ou um outro qualquer objecto matemático. Em vez de construirmos para cada entidade a extensão não standard ${}^*\mathbb{X}$, é muito mais prático construir a versão não standard ${}^*\mathbb{V}$ de um universo matemático $\mathbb{V}$ que contenha todas as entidades que possam ser importantes. Uma tal construção tem a vantagem adicional que o respectivo princípio de transferência preserva as relações entre as estruturas bem como as propriedades intrínsecas. Deste modo, ${}^*\mathbb{V}$ deve conter ${}^*\mathbb{X}$, qualquer que seja $\mathbb{X} \in \mathbb{V}$. Apresentamos aqui os universos, também designados por super estruturas, de uma forma axiomática e, no apêndice A, far-se-á uma construção detalhada destas entidades.

Como já se disse, estamos interessados em generalizar o *Princípio de Transferência* de modo a que se possa aplicar a todos os objectos relevantes sob o ponto de vista matemático. Por isso é necessário que este princípio permita a transferência de sentenças onde haja quantificação de qualquer tipo de objectos. Por exemplo, tem de ser possível efectuar a transferência de sentenças em que a quantificação seja eventualmente feita sobre conjuntos, relações, funções, etc.

Seja $\mathbb{X}$ um conjunto não vazio cujos elementos são considerados átomos, isto é, se $x \in \mathbb{X}$ então $x \neq \emptyset$ e não existe b tal que $b \in x$. Do mesmo modo que definimos ${}^*\mathbb{R}$ como sendo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, definimos ${}^*\mathbb{X}$ como sendo $\mathbb{X}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Considere-se a família de conjuntos $(\mathbb{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida indutivamente por:

$$\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}$$
$$\mathbb{X}_{n+1} = \mathbb{X}_n \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_n).$$

Definição 2.6.1. *Chama-se super estrutura sobre o conjunto de átomos $\mathbb{X}$ ao conjunto definido por:*

$$\mathbb{V}(\mathbb{X}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{X}_n.$$

Nesta construção obrigamos $\mathbb{X}$ a conter o conjunto $\mathbb{R}$ e procedemos de modo a que o universo não standard $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$ tenha as seguintes propriedades:

1. Para qualquer entidade $A \in \mathbb{V}(\mathbb{X})$ deve existir uma entidade não standard ${}^*A$ em $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$ do mesmo tipo de A, isto é, se A é um conjuntos então ${}^*A$ é um conjunto, se A é uma família de funções então ${}^*A$ é uma família de funções, etc.

2. Os objectos de ${}^*A$ têm de ter exactamente as mesmas propriedades dos objectos de A. Por exemplo, dados $x, y \in A$, $x \in y$ sse ${}^*x \in {}^*y$ e $x = y$ sse ${}^*x = {}^*y$;

3. Se A é um conjunto então ${}^*A$ deve conter o conjunto ${}^\sigma A = \{{}^*x : x \in A\}$ que será visto como uma cópia de A no universo não standard. Além disso, se A é infinito então a inclusão deve ser estrita.

Assim, o nosso universo não standard é descrito pelos seguintes axiomas:

1. Existe um conjunto ${}^*\mathbb{X}$ de átomos que contém estritamente $\mathbb{X}$;

2. Existe um mergulho $^* : \mathbb{V}(\mathbb{X}) \to \mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$ tal que:

   (a) Se $x \in \mathbb{X}$ então ${}^*x = x$;

   (b) **(Princípio de transferência)** Se $A_1, ..., A_n \in \mathbb{V}(\mathbb{X})$ e ϕ é uma sentença qualquer então $\phi(A_1, ..., A_n)$ é verdadeira em $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ sse ${}^*\phi({}^*A_1, ..., {}^*A_n)$ é verdadeira em $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$;

3. Um qualquer objecto $A \in \mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ diz-se interno se $A \in {}^*B$ para algum $B \in \mathbb{V}(\mathbb{X})$. Todas as outras entidades de $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ dizem-se externas.

4. **(Saturação numerável)** Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de conjuntos internos de $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ então $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

Nota 2.6.2. *Por vezes, os métodos de análise não standard, como por exemplo, em espaços topológico que não admitem bases numeráveis de abertos, requerem um princípio muito mais forte que saturação numerável mas que traduza essencialmente a mesma ideia. Existem modelos matemáticos, baseados em ultrafiltos, em que vale o seguinte princípio, que é uma generalização da saturação numerável*[1].

Princípio de Poli-saturação: Seja κ um cardinal qualquer. Qualquer colecção de conjuntos internos tal que as intersecções de cardinalidade menor que κ sejam não vazias têm intersecção não vazia.

Uma consequência importante da saturação, que vai ser usada mais adiante é a seguinte:

Teorema 2.6.3. *Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos internos. Então $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é interno sse $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\leq k} A_n$, para algum $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Pela construção do mundo standard e pelo princípio da definição interna temos que, a reunião finita de conjuntos internos é um conjunto interno. Assim, se $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\leq k} A_n$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então obviamente $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é interno.

($\Rightarrow$) Consideremos $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Os conjuntos da forma $A - A_n$ são todos internos pois, por hipótese os conjuntos A e A_n são internos. Além disso, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A - A_n = \emptyset$. Por saturação numerável, como a sucessão $\left(\bigcap_{k\leq n} A - A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, tem de existir algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap\limits_{n=1}^{k} A - A_n = \emptyset$, ou seja, $\bigcap\limits_{n=1}^{k} A - A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{k} A \cap A_n^c = A \cap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{k} A_n^c\right) =$
$= A \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n\right)^c = A - \left(\bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n\right) = \emptyset.$

Logo, temos que $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n$. Pela definição de A vem a outra inclusão, donde resulta que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\leq k} A_n$, para algum $k \in \mathbb{N}$. □

[1]Nesta dissertação apenas será usada saturação numerável.

Nota 2.6.4. *Da prova do teorema anterior resulta que se* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de conjuntos internos crescente então* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *é interno sse para algum* $k \in \mathbb{N}$, $A_n = \emptyset$ *para todo o* $n \geq k$.

Denotamos por ${}^*\mathbb{V}(\mathbb{X})$ a colecção de todos os objectos internos em $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$. A axiomática descrita garante que continua a ser válido o princípio de definição interna, isto é:

Princípio da Definição Interna Seja ϕ uma sentença e sejam A, A_1, ..., A_n entidades internas de $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$. Então o conjunto $\{a \in A : \phi(a, A_1, ..., A_n)$ é verdadeira em $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})\}$ é interno.

Teorema 2.6.5 (Compreensão). *Dada uma função* $f : {}^\sigma A \to {}^*B$, *onde* A *e* B *são entidades standards, existe uma aplicação interna* ${}^*F : {}^*A \to {}^*B$ *cuja restrição a* ${}^\sigma A$ *coincide com* f.

No caso de $\mathbb{X}$ anterior ser uma entidade qualquer, por exemplo uma variedade, dizemos que $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ representa o universo standard sobre a estrutura $\mathbb{X}$ e $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$ o universo não standard sobre a extensão ${}^*\mathbb{X}$ de $\mathbb{X}$.

Quando $\mathbb{X}$ contém a estrutura de um espaço métrico (E, d), podemos fazer considerações análogas às feitas em $\mathbb{R}$. Por exemplo, diz-se que b está infinitamente perto de a, e representa-se por $b \approx a$, se ${}^*d(a, b) \approx 0$. Podemos ainda dar uma interpretação de convergência de sucessões, através dos elementos ilimitados das sucessões.

Proposição 2.6.6. *Seja* (E, d) *um espaço métrico e* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de elementos de* E. *A sequência converge para* $L \in E$ *sse para todo o* $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, $s_N \approx L$, *sse para todo o* $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, $st(s_N) = L$.

A prova desta proposição é análoga à prova feita na proposição 2.4.5 (para o caso em que $E = \mathbb{R}$) uma vez que nessa prova apenas se usa o facto de $\mathbb{R}$ ser um espaço métrico e o limite ser dado em termos de distâncias.

Com a axiomatização das super estruturas podemos enunciar alguns resultados clássicos de análise não standard que irão ser amplamente usados neste trabalho.

Teorema 2.6.7 (Princípio de Permanência). *Seja* $\varphi(x)$ *uma fórmula interna de* $\mathcal{L}_{\mathbb{V}({}^*\mathbb{R})}$ *em que* x *é a única variável que ocorre livre. Então:*

1. *(Permanência Superior) Se existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\varphi(n)$ *é verdadeira para todo o* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $k \leq n$, *então existe* $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *tal que* $\varphi(n)$ *é verdadeira para todo o* $n \in {}^*\mathbb{N}$ *tal que* $k \leq n \leq K$;

2. *(Permanência inferior) Se existe* $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *tal que* $\varphi(n)$ *é verdadeira para todo o* $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *tal que* $n \leq K$, *então existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\varphi(n)$ *é verdadeira para todo o* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $k \leq n$;

3. Se $\varphi(a)$ é verdadeira para qualquer hiper-real a infinitamente perto de $b \in {}^*\mathbb{R}$ então $\phi(a)$ é verdadeira para qualquer hiper-real a que está a uma distância real de b;

Demonstração. Apenas faremos a prova da primeira parte pois os argumentos que provam os outros itens são idênticos. A fórmula $(k < x) \wedge \neg\varphi(x)$ é interna e como ${}^*\mathbb{N}$ é também interno então, pelo princípio da definição interna, $Y = \{k \in {}^*\mathbb{N} : (k < x) \wedge \neg\varphi(x)\}$ é interno. Se $Y = \emptyset$ então qualquer hiper-natural serve. Se Y não é vazio então pelo princípio da boa ordenação em conjuntos internos, Y tem primeiro elemento, digamos H. Basta então tomar $K = H - 1$. □

Lema 2.6.8 (de Robinson para Sequências infinitesimais). *Se $s : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ é uma hiper-sequência interna tal que $s_n \approx 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ então existe $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que $s_n \approx 0$, para todo o $n \leq K$.*

Demonstração. Não podemos aplicar permanência superior ao conjunto $\{n \in {}^*\mathbb{N} : s_n \approx 0\}$ uma vez que este pode não ser interno. Consideremos o conjunto $A = \left\{n \in {}^*\mathbb{N} : |s_n| < \frac{1}{n}\right\}$. Então $\mathbb{N} \subset A$ e A é interno. Pela permanência superior existe $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que $|s_n| < \frac{1}{n}$, $\forall n \leq K$. Se $n \in \mathbb{N}$ então por definição temos que $s_n \approx 0$. Se $n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ então $|s_n| < \frac{1}{n}$ e como $\frac{1}{n}$ é infinitesimal então $s_n \approx 0$, como pretendíamos. □

Como consequência imediata do lema 2.6.8 temos:

Corolário 2.6.9. *Fixemos $M \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência qualquer num espaço métrico. Se a é um ponto de acumulação da sucessão então existe $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que $N < M$ e $st(x_N) = a$.*

Demonstração. Se a é ponto de acumulação da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ então existe uma subsucessão $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para a. Por compreensão estendemos esta sequência a $(x_{n_k})_{k\in{}^*\mathbb{N}}$. Como M é um hiper-natural ilimitado então $\frac{n_k}{M} \approx 0$, para todo o $k \in \mathbb{N}$. Pelo lema de Robinson para sequências infinitesimais, existe $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que, para todo o $k \leq K$, $\frac{n_k}{M} \approx 0$. Em particular $n_K < M$. Além disso, pela caracterização da convergência das sucessões em espaços métricos resulta que $x_{n_K} \approx a$, ou seja, $st(x_{n_K}) = a$. □

O corolário anterior diz-nos que sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em X então os seus pontos de acumulação correspondem ao conjunto $\{st(x_N) : N \in {}^*\mathbb{N} \wedge N \leq M\}$, para qualquer $M \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Na próxima secção serão discutidos outros resultados em espaços métricos.

2.7 Caracterização de espaços métricos

Os nossos principais objectos de trabalho consistem em variedades riemannianas compactas e os seus respectivos espaços tangentes, vistos como espaços métricos. Por isso, vamos apresentar resultados de análise não standard relacionados com espaços métricos.

Definição 2.7.1. *Suponhamos que* (E, d) *é um espaço de métrico. Já vimos que é possível definir o conceito de infinitamente perto através do alargamento da função distância* d*. Do mesmo modo define-se halo de* $x \in {}^*E$ *como sendo o conjunto de pontos de* ${}^*E$ *que estão infinitamente perto de* x*.*

Nota 2.7.2. *Tal como acontece com* $\mathbb{R}$*, se* $a, b \in E$*, são distintos então* $hal(a) \cap hal(b) = \emptyset$*, uma vez que se* $c \in hal(a)$ *e* $c \in hal(b)$*, teríamos que* $d(c, b) \approx 0$ *e* $d(a, c) \approx 0$ *e portanto* $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) \approx 0$*, donde resultaria que* $d(a, b) = 0$*, o que implicaria que* $a = b$*.*

Notação 2.7.3. *Os elementos* $y \in {}^*E$ *que admitem parte standard são aqueles que estão infinitamente perto de um elemento* $x \in E$*, isto é,* $y \in hal(x)$ *para algum* $x \in E$*. Em particular, a parte standard de qualquer elemento é necessariamente única. Tal como em* $\mathbb{R}$ *é frequente usar-se* $st(a)$ *para denotar a parte standard de* $b \in {}^*E$*;*

Usa-se a notação $ns(A)$ *para denotar o conjunto dos elementos quase standard de um qualquer subconjunto* $A \subseteq {}^*E$*.*

Veremos nas proposições seguintes uma caracterização não standard dos conceitos topológicos usuais tais como a noção de aberto, fechado, aderência, etc...

Proposição 2.7.4. *Consideremos* (E, d) *um espaço métrico.*

1. *A é aberto sse* $\forall a \in A$*,* $hal(a) \subset {}^*A$*;*

   Em particular, se A é aberto então $sh^{-1}(A) \subset {}^*A$*;*

2. *F é fechado sse* $\forall f \in {}^*F \cap ns({}^*E)$*,* $st(f) \in F$*.*

3. *K é compacto sse* $\forall k \in {}^*K$*,* $st(k) \in K$*.*

   Em particular, se K é compacto então ${}^*K \subset st^{-1}(K)$*;*

Demonstração.

1. $(\Rightarrow)$ Como A é aberto então dado $a \in A$, existe uma vizinhança de a contida em A e portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n = \left\{ x \in E : d(x, a) < \frac{1}{n} \right\} \subset A$. Logo, pelo princípio de transferência ${}^*V_n \subset {}^*A$. Mas $hal(a) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i \subset {}^*V_n \subset {}^*A$, como pretendíamos.

($\Leftarrow$) Por contraposição, suponhamos que A não era aberto. Vamos provar que existe $a \in A$ tal que $hal(a) \not\subset {}^*A$. Se A não é aberto então existe $a \in A$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}$, $V_n \not\subset A$. Por transferência, para todo o $n \in \mathbb{N}$, ${}^*V_n \not\subset {}^*A$. Como $({}^*V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão decrescente de conjuntos internos então, por saturação numerável a sua intersecção é não vazia, ou seja, $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*V \not\subset {}^*A$. Seja x um elemento dessa intersecção que não pertence a ${}^*A$. Então, $x \in hal(a)$ e $x \notin {}^*A$ ou seja, $hal(a) \not\subset {}^*A$.

Como para todo o $a \in A$, $hal(a) = st^{-1}(a)$ então, concluímos que, para todo o $a \in A$, $st^{-1}(a) \in {}^*A$, ou seja, $st^{-1}(A) \in {}^*A$.

2. ($\Rightarrow$) Suponhamos que F é fechado e que $f \in {}^*F \cap ns({}^*E)$. Então existe $x \in E$ tal que $x = st(f)$. Queremos provar que $x \in F$. Se $x \notin F$ então $x \in E - F$. Como $E - F$ é aberto então da alínea anterior $hal(x) \subset {}^*E - {}^*F$, ou seja, $hal(x) \cap {}^*F = \emptyset$, o que é absurdo, pois $f \in hal(x)$ e $f \in {}^*F$. O absurdo resultou de se ter suposto que $x \notin F$, logo $x \in F$.

   ($\Leftarrow$) Por redução ao absurdo suponhamos que para todo o $f \in {}^*F \cap ns({}^*E)$ se tem que $st(f) \in F$ e que F não é fechado. Então $E - F$ não é aberto e portanto, pelo item anterior, existe um $x \in E - F$ tal que $hal(x) \not\subset {}^*E - {}^*F$ e portanto $hal(x) \cap {}^*F \neq \emptyset$. Consideremos $y \in hal(x) \cap {}^*F$. Então y é elemento de $ns({}^*E)$ e elemento de ${}^*F$. Logo, $x = st(y) \in F$, o que é absurdo. O absurdo resultou de se ter suposto que F não era fechado. Logo F é fechado.

3. ($\Rightarrow$) Suponhamos que K é compacto e que existe $k \in {}^*K$ tal que $st(k) \notin K$. Então, k não pertence ao halo de nenhum ponto de K e portanto, dado $k' \in K$ existe um aberto $V_{k'}$ tal que $k \notin {}^*V_{k'}$. Mas $\bigcup_{k'\in K} V_{k'}$ é uma cobertura aberta de K e portanto, como K é compacto, admite uma subcobertura finita, digamos $K \subset V_{k_1} \cup ... \cup V_{k_n}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então ${}^*K \subset {}^*V_{k_1} \cup ... \cup {}^*V_{k_n}$. Mas temos que $k \notin {}^*V_{k_i}$ para $i = 1, ..., n$ e portanto $k \notin {}^*V_{k_1} \cup ... \cup {}^*V_{k_n}$ donde resulta que $k \notin {}^*K$, o que por hipótese é absurdo. Logo, temos que se K é compacto e se $k \in {}^*K$ então $st(k) \in K$.

   ($\Leftarrow$) Por contraposição suponhamos que K não é compacto. Então existe alguma cobertura aberta que não admite subcobertura finita. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ essa cobertura. Então, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ temos que $K \not\subset \bigcup_{n\leq k} A_n$, ou seja, seguinte sentença é verdadeira:

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists x \in K)(\forall n \in \mathbb{N})(n \leq k \rightarrow x \notin A_n).$$

   Por transferência a sentença:

$$(\forall k \in {}^*\mathbb{N})(\exists x \in {}^*K)(\forall n \in {}^*\mathbb{N})(n \leq k \rightarrow x \notin {}^*A_n).$$

também é verdadeira. Em particular, existe $x \in {}^*K$ tal que $x \notin {}^*A_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Suponhamos que $st(x) \in K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $st(x) \in A_n$, o que é equivalente a $x \in st^{-1}(A_n) \subset {}^*A_n$, o que, como vimos, é impossível. Logo $st(x) \notin K$.

Acabamos de provar que se K é compacto então $st({}^*K) \subset K$, donde resulta que ${}^*K \subset st^{-1}(st({}^*K)) \subset st^{-1}(K)$.

$\square$

Podemos ainda caracterizar os pontos de acumulação e a aderência de conjuntos usando a parte standard, como estabelece a seguinte proposição.

Proposição 2.7.5. *Seja (E, d) um espaço métrico.*

1. *$a \in E$ é ponto de acumulação de $A \subset E$ sse $hal(a) \cap {}^*A \backslash \{a\} \neq \emptyset$.*
2. *$\bar{A} = \{x \in E : hal(x) \cap {}^*A \neq \emptyset\}$*

Demonstração.

1. $(\Rightarrow)$ Se $a \in E$ é um ponto de acumulação de A então fixado $\epsilon > 0$, temos que a seguinte sentença é verdadeira:

$$\exists x(x \in A\backslash\{a\} \wedge d(x, a) < \epsilon)$$

Aplicando transferência obtemos que:

$$\exists x(x \in {}^*A\backslash\{a\} \wedge d(x, a) < \epsilon)$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer então $d(x, a) \approx 0$, donde se conclui que $x \in hal(a)$. Resulta então que $hal(a) \cap {}^*A\backslash\{a\} \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ A prova desta implicação segue o roteiro da prova de $(\Rightarrow)$ tendo em conta que as implicações nessa prova, são, na verdade equivalências.

2. $(\subset)$ Se $x \in \bar{A}$ então ou $x \in A$ ou x é ponto de acumulação de A.

Se $x \in A$ então $x \in {}^*A$. Obviamente x pertence ao seu próprio halo, donde se conclui que $hal(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$.

Se x é ponto de acumulação então da alínea anterior $hal(x) \cap {}^*A\backslash\{x\} \neq \emptyset$ e portanto $hal(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$.

$(\supset)$ Se $hal(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$ então existe $y \in hal(x) \cap {}^*A$, ou seja, existe $y \in hal(x)$ e $y \in {}^*A$.

Se $y = x$ então $x \in {}^*A$ e portanto, como x é um elemento standard de E, $x \in A$. Daqui resulta que $x \in \bar{A}$.

Se $y \neq x$ então $y \in hal(x)$ e $y \in {}^*A \backslash \{x\}$, ou seja, $y \in hal(x) \cap {}^*A \backslash \{x\}$, o que significa que x é ponto de acumulação de A e portanto é um elemento de $\bar{A}$.

□

Nota 2.7.6. *Na verdade, a segunda parte da proposição anterior pode ser expressa pela igualdade* $\bar{A} = st({}^*A \cap ns({}^*E))$.

Note-se ainda que, no caso particular de E *ser um espaço métrico compacto, então vale a seguinte igualdade* $\bar{A} = st({}^*A)$, *uma vez que nesse caso todos os pontos são quase standard.*

Proposição 2.7.7. *Seja* (E, d) *um espaço métrico. Se* A *é um conjunto interno de* ${}^*E$ *então* $st(A)$ *é um conjunto fechado de* E.

Demonstração. Para provar que $st(A)$ é fechado basta provar que se $x \in \overline{st(A)}$ então $x \in st(A)$, isto é, que existe $y \in A$ tal que $st(y) = x$.

Por definição de aderência, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $st(A)$ tal que $d(x_n, x)$ converge para zero. Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de elementos de A tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $st(y_n) = x_n$. Por compreensão estendemos $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $(y_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ em A. Como, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, y_n) \approx 0$ então, a sequência $(d(y_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero e portanto, pela caracterização de convergência da proposição 2.6.6, para todo o $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, $y_N \approx x$, ou seja, $st(y_N) = x$. Como $y_N \in A$ concluímos que $x \in st(A)$. □

Capítulo 3

Medidas de Loeb

Depois de introduzido o formalismo e conceitos básicos de análise não standard, vamos agora descrever uma classe de medidas introduzidas por Loeb que será o objecto crucial para se obterem os resultados dos capítulos seguintes.

3.1 Conceitos clássicos de Teoria da medida

Começamos por apresentar conceitos clássicos da teoria da medida que podem ser encontrados em várias referência, tais como [3] ou [25].

Definição 3.1.1. *Consideremos $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Uma álgebra sobre X é uma colecção de subconjuntos de X, $\mathcal{A}$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$;

3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A \in \mathcal{A}$;

Nota 3.1.2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$, *pois* $A \cup B = X - \big((X - A) \cap (X - B)\big)$

Por vezes é necessário que a relação de intersecção não seja apenas verificada para um número finito de conjuntos, mas também seja válida para intersecções numeráveis. Fazendo essa substituição na segunda condição obtém-se a seguinte definição:

Definição 3.1.3. *Consideremos $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X é uma colecção de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;

2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$;

3. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A \in \mathcal{A}$;

Nota 3.1.4. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, *pois* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X - \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X - A_n)$

Exemplo 3.1.5.

1. $\mathcal{P}(X)$ *é sempre uma* σ*-álgebra;*

2. *Consideremos* $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ *a colecção de todos os subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que são reuniões finitas de intervalos da forma* $]a, b]$*, com* $a < b$ *em* $\mathbb{R}$*. Como* $\mathbb{R}$ *não pode ser escrito como uma tal reunião finita então concluímos que* $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ *não é uma álgebra. Tomemos* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *a* σ*-álgebra gerada por* $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$*. Então o conjunto* $]a, b[$ *é um elemento de* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *pois* $]a, b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]a, b - \frac{1}{n}\right]$*. Como qualquer aberto pode ser sempre escrito como reunião numerável de intervalos então concluímos que* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *contém todos os abertos e consequentemente todos os fechados. Além disso,* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *é a menor* σ*-álgebra que contém todos os abertos. A esta* σ*-álgebra damos o nome de* σ*-álgebra de Borel.*

3. *Se* $\mathcal{A}$ *é uma álgebra sobre um qualquer conjunto não vazio* X *então* ${}^*\mathcal{A}$*, a extensão de* $\mathcal{A}$*, é uma álgebra. Este facto resulta de imediato da aplicação de transferência às propriedades que definem o conceito de álgebra. Note-se que todo o elemento de* ${}^*\mathcal{A}$ *é interno uma vez que, como a própria inclusão indica é um elemento da extensão de uma entidade standard. Se* $\mathcal{A}$ *for uma* σ*-álgebra então* ${}^*\mathcal{A}$ *é uma* ${}^*\sigma$*-álgebra de conjuntos internos. Geralmente, não é uma* σ*-álgebra, pois pelo teorema 2.6.3, se* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de subconjuntos internos então* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *é interno sse* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\leq k} A_n$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$*. Desta observação resulta que* ${}^*\mathcal{A}$ *é* σ*-álgebra sse* $\mathcal{A}$ *é finito.*

Definição 3.1.6. *Consideremos* $\mathcal{A}$ *uma álgebra sobre um qualquer conjunto* X *não vazio. A função* $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ *diz-se uma medida em* $\mathcal{A}$ *se verifica as seguintes condições:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. *Se* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ *é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois e tais que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ *então* $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$;

Se substituirmos a 2^a *condição da definição anterior pela condição:*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ se } A, B \in \mathcal{A} \text{ e são tais que } A \cap B = \emptyset$$

então μ diz-se uma medida finitamente aditiva ou uma medida σ-finita.

