Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Departamento de Matemática Pura

Espaços de moduli de revestimentos de Galois da esfera de Riemann perfurada

Rita Alexandra Dias Cadima

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática - Fundamentos e Aplicações, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor Carlos Miguel de Menezes.

Março de 2004

21/05/2004
Pet Cot

M

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Departamento de Matemática Pura

Espaços de moduli de revestimentos de Galois da esfera de Riemann perfurada

Rita Alexandra Dias Cadima

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática - Fundamentos e Aplicações, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor Carlos Miguel de Menezes, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Ao Paulo.
Ao Professor Carlos Menezes pela exigência, motivação e apoio constante.
Aos meus pais e irmãs.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho vamos estudar revestimentos da esfera de Riemann perfurada, ou seja, revestimentos

$$f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P,$$

onde P é um conjunto finito de pontos de $\mathbb{P}^1$.

Se $P = \{p_1, ..., p_r\}$ e $x_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus P$, o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, x_0)$, tem uma apresentação dada pelos geradores $[\gamma_1], ..., [\gamma_r]$ e pela relação $[\gamma_1]...[\gamma_r] = 1$, onde cada $[\gamma_i]$ é a classe de homotopia do lacete $\delta_i^{-1}\lambda_i\delta_i$ com base em x_0, em que λ_i é um lacete que parametriza uma circunferência centrada em $p_i \in P$, percorrendo-a no sentido directo, e δ_i é um caminho que une x_0 ao ponto base do lacete λ_i.

No capítulo 2, considerando discos perfurados $D^*(p, r)$ em torno de cada ponto $p \in P$, mostramos que existe, para $r > \hat{r} > 0$, uma bijecção entre as componentes conexas de $f^{-1}(D^*(p, \hat{r}))$ e de $f^{-1}(D^*(p, r))$, estando as primeiras estritamente contidas nas segundas. Obtemos assim uma relação de equivalência entre as componentes conexas sobre discos perfurados de diferentes raios centrados num mesmo ponto. A uma classe de equivalência destas componentes conexas chamamos um ponto ideal π sobre p. Considerando a união (disjunta) de X com todos os pontos ideais que estão sobre os pontos de P, construímos um espaço $\bar{X}$, onde é possível definir uma topologia na qual o revestimento f admite um único prolongamento a uma aplicação contínua, sobrejectiva e própria $\bar{f} : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ tal que $\bar{f}(\pi) = p$, para cada ponto ideal π sobre p, o que nos conduz à noção de revestimento ramificado da esfera de Riemann.

Quando f é um revestimento finito e X é conexo, $\bar{X}$ tem uma única estrutura de superfície de Riemann compacta que faz de $\bar{f} : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ uma aplicação holomorfa, isto é, uma função meromorfa (secção 2.2). Aproveitando a mesma construção mostramos como construir a superfície de Riemann compacta associada a uma curva plana afim definida por um polinómio irredutível $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$.

Quando f é um revestimento de Galois, os geradores dos subgrupos do grupo de automorfismos do revestimento que estabilizam cada componente conexa de $f^{-1}(D^*(p_i, r))$ formam uma única classe de conjugação C_{p_i} de $Aut(f)$, para cada $p_i \in P$. Considerando um ponto $y_0 \in (D^*(p_i, r))$, estes geradores são obtidos através do homomorfismo sobrejectivo

$$\begin{array}{rl}\Phi_{x_0} : \pi_1(D^*(p_i, r), y_0) & \rightarrow Aut(f) \\ [\gamma] & \mapsto \alpha : [\gamma]x_0 \mapsto x_0,\end{array}$$

definido para cada ponto $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Como $[\gamma_i]$ é gerador de $\pi_1(D^*(p_i, r), y_0)$, tomando x_0 contido em cada componente conexa de $f^{-1}(D^*(p_i, r))$, obtemos o gerador $\Phi_{x_0}([\gamma_i])$ do subgrupo de $Aut(f)$ estabilizador dessa componente conexa. Estas classes de conjugação C_p são não triviais apenas para um número finito de pontos $p \in P' \subseteq P$. Este resultado vai-nos permitir definir (secção 2.3) o tipo de ramificação de um revestimento de Galois finito da esfera de Riemann perfurada, como sendo o terno ordenado $[Aut(f), P', (C_p)_{p\in P'}]$.

Reciprocamente, se $[G, P, (C_p)_{p\in P}]$ é um terno ordenado constituído por um grupo finito G, um conjunto finito $P \subseteq \mathbb{P}^1$ e um conjunto de classes de conjugação C_p indexadas por P, introduzimos na união disjunta $X = \bigcup_{g\in G} \mathbb{C} \setminus P \times \{g\}$ uma topologia adequada que faz da projecção canónica $f : X \rightarrow \mathbb{C} \setminus P$ um revestimento de Galois com grupo de automorfismos G e tipo de ramificação $[G, P, (C_p)_{p\in P}]$.

Este resultado, dado por estas duas correspondências, é conhecido por versão topológica do teorema de existência de Riemann (teorema 2.25).

Fixemos um grupo finito G e um conjunto finito P de $r \geq 2$ pontos distintos de $\mathbb{P}^1$. Consideremos o conjunto $\mathcal{H}_{r,P}(G)$ das classes de equivalência de pares (f, μ), onde $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus P$ é um revestimento de Galois finito com pontos de ramificação em P e $\mu : G \rightarrow Aut(f)$ é um isomorfismo de grupos, considerando que dois pares ordenados (f, μ) e (f', μ') são equivalentes $(f' : X' \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus P)$ se existir um homeomorfismo $\delta : X \rightarrow X'$ tal que $f' \circ \delta = f$ e $\mu'(g) = \delta\mu(g)\delta^{-1}$, para todo o elemento g de G.

Fazendo P percorrer os pontos da variedade holomorfa $\mathcal{O}_r = \frac{F_r(\mathbb{P}^1)}{S_r}$ de dimensão r, onde $F_r(\mathbb{P}^1)$ é o complementar em $(\mathbb{P}^1)^r$ do conjunto dos pontos com duas coordenadas iguais, obtemos o espaço $\mathcal{H}_r(G) = \bigcup_{P\in\mathcal{O}_r} \mathcal{H}_{r,P}(G)$ que mostramos admitir uma estrutura de variedade holomorfa que faz de $\Psi : \mathcal{H}_r(G) \rightarrow \mathcal{O}_r$ um revestimento holomorfo (secção 2.3). A variedade holomorfa $\mathcal{H}_r(G)$ é chamada de espaço de moduli de revestimentos de Galois finitos da esfera de Riemann perfurada, com grupo de automorfismos G e r pontos de ramificação.

Estes espaços de moduli começaram por ser estudados por Hurwitz [10] para o caso particular em que G é o grupo simétrico, S_n, e os revestimentos de Galois têm tipo de ramificação simples, isto é, $[S_n, P, \mathcal{C}]$ onde $\mathcal{C} = (C, ..., C)$ é o r-uplo constituído por r vezes a classe C de conjugação das transposições simples. Em 1969, Fulton [6] mostrou, também para revestimentos de Galois com ramificação simples, que esses espaços de moduli admitem não apenas uma estrutura de variedade holomorfa mas também uma estrutura de variedade algébrica complexa, fazendo de Ψ um revestimento algébrico. Um dos problemas mais importantes da teoria de Galois é o de saber quando é que um grupo finito é grupo de Galois de alguma extensão de Galois de $\mathbb{Q}(x)$. Mais geralmente, o problema inverso da teoria de Galois para um corpo $\mathbb{K}$, é o de saber que grupos finitos são grupos de Galois de alguma extensão de Galois de $\mathbb{K}(x)$. Motivados pelo problema inverso de Galois, Fried [7], em 1977, e Fried e Volklein [8], em 1991, generalizaram o trabalho de Fulton para espaços de moduli de revestimentos de Galois com grupo de automorfismos arbitrário e tipo de ramificação arbitrário. Esta tese apresenta, de forma tão auto-contida quanto nos foi possível, alguns dos principais resultados dos trabalhos de Fried e Volklein ([7], [8]), utilizando também como base de trabalho o livro *Groups as Galois Groups: an introduction*, [15], de Volklein.

Sendo $\mathcal{H}_r(G)$ um revestimento de $\mathcal{O}_r$, as fibras de $\mathcal{H}_r(G)$ admitem uma acção do grupo fundamental de $\mathcal{O}_r$, $\pi_1(\mathcal{O}_r, P_0)$, que é isomorfo ao grupo de Artin $B(r)$ das r-tranças geométricas, cuja apresentação é dada por geradores $\sigma_1, ..., \sigma_{r-1}$ e por relações

$$\begin{array}{lll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{se} & |i-j| \geq 2 \quad \text{e} \quad 1 \leq i,j \leq r-1; \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \text{se} & 1 \leq i \leq r-2, \end{array}$$

onde σ_i é a r-trança elementar em que a corda i permuta com a corda $i+1$.

Tomemos um par (f, μ) representante de uma classe de $\mathcal{H}_r(G)$ e, para $x_0 \in f^{-1}(\infty)$, consideremos o homomorfismo sobrejectivo $\varphi_0 = \mu^{-1} \circ \Phi_{x_0}$. Temos então que os elementos $g_1, ..., g_r$, definidos por $g_i = \varphi_0([\gamma_i])$, formam um sistema de geradores de G. Variando x_0 na fibra $f^{-1}(\infty)$, obtemos homomorfismos $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P_0, \infty) \to G$ que são obtidos de φ_0 por composição com automorfismos internos de G. Mostramos ainda que dois pares (f, μ) e (f', μ') equivalentes induzem a mesma classe de equivalência de homomorfismos φ (considerando a relação de equivalência definida pela acção de $Inn(G)$). Temos assim que o conjunto

$$\mathcal{E}_r(G) = \frac{\{(g_1, ..., g_r) \in G^r : G = \langle g_1, ..., g_r \rangle, g_1 ... g_r = 1, g_i \neq 1, \forall i\}}{Inn(G)}$$

parametriza uma fibra de $\mathcal{H}_r(G)$ sobre um ponto $P \in \mathcal{O}_r$. Da acção de $B(r)$ sobre uma fibra do revestimento Ψ resulta uma acção de $B(r)$ sobre as classes de sistemas de geradores de G que parametrizam esta fibra, sendo esta acção dada por

$$\sigma_i(g_1, ..., g_r) = (g_1, ..., g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, g_{i+1}, ..., g_r)$$

Na secção 3.2 mostramos que as componentes conexas de $\mathcal{H}_r(G)$ correspondem a órbitas da acção de $B(r)$ sobre $\mathcal{E}_r(G)$.

Fixado um r-uplo de classes de conjugação $\mathcal{C} = (C_1, ..., C_r)$, é também um problema importante decidir quando é que o espaço $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ é conexo, sendo este espaço constituído por elementos (f, μ) para os quais é possível ordenar os pontos de ramificação $p_1, ..., p_r$ de forma a que $C_{p_i} \subseteq C_i$. Na proposição (3.14) mostramos que $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ é conexo se e somente se $B(r)$ age transitivamente em $Ni(G, \mathcal{C})$, onde

$$Ni(G, \mathcal{C}) := \frac{\{(g_1, ..., g_r) \in G^r : G = \langle g_1, ..., g_r \rangle, g_1 ... g_r = 1, \exists \pi \in S_r : g_{\pi(i)} \in C_i, \forall i\}}{Inn(G)}.$$

Para o caso particular dos revestimentos com ramificação simples, Clebsch deu uma resolução para este problema (que apresentamos no teorema 3.15), mostrando que o espaço $\mathcal{H}_r(S_n, \mathcal{C})$ é conexo se e somente se r é um número par e $r \geq 2(n-1)$.

Se $f : X \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ é um revestimento finito, o revestimento ramificado $\bar{f} : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ é uma função meromorfa (teorema 2.12) e, reciprocamente, se $g : Y \to \mathbb{P}^1$ é uma função meromorfa (onde Y é uma superfície de Riemann compacta), resulta que g é um revestimento ramificado da esfera de Riemann (teorema 1.70). Para um tal revestimento g, a aplicação $g^* : \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \to \mathcal{M}(Y)$, $x \mapsto g$, é uma extensão de corpos e, como consequência do teorema de existência de Riemann, é uma extensão algébrica finita de $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ e, portanto, de $\mathbb{C}(x)$ (teorema 1.80). Se $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ é um revestimento de Galois (teorema 4.9), mostramos que $\mathcal{M}(\bar{X})$ é extensão de Galois de $\mathbb{C}(x)$. Reciprocamente, se $\mathcal{M}(Y)$ é uma extensão de Galois de $\mathbb{C}(x)$ então existe um revestimento de Galois ramificado $f : Y \to \mathbb{P}^1$ (teorema 4.10). Assim, se G é um grupo finito, existe um revestimento de Galois finito $f : X \to \mathbb{P}^1 \backslash P$ (teorema 2.22) que induz uma extensão de Galois $f^* : \mathbb{C}(x) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \to \mathcal{M}(\bar{X})$, ou seja, fica também demonstrado que todo o grupo finito é regular sobre $\mathbb{C}$ para o problema inverso de Galois.