Da definição de medida podemos inferir algumas das suas propriedades básicas:

1. μ é monótona, isto é, se $A \subset B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Como $A \subset B$ então $B = A \cup (B - A)$. Além disso, como $A \cap (B - A) = \emptyset$ então $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$, porque $\mu(B - A) \geq 0$;

2. No caso de $\mu(B) < \infty$, da propriedade anterior concluímos que $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Se $A, B \in \mathcal{A}$ então $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Nota 3.1.7. *É também frequente definir medida como uma função cujo domínio é uma σ-álgebra. Esta definição obriga a que a segunda condição tenha de ser verificada para qualquer sequência de conjuntos, uma vez que a σ-álgebra é fechada para reuniões numeráveis.*

Exemplo 3.1.8. *Seja (E, d) um espaço métrico compacto e seja $\mathcal{O}_n = \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ um conjunto de n elementos em E. Consideremos em $\mathcal{P}(\mathcal{O}_n)$ a função $\mathbb{c}_n(A) = \dfrac{\sharp A}{n}$. $\mathbb{c}_n$ é obviamente uma medida.*

Esta medida pode ser usada para definir uma medida nos borelianos de E da seguinte forma. Para um boreliano B, defina-se $\mathbb{m}_n(B) = \mathbb{c}_n(B \cap \mathcal{O}_n)$. É evidente que temos que $\mathbb{m}_n(B) = \dfrac{\sharp\{0 \leq i \leq n-1 : x_i \in B\}}{n}$.

No caso particular de $f : E \to E$ ser uma função, podemos construir medidas de contagem em que o conjunto finito $O_n(x_0) = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$, é composto pelos iterados de x_0, onde n é escolhido de tal modo que $\sharp O_n(x_0) = n$, ou seja, de tal modo que, se $i, j \leq n$ e $i \neq j$ então $x_i \neq x_j$. É usual designar $\mathbb{c}_{n,x_0,f}$ ou $\mathbb{m}_{n,x_0,f}$ por medidas de contagem uma vez que estas medidas contam quanto tempo o segmento inicial da órbita de x_0 passa, em média, em cada boreliano.

Definição 3.1.9. *Suponhamos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra sobre um conjunto X, não vazio, e que $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ é uma medida. Para cada $B \subset X$ defina-se:*

$$\mu^+(B) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A} \wedge B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\}$$

A função $\mu^+ : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty[$, diz-se a medida exterior associada a μ.

As medidas exteriores, em geral, não são verdadeiras medidas pois não são σ-aditivas. Contudo da definição resultam as seguintes propriedades:

1. Se $B \in \mathcal{A}$ então $\mu^+(B) = \mu(B)$, uma vez que B é uma cobertura de si próprio em $\mathcal{A}$. Em particular temos que $\mu^+(\emptyset) = 0$;

2. Se $A \subset B$ então $\mu^+(A) \leq \mu^+(B)$. De facto, para medir B temos menos possibilidades de coberturas do que para medir A;

3. $\mu^+\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$, ou seja, μ^+ é sub-σ-aditiva;

Definição 3.1.10. *Um conjunto $B \subset X$ diz-se μ-mensurável se para todo o subconjunto C de X se verifica a igualdade $\mu^+(C) = \mu^+(C \cap B) + \mu^+(C \cap B^c)$.*

Nota 3.1.11. *Note-se que, pela sub-aditividade da medida exterior temos sempre que, $\mu^+(C) = \mu^+\big(C \cup ((X-B) \cap B)\big) = \mu^+\big((C \cap B^c) \cup (C \cap B)\big) \leq \mu^+(C \cap B) + \mu^+(C \cap B^c)$. Logo para provar que um conjunto B é mensurável, basta verificar que, para todo o subconjunto C de X, se tem que $\mu^+(C) \geq \mu^+(C \cap B) + \mu^+(C \cap B^c)$.*

Teorema 3.1.12 (Caratheodory). *Seja $\mathcal{M}(X, \mu)$ a colecção de todos os conjuntos μ-mensuráveis. Então:*

1. *$\mathcal{M}(X, \mu)$ é uma σ-álgebra de partes de X;*
2. *$\mathcal{M}(X, \mu)$ contém todos os conjuntos de medida exterior nula;*
3. *$\mu^+|_{\mathcal{M}(X,\mu)} : \mathcal{M}(X, \mu) \to [0, +\infty[$ é uma medida.*

Demonstração.

1.
   - $\emptyset \in \mathcal{M}(X, \mu)$ pois qualquer que seja $E \subset X$ tem-se que:
   $$\mu^+(E \cap \emptyset) + \mu^+(E \cap \emptyset^c) = \mu^+(\emptyset) + \mu^+(E \cap X) = \mu^+(E \cap X) = \mu^+(E);$$
   - Se $A \in \mathcal{M}(X, \mu)$ então $X - A \in \mathcal{M}(X, \mu)$ por simetria da definição.
   - Se $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mu)$ é uma sequência de elementos disjuntos dois a dois, considere-se os conjuntos $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ e $B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Assim, dado um qualquer subconjunto C de X, temos que $\mu^+(C) = \mu^+(C \cap B_n) + \mu^+(C \cap B_n^c)$, pois $B_n \in \mathcal{M}(X, \mu)$. Mas:
   $$\mu(C \cap B_n) = \mu(C \cap B_n \cap A_n) + \mu(C \cap B_n \cap A_n^c) = \mu(C \cap A_n) + \mu^+(C \cap B_{n-1})$$
   Por indução prova-se que $\mu^+(C \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^+(C \cap A_k)$. Logo:
   $$\mu^+(C) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^+(C \cap A_k) + \mu^+(C \cap B^c).$$

Fazendo n tender para infinito obtemos $\mu^+(C) \geq \mu^+(C \cap B) + \mu^+(C \cap B^c)$, o que prova a mensurabilidade de $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Se tomar $C = B$ vem que $\mu^+\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^+(A_j)$.

2. Seja B um conjunto tal que $\mu^+(B) = 0$. Então pela monotonia da medida exterior, dado $C \subset X$, $\mu^+(B \cap C) = 0$. Por outro lado, sabemos que $C \cap B^c \subset C$, donde resulta que $\mu^+(C \cap B^c) \leq \mu^+(C)$. Logo, $\mu^+(C \cap B^c) + \mu^+(B \cap C) \leq \mu^+(C)$. Daqui concluímos que $\mathcal{M}$ contém todos os subconjuntos de medida exterior nula.

3. Seja $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mu)$. Tome-se $B_j = A_j \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right)$ então $B_j \in \mathcal{M}(X, \mu)$. Com esta caracterização vem que, a função, $\mu^+|_{\mathcal{M}(X,\mu)} : \mathcal{M}(X, \mu) \to [0, +\infty[$ é, de facto, uma medida.

□

Nota 3.1.13. *Do teorema anterior resulta que a extensão de qualquer medida à σ-álgebra dos mensuráveis é completa, uma vez que esta contém todos os conjuntos de medida nula.*

3.2 Construção de Loeb

Consideremos X um conjunto não vazio e interno de um alargamento não standard. Consideremos uma álgebra interna $\mathcal{A}$ sobre X, isto é, uma colecção de subconjuntos internos de X que satisfaz os axiomas de álgebra, ou seja, contém o conjunto vazio, é fechada para as operações de intersecção finita e de passagem ao complementar. Admitamos também a existência de uma aplicação interna $\mu : \mathcal{A} \to {}^*[0, +\infty[$ que satisfaz as condições de medida finitamente aditiva.

Sob estes pressupostos dizemos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida interna.

Na verdade, como a álgebra em causa é uma álgebra de conjuntos internos de X, se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ são disjuntos dois a dois e tais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ então, recorrendo novamente ao teorema 2.6.3, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\leq k} A_n$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e portanto, como os elementos da sequência são disjuntos dois a dois $A_n = \emptyset$ para todo o $n \geq k$, donde resulta que:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\leq k} A_n\right) = \sum_{n\leq k} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Tendo então um espaço $(X, \mathcal{A}, \mu)$ de medida interno podemos proceder à construção de um outro espaço de medida $(X, L(\mathcal{A}), L(\mu))$ apresentado por Loeb em [18], em que $L(\mathcal{A})$ é uma σ-álgebra e $L(\mu) : L(\mathcal{A}) \to [0, +\infty[$ é uma medida standard.

No caso do conjunto X ser hiper-finito, isto é, se existe $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ e uma bijecção interna $f : X \to \{1, ..., N\}$[1] podemos tomar $\mathcal{A} = \mathcal{P}_I(X)$, a álgebra interna de todos os subconjuntos internos de X. Para cada $A \in \mathcal{P}_I(X)$ podemos definir a aplicação interna $\mu(A) = \dfrac{\sharp A}{\sharp X}$, onde $\sharp X$ representa o hiper-natural $H \in {}^*\mathbb{N}$ tal que existe uma bijecção interna entre X e $\{1, ..., H\}$. Com esta definição de μ, dados $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $A \cap B = \emptyset$ então temos que:

$$\mu(A \cup B) = \frac{\sharp(A \cup B)}{\sharp X} = \frac{\sharp A + \sharp B}{\sharp X} = \frac{\sharp A}{\sharp X} + \frac{\sharp B}{\sharp X} = \mu(A) + \mu(B)$$

e, concluímos assim que μ é uma medida interna finitamente aditiva, ou seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida interno. Note-se que, como $A \subset X$ então $\sharp A \leq \sharp X$ e portanto μ só toma valores hiper-reais entre 0 e 1.

Quando X é hiper-finito defina-se a função $L(\mu) : \mathcal{P}_I(X) \to [0, 1]$ por $L(\mu)(A) = st(\mu(A))$.

Em primeiro lugar $L(\mu)(\emptyset) = st(\mu(\emptyset)) = st(0) = 0$. Por outro lado, se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_I(X)$ são disjuntos dois a dois e tais que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}_I(X)$ então para algum $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\leq k} A_n$ e $A_n = \emptyset$, para $n \geq k$. Logo:

$$L(\mu)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = L(\mu)\left(\bigcup_{n\leq k} A_n\right) = st\left(\mu\left(\bigcup_{n\leq k} A_n\right)\right) =$$

$$= st\left(\sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)\right) = \sum_{n=1}^{k} st(\mu(A_n)) = \sum_{n=1}^{k} L(\mu)(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} L(\mu)(A_n)$$

o que mostra que $L(\mu)$ é uma medida standard definida numa álgebra de partes internas.

No caso geral, um argumento semelhante ao anterior mostra que, se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida interno, então a função $L(\mu) : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ definida por:

$$L(\mu)(A) = \begin{cases} st(\mu(A)) & \text{se } \mu(A) \text{ é limitado} \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma medida.

Seja $L(\mu)^+$ a medida exterior associada a $L(\mu)$, construída segundo a definição 3.1.9. Aos elementos de $\mathcal{M}(X, L(\mu))$, ou seja, aos elementos $L(\mu)$-mensuráveis damos o nome de

[1] O hiper-natural N diz-se o cardinal de X.

conjuntos *Loeb mensuráveis*. É comum usar-se a notação $L(\mathcal{A})$ para denotar a família dos conjuntos Loeb mensuráveis.

Definição 3.2.1. *O tripleto* $(X, L(\mathcal{A}), L(\mu)^+|_{L(\mathcal{A})})$ *designa-se por espaço de medida de Loeb com respeito à medida* μ.

Nota 3.2.2. *De modo a facilitar a notação, usaremos* $L(\mu)$ *para designar a restrição de* $L(\mu)^+$ *ao conjunto* $L(\mathcal{A})$.

Vamos agora explorar um pouco mais as potencialidades das medidas de Loeb. Para isso começamos com alguns resultados que nos levam a concluir que estas são medidas regulares.

Definição 3.2.3. *Seja* (E, d) *um espaço de métrico e seja* $\mathcal{B}$ *uma* σ*-álgebra sobre* E. *Uma medida finita standard,* $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty[$ *diz-se regular se para todos os elementos* B *de* $\mathcal{B}$ *se tem que:*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B \text{ e } K \text{ é compacto}\} = \inf\{\mu(O) : O \supset B \text{ e } O \text{ é aberto}\}.$$

O espaço $(E, \mathcal{B}, \mu)$ *diz-se um espaço de medida regular.*

Lema 3.2.4. *Se* B *é Loeb mensurável com respeito à medida de* μ *então:*

$$L(\mu)(B) = \inf\{L(\mu)(A) : B \subset A \in \mathcal{A}\}.$$

Demonstração. A desigualdade $\leq$ é óbvia uma vez que se $B \subset A$ então $L(\mu)(B) \leq L(\mu)(A)$. Resta provar a desigualdade $\geq$. Se $L(\mu)(B) = +\infty$ então a desigualdade $\geq$ também é óbvia. Suponhamos então que $L(\mu)(B) < +\infty$. Queremos provar que para todo o $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe um conjunto $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tal que $L(\mu)(A_\varepsilon) \leq L(\mu)(B) + \varepsilon$.

Pela definição da medida exterior existe uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$ tais que $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $L(\mu)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < L(\mu)(B) + \varepsilon$. Por compreensão numerável podemos estender a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a uma hiper-sequência $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$. Assim para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que:

$$(\forall n \in {}^*\mathbb{N})\Big(n \leq k \to A_n \subset A_k \wedge \mu(A_n) < L(\mu)(B) + \varepsilon\Big)$$

pois $\mu(A_n) \approx L(\mu)(A_n) < L(\mu)(B) + \varepsilon$.

Como todas as entidades envolvidas na fórmula anterior são internas então pelo princípio da definição interna é interna. Como $k \in \mathbb{N}$ é qualquer então por permanência superior existe $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que $A_K \in \mathcal{A}$, $A_n \subset A_K$ sempre que $n \leq K$, $B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_K$ e $\mu(A_K) < L(\mu)(B) + \varepsilon$. Novamente, como $L(\mu)(A_K) \approx \mu(A_K)$, então $L(\mu)(A_K) \leq L(\mu)(B) + \varepsilon$. Tome-se $A_\varepsilon = A_K$. $\square$

Lema 3.2.5. *Se B é Loeb mensurável com respeito à medida μ e é $L(\mu)$-finito então:*

$$L(\mu)(B) = \sup\{L(\mu)(A) : A \subset B \wedge A \in \mathcal{A}\}.$$

Demonstração. A desigualdade $\geq$ é evidente. Falta provar a desigualdade $\leq$. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, queremos exibir um conjunto $A_\varepsilon \subset B$ tal que $L(\mu)(A_\varepsilon) > L(\mu)(B) - \varepsilon$. Como $L(\mu)(B) < \infty$ então pelo lema anterior existe $D \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset D$ e $L(\mu)(D) < +\infty$. Assim, $D - B \in L(\mathcal{A})$ tem medida de Loeb finita e portanto pelo lema anterior existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $D - B \subset C$ e $L(\mu)(C) < L(\mu)(D-B)+\varepsilon$. Tomemos $A_\varepsilon = D - C \in \mathcal{A}$. Então temos que $A_\varepsilon \subset B$ e $C = (D-B)\dot{\cup}(B - A_\varepsilon)$ e portanto $L(\mu)(D-B) + L(\mu)(B - A_\varepsilon) = L(\mu)(C) < L(\mu)(D-B) + \varepsilon$ donde vem que $L(\mu)(B - A_\varepsilon) < \varepsilon$. Logo $L(\mu)(B) - \varepsilon < L(\mu)(A_\varepsilon)$. □

Definição 3.2.6. *Seja $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ um espaço de medida. Um conjunto $B \subset Y$ diz-se ν-aproximável sse para todo o $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existem conjuntos C_ε e D_ε em $\mathcal{C}$ tais que $C_\varepsilon \subset B \subset D_\varepsilon$ e $\nu(D_\varepsilon - C_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Lema 3.2.7. *Se B é Loeb mensurável e $L(\mu)$-finito com respeito à medida μ então B é μ-aproximável.*

Demonstração. Fixemos $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Como B é Loeb mensurável e $L(\mu)$-finito então dos lemas anteriores existem C_ε e D_ε em $\mathcal{A}$, μ-finitos, tais que $C_\varepsilon \subset B \subset D_\varepsilon$ e $\mu(D_\varepsilon) \leq \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2}$ e $\mu(C_\varepsilon) \leq \mu(B) - \frac{\varepsilon}{2}$. Logo $\mu(D_\varepsilon - C_\varepsilon) = \mu(D_\varepsilon) - \mu(C_\varepsilon) = \mu(D_\varepsilon) - \mu(B) + \mu(B) - \mu(C_\varepsilon) \leq \varepsilon$. □

Lema 3.2.8. *Se B é μ-aproximável então existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $L(\mu)^+(A \Delta B) = 0$.*

Demonstração. Construímos duas sucessões de conjuntos, usando os lemas anteriores tendo como base a sucessão $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ e em seguida usamos permanência superior. □

Lema 3.2.9. *Se B é μ-aproximável então B é Loeb mensurável.*

Demonstração. Dado $E \subset X$ com medida finita temos que provar que:

$$L(\mu)^+(E) \geq L(\mu)^+(E \cap B) + L(\mu)^+(E \cap (X - B)).$$

Pelo lema anterior existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $L(\mu)^+(A \Delta B) = 0$. Consideremos os seguintes conjuntos: $C = E \cap B \cap (X - A)$, $D = E \cap A \cap (X - B)$, $G = E \cap (X - (A \cup B))$ e $H = E \cap A \cap B$. Temos então que $C, D \subset A \Delta B$ e portanto $L(\mu)^+(C) = L(\mu)^+(D) = 0$. Além disso também temos que $C \cup H = E \cap B$ e $D \cup G = E \cap (X - B)$, e assim, vem que:

$$L(\mu)^+(E \cap B) = L(\mu)^+(C \cup H) \leq L(\mu)^+(C) + L(\mu)^+(H) \leq L(\mu)^+(H)$$

e

$$L(\mu)^+(E \cap (X - B)) = L(\mu)^+(D \cup G) \leq L(\mu)^+(D) + L(\mu)^+(G) \leq L(\mu)^+(G)$$

donde concluímos que:

$$L(\mu)^+(E \cap B) + L(\mu)^+(E \cap (X - B)) \leq L(\mu)^+(H) + L(\mu)^+(G) \leq$$

$$\leq L(\mu)+(E \cap A) + L(\mu)+(E \cap (X - A)) = L(\mu)+(E)$$

como pretendíamos. $\square$

Os resultados anteriores podem ser sintetizados no seguinte corolário.

Corolário 3.2.10. *Se B é um subconjunto de X $L(\mu)^+$-finito então B é Loeb mensurável sse B é μ-aproximável.*

Usando os resultados anteriores podemos dar uma descrição dos conjuntos mensuráveis segundo o seguinte teorema:

Teorema 3.2.11. *Seja B é um subconjunto de X. B é Loeb mensurável com respeito a μ sse $B \cap A$ é μ-mensurável, qualquer que seja $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \infty$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se B é Loeb mensurável então $B \cap A$ é Loeb mensurável, uma vez que a colecção de conjuntos Loeb mensuráveis é uma σ-álgebra. Se $\mu(A) < \infty$ então, como $B \cap A \subset A$, vem que $L(\mu)^+(B \cap A) < \infty$ e portanto por um lema anterior temos que $B \cap A$ é μ-aproximável.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ e que $B \cap A$ é μ-aproximável. Queremos provar que se $C \in \mathcal{A}$ é tal que $L(\mu)^+(C) < \infty$ então $L(\mu)^+(C) \geq L(\mu)^+(C \cap B) + L(\mu)^+(C \cap (X - B))$. Como $L(\mu)^+(C \cap B) < \infty$ então existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $L(\mu)^+(A_n) < \infty$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $C \cap B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Cada $A_n \cap B$ é μ-aproximável e portanto por um lema anterior são Loeb mensuráveis. Seja $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B \cap A_n$. Então A é Loeb mensurável e $L(\mu)^+(C) \geq L(\mu)^+(C \cap A) + L(\mu)^+(C \cap (X - A))$. Mas $C \cap A = C \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n) \right) \supset C \cap B$ e $C \cap (X - A) \supset C \cap (X - B)$ donde sai a desigualdade que pretendíamos. $\square$

3.2.1 Medidas de contagem em espaços métricos

Seja (E, d) um espaço métrico compacto, $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ e consideremos um conjunto interno de N pontos distintos de ${}^*E$, $\mathcal{O}_N = \{x_0, ..., x_{N-1}\}$, isto é, se $i, j \leq N - 1$ e $i \neq j$ então $x_i \neq x_j$. Note-se que, como $\mathcal{O}_N$ é hiper-finito então podemos definir a medida interna de contagem, que depende de x_0 e de N através de:

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{C}: & \mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N) & \rightarrow & {}^*[0, +\infty[\\ & A & \rightarrow & \dfrac{\sharp A}{N} = \dfrac{\sharp\{0 \leq k \leq N - 1 : x_k \in A\}}{N} \end{array}$$

onde $\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N)$ representa a álgebra das partes internas de $\mathcal{O}_N$. Esta medida induz também uma medida nos *borelianos de $^*E$ dada por:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{m}: {}^*\mathcal{B} & \rightarrow & {}^*[0,+\infty[\\ A & \rightarrow & \mathbb{c}(A \cap \mathcal{O}_N) = \dfrac{\sharp\{0 \leq k \leq N-1 : x_k \in A\}}{N} \end{array}$$

Na verdade, a inclusão $O_{.} : \mathcal{O}_N \rightarrow {}^*E$ preserva medidas, isto é, $\mathbb{c}(O_{.}^{-1}(A)) = \mathbb{c}(A \cap \mathcal{O}_N) = \mathbb{m}(A)$.

Sejam, como usualmente, $L(\mathbb{c}) : L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N)) \rightarrow [0,+\infty[$ e $L(\mathbb{m}) : L({}^*\mathcal{B}) \rightarrow [0,+\infty[$ as respectivas medidas de Loeb. Pela maneira como definimos $\mathbb{m}$, resulta que $L(\mathbb{m})(A) = L(\mathbb{c})(\{0 \leq k \leq N-1 : x_k \in A\})$, qualquer que seja $A \in L({}^*\mathcal{B})$. Em particular, se $A \in L({}^*\mathcal{B})$ então temos que $\{0 \leq k \leq N-1 : x_k \in A\} \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$.

Vamos ver que podemos usar $L(\mathbb{c})$ para definir uma medida nos borelianos de E. Comecemos por considerar o seguinte conjunto, $\mathcal{M} = \{B \subset X : sh^{-1}(B) \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))\}$, onde $sh^{-1}(A) = st^{-1}(A) \cap \mathcal{O}_N = \{x \in \mathcal{O}_N : st(x) \in A\}$.

Proposição 3.2.12. *$\mathcal{M}$ é uma σ-álgebra.*

Demonstração.

1. $sh^{-1}(\emptyset) = st^{-1}(\emptyset) \cap \mathcal{O}_N = \emptyset$ que obviamente pertence a $L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$;

2. Por definição, $sh^{-1}(E) = \{x \in \mathcal{O}_N : st(x) \in E\} = \mathcal{O}_N$ e como $\mathcal{O}_N \in \mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N)$, então $sh^{-1}(E) \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$. Assim, sendo A um elemento de $\mathcal{M}$, como sh é uma aplicação de domínio $\mathcal{O}_N$ temos que $sh^{-1}(E-A) = sh^{-1}(E) - sh^{-1}(A)$ e como ambos os conjuntos pertencem a $L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$ conclui-se $sh^{-1}(E-A) \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$.

3. Suponhamos que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos em $\mathcal{M}$, isto é, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $sh^{-1}(A_n) \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$. Como $L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$ é uma σ-álgebra então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} sh^{-1}(A_n)$ ainda é um elemento de $L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$. Mas:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} sh^{-1}(A_n) = sh^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

e portanto $sh^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$, donde resulta que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

$\square$

Proposição 3.2.13. *A σ-álgebra dos borelianos de E está contida em $\mathcal{M}$.*

Demonstração. Seja B um boreliano de E qualquer. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere-se o seguinte conjunto:

$$A_n = \left\{x \in E : d(x,B) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Por definição, cada A_n é um conjunto aberto. Estendemos, cada um destes conjuntos a ${}^*A_n = \left\{x \in {}^*E : d(x, {}^*B) < \frac{1}{n}\right\}$. Vamos provar que temos sempre a igualdade:

$$sh^{-1}\left(\overline{B}\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^*A_n \cap \mathcal{O}_N$$

($\supset$) Se $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^*A_n \cap \mathcal{O}_N$ então $x \in {}^*A_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathcal{O}_N$. Pelo facto de $x \in \mathcal{O}_N$, temos que $x = x_k$, para algum $k \in \{0, ..., N-1\}$. Do facto de $x \in {}^*A_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ vem que $d(x_k, {}^*B) < \frac{1}{n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, donde resulta que $d(x_k, {}^*B) \approx 0$, ou seja, $st(x_k) \in st({}^*B) = \overline{B}$, ou seja, $x \in sh^{-1}\left(\overline{B}\right)$.

($\subset$) Por definição de aderência, a distância entre os pontos da aderência de B a B é zero, e portanto temos a seguinte inclusão: $\overline{B} \subset A_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Portanto $sh^{-1}(\overline{B}) = st^{-1}(\overline{B}) \cap \mathcal{O}_N \subset st^{-1}(A_n) \cap \mathcal{O}_N \subset {}^*A_n \cap \mathcal{O}_N$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e portanto $sh^{-1}(\overline{B}) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^*A_n \cap \mathcal{O}_N$.

Se B é um fechado então $\overline{B} = B$ e portanto $sh^{-1}(B) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^*A_n \cap \mathcal{O}_N$. Como os conjuntos A_n são abertos então são borelianos e portanto ${}^*A_n$ são elementos de ${}^*\mathcal{B}$. Mas, como por definição, $L({}^*\mathcal{B})$ é uma extensão de ${}^*\mathcal{B}$, resulta que ${}^*A_n \in L({}^*\mathcal{B})$. Como $L({}^*\mathcal{B})$ é uma σ-álgebra, vem que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^*A_n \in L({}^*\mathcal{B})$. Portanto $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^*A_n \cap \mathcal{O}_N \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$. Concluímos então que $sh^{-1}(B)$ é um elemento de $L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$.

Como a σ-álgebra que contém todos os fechados coincide com a σ-álgebra dos borelianos então concluímos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, como pretendíamos. □

Como $st^{-1}(B) \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$ qualquer que seja o boreliano B então faz sentido definir a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} \mu: & \mathcal{B} & \to & [0, +\infty[\\ & B & \to & L(\mathbb{c})(sh^{-1}(B)) \end{array}$$

Teorema 3.2.14. *A função μ é uma medida nos borelianos de E.*

Começamos por provar o seguinte lema:

Lema 3.2.15. *Seja (E, d) um espaço métrico qualquer. Se A, B são subconjuntos disjuntos de E então $st^{-1}(A) \cap st^{-1}(B) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que $st^{-1}(A) \cap st^{-1}(B) \neq \emptyset$ e seja $y \in st^{-1}(A) \cap st^{-1}(B)$. Então $y \in st^{-1}(A)$ e $y \in st^{-1}(B)$, ou seja, $st(y) \in A$ e $st(y) \in B$. Logo $st(y) \in A \cap B$ e portanto A e B não seriam disjuntos. □

Demonstração. (do teorema 3.2.14)

1. $\mu(\emptyset) = L(\mathbb{c})(sh^{-1}(\emptyset)) = L(\mathbb{c})(\emptyset) = 0$;

2. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de borelianos disjuntos dois a dois. Então, pelo lema anterior, $\left(st^{-1}(A_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos Loeb mensuráveis disjuntos dois a dois. Logo:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = L(\mathbb{c})\left(st^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) =$$

$$= L(\mathbb{c})\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} st^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} L(\mathbb{c})\left(st^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

□

Nota 3.2.16. *Pelo facto de O preservar $\mathbb{m}$, concluímos que para medir um boreliano temos duas alternativas:*

$$L(\mathbb{m})(st^{-1}(B)) = L(\mathbb{c})(sh^{-1}(B)).$$

Como a medida μ do teorema 3.2.14 está definida nos borelianos de X, sabemos que μ é regular e portanto podemos estender o resultado desse teorema para os conjuntos μ-mensuráveis, conforme prova o seguinte resultado:

Teorema 3.2.17. *B é μ-mensurável sse $sh^{-1}(B)$ é Loeb mensurável.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos agora que B é um conjunto μ-mensurável. Então fixado $\varepsilon > 0$ existe um aberto A e um compacto K tais que $\mu(A) - \mu(K) < \varepsilon$ e $K \subset B \subset A$. Assim:

$$sh^{-1}(K) \subset sh^{-1}(B) \subset sh^{-1}(A).$$

o que nos permite escrever que:

$$\mu(K) = L(\mathbb{c})(sh^{-1}(K)) \leq L(\mathbb{c})(sh^{-1}(B)) \leq L(\mathbb{c})(sh^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Logo, das desigualdades anteriores vem que:

$$L(\mathbb{c})(st^{-1}(A)) - L(\mathbb{c})(st^{-1}(K)) = \mu(A) - \mu(K) < \varepsilon$$

donde se conclui que $sh^{-1}(B)$ é $L(\mathbb{c})$-aproximável e portanto $sh^{-1}(B)$ é Loeb mensurável.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $B \in \mathcal{M}$, isto é $sh^{-1}(B)$ é Loeb mensurável. Como $L(\mathbb{c})$ é uma medida finita então $L(\mathbb{c})(sh^{-1}(B)) < \infty$ ou seja, $sh^{-1}(B)$ é $L(\mathbb{c})$ aproximável e portanto, para todo o $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existem conjuntos C_ε e D_ε em $\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N)$ tais que $C_\varepsilon \subset sh^{-1}(B) \subset D_\varepsilon$ e $L(\mathbb{c})(D_\varepsilon) - L(\mathbb{c})(C_\varepsilon) < \varepsilon$.

Seja $C'_\varepsilon = sh(C_\varepsilon)$. Como $C_\varepsilon \in \mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N)$ então C'_ε é fechado e portanto um boreliano de E. Logo, $sh^{-1}(C'_\varepsilon) \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$. Mas $C_\varepsilon \subset sh^{-1}(sh(C_\varepsilon)) = sh^{-1}(C'_\varepsilon) \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$ e portanto $L(\mathrm{c})(C_\varepsilon) \leq L(\mathrm{c})(sh^{-1}(C'_\varepsilon))$. De modo semelhante temos que $sh(\mathcal{O}_N - D_\varepsilon)$ é fechado e portanto $D'_\varepsilon = E - sh(\mathcal{O}_N - D_\varepsilon)$ é aberto, donde $sh^{-1}(D'_\varepsilon) \in L(\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N))$ e $L(\mathrm{c})(sh^{-1}(D'_\varepsilon)) \leq L(\mathrm{c})(D_\varepsilon)$. Note-se que $C'_\varepsilon \subset B \cap sh(\mathcal{O}_N) \subset D'_\varepsilon$. Além disso $\mu(D'_\varepsilon) - \mu(C'_\varepsilon) = L(\mathrm{c})(sh^{-1}(D'_\varepsilon)) - L(\mathrm{c})(sh^{-1}(C'_\varepsilon)) \leq L(\mathrm{c})(D_\varepsilon) - L(\mathrm{c})(C_\varepsilon) < \varepsilon$. Logo $B \cap sh(\mathcal{O}_N)$ é μ-aproximável. Como μ é uma medida definida num espaço métrico então sabemos que esta satisfaz as condições de medida regular (ver [2]) e portanto sendo $B \cap sh(\mathcal{O}_N)$ μ-aproximável, $B \cap sh(\mathcal{O}_N)$ é μ-mensurável.

Mas $\mu(E - sh(\mathcal{O}_N)) = 1 - \mu(sh(\mathcal{O}_N)) = 1 - 1 = 0$. Logo, B difere de $B \cap sh(\mathcal{O}_N)$ por um conjunto de medida exterior nula e portanto é mensurável. □

3.2.2 Medida de Lebesgue como medida de contagem

Os resultados da secção anterior podem ser utilizado, por exemplo, para caracterizar a medida de Lebesgue. Para exemplificar, vamos mostrar como a medida de Lebesgue no intervalo $[0,1]$ pode ser obtida como uma medida de contagem de Loeb no conjunto $S = \left\{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, ..., \frac{N-1}{N}, 1\right\}$, onde $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Lema 3.2.18. *Dados dois quaisquer números reais $0 < a < b < 1$ temos que:*

$$L(\mathrm{c})\left(\{s \in S : a < s < b\}\right) = b - a.$$

Demonstração. Seja $A = \{s \in S : a < s < b\} = S \cap {}^*(a,b)$. Pelo princípio da definição interna, A é interno e portanto é um elemento de $\mathcal{P}_I(S)$. Como S é hiper-finito e igualmente espaçado no intervalo $[0,1]$ então existem $s = \dfrac{K+1}{T}$ e $t = \dfrac{L}{T}$ tais que $a \approx s$ e $b \approx t$. Assim, podemos dizer que $A = \left\{\dfrac{K+1}{N}, ..., \dfrac{L}{N}\right\}$. Logo, $\dfrac{|A|}{N} = \dfrac{L-K}{N} = \dfrac{L}{N} - \dfrac{K}{N} \approx b - a$, donde se conclui que $L(\mathrm{c})(A) = b - a$. □

Proposição 3.2.19. *Se denotarmos por ℓ a medida de Lebesgue em $[0,1]$, então μ e ℓ coincidem nos borelianos do intervalo $[0,1]$, em que μ é definida por $\mu(B) = L(\mathrm{c})(st^{-1}(B))$, qualquer que seja $B \subset [0,1]$ boreliano.*

Demonstração. Note-se que $st^{-1}\Big((a,b)\Big) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(S \cap {}^*\left(a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right)\right)$. Mas do lema anterior sabemos que $S \cap {}^*\left(a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right) \in L(\mathcal{P}_I(S))$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e portanto, por definição da σ-álgebra, concluímos que $st^{-1}\Big((a,b)\Big) \in L(\mathcal{P}_I(S))$.

Do teorema anterior temos que $L(\mathbb{c})\left(S\cap {}^*\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right)\right)=b-a+\frac{2}{n}$. Assim, como a sequência $\left(S\cap {}^*\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente com n então:

$$\mu((a,b))=L(\mathbb{c})(st^{-1}(a,b))=\lim_{n\in\mathbb{N}}L(\mathbb{c})\left(S\cap {}^*\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\in\mathbb{N}}b-a+\frac{2}{n}=b-a.$$

Como μ e ℓ coincidem nos intervalos abertos e como a σ-álgebra dos intervalos abertos coincide com a σ-álgebra de Borel, então as duas medidas coincidem em todos os borelianos de $[0,1]$. $\square$

3.2.3 Medidas em sistemas dinâmicos

Podemos ainda usar a construção da secção 3.2.1 para definir medidas invariantes para um sistema dinâmico.

Consideremos (E,d) um espaço métrico compacto e seja $T:E\to E$ contínua. Seja x_0 um ponto de E e seja $\mathcal{O}(x_0)=(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ a sua órbita em E, por T ($x_k=T^k(x_0)$). Estendemos $\mathcal{O}(x_0)$ a ${}^*\mathcal{O}(x_0)=(x_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$. Tal como já foi referido, fixado um hiper natural $N\in{}^*\mathbb{N}-\mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{O}_N(x_0)=\{x_k\in{}^*\mathcal{O}(x_0):0\leq k\leq N-1\}$, contém toda a informação dinâmica de x_0 em E. Como ${}^*\mathcal{O}(x_0)$ é interno então $\mathcal{O}_N(x_0)$, pelo princípio de definição interna, é interno. Como $\mathcal{O}_N(x_0)$ é hiper-finito então podemos definir as medidas $\mathbb{m}_T$, $\mathbb{c}_T$ por:

$$\begin{array}{rccl}\mathbb{c}: & \mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N(x_0)) & \to & {}^*[0,+\infty[\\ & A & \to & \dfrac{\sharp A}{N}=\dfrac{\sharp\{x_k\in\mathcal{O}_N(x_0):x_k\in A\}}{N}\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl}\mathbb{m}: & {}^*\mathcal{B} & \to & {}^*[0,+\infty[\\ & A & \to & \mathbb{c}(A\cap\mathcal{O}_N)\end{array}$$

Nota 3.2.20. *Neste contexto, a medida $\mathbb{m}_T$ conta o tempo que, em média, os primeiros N elementos da extensão da órbita de x_0 passam em cada *boreliano e portanto, no fundo, o que nos interessa é determinar esses tempos. Consideremos, por isso, a seguinte medida interna $\mathbb{t}$, no segmento hiper-natural até N:*

$$\begin{array}{rccl}\mathbb{t}: & \mathcal{P}_I(\{0,...,N-1\}) & \to & {}^*[0,+\infty[\\ & I & \to & \dfrac{\sharp I}{N}\end{array}$$

*Assim, se para cada *boreliano B definirmos $I_B=\{0\leq i\leq N-1:x_k\in B\}$, então é evidente que $\mathbb{c}_T(B\cap\mathcal{O}_N)=\mathbb{m}_T(B)$ e, no caso de $\mathcal{O}(x_0)$ ser tal que, se $i\neq j$ então $x_i\neq x_j$ temos as seguintes igualdades:*

$$\mathbb{c}_T(B\cap\mathcal{O}_N)=\mathbb{m}_T(B)=\mathbb{t}(I_B).$$

Ou seja, no caso de $x_i \neq x_j$, $0 \leq i, j \leq N-1$ a seguinte função interna é um isomorfismo de medida entre $\mathbb{c}_T$ e $\mathbb{t}$:

$$\begin{array}{rcll} x. : & \{0 \leq i \leq N-1\} & \rightarrow & \mathcal{O}_N \\ & i & \rightarrow & x_i \end{array}$$

Tal como foi feito atrás, podemos construir uma medida μ_T nos borelianos de E. Note-se que as medidas de Loeb associadas às medidas de contagem $\mathbb{c}_T$, $\mathbb{m}_T$, e portanto μ_T, dependem do ponto inicial x_0, de N e claro da dinâmica T. A medida em E definida por $\mu_T(B) = L(\mathbb{c})(st^{-1}(B))$ tem propriedades interessantes.

Proposição 3.2.21.

1. $\mu_T(sh(\mathcal{O}_N(x_0))) = 1$;

2. $\mu_T(\omega(x_0)) = 1$, *onde* $\omega(x_0)$ *é o conjunto de pontos de acumulação da órbita de* x_0.

Demonstração.

1. Como $\mathcal{O}_N(x_0)$ é um conjunto interno então $sh(\mathcal{O}_N(x_0))$ é um conjunto fechado e portanto é um boreliano. Assim, $\mu_T(sh(\mathcal{O}_N(x_0))) = L(\mathbb{c}_T)(sh^{-1}(sh(\mathcal{O}_N(x_0)))) \geq L(\mathbb{c}_T)(\mathcal{O}_N(x_0)) = 1$. Como $\mathbb{c}_T$ só toma valores entre 0 e 1 então o mesmo acontece com $L(\mathbb{c}_T)$, donde resulta que $\mu_T(sh(\mathcal{O}_N(x_0))) = 1$.

2. Do corolário 2.6.9 sabemos que $\omega(x_0) = st(\{x_M : M \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \wedge M \leq N\})$. Como:

$$\{x_N : N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x_i : n \leq i \leq N\}$$

   e como, para cada n, $\{x_i : n \leq i \leq N\}$ é um subconjunto interno de $\mathcal{O}_N(x_0)$, então $\omega(x_0) \in L(\mathcal{P}_I(O_N(x_0)))$. Além disso, qualquer que seja o $n \in \mathbb{N}$:

$$L(\mathbb{c}_T)(\{x_i : n \leq i \leq N\}) = st\left(\frac{N-n}{N}\right) = 1,$$

   donde resulta que $L(\mathbb{c}_T)(\{x_N : N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}\}) = 1$ e portanto $\mu_T(\omega(x_0)) = 1$.

□

Os próximos resultados desta secção conduzem à prova de que μ_T é T-invariante.

Proposição 3.2.22. *$L(\mathbb{c}_T)$ é uma medida ${}^*T$-invariante.*

Demonstração. Para provar que a medida $L(\mathbb{c}_T)$ é $^*T$-invariante temos que provar que se A é um elemento da σ-álgebra de Loeb $\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N(x_0))$ então $L(\mathbb{c}_T)(^*T^{-1}(A)) = L(\mathbb{c}_T)(A)$.

Comecemos por considerar conjuntos internos A. Então, por transferência, $^*T^{-1}(A)$ é um conjunto interno. Queremos então provar que se verifica a seguinte condição:

$$\frac{\sharp\{x_k \in \mathcal{O}_N(x_0) : x_k \in {}^*T^{-1}(A)\}}{N} \approx \frac{\sharp\{x_k \in \mathcal{O}_N(x_0) : x_k \in A\}}{N}$$

ou seja,

$$\frac{\sharp\{k \in \{0,...,N-1\} : x_k \in {}^*T^{-1}(A)\}}{N} \approx \frac{\sharp\{k \in \{0,...,N-1\} : x_k \in A\}}{N}$$

Mas se $x_k \in {}^*T^{-1}(A)$ então isso significa que $^*T(x_k) \in A$, ou seja, $x_{k+1} \in A$. Assim, concluímos que se $k \in \{i \in \{0,...,N-1\} : x_i \in {}^*T^{-1}(A)\}$ então $k+1 \in \{i \in \{0,...,N-1\} : x_i \in A\}$. Logo:

$$\frac{\sharp\{k \in \{0,...,N-1\} : x_k \in {}^*T^{-1}(A)\}}{N} = \frac{\sharp\{k \in \{1,...,N\} : x_k \in A\}}{N}$$

Deste modo, se denotarmos o conjunto $\{k \in \{1,...,N\} : x_k \in A\}$ por $I_{^*T^{-1}(A)}$ e o conjunto $\{k \in \{0,...,N-1\} : x_k \in A\}$ por I_A, temos que, $I_{^*T^{-1}(A)} \Delta I_A = \{0, N\}$ e portanto vem que:

$$\begin{aligned}\frac{\sharp\{k \in \{0,...,N-1\} : x_k \in {}^*T^{-1}(A)\}}{N} &= \frac{\sharp\{k \in \{1,...,N\} : x_k \in {}^*T^{-1}(A)\}}{N} \\ &\approx \frac{\sharp\{k \in \{0,...,N-1\} : x_k \in A\}}{N}\end{aligned}$$

como pretendíamos mostrar.

Suponhamos agora que A é um conjunto Loeb mensurável de $\mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N(x_0))$ qualquer. Como a medida $\mathbb{c}_T$ é finita então A é Loeb aproximável e portanto, fixado ε existem conjuntos internos O e K tais que $K \subset A \subset O$ e $L(\mathbb{c}_T)(O) - L(\mathbb{c}_T)(K) < \varepsilon$. Usando a inclusão anterior podemos escrever que $^*T^{-1}(K) \subset {}^*T^{-1}(A) \subset {}^*T^{-1}(O)$. Mas, por transefrência, $L(\mathbb{c}_T)(^*T^{-1}(O)) - L(\mathbb{c}_T)(^*T^{-1}(K)) = L(\mathbb{c}_T)(O) - L(\mathbb{c}_T)(K) < \varepsilon$, donde se conclui que $^*T^{-1}(A)$ é aproximável e portanto mensurável. Além disso concluímos que $|L(\mathbb{c}_T)(^*T^{-1}(A)) - L(\mathbb{c}_T)(A)| < \varepsilon$. Como ε era qualquer então $L(\mathbb{c}_T)(^*T^{-1}(A)) = L(\mathbb{c}_T)(A)$, como pretendíamos. □

Lema 3.2.23. *Se T é uma dinâmica contínua num espaço métrico E qualquer então $T \circ st = st \circ {}^*T$, ou seja, o diagrama seguinte comuta:*

$$\begin{tikzcd} {}^*E \arrow[r, "^*T"] \arrow[d, "st"'] & {}^*E \arrow[d, "st"] \\ E \arrow[r, "T"] & E \end{tikzcd}$$

Demonstração. Por definição, $st(x) \approx x$ e, portanto, por continuidade, $T(st(x)) \approx T(x)$. Logo $st(T(st(x))) = st(T(x))$. Mas, como $st(x)$ é um elemento standard de E, resulta que $st(T(st(x))) = T(st(x))$. Logo $T(st(x)) = st(T(x))$. □

Proposição 3.2.24. *A medida μ_T é T-invariante.*

Demonstração. Quero provar que se B é um boreliano então $\mu_T(T^{-1}(B)) = \mu_T(B)$. Mas:

$$\begin{aligned} \mu_T(T^{-1}(B)) &= L(\mathbb{c}_T)(sh^{-1}(T^{-1}(B))) && \\ &= L(\mathbb{c}_T)({}^*T^{-1}(sh^{-1}(B))) && \text{pelo lema anterior} \\ &= L(\mathbb{c}_T)(sh^{-1}(B)) && \text{pela proposição 3.2.22} \\ &= \mu_T(B). && \text{por definição} \end{aligned}$$

□

3.2.4 Funções integráveis

Antes de estabelecermos propriedades sobre funções integráveis impõe-se a definição de mensurabilidade:

Definição 3.2.25. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ dois espaços mensuráveis quaisquer, isto é, dois espaços munidos cada um com uma álgebra. Uma função $\phi : X \longrightarrow Y$ diz-se mensurável se para todo o $B \in \mathcal{B}$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

As funções Loeb mensuráveis podem ser caracterizadas usando a próxima proposição:

Proposição 3.2.26. *Seja $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de medida interna e defina-se por $L(Y) = (Y, L(\mathcal{A}), L(\nu))$ o respectivo espaço de Loeb. Considere-se a função $\phi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$. São condições equivalentes:*

1. *ϕ é $L(\mathcal{A})$-mensurável, isto é, para todo o $a \in \mathbb{R}$, $\phi^{-1}\big((-\infty, a]\big) \in L(\mathcal{A})$;*
2. *Existe uma função interna $\Phi : Y \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-*mensurável tal que ${}^\circ\Phi(y) = \phi(y)$, $L(\nu)$-qtp $y \in Y$; (Φ ser $\mathcal{A}$-*mensurável significa que $\forall r \in {}^*\mathbb{R}$, $\{y \in Y : \Phi(y) \leq r\} \in \mathcal{A}$).*

*Em particular, vem que, se Φ é $\mathcal{A}$-*mensurável, então ${}^\circ\Phi$ é Loeb mensurável.*

Definição 3.2.27. *A função Φ do teorema anterior será aqui designada por levantamento de ϕ.*

Demonstração. ($2 \Rightarrow 1$) Seja Φ uma função $\mathcal{A}$-*mensurável. Por definição de mensurabilidade, em particular, sabemos que dado $s \in \mathbb{R}$, $\Big\{y \in Y : \Phi(y) \leq s\Big\} \in \mathcal{A}$ donde se deduz que:

$$\{y \in Y : {}^\circ\Phi(y) \leq r\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{y \in Y : \Phi(y) \leq r + \frac{1}{n}\right\} \in L(\mathcal{A}).$$

Logo, $°\Phi(y)$ é Loeb mensurável. Como ϕ e $°\Phi$ são iguais a menos de conjuntos de medida nula então ϕ também é Loeb mensurável.

$(1 \Rightarrow 2)$ Seja $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos números racionais. Defina-se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, os conjuntos $B_n = \{y \in Y : \phi(y) \leq q_n\}$. Pelo corolário 3.2.8, como cada B_n é mensurável, existem $A_n \in \mathcal{A}$ tais que $L(\nu)(A_n \Delta B_n) = 0$. Pela forma como foram definidos os conjuntos B_n, se $q_n \leq q_m$, então $B_n \subset B_m$ e, portanto também se tem que $A_n \subset A_m$. Por compreensão, 2.6.5, estendemos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$. Por permanência superior, 2.6.7, existe $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que para todos os $m, n \leq H$, $A_n \in \mathcal{A}$ e se $q_n \leq q_m$ então $A_n \subset A_m$. Uma vez que $\{q_1, ..., q_H\}$ é hiper-finito e $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \leq H$, podemos definir uma função interna e $\mathcal{A}$-mensurável, $\Phi : Y \to {}^*\mathbb{R}$ de tal modo que, para todo o $n \leq H$, $\Phi(y) \leq q_n$ sse $y \in A_n$. Uma possível função Φ é:

$$\Phi(y) = \begin{cases} q_1 & se \quad y \in A_1 \\ q_j & se \quad y \in A_j - A_{j-1} \text{ e } 1 < j \leq H \\ q_{H+1} & se \quad j \notin A_H \end{cases}$$

Mas $L(\nu)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \Delta B_n)\right) = 0$ e se y não pertence a este conjunto então $\Phi(y) \leq q_n \Leftrightarrow \phi(y) \leq q_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, ou seja, para $L(\nu)$-qtp y, $°\Phi(y) = \phi(y)$. □

Nota 3.2.28. *A função Φ construída na prova anterior é uma função *simples, isto é, o seu contradomínio é um conjunto hiper-finito e portanto o seu integral não standard, que resulta da aplicação de transferência à definição standard de integral, pode ser visto como uma soma hiper-finita.*

Teorema 3.2.29. *Seja $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de medida interna e consideremos $L(Y) = (Y, L(\mathcal{A}), L(\nu))$ o respectivo espaço de Loeb. Se ϕ é Loeb mensurável e limitada e Φ é um levantamento de ϕ também limitado então $\int \phi dL(\nu) = st\left(\int \Phi d\nu\right)$.*

Demonstração. Comecemos por observar que se Φ_1 e Φ_2 são 2 levantamentos limitados de ϕ, então $\int \Phi_1 d\nu \approx \int \Phi_2 d\nu$, uma vez que, por definição de levantamento, para ν quase todo o y e para todo o $n \in \mathbb{N}$, $|\Phi_1(y) - \Phi_2(y)| \leq 1/n$. Consideremos uma função simples g tal que $g \leq \phi$ e seja G o seu levantamento. Como g é uma função simples então um qualquer seu levantamento é também simples a menos de conjuntos de medida $L(\nu)$-nula. Assim, a igualdade dos integrais $\int gdL(\nu)$ e $st\left(\int Gd\nu\right)$ decorre de imediato. Como g é menor que ϕ então ϕ admite um levantamento Φ_1 limitado tal que $G \leq \Phi_1$ e portanto $\int gdL(\nu) = st\left(\int Gd\nu\right) \leq st\left(\int \Phi_1 d\nu\right) = st\left(\int \Phi d\nu\right)$, pela observação inicial. Como a função g é uma função simples qualquer e como qualquer função integrável pode ser aproximada por baixo por funções simples então concluímos que $\int \phi dL(\mu) \leq st\left(\int \Phi d\mu\right)$. A desigualdade $\int \phi dL(\mu) \geq st\left(\int \Phi d\mu\right)$ resulta por simetria, considerando $-\phi$ e $-\Phi$, uma vez que, o mesmo argumento prova que $\int -\phi dL(\mu) \leq st\left(\int -\Phi d\mu\right)$, ou seja, $\int \phi dL(\mu) \geq st\left(\int \Phi d\mu\right)$ □

No caso de a função ϕ não ser limitada não é possível encontrar um seu levantamento Φ também ele limitado. Contudo podemos escolher Φ de tal modo que o teorema anterior ainda é válido.

Definição 3.2.30. *Seja $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de medida interno e consideremos $\Phi : Y \to {}^*\mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A}$-*mensurável. Dizemos que Φ é $\mathcal{S}$-integrável se para todo o $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$,* $\int_{|\Phi| \geq H} |\Phi| d\nu \approx 0$.

Teorema 3.2.31. *Consideremos $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de medida interna e seja $L(Y) = (Y, L(\mathcal{A}), L(\nu))$ o respectivo espaço de medida de Loeb. Considere-se a função $\phi : Y \to \mathbb{R}$. As condições seguintes são equivalentes:*

1. *ϕ é integrável com respeito à medida de Loeb $L(\nu)$;*

2. *ϕ admite um levantamento $\mathcal{S}$-integrável, $\Phi : Y \to {}^*\mathbb{R}$.*

Além disso, se as condições anteriores se verificarem, então $\int \phi dL(\nu) = st\left(\int \Phi d\nu\right)$.