Se $L : \mathbb{C}(x)$ é uma extensão de Galois de grau finito m, L é corpo de decomposição de um polinómio $F(x,y) = y^m + a_{m-1}(x)y^{m-1} + ... + a_0(x) \in \mathbb{C}[x,y]$ mónico e de grau m em y. Para $P = \{x \in \mathbb{C} : \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0\}$, F define uma superfície de Riemann compacta que contém o aberto $X := \mathcal{C} \setminus f^{-1}(P)$ da curva plana afim $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : F(x,y) = 0\}$, onde f é a projecção na 1^a coordenada (proposição 2.14). A função $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$, $(x,y) \mapsto x$, prolonga-se a uma função meromorfa não constante $\bar{f} : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$, isto é, a um revestimento ramificado de $\mathbb{P}^1$. Para cada $p \in \mathbb{P}^1$, existe um inteiro positivo $n_{L,p}$ mínimo tal que considerando um disco perfurado $D^* \subset \mathbb{P}^1 \setminus P$ centrado em p e uma série de Laurent $\phi_W(t)$ convergente num disco perfurado $V^* \subseteq D^*$ se tem, para cada componente conexa W de $f^{-1}(D^*)$, que

$$f^{-1}(D^*) \cap W = \{(t^{n_{L,p}}, \phi_W(\xi^k t)) : t \in V^*, k \in \{1, ..., n_{L,p}\}\},$$

para $\xi = \exp^{\frac{2\pi i}{n_{L,p}}}$. Os elementos do grupo de Galois da extensão $L : \mathbb{C}(x)$ que permutam estes valores dentro de cada componente conexa formam uma classe de conjugação C_p, cuja ordem comum dos seus elementos é $n_{L,p}$. Pelo teorema (4.9) existe um isomorfismo $Aut(f) \to Gal(L : \mathbb{C}(x))$ que, para cada $p \in \mathbb{P}^1$, envia a classe de conjugação associada a p do grupo de automorfismos do revestimento f na classe de conjugação associada a p do grupo de Galois da extensão $L : \mathbb{C}(x)$. Faz então sentido dizer que um ponto $p \in \mathbb{P}^1$ é ponto de ramificação da extensão se $n_{L,p} > 1$ e definir o tipo de ramificação da extensão por $[Gal(L : \mathbb{C}(x)), P, (C_p)_{p \in P}]$, sendo P o conjunto dos pontos de ramificação. Por este motivo, começamos por estudar, no capítulo 4, extensões algébricas de $\mathbb{C}(x)$, introduzindo a noção de tipo de ramificação de uma extensão de Galois.

Como conclusão, estabelecemos neste trabalho, para um grupo finito G e um conjunto finito P de pontos de $\mathbb{P}^1$, correspondências biunívocas entre:

(1) As classes de $\mathbb{C}(x)$-isomorfismos de extensões de Galois $L : \mathbb{C}(x)$ com grupo de Galois isomorfo a G e com pontos de ramificação em P.

(2) As classes de isomorfismo de revestimentos de Galois $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ com grupo de automorfismos isomorfo a G.

(3) Os subgrupos normais do grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y)$ com quociente isomorfo a G.

Estas identificações permitem-nos encarar os espaços de moduli $\mathcal{H}_r(G)$, construídos para os revestimentos de Galois da esfera de Riemann perfurada, como espaços de moduli de extensões de Galois finitas de $\mathbb{C}(x)$ ou como espaços de moduli de subgrupos normais de $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y)$ com quociente isomorfo a G.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo introduziremos, de um modo conciso, mas necessariamente incompleto, alguns resultados gerais sobre teoria de grupos, teoria de Galois, revestimentos, variedades holomorfas e superfícies de Riemann, nomeadamente o teorema de Riemann de existência de funções meromorfas não constantes definidas numa superfície de Riemann compacta, que constituem uma base importante para o trabalho que irá ser desenvolvido dos próximos capítulos.

1.1 Teoria de grupos

A referência genérica para esta secção é o livro [14].

Dado um subgrupo H de um grupo G, uma *classe lateral direita* (respectivamente, *classe lateral esquerda*) de H é um conjunto da forma $Ha := \{ha : h \in H\}$ (respectivamente, $aH := \{ah : h \in H\}$), para $a \in G$. Se $a \notin H$ então $Ha \neq H$. Quaisquer duas classes laterais direitas ou são iguais ($Ha = Hb$ se e somente se $ab^{-1} \in H$) ou são disjuntas. O número de classes laterais direitas distintas de H em G é igual ao número de classes laterais esquerdas. Este número é designado por *índice* do subgrupo H e é notado por $|G : H|$.

O teorema de Lagrange, afirma que se G é um grupo finito e H é subgrupo de G então $|H|$ divide $|G|$ e $|G : H||H| = |G|$. Em particular, se $g \in G$ então $|g|$ divide $|G|$ e $g^{|G|} = 1$.

Um grupo G diz-se *cíclico* se existir um elemento g de G tal que todos os elementos de G são potências de g. Se G é um grupo cíclico finito então G tem um único subgrupo de cada ordem nas condições do teorema de Lagrange, sendo cada subgrupo também cíclico.

Dado um subgrupo N de G, N é um subgrupo *normal* se $Ng = gN$, para todo $g \in G$. Se $\phi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos então $ker(\phi)$ é um subgrupo normal de G, $Im(\phi)$ é subgrupo de H e $Im(\phi) \simeq G/ker(\phi)$.

Uma sucessão de homomorfismos de grupos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ diz-se *exacta* em B se $Im(f) = Ker(g)$.

Dizemos que dois elementos h, h' de G são *conjugados* se existir um elemento g em G tal que $h' = g^{-1}hg$. A *classe de conjugação* de um elemento $h \in G$ é o conjunto

$C_h := \{g^{-1}hg : g \in G\}$ formado por todos os elementos que são conjugados com h. Esta relação é uma relação de equivalência em G, em que as classes de equivalência são as classes de conjugação dos elementos de G. Em particular, G é uma união disjunta de classes de conjugação e, se G é finito, então, para um conjunto finito $\{1, h_1, ..., h_s\}$ de representantes das classes, temos que $|G| = 1 + |C_{h_1}| + ... + |C_{h_s}|$.

O *centralizador* de um elemento $h \in G$ é definido por $C_G(h) := \{g \in G : g^{-1}hg = h\}$. Notemos que se $g \in C_G(h)$ então $hg = gh$, ou seja, h e g comutam. O centralizador de um elemento de G é um subgrupo de G e permite-nos, no caso de G ser finito, determinar o número de elementos da classe de conjugação deste elemento, através da relação $|G : C_G(h)| = |C_h|$.

Notemos que se um elemento $h \in G$ é o único elemento da sua classe de conjugação, i.e., $C_h = \{h\}$, então $g^{-1}hg = h$, para todo o g pertencente a G, ou seja, h comuta com todos os elementos de G. Neste caso, diremos que C_h é uma classe de conjugação trivial.

De modo análogo, para $g \in G$, definimos o *conjugado por* g de um subgrupo H de G por $H^g := \{g^{-1}hg : h \in H\}$. O conjugado H^g é um subgrupo de G isomorfo a H (com isomorfismo dado por $\gamma_g : H \to H^g$, $h \mapsto ghg^{-1}$). O *normalizador* $N_G(H)$ de H em G é o maior subgrupo de G no qual H é normal, i.e., $N_G(H) := \{g \in G : g^{-1}Hg = H\}$. Em particular, se H é um subgrupo normal de G então $N_G(H) = G$. O número de subgrupos H^g conjugados de H é dado pelo índice em G, $|G : N_G(H)|$, do seu normalizador.

Para um elemento g de G, a aplicação $Inn_g : G \to G$ definida por $Inn_g(h) := ghg^{-1}$ é um automorfismo de G que designamos por *automorfismo interno* de G. O conjunto de todos os automorfismos internos de G, que notamos por $Inn(G)$, é um subgrupo normal do grupo $Aut(G)$ dos automorfismos de G.

Dado um grupo G e um conjunto X, uma *acção à esquerda de G sobre X* é uma aplicação $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$, que satisfaz:

(i) $1x = x, \forall x \in X$;

(ii) $(gh)x = g(hx)$, $\forall g, h \in G, \forall x \in X$.

Seja X um conjunto finito. Notamos por S_X o conjunto de todas as bijecções (ou permutações) de X. S_X é um grupo para a composição de aplicações, chamado o *grupo simétrico* de X, e $|S_X| = |X|!$. Se $X = \{1, ..., n\}$, notamos o grupo simétrico por S_n.

Uma acção de um grupo G em X define um homomorfismo $\phi : G \to S_X$ que envia cada elemento g de G na bijecção $\phi(g)$ de X em X definida por $\phi(g)(x) = gx$.

Exemplos 1.1. (1) Se K é um corpo, então S_n actua sobre $K[x_1, ..., x_n]$ permutando as variáveis dos seus polinómios: $(\sigma, p) \mapsto p^\sigma$ onde $p^\sigma(x_1, ..., x_n) := p(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$.

(2) Cada grupo G actua sobre si próprio por conjugação, em que cada par (g, h) de $G \times G$ é enviado em ghg^{-1}.

Dada uma acção de um grupo G sobre um conjunto X, definimos a *órbita* de um elemento $x \in X$ como sendo o conjunto

$$\omega_G(x) := \{gx : g \in G\}.$$

Notemos que, para $x, y \in X$, então ou $\omega_G(x) = \omega_G(y)$ ou $\omega_G(x) \cap \omega_G(y) = \emptyset$. Temos, portanto, uma relação de equivalência definida em X, em que $x \equiv y$ se somente se $\omega_G(x) = \omega_G(y)$.

Para $x \in X$, o conjunto

$$G_x := \{g \in G : gx = x\}$$

é um subgrupo de G, designado o *grupo de isotropia de x* ou o *estabilizador de x*. Em particular, temos que $|\omega_G(x)| = |G : G_x|$.

Exemplo 1.2. Considerando a acção de um grupo G nele próprio por conjugação, a órbita $\omega_G(g)$ de cada elemento g de G pela acção coincide com a sua classe de conjugação C_g.

Definição 1.3. Seja L um grupo. L é um grupo *livre* com *base* X, sendo X um subconjunto de L, se para todo o grupo G e toda a aplicação $\phi : X \to G$ existir um único homomorfismo $\Phi : L \to G$ que prolonga ϕ, ou seja, $\Phi \circ \iota = \phi$, onde ι é a inclusão canónica de X em L.

Vamos ver que este conjunto X gera o grupo L e que uma base de um grupo livre tem um comportamento idêntico à base de um espaço vectorial de dimensão finita.

Comecemos por fazer uma construção abstracta de um grupo livre. Seja $X = \{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto de n elementos abstractos distintos e $X^{-1} = \{x_1^{-1}, ..., x_n^{-1}\}$, um conjunto de n elementos distintos não contidos em X, para o qual existe uma bijecção $X \to X^{-1}$, $x \mapsto x^{-1}$. Definimos uma *palavra* w em X como sendo uma sucessão finita de elementos de $X \cup X^{-1}$, ou seja, uma palavra é uma sucessão $x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_k}^{\epsilon_k}$ com $1 \leq i_1, ..., i_k \leq n$ e $\epsilon_j = \pm 1$. Neste caso, dizemos que a palavra w tem *comprimento* k. Definimos também a *palavra vazia*, que notamos por 1 e cujo comprimento é 0.

O *produto* entre duas palavras $w_1 = x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_k}^{\epsilon_k}$ e $w_2 = x_{j_1}^{\epsilon_1}...x_{j_s}^{\epsilon_s}$ é definido por

$$w_1 w_2 := x_{i_1}^{\epsilon_1}...x_{i_k}^{\epsilon_k} x_{j_1}^{\epsilon_1}...x_{j_s}^{\epsilon_s}.$$

Para este produto a palavra *inversa* de w_1 é a palavra $w_1^{-1} = x_{i_k}^{-\epsilon_k}...x_{i_1}^{-\epsilon_1}$.

No conjunto de todas as palavras podemos definir a seguinte relação de equivalência: w_1 é *equivalente* a w_2 se se puder obter w_2 aplicando um número finito de vezes a w_1 as operações definidas por

$$\begin{array}{llcll} T_1 : & a_1...a_i a_{i+1}...a_k & \mapsto & a_1...a_i x_j^{\epsilon} x_j^{-\epsilon} a_{i+1}...a_k & \text{(inserir)} \\ T_2 : & a_1...a_i x_j^{\epsilon} x_j^{-\epsilon} a_{i+1}...a_k & \mapsto & a_1...a_i a_{i+1}...a_k & \text{(apagar)} \end{array}$$

para $a_1, ..., a_k, x_j \in X \cup X^{-1}$.

Seja L o conjunto das classes de equivalência de palavras. L é grupo para o produto $[w_1][w_2] := [w_1 w_2]$, com elemento neutro $[1]$ e $[w]^{-1} = [w^{-1}]$. Chamamos palavra *reduzida* à palavra de menor comprimento que representa cada classe. A L chamamos o *grupo livre* gerado pela base $\{x_1, ..., x_n\}$. Temos então:

Teorema 1.4. *Dado um conjunto X existe um grupo livre $L(X)$ com base X.*

Corolário 1.5. *Todo o grupo G é quociente de um grupo livre.*

Demonstração. Vamos construir um conjunto $X := \{x_g : g \in G\}$ de modo a que exista uma bijecção $\phi : X \to G$ dada por $x_g \mapsto g$. Seja $L(X)$ o grupo livre gerado por X. Prolongando ϕ a $L(X)$, obtemos o homomorfismo $\Phi : L \to G$, que é sobrejectivo, uma vez que ϕ é sobrejectiva. Então $G \simeq L(X)/ker(\Phi)$. □

Definição 1.6. Seja X um conjunto e Δ uma família de palavras em X. Um grupo G tem geradores em X e relações em Δ se $G \simeq L(X)/R$, onde $L(X)$ é o grupo livre gerado por X e R é o subgrupo normal de $L(X)$ gerado por Δ. Ao par ordenado $\langle X, \Delta \rangle$ chamamos uma *apresentação* de G.

Dizemos que a apresentação é *finita* se tanto X como Δ são finitos.

É também usual escrever uma apresentação de G através da sucessão exacta

$$1 \to ker(\Phi) \to L(X) \xrightarrow{\Phi} G \to 1$$

onde Φ é o homomorfismo definido no corolário anterior. Notemos que $ker(\Phi) = R = \langle \Delta \rangle$.

1.2 Extensões de corpos e Teoria de Galois

A referência genérica para esta secção é o livro [2].

Dados dois corpos K e L, dizemos que L é uma *extensão* de K, e escrevemos $L : K$, se K é um subcorpo de L. O *grau* da extensão $L : K$ é a dimensão de L considerando-o como espaço vectorial sobre K. Dizemos que uma extensão é *finita* se o grau $|L : K|$ da extensão for finito.