Demonstração. O argumento que aqui fazemos é para funções ϕ positivas. O caso geral obtém-se aplicando o processo para funções positivas às funções $\phi^+ = \max\{0, \phi\}$ e $\phi^- = \max\{0, -\phi\}$, que, sendo ϕ integrável, são funções integráveis.

$(1 \Rightarrow 2)$ Suponhamos que $\Phi' \geq 0$ é um levantamento de $\phi \geq 0$. Considere-se as funções $\Phi_n = \max\{\Phi', n\}$. Do último teorema, sabemos que $st\left(\int \Phi_n d\nu\right) = \int \max\{\phi, n\} dL(\nu) \nearrow \int \phi dL(\nu)$. Estendemos $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(\Phi_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ por compreensão. Por permanência superior existe $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ tal que $\int \Phi_H d\nu \approx \int \phi dL(\nu)$. Como ϕ é Loeb integrável então claramente $\Phi = \Phi_H$ é $\mathcal{S}$-integrável e é um levantamento de ϕ.

$(2 \Rightarrow 1)$ Suponhamos que Φ é um levantamento de ϕ $\mathcal{S}$-integrável. Por definição de $\mathcal{S}$-integrabilidade $\int_{\Phi \geq H} \Phi d\nu \approx 0$, para qualquer $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ e portanto por permanência inferior para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq n$ então $\int_{\Phi \geq m} \Phi d\nu \leq \varepsilon$. Então pelo teorema anterior resulta que:

$$\begin{aligned}\int \max\{\phi, m\}dL(\nu) &\approx \int \max\{\Phi, m\}d\nu \leq \int \Phi d\nu \leq \\ &\leq \int \max\{\Phi, m\}d\nu + \varepsilon \approx \int \max\{\phi, m\}dL(\nu) + \varepsilon\end{aligned}$$

donde resulta que $st\left(\int \Phi d\nu\right)$ é finito e é o limite de $\int \max\{\phi, m\}dL(\nu)$ quando m tende a infinito, como pretendíamos.

Desta prova apenas podemos concluir que qualquer levantamento Φ de ϕ satisfaz:

$$\int \phi dL(\nu) \leq st\left(\int \Phi d\nu\right).$$

Contudo, a $\mathcal{S}$-integrabilidade garante a igualdade das duas expressões, como mostra a terceira parte do teorema seguinte. $\square$

Teorema 3.2.32. *Seja $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de medida interna finita e seja $\Phi : Y \to {}^*\mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A}$-*mensurável. As condições seguintes são equivalentes:*

1. *Φ é $\mathcal{S}$-integrável;*
2. *(a) $st\left(\int |\Phi| d\nu\right) < \infty$;*

   (b) Se $\nu(A) \approx 0$ então $\int_A |\Phi| d\nu \approx 0$;
3. *$\int st(|\Phi|)dL(\nu) = st\left(\int |\Phi| d\nu\right) < \infty$;*

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ (a) Se Φ é $\mathcal{S}$-integrável então dado $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, $\int_{|\Phi| \geq H} |\Phi| d\nu \approx 0$, ou seja, para qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tem-se que $\int_{|\Phi| \geq H} |\Phi| d\nu < \varepsilon$. Fixemos então $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Por permanência inferior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{|\Phi| \geq n} |\Phi| d\nu < \varepsilon$. Assim, $st\left(\int |\Phi| d\nu\right) = st\left(\int_{|\Phi| \geq n} |\Phi| d\nu\right) + st\left(\int_{|\Phi| \leq n} |\Phi| d\nu\right) < \varepsilon + n \times \nu(A) < \infty$.

(b) Como Φ é $\mathcal{S}$-integrável então fixado um $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tem-se, para todo o $H \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, $\int_{|\Phi| \geq H} |\Phi| d\nu < \varepsilon$. Por permanência inferior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{|\Phi| \geq n} |\Phi| d\nu < \varepsilon$. Resulta então que:

$$\int_A |\Phi| d\nu = \int_{\{x \in A : |\Phi| \leq n\}} |\Phi| d\nu + \int_{\{x \in A : |\Phi| \geq n\}} |\Phi| d\nu < \underbrace{n \times \nu(A)}_{\approx 0} + \varepsilon \approx \varepsilon$$

Como $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ era qualquer então $st\left(\int_A |\Phi| d\nu\right) \approx 0$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sendo Φ $\mathcal{A}$-mensurável temos que Φ é um levantamento de $°\Phi$ e portanto, $°|\Phi| = |°\Phi| = |\Phi|$, excepto num conjunto de medida $L(\nu)$-nulo. Seja A esse conjunto. Então temos que:

$$\int st(|\Phi|)dL(\nu) = \int_{Y-A} st(|\Phi|)dL(\nu) \approx \int_{Y-A} |\Phi| d\nu =$$

$$\int_{Y-A} |\Phi| d\nu + \int_A |\Phi| d\nu = \int |\Phi| d\nu$$

Logo $\int st(|\Phi|)dL(\nu) \approx \int |\Phi| d\nu$ donde resulta que:

$$st\left(\int st(|\Phi|)dL(\nu)\right) = \int st(|\Phi|)dL(\nu) = st\left(\int |\Phi| d\nu\right)$$

$(3 \Rightarrow 1)$ Φ é um levantamento de $st(\Phi)$. Como $\int st(|\Phi|)d\nu = st\left(\int |\Phi| d\nu\right) < \infty$, então $st(\Phi)$ é Loeb integrável. Logo por um teorema visto atrás $st(\Phi)$ admite um levantamento finito, Φ_1, $\mathcal{S}$-integrável. Como Φ_1 e Φ são levantamentos de $st(\Phi)$ então estão infinitamente perto em quase todo o lado e portanto sendo Φ_1 $\mathcal{S}$-integrável então também o é Φ. $\square$

Podemos adaptar estes teoremas ao caso das medidas de contagem, num espaço métrico E qualquer.

Definição 3.2.33. *Seja $\phi : E \to \mathbb{R}$. Uma aplicação $\Phi : \mathcal{O}_N \to {}^*\mathbb{R}$ é um levantamento de ϕ se Φ é uma aplicação interna e $st(\Phi(t)) = \phi(st(t))$, para $L(\mathbb{c})$-qtp, $t \in \mathcal{O}_N(x_0)$. Ou seja, Φ é um levantamento, no sentido da proposição 3.2.26, da função:*

$$\begin{array}{rccc} \hat{\phi}: & \mathcal{O}_N(x_0) & \to & \mathbb{R} \\ & t & \to & \phi(st(t)) \end{array}$$

Consideremos novamente a medida μ definida num boreliano B por $\mu(B) = L(\mathbb{c})(st^{-1}(B))$. Então vale o seguinte teorema:

Teorema 3.2.34. *Seja $\phi : E \to \mathbb{R}$ uma função. São condições equivalentes:*

1. *ϕ é μ-mensurável;*

2. *$\hat{\phi}$ é $L(\mathbb{c})$-*mensurável;*

3. *ϕ admite um levantamento Φ, $\mathbb{c}$-*mensurável;*

Demonstração. (1 $\Leftrightarrow$ 2) Consideremos os conjuntos $A = \{y \in E : \phi(y) \leq r\}$ e o conjunto $B = \{x \in \mathcal{O}_N : \hat{\phi}(x) \leq r\}$. Temos que $sh^{-1}(A) = B$:

$$y \in sh^{-1}(A) \Leftrightarrow st(y) \in A \Leftrightarrow \phi(st(y)) \leq r \Leftrightarrow \hat{\phi}(y) \leq r \Leftrightarrow y \in B$$

Logo, A é μ-mensurável sse $sh^{-1}(A)$ é $L(\mathbb{c})$-*mensurável. Logo, a primeira equivalência é verdadeira.

(2 $\Leftrightarrow$ 3) Resulta de imediato do teorema geral 3.2.26. □

No caso particular de ϕ ser contínua, o teorema anterior garante que $^*\phi$ é um levantamento de ϕ $\mathbb{c}$-mensurável.

Teorema 3.2.35. *São condições equivalentes:*

1. *ϕ é μ integrável.*
2. *ϕ admite um levantamento S-integrável Φ, com respeito à medida $\mathbb{c}$.*

Se as duas condições se verificarem então:

$$\int_E \phi d\mu = st\left(\int_{\mathcal{O}_N(x_0)} \Phi d\mathbb{c}\right) = st\left(\frac{1}{N}\sum_{x\in\mathcal{O}_N(x_0)} \Phi(x)\right).$$

Nota 3.2.36. *A última igualdade do teorema anterior resulta do facto de $\mathcal{O}_N(x_0)$ ser um conjunto hiper-finito cujos pontos têm todos a mesma medida para $\mathbb{c}$.*

Demonstração. (1 $\Rightarrow$ 2) Se ϕ é μ integrável, então ϕ é μ-mensurável e é limitada μ-qtp. Assim, $\hat{\phi}$, definida em 3.2.33, é Loeb mensurável e $L(\mathbb{c})$-qtp limitada. Logo, $\hat{\phi}$ admite um levantamento Φ $\mathbb{c}$-mensurável e $\mathbb{c}$ quase sempre limitada e portanto Φ é S-integrável com respeito à medida $\mathbb{c}$, ou seja, ϕ admite um levantamento Φ S-integrável com respeito a $\mathbb{c}$.

(2 $\Rightarrow$ 1) Suponhamos que Φ é um levantamento S-integrável de ϕ. Sendo S-integrável com respeito a $\mathbb{c}$, Φ é integrável e portanto $\mathbb{c}$-mensurável. Logo ϕ é μ-mensurável. Além disso, $\int \phi d\mu = \int \hat{\phi} dL(\mathbb{c}) = \int st(\Phi) dL(\mathbb{c}) = st\left(\int \Phi d\mathbb{c}\right) < \infty$.

A primeira igualdade descrita resulta do facto de $\int_E \phi d\mu \approx \int_{\mathcal{O}_N(x_0)} \hat{\phi} dL(\mathbb{c})$ e do facto de, pelo teorema 3.2.31, termos que $\int_{\mathcal{O}_N(x_0)} \hat{\phi} dL(\mathbb{c}) = st\left(\int \Phi d\mathbb{c}\right)$ □

Novamente, se ϕ é contínua e integrável então do teorema anterior resulta que $^*\phi$ é um levantamento de ϕ $\mathbb{c}$-integrável e $\int \phi d\mu = st\left(\int {}^*\phi d\mathbb{c}\right)$.

Capítulo 4

Medidas Ergódicas

Neste capítulo caracterizamos as medidas ergódicas em espaços métricos sob o ponto de vista da análise não standard. O resultado principal mostra que podemos ver uma medida ergódica como uma medida de contagem, descrita no capítulo anterior.

4.1 Pontos típicos de Birkhoff

Começamos por estabelecer alguns conceitos amplamente conhecidos em teoria ergódica de sistemas dinâmicos.

Definição 4.1.1. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e $T : X \to X$ uma dinâmica mensurável. A medida μ diz-se T-invariante (ou T preserva μ) se $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu\big(T^{-1}(A)\big) = \mu(A)$.*

Definição 4.1.2. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e $T : X \to X$ uma dinâmica mensurável. T diz-se ergódica sse os seus únicos conjuntos invariantes são, sob o ponto de vista da medida, triviais, isto é, se E é um conjunto mensurável e T-invariante, então $\mu(E) = 0$ ou $\mu(X - E) = 0$.*

Um dos resultados mais importantes de teoria ergódica é o conhecido teorema ergódico de Birkhoff. A sua demonstração pode ser encontrada em numerosos livros de texto sobre teoria Ergódica de sistemas dinâmicos. Entre as várias referências possíveis sugerimos [14], [19], [27].

Teorema 4.1.3 (Birkhoff). *Suponhamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida de probabilidade. Se $T : X \to X$ é uma dinâmica que preserva μ e se $\phi \in L^1(\mu)$ então $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi(T^k x)$ converge μ-qtp. Além disso, a função limite $\hat{\phi}(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi(T^k x)$ é T-invariante, μ-integrável e $\int \hat{\phi} d\mu = \int \phi d\mu$.*

No caso da medida μ considerada nas hipóteses do teorema de Birkhoff ser ergódica podemos obter, como consequência, o seguinte corolário:

Corolário 4.1.4. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida de probabilidade e $T : X \to X$ uma dinâmica que preserva a medida de probabilidade μ. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *T é ergódica;*
2. *Se $\phi : X \to \mathbb{R}$ é mensurável e $\phi \circ T = T$ μ-qtp, então ϕ é constante μ-qtp;*
3. *Se $\phi : X \to \mathbb{R}$ é função de $L^1(\mu)$ então $\hat{\phi}(x) = \int \phi d\mu$, para μ-qtp x;*
4. *Se $A \in \mathcal{A}$ então $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sharp\{0 \leq i \leq n-1 : T^i x \in A\} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_A(T^k x) = \mu(A)$, μ-qtp.*

Nota 4.1.5. *Uma prova deste resultado pode ser encontrada nas referências já citadas, [14], [19], [27].*

No caso de a medida μ ser ergódica, o segundo item do corolário anterior garante que, fixada uma função ϕ, μ-integrável, existe um conjunto X' de medida total, isto é, $\mu(X') = 1$, tal que, para todo o $y \in X'$:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi(T^k(y)) = \int \phi d\mu \tag{4.1}$$

Um ponto y nas condições da equação 4.1 diz-se um ponto típico para ϕ.

No que se segue, vamos construir, no caso de X ser um espaço métrico compacto e $\mathcal{B}$ a σ-álgebra dos borelianos de X, um conjunto de pontos $y \in X$ tais que y é típico para toda a função $\phi \in L^1(\mu)$.

Proposição 4.1.6. *Seja X um espaço métrico compacto e seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida de probabilidade. Consideremos $T : X \to X$ uma dinâmica em X para a qual μ é ergódica. Então, existe um conjunto Y de medida μ-total qual que se $y \in Y$ então y é típico para toda a função $\phi \in L^1(\mu)$.*

Demonstração. De um resultado geral de topologia (ver[15]), se X é um espaço métrico compacto então este admite uma base numerável de abertos. Seja $\mathbb{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ essa base. Com esta base podemos construir uma partição numerável, $\mathbb{A} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de X. Assim, para todo o $n \in \mathbb{N}$ todo o aberto B_n é uma reunião de elementos de $\mathbb{A}$.

Continuamos a referirmo-nos a $\mathbb{A}$ como uma base para os abertos de X. A vantagem de se trabalhar com $\mathbb{A}$ é que os seus elementos são disjuntos dois a dois.

Seja A_i um elemento qualquer de $\mathbb{A}$. Como μ é ergódica então, pelo corolário do teorema de Birkhoff $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A_i}(T^k y) = \mu(A_i) = \int \chi_{A_i} d\mu$, para μ-qtp x, ou seja, se denotarmos por A' o conjunto de todos os pontos típicos para χ_{A_i} então $\mu(A'_i) = 1$.

Como todos os conjuntos A'_i têm medida 1 então a intersecção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n$ é também um conjunto de medida 1 pois:

$$\mu\left(X - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X - A'_n)\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(X - A'_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \mu\left(X - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = 0 \Leftrightarrow \mu(X) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right)$$

Seja $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n$, isto é, o conjunto de medida 1 dos pontos típicos para todas as funções característica dos conjuntos da base numerável $\mathbb{A}$. Assim, um qualquer elemento $y \in Y$ satisfaz $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(T^k y) = \mu(A) = \int \chi_A d\mu$, qualquer que seja A, elemento da base de abertos de X. O nosso objectivo é agora provar que todo o elemento $y \in Y$ é ainda um ponto típico para qualquer função μ-integrável.

Fazemos a verificação por etapas. Fixemos um elemento $y \in Y$.

1. Para o complementar de $A_i \in \mathbb{A}$.

   Queremos provar que se A_i é um elemento da base $\mathbb{A}$ então verifica-se a seguinte igualdade: $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A_i^c}(T^k y) = \mu(A_i^c) = \int \chi_{A_i^c} d\mu$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A_i^c}(T^k y) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \chi_{A_i}(T^k y)\right) = \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 - \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A_i}(T^k y) \\
&= 1 - \mu(A_i) = \mu(A_i^c) \\
&= \int \chi_{A_i^c} d\mu.
\end{aligned}$$

2. Para reuniões numeráveis de elementos de $\mathbb{A}$.

   Suponhamos que $(W_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos em $\mathbb{A}$ e que $W = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m$.

   Então:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_W(T^k y) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m}(T^k y) \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m\in\mathbb{N}} \chi_{W_m}(T^k y) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{W_m}(T^k y) = \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(W_m) \\
&= \mu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} W_m\right) = \mu(W) \\
&= \int \chi_W d\mu
\end{aligned}$$

   A troca do cálculo de limite com o somatório é válida pelo seguinte lema, considerando $u_{m,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\bigcup_{i=1}^m W_i}(T^k y)$, $a_m = \mu\left(\bigcup_{i=1}^m W_i\right)$, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_W(T^k y)$ e $a = \mu(W)$.

Lema 4.1.7. *Consideremos sucessões de números, $u_{m,n}$, v_n, a_m e o número a de tal modo que $\lim_{n\to\infty} u_{m,n} = a_m$, $\lim_{m\to\infty} u_{m,n} = v_n$ e $\lim_{m\to\infty} a_m = a$. Então $\lim_{n\to\infty} v_n = a$.*

Demonstração. $|a - v_n| \leq |a - a_m| + |a_m - v_n| \leq |a - a_m| + |a_m - u_{m,n}| + |u_{m,n} - v_n| \to 0$ quando $m, n \to \infty$. $\square$

Retomando a prova do teorema:

3. Para um aberto qualquer de X.

   Como qualquer aberto de X se pode escrever como uma reunião numerável de elementos da base $\mathcal{A}$ então, pela mesma justificação do item anterior, a igualdade também é válida para qualquer aberto.

4. Uma prova semelhante à do item 1 mostra que a igualdade vale as funções características de complementares abertos.

5. Para um fechado qualquer de X.Como o complementar de um fechado é um aberto e a igualdade vale para abertos e complementares de abertos então também vale para fechados.

6. Para um boreliano qualquer de X.

   Como μ é uma medida regular definida sobre os borelianos então se B é um boreliano de X existe uma sucessão de abertos $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ e uma sequência de compactos $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tais que $... \subset K_{p-1} \subset K_p \subset ... \subset B \subset ... \subset A_p \subset A_{p-1} \subset ...$ e $\mu(A_p - K_p) < \frac{1}{n}$. Para cada $p \in \mathbb{N}$ temos que $K_p \subset B \subset A_p$ e portanto $\chi_{K_p} \leq \chi_B \leq \chi_{A_p}$, donde resulta de imediato as seguintes desigualdades:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{K_p}(T^k y) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_B(T^k y) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{A_p}(T^k y)$$

   Como K_p é fechado e A_p é aberto então, passando ao limite sobre n, pelos items 3 e 5, vem que:

$$\mu(K_p) \leq \lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_B(T^k y) \leq \mu(A_p)$$

   Como p é qualquer então tomando limite sobre p as desigualdades permanecem válidas. Mas $\lim_{n\in\mathbb{N}}\mu(K_p) = \lim_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_p) = \mu(B)$, donde resulta que:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\chi_B(T^k y) = \mu(B) = \int \chi_B d\mu.$$

7. Suponhamos agora que s é uma função simples.

   Sendo s uma função simples, sabemos que s é uma combinação linear finita de funções característica, digamos $s = \sum_{i=0}^{m} c_i\chi_{A_i}$. Então, da definição de integral e das propriedades até aqui deduzidas resulta que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s(T^k y) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{m} c_i \chi_{A_i}(T^k y)\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A_i}(T^k y) \\
&= \sum_{i=0}^{m} c_i \mu(A_i) \\
&= \int s d\mu
\end{aligned}$$

8. Seja ϕ uma função μ-integrável qualquer.

   Como as funções simples são densas em $L^1(\mu)$ então existe uma sequência de funções simples $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente para ϕ e, para todo o $m \in \mathbb{N}$, $s_m \leq \phi$. Pelo teorema da convergência dominada sabemos que $\int s_n d\mu$ converge para $\int \phi d\mu$. Assim, usando o lema de à pouco com $u_{m,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_m(T^k y)$, $a_m = \int s_m d\mu$, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi(T^k y)$ e $a = \int \phi d\mu$ podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k y) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\lim_{m\in\mathbb{N}} s_m(T^k y)\right) \\
&= \lim_{m\in\mathbb{N}}\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_m(T^k y)\right) \\
&= \lim_{m\in\mathbb{N}} \int s_m d\mu \\
&= \int \phi d\mu
\end{aligned}$$

□

4.2 Medidas ergódicas como medidas de contagem

Do que vimos na secção anterior, quando $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de probabilidade em que X é um espaço métrico compacto, existe um conjunto $Y \subset X$ tal que $\mu(Y) = 1$ e se $y \in Y$, então y é típico para toda a função $\phi \in L^1(\mu)$.

Definição 4.2.1. *$y \in X$ diz-se típico para μ sse y é típico para toda a função $\phi \in L^1(\mu)$.*

Como $\mu(Y) = 1$ então $Y \neq \emptyset$ e portanto existe $x_0 \in X$ tal que x_0 é típico para μ. Em particular, para todo o boreliano A de X temos que:

$$\mu(A) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sharp\{0 \leq i \leq n-1 : x_i \in A\}}{n}$$

A partir de agora consideramos um alargamento não standard de um universo $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ tal que $\mathbb{X}$ contenha a estrutura do espaço X, conforme descrito na secção 2.6.

Da caracterização dos limites segundo a análise não standard feita na proposição 2.4.5, escolhendo $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ um hiper-natural, podemos escrever que:

$$\mu(A) \approx \frac{\sharp\{0 \leq i \leq N-1 : x_i \in {}^*A\}}{N}$$

ou seja:

$$\mu(A) = st\left(\frac{\sharp\{0 \leq i \leq N-1 : x_i \in {}^*A\}}{N}\right) \tag{4.2}$$

Se considerarmos $\mathbb{m} = \mathbb{m}_{x_0,T}$, a medida de contagem definida nos *borelianos de X, concentrada em x_0 e associada à dinâmica T, através de:

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{m}_{x_0,T}: & {}^*\mathcal{B} & \rightarrow & {}^*[0,+\infty[\\ & A & \rightarrow & \dfrac{\sharp\{0 \leq k \leq N-1 : x_k \in A\}}{N} \end{array}$$

Pelo referido em 5.1.8 temos que:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= st\left(\frac{\sharp\{0 \leq k \leq N-1 : x_k \in {}^*A\}}{N}\right) \\ &= L(\mathbb{m})({}^*A) \end{aligned}$$

Quando $x_i \neq x_j$, para $0 \leq i < j \leq N-1$[1], considerando a medida de contagem que vimos na secção 3.2.1:

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{c}: & \mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N(x_0)) & \rightarrow & {}^*[0,+\infty[\\ & A & \rightarrow & \dfrac{\sharp A}{N} \end{array}$$

temos que $\mu(A) = L(\mathbb{c})({}^*A \cap \mathcal{O}_N(x_0))$.

Seguindo os mesmos argumentos da secção 3.2.1 temos a seguinte proposição, sob a hipótese de $\sharp\{x_0, ..., x_{N-1}\} = N$:

Proposição 4.2.2. *Se B é um boreliano de X então $\mu(B) = L(\mathbb{c})(sh^{-1}(B))$.*

[1] Note-se que esta condição é satisfeita, por transferência, no caso de $\forall i, j \in \mathbb{N} (i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j)$

Demonstração. Seja ν, a medida definida nos borelianos de X dada por:

$$\nu(B) = L(\mathbb{c})(sh^{-1}(B))$$

Do teorema 3.2.14, sabemos que ν é uma medida. Queremos então provar que $\nu(B) = \mu(B)$ qualquer que seja o boreliano B.

Sendo B um boreliano, B é μ-mensurável e como μ é uma medida regular então, fixado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existem K compacto e O aberto tais que $K \subset B \subset O$ e $\mu(O-K) = \mu(O) - \mu(K) < \varepsilon$.

Pelo facto de K ser compacto e O aberto, do teorema 2.7.4, podemos escrever a seguinte cadeia de inclusões:

$$^*K \cap \mathcal{O}_N(x_0) \subset st^{-1}(K) \cap \mathcal{O}_N(x_0) = sh^{-1}(K)$$

$$\subset sh^{-1}(B) \subset sh^{-1}(O) = st^{-1}(O) \cap \mathcal{O}_N(x_0) \subset {}^*O \cap \mathcal{O}_N(x_0)$$

donde resulta que:

$$\mu(K) = L(\mathbb{c})(^*K \cap \mathcal{O}_N(x_0)) \leq L(\mathbb{c})(sh^{-1}(K)) \leq L(\mathbb{c})(sh^{-1}(B)) \leq$$

$$\leq L(\mathbb{c})(sh^{-1}(O)) \leq L(\mathbb{c})(^*O \cap \mathcal{O}_N(x_0)) = \mu(O).$$

Logo, $\mu(K) \leq \nu(B) = L(\mathbb{c})(sh^{-1}(B)) \leq \mu(O)$.

Além disso, como $K \subset B \subset O$, ainda podemos escrever que:

$$^*K \subset {}^*B \subset {}^*O$$

e portanto

$$^*K \cap \mathcal{O}_N(x_0) \subset {}^*B \cap \mathcal{O}_N(x_0) \subset {}^*O \cap \mathcal{O}_N(x_0)$$

Daqui resulta que:

$$\mu(K) = L(\mathbb{c})(^*K \cap \mathcal{O}_N(x_0)) \leq L(^*B \cap \mathcal{O}_N(x_0)) = \mu(B) \leq L(\mathbb{c})(^*O \cap \mathcal{O}_N(x_0))$$

Logo, $|\mu(B) - \nu(B)| \leq \mu(O) - \mu(K) < \varepsilon$.

Como $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ é arbitrário então concluímos que $\mu(B) = \nu(B)$, como pretendíamos. □

Nota 4.2.3. $L(\mathbb{c})(^*A \cap \mathcal{O}_N(x_0)) = L(\mathbb{c})(sh^{-1}(A))$ *uma vez que, por construção temos que* $\mu(A) = L(\mathbb{c})(^*A \cap \mathcal{O}_N(x_0))$ *e pelo teorema anterior* $\mu(A) = L(\mathbb{c})(sh^{-1}(A))$.

Capítulo 5

Levantamento de medidas ao espaço tangente

Neste capítulo consideramos um difeomorfismo $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$, onde $\boldsymbol{M}$ é uma variedade riemanniana compacta e f é de classe C^1. Provaremos que toda a medida μ que seja f-invariante e ergódica admite "levantamento" a medidas definidas no espaço projectivo tangente $\boldsymbol{PM}$ e invariantes pela aplicação induzida por Df em $\boldsymbol{PM}$. Com os levantamento da medida μ obtemos a existência para μ-qtp dos expoentes de Lyapunov de f.

5.1 Medidas em variedades

Em todo este capítulo $\mathbf{M}$ designará uma variedade riemanniana compacta de dimensão finita e $f : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ será um difeomorfismo de classe C^1. A métrica riemanniana, que designamos por d, fornece-nos uma estrutura de espaço métrico em $\mathbf{M}$. Denotamos por $\mathcal{B}$ a σ-álgebra dos borelianos determinada pela métrica d. Vamos também admitir que $(\mathbf{M}, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de probabilidade para o qual μ é f-invariante e ergódica.

O objectivo deste trabalho é provar a existência de um "levantamento" de μ ao espaço projectivo tangente a $\mathbf{M}$ que tenha propriedades de invariância para a derivada de f.

Começamos por definir o espaço projectivo tangente a $\mathbf{M}$ que denotamos por $\mathbf{PM}$. Dado $x \in \mathbf{M}$ temos o espaço tangente a $\mathbf{M}$ em x designado por $T_x\mathbf{M}$ e define-se o fibrado tangente a $\mathbf{M}$, $\mathbf{TM}$, por:

$$\mathbf{TM} = \{(x, v) : x \in \mathbf{M} \wedge v \in T_x\mathbf{M}\}.$$

defina-se a subvariedade $\mathbf{S}^1\mathbf{M}$ de $\mathbf{TM}$ por:

$$\mathbf{S}^1\mathbf{M} = \{(x, v) \in \mathbf{TM} : ||v|| = 1\}$$

Sendo f um difeomorfismo, este induz canonicamente uma aplicação em $\mathbf{S}^1\mathbf{M}$ dada por:

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{S}^1 f: & \mathbf{S}^1\mathbf{M} & \rightarrow & \mathbf{S}^1\mathbf{M} \\ & (x,v) & \rightarrow & \left(f(x), \dfrac{D_x f(v)}{||D_x f(v)||}\right) \end{array}$$

Note-se que esta aplicação está bem definida pois sendo f um difeomorfismo $||D_x f(v)||$ nunca se anula, qualquer que seja $(x,v) \in \mathbf{TM}$. Além disso, como f é de classe C^1, a aplicação $\mathbf{S}^1 f$ é contínua. Na verdade, como f admite inversa diferenciável então $\mathbf{S}^1 f$ é um homeomorfismo cuja inversa é:

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{S}^1 f^{-1}: & \mathbf{S}^1\mathbf{M} & \rightarrow & \mathbf{S}^1\mathbf{M} \\ & (x,v) & \rightarrow & \left(f^{-1}(x), \dfrac{D_x f^{-1}(v)}{||D_x f^{-1}(v)||}\right) \end{array}$$

uma vez que:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^1 f \circ \mathbf{S}^1 f^{-1}(x,v) = {} & \mathbf{S}^1 f\left(f^{-1}(x), \tfrac{D_x f^{-1}(v)}{||D_x f^{-1}(v)||}\right) \\ = {} & \left(f(f^{-1}(x)), \frac{D_{f^{-1}(x)} f\left(\frac{D_x f^{-1}(v)}{||D_x f^{-1}(v)||}\right)}{\left|\left|D_{f^{-1}(x)} f\left(\frac{D_x f^{-1}(v)}{||D_x f^{-1}(v)||}\right)\right|\right|}\right) \\ = {} & \left(x, \frac{\frac{1}{||D_x f^{-1}(v)||} D_{f^{-1}(x)} f(D_x f^{-1}(v))}{\frac{1}{||D_x f^{-1}(v)||} ||D_{f^{-1}(x)} f(D_x f^{-1}(v))||}\right) \\ = {} & \left(x, \frac{D_{f^{-1}(x)} f(D_x f^{-1}(v))}{||D_{f^{-1}(x)} f(D_x f^{-1}(v))||}\right) \\ = {} & (x,v) \end{aligned}$$

De forma análoga se prova que $\mathbf{S}^1 f^{-1} \circ \mathbf{S}^1 f = id_{\mathbf{S}^1\mathbf{M}}$.

Consideremos agora a relação de equivalência $(x,v) \sim (x,-v)$ em $\mathbf{S}^1$. Definimos o espaço quociente $\mathbf{PM} = \mathbf{S}^1\mathbf{M}/_{(x,v)\sim(x,-v)}$ e denotamos por $[x,v]$ a classe de equivalência de (x,v) induzida por esta relação de equivalência $\sim$. Definimos a aplicação $\mathbf{P}f$ por:

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{P}f: & \mathbf{PM} & \rightarrow & \mathbf{PM} \\ & [(x,v)] & \rightarrow & [\mathbf{S}^1 f(x,v)] \end{array}$$

Vamos ver que esta aplicação é também um homeomorfismo em $\mathbf{PM}$.

Em primeiro lugar, $\mathbf{P}f$ está bem definida pois $D_x f(-v) = -D_x f(v)$. Se p é a projecção canónica de $\mathbf{S}^1\mathbf{M}$ em $\mathbf{PM}$, então p é contínua e portanto $\mathbf{P}f = \mathbf{S}^1 f \circ p$ também é contínua.

A inversa de $\mathbf{P}f$ é a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{P}f^{-1}: & \mathbf{PM} & \to & \mathbf{PM} \\ & [(x,v)] & \to & [\mathbf{S}^1 f^{-1}(x,v)] \end{array}$$

uma vez que:

$$\mathbf{P}f \circ \mathbf{P}f^{-1}[(x,v)] = \mathbf{P}f[\mathbf{S}^1 f^{-1}(x,v)] = [\mathbf{S}^1 f \circ \mathbf{S}^1 f^{-1}(x,v)] = [(x,v)].$$

Assim, sendo $\pi(x,v) = x$ para $(x,v) \in \mathbf{TM}$, temos a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PM} & \xrightarrow{\mathbf{P}f} & \mathbf{PM} \\ \pi \big\downarrow & & \pi \big\downarrow \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{f} & \mathbf{M} \end{array}$$

pois, por um lado $\pi \circ \mathbf{P}f[(x,v)] = \pi\left(\left[\left(f(x), \frac{D_x f(v)}{||D_x f(v)||}\right)\right]\right) = f(x)$ e por outro lado $f \circ \pi[(x,v)] = f(\pi[(x,v)]) = f(x)$.

Fixemos x_0 um ponto típico para a medida ergódica μ. Como se mostrou na secção 4.2, para todo o $A \in \mathcal{B}$ temos que:

$$\mu(A) \approx \frac{\sharp\{0 \leq k \leq N-1 : x_k \in {}^*A\}}{N}$$

Desta caracterização resulta de imediato o seguinte lema:

Lema 5.1.1. *${}^*\mu(A) \approx \mathrm{m}_{x_0}(A)$, qualquer que seja $A \in {}^*\mathcal{B}$.*[1]

Demonstração. Sendo μ ergódica então, da caracterização da medida segundo a proposição 4.1.4, fixado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ temos que:

$$(\forall A \in \mathcal{B})(\exists n \in \mathbb{N}) : \left|\mu(A) - \frac{\sharp\{0 \leq k \leq n-1 : f^k(x_0) \in A\}}{n}\right| < \epsilon.$$

então, por transferência, também vale a seguinte sentença:

$$(\forall A \in {}^*\mathcal{B})(\exists N \in {}^*\mathbb{N}) : \left|{}^*\mu(A) - \frac{\sharp\{0 \leq k \leq N-1 : f^k(x_0) \in A\}}{N}\right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ é qualquer então ${}^*\mu(A) \approx \dfrac{\sharp\{1 \leq k \leq N : f^k(x_0) \in A\}}{N} = \mathrm{m}_{x_0}(A)$. □

---

[1]Quando não houver perigo de confusão, denotamos por μ a medida interna ${}^*\mu$.

No caso de $\sharp\{x_0, ..., x_{N-1}\} = N$, tal como já foi referido na secção 4.2 o conjunto $\mathcal{O}_N(x_0)$ tem N elementos e portanto:

$$\mu(A) = st\left(\frac{\sharp\{0 \leq k \leq N-1 : x_k \in {}^*A\}}{N}\right) = L(\mathbb{m})({}^*A)$$

Donde resulta, recorrendo ao lema anterior que $L({}^*\mu)(A) = L(\mathbb{m}_{x_0})(A) = L(\mathbb{c}_{x_0})(A)$, qualquer que seja $A \in {}^*\mathcal{B}$.

No resto desta secção vamos considerar μ não atómica, isto é, para todo o $x \in \mathbf{M}$, $\mu(\{x\}) = 0$. Nestas condições temos:

Proposição 5.1.2. *Todo o ponto típico de μ é não periódico se μ é não atómica.*

Demonstração. Se x_0 fosse um ponto periódico então existia $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_p = f^p(x_0) = x_0$ e assim, sendo x_0 um ponto típico para μ teríamos que $\mu(\{x_0, ..., x_{p-1}\}) = 1$.

Mas isso contraria o facto de μ ser não atómica pois, por μ ser f-invariante, teríamos que:

$$\mu(\{x_i\}) = \mu(f^i(\{x_0\})) \text{ (f é difeomorfismo)}$$

Logo

$$\mu(\{x_0, ..., x_{p-1}\}) = p\mu(\{x_0\})$$

e assim concluímos $\mu(\{x_0\}) = \dfrac{1}{p} > 0$. □

Como f é um difeomorfismo temos:

Corolário 5.1.3. *Se μ é não atómica, x_0 é um ponto típico para μ e $N \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, então $\sharp\{x_0, ..., x_{N-1}\} = N$.*

Demonstração. Se $0 \leq i < j$ e $i, j \in \mathbb{N}$ então $x_i \neq x_j$ pois, caso contrário tomando $k = j - 1$ teríamos $x_j = x_i \Rightarrow f^{-i}(x_j) = f^{-i}(x_i) \Rightarrow x_{j-i} = x_0$. Logo x_0 seria periódico, o que contradiz a proposição anterior. Por transferência segue que:

$$\forall i, j \in {}^*\mathbb{N}(0 \leq i < j \Rightarrow x_i \neq x_j)$$

Logo $\sharp\{x_0, ..., x_{N-1}\} = N$ □

Atendendo a que **PM** com a métrica induzida pela métrica de **TM** é um espaço métrico compacto podemos, tomando uma "direcção" $[v_0] \in \mathbf{PM}$ tal que $v_0 \in T_{x_0}\mathbf{M}$, considerar a hiper-órbita $\mathcal{O}_N([x_0, v_0]) = \{[x_0, v_0], ..., [x_{N-1}, v_{N-1}]\}$ induzida pela aplicação $\mathbf{P}f$ tomando como ponto inicial $[x_0, v_0]$, isto é $[x_k, v_k] = \mathbf{P}f^k([x_0, v_0])$. Os resultados da secção 3.2.3 podem ser aplicados neste contexto e portanto temos uma medida interna definida por[2]:

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{c}_{(x_0,v_0),\mathbf{P}f}: & \mathcal{P}_I(\mathcal{O}_N(x_0, v_0)) & \to & {}^*[0, +\infty[\\ & A & \to & \dfrac{\sharp A}{N} = \dfrac{\sharp\{0 \leq k \leq N-1 : (x_k, v_k) \in A\}}{N} \end{array}$$

Como já provamos no teorema 3.2.22, a medida de Loeb $L(\mathbb{c}_{(x_0,v_0),\mathbf{P}f})$ é invariante pela dinâmica ${}^*\mathbf{P}f$, uma vez que $\mathbf{P}f$ é contínua.

Nota 5.1.4. *De modo a não sobrecarregar notação, sempre que não houver perigo de conclusão omitiremos a indexação das medidas de contagem à dinâmica.*($\mathbb{m} = \mathbb{m}_{x_0,T}$, *etc...*)

Com estas medidas de Loeb podemos, usando a construção da secção 3.2.1, definir uma medida $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ nos borelianos $\mathcal{B}_{\mathbf{PM}}$ de $\mathbf{PM}$ através de:

$$\begin{array}{rccl} \hat{\mu}_{x_0,v_0}: & \mathcal{B}_{\mathbf{PM}} & \to & [0, \infty] \\ & B & \to & L(\mathbb{c}_{(x_0,v_0)})(sh^{-1}(B)) \end{array}$$

Além disso, pela proposição 3.2.24, sabemos que esta medida é invariante pela dinâmica $\mathbf{P}f$, ou seja, $\mathbf{P}f$ preserva $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$. Esta medida $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ satisfaz:

Proposição 5.1.5. *Seja π a projecção canónica de **PM** em **M**. Se A é um boreliano de **M** então:*

$$\hat{\mu}_{x_0,v_0}(\pi^{-1}(A)) = \mu(A).$$

A prova deste resultado é evidente a partir do facto do seguinte lema:

Lema 5.1.6. *Se ${}^*\pi$ é a projecção canónica de ${}^*\mathbf{PM}$ em ${}^*\mathbf{M}$ então, para qualquer conjunto A Loeb mensurável para a medida $L(\mathbb{m}_{x_0})$, temos $L(\mathbb{m}_{x_0})(A) = L(\mathbb{m}_{(x_0,v_0)})({}^*\pi^{-1}(A))$.*

Demonstração. Como $\pi : \mathbf{PM} \to \mathbf{M}$ é contínua então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} {}^*\mathbf{PM} & \xrightarrow{st} & \mathbf{PM} \\ {\scriptstyle {}^*\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ {}^*\mathbf{M} & \xrightarrow{st} & \mathbf{M} \end{array}$$

Assim, para provar que $L(\mathbb{m}_{x_0})(A) = L(\mathbb{m}_{(x_0,v_0)})({}^*\pi^{-1}(A))$, basta provar que se verifica $L(\mathbb{t})(I_A) = L(\mathbb{t})(I_{{}^*\pi^{-1}(A)})$ em que $I_A = \{k \in \{0, ..., N-1\} : x_k \in A\}$ e em que $I_{{}^*\pi^{-1}(A)} = \{k \in \{0, ..., N-1\} : (x_k, v_k) \in {}^*\pi^{-1}(A)\}$ e $\mathbb{t}$ é a medida interna, já introduzida:

[2]Note-se que $\sharp\{x_0, ..., x_{N-1}\} = N \Rightarrow \sharp\{[x_0, v_0], ..., [x_{N-1}, v_{N-1}]\} = N$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{t}: \mathcal{P}_I(\{0,...,N-1\}) & \rightarrow & {}^*[0,+\infty[\\ I & \rightarrow & \frac{\sharp I}{N} \end{array}$$

Se A é um conjunto interno então o conjunto ${}^*\pi^{-1}(A) = \{(x,v) \in {}^*\mathbf{PM} : x \in A\}$ é interno. Além disso, $(x_0, v_0) \in {}^*\pi^{-1}(A)$ sse $x_0 \in A$ ou seja, os conjuntos I_A e $I_{{}^*\pi^{-1}(A)}$ têm o mesmo cardinal, donde resulta que $L(\mathbb{t})(I_A) = L(\mathbb{t})(I_{{}^*\pi^{-1}(A)})$.

No caso mais geral de A ser Loeb mensurável para a medida $L(\mathbb{m}_{x_0})$, sabemos que A é $L(\mathbb{m}_{x_0})$-aproximável e portanto, fixado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existem conjuntos K e O internos tais que $K \subset A \subset O$ e $L(\mathbb{m}_{x_0})(O) - L(\mathbb{m}_{x_0})(K) < \varepsilon$. Daqui concluímos que, $I_K \subset I_A \subset I_O$ e $L(\mathbb{t})(I_O) - L(\mathbb{t})(I_K) < \varepsilon$. Por outro lado, como $K \subset A \subset O$ então ${}^*\pi^{-1}(K) \subset {}^*\pi^{-1}(A) \subset {}^*\pi^{-1}(O)$ e portanto $I_{{}^*\pi^{-1}(K)} \subset I_{{}^*\pi^{-1}(A)} \subset I_{{}^*\pi^{-1}(O)}$. Usando a igualdade obtida para conjuntos internos concluímos que:

$$L(\mathbb{t})(I_O) - L(\mathbb{t})(I_K) = L(\mathbb{t})(I_{{}^*\pi^{-1}(O)}) - L(\mathbb{t})(I_{{}^*\pi^{-1}(K)}) < \varepsilon$$

donde resulta que $|L(\mathbb{t})(I_A) - L(\mathbb{t})(I_{{}^*\pi^{-1}(A)})| < \varepsilon$. Como $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ é qualquer então $L(\mathbb{t})(I_A) = L(\mathbb{t})(I_{{}^*\pi^{-1}(A)})$. □

Demonstração. (da proposição 5.1.5) Se A é um boreliano de $\mathbf{M}$ então $\pi^{-1}(A)$ é um boreliano de $\mathbf{PM}$. Assim, usando o facto de que π ser contínua e usando o lema anterior, temos que:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{x_0,v_0}(\pi^{-1}(A)) &= L(\mathbb{m}_{(x_0,v_0)})(sh^{-1}(\pi^{-1}(A))) = \\ &= L(\mathbb{m}_{(x_0,v_0)})({}^*\pi^{-1}(sh^{-1}(A))) = \\ &= L(\mathbb{t})(I_{sh^{-1}(A)}) = \mu(A). \end{aligned}$$

□

Nota 5.1.7. *A proposição anterior dá o significado de designar a medida $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ por levantamento a $\boldsymbol{PM}$ da medida μ. Concluímos assim que o diagrama que atrás apresentamos ainda é comutativo quando se considera as estruturas de espaço de medida respectivos:*

$$\begin{tikzcd} (\boldsymbol{PM}, \hat{\mu}_{x_0,v_0}) \arrow[r, "Pf"] \arrow[d, "\pi"'] & (\boldsymbol{PM}, \hat{\mu}_{x_0,v_0}) \arrow[d, "\pi"'] \\ (\boldsymbol{M}, \mu) \arrow[r, "f"] & (\boldsymbol{M}, \mu) \end{tikzcd}$$

As medidas $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ são então medidas preservadas por $\mathbf{P}f$ e, a partir de agora, designá-las-emos por levantamentos da medida μ.

Vamos agora provar que sob a hipótese de μ ser não atómica temos que:

Proposição 5.1.8. *Se μ é não atómica então a dinâmica $\boldsymbol{P}f$ é ergódica em relação à medida $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$.*

Demonstração. Quero mostrar que se $B \subset \mathcal{B}_{\mathbf{PM}}$ é $\mathbf{P}f$-invariante e $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) > 0$ então $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) = 1$.

A função:

$$\begin{array}{rccc} p_1: & \mathcal{O}_N(x_0,v_0) & \to & \mathcal{O}_N(x_0) \\ & (x_k,v_k) & \to & x_k \end{array}$$

é uma bijecção. Como as medidas de Loeb em causa são medidas de contagem então p_1 é um isomorfismo de medidas entre $L(\mathbb{c}_{x_0,v_0})$ e $L(\mathbb{c}_{x_0})$. De facto, se $A \in \mathcal{O}_N(x_0,v_0)$ então $(x_k,v_k) \in A$ sse $x_k \in p_1(A)$ e se $D \in \mathcal{O}_N(x_0)$ então $x_k \in D$ sse $(x_k,v_k) \in p_1^{-1}(D)$, uma vez que, para $0 \leq i < j < N$, $x_i \neq x_j$.

Sendo π a projecção canónica de $\mathbf{PM}$ em $\mathbf{M}$ o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_N(x_0,v_0) & \xrightarrow{p_1} & \mathcal{O}_N(x_0) \\ sh\Big\downarrow & & \Big\downarrow sh \\ \mathbf{PM} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{M} \end{array}$$

uma vez que, por um lado, $sh(p_1(x_k,v_k)) = sh(x_k) = st(x_k)$ e, por outro, sendo π contínua, $\pi(sh(x_k,v_k)) = \pi(st(x_k,v_k)) = st({}^*\pi(x_k,v_k)) = st(x_k)$.

Como B é um conjunto $\mathbf{P}f$ invariante, em particular, $\pi(B)$, é invariante por f. Além disso, $\mu(\pi(B)) > 0$, pois se $\mu(\pi(B)) = 0$ então teríamos que $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) \leq \hat{\mu}_{x_0,v_0}(\pi^{-1}(\pi(B))) = \mu(\pi(B)) = 0$, o que por hipótese é falso. Usando o facto de μ ser ergódica, concluímos que $\mu(\pi(B)) = 1$. Logo, por definição, $L(\mathbb{c}_{x_0})(sh^{-1}(\pi(B))) = 1$ e portanto, por p_1 ser um isomorfismo de medida, e o diagrama anterior comutar, resulta que $L(\mathbb{c}_{x_0,v_0})(sh^{-1}(B)) = L(\mathbb{c}_{x_0})(p_1(sh^{-1}(B))) = 1$, ou seja, $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) = 1$ como pretendíamos. □

Na secção seguinte vamos provar a proposição 5.1.8 no caso de μ não ser atómica.

5.2 As medidas atómicas

Quando a medida μ é atómica existe o problema de não termos a garantia que o ponto típico x_0 seja não periódico e portanto $\sharp\mathcal{O}_N(x_0)$ pode não ser N e assim o argumento de p_1 ser isomorfismo de medida na prova da proposição 5.1.8 não pode ser aplicado. Relembramos também que mesmo a medida de contagem $\mathbb{c}_N$ requer que o ponto inicial x_0 seja não periódico, para termos a garantia que as "hiper-órbitas" $\mathcal{O}_N$ têm cardinal N.

Uma maneira de contornar estes casos é interpretar a informação geométrica associada às decomposições de Jordan da aplicação linear df^p, no caso de μ ser suportada numa órbita periódica $x_0, ..., x_p$, para algum $p \in \mathbb{N}$(isto é, o ponto típico x_0 ser periódico). Contudo esta abordagem não nos permite usar os resultados já obtidos de uma forma directa e por isso, não seguimos aqui esse caminho.

Apesar de não podermos definir $\mathbb{c}_{x_0}$, continua a ser possível definir as medidas de contagem $\mathbb{t}$. No resto da secção vamos então mostrar que para toda a medida μ, atómica ou não, temos que:

Teorema 5.2.1. *A dinâmica $\boldsymbol{P}f$ é ergódica em relação à medida $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$.*

Construímos a variedade compacta $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{M}$ e sobre ela definimos a seguinte dinâmica:

$$\begin{array}{rrcl} r \times f: & \mathbf{S}^1 \times \mathbf{M} & \rightarrow & \mathbf{S}^1 \times \mathbf{M} \\ & (\theta, x) & \rightarrow & (r(\theta), f(x)) \end{array}$$

onde $r : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ é uma rotação de ângulo irracional. Deste modo, temos que $r \times f$ é de classe C^1 e qualquer ponto de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{M}$ tem órbita por $r \times f$ injectiva, isto é, qualquer que seja $(\theta, x) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{M}$ e quaisquer que sejam os inteiros $i \neq j$, $(\theta_i, x_i) \neq (\theta_j, x_j)$.

Sobre os borelianos de $\mathbf{S}^1$ consideramos a medida de Lebesgue ℓ, que sabemos ser ergódica com respeito a r, (ver [26]). Além disso, qualquer ponto de $\mathbf{S}^1$ é típico para a medida de Lebesgue com respeito à rotação irracional r.

Lema 5.2.2. *$\ell \times \mu$ é uma medida definida nos borelianos de $\boldsymbol{S}^1 \times \boldsymbol{M}$ que é ergódica com respeito a $r \times f$.*

Demonstração. Seja B um boreliano de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{M}$ invariante por $r \times f$ tal que $\ell \times \mu(B) > 0$. Como $\ell \times \mu(B) > 0$, em particular, $\mu(\pi_2(B)) > 0$ e portanto, sendo x_0 típico para μ existe $0 \leq k \leq p-1$ tal que $x_k \in \pi_2(B)$. Então existe $\theta \in \mathbf{S}^1$ tal que $(\theta, x_k) \in B$. Além disso, como x_0 é periódico de período p então o conjunto $A = \{\theta \in \mathbf{S}^1 : (\theta, x_k) \in B\}$ é invariante por r^p. Como r é uma rotação irracional então então r^p também o é e portanto, sendo A invariante e não vazio, então $\ell(A) = 1$. Por outro lado, $A \times \{x_k\} \subset B$ e portanto, sendo B $r \times f$-invariante concluímos que $A \times \{x_0, ..., x_{p-1}\} \subset B$. Logo, $\ell \times \mu(B) \geq \ell \times \mu(A \times \{x_0, ..., x_{p-1}\}) = \ell(A) \times \mu(\{x_0, ..., x_{p-1}\}) = 1 \times 1 = 1$. □

Estamos então em condições de usar a proposição 5.1.8 para as medidas não atómicas para construir uma medida ergódica em $\mathbf{P}(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{M})$.