Dado um elemento α em L, dizemos que α é *algébrico* sobre K se existir um polinómio não nulo $f(x)$ pertencente a $K[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Caso contrário, dizemos que α é *transcendente* sobre K. Dizemos que L é uma *extensão algébrica* se, para todo o α em L, α é algébrico sobre K. Caso contrário, dizemos que L é uma *extensão transcendente.*

Para n elementos $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de L, $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ designa o menor subcorpo de L que contém o corpo K e os elementos $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Lema 1.7. *Uma extensão $L : K$ é finita se e somente se L é algébrico sobre K e existe um número finito de elementos $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de L tais que $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.*

Dado um polinómio f de $K[x]$, dizemos que f se *cinde* em L se f se decompõe como produto de factores lineares de $L[x]$, i.e., se $f(x) = \lambda(x - \alpha_1)...(x - \alpha_n)$, com $\lambda, \alpha_1, ..., \alpha_n$ pertencentes a L.

Dizemos que L é o *corpo de decomposição* de f se f se cinde em L e não se cinde em mais nenhum subcorpo próprio de L.

Dizemos que $L : K$ é uma *extensão normal* se cada polinómio f de $K[x]$ que tem pelo menos uma raiz em L se cinde em L.

Teorema 1.8. *Uma extensão $L : K$ é finita e normal se e somente se L é um corpo de decomposição para algum polinómio de $K[x]$.*

Um polinómio irredutível f de $K[x]$, diz-se *separável* sobre K se f não tem raízes múltiplas num corpo de decomposição. Um polinómio g (não necessariamente irredutível) é *separável* sobre K se cada factor irredutível de g for separável sobre K. Dado um elemento α em L, algébrico sobre K, dizemos que α é *separável* sobre K se o seu polinómio mínimo (polinómio mónico de grau mínimo do qual α é raiz) for separável.

Uma extensão algébrica $L : K$ diz-se separável se todo o elemento α de L é separável.

Sejam

$$\begin{aligned} & f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \\ \text{e} \quad & g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0 \end{aligned}$$

dois polinómios em $K[x]$ de grau n e m, respectivamente, $n, m \geq 1$. O *resultante* $R_{f,g}$ de f e g é o determinante da matriz de $m + n$ por $m + n$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & ... & a_n & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & ... & a_n & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & ... & & a_n & & ... & 0 \\ . & & & ... & & & & & . \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_0 & b_1 & ... & & & b_m & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & ... & & b_{m-1} & b_m & 0 \; ... & 0 \\ . & & & & & ... & & & . \\ 0 & ... & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & & ... & b_m \end{pmatrix}$$

Os polinómios f e g tem um factor comum se e somente se $R_{f,g} = 0$.

Em particular, quando consideramos os polinómios f e f', sendo f' a derivada de f,

$$f' := na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1,$$

dizemos que $D_f := R_{f,f'}$ é o *discriminante* de f. E, então, f tem uma raiz múltipla se e somente se $D_f = 0$.

Lema 1.9. *Seja α algébrico sobre um corpo K. Seja $f(y) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i y^i$ um polinómio de $K[y]$ com grau $n > 0$ e tal que $f(\alpha) = 0$. Então*

$$g(Y) = Y^n + \Sigma_{i=0}^{n-1} a_i a_n^{n-1-i} Y^i$$

é um polinómio mónico de grau n com $g(a_n\alpha) = 0$ e $K(\alpha) = K(a_n\alpha)$.

Lema 1.10. *Seja L um corpo e $f(x, y) \in L[x, y]$ um polinómio separável em y sobre $L(x)$. Então o polinómio $f(b, y) \in L[y]$ é separável excepto para um número finito de elementos b de L.*

Demonstração. Pelo lema (1.9), podemos já admitir que f é mónico em y. O seu discriminante é um polinómio $D_f(x)$ não nulo de $L[x]$, uma vez que f é separável. Para cada $b \in L$, o polinómio $f(b, y) \in L[y]$ tem discriminante $D_f(b)$. Logo $f(b, y)$ é separável para todo o b diferente das raízes de $D_f(x)$. $\square$

Teorema 1.11 (do Elemento Primitivo). *Qualquer extensão algébrica $L : K$, com $car(K) = 0$, é separável.*

Teorema 1.12. *Seja $L : K$ uma extensão finita e separável. Então $L = K(\alpha)$, para algum elemento α de L, existindo, portanto, um único polinómio irredutível mónico $p_\alpha(x) \in K[x]$ tal que $L \simeq \frac{K(x)}{\langle p_\alpha(x)\rangle}$.*

Duas extensões $L_1 : K_1$ e $L_2 : K_2$ são *isomorfas* se existir um isomorfismo $g : L_1 \to L_2$ tal que $g(K_1) = K_2$.

Se g é um automorfismo de L, dizemos que g é um K*-automorfismo* se $g(k) = k$, para todo $k \in K$.

Definição 1.13. Seja $L : K$ uma extensão de corpos. O *Grupo de Galois* da extensão é

$$Gal(L : K) := \{g : g \text{ é } K\text{-automorfismo de } L\}.$$

Se H é um subgrupo de $Gal(L : K)$, o *corpo fixo* de H é o corpo

$$Fix(H) := \{\lambda \in L : h(\lambda) = \lambda, \forall h \in H\}.$$

Lema 1.14. *Seja $L : K$ uma extensão de corpos.*

(a) *Se M for um corpo tal que $L : M$ e $M : K$ então $Gal(L : M)$ é subgrupo de $Gal(L : K)$.*

(b) *Se H é subgrupo de $Gal(L : K)$ então $Fix(H)$ é um subcorpo de L que satisfaz $K \subseteq Fix(H) \subseteq L$, i.e., $Fix(H)$ é um corpo intermédio entre K e L.*

Lema 1.15. *Seja $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ uma extensão do corpo K. Se dois K-automorfismos $g, h \in Gal(L : K)$ satisfazem $g(\alpha_i) = h(\alpha_i)$, para todo $i = 1, ..., n$, então $g = h$.*

Em particular, a acção do grupo de Galois $Gal(K(\alpha) : K)$ de uma extensão simples $K(\alpha) : K$ é determinada pela sua acção sobre o elemento α.

Proposição 1.16. *Seja L o corpo de decomposição de um polinómio f de $K[x]$. Então $Gal(L : K)$ é um grupo de permutações das raízes (distintas) de f. Ou seja, é subgrupo de S_R, onde R é o conjunto das raízes distintas de f.*

Teorema 1.17 (de Artin). *Seja L um corpo e seja G um subgrupo finito de $Aut(L)$. Então L é uma extensão finita, normal e separável de $Fix(G)$ e $|L : Fix(G)| = |G|$.*

Dada uma extensão de corpos $L : K$, sejam

$$\mathcal{S}(Gal(L : K)) := \{H : H \text{ é subgrupo de } Gal(L : K)\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{F}(L : K) := \{M : K \subseteq M \subseteq L\},$$

respectivamente, o conjunto dos subgrupos de $Gal(L : K)$ e o conjunto dos corpos intermédios entre K e L.

Teorema 1.18 (Correspondência de Galois de extensões de corpos). *Seja $L : K$ uma extensão finita, normal e separável. Então as aplicações*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(L:K) &\to \mathcal{S}(Gal(L:K)) \\ M &\mapsto Gal(L:M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(Gal(L:K)) &\to \mathcal{F}(L:K) \\ H &\mapsto Fix(H) \end{aligned}$$

são bijecções, inversas uma da outra, e invertem inclusões. Além disso,

$$|Gal(L:M)| = |L:M|,$$

para todo o corpo $M \in \mathcal{F}(L:K)$ e

$$|H| = |L:Fix(H)|,$$

para todo o subgrupo $H \in \mathcal{S}(Gal(L:K))$.

Temos ainda que:

(a) *H é subgrupo normal de $Gal(L:K)$ se e somente se a extensão $Fix(H) : K$ é normal;*

(b) *A extensão $M : K$ é normal se e somente se $Gal(L:M)$ é subgrupo normal de $Gal(L:K)$;*

(c) *Se a extensão $M : K$ for normal então $Gal(L:K)/Gal(L:M) \simeq Gal(M:K)$.*

Usualmente, uma extensão $L : K$ normal e separável é designada por *extensão de Galois*.

1.3 Revestimentos

A referência genérica para esta secção é o livro [12].

Definição 1.19. Seja Y um espaço topológico e y_0 um ponto de Y. Uma *n-esfera singular* em Y com base em y_0 é uma aplicação contínua $\alpha : [0,1]^n \to Y$ que envia a fronteira $\partial[0,1]^n$ de $[0,1]^n$ no ponto y_0. Notamos por $\Omega_n(Y, y_0)$ o conjunto de todas as n-esferas singulares. Uma 1-esfera singular é também designada por *lacete*.

Definição 1.20. Seja Y um espaço topológico e y_0 um ponto de Y.

(a) Sejam $\alpha, \beta \in \Omega_n(Y, y_0)$ duas n-esferas singulares. Uma *homotopia* entre α e β é uma aplicação contínua $H : [0,1]^n \times [0,1] \to Y$ tal que:

$$\begin{aligned} H(0,t) &= \alpha(t), && \text{para todo } t \in [0,1]^n; \\ H(1,t) &= \beta(t), && \text{para todo } t \in [0,1]^n; \\ H(s,t) &= y_0, && \text{para todo } t \in \partial[0,1]^n \text{ e para todo } s \in [0,1]. \end{aligned}$$

Se existir tal homotopia, dizemos que α e β são *homotópicos* e escrevemos $\alpha \sim \beta$.

(b) Dizemos que uma n-esfera singular é *homotopicamente nula* se for homotópica ao caminho constante $\beta(t) \equiv y_0$ que notamos por 1_{y_0}.

Definição 1.21. Sejam $\alpha, \beta \in \Omega_n(Y, y_0)$ duas n-esferas singulares. 0 *produto* de β a seguir a α é a n-esfera singular

$$\beta\alpha : [0,1]^n \to Y, (t_1, ..., t_n) \mapsto \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, ..., t_n) & \text{se} \quad 0 \leq t_1 \leq 1/2, \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n) & \text{se} \quad 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Temos o seguinte resultado.

Teorema 1.22. *Seja Y um espaço topológico e y_0 um ponto de Y.*

(a) *A relação de homotopia $\sim$ é uma relação de equivalência em $\Omega_n(Y, y_0)$.*

(b) *Se $\alpha \sim \beta$ e $\alpha' \sim \beta'$ então $\beta\alpha \sim \beta'\alpha'$.*

(c) *Temos que $\alpha 1_{y_0} \sim 1_{y_0}\alpha \sim \alpha$ para todo $\alpha \in \Omega_n(Y, y_0)$.*

(d) *Para $\alpha \in \Omega_n(Y, y_0)$ seja α^{-1} a n-esfera singular definida por*

$$\alpha^{-1}(t_1, t_2, ..., t_n) := \alpha(1 - t_1, t_2, ..., t_n).$$

Então $\alpha^{-1}\alpha \sim \alpha\alpha^{-1} \sim 1_{y_0}$.

(e) *Para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega_n(Y, y_0)$ temos que $(\gamma\beta)\alpha \sim \gamma(\beta\alpha)$.*

Definição 1.23. O teorema anterior permite concluir que o conjunto, $\pi_n(Y, y_0)$, das classes de homotopia de n-esferas singulares em Y, munido da operação produto $[\beta][\alpha] := [\beta\alpha]$, é um grupo. Designamos $\pi_n(Y, y_0)$ por *grupo de homotopia de Y de ordem n* com base em y_0. A $\pi_1(Y, y_0)$ chamamos *grupo fundamental* de Y com base em y_0.

Teorema 1.24. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos e seja $x_0 \in X$. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} f_* : \pi_n(X, x_0) & \to & \pi_n(Y, f(x_0)) \\ {[\alpha]} & \mapsto & [f \circ \alpha] \end{array}$$

está bem definida e é um homomorfismo.

Proposição 1.25. *Sejam y_0 e y_1 dois pontos de um espaço topológico Y. Se existir em Y um caminho $\delta : [0,1] \to Y$ que une o ponto y_0 ao ponto y_1 então os grupos $\pi_n(Y, y_0)$ e $\pi_n(Y, y_1)$ são isomorfos.*

Demonstração. A aplicação $\pi_n(Y, y_0) \to \pi_n(Y, y_0)$, $[\alpha] \mapsto [\delta\alpha\delta^{-1}]$ onde $\delta\alpha\delta^{-1}$ é a n-esfera singular definida por

$$(\delta\alpha\delta^{-1})(t_1, ..., t_n) := \begin{cases} \delta(1 - 3t_1) & \text{se} \quad 0 \leq t_1 \leq 1/3, \\ \alpha(3t_1 - 1, t_2, ..., t_n) & \text{se} \quad 1/3 \leq t_1 \leq 2/3, \\ \delta(3t_1 - 2) & \text{se} \quad 2/3 \leq t_1 \leq 1, \end{cases}$$

é um isomorfismo. $\square$

A proposição (1.25) implica, em particular, que se Y é conexo por arcos então o grupo de homotopia $\pi_n(Y, y_0)$ é independente do ponto base $y_0 \in Y$ escolhido.

Definição 1.26. Dados dois espaços topológicos X e Y, uma aplicação $f : X \to Y$ contínua e sobrejectiva diz-se uma *fibração localmente trivial* de *fibra* F se existir uma cobertura $(U_i)_i$ por abertos de Y e existirem homeomorfismos $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ tais que $p_i \circ \phi_i = f$, onde p_i é a projecção de $U_i \times F$ em U_i.

Teorema 1.27 (da sucessão exacta de uma fibração). *Se $f : X \to Y$ é uma fibração localmente trivial de fibra F, com X conexo por arcos (logo Y conexo por arcos) e F conexo por arcos, então temos uma sucessão exacta de grupos associada à fibração:*

$$.... \to \pi_i(F) \to \pi_i(X) \to \pi_i(Y) \to \pi_{i-1}(F) \to ... \quad \to \pi_1(F) \to \pi_1(X) \to \pi_1(Y) \to \pi_0(F).$$

Demonstração. [1], p. 453.