O fibrado tangente, $T\mathbf{S}^1 = \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$ induz que $\mathbf{PS}^1 = \{(\theta, t) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R} : t = 1\} \cong \mathbf{S}^1$. Deste modo concluímos então que $\mathbf{P}(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{M}) \cong \mathbf{S}^1 \times \mathbf{PM}$ e além disso temos que:

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{P}(r \times f): & \mathbf{S}^1 \times \mathbf{PM} & \rightarrow & \mathbf{S}^1 \times \mathbf{PM} \\ & (\theta, (x, v)) & \rightarrow & (r(\theta), \mathbf{P}f(x, v)) \end{array}$$

Usando os resultados obtidos para órbitas injectivas, construímos as medidas de contagem $\ell \hat{\times} \mu_{\theta_0, x_0, v_0}$, concentradas em $(\theta_0, [x_0, v_0])$, onde θ_0 é um ponto qualquer de $\mathbf{S}^1$ e v_0 é uma direcção do espaço tangente a $\mathbf{M}$ em x_0. Pela proposição 5.1.8, $\ell \hat{\times} \mu_{\theta_0, x_0, v_0}$ é ergódica.

Vamos agora definir $\hat{\mu}_{x_0,v_0} : \mathcal{B}_{\mathbf{PM}} \to [0,+\infty[$ através de $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) = L(\mathfrak{t})(\{0 \leq k \leq N-1 : [x_k, v_k] \in sh^{-1}(B)\})$, onde $L(\mathfrak{t})$ é a medida de Loeb associada à medida interna:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{t} : \ \mathcal{P}_I(\{0,...,N-1\}) & \to & {}^*[0,+\infty[\\ I & \to & \dfrac{\sharp I}{N} \end{array}$$

Note-se que, para qualquer $\theta_0 \in \mathbf{S}^1$ e para qualquer boreliano B de $\mathbf{PM}$ temos que:

$$\begin{array}{rcl} \hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) & = & L(\mathfrak{t})(\{0 \leq k \leq N-1 : [x_k, v_k] \in sh^{-1}(B)\}) \\ & & \text{(por definição)} \\ & = & L(\mathfrak{t})(\{0 \leq k \leq N-1 : (\theta_0, [x_k, v_k]) \in sh^{-1}(\mathbf{S}^1 \times B)\}) \\ & & \text{(porque para todo o } 0 \leq k \leq N-1 \ \theta_k \in sh^{-1}(\mathbf{S}^1)) \\ & = & \ell \hat{\times} \mu_{\theta_0,x_0,v_0}(\mathbf{S}^1 \times B) \\ & & \text{(por definição)} . \end{array}$$

Proposição 5.2.3. *As medidas $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ são ergódicas.*

Demonstração. Seja B um boreliano de $\mathbf{PM}$, $\mathbf{P}f$-invariante, tal que $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) > 0$. Queremos mostrar que $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) = 1$. Como $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) > 0$ então, para todo o $\theta_0 \in \mathbf{S}^1$ $\ell \hat{\times} \mu_{\theta_0,x_0,v_0}(\mathbf{S}^1 \times B) > 0$. Como a medida $\ell \times \mu$ é ergódica, pela proposição 5.1.8, sendo $\mathbf{S}^1 \times B$ invariante para $r \times \mathbf{P}f$ segue que $\ell \hat{\times} \mu_{\theta_0,x_0,v_0}(\mathbf{S}^1 \times B) = 1$, ou seja, $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(B) = 1$, como pretendíamos mostrar. □

Proposição 5.2.4. *Se A é um boreliano de $\boldsymbol{M}$ e π é a projecção canónica de $\boldsymbol{PM}$ em $\boldsymbol{M}$ então, $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(\pi^{-1}(A)) = \mu(A)$.*

Demonstração.

$$\begin{array}{rcl} \hat{\mu}_{x_0,v_0}(\pi^{-1}(A)) & = & \ell \hat{\times} \mu_{\theta_0,x_0,v_0}(\mathbf{S}^1 \times \pi^{-1}(A)) \\ & = & \ell \hat{\times} \mu_{\theta_0,x_0,v_0}(\tilde{\pi}^{-1}(\mathbf{S}^1 \times A)) \\ & & (\tilde{\pi} : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{PM} \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{M} \text{ é a projecção canónica}) \\ & = & \ell \times \mu(\mathbf{S}^1 \times A) \\ & & (\ell \hat{\times} \mu_{\theta_0,x_0,v_0} \text{ é levantamento de } \ell \times \mu) \\ & = & \ell(\mathbf{S}^1) \times \mu(A) \\ & = & \mu(A) \end{array}$$

□

Temos assim a generalização da proposição 5.1.8 para qualquer medida μ.

Teorema 5.2.5. *Seja $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ um difeomorfismo de classe C^1 na variedade riemanniana compacta $\boldsymbol{M}$. Suponhamos que f preserva uma medida de probabilidade μ definida nos borelianos de $\boldsymbol{M}$. Se μ é ergódica e x_0 é um ponto típico para μ então para cada direcção $v_0 \in T_{x_0}\boldsymbol{M}$, μ admite um levantamento a uma medida $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ $\boldsymbol{P}f$-invariante nos borelianos de $\boldsymbol{PM}$ tal que $\boldsymbol{P}f$ é ergódica para $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ e, para todo o boreliano de $\boldsymbol{M}$*

$$\hat{\mu}_{x_0,v_0}(\pi^{-1}(B)) = \mu(B).$$

5.3 Expoentes de Lyapunov

Nesta secção apresentamos o conceito de expoente de Lyapunov seguindo a referência [4].

Definição 5.3.1. *Seja V um espaço vectorial real de dimensão n. A função*

$$Lyap : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

diz-se a função característica de expoentes de Lyapunov ou simplesmente, expoentes de Lyapunov se:

1. *$Lyap(\alpha v) = Lyap(v)$, para todo $v \in V$ e para todo o $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$;*
2. *$Lyap(v + u) \leq \max\{Lyap(v), Lyap(u)\}$, $\forall u, v \in V$;*
3. *$Lyap(0) = -\infty$.*

Apesar de os resultados serem gerais para qualquer função de Lyapunov, apenas estamos interessado em estudar os expoentes de Lyapunov de um difeomorfismo f de classe C^1 definido na variedade $\mathbf{M}$ e o espaço vectorial que consideramos será $V = T_{x_0}\mathbf{M}$. A função *Lyap* que será objecto de estudo é definida por:

$$Lyap(v) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x, v)||. \tag{5.1}$$

Relembramos que μ é uma medida de probabilidade definida nos borelianos de $\mathbf{M}$ e x_0 é um ponto típico para μ. O objectivo será mostrar que a função acima existe para μ-qtp x em $\mathbf{M}$. Mas primeiro vamos admitir a existência dos limites 5.1 e verificar que a definição dada para $Lyap(v)$ é, de facto, uma função característica de Lyapunov.

1. Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ Então:

$$\begin{aligned} Lyap(\alpha v) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x, \alpha v)|| \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||\alpha Df^n(x, v)|| \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log(|\alpha| \cdot ||Df^n(x, v)||) \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log |\alpha| + \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x, v)|| \\ &= = 0 + Lyap(v) = Lyap(v) \end{aligned}$$

2. Suponhamos sem perda de generalidade que $Lyap(u) \leq Lyap(v)$. Então:

$$\begin{aligned} Lyap(v+u) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x, v+u)|| \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x,v) + Df^n(x,u)|| \\ &\leq \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log(2 \cdot ||Df^n(x,v)||) \\ &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log 2}{n} + \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x,v)|| \\ &= Lyap(v) = \max\{Lyap(v), Lyap(u)\} \end{aligned}$$

3. Convenção usual.

Vejamos agora algumas propriedades das funções de Lyapunov.

Teorema 5.3.2. *As funções de Lyapunov satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *Se $v_1, ..., v_m \in V$ e $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R} - \{0\}$ então:*

$$Lyap(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m) \leq \max\{Lyap(v_i) : 1 \leq i \leq m\}$$

2. *Se $Lyap(v) \neq Lyap(u)$ então $Lyap(v+u) = \max\{Lyap(v), Lyap(u)\}$;*

3. *Se existem $v_1, ..., v_m \in V$ tais que $Lyap(v_1), ..., Lyap(v_m)$ são todos distintos então os vectores $v_1, ..., v_m$ são linearmente independentes.*

4. *Lyap não toma mais do que n valores distintos.*

Demonstração.

1. Por indução sobre a segunda condição da definição de expoente de Lyapunov sabemos que $Lyap(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m) \leq \max\{Lyap(\alpha v_i) : 1 \leq i \leq m\}$. Mas, da primeira condição da mesma definição, $Lyap(\alpha v_i) = Lyap(v_i)$, donde resulta a desigualdade pretendida;

2. Suponhamos sem perda de generalidade que $Lyap(u) < Lyap(v)$. Então da 2ª propriedade temos que:

$$Lyap(v+u) \leq Lyap(v) = Lyap(v+u-u) \leq \max\{Lyap(v+u), Lyap(u)\}$$

Se $Lyap(v+u) < Lyap(u)$ então $\max\{Lyap(v+u), Lyap(u)\} = Lyap(u)$ donde resultaria que $Lyap(v) \leq Lyap(u)$ que contraria a nossa hipótese. Assim, só podemos ter que $Lyap(v+u) \geq Lyap(u)$ e portanto concluímos que $Lyap(v+u) \geq Lyap(v)$. Resulta então que $Lyap(v+u) = Lyap(v)$, como pretendíamos.

3. Suponhamos que os vectores $v_1, ..., v_m \in V$ são linearmente dependentes, isto é, que existe pelo menos um $\alpha_i \neq 0$ tal que $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$ e que $Lyap(v_1), ..., Lyap(v_m)$ são todos distintos. Então temos uma contradição, visto que:

$$\begin{aligned} -\infty = &\ Lyap(0) = Lyap(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m) \\ = &\ \max\{Lyap(v_i) : 1 \leq i \leq m \wedge \alpha_i \neq 0\} \neq -\infty \end{aligned}$$

4. Se $Lyap$ toma-se pelo menos $n+1$ valores dististos então, da alínea anterior, os vectores associados a esses valores seriam linearmente independentes. Logo, V não teria dimensão n.

□

No caso que estamos interessados de $V = T_x\mathbf{M}$, ao valor $Lyap(v) = \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x,v)||$, damos o nome de expoentes de Lyapunov de x segundo a direcção v.

O teorema anterior garante que, quando os expoentes de Lyapunov existem são em número finito. Sejam $\lambda_1 < ... < \lambda_s$ esses valores. Por convenção definimos também que $\lambda_0 = -\infty$. Para cada $1 \leq i \leq s$ defina-se os seguintes conjuntos:

$$V_i = \{v \in V : Lyap(v) \leq \lambda_i\}.$$

e consideremos $V_0 = \{0\}$.

Proposição 5.3.3. *Os conjuntos V_i definidos atrás são, na verdade, espaço vectoriais, para todo o $i \in \{0, ...s\}$.*

Demonstração. Se $i = 0$ então $V_0 = \{0\}$ é espaço vectorial. Fixemos então $1 \leq i \leq s$.

- Como $\lambda_0 = Lyap(0) < \lambda_i$ então $0 \in V_i$;
- Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V_i$. Então $Lyap(v) \leq \lambda_i$. Se $\alpha = 0$ então $Lyap(\alpha v) = Lyap(0) < \lambda_i$. Se $\alpha \neq 0$ então $Lyap(\alpha v) = Lyap(v) \leq \lambda_i$. Em qualquer dos casos $\alpha v \in V_i$.
- Suponhamos que $v, u \in V_i$, ou seja, que $Lyap(v), Lyap(u) \leq \lambda_i$. Então temos que:

  $$Lyap(u + v) \leq \max\{Lyap(v), Lyap(u)\} \leq \lambda_i,$$

  ou seja, $u + v \in V_i$.

□

Além de serem espaços vectoriais temos que:

$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_s = V$$

À família $\vartheta = \{V_i : i = 0, ..., s\}$, em que os conjuntos V_i são como os definidos atrás dá-se o nome de filtração de V com respeito à função $Lyap$. Denotamos esta filtração por ϑ_{Lyap}.

Teorema 5.3.4. *A função $Lyap : V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ é um expoente de Lyapunov sse existem $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e uma filtração $\vartheta = \{V_i : i = 0, ..., s\}$ de V tais que:*

1. *$Lyap(v) \leq \lambda_i$, para todo o $v \in V_i$;*

2. *$Lyap(v) = \lambda_i$, para todo o $v \in V_i - V_{i-1}$;*

3. *$Lyap(0) = -\infty$;*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $Lyap$ é um expoente de Lyapunov então temos a filtração ϑ_{Lyap} construída atrás. Além disso, se $v_i \in V_i - V_{i-1}$ então $\lambda_{i-1} < Lyap(v) \leq \lambda_i$. Logo $Lyap(v) = \lambda_i$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $Lyap$ e a filtração ϑ satisfaz 1, 2 e 3. Dado $x \in V - V_0$, existe um índice tal que $x \in V_i - V_{i-1}$. Como cada V_i é um espaço vectorial então se $\alpha \neq 0$ vem que $\alpha x \in V_i - V_{i-1}$ e portanto $Lyap(\alpha x) = Lyap(x)$. Sejam agora v_1 e v_2 dois elementos de V e suponhamos que $Lyap(v_j) = \lambda_{i_j}$, para $j = 1, 2$. Das propriedades 1 e 2 dos filtrados vem que $V_i = \{v \in V : Lyap(v) \leq \lambda_i\}$. Logo $v_j \in V_{i_j}$. Podemos supor sem perda de generalidade que $i_1 < i_2$. Isto implica que $v_1 + v_2 \in V_{i_2}$ e assim $Lyap(v_1 + v_2) \leq \lambda_{i_2} = \max\{Lyap(v_1), Lyap(v_2)\}$. Concluímos assim que $Lyap$ é um expoente de Lyapunov. $\square$

Tomemos $k_i = \dim V_i - \dim V_{i-1}$, isto é, k_i representa exactamente o número de vectores linearmente independentes cujo o expoente é λ_i.

Para a filtração ϑ_{Lyap} podemos associar uma classe de bases ortonormadas especiais, que a seguir se descreve. Dizemos que uma base $b = (v_1, ..., v_n)$ de V é *normal* com respeito a ϑ_{Lyap} se para todo $1 \leq i \leq s$, existem n_i vectores de b que formam uma base de V_i. Uma base normal diz-se ordenada se para todo $1 \leq i \leq s$, os vectores $v_1, ..., v_{n_i}$ formam uma base de V_i. Verifica-se facilmente que qualquer que seja a filtração ϑ, existe sempre uma base normal ordenada com respeito a ϑ.

Fixemos então v uma base normal e ordenada de ϑ_{Lyap}. Como cada λ_i aparece exactamente k_i vezes para $Lyap(w)$ com $w \in V$ então $\sum_{j=1}^{n} Lyap(v_j) = \sum_{j=1}^{s} k_i\lambda_i$.

Teorema 5.3.5. *V é normal com respeito à filtração ϑ_{Lyap} sse a seguinte igualdade se verifica:* $\inf\left\{\sum_{j=1}^{n} Lyap(w_j) : w = (w_1, ..., w_n) \text{ é base de } V\right\} = \sum_{j=1}^{n} Lyap(v_j)$.

A prova do teorema é consequência directa do seguinte lema:

Lema 5.3.6. *Se v é uma base normal ordenada e w é uma outra base de V para a qual $Lyap(w_1) \leq ... \leq Lyap(w_n)$. Então:*

1. *$Lyap(w_i) \geq Lyap(v_i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$ e em particular $Lyap(w_n) = Lyap(v_n)$;*

2. *$\sum_{j=1}^{n} Lyap(w_j) \geq \sum_{j=1}^{n} Lyap(v_j)$;*

3. *w é normal sse $Lyap(w_i) = Lyap(v_i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$;*

4. *w é normal sse $\sum_{j=1}^{n} Lyap(w_j) = \sum_{j=1}^{n} Lyap(v_j)$;*

Demonstração.

1. Como χ_1 é o valor mínimo dos expoentes de Lyapunov em $V - \{0\}$ então para $1 \leq j \leq n_1$, $Lyap(w_j) \geq Lyap(v_j)$. Suponhamos que $Lyap(w_{n_1+1}) = \lambda_1$. Então $n_1 \geq \dim \langle \{w_1, ..., w_{n_1+1}\} \rangle = n_1 + 1$ o que é absurdo. Logo $Lyap(w_{n_1+1}) \geq \lambda_2$. Repetindo um número finito de vezes este argumento vem que $Lyap(w_i) \geq Lyap(v_i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Em particular, se $j = n$ então como $Lyap(v_n)$ é o expoente máximo em $V - \{0\}$ vem que $Lyap(w_n) = Lyap(v_n)$;

2. Pela alínea anterior, $Lyap(w_i) \geq Lyap(v_i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$ e portanto
$$\sum_{j=1}^{n} Lyap(w_j) \geq \sum_{j=1}^{n} Lyap(v_j);$$

3. De um teorema anterior temos que: $Lyap(w_i) = Lyap(v_i)$ para $1 \leq i \leq n$ sse $w_1, ..., w_n$ é uma base de V_i para $1 \leq i \leq n$ sse w é uma base normal ordenada.

4. Se w é normal então $Lyap(w_i) = Lyap(v_i)$, para todo o $1 \leq i \leq n$, donde resulta que $\sum_{j=1}^{n} Lyap(w_j) = \sum_{j=1}^{n} Lyap(v_j)$.

Suponhamos que $\sum_{j=1}^{n} Lyap(w_j) = \sum_{j=1}^{n} Lyap(v_j)$. Como pela primeira alínea, se tem que $Lyap(w_i) \geq Lyap(v_i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$, então, para que a igualdade anterior se verifique temos de ter $Lyap(w_i) = Lyap(v_i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$ e portanto pela alínea anterior w é normal.

$\square$

Nota 5.3.7. *Note-se que se para $v \in T_x\boldsymbol{M}$, o limite $Lyap(x,v) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}||Df^n(x,v)||$ existir, então temos que:*

$$\begin{aligned}
Lyap(x, Df(x,v)) &= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log ||Df^{n+1}(x,v)|| \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{n+1}||Df^{n+1}(x,v)|| \\
&= \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+1}{n} \times \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}||Df^{n+1}(x,v)|| \\
&= Lyap(x,v)
\end{aligned}$$

Logo, $Df(V_i) = V_i$ e portanto $Df(v) = (Df(x,v_1),...,Df(x,v_n))$ é uma base normal $T_{f(x)}\boldsymbol{M}$.

Como Df é uma aplicação bijectiva, desta nota resulta que definindo os expoentes de Lyapunov em $T_x\boldsymbol{M}$ pelo limite 5.1, estes são invariantes por Df.

5.4 O teorema de Oseledets

Nesta secção vamos mostrar uma forma alternativa de provar o teorema de Oseledets para uma medida invariante e ergódica através do teorema ergódico de Birkhoff aplicado aos levantamentos a **PM** da medida μ.

Teorema 5.4.1 (Oseledets). *Seja $\boldsymbol{M}$ uma variedade compacta de dimensão finita, f é um difeomorfismo de classe C^1 em $\boldsymbol{M}$ e μ uma medida de probabilidade sobre os borelianos de $\boldsymbol{M}$ f-invariante e ergódica. Então o conjunto dos pontos $x \in \boldsymbol{M}$ para os quais existem os expoentes de Lyapunov, isto é, para os quais o limite $\frac{1}{n}\log||Df^n(x_0;v)||$ existe, para todo o $v \in T_x\boldsymbol{M}$, tem medida μ total.*

Pelo que se viu na secção anterior se designarmos por M' o conjunto de pontos determinado por este teorema de Oseledets obtemos uma família de filtrações $\Theta(x)$ em que $\Theta(x) =$

$\{V_i(x) : 0 \leq i \leq s(x) \text{ e } 0 = V_0 \subsetneq ... \subsetneq V_s\}$ invariante por Df, no sentido que $Df(V_i(x)) = Df(V_i(f(x)))$.

O que se segue nesta secção conduz à prova do teorema 5.4.1. O nosso contexto continua a ser uma variedade compacta $\mathbf{M}$ de dimensão finita e $f : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ um difeomorfismo de classe C^1. Seja ainda μ, uma medida de probabilidade definida sobre os borelianos de $\mathbf{M}$, para a qual f é ergódica. Vamos provar que quase todo o ponto típico para a medida μ admite expoentes de Lyapunov. Seja x um ponto em $\mathbf{M}$ e seja v uma qualquer direcção tangente a $\mathbf{M}$ em x. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\log||Df^n(x;v)|| &= \frac{1}{n}\log\left(\frac{||Df^n(x;v)||}{||Df^{n-1}(x;v)||}\frac{||Df^{n-1}(x;v)||}{||Df^{n-2}(x;v)||}\cdots\frac{||Df(x;v)||}{||v||}\right)\\
&= \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{||Df^{n-i}(x;v)||}{||Df^{n-i-1}(x;v)||}\right)\\
&= \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left\|\frac{Df^{n-i}(x;v)}{||Df^{n-i-1}(x;v)||}\right\|\right)\\
&= \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left\|Df\left(\frac{Df^{n-i-1}(x;v)}{||Df^{n-i-1}(x;v)||}\right)\right\|\right)\\
&= \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left\|Df\left(\mathbf{P}f^{n-i-1}(x;v)\right)\right\|\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\left(\left\|Df\left(\mathbf{P}f^{n-i-1}(x;v)\right)\right\|\right)
\end{aligned}$$

A última equação pode tomar a forma de uma "média de Birkhoff", $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi(T^k(x,v))$, através de $T = \mathbf{P}f$ e $\phi = \log||Df||$.

Consideremos em $\mathbf{PM}$ uma medida de probabilidade e ergódicas $\hat{\mu}_{x,v}$, dada pelo teorema 5.2.5.

Como f é um difeomorfismo de classe C^1 então sabemos que a função $\log||Df||$ é pelo menos contínua e que $||Df|| > 0$. Como $\mathbf{PM}$ é um espaço compacto então a função $\phi = \log||Df||$ é limitada. Todo o levantamento $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ da medida μ, segundo o ponto típico x_0 e a direcção $v_0 \in T_{x_0}\mathbf{M}$ é uma medida de probabilidade e portanto concluímos que ϕ é uma função $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$-integrável.

Assim, se (x_0, v_0) típico para $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$, pelo teorema de Birkhoff podemos escrever:

$$\begin{aligned}\lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\log\|Df^n(x_0;v_0)\| &= \lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\left(\left\|Df\left(\mathbf{P}f^{n-i-1}(x_0;v_0)\right)\right\|\right)\\ &= \int_{\mathbf{PM}}\phi d\hat{\mu}_{x_0,v_0}\end{aligned}$$

Mas, pelo teorema 3.2.35 sabemos que

$$\int \phi d\hat{\mu}_{x_0,v_0} = st\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\phi(x_k,v_k)\right)^3 \tag{5.2}$$

Em particular, a soma hiper-finita é um número real limitado. Assim, se para $v_0\in T_{x_0}\mathbf{M}$ definirmos:

$$Lyap(v) = st\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\phi(x_k,v_k)\right) \tag{5.3}$$

vem que esta função é uma função de Lyaponov em $T_{x_0}\mathbf{M}$. Temos que:

Lema 5.4.2. *Para $\mathfrak{t}$-qtp, $st(x_k,v_k)$ é típico para $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$, onde mais uma vez $\mathfrak{t}$ é a medida interna:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{t}:\ \mathcal{P}_I(\{0,...,N-1\}) &\to {}^*[0,+\infty[\\ I &\to \frac{\sharp I}{N}.\end{aligned}$$

Demonstração. Seja A o conjunto dos pontos típicos para $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$. Então $\hat{\mu}_{x_0,v_0}(A) = L(\mathfrak{c}_{x_0,v_0})(sh^{-1}(A)) = L(\mathfrak{t})(I_{sh^{-1}(A)}) = 1$. Mas se $(x_k,v_k)\in sh^{-1}(A)$ isso significa que $st(x_k;v_k)\in A$, ou seja, $st(x_k;v_k)$ é típico, como pretendíamos. □

Note-se que se $st(x_k,v_k)$ é típico para $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ então $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$ é um levantamento da medida pelo ponto típico $st(x_k)$ em $\mathbf{M}$ segundo a direcção $st(v_k)$, ou seja $\hat{\mu}_{x_0,v_0} = \hat{\mu}_{st(x_k,v_k)}$[4], uma vez que:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{x_0,v_0}(A) &= st\left(\frac{\sharp\{0\le j\le N-1 : \mathbf{P}f^j[sh(x_k,v_k)]\in {}^*A\}}{N}\right)\\ &\quad\text{(discussão da secção 4.2-}st(x_k,v_k)\text{ é }\hat{\mu}_{x_0,v_0}\text{-típico)}\\ &= \hat{\mu}_{st(x_k,v_k)}(A)\\ &\quad\text{(por definição)}\end{aligned}$$

Consideramos então $(v^1,...,v^n)$ uma base normal e ordenada para a filtração Θ dada pela função de Lyapunov 5.3.

[4]note-se que $st(x_k,v_k) = st(x_k)\times st(v_k)$

Nota 5.4.3. *Os vectores* $v_k^i = Df^k(x_0, v^i)$ *formam uma base de* $T_{x_k}{}^*\boldsymbol{M}$*, qualquer que seja* $k \in {}^*\mathbb{N}$*, uma vez que* f *é um difeomorfismo.*

Pelo lema 5.4.2, para cada $j = 1, ..., n$ temos $L_j \subset \{1, ..., N\}$ tal que $L(\mathfrak{t})(L_j) = 1$ e para $k \in L_j$, $st(x_k, v_k^j)$ é típico para $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$. Definindo

$$L = L_1 \cap ... \cap L_n$$

temos que $L(\mathfrak{t})(L) = 1$ e para todo o $j = 1, ..., n$ e $k \in L$ $st(x_k, v_k^j)$ é $\hat{\mu}_{x_0,v_0}$-típico.

Definindo $V(k, v^i)$ como sendo o espaço vectorial de $T_{sh(x_k, v_k^i)}\mathbf{M}$ gerado pelos vectores $st(v_k^i) = st(Df^k(v^i))$ segue que:

Proposição 5.4.4. *Para* $k \in L$ *temos que* $(V(k, v^i))_{i=1,...,n}$ *é uma filtração para a função* $Lyap(v) = \lim_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \log ||Df^m(x, v)||$.

Demonstração. Como $k \in L$ temos que $st(x_k, v_k)$ é, para $i = 1, ..., n$, $\hat{\mu}_{x_0,v^i}$ típico, isto é, para $T = \mathbf{P}f$ e $\phi = \log ||Df||$:

$$\begin{aligned} \lim_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \phi(T^j(st(x_k, v_k^i))) &= \int \phi d\hat{\mu}_{x_0,v^i} \\ &= st\left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \phi(x_j, v_j^i)\right) \end{aligned}$$

Assim, a proposição decorre de imediato do facto de Θ ser uma filtração para *Lyap* definida em 5.3. □

Daqui concluímos que, para o conjunto de medida μ total formado pelos $sh(x_k)$, $0 \leq k \leq N - 1$ com $k \in L$ existem os expoentes de Lyapunov:

$$Lyap(v) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \log ||Df^n(sh(x_k), v)||.$$

Fica assim provado o teorema de Oseledets 5.4.1.

Nota 5.4.5. *Muitos autores, usam para definição de expoentes de Lyapunov a existência de direcções* v^i*, tangentes a* x *para as quais os seguintes limites* $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x, v^i)||$ *e* $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log ||Df^{-n}(x, v^i)||$ *existem e além disso sejam simétricos. Vamos então ver que essa condição também se verifica no nosso caso.*

Lema 5.4.6. *Se $T : X \to X$ é um difeomorfismo de classe C^1 sobre X um espaço métrico compacto e μ é uma medida de probabilidade em X ergódica em relação a T então μ também é ergódica em relação a T^{-1}.*

Demonstração. Sendo T um homeomorfismo, em particular é uma aplicação bijectiva e T^{-1} é mensurável. Assim, A é T^{-1} invariante sse $T^{-1}(A) = A$ sse $A = T(A)$. Logo pelo facto de μ ser ergódica para T vem que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, como pretendíamos. □

Lema 5.4.7. *O conjunto dos pontos típico de μ com respeito a T e a T^{-1} tem medida 1.*

Demonstração. Pelo lema anterior sabemos que μ é ergódica para T^{-1}. Seja A o conjunto dos pontos típicos para μ com respeito a T e A' o conjunto dos pontos típicos para μ com respeito a T^{-1}. Então $\mu(A \cap A') = 1$. □

Do lema anterior resulta de imediato que, se ϕ é uma função μ integrável então, para μ quase todo o ponto:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k x) &= \int \phi d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^{-k} x) \end{aligned}$$

Usando este facto, aplicado à derivada de f temos que:

Proposição 5.4.8. *Para $\hat{\mu}_{x,v}$ quase todo o ponto temos que:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x_0, v_0)|| = - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log ||Df^{-n}(x_0, v_0)||$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log||Df^{-n}(x_0;v_0)|| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{||Df^{-n}(x_0;v_0)||}{||Df^{-n+1}(x_0;v_0)||}\frac{||Df^{n-1}(x_0;v_0)||}{||Df^{-n+2}(x_0;v_0)||}\cdots\right.\\
&\quad \left.\cdots\frac{||Df-1(x_0;v_0)||}{||v_0||}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{||Df^{-n+i}(x_0;v_0)||}{||Df^{-n+i+1}(x_0;v_0)||}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left\|\frac{Df^{-n+i}(x_0;v_0)}{||Df^{-n+i+1}(x_0;v_0)||}\right\|\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left\|Df^{-1}\left(\frac{Df^{-n+i+1}(x_0;v_0)}{||Df^{-n+i+1}(x_0;v_0)||}\right)\right\|\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=0}^{n-1}\left\|Df^{-1}\left(\mathbf{P}f^{-n+i+1}(x_0;v_0)\right)\right\|\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\left(\left\|Df^{-1}\left(\mathbf{P}f^{-n+i+1}(x_0;v_0)\right)\right\|\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\left(\left\|Df^{-1}\left(\mathbf{P}fDf^{-i}(x_0;v_0)\right)\right\|\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\left(\left\|Df^{-1}\left(\mathbf{P}f^{i}(x_0;v_0)\right)\right\|\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\left(\frac{1}{||Df\left(\mathbf{P}f^{i-1}(x_0;v_0)\right)||}\right)\\
&= -\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\left(\left\|Df\left(\mathbf{P}f^{i-1}(x_0;v_0)\right)\right\|\right)\\
&= -\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\left(||Df\left(\mathbf{P}f(x_0;v_0)\right)||\right)\\
&= -\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log||Df^{n}(x_0,v_0)||
\end{aligned}
$$

□

Apêndice A

As super estruturas

Aqui, seguindo [22], vamos proceder à construção de um modelo formal que nos permita justificar a axiomática feita sobre os universos não standard que consideramos na secção 2.6. Como já foi referido pretendemos um universo não standard que permita generalizar o princípio de transferência a entidades matemáticas que não sejam só números reais. De facto, queremos que seja possível transferir qualquer sentença em que a quantificação possa, por exemplo, ser feita sobre conjuntos, funções ou relações. Para que a construção seja o mais geral possível também consideramos ultrafiltro sobre conjuntos de índices Γ de qualquer cardinalidade. Começamos por estabelecer algumas generalidades sobre filtros.

Definição A.0.9. *Seja I um conjunto não vazio. Um filtro sobre I é uma colecção não vazia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de I que satisfazem os seguintes axiomas:*

1. *Se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cap B \in \mathcal{F}$;*

2. *Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B \subset I$ então $B \in \mathcal{F}$.*

O filtro $\mathcal{F}$ diz-se próprio se $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Um filtro próprio que satisfaz o seguinte axioma diz-se um ultrafiltro:

3. *Para cada $A \subset I$, um e um só dos conjuntos A ou $I - A$ pertence a $\mathcal{F}$.*

Como já vimos a função:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{u}: & \mathcal{P}(I) & \rightarrow & [0, +\infty[\\ & A & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } A \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{se } A \notin \mathcal{U} \end{array} \right. \end{array}$$

é uma medida finitamente aditiva que identifica um ultrafiltro $\mathcal{U}$.

De modo a percebermos a utilidade dos filtros, a seguir listam-se algumas das propriedades mais importantes.

Nota A.0.10.

1. *Um filtro $\mathcal{F}$ contém o conjunto vazio sse $\mathcal{F} = \mathcal{P}(I)$.*

   Por definição, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$. Se $\emptyset \in \mathcal{F}$ então, pelo axioma dos super conjuntos, dado $B \in \mathcal{P}(I)$, $B \in \mathcal{F}$ e portanto $\mathcal{P}(I) \subset \mathcal{F}$. Por outro lado, se $\mathcal{P}(I) = \mathcal{F}$ então é óbvio que $\emptyset \in \mathcal{F}$.

2. *Se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro sobre I e $\mathbb{u}$ é a medida finitamente aditiva que identifica $\mathcal{U}$ então dado $A \subset I$ ou $\mathbb{u}(A) = 1$ ou $\mathbb{u}(I - A) = 1$.*

3. *Se um ultrafiltro $\mathcal{U}$ contém um conjunto finito então contém um conjunto singular e portanto esse ultrafiltro é gerado por um só elemento, isto é, pode ser obtido desse conjunto usando as propriedades de ultrafiltro. Aos ultrafiltros gerados por um só elemento dá-se o nome de ultrafiltro principal.*

   Suponhamos que $\mathbb{u}$ é a medida finita que identifica o ultrafiltro e suponhamos ainda que $A = \{a_1, ..., a_n\}$ é um conjunto finito tal que $\mathbb{u}(A) = 1$. Então, pelo facto de $\mathcal{U}$ ser um ultrafiltro, $\mathbb{u}(\{a_1\}) = 1$ ou $\mathbb{u}(I - \{a_1\}) = 1$, e portanto, $\mathbb{u}(\{a_2, ..., a_n\}) = 1$. Se $\mathbb{u}(\{a_1\}) = 1$ então $\{a_1\}$ gera o ultrafiltro. Suponhamos então que $\mathbb{u}(\{a_1\}) = 0$, ou seja, que $\mathbb{u}(\{a_2, ..., a_n\}) = 1$. Consideremos agora $\{a_2\}$. Novamente, ou $\mathbb{u}(\{a_2\}) = 1$ ou $\mathbb{u}(\{a_3, ..., a_n\}) = 1$. Se $\mathbb{u}(\{a_2\}) = 1$ então é $\{a_2\}$ que gera o ultrafiltro. Senão voltamos a repetir este processo para o conjunto $\{a_3, ..., a_{n-1}\}$. Este processo termina uma vez que A tem um número finito de elementos. De facto, ao fim de $n-1$ passos, concluímos que ou $\mathbb{u}(\{a_{n-1}\}) = 1$ ou $\mathbb{u}(\{a_n\}) = 1$. Em qualquer dos casos $\mathcal{U}$ tem um conjunto singular que obviamente o gera.

4. *Da nota anterior resulta de imediato que um qualquer ultrafiltro não principal tem de conter todos os conjuntos cofinitos. Na verdade, a colecção de todos os conjuntos cofinitos é um filtro não principal. Designemos por $\mathcal{F}$ a colecção de todos os conjuntos cofinitos e suponhamos que A e B são cofinitos, digamos, $I - A = \{a_1, ..., a_l\}$ e $I - B = \{b_1, ..., b_k\}$.*

   Então $I - (A \cap B) = \{a_1, ..., a_l, b_1, ..., b_k\}$ que obviamente é finito, donde resulta que $A \cap B \in \mathcal{F}$. Além disso, se C é tal que $A \subset C \subset I$ então $I - C \subset I - A$ e sendo $I - A$ finito também o é $I - C$. Logo $C \in \mathcal{F}$.

   Note-se que se I é um conjunto com pelo menos um número infinito numerável de elementos, digamos $I \supset (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ então nem o conjunto dos pontos de índices par nem o seu complementar, que contém pelo menos os elementos de índice ímpar, são cofinitos e portanto $\mathcal{F}$ não é um ultrafiltro.

5. *A existência de um ultrafiltro não principal sobre um qualquer conjunto infinito é uma consequência do lema de Zorn. Na verdade um qualquer filtro não principal pode ser extendido a um ultrafiltro. Um tal resultado pode ser encontrado em [9] ou em [22].*

Seja Γ um conjunto infinito de índices e seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro sobre Γ. Denotemos por $^*\mathbb{R}$ o conjunto dos números hiper-reais, ou seja, o quociente $\mathbb{R}^\Gamma/\mathcal{U}$, onde $\mathbb{R}^\Gamma$ denota todas as funções de domínio γ em $\mathbb{R}$. Seja $\mathfrak{u}$ a medida sobre as partes de Γ que identifica o ultrafiltro $\mathcal{U}$, à semelhança de como foi feito com os ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$.

Qualquer teoria matemática é construída à custa dos conjuntos. A axiomática que é comummente usada para a teoria dos conjuntos é a de Zermelo-Fraenkel, com a adição do axioma da escolha. Por isso, vamos desenvolver a teoria das super estruturas à custa desta axiomática. O conjunto base é um conjunto cujos elementos não contêm eles próprios elementos. A esse conjunto dá-se o nome de *conjunto de átomos* da teoria.

Começamos por considerar um conjunto de átomos $\mathbb{X}$ que já contém $\mathbb{R}$. Temos então uma teoria ZFC sobre $\mathbb{X}$ munida com o axioma:

Axioma dos átomos:

$$\forall a\big[a \in \mathbb{X} \Leftrightarrow a \neq \emptyset \wedge \neg[(\exists t)(t \in a)]\big]$$

A condição anterior expressa exactamente que um átomo não contém elementos e não é o conjunto vazio.

Do mesmo modo que definimos $^*\mathbb{R}$ como sendo $\mathbb{R}^\Gamma/\mathcal{U}$, definimos $^*\mathbb{X}$ como sendo $\mathbb{X}^\Gamma/\mathcal{U}$.

Seja $\mathbb{X}$ um conjunto apropriado de átomos e considere-se a família de conjuntos $(\mathbb{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida indutivamente por:

$$\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}$$
$$\mathbb{X}_{n+1} = \mathbb{X}_n \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_n).$$

Definição A.0.11. *Chama-se super estrutura sobre o conjunto de átomos $\mathbb{X}$ ao conjunto definido por:*

$$\mathbb{V}(\mathbb{X}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{X}_n.$$

Os elementos de $\mathbb{X}_0$ são exactamente os átomos da teoria. É usual designar $\mathbb{X}_n$ por *patamar de ordem* n e aos elementos de $\mathbb{X}_n - \mathbb{X}_{n-1}$ dar o nome de entidades de ordem n.

Da definição dos conjuntos $\mathbb{X}_n$, podemos deduzir que:

$$\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}_2 \subset \ldots \subset \mathbb{X}_n \subset \ldots$$

e

$$\mathbb{X}_0 \in \mathbb{X}_1 \in \mathbb{X}_2 \in \ldots \in \mathbb{X}_n \in \ldots$$

Proposição A.0.12. *As entidades da super estrutura satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $\mathbb{X}_{n+1} = \mathbb{X} \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_n)$

2. $a, b \in \mathbb{X}_n \Rightarrow \{a, b\} \in \mathbb{X}_{n+1} \wedge (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathbb{X}_{n+2}$

3. $a \in \mathbb{X}_n \Rightarrow \mathcal{P}(a) \in \mathbb{X}_{n+2}$*;*

Demonstração.

1. Por indução sobre n:

   Para $n = 0$: $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_0 \bigcup \mathcal{P}(\mathbb{X}_0) = \mathbb{X} \bigcup \mathcal{P}(\mathbb{X}_0)$.

   Passo indutivo: Suponhamos que $\mathbb{X}_n = \mathbb{X} \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_{n-1})$. Quero provar que $\mathbb{X}_{n+1} = \mathbb{X} \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_n)$.

   $\mathbb{X}_{n+1} = \mathbb{X}_n \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_n) = (\mathbb{X} \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_{n-1})) \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_n) = \mathbb{X} \cup (\mathcal{P}(\mathbb{X}_{n-1}) \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_n)) = \mathbb{X} \cup \mathcal{P}(\mathbb{X}_n)$.

   Uma vez que, por definição $\mathcal{P}(\mathbb{X}_{n-1}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{X}_n)$.

2. $a, b \in \mathbb{X}_n \Rightarrow \{a, b\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{X}_n) \Rightarrow \{a, b\} \in \mathbb{X}_{n+1}$;

   $a, b \in \mathbb{X}_n \Rightarrow \{a, b\} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}_n) \wedge \{a\} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}_n) \Rightarrow \{a, b\} \in \mathbb{X}_{n+1} \wedge \{a\} \in \mathbb{X}_{n+1} \Rightarrow (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{X}_{n+1}) \Rightarrow (a, b) \in \mathbb{X}_{n+2}$.

3. $a \in \mathbb{X}_n \Rightarrow a \in \mathbb{X}_{n+1} \Rightarrow a \in \mathcal{P}(\mathbb{X}_n) \cap \mathbb{X}_0 \Rightarrow a \in \mathcal{P}(\mathbb{X}_n) \Rightarrow a \subset \mathbb{X}_n \Rightarrow \mathcal{P}(a) \subset \mathcal{P}(\mathbb{X}_n) \Rightarrow \mathcal{P}(a) \subset \mathcal{P}(\mathbb{X}_n) \cup \mathbb{X}_0 = \mathbb{X}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{P}(a) \subset \mathbb{X}_{n+1} \Rightarrow \mathcal{P}(a) \in \mathcal{P}(\mathbb{X}_{n+1}) \Rightarrow \mathcal{P}(a) \in \mathcal{P}(\mathbb{X}_{n+1}) \cup \mathbb{X}_0 = \mathbb{X}_{n+2} \Rightarrow \mathcal{P}(a) \in \mathbb{X}_{n+2}$.

□

A proposição anterior estabelece aquilo a que se designa por transitividade do conjunto $\mathbb{X}_{n+1}$. A transitividade é postulada por:

$$\forall a, b[a \in b \in \mathbb{X}_{n+1} \Rightarrow a \in \mathbb{X}_n].$$

De facto, se $b \in \mathbb{X}_{n+1}$ então ou $b \in \mathbb{X}$ ou $b \subset \mathbb{X}_n$. Como $\mathbb{X}$ é composto só por átomos então não se pode ter $b \in \mathbb{X}$ e portanto $b \subset \mathbb{X}_n$, donde resulta que $a \in \mathbb{X}_n$. Como todo o elemento da super estrutura ou é um átomo ou pertence a algum $\mathbb{X}_n$ então $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ é também um conjunto transitivo.

Se na construção geral tomarmos $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{X} = {}^*\mathbb{R}$ obtemos os universos, já nossos conhecidos, standard, $\mathbb{V}(\mathbb{R})$, e não standard, $\mathbb{V}({}^*\mathbb{R})$, respectivamente.

A.1 Mergulho de Super estruturas

O nosso objectivo é construir um princípio de transferência que nos permita transportar as propriedades entre as duas estruturas. No fundo queremos exibir um mergulho de $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ em $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ que preserve e estenda, de certa forma, a estrutura existente em $\mathbb{V}(\mathbb{X})$. Queremos então construir uma aplicação injectiva:

$$^* : \mathbb{V}(\mathbb{X}) \to \mathbb{V}(^*\mathbb{X})$$

que, à semelhança do princípio de transferência descrito no texto inicial, satisfaça as seguintes condições:

1. $\forall a[a \in \mathbb{X} \Rightarrow {}^*a = a]$, isto é, $^*\mathbb{X}$ é uma extensão de $\mathbb{X}$;

2. $\forall a, b\big[a, b \in \mathbb{V}(\mathbb{X}) \Rightarrow [a \in b \Leftrightarrow {}^*a \in {}^*b]\big]$;

Um dos problemas que surge na construção de tal aplicação, pelo menos da maneira como construímos $^*\mathbb{R}$, é a interpretação a dar aos sinais de igualdade e de pertença em $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$. Esta terá de ser cuidadosa para que traduzam verdadeiras relações de igualdade e pertença. A construção deste mergulho é feito compondo duas outras aplicações: a aplicação constante κ que diz como interpretar elementos de $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ como elementos de $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ e a aplicação de colapso de Mostowski que identifica classes de equivalência dentro do mesmo patamar.

A aplicação constante

Comecemos por considerar a ultrapotência $\mathbb{V}_{\mathcal{U}}[\mathbb{X}] \equiv (\mathbb{V}(\mathbb{X})^\Gamma)/\mathcal{U}$, isto é, o conjunto das classes de equivalência de funções de domínio Γ, igual ao conjunto de índices do ultrafiltro, de elementos de $\mathbb{V}(\mathbb{X})$. Estendemos as relações de pertença e igualdade a relações de $\mathbb{V}_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$ definidas por:

Dados $\alpha = [\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ e $\beta = [\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ em $\mathbb{V}_{\mathcal{U}}[\mathbb{X}]$ então:

$$\alpha =_{\mathcal{U}} \beta \text{ sse } \mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : a_\gamma = b_\gamma\}) = 1$$

$$\alpha \in_{\mathcal{U}} \beta \text{ sse } \mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : a_\gamma \in b_\gamma\}) = 1$$

Nota A.1.1. *A relação de pertença anterior não é uma verdadeira relação de pertença em $\mathbb{V}_{\mathcal{U}}[\mathbb{X}]$. O facto de não o ser é uma questão de formalismo, uma vez que, dizer que $[\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in [\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ significa que $[\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ é um elemento de $[\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ e portanto $[\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ tem de conter elementos daquela forma, o que inviabiliza a verdadeira definição de $[\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$, classe de equivalência de uma sucessão de conjuntos.*

Contudo, podemos interpretar os elementos de $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ como elementos de $\mathbb{V}_{\mathcal{U}}(^*\mathbb{X})$ através da aplicação $\kappa : \mathbb{V}(\mathbb{X}) \to \mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ definida por $\kappa(\alpha) = [(\alpha)_{\gamma\in\Gamma}]$, ou seja, através da classe de equivalência das sucessões constantes.

Teorema A.1.2. *Se $a, b \in \mathbb{V}(\mathbb{X})$ então temos que:*

1. $a \in b \Leftrightarrow \kappa(a) \in_{\mathcal{U}} \kappa(b)$;

2. $a = b \Leftrightarrow \kappa(a) =_{\mathcal{U}} \kappa(b)$;

Demonstração.

1. $(\Rightarrow)$ Como $\forall \gamma \in \Gamma$, $a_\gamma = a$ e $b_\gamma = b$ então de $a \in b$ vem que $\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : a_\gamma \in b_\gamma\}) = 1$ donde se conclui que $\kappa(a) \equiv [(a)_{\gamma\in\Gamma}] \in_{\mathcal{U}} [(b)_{\gamma\in\Gamma}] \equiv \kappa(b)$.

   $(\Leftarrow)$ Se $\kappa(a) \in_{\mathcal{U}} \kappa(b)$ então $\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : a \in b\}) = 1$. Como $\mathbb{u}(\emptyset) \neq 1$ então $\{\gamma \in \Gamma : a \in b\} \neq \emptyset$ e portanto $a \in b$;

2. $(\Rightarrow)$ Imediato da definição.

   $(\Leftarrow)$ Se $\kappa(a) \equiv [(a)_{\gamma\in\Gamma}] =_{\mathcal{U}} [(b)_{\gamma\in\Gamma}] \equiv \kappa(b)$ então $\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : a = b\}) = 1$ e como $\mathbb{u}(\emptyset) = 0 \neq 1$ então concluímos que $\{\gamma \in \Gamma : a = b\} \neq \emptyset$ e portanto $a = b$; □

Da segunda parte do resultado anterior resulta que a aplicação κ é injectiva, o que prova que realmente é possível mergulhar $\mathbb{V}[\mathbb{X}]$ em $\mathbb{V}_{\mathcal{U}}[\mathbb{X}]$.

Apesar de ser um mergulho ainda não é suficiente para atingir o nosso objectivo. Por exemplo, em $\mathbb{V}_{\mathcal{U}}[\mathbb{X}]$ existem elementos representáveis por sucessões de elementos de $\mathbb{V}[\mathbb{X}]$ cuja ordem pode não ser limitada. Contudo, para $a \in \mathbb{V}[\mathbb{X}]$ o elemento $\kappa(a) \equiv [(a)_{\gamma\in\Gamma}] \in \mathbb{V}_{\mathcal{U}}[\mathbb{X}]$ ou pertence a $(\mathbb{X}_0)^\Gamma/\mathcal{U}$ ou então pertence a $(\mathbb{X}_k - \mathbb{X}_{k-1})^\Gamma/\mathcal{U}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Estes objectos pertencem assim ao que se designa por *"ultrapotência limitada"* de $\mathbb{V}(\mathbb{X})$.

Definição A.1.3. *Uma sequência generalizada $a \equiv [(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}]$ de elementos de $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ diz-se limitada se existir $i \in \mathbb{N}$ tal que a ordem de a_γ é menor ou igual a i para um conjunto de índices com medida $\mathbb{u}$ total. Chama-se ultrapotência limitada e denota-se por $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$ de $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ à subcolecção de $\mathbb{V}_{\mathcal{U}}[\mathbb{X}]$ constituída pelas classes de equivalência representáveis por sucessões limitadas.*

Da definição resulta que:

$$\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X}) = (\mathbb{X}_0)^\Gamma/\mathcal{U} \cup (\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_0)^\Gamma/\mathcal{U} \cup \ldots \cup (\mathbb{X}_n - \mathbb{X}_{n-1})^\Gamma/\mathcal{U} \cup \ldots$$

ou seja, $\kappa(\mathbb{V}(\mathbb{X})) \subseteq \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$.

Colapso de Mostowski

Este último passo vai-nos permitir ver as relações de pertença e de igualdade em $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ como verdadeira relações. κ permitiu-nos passar de $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ para $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$. Resta então definir a passagem de $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$ para $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ para finalizar a construção do mergulho *.

Definição A.1.4. *O colapso de Mostowski é a aplicação* $\Lambda : \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ *que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *A restrição de* Λ *a* $(\mathbb{X}_0)^\Gamma/\mathcal{U}$ *é a aplicação identidade;*

2. *Para um elemento* $[\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X}) - ((\mathbb{X}_0)^\Gamma/\mathcal{U})$ *define-se a transformada de Mostowski* $\Lambda([\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$ *indutivamente por:*

$$\Lambda([\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) = \Big\{\Lambda([\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) \in \mathbb{V}(^*\mathbb{X}) : [\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in_{\mathcal{U}} [\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]\Big\}$$

Note-se que $\mathbb{X}_0 \equiv \mathbb{X}$ e, portanto, $(\mathbb{X}_0)^\Gamma/\mathcal{U} \equiv {}^*\mathbb{X}$ donde resulta que $\Lambda(x) = x$ para todo o $x \in {}^*\mathbb{X} \subset \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$. Suponhamos agora que $A_\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$ para $\mathbb{u}$-qtp $\gamma \in \Gamma$. Pela maneira como definido o colapso de Mostowski temos que:

$$\Lambda([\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) = \Big\{\Lambda([\{a_{\gamma\in\Gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}]) \in \mathbb{V}(^*\mathbb{X}) : [\{a_{\gamma\in\Gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}] \in_{\mathcal{U}} [\{A_{\gamma\in\Gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}]\Big\}$$

onde $[\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ tem ordem 0. Então $\Lambda([\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) = [\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\}] \in {}^*\mathbb{X}$ donde sai que:

$$\Lambda([\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) = \Big\{[\{a_{\gamma\in\Gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}] \in {}^*\mathbb{X} : [\{a_{\gamma\in\Gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}] \in_{\mathcal{U}} [\{A_{\gamma\in\Gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}]\Big\}$$

isto é $\Lambda([\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$ é o subconjunto de ${}^*\mathbb{X}$ constituído por todos os átomos $[\{a_{\gamma\in\Gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}] \in {}^*\mathbb{X}$ tais que $\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : a_\gamma \in A_\gamma\}) = 1$.