Definição 1.28. Dados dois espaços topológicos X e Y, uma aplicação contínua e sobrejectiva $f : X \to Y$ diz-se um *revestimento* se, para todo o y em Y, existe uma vizinhança aberta V de y tal que todas as componentes conexas U de $f^{-1}(V)$ são abertos de X e a restrição de f a cada U envia U homeomorficamente sobre V. Tal V diz-se uma *vizinhança admissível* para f.

Observações 1.29. **(1)** Por definição, um revestimento é um homeomorfismo local e é uma aplicação aberta e discreta. Em particular, para cada y de Y, o conjunto $f^{-1}(y)$, que designamos por *fibra* de f em y, é discreto.

(2) Se X for conexo por arcos então Y é também conexo por arcos.

(3) Se V é uma vizinhança admissível para f, então um aberto V' contido em V é também admissível. Portanto, se Y' é um aberto de Y, a restrição $f^{-1}(Y') \to Y'$ é ainda um revestimento.

(4) Se Y é um espaço Hausdorff então X é também Hausdorff. Notemos que dois quaisquer pontos distintos $x, x' \in X$ com imagens distintas por f são separados por abertos da forma $f^{-1}(V)$ e $f^{-1}(V')$ (com $f(x) \in V$ e $f(x') \in V'$). Se x e x' tiverem a mesma imagem, então são separados por componentes conexas distintas de $f^{-1}(V)$. Notemos, ainda, que se Y for uma variedade topológica, i.e., um espaço Hausdorff para o qual cada ponto admite uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$, então também X é uma variedade.

Sejam X e Y espaços topológicos Hausdorff localmente compactos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é *própria* se for contínua e se, para todo o compacto K de Y, $f^{-1}(K)$ é um compacto de X.

Proposição 1.30. *Sejam X e Y espaços topológicos Hausdorff localmente compactos e seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo local (i.e., para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x tal que $V = f(U)$ é aberto em Y e $f : U \to V$ é homeomorfismo).*

Então f é um revestimento finito se e somente se f é própria.

Demonstração. Se f é um revestimento finito, então, para $y \in Y$ e uma vizinhança aberta V de y, $f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \to V$ é própria. Donde concluímos que f é própria.

Reciprocamente, suponhamos que f é um homeomorfismo local próprio. Seja $y_0 \in Y$ e seja $f^{-1}(y_0) = \{x_1, ..., x_n\}$. Seja U_j' um aberto de X com $x_j \in U_j'$ e tal que, para $V_j = f(U_j')$, $f|_{U_j'} : U_j' \to V_j$ é um homeomorfismo. Como f é própria e $X \setminus \{U_1' \cup ... \cup U_n'\}$ é fechado em X, $K := f(X \setminus \{U_1' \cup ... \cup U_n'\})$ é fechado em Y. E $y_0 \notin K$. Seja $V := Y \setminus K$. Então $f^{-1}(V) \subseteq U_1' \cup ... \cup U_n'$ e temos que $V \subseteq V_1 \cap ... \cap V_n$. Fazendo $U_j := U_j' \cap f^{-1}(V)$, então $f^{-1}(V) = \bigcup_{j=1,...,n} U_j$ e $f|_{U_j} : U_j \to V$ é um homeomorfismo.□

Definição 1.31. Seja $f : X \to Y$ um revestimento e $\gamma : [0,1] \to Y$ um caminho em Y. Um caminho $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ diz-se um *levantamento* de γ por f se $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Teorema 1.32. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento e γ um caminho em Y com ponto inicial y_0. Então:*

(a) *Para cada ponto x de $f^{-1}(y_0)$ existe um único levantamento de γ em X com ponto inicial x;*

(b) *Levantamentos de caminhos homotópicos são ainda homotópicos se tiverem o mesmo ponto inicial.*

Teorema 1.33. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento. Para todo o ponto $x_0 \in X$, o homomorfismo induzido $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ é injectivo.*

Teorema 1.34. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento. Para todo $y_0 \in Y$, quando x_0 varia na fibra de y_0, o conjunto dos subgrupos $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq \pi_1(Y, y_0)$ formam uma classe de conjugação.*

Dado um espaço topológico X, dizemos que uma acção de um grupo G sobre X é *transitiva* se tiver apenas uma órbita, ou seja, se para quaisquer elementos x e x' de X existir um elemento g de G tal que $x' = gx$.

Teorema 1.35. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento e $y_0 \in Y$. O grupo $\pi_1(Y, y_0)$ actua sobre $f^{-1}(y_0)$ do seguinte modo: $[\gamma]$ envia x em $[\gamma]x := x'$, onde x' é o ponto final do único levantamento de γ com ponto inicial x. Esta acção é transitiva se e somente se X é conexo por arcos. E neste caso, todas as fibras $f^{-1}(y)$, para $y \in Y$, têm a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Pelo teorema (1.32), cada caminho γ em Y tem um único levantamento com ponto inicial x. O ponto final x' deste levantamento não se altera se substituirmos γ por outro caminho homotópico a γ. Pelo que $[\gamma]x$ está bem definido. O elemento neutro de $\pi_1(Y, y_0)$ é classe do caminho constante igual a y_0, logo, os levantamentos de caminhos desta classe com ponto inicial x são lacetes homotópicos ao caminho constante igual a x, logo $[1]x = x$. Temos também que $([\gamma][\delta])x = [\gamma]([\delta]x)$, pois, dado um caminho $\gamma\delta$, o seu único levantamento com base em x é o caminho $\tilde{\gamma}\tilde{\delta}$, onde $\tilde{\delta}$ é o levantamento de δ com ponto inicial x e $\tilde{\gamma}$ é o levantamento de γ com ponto inicial $x' = \tilde{\delta}(1)$.

Se X for conexo por arcos (logo também Y é conexo por arcos), então para quaisquer pontos $x, x' \in f^{-1}(y_0)$, existe um caminho δ em X que une x e x'. Então $[f \circ \delta] \in \pi_1(Y, y_0)$ e $[f \circ \delta]x = x'$. Logo $\pi_1(Y, y_0)$ age transitivamente sobre $f^{-1}(y_0)$. Reciprocamente, sejam x_1 e x_2 dois pontos arbitrários de X. Como Y é conexo por arcos, existe um caminho γ_1 com ponto inicial $f(x_1)$ e ponto final y_0 e existe também um caminho γ_2 com ponto inicial $f(x_2)$ e ponto final y_0. O ponto final do levantamento $\tilde{\gamma}_1$ com ponto inicial x_1 é um ponto $x'_1 \in f^{-1}(y_0)$. Do mesmo modo, o levantamento $\tilde{\gamma}_2$ com ponto inicial x_2 tem como ponto final um ponto $x'_2 \in f^{-1}(y_0)$. Como, por hipótese, a acção de $\pi_1(Y, y_0)$ é transitiva em $f^{-1}(y_0)$, sabemos que existe $[\delta] \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $[\delta]x'_1 = x'_2$. Portanto, o caminho $\tilde{\gamma}_2^{-1}\tilde{\delta}\tilde{\gamma}_1$ une x_1 a x_2, o que mostra que X é conexo por arcos. □

Corolário 1.36. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento com Y conexo por arcos. Seja X_1 uma componente conexa (por arcos) de X. Então f restringe a um revestimento $f|_{X_1} : X_1 \to Y$.*

Se a fibra $f^{-1}(y_0)$ estiver contida em X_1, para algum ponto y_0 de Y, então $X = X_1$.

Demonstração. Seja $x_0 \in X_1$ e $y_0 = f(x_0)$. Então para todo o $y \in Y$ existe um caminho γ que une y_0 a y. O levantamento $\tilde{\gamma}$ de γ com ponto inicial x_0 é um caminho contido em X_1, uma vez que X_1 é uma componente conexa de X. Logo, o ponto final $x \in X_1$ de $\tilde{\gamma}$ satisfaz $f(x) = y$. E portanto, $f|_{X_1}$ é sobrejectiva. Se V é uma vizinhança admissível de f, então para cada componente conexa U de $f^{-1}(V)$ temos que $U \subset X_1$ ou $U \cap X_1 = \emptyset$. Logo V é também uma vizinhança admissível para $f|_{X_1}$, o que mostra que $f|_{X_1}$ é um revestimento.

Como X_1 é conexo por arcos, o grupo $\pi_1(Y, y_0)$ age transitivamente em $f|_{X_1}^{-1}(y_0)$. Se $f^{-1}(y_0) \subset X_1$, então $f^{-1}(y_0) = f|_{X_1}^{-1}(y_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ age transitivamente em $f^{-1}(y_0)$. Logo X é conexo por arcos e portanto $X = X_1$. □

Teorema 1.37. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento com X conexo por arcos. Seja Z um espaço topológico conexo por arcos e localmente conexo por arcos e seja $g : Z \to Y$ uma aplicação contínua. Dados dois quaisquer pontos $z_0 \in Z$ e $x_0 \in X$ tais que $f(x_0) = g(z_0)$, então g tem um levantamento $\tilde{g} : Z \to X$ satisfazendo $\tilde{g}(z_0) = x_0$ se e somente se o subgrupo $g_*(\pi_1(Z, z_0))$ de $\pi_1(Y, g(z_0))$ está contido em $f_*(\pi_1(X, x_0))$.*

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X, x_0) \arrow[d, "f_*"] \\ \pi_1(Z, z_0) \arrow[ur, "\tilde{g}_*"] \arrow[r, "g_*"] & \pi_1(Y, g(z_0)) \end{tikzcd}$$

Definição 1.38. Dado um revestimento $f : X \to Y$, um *automorfismo do revestimento* f é um homeomorfismo $\alpha : X \to X$ tal que $f \circ \alpha = f$. O conjunto de todos os automorfismos de f munido da operação composição é um grupo, que notamos por $Aut(f)$.

Teorema 1.39. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento com Y conexo por arcos.*

(a) *Sejam $y_0, y_1 \in Y$ e δ um caminho que une y_0 a y_1. Para cada $x \in f^{-1}(y_0)$, seja $[\delta]x$ o ponto final do único levantamento de δ com ponto inicial x. Então a aplicação $f^{-1}(y_0) \to f^{-1}(y_1)$, $x \mapsto [\delta]x$ é uma bijecção. Esta bijecção comuta com a acção de $Aut(f)$.*

b) *A acção de $Aut(f)$ comuta com a acção de $\pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração. (a) A aplicação de $f^{-1}(y_1) \to f^{-1}(y_0)$ que envia x em $[\delta^{-1}]x$ é inversa da aplicação que envia x em $[\delta]x$, pelo que ambas as aplicações são bijectivas. Se $\tilde{\delta}$ for o levantamento de δ com ponto inicial x_0, então $\alpha \circ \tilde{\delta}$ é o levantamento de δ com ponto inicial $\alpha(x_0)$. Logo $\alpha(\delta x_0) = \delta(\alpha(x_0))$, ou seja, estas acções comutam.

(b) Tendo-se $y_0 = y_1$ na alínea (a) e, uma vez que levantamentos de caminhos homotópicos são homotópicos, resulta que a acção de $Aut(f)$ e a de $\pi_1(Y, y_0)$ comutam. □

Lema 1.40. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento com X conexo por arcos.*

(a) *Se um automorfismo $\alpha \in Aut(f)$ fixa um ponto x_0 de X então $\alpha = id$.*

(b) *Se $Aut(f)$ tem algum subgrupo G que age transitivamente em alguma fibra $f^{-1}(y_0)$ então $G = Aut(f)$.*

Demonstração. (a) Escolhendo $x \in X$ arbitrário, considerando um caminho $\tilde{\gamma}$ que una x_0 a x e definindo $\gamma := f \circ \tilde{\gamma}$, temos que $\tilde{\gamma}$ é o levantamento de γ com ponto inicial x_0. Logo $x = \gamma x_0$. Se $\alpha(x_0) = x_0$ então $\alpha(x) = \alpha(\gamma x_0) = \gamma(\alpha(x_0)) = \gamma x_0 = x$. Logo $\alpha =$id.

(b) Seja $x \in f^{-1}(y_0)$. Para cada $\alpha \in Aut(f)$, como G age transitivamente, existe $\beta \in G$ tal que $\beta(\alpha(x)) = x$. Então $\beta \circ \alpha =$id, logo $\alpha = \beta^{-1} \in G$ e $Aut(f) = G$. □

Teorema 1.41. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento com X conexo por arcos. Seja $y_0 \in Y$ e $x_0, x_0' \in f^{-1}(y_0)$. Então:*

a) *Existe $\alpha \in Aut(f)$ tal que $\alpha(x_0) = x_0'$ se e somente se $f_*(\pi_1(X, x_0)) = f_*(\pi_1(X, x_0'))$.*

(b) *$Aut(f)$ age transitivamente em cada fibra se e somente se $f_*(\pi_1(X, x_0))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(Y, y_0)$, para todo $x_0 \in f^{-1}(y_0)$.*

Demonstração. (a) Se existir um automorfismo $\alpha \in Aut(f)$ tal que $\alpha(x_0) = x_0'$, então a aplicação $\alpha_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0')$, $\tilde{\gamma} \mapsto \alpha(\tilde{\gamma})$, é um isomorfismo. Portanto, $f_*(\pi_1(X, x_0))$ $= f_*\alpha_*(\pi_1(X, x_0)) = f_*(\pi_1(X, x_0'))$. Reciprocamente, suponhamos que os dois subgrupos são iguais. Pelo teorema (1.37), existe um levantamento $\tilde{f} : X \to X$ tal que $\tilde{f}(x_0) = x_0'$ e existe um levantamento $\tilde{f}' : X \to X$ tal que $\tilde{f}'(x_0') = x_0$. Como $\tilde{f}'\tilde{f}(x_0) = x_0$, então $\tilde{f}'\tilde{f} = Id_X$ e $\tilde{f}$ é o automorfismo pretendido.

(b) Suponhamos que $f_*(\pi_1(X, x_0))$ é um subgrupo normal de $(\pi_1(Y, y_0)$, para todo $x_0 \in f^{-1}(y_0)$. Então para quaisquer pontos x_0 e x_0' na mesma fibra, temos que $f_*(\pi_1(X, x_0)) = f_*(\pi_1(X, x_0'))$, logo, pela alínea (a), existe $\alpha \in Aut(f)$ tal que $\alpha(x_0) = x_0'$.

Reciprocamente, se $Aut(f)$ age transitivamente numa fibra $f^{-1}(y)$, então os subgrupos $f_*(\pi_1(X,x))$ coincidem para todo $x \in f^{-1}(y)$. Logo, pelo teorema (1.34), concluímos que $f_*(\pi_1(X,x))$ é um subgrupo normal para todo $x \in f^{-1}(y)$. $\square$

Teorema 1.42. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento com X conexo por arcos e $x_0 \in X$. Então*

$$Aut(f) \simeq \frac{N(f_*(\pi_1(X,x_0)))}{f_*(\pi_1(X,x_0))},$$

onde $N(f_*(\pi_1(X,x_0)))$ é o normalizador de $f_*(\pi_1(X,x_0))$ em $\pi_1(Y,y_0)$.

Corolário 1.43. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento com X simplesmente conexo. Então $Aut(f) \simeq \pi_1(Y,y_0)$.*

Definição 1.44. Um revestimento $f : X \to Y$ entre espaços topológicos diz-se um *revestimento de Galois* se X é conexo por arcos (logo também Y é conexo por arcos) e se $Aut(f)$ age transitivamente em alguma fibra $f^{-1}(y)$, para $y \in Y$ (logo, age transitivamente em qualquer fibra).

Proposição 1.45. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento de Galois. Então:*

(a) *O grau do revestimento coincide com a ordem de $Aut(f)$. Para cada vizinhança admissível V de Y o conjunto $f^{-1}(V)$ tem $gr(f)$ componentes conexas, que são permutadas transitivamente por $Aut(f)$.*

(b) $Aut(f) \simeq \frac{\pi_1(Y,y_0)}{f_*(\pi_1(X,x_0))}$.

(c) *Seja $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$. Existe um único homomorfismo sobrejectivo da forma:*

$$\begin{aligned} \Phi_{x_0} : \pi_1(Y,y_0) &\to Aut(f) \\ [\gamma] &\mapsto \alpha : [\gamma]x_0 \mapsto x_0, \end{aligned}$$

onde $[\gamma]x_0$ é o ponto final do levantamento de γ com ponto inicial x_0.

Demonstração. (a) Seja $y_0 \in Y$. Para cada $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, consideremos a aplicação $\varphi_{x_0} : Aut(f) \to f^{-1}(y_0)$, $\alpha \mapsto \alpha(x_0)$. Esta aplicação é injectiva, pois se $\alpha(x_0) = \alpha'(x_0)$ então $\alpha^{-1} \circ \alpha'$ fixa x_0, logo é a identidade. Como f é revestimento de Galois, φ_{x_0} é também sobrejectiva, pelo que temos uma bijecção entre $Aut(f)$ e a fibra $f^{-1}(y_0)$. Pela definição de grau de um revestimento, temos que $|f^{-1}(y_0)| = n$. Considerando uma vizinhança admissível V de y_0, como cada componente conexa de $f^{-1}(V)$ contém exactamente um elemento de $f^{-1}(y_0)$ (pela definição de V), concluímos que existe também uma bijecção entre $Aut(f)$ e as n componentes conexas da pré-imagem de uma vizinhança V de y_0.

(b) É consequência imediata dos teoremas (1.41) e (1.42).

(c) Pelo teorema 1.35, o grupo $\pi_1(Y,y_0)$ age transitivamente sobre $f^{-1}(y_0)$. Logo, a aplicação $\phi_{x_0} : \pi_1(Y,y_0) \to f^{-1}(y_0)$, $[\gamma] \mapsto [\gamma]x_0$, é sobrejectiva. Então $\Phi'_{x_0} := (\varphi_{x_0})^{-1} \circ \phi_{x_0}$

envia $\pi_1(Y, y_0)$ sobrejectivamente sobre $Aut(f)$. Φ'_{x_0} nem sempre é um homomorfismo (é um anti-homomorfismo), contudo a aplicação $\Phi_{x_0} : \pi_1(Y, y_0) \to Aut(f)$, $[\gamma] \mapsto (\Phi'_{x_0}([\gamma]))^{-1}$ é um homomorfismo. Este homomorfismo sobrejectivo envia $[\gamma]$ no automorfismo de f definido por $[\gamma]x_0 \mapsto x_0$. Usando o lema 1.40, podemos mostrar que este homomorfismo é único. Suponhamos que existe um homomorfismo $\Phi^*_{x_0}$ tal que, para $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$, temos $\Phi_{x_0}([\gamma]) = \alpha$ e $\Phi^*_{x_0}([\gamma]) = \beta$ com $\alpha \neq \beta$. Então $\beta^{-1}\alpha([\gamma]x_0) = \beta^{-1}(x_0) = [\gamma]x_0$, logo $\beta^{-1}\alpha =$id e $\alpha = \beta$, o que contradiz a suposição. □

Dizemos que uma acção $G \times X \to X$ de G em X é uma *acção por homeomorfismos* se para cada g em G a aplicação $g. : X \to X$, $x \mapsto gx$, é um homeomorfismo.

Uma acção por homeomorfismos é *discreta* se, para cada x em X, existe uma vizinhança aberta U de x tal que

$$g(U) \cap U = \emptyset, \forall g \in G \setminus \{1\}.$$

Dizemos que a acção é *livre* se não tem pontos fixos, ou seja, se para cada $x \in X$ o grupo de isotropia de x é o grupo trivial. Notemos que se a acção for discreta então não tem pontos fixos.

Em particular, para G finito e X um espaço topológico Hausdorff, se a acção não tem pontos fixos então é discreta.

Teorema 1.46. *Seja X e suponhamos que $G \times X \to X$ é uma acção discreta de um grupo G em X. Então a projecção*

$$f : X \to X/G$$

é um revestimento e G actua de forma transitiva nas fibras de f. Em particular, se X é conexo por arcos então f é revestimento de Galois.

Demonstração. Seja $y \in X/G$ e seja $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como a acção é discreta sabemos que existe uma vizinhança aberta U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo o $g \in G \setminus \{1\}$. Seja $V = f(U)$. Como p é uma aplicação aberta (pela definição de topologia quociente), V é um aberto de X/G e é homeomorfo a U, pela escolha de U. Portanto, $f : U \to V$ é um homeomorfismo. Pela escolha de U e como cada $g \in G$ induz um homeomorfismo, o conjunto $W := f^{-1}(V) = \cup_{g \in G} g(U)$ é uma reunião disjunta de abertos homeomorfos a U e, portanto, a V. Logo, f é um revestimento. O grupo G actua de forma transitiva nas fibras de f por definição de X/G. □

Proposição 1.47. *Sejam $f_1 : X_1 \to Y$ e $f_2 : X_2 \to Y$ revestimentos com X_1 e X_2 conexos por arcos. Sejam $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$ tais que $f_1(x_1) = f_2(x_2) = y_0 \in Y$. Suponhamos ainda que, para cada $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$, $[\gamma]x_1 = x_1$ se e somente se $[\gamma]x_2 = x_2$.*

Então existe um homeomorfismo $\alpha : X_1 \to X_2$ com $f_2 \circ \alpha = f_1$ e $\alpha(x_1) = x_2$.

Definição 1.48. Dizemos que dois revestimentos $f_1 : X_1 \to Y$ e $f_2 : X_2 \to Y$ são *isomorfos* se existir um homeomorfismo $\alpha : X_1 \to X_2$ tal que $f_2 \circ \alpha = f_1$.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ {}_{f_1}\searrow & & \swarrow_{f_2} \\ & Y & \end{array}$$

Teorema 1.49. *Sejam X_1 e X_2 espaços topológicos conexos por arcos. Dois revestimentos $f_1 : X_1 \to Y$ e $f_2 : X_2 \to Y$ são isomorfos se e somente se, para algum $y \in Y$ e pontos $x_1 \in f_1^{-1}(y)$ e $x_2 \in f_2^{-1}(y)$, os subgrupos $f_{1*}\pi_1(X_1, x_1)$ e $f_{2*}\pi_1(X_2, x_2)$ forem conjugados em $\pi_1(Y, y)$. Nesse caso, os subgrupos são conjugados para quaisquer y, x_1 e x_2, nas mesmas condições.*

Demonstração. Suponhamos que existe um homeomorfismo $\alpha : X_1 \to X_2$ tal que $f_2 \circ \alpha = f_1$. Seja $x_1 \in X_1$ e tomemos $x_2 = \alpha(x_1)$. Podemos encarar α e α^{-1} como levantamentos de f_1 e de f_2, respectivamente. Temos então, pelo teorema (1.37), que os subgrupos $f_{1*}\pi_1(X_1, x_1)$ e $f_{2*}\pi_1(X_2, x_2)$ de $\pi_1(Y, y)$ estão contidos um no outro, logo coincidem. E, pelo teorema (1.34), os subgrupos associados a quaisquer outros pontos das mesmas fibras são conjugados.

Reciprocamente, suponhamos que os subgrupos $f_{1*}\pi_1(X_1, x_1)$ e $f_{2*}\pi_1(X_2, x_2)$ são conjugados para alguns $y \in Y$, $x_1 \in f_1^{-1}(y)$ e $x_2 \in f_2^{-1}(y)$. Pelo teorema (1.34), podemos escolher $x_2' \in f_2^{-1}(y)$ tal que $f_{1*}\pi_1(X_1, x_1) = f_{2*}\pi_1(X_2, x_2')$. E pelo teorema (1.37), existem levantamentos $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ tais que $\tilde{f}_1(x_1) = x_2'$ e $\tilde{f}_2(x_2') = x_1$. A aplicação $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1$ é um automorfismo de f_1 que fixa x_1, logo é a identidade. E o mesmo acontece com $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2$. Obtemos assim o homeomorfismo $\alpha := \tilde{f}_1$ pretendido.□

Proposição 1.50. **(a)** *Seja $p : \tilde{Y} \to Y$ um revestimento com $\tilde{Y}$ simplesmente conexo. Se $f : X \to Y$ é um revestimento com X conexo por arcos então existe um revestimento $p' : \tilde{Y} \to X$ que torna o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{p'} & X \\ & {}_{p}\searrow & \downarrow_{f} \\ & & Y. \end{array}$$

(b) *Quaisquer dois revestimentos $p_1 : \tilde{Y}_1 \to Y$ e $p_2 : \tilde{Y}_2 \to Y$ com $\tilde{Y}_1$ e $\tilde{Y}_2$ simplesmente conexos são isomorfos.*

A alínea (a) desta proposição mostra que qualquer revestimento $f : X \to Y$ (com X conexo por arcos) é coberto por um revestimento $p : \tilde{Y} \to Y$ com $\tilde{Y}$ simplesmente conexo. Portanto, a um revestimento $p : \tilde{Y} \to Y$ com $\tilde{Y}$ simplesmente conexo (p é único, pela alínea (b)) é chamado o *revestimento universal* de Y.

Teorema 1.51 (Existência do revestimento universal). *Todo o espaço topológico conexo e localmente simplesmente conexo tem um revestimento universal.*

Teorema 1.52 (Correspondência de Galois de revestimentos). *Seja Y um espaço conexo e localmente simplesmente conexo e seja $y_0 \in Y$. Existe uma correspondência biunívoca entre as classes de isomorfismo de revestimentos $f : X \to Y$ (com X conexo por arcos) e as classes de conjugação de subgrupos de $\pi_1(Y, y_0)$. Ou seja, as aplicações*

$$\begin{aligned} Rev(Y) &\to \mathcal{CS}(\pi_1(Y, y_0)) \\ [f : X \to Y] &\mapsto f^*(\pi_1(X, x_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{CS}(\pi_1(Y, y_0)) &\to Rev(Y) \\ [H] &\mapsto [\tilde{Y}/H \to Y] \end{aligned}$$

são bijecções e inversas uma da outra.

1.4 Variedades holomorfas

Vamos usar as noções e propriedades elementares das funções holomorfas definidas em $\mathbb{C}^n$. Relembremos o teorema da função implícita.

Teorema 1.53 (da Função Implícita). *Consideremos $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ e suponhamos que $p = (z_0, w_0)$ é uma raiz de f e que $\frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$. Então existe uma função holomorfa $g : U \to V$, onde U e V são vizinhanças de z_0 e w_0 em $\mathbb{C}$, tal que $g(z_0) = w_0$ e, para $z \in U$ e $w \in V$, $g(z) = w \Leftrightarrow f(z, w) = 0$.*

Demonstração. Como $\frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$, o polinómio $f(z_0, w)$ em w é não constante. Então, pelo teorema dos zeros isolados, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < |w - w_0| \leq \varepsilon \Rightarrow f(z_0, w) \neq 0.$$

Uma vez que f é uma função contínua em z e w, se $|w - w_0| = \varepsilon$, então existe $\delta_w > 0$ tal que

$$\max(|v - w|, |z - z_0|) \leq \delta_w \Rightarrow f(z, v) \neq 0.$$

O compacto $K := \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| = \varepsilon\}$ está contido na união dos abertos da forma $\{v \in \mathbb{C} : |v - w| < \delta_w, w \in K\}$, portanto, existe um subconjunto finito $\{w_1, ..., w_k\}$ de pontos de K tal que

$$K \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq k} \{v \in \mathbb{C} : |v - w_i| < \delta_{w_i}\}.$$

Seja $\delta = \min(\delta_{w_1}, ..., \delta_{w_k}) > 0$, então

$$(|w - w_0| = \varepsilon, |z - z_0| < \delta) \Rightarrow f(z, w) \neq 0.$$

Vamos definir um caminho $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ por $\gamma(t) = w_0 + \varepsilon \exp(2\pi i t)$. Pelo teorema dos resíduos, temos então, que para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < \delta$, o número de zeros (contando multiplicidades) da função $f(z, w)$ dentro de γ é dado por

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) f(z, w)^{-1} dw.$$

Como $f(z_0, w_0) = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0)$, a função $f(z_0, w)$ tem um zero de multiplicidade 1 em $w = w_0$. Pela escolha de ε, não existem outros zeros dentro de γ, pelo que $n(z_0) = 1$.

Como $\gamma([0,1])$ é compacto, facilmente se verifica que $n(z)$ é uma função contínua que toma valores inteiros em $U := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ e que, portanto, é constante. Então, se $z \in U$, temos que $n(z) = 1$ e existe um único número complexo, que designamos por $g(z)$, tal que $g(z) \in V := \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \varepsilon\}$ e $f(z, g(z)) = 0$.

Pelo teorema dos resíduos, temos ainda que

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma w \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) f(z, w)^{-1} dw.$$

Como $\gamma([0,1])$ é compacto, podemos derivar este integral em ordem a z, concluindo, assim, que $g : U \to V$ é holomorfa, como pretendido. □

Definição 1.54. Seja X um espaço topológico Hausdorff com base numerável por abertos. Um par (V, φ) diz-se uma *carta holomorfa de dimensão n* em X se V é um aberto de X e $\varphi : V \to A$ é um homeomorfismo sobre um aberto A de $\mathbb{C}^n$. Duas cartas holomorfas (V_1, φ_1) e (V_2, φ_2) dizem-se *compatíveis* se $\varphi_1 \circ {\varphi_2}^{-1} : \varphi_2(V_1 \cap V_2) \to \varphi_1(V_1 \cap V_2)$ é biholomorfa. Um *atlas holomorfo de dimensão n* em X é uma colecção de cartas compatíveis (V_i, φ_i) tal que X é a união dos abertos V_i. Dois atlas dizem-se *equivalentes* se a sua união for ainda um atlas. Uma classe de equivalência de atlas holomorfos designa-se por *estrutura holomorfa* em X.

Definição 1.55. Uma *variedade holomorfa de dimensão n* é um espaço topológico Hausdorff, com base numerável de abertos, munido de uma estrutura holomorfa de dimensão n. A uma variedade holomorfa de dimensão 1 conexa chamamos *superfície de Riemann* .

De futuro, quando nos referirmos a uma carta $\varphi : V \to A$ de uma variedade holomorfa X de dimensão n, estamo-nos a referir a uma carta pertencente a um atlas que represente a classe de equivalência que define a estrutura holomorfa de X, subentendendo que V é um aberto de X e A é um aberto de $\mathbb{C}^n$.

Exemplos 1.56. (1) $\mathbb{C}^n$ tem uma estrutura holomorfa definida pelo atlas cuja única carta é a identidade em $\mathbb{C}^n$.

(2) Dada uma variedade holomorfa X, um subconjunto aberto $D \subset X$ é ainda uma variedade holomorfa da mesma dimensão. As cartas em D são obtidas restringindo a D as cartas de X. Deste modo, temos, por exemplo, que qualquer aberto de $\mathbb{C}^n$ é uma variedade holomorfa de dimensão n.

(3) *Esfera de Riemann.* Designamos por *esfera de Riemann* o conjunto $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, onde ∞ é um símbolo não contido em $\mathbb{C}$. Vamos definir neste conjunto uma topologia constituída pelos abertos usuais $U \subset \mathbb{C}$ e pelos abertos $V \cup \{\infty\}$, onde $V = \mathbb{C} \setminus K$, para um compacto $K \subset \mathbb{C}$. Com esta topologia, $\hat{\mathbb{C}}$ é um espaço topológico Hausdorff compacto. Consideremos os abertos $U_1 = \mathbb{C}$ e $U_2 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ (onde

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$) e os homeomorfismos $\varphi_1 : z \mapsto z$ e $\varphi_2 : z \mapsto 1/z$ (estamos aqui a usar as convenções usuais usadas no estudo de funções meromorfas em $\mathbb{C}$, em que, por exemplo, $1/\infty = 0$). Estas duas cartas holomorfas são compatíveis, uma vez que a aplicação $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto 1/z$ é biholomorfa, e definem uma estrutura holomorfa em $\hat{\mathbb{C}}$. Como U_1 e U_2 são conexos e a sua intersecção é não vazia, concluímos que $\hat{\mathbb{C}}$ é conexo e, que portanto, é uma superfície de Riemann (compacta).

(4) *Toro complexo.* Sejam $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Definimos o reticulado Γ gerado por ω_1 e ω_2 por

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Dois números complexos $z, z' \in \mathbb{C}$ dizem-se equivalentes módulo Γ se $z - z' \in \Gamma$. Notemos o conjunto de todas as classes de equivalência por $\mathbb{C}/\Gamma$ (espaço quociente). Seja $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ a projecção que a cada ponto $z \in \mathbb{C}$ associa a sua classe de equivalência módulo Γ. Vamos introduzir em $\mathbb{C}/\Gamma$ a seguinte topologia (topologia quociente): $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ é aberto se e somente se $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ é aberto. Com esta topologia, $\mathbb{C}/\Gamma$ é um espaço topológico Hausdorff e π é contínua. Como $\mathbb{C}$ é conexo, $\mathbb{C}/\Gamma$ é também conexo. Temos ainda que $\mathbb{C}/\Gamma$ é compacto, uma vez que é a imagem por π do paralelogramo compacto

$$P := \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 : \lambda, \mu \in [0, 1]\}.$$

A função π é aberta, i.e., a imagem de qualquer aberto $V \subset \mathbb{C}$ por π é um aberto. Para demonstrarmos este facto, basta-nos apenas verificar que $\hat{V} := \pi^{-1}(\pi(V))$ é um aberto de $\mathbb{C}$. E, como

$$\hat{V} = \bigcup_{\omega \in \Gamma} (\omega + V)$$

e cada $\omega + V$ é um aberto, concluímos que $\hat{V}$ é aberto.

Seja $V \subset \mathbb{C}$ um aberto tal que não existem em V dois pontos equivalentes módulo Γ. Então $U := \pi(V)$ é um aberto e $\pi|_V : V \to U$ é um homeomorfismo. A sua inversa $\varphi : U \to V$ é uma carta holomorfa em $\mathbb{C}/\Gamma$. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as cartas obtidas deste modo. Vejamos que quaisquer duas cartas $\varphi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, são compatíveis. Consideremos a função

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Para todo $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, temos $\pi(\psi(z)) = \pi(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z)) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$, pelo que $\psi(z) - z \in \Gamma$. Como Γ é discreto e ψ é contínua, $\psi(z) - z$ é uma função constante em cada componente conexa de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$. Logo ψ é holomorfa. Do mesmo modo, concluímos que ψ^{-1} é holomorfa. Munindo $\mathbb{C}/\Gamma$ com a estrutura holomorfa de dimensão 1 definida pelo atlas $\mathcal{A}$, concluímos que $\mathbb{C}/\Gamma$ é uma superfície de Riemann.

(5) *Recta projectiva* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Seja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ o conjunto dos subespaços de dimensão 1 de $\mathbb{C}^2$. Se (z,w) é um vector não nulo de $\mathbb{C}^2$, notamos por $[z,w]$ o subespaço de dimensão 1 gerado por este vector, que é um ponto em $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notemos que $[z,w]=[\lambda z,\lambda w]$, para qualquer número complexo não nulo λ. A aplicação sobrejectiva $\pi:\mathbb{C}^2\backslash\{0\}\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $(z,w)\mapsto[z,w]$, permite definir uma topologia quociente (A é aberto de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se e somente se $\pi^{-1}(A)$ é aberto de $\mathbb{C}^2$), que torna $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ num espaço topológico Hausdorff.

Este espaço pode ser coberto pelos abertos

$$U_0:=\{[z,w]:z\neq 0\} \quad \text{e} \quad U_1:=\{[z,w]:w\neq 0\}.$$

Como U_0 e U_1 são conexos cuja intersecção é não vazia, concluímos que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ é conexo. Definindo funções $\phi_0:U_0\to\mathbb{C}$ por $[z,w]\mapsto w/z$ e $\phi_1:U_1\to\mathbb{C}$ por $[z,w]\mapsto z/w$, temos que ambas as funções são homeomorfismos, cujas inversas são dadas por $\phi_0^{-1}(a)=[1,a]$ e $\phi_1^{-1}(a)=[a,1]$. Notemos que $\phi_i(U_0\cap U_1)=\mathbb{C}^*$ é um aberto de $\mathbb{C}$. A função composta $\phi_1\circ\phi_0^{-1}$, que envia $s\mapsto 1/s$, é holomorfa (o mesmo acontece para $\phi_0\circ\phi_1^{-1}$), permitindo-nos concluir que estas duas cartas são compatíveis e definem em $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ uma estrutura holomorfa de dimensão 1.

Vejamos que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ é Hausdorff. Tomando dois pontos $p,q\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, se p e q estão ambos em U_0 ou em U_1, podemos separá-los por abertos, uma vez que U_0 e U_1 são espaços Hausdorff. Caso contrário podemos admitir que $p\in U_0\setminus U_1$ e $q\in U_1\setminus U_0$, pelo que $p=[1,0]$ e $q=[0,1]$. Estes pontos são separados por $\phi_0^{-1}(\mathbb{D})$ e $\phi_1^{-1}(\mathbb{D})$, onde $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ é o disco unitário aberto de $\mathbb{C}$.

Concluímos então que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ é uma superfície de Riemann, que usualmente notamos apenas por $\mathbb{P}^1$.

(6) *Plano projectivo* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. O *plano projectivo* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ é definido como sendo o conjunto dos subespaços de dimensão 1 de $\mathbb{C}^3$, em que $[x,y,z]$ representa o subespaço gerado pelo vector não nulo (x,y,z) de $\mathbb{C}^3$. Façamos uma construção semelhante à construção feita para $\mathbb{P}^1$. Como $[x,y,z]=[\lambda x,\lambda y,\lambda z]$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*$, podemos considerar a aplicação sobrejectiva $\pi:\mathbb{C}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^2$, $(x,y,z)\mapsto[x,y,z]$, que permite munir $\mathbb{P}^2$ de uma topologia quociente, que o torna num espaço topológico Hausdorff.

Podemos cobrir este espaço pelos abertos

$$U_0:=\{[x,y,z]:x\neq 0\};\quad U_1:=\{[x,y,z]:y\neq 0\};\quad U_2:=\{[x,y,z]:z\neq 0\},$$

onde cada aberto U_i é homeomorfo ao plano afim $\mathbb{C}^2$. No aberto U_0 vamos definir o homeomorfismo que envia $[x,y,z]$ em $(y/x,z/x)$. A sua inversa envia $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ em $[1,a,b]\in U_0\subseteq\mathbb{P}^2$. Nos abertos U_1 e U_2 definimos cartas semelhantes, dividindo por y e por z, respectivamente. Facilmente verificamos que estas cartas são compatíveis, o que nos permite concluir que $\mathbb{P}^2$ é uma variedade holomorfa de dimensão 2.

(7) *Espaço projectivo* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Vamos considerar o espaço projectivo

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}):=\{[x_1,...,x_{n+1}]:(x_1,...,x_{n+1})\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\},$$

munido com a topologia quociente dada pela função $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$. De forma análoga ao que foi feito para $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^2$, considerando $n+1$ abertos da forma $U_i := \{[x_1, ..., x_{n+1}] : x_i \neq 0\}$ e homeomorfismos que enviam $[x_1, ..., x_{n+1}] \in U_i$ em $(x_1/x_i, ..., x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, ..., x_{n+1}/x_i) \in \mathbb{C}^n$, verificamos que $\mathbb{P}^n$ é uma variedade complexa de dimensão n.

Vamos agora demonstrar que $\mathbb{P}^n$ é compacto, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a esfera

$$S^{2n+1} := \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |x_1|^2 + ... + |x_{n+1}|^2 = 1\}$$

que é um subespaço compacto de $\mathbb{C}^{n+1}$ e a aplicação contínua $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ definida por $(x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto [x_1, ..., x_{n+1}]$. Dado um ponto $[x_1, ..., x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$ e definindo $\lambda := |x_1|^2 + ... + |x_{n+1}|^2 > 0$, verificamos que $|\sqrt{\lambda} x_1|^2 + ... + |\sqrt{\lambda} x_{n+1}|^2 = 1$. Como $[x_1, ..., x_{n+1}] = [\sqrt{\lambda} x_1, ..., \sqrt{\lambda} x_{n+1}]$, concluímos que $[x_1, ..., x_{n+1}] \in \pi(S^{2n+1})$. Temos então que a restrição $\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \to \mathbb{P}^n$ é sobrejectiva, pelo que, sendo a imagem de um compacto por uma aplicação contínua , $\mathbb{P}^n$ é compacto.

(8) *Curvas planas afins.* Uma *curva plana afim* $\mathcal{C}$ é definida como sendo (em $\mathbb{C}^2$) o conjunto dos zeros de um polinómio $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$. Uma tal curva é sempre um espaço Hausdorff com base numerável por abertos, uma vez que é um subespaço de $\mathbb{C}^2$. Seja (z_0, w_0) um ponto não-singular de $\mathcal{C}$, i.e., $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0) \neq 0$ e $\frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$. Então, pelo teorema da função implícita, sabemos que existem abertos U e V de $\mathbb{C}$ e uma função holomorfa $g : U \to V$ tal que para $z \in U$ e $w \in V$ temos $g(z) = w \Leftrightarrow f(z, w) = 0$.

Uma vez que $Sing(\mathcal{C})$ é um conjunto fechado, podemos escolher U e V suficientemente pequenos de modo a que

$$W := \{(z, w) \in \mathcal{C} : z \in U, w \in V\}$$

seja uma vizinhança aberta de (z_0, w_0) em $\mathcal{C} \setminus Sing(\mathcal{C})$. Então a função $\phi : W \to U$ definida por $(z, w) \mapsto z$ é um homeomorfismo, com inversa dada por $z \mapsto (z, g(z))$.

Do mesmo modo, uma vez que $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0) \neq 0$, sabemos que existem abertos U' e V' de $\mathbb{C}$ e uma função holomorfa $h : V' \to U'$ tal que $h(w) = z \Leftrightarrow f(z, w) = 0$. E para

$$W' := \{(z, w) \in \mathcal{C} : z \in U', w \in V'\},$$

uma vizinhança aberta de (z_0, w_0) em $\mathcal{C} \setminus Sing(\mathcal{C})$, temos, também, um homeomorfismo $\psi : W' \to V'$ definido por $(z, w) \mapsto w$, e com inversa dada por $w \mapsto (h(w), w)$.

Reparemos que $\phi \circ \psi_{-1}$ é da forma $z \mapsto (z, g(z)) \mapsto g(z)$ e que $\psi \circ \phi_{-1}$ é da forma $w \mapsto (h(w), w) \mapsto h(w)$, o que, uma vez que h e g são holomorfas, nos permite concluir que cartas da forma ϕ e ψ são sempre compatíveis. Obtemos, assim, um atlas holomorfo de dimensão 1 definido em $\mathcal{C} \setminus Sing(\mathcal{C})$, ou seja, $\mathcal{C} \setminus Sing(\mathcal{C})$ é uma variedade holomorfa de dimensão 1.

Se uma curva for definida por um polinómio irredutível, então é conexa (como mostraremos na proposição 2.14). E, nesse caso, como $\mathcal{C} \setminus Sing(\mathcal{C})$ é ainda conexo, concluímos que é uma superfície de Riemann. Em particular, se a curva for não singular, concluímos que $\mathcal{C}$ é uma superfície de Riemann.

(9) *Curvas projectivas planas.* Seja $F(x, y, z) \in \mathbb{C}(x, y, z)$ um polinómio homogéneo de grau n, i.e., cada termo do polinómio tem grau constante n. Este polinómio não define uma aplicação no plano projectivo $\mathbb{P}^2$, pois $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z)$ e tanto $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ como (x, y, z) representam um mesmo ponto de $\mathbb{P}^2$.

Contudo a condição $F(x, y, z) = 0$ está bem definida, pois

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 0 \Leftrightarrow F(x, y, z) = 0.$$

Podemos então definir em $\mathbb{P}^2$ o conjunto

$$K = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : F(x, y, z) = 0\}$$

que designamos por *curva projectiva plana.* Notemos que K é um subespaço fechado do compacto $\mathbb{P}^2$, pelo que é também compacto.

Considerando os abertos U_i de $\mathbb{P}^2$ definidos anteriormente, para $i = 0, 1, 2$, temos que a intersecção de K com cada um dos abertos U_i é uma curva plana afim $\mathcal{C}_i$ de $\mathbb{C}^2$. Por exemplo,

$$\mathcal{C}_0 := U_0 \cap K = \{(y, z) \in \mathbb{C}^2 : F(1, y, z) = 0\}$$

é a curva plana afim de $\mathbb{C}^2$ definida pelo polinómio $f(y, z) := F(1, y, z)$.

Um ponto $[a, b, c] \in K$ diz-se *singular* se for um ponto singular do polinómio homogéneo F, i.e., se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

Queremos agora mostrar que é possível construir em $K \setminus Sing(K)$ um atlas holomorfo.

Seja $[a, b, c] \in K \setminus Sing(K)$ e suponhamos que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) \neq 0.$$

Usando a relação de Euler para polinómios homogéneos

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = nF(x, y, z),$$

verificamos que, uma vez que $F(a, b, c) = 0$, se $a = 0$ e $c = 0$ então também $b = 0$, o que é impossível em $\mathbb{P}^2$. Temos então que ou $a \neq 0$ ou $c \neq 0$. Suponhamos que $a \neq 0$. Então $(1, b/a, c/a)$ é um ponto da curva plana afim $\mathcal{C}_0 := K \cap U_0$. E, pelo que foi visto para as curvas planas afins, sabemos que existe uma carta $\phi : W \to U$

definida por $(z,w) \mapsto w$, com inversa dada por $w \mapsto (h(w), w)$, onde h é uma função holomorfa.

Temos então, para um aberto V definido por

$$V := \{[x,y,z] \in K : x \neq 0, (y/x, z/x) \in W\} = \{[1,y,z] \in K : (y,z) \in W\},$$

que a função $\psi : V \to U$ definida por $[x,y,z] \mapsto z/x$ é um homeomorfismo com inversa dada por $z \mapsto [1, h(z), z]$.

Caso $c \neq 0$, obtemos (considerando a curva afim $C_2 := K \cap U_2$) uma carta da forma $[x,y,z] \mapsto x/z$ com inversa dada por $x \mapsto [x, g(x), 1]$, com g holomorfa. Supondo que $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) \neq 0$ ou que $\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$, obtemos cartas da forma

$$[x,y,z] \mapsto z/y; y/z; y/x; x/y.$$

As suas inversas são dadas por

$$w \mapsto [g(w), 1, w]; [g(w), w, 1]; [1, w, g(w)]; [w, 1, g(w)].$$

Considerando cartas de uma destas formas para todos os pontos de $K \setminus Sing(K)$, precisamos apenas de verificar que estas cartas são compatíveis, para concluirmos que o seu conjunto define um atlas holomorfo. Mas compondo cartas $(\psi_i \circ \psi_j^{-1})$ obtemos aplicações da forma

$$w \mapsto w; 1/w; g(w); 1/g(w); w/g(w); g(w)/w$$

onde g é uma função holomorfa que nunca se anula no domínio onde está definida.

Como a curva projectiva K coincide com a união das curvas afins $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, cuja intersecção é não vazia, se cada uma das curvas for conexa então K é também conexa, sendo assim uma superfície de Riemann.

A conexidade de uma curva é assegurada pela irredutibilidade do polinómio que a define. Vamos agora ver que F é um polinómio irredutível se e somente se $f_i := F|_{\mathcal{C}_i}$ é irredutível, para $i = 0, 1, 2$.

Suponhamos que F é redutível. Então $F = H.G$, com H e G polinómios homogéneos. Então $f_0(y,z) := F(1,y,z) = H(1,y,z).G(1,y,z) = h_0(y,z).g_0(y,z)$ (obtemos uma decomposição análoga para f_1 e f_2). Reciprocamente, se $f_0(y,z) = h_0(y,z).g_0(y,z)$ então $F = H.G$, onde F, H e G são as homogeneizações (ver observação seguinte) dos polinómios f_0, h_0 e g_0.

(10) *Completamento projectivo de uma curva plana afim.* No exemplo anterior, observámos que podemos restringir uma curva projectiva K ao plano afim $\mathbb{C}^2$, obtendo uma curva afim, que depende da carta escolhida.

Ao considerar a carta $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{C}^2$ definida por $[x,y,z] \mapsto (y/x, z/x)$, a sua inversa dá-nos um mergulho $\phi^{-1} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{P}^2$, $(a,b) \mapsto [1,a,b]$. Designamos os pontos de

$\mathbb{P}^2 \setminus U_0$ por *pontos no infinito* de $\mathbb{C}^2$. A cada ponto no infinito $[0, a, b]$ corresponde uma direcção $a : b$ (direcção de uma recta em $\mathbb{C}^2$).

Contudo, podemos também partir de uma curva afim $\mathcal{C}$ e prolongá-la a uma curva projectiva K. Sendo $f(y, z) \in \mathbb{C}[y, z]$ o polinómio que define a curva $\mathcal{C}$, vamos construir um polinómio homogéneo $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$, a *homogeneização de* f, do seguinte modo: para $n = gr(f)$, decompomos f nas suas partes homogéneas (polinómios constituídos por termos do mesmo grau)

$$f(y, z) = f_{(0)} + f_{(1)} + ... + f_{n-1} + f_{(n)}$$

sendo $gr(f_{(j)}) = j$ e definimos

$$F(x, y, z) := x^n f_{(0)} + x^{n-1} f_{(1)} + ... + x f_{(n-1)} + f_{(n)}.$$

Temos então que $F(x, y, z)$ define uma curva projectiva plana K em $\mathbb{P}^2$ que designamos por *completamento projectivo* de $\mathcal{C}$, sendo $K = \phi^{-1}(\mathcal{C}) \cup \{[0, y, z] : f_{(n)}(y, z) = 0\}$. Em particular, temos que K coincide com a aderência de $\phi^{-1}(\mathcal{C})$ em $\mathbb{P}^2$.

Definição 1.57. Dadas duas variedades holomorfas X e Y de dimensões n e m, respectivamente, dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é *holomorfa* em $x_0 \in X$ se existir uma carta em X, $\varphi : U \to A$, com $x_0 \in U$, e uma carta em Y, $\phi : V \to B$, com $f(U) \subset V$, tais que a aplicação

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : A \to B$$

é uma função holomorfa em $\varphi(x_0) \in \mathbb{C}^n$. Dizemos que uma aplicação é holomorfa num aberto W se for holomorfa em todos os pontos $x \in W$.

Uma aplicação $f : X \to Y$ diz-se *biholomorfa* se for holomorfa, bijectiva e a sua inversa for holomorfa. Duas superfícies de Riemann X e Y dizem-se *isomorfas* se existe uma aplicação $f : X \to Y$ biholomorfa.

Exemplos 1.58. **(1)** Qualquer carta holomorfa é uma aplicação holomorfa no seu domínio.

(2) Se W é um conjunto aberto de X, uma função $f : W \to \mathbb{C}$ é holomorfa se para toda a carta $\varphi : U \to A$ de X a função $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \mathbb{C}$ é holomorfa. Notamos por $\mathcal{O}(W)$ o conjunto de todas as funções holomorfas $f : W \to \mathbb{C}$.

(3) Se f, g são ambas holomorfas em $x \in X$, então $f \pm g$ e fg são holomorfas. Se $g(x) \neq 0$ então f/g é holomorfa.

(4) Seja f uma função definida em $\hat{\mathbb{C}}$. Então f é holomorfa em ∞ se e somente se $f(1/z)$ é holomorfa em $z = 0$.

(5) Considerando o toro complexo $\mathbb{C}/\Gamma$ e a aplicação $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$, uma função $f : W \to \mathbb{C}$, onde W é um aberto de $\mathbb{C}/\Gamma$, é holomorfa num ponto $p \in W$ se e somente se existir uma pré-imagem z de p em $\mathbb{C}$ tal que $f \circ \pi$ é holomorfa em z. Portanto, f é holomorfa em W se e somente se $f \circ \pi$ é holomorfa em $\pi^{-1}(W)$.

(6) Seja $\mathcal{C}$ uma curva plana afim definida por um polinómio não singular $f(z,w)$. Então as projecções $\pi_z : \mathcal{C} \to \mathbb{C}, (z,w) \mapsto z$ e $\pi_w : \mathcal{C} \to \mathbb{C}, (z,w) \mapsto w$ são holomorfas e qualquer função polinomial quando restrita a $\mathcal{C}$ é também holomorfa.

(7) *As superfícies de Riemann* $\mathbb{P}^1$ *e* $\hat{\mathbb{C}}$ *são isomorfas*: Vamos considerar a aplicação

$$\psi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \hat{\mathbb{C}}, [z,w] \mapsto \begin{cases} \frac{w}{z} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ \infty & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

com inversa

$$\psi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), z \mapsto \begin{cases} [1,z] & \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \\ [0,1] & \text{se} \quad z = \infty \end{cases}.$$

Para verificarmos que ψ é uma aplicação biholomorfa, consideremos em $\mathbb{P}^1$ as cartas $\phi_0 : [z,w] \mapsto w/z$ e $\phi_1 : [z,w] \mapsto z/w$ (definidas nos abertos $U_0 = \{[z,w] : z \neq 0\}$ e $U_1 = \{[z,w] : w \neq 0\}$, respectivamente) e em $\hat{\mathbb{C}}$ as cartas $\varphi_1 : z \mapsto z$ e $\varphi_2 : z \mapsto 1/z$ (definidas em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$).

De facto $\psi|_{U_0} = \phi_0$, o que mostra que ψ é holomorfa em $\mathbb{P}^1 \setminus \{[0,1]\}$. Pelo teorema do prolongamento de Riemann, basta-nos apenas verificar que ψ é contínua no ponto $[0,1]$. Consideremos a aplicação $g := \varphi_2 \circ \psi \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ que é dada por $z \mapsto [z,1] \mapsto 1/z \mapsto z$. Ora, $\lim_{z \to 0} g(z) = 0$ e, como φ_2 e ϕ_1 são homeomorfismos, concluímos que

$$\lim_{z \to 0} \psi(\phi_1^{-1}(z)) = \varphi_2(0) \Leftrightarrow \lim_{[z,w] \to [0,1]} \psi(\phi_1^{-1}([z,1])) = \infty,$$

pelo que ψ é contínua no ponto $[0,1]$, logo é holomorfa.

Do mesmo modo, temos que $\psi^{-1}|\mathbb{C} = \phi_0^{-1}$, pelo que ψ^{-1} é holomorfa em $\mathbb{C}$. Considerando $g^{-1} := \phi_1 \circ \psi^{-1} \circ \varphi_2 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, que é dada por $z \mapsto 1/z \mapsto [1, 1/z] \mapsto z$, obtemos que

$$\lim_{z \to 0} g^{-1}(z) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \to 0} \psi^{-1} \circ \varphi_2(z) = \phi_1^{-1}(0) \Leftrightarrow \lim_{z \to 0} \psi(1/z) = [0,1],$$

pelo que que ψ^{-1} é contínua em ∞.

Teorema 1.59 (da Identidade). *Sejam $f, g : X \to Y$ duas aplicações holomorfas entre variedades holomorfas e suponhamos que a variedade X é conexa. Seja W um aberto de X tal que $f|_W = g|_W$. Então $f = g$.*

Teorema 1.60 (da Aplicação Aberta). *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação holomorfa não constante entre variedades holomorfas. Então f é aberta.*

Teorema 1.61 (do Módulo Máximo). *Seja X uma variedade holomorfa conexa e seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante. A função $|f(x)|$ não atinge um valor máximo.*

Corolário 1.62. *Seja X uma variedade holomorfa conexa e compacta e seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então f é constante.*

Proposição 1.63. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação holomorfa entre variedades holomorfas. Se X é compacta então Y é compacta e f é sobrejectiva.*

Teorema 1.64. *Seja $f : X \to Y$ um revestimento entre um espaço topológico X e uma variedade holomorfa Y de dimensão n.*

Então existe uma única estrutura de variedade holomorfa em X tal que f é uma função holomorfa. Considerando essa estrutura, cada automorfismo $\alpha \in Aut(f)$ é também uma função holomorfa.

Demonstração. Consideremos uma carta $\varphi_1 : U_1 \to V \subseteq \mathbb{C}^n$ da estrutura holomorfa de Y tal que U_1 é admissível para f, i.e., existe um aberto U de X tal que $f|_U : U \to U_1$ é homeomorfismo. Então $\varphi := \varphi_1 \circ f : U \to V$ é uma carta holomorfa em X. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as cartas obtidas deste modo. Sejam (U, φ) e (U', φ') duas cartas distintas de $\mathcal{A}$. Então a aplicação $\varphi' \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap U')} = (\varphi'_1 \circ f) \circ (\varphi_1 \circ f)^{-1}|_{\varphi_1 \circ f(U \cap U')} = \varphi'_1 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(f(U \cap U'))}$ é biholomorfa, o que mostra que quaisquer duas cartas de $\mathcal{A}$ são compatíveis. Como os abertos U cobrem X, concluímos que X tem uma estrutura de variedade holomorfa definida por $\mathcal{A}$. Para cada componente U de $f^{-1}(\varphi_1^{-1}(V))$, considerando uma carta (U, φ), então $\varphi_1 \circ f \circ \varphi^{-1} : V \to V$ é a identidade o que mostra que f é localmente bihilomorfa, logo é holomorfa.

Suponhamos que $\mathcal{A}'$ é outro atlas holomorfo em X tal que a aplicação $f : (X, \mathcal{A}') \to Y$ é holomorfa, logo também localmente biholomorfa. Então a identidade $(X, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{A}')$ é localmente biholomorfa, logo é uma aplicação biholomorfa. Portanto, $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{A}'$ definem a mesma estrutura holomorfa em X.

Para $\alpha \in Aut(f)$, como $f \circ \alpha(U) = f(U)$, a carta φ' definida em $\alpha(U)$ satisfaz $\varphi' = \varphi \circ \alpha^{-1}$. Portanto, $\varphi' \circ \alpha \circ \varphi^{-1}$ é a identidade em V, o que mostra claramente que α é holomorfa. □

1.5 Superfícies de Riemann

As referências genéricas para esta secção e para a secção seguinte são os livros [4], [5], [11] e [13].

Teorema 1.65 (Prolongamento de Riemann para superfícies de Riemann). *Sejam X e Y superfícies de Riemann e $x_0 \in X$. Dada uma função holomorfa $f : X \setminus \{x_0\} \to Y$, são equivalentes:*

(a) *f prolonga-se a uma função holomorfa $\tilde{f} : X \to Y$*

(b) *f prolonga-se a uma função contínua $\tilde{f} : X \to Y$*

(c) *Existe em Y o limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$.*

Demonstração. É consequência imediata do teorema do prolongamento de Riemann para funções holomorfas definidas em abertos de $\mathbb{C}$. □

Teorema 1.66 (dos Zeros Isolados para superfícies de Riemann). *Sejam $f, g : X \to Y$ duas aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em X com ponto de acumulação $x_0 \in X$. Se $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $f = g$.*

Demonstração. Temos que $f(x_0) = g(x_0)$, pela continuidade de f e g. Vejamos que f e g coincidem numa vizinhança de x_0. Vamos escolher cartas $\varphi : U \to A$ em X e $\phi : V \to B$ em Y tais que $x_0 \in U$, $f(U) \subset V$ e $g(U) \subset V$ e U é conexo. As funções $\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : A \to B$ e $\phi \circ g \circ \varphi^{-1} : A \to B$ são holomorfas. Considerando uma subsucessão de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contida em U, temos que $\phi\circ f\circ\varphi^{-1}(x_{n_k}) = \phi\circ g\circ\varphi^{-1}(x_{n_k})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pelo teorema dos zeros isolados para funções holomorfas definidas em abertos de $\mathbb{C}$, concluímos que $\phi\circ f\circ\varphi^{-1} = \phi\circ g\circ\varphi^{-1}$ em $\varphi(U)$, pelo que $f|_U = g|_U$. Pelo teorema da identidade (teorema 1.59), temos que $f = g$. □

Proposição 1.67. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann. Então, para todo $y \in Y$, a sua pré-imagem $f^{-1}(y)$ é um conjunto discreto de X. Em particular, se X (logo também Y) for compacto, então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito não vazio, para todo $y \in Y$.*

Demonstração. Dada uma carta holomorfa ϕ centrada em $y \in Y$, vamos considerar a aplicação holomorfa $\phi' := \phi - \phi(y)$. Notemos que $\phi'(y) = 0$. Para $x_0 \in f^{-1}(y)$, vamos considerar uma carta ψ centrada em x_0. Temos, então, que a função $\phi'\circ f\circ\psi^{-1}$ é holomorfa não constante com um zero em $\phi(x_0)$. Como o conjunto dos zeros de uma função holomorfa definida em $\mathbb{C}$ é discreto, existe uma vizinhança de $\phi(x_0)$ tal que nessa vizinhança $\phi(x_0)$ é o único zero da função. Portanto, existe uma vizinhança de x_0 tal que nessa vizinhança x_0 é a única pré-imagem de y, o que mostra que $f^{-1}(y)$ é um conjunto discreto. A segunda afirmação resulta de f ser sobrejectiva (proposição 1.63) e do facto de conjuntos discretos de espaços compactos serem finitos. □

Proposição 1.68. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann. Então, para cada $x \in X$, existe um único inteiro $m \geq 1$ tal que: para uma carta $\phi : V \to B$ em Y, existe uma carta $\varphi : U \to A$ em X tal que $x \in U$, $f(U) \subset V$, $\varphi(x) = 0 \in \mathbb{C}$ e $\phi(f(x)) = 0 \in \mathbb{C}$ e a função $\phi\circ f\circ\varphi^{-1} : A \to B$ é dada por $z \mapsto z^m$.*

Demonstração. Seja $\phi : V \to B$ uma carta em Y e escolhamos uma carta $\varphi_1 : U \to A$ em X tal que $x \in U$, $f(U) \subset V$, $\varphi_1(x) = 0$ e $\phi(f(x)) = 0$. A função $H(z) := \phi\circ f\circ\varphi_1^{-1}(z)$ tem expansão de Taylor da forma $H(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i$ com $c_m \neq 0$ e $m \geq 1$, uma vez que $H(0) = 0$. Logo $H(z) = z^m h(z)$, onde h é uma função holomorfa em $z = 0$ e $h(0) \neq 0$. Neste caso, existe uma função $g(z)$ holomorfa numa vizinhança de 0 e tal que $g(z)^m = h(z)$. Portanto, $H(z) = (zg(z))^m$. Seja $\eta(z) := zg(z)$. A aplicação η é holomorfa e, como $\eta'(0) \neq 0$, é também invertível. Então $\varphi := \eta\circ\varphi_1$ é também uma carta centrada em x. Logo $\phi\circ f\circ\varphi^{-1}(z) = \phi\circ f\circ\varphi_1^{-1}\circ\eta^{-1}(z) = H(\eta^{-1}(z)) = H(w) = (wg(w))^m = z^m$.

Para demonstrarmos a unicidade de m, notemos que, se ϕ_* e φ_* são outras cartas tais que $\phi_* \circ f \circ \varphi_*^{-1}(z) = z^k$, então

$$\begin{aligned}\phi_* \circ \phi^{-1}(z^m) &= \phi_* \circ \phi^{-1}(\phi \circ f \circ \varphi^{-1}(z)) = \phi_* \circ f \circ \varphi^{-1}(z)) = \phi_* \circ f \circ \varphi_*^{-1}(\varphi_* \circ \varphi^{-1}(z)) = \\ &= (\varphi_* \circ \varphi^{-1}(z))^k,\end{aligned}$$

e, pelo teorema da identidade (teorema 1.59), $m = k$.□

Definição 1.69. Ao inteiro determinado na proposição anterior chamamos *multiplicidade* de f em x e notamos por $\nu_f(x)$. Se $\nu_f(x) \geq 2$, dizemos que x é um *ponto de ramificação* de f. Um ponto $y \in Y$ diz-se um *valor crítico* de f se é imagem de algum ponto de ramificação.

Teorema 1.70. *Seja $f : X \to Y$ uma função holomorfa não constante entre superfícies de Riemann e suponhamos que X é compacta.*

(a) *Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{x \in f^{-1}(y)} \nu_f(x) = n, \quad \forall y \in Y$.*

(b) *Seja $C_f := \{f(x) : \nu_f(x) \geq 2\}$ o conjunto dos valores críticos de f. Então*

$$f : X \setminus (f^{-1}(C_f)) \to Y \setminus C_f$$

é um revestimento holomorfo de grau n.

Demonstração. (a) Para cada $n \geq 1$, seja $Y_m := \{y \in Y : \sum_{x \in f^{-1}(y)} \nu_f(x) \geq m\}$. Y_m é aberto em Y porque, para $y \in Y_m$ e $x \in f^{-1}(y)$, f representa-se localmente por $z \mapsto z^{\nu_f(x)}$. Vejamos que Y_m é fechado. Seja $y = \lim_{i \to \infty} y_i$, onde $y_i \in Y_m$. Como só há um número finito de pontos de ramificação de f, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f^{-1}(y_i)$ consiste em $\geq m$ pontos distintos, $\forall i \in \mathbb{N}$. Sejam $x_{j,1}, ..., x_{j,m}$ m pontos distintos de $f^{-1}(y_i)$. Como X é compacta, para cada $k = 1, ..., m$, existe uma subsucessão $(x_{j,k})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge para um ponto x_k. Sem perda de generalidade, suponhamos que é a sucessão $(x_{i,k})_{i \in \mathbb{N}}$ que converge para x_k. Como f é contínua, $f(x_k) = b$ e, como $f(x_{i,k}) = y_i$, vem que

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \nu_f(x) \geq m.$$

Portanto, cada Y_m ou é vazio ou coincide com Y. Seja $y_0 \in Y$ um ponto arbitrário e seja $n = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \nu_f(x)$. Como $y_0 \in Y_n$, então $Y_n = Y$. Como $y_0 \notin Y_{n+1}$, $Y_{n+1} = \emptyset$.

(b) Para cada $y \in Y \setminus C_f$, sabemos que $f^{-1}(y)$ tem n pontos, por (a). Pela proposição (1.68), dada uma carta (V, ϕ) com $y \in V \subseteq Y \setminus C_f$, sabemos que para cada $x_1, ..., x_n \in f^{-1}(y)$, existem cartas (U_i, φ_i), com $x_i \in U_i$, tais que $\phi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ é a aplicação $z \mapsto z$. Tomemos em X abertos $U_i' \subseteq U_i$, de modo a que $U_i' \cap U_j' = \emptyset$ para todo $i \neq j \in \{1, ..., n\}$. Seja $V' := f(U_1') \cap ... \cap f(U_n')$. Pelo teorema da aplicação aberta, $V' \subseteq V$ é um aberto e temos que

$$f^{-1}(V') = \bigcup_{i=1,...,n} U_i'.$$

□

Definição 1.71. Seja X uma superfície de Riemann. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{C}$ é *meromorfa* em X se, para um aberto $X' \subset X$, se verificar que:

(i) $f : X' \to \mathbb{C}$ é holomorfa;

(ii) $X \setminus X'$ é um conjunto de pontos isolados;

(iii) $\forall x_0 \in X \setminus X'$, $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$.

Aos pontos de $X \setminus X'$ chamamos *pólos* de f. O conjunto de todas as funções meromorfas em X é notado por $\mathcal{M}(X)$.

O próximo teorema permite identificar funções meromorfas com funções holomorfas sobre a esfera de Riemann.

Teorema 1.72. *Seja X uma superfície de Riemann.*

(a) *Seja $f \in \mathcal{M}(X)$. Definindo para cada pólo $p \in X \setminus X'$ de f, $\bar{f}(p) = \infty$ e $\bar{f}|_{X'} = f$, obtemos uma função holomorfa $\bar{f} : X \to \hat{\mathbb{C}}$.*

(b) *Dada uma função $\bar{f} : X \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorfa e não constante igual a ∞, então $\bar{f}^{-1}(\infty)$ é um conjunto de pontos isolados e $f : X \setminus \bar{f}^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \bar{f}(x)$ é uma função meromorfa.*

Demonstração. (a) A função $\bar{f}$ é contínua e $\bar{f}|_{X'}$ é holomorfa, logo, pelo teorema do prolongamento de Riemann, $\bar{f}$ é holomorfa.

(b) Pela proposição (1.67), a fibra $\bar{f}^{-1}(\infty)$ é um conjunto discreto de X. A função $f : X \setminus \bar{f}^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \bar{f}(x)$ é holomorfa (é restrição a um aberto de uma função holomorfa) e, pela continuidade de $\bar{f}$, $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$, para todo o $x_0 \in f^{-1}(\infty)$.□

Dado um aberto conexo $B \subset \mathbb{C}$, da análise complexa, sabemos que uma função meromorfa definida em B tem expansão de Laurent $\sum_{i=N}^{\infty} a_i(z - z_0)^i$ em torno de cada ponto $z_0 \in B$. Resulta então que se (U, φ) é uma carta holomorfa de uma superfície de Riemann X e $x_0 \in U$, então cada função meromorfa g em X tem expansão de Laurent da forma $g(x) = \sum_{i=N}^{\infty} a_i(\varphi(x) - \varphi(x_0))^i$ em torno de x_0.

Sejam $f, g \in \mathcal{M}(X)$. Notemos que o conjunto dos pólos de cada função é discreto