O mesmo se pode fazer com sucessão de funções, definindo desse modo $\Lambda([\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$ como sendo a função $F : {}^*\mathbb{X} \to {}^*\mathbb{X}$ dada por:

$$F(x) = F([\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) = [\{f_\gamma(x_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}] \in {}^*\mathbb{X}.$$

Mais geralmente, se $[\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X}) - {}^*\mathbb{X}$ então $[\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in (\mathbb{X}_k - \mathbb{X}_{k-1})^\Gamma/\mathcal{U}$ para algum $k \geq 1$. Logo, se $[\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in_{\mathcal{U}} [\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ então $[\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ pertence a uma ordem inferior onde já foi definido o seu colapso como elemento de $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$. Temos então que o colapso de Mostowski está bem definido. Falta ver que Λ é injectiva.

Teorema A.1.5. Λ *é injectiva.*

Demonstração. Sejam $[\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ e $[\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ dois elementos de $\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$.

Se ambos têm ordem zero então, se $[\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \neq_{\mathcal{U}} [\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$, $\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : a_\gamma \neq b_\gamma\}) = 1$ e portanto $\Lambda([\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) \neq \Lambda([\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$.

Se $[\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}], [\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X}) - ((\mathbb{X}_0)^\Gamma/\mathcal{U})$ e são diferentes então para $\mathbb{u}$-qtp $a_\gamma \neq b_\gamma$. Mas $a_\gamma \neq b_\gamma \Leftrightarrow a_\gamma \not\subseteq b_\gamma \vee b_\gamma \not\subseteq a_\gamma \Leftrightarrow a_\gamma - b_\gamma \neq \emptyset \vee b_\gamma - a_\gamma \neq \emptyset$. Logo

$$\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : a_\gamma - b_\gamma \neq \emptyset\} \cup \{\gamma \in \Gamma : b_\gamma - a_\gamma \neq \emptyset\}) = 1$$

e portanto ou $\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : a_\gamma - b_\gamma \neq \emptyset\}) = 1$ ou $\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : b_\gamma - a_\gamma \neq \emptyset\}) = 1$. Suponhamos que $A := \{\gamma \in \Gamma : a_\gamma - b_\gamma \neq \emptyset\}$, tem medida $\mathbb{u}$ total. Construímos o seguinte elemento

$[\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$: para cada $\gamma \in A$ escolhe-se $\xi_\gamma \in a_\gamma - b_\gamma$ e para $\gamma \notin A$, ξ_γ qualquer. Então tem-se que $[\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in_{\mathcal{U}} [\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$, mas $[\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \notin_{\mathcal{U}} [\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ donde resulta que os conjuntos $\Big\{[\{\eta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] : [\{\eta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in_{\mathcal{U}} [\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]\Big\}$ e $\Big\{[\{\eta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] : [\{\eta_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \notin_{\mathcal{U}} [\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]\Big\}$ são diferentes e portanto $\Lambda([\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) \neq \Lambda([\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$ o que completa a prova de que Λ é injectiva. □

Estamos agora em condições de escrever um mergulho do universo standard no universo não standard que, tal como pretendíamos preserva as relações de pertença e de igualdade, entre outras.

Teorema A.1.6. *A aplicação* $^* = \Lambda \circ \kappa : \mathbb{V}(\mathbb{X}) \to \mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ *definida por* $^*\alpha = \Lambda \circ \kappa(\alpha) = \Lambda([(\alpha)_{\gamma\in\Gamma}])$ *é um mergulho de* $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ *em* $^*\mathbb{V}(\mathbb{X})$.

Demonstração. A injectividade de * decorre da injectividade de Λ e da injectividade de κ. Pela forma como definimos * temos que cada elemento de $\mathbb{X}$ é *transformado num elemento de $^*\mathbb{X}$. Além disso, $\Lambda \circ \kappa(\mathbb{X}) = \Lambda([\mathbb{X}]_{\gamma\in\Gamma}) = \Big\{x \equiv [x_\gamma]_{\gamma\in\Gamma} : \mathfrak{u}(\{\gamma \in \Gamma : x_\gamma \in \mathbb{X}\}) = 1\Big\}$, ou seja, $^* = \Lambda \circ \kappa(\mathbb{X}) = {}^*\mathbb{X}$. Assim, se identificarmos $r \in \mathbb{X}$ com $^*r \in {}^*\mathbb{X}$ temos que $\mathbb{X} \subset {}^*\mathbb{X}$ sendo a extensão própria.

Resta provar que se verifica a segunda condição para que a *transformação seja , de facto, um mergulho de super estruturas, ou seja resta verificar que as relações de pertença e de igualdade passam por *. Sejam $a, b \in \mathbb{V}(\mathbb{X})$. Se $a \in b$ então $\kappa(a) \in_{\mathcal{U}} \kappa(b)$ e portanto, da definição de Λ vem que $\Lambda \circ \kappa(a) \in \Lambda \circ \kappa(b)$, ou seja, $^*a \in {}^*b$. Reciprocamente, se $^*a \in {}^*b$ então $\Lambda \circ \kappa(a) \in \Lambda \circ \kappa(b)$ donde resulta que $\kappa(a) \in_{\mathcal{U}} \kappa(b)$ pela definição de κ. Concluímos assim que $a \in b$. A relação de igualdade verifica-se de forma análoga. □

Teorema A.1.7. *O contradomínio do colapso de Mostowski é:* $^*\mathbb{X} \cup {}^*(\mathbb{X}_1) \cup \ldots \cup {}^*(\mathbb{X}_k) \cup \ldots$

Demonstração. Decorre de imediato da construção do colapso de Mostowski. □

A.1.1 Teorema de Loš-Mostowski e o princípio de Leibniz

Notação A.1.8. *Do mesmo modo que na secção 2.4 podemos considerar a linguagem de primeira ordem* $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ *associada à estrutura* $\mathbb{V}(\mathbb{X})$.[1] *Escreve-se* $\mathbb{V}(\mathbb{X}) \models \varphi$ *se* $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ *permite deduzir* φ, *ou seja, se* φ *é verdadeira em* $\mathbb{V}(\mathbb{X})$.

Podem ser feitas considerações análogas usando a estrutura $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$.

Definição A.1.9. *Dada uma fórmula* φ *de* $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ *chama-se* **transformada de* φ *à fórmula* $\Phi \equiv {}^*\varphi$ *de* $\mathcal{L}(^*\mathbb{X})$, *que se obtém substituindo em* φ *cada constante* $a \in \mathbb{V}(\mathbb{X})$ *que nela ocorra pela sua extensão não-standard* $^*a$.

[1]Para uma definição mais abrangente o leitor pode consultar [22]

Esta definição permite-nos então transportar propriedades entre as duas super estruturas que possam ser expressas através de sentenças. Contudo, este princípio só pode ser aplicado a fórmulas internas. A importância da distinção entre fórmulas internas e externas da linguagem $\mathcal{L}({}^*\mathbb{X})$ é dada no seguinte teorema:

Teorema A.1.10 (Loš-Mostowski). *Seja $\varphi(x_1, ..., x_k, b_1, ..., b_k)$ uma fórmula da linguagem dos reais, $\mathcal{L}(\mathbb{X})$, na qual $x_1, ..., x_k$ são as variáveis livres e $b_1, ..., b_k$ são as constantes, e considere-se a fórmula $\Phi(x_1, ..., x_k) = {}^*\varphi(x_1, ..., x_k, {}^*b_1, ..., {}^*b_k)$.*

Se $a^1 := [(a^1_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}], ..., a^k := [(a^k_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}]$ forem elementos de $\Pi_\mathcal{U}(\mathbb{X})$ então a fórmula da linguagem $\mathcal{L}({}^*\mathbb{X})$, $\Phi\Big(\Lambda(a^1), ..., \Lambda(a^k)\Big)$ é verdadeira em $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$ sse

$$\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : \varphi(x^1_\gamma, ..., x^k_\gamma, b_1, ..., b_k)\}) = 1.$$

Nota A.1.11. *Uma prova deste resultado pode ser encontrada em [22].*

No caso das fórmulas não terem variáveis livres temos:

Corolário A.1.12 (Princípio de Leibniz). *Uma sentença p é verdadeira em $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ se e só se a sua transformada, ${}^*p$, for verdadeira em $\mathcal{L}({}^*\mathbb{X})$, ou seja, $\mathbb{V}(\mathbb{X}) \models p$ sse $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X}) \models {}^*p$.*

Usando o princípio de Leibniz podemos obter propriedades importantes da aplicação *.

Teorema A.1.13. *Sejam a, b constantes de $\mathbb{V}(\mathbb{X})$. Então:*

1. ${}^*\emptyset = \emptyset$;
2. $a = b$ *sse* ${}^*a = {}^*b$ *e* $a \subset b$ *sse* ${}^*a \subset {}^*b$;
3. ${}^*\{a, b\} = \{{}^*a, {}^*b\}$ *e* ${}^*(a, b) = ({}^*a, {}^*b)$
4. ${}^*(a \cup b) = {}^*a \cup {}^*b$
5. ${}^*(a \cap b) = {}^*a \cap {}^*b$
6. ${}^*(a - b) = {}^*a - {}^*b$
7. ${}^*(a \times b) = ({}^*a \times {}^*b)$

Demonstração. A prova deste teorema é feita escrevendo as propriedades em fórmulas da linguagem de primeira ordem e em seguida usando transferência.

1. Se ${}^*\emptyset \neq \emptyset$ então a fórmula $(\exists x \in {}^*\emptyset)$ seria verdadeira e portanto por transferência a fórmula $(\exists x \in \emptyset)$ também era válida, o que é absurdo.

2. A condição $a \subset b$ é traduzida pela fórmula $\forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$. Portanto, podemos aplicar transferência, donde resulta que, a fórmula $\forall x(x \in {}^*a \rightarrow x \in {}^*b)$ é verdadeira. Mas esta fórmula diz exactamente que ${}^*a \subset {}^*b$.

   Quanto à igualdade, temos que: $a = b$ sse $a \subset b$ e $b \subset a$ sse ${}^*a \subset {}^*b$ e ${}^*b \subset {}^*a$ sse ${}^*a = {}^*b$.

3. Seja $c = \{a, b\}$. Podemos traduzir c através da fórmula $\forall x\,(x \in c \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$. Por transferência também é verdadeira a fórmula $\forall x\,(x \in {}^*c \leftrightarrow (x = {}^*a \vee x = {}^*b))$. Mas esta última significa que ${}^*\{a, b\} = {}^*c = \{{}^*a, {}^*b\}$.

4. Seja $c = a \cup b$. Podemos traduzir c através da fórmula $\forall x\,(x \in c \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b))$. Por transferência também é verdadeira a fórmula $\forall x\,(x \in {}^*c \leftrightarrow (x \in {}^*a \vee x \in {}^*b))$. Mas esta última significa que ${}^*(a \cup b) = {}^*c = {}^*a \cup {}^*b$.

5. Seja $c = a \cap b$. c traduz-se pela fórmula $\forall x\,(x \in c \leftrightarrow (x \in a \wedge x \in b))$. Por transferência também é verdadeira a fórmula $\forall x\,(x \in {}^*c \leftrightarrow (x \in {}^*a \wedge x \in {}^*b))$. Mas esta última significa que ${}^*(a \cap b) = {}^*c = {}^*a \cap {}^*b$.

6. Seja $c = a - b$. A diferença entre os dois conjuntos a e b descreve-se através da fórmula $\forall x\,(x \in c \leftrightarrow (x \in a \wedge x \notin b))$. Por transferência também é verdadeira a fórmula $\forall x\,(x \in {}^*c \leftrightarrow (x \in {}^*a \wedge x \notin {}^*b))$. Mas esta última significa que ${}^*(a - b) = {}^*c = {}^*a - {}^*b$.

7. Seja $c = a \times b$. c traduz-se pela fórmula $\forall(x, y)\,((x, y) \in c \leftrightarrow (x \in a \wedge x \in b))$. Por transferência também é verdadeira a fórmula $\forall(x, y)\,((x, y) \in {}^*c \leftrightarrow (x \in {}^*a \wedge x \in {}^*b))$. Mas esta última significa que ${}^*(a \times b) = {}^*c = {}^*a \times {}^*b$. $\square$

Nota A.1.14. *Os resultados obtidos nos pontos (3) e (4) e (5) do teorema anterior podem generalizar-se, mas apenas para um número finito de elementos.*

Teorema A.1.15. *Sejam a, b duas entidades arbitrárias em $\mathbb{V}(\mathbb{X})$.*

1. *Se R for uma relação em $a \times b$, ${}^*R$ é uma relação em ${}^*a \times {}^*b$. Além disso, $dom({}^*R) = {}^*(domR)$ e $cdom({}^*R) = {}^*(cdomR)$;*

2. *Se f for uma aplicação de a em b então ${}^*f$ é uma aplicação de ${}^*a$ em ${}^*b$, com ${}^*(f(c)) = {}^*f({}^*c)$ para todo o $c \in a$.*

Demonstração.

1. Do facto $R \subset a \times b$ resulta, pelo teorema anterior, que ${}^*R \subset {}^*a \times {}^*b$.

   Sendo $c = dom(R)$ então a sentença

$$\forall x\big[x \in c \Rightarrow \exists y[y \in b \wedge (x, y) \in R]\big]$$

é verdadeira e portanto por transferência também é válida a sentença

$$\forall x\big[x \in {}^*c \Rightarrow \exists y[y \in {}^*b \wedge (x,y) \in {}^*R]\big]$$

o que significa que ${}^*c \subseteq dom({}^*R)$. Para a outra inclusão, podemos ver que a sentença

$$\forall x,y\big[(x,y) \in (a-c,b) \Rightarrow (x,y) \notin {}^*R]\big]$$

é verdadeira e portanto aplicando transferência temos que

$$\forall x,y\big[(x,y) \in ({}^*a - {}^*c, {}^*b) \Rightarrow (x,y) \notin {}^*R]\big]$$

o que prova que se $x \notin {}^*c$ então $(x,y) \notin {}^*R$ ou seja $dom({}^*R) \subseteq {}^*c$.

Para o contradomínio é análogo.

2. Se $f : a \longrightarrow b$ então f é uma relação em $a \times b$ descrita por:

$$\forall x,y,y'\big[x \in a \wedge y,y' \in b \Rightarrow [(x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \Rightarrow y = y']\big]$$

Assim, ${}^*f \subset {}^*a \times {}^*b$ e:

$$\forall x,y,y'\big[x \in {}^*a \wedge y,y' \in {}^*b \Rightarrow [(x,y) \in {}^*f \wedge (x,y') \in {}^*f \Rightarrow y = y']\big]$$

donde sai que ${}^*f$ é uma função de ${}^*a$ em ${}^*b$.

Dado $c \in a$ então $(c, f(c)) \in f$ e portanto por transferência $({}^*c, {}^*f(c)) \in {}^*f$ ou seja ${}^*(f(c)) = {}^*f({}^*c)$. □

A.2 Entidades internas e externas

Como $^* = \Lambda \circ \kappa$ então o conjunto $\Lambda(\Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})) = {}^*\mathbb{X} \cup {}^*(\mathbb{X}_1) \cup ... \cup {}^*(\mathbb{X}_k) \cup ...$ contém os transformados por * de todos os objectos standard em $\mathbb{V}(\mathbb{X})$. Contudo esta aplicação não é sobrejectiva, pois Λ também não é sobrejectiva. Este facto é muito importante, pois mostra que $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$ é um universo muito mais rico que o universo $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ o que nos permite fazer uma distinção entre os seus objectos:

Definição A.2.1. *Os objectos de $\mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$ que são da forma $\Lambda([\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$ e portanto, podem identificar-se com $[\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$, dizem-se objectos internos do universo não-standard. Todos os outros são designados por objectos externos.*

Teorema A.2.2. *Um objecto $\alpha \in \mathbb{V}({}^*\mathbb{X})$ é interno se e só se $\alpha \in {}^*a$ para algum $a \in \mathbb{V}(\mathbb{X})$, isto é, uma entidade é interna se e só se pertencer à extensão não-standard de uma entidade standard.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\alpha \in \mathbb{V}(^*\mathbb{X}) - {}^*\mathbb{X}$. Então $\alpha = [\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ para algum $[\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$ ou seja, $[\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in (\mathbb{X}_k/\mathbb{X}_{k-1})^\Gamma/\mathcal{U}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então:

$$\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : \xi_\gamma \in \mathbb{X}_k\}) = 1$$

e portanto temos que $\Lambda([\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) \in {}^*\mathbb{X}_k$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\alpha \in {}^*a$ para algum $a \in \mathbb{V}(\mathbb{X})$. Então $\alpha \in \Lambda([\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$, isto é, α é da forma $\Lambda([\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$ para algum $[\{\xi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in_{\mathcal{U}} [\{a_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$ o que faz com que α seja interno. □

Teorema A.2.3. *Seja A um objecto qualquer de $\mathbb{V}(\mathbb{X}) - \mathbb{X}$. Então ${}^*\mathcal{P}(A) \equiv {}^*(\mathcal{P}(A))$ é o conjunto de todos os subconjuntos internos de ${}^*A$.*

Demonstração. Seja $B \in {}^*\mathcal{P}(A)$. Então pelo teorema anterior B é interno. Resta mostrar que B pertence a $\mathcal{P}({}^*A)$. Como $\forall X\, [X \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow X \subset A]$ é verdadeira então por transferência temos que $\forall X\, [X \in {}^*\mathcal{P}(A) \Rightarrow X \subset {}^*A]$ também o é. Logo tomando $X = B$ resulta que B é subconjunto de ${}^*A$.

Reciprocamente, se B é um subconjunto interno de ${}^*A$ então pelo teorema anterior existe $c \in \mathbb{V}(\mathbb{X})$ tal que $B \in {}^*c$. Como a sentença $\forall X[X \in c \Rightarrow [X \subset A \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)]]$ é verdadeira então por transferência $\forall X[X \in {}^*c \Rightarrow [X \subset {}^*A \Rightarrow X \in {}^*\mathcal{P}(A)]]$ é também válida. Basta agora tomar $X = B$ e concluímos que $B \in {}^*\mathcal{P}(A)$. □

Conclusão: ${}^*\mathcal{P}(A)$ é o conjunto de todos os subconjuntos internos de ${}^*A$ e portanto $\mathcal{P}({}^*A) - {}^*\mathcal{P}(A)$ é o conjunto de todos os subconjuntos externos de ${}^*A$.

Definição A.2.4. *Uma fórmula Φ da linguagem não-standard $\mathcal{L}(^*\mathbb{X})$ diz-se interna se as suas constantes forem todas entidades internas e, dir-se-á externa, caso contrário.*

Teorema A.2.5 (Princípio da definição interna). *Se $\Phi(x)$ for uma fórmula interna de $\mathcal{L}(^*\mathbb{X})$ e a designar um conjunto interno de $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ então o conjunto $\{x \in a : \Phi(x)\}$ é interno.*

Demonstração. Como a e $\Phi(x)$ são objectos internos então são entidades de ordem limitada e portanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que a e todas as entidades envolvidas em Φ são elementos de ${}^*(\mathbb{X}_m)$. Definamos φ, uma fórmula de $\mathcal{L}_{\mathbb{X}}$ tal que ${}^*\varphi = \Phi$. Assim, a sentença seguinte é verdadeira:

$$\forall y\big[y \in \mathbb{X}_m \to \exists z[z \in \mathbb{X}_{m+1} \wedge z = \{x \in y : \varphi(x)\}]\big]$$

donde resulta, por transferência que:

$$\forall y\big[y \in {}^*(\mathbb{X}_m) \to \exists z[z \in {}^*(\mathbb{X}_{m+1}) \wedge z = \{x \in y : \Phi(x)\}]\big]$$

também é verdadeira. Fazendo $y = a$ vem que $\{x \in a : \Phi(x)\}$ é interno. □

Definição A.2.6. *Seja $A \in \mathbb{V}(\mathbb{X}) - \mathbb{X}$. Chama-se cópia standard de A, e representa-se por ${}^\sigma A$, ou por ${}^{im}A$, à entidade de $\mathbb{V}(^*\mathbb{X})$ definida por ${}^\sigma A = {}^{im}A = \{{}^*a : a \in A\}$.*

A.2.1 Consequências

Teorema A.2.7 (Compreensão). *Dada uma aplicação $f : {}^{\sigma}A \to {}^*B$, onde A e B são entidades standards, existe uma aplicação interna ${}^*F : {}^*A \to {}^*B$ cuja restrição a ${}^{\sigma}A$ coincide com f.*

Demonstração. Como para cada ${}^*a \in {}^{\sigma}A$ se tem $f({}^*a) \in {}^*B$ então $f({}^*a) = \Lambda([\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$ com $[\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in_{\mathcal{U}} [\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]$. Sem qualquer perda de generalidade podemos supor que $b_\gamma \in B_\gamma$ para todo o $\gamma \in \Gamma$. Defina-se então uma sucessão generalizada de funções standard $f_\gamma : A \to B$ dadas por $f_\gamma(a) = b_\gamma$, com $\gamma \in \Gamma$. Para cada $\gamma \in \Gamma$, $f_\gamma \in \mathcal{P}(A \times B)$ pelo que $\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : f_\gamma \in \mathbb{X}_k\}) = 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e portanto existe $j \leq k$ tal que $\mathbb{u}(\{\gamma \in \Gamma : f_\gamma \in \mathbb{X}_j - \mathbb{X}_{j-1}\}) = 1$. Consequentemente, $[\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}] \in \Pi_{\mathcal{U}}(\mathbb{X})$ e, portanto, a definição $F = \Lambda([\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}])$ faz sentido. Por um lado F é uma entidade interna e, visto que para todo $x = \Lambda([\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) \in {}^*A$ se tem $F(x) = \Lambda([\{f_\gamma(x_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}])$, então F está bem definida em ${}^*A$. Para ${}^*a \in {}^{\sigma}A \subset {}^*A$ vem que $F(a) = \Lambda([\{f_\gamma(a)\}_{\gamma\in\Gamma}]) = \Lambda([\{b_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}]) = f({}^*a)$ e portanto $F|_{{}^{\sigma}A} = f$. □

Teorema A.2.8 (Saturação Numerável). *Qualquer sequência decrescente de conjuntos internos não vazios tem intersecção não vazia.*

Demonstração. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos tais que $A_n \supset A_{n+1}$. Por compreensão podemos estender a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a uma hiper-sequência interna $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$. Por hipótese, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $(\forall n \in {}^*\mathbb{N})[n \geq k \Rightarrow A_n \supset A_{n+1} \neq \emptyset]$.

Esta fórmula é interna e por permanência superior sabemos que esta é verdadeira para algum $K \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Assim, concluímos que $\emptyset \neq A_K \subset \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. □

O Principio de Saturação numerável enunciado no teorema anterior pode ser também formulada do seguinte modo:

Teorema A.2.9. *O princípio da saturação numerável descrito no teorema anterior equivale a:*

Qualquer sequência de conjuntos internos com a propriedade das intersecções finitas tem intersecção não vazia.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Imediato, pois é um caso particular;

($\Leftarrow$) Suponhamos que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos com a propriedade das intersecções finitas. Consideramos a sequência $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que $B_n = \bigcap_{i\leq n} A_i$. Então temos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e, além disso, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos não vazios decrescente e portanto vem que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$ e portanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. □

Bibliografia

[1] ALMEIDA, Jorge e RIBEIRO, Hugo: *Introdução à lógica*, Faculdade de Ciências, 1990;

[2] ALVES, José Ferreira: *Análise Funcional*, Notas da cadeira de Análise do 4º ano da licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências, 2002;

[3] BARRA, G.:*Introduction to measure theory*, Van Nostrand Reinhold, 1974;

[4] BARREIRA, Luís: *Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, American Mathematical Society-University Lecture series, vol. 23, 2001;

[5] COHN, Donald: *Measure theory* , Birkhauser, 1980;

[6] CUTLAND, Nigel: *Nonstandard measure theory and its aplications*, Bulletin of the London Mathematical Society, 15 (1983), 529-589;

[7] CUTLAND, Nigel: *Loeb measures in practise: Recent advances*, Springer, 2000;

[8] FRIEDBERG, S., INSEL A. e SPENCE L.: *Linear algebra-second edition*, Prentice Hall, 1989;

[9] GOLDBLATT, Robert: *Lectures on Hyperreals-An introduction to nonstandard analysis*, Springer, 1998;

[10] HALMOS, P. R.: *Measure Theory*, The University Series in Higher Mathematics. D. van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1950;

[11] HUBBARD, J. H. e WEST, B. H.:*Differential equations: a dynamical systems approach*, Springer 1990;

[12] IRWIN, M. C.: *Smooth dynamical systems*, Academic Press, 1980;

[13] KAMAE, Teturo: *A simple proof of the ergodic theorem using nonstandard analysis*, Israel Journal of Mathematics, 42 nº4 (1982), 284-290;

[14] KATOK, A. e HASSELBLATT, B.: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995;

[15] KELLEY, John L.: *General topology* , Van Nostrand, 1955;

[16] KRENGEL, Ulrich: *Ergodic theorems* , Walter de Gruyter, 1985;

[17] LOEB, Peter e WOLFF, Manfred: *Nonstandard analysis for working mathematician*, Kluwer Academic Publishers, 2000;

[18] Loeb, Peter: *Conversion from nonstandard to standrad measure spaces and applications in probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 211(1975), 113-122;

[19] MAÑÉ, Ricardo: *Introdução à Teoria Ergódica*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983;

[20] OSELEDETS, Valerii I: *A multiplicative ergodic theorem. Liapunov characteristic number for dynamical systems*, Transactions of the Moscow Mathematical Society, 19 (1968), 197-221;

[21] PALMGREN, Erik: *A constructive approach to nonstandard analysis*, Annals of Pure and Applied Logic, 73 (1995), 297-325;

[22] PINTO, José: *Métodos infinitesimais em análise matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, 2000;

[23] ROBINSON, Abraham: *Non-standard analysis*, Amsterdam : North-Holland, 1970.

[24] ROBINSON, C.: *Dynamical systems-stability, symbolic dynamics and chaos*, CRC Press, 1995;

[25] RUDIN, Walter: *Real and complex analysis-3rd edition*, Mcgraw-Hill, 1987;

[26] WALTERS, Peter: *Ergodic theory-introductory lectures*, Lecture Notes in Mathematics (458), Springer, 1975;

[27] WALTERS, Peter: *An introduction to ergodic theory*, Springer, 1982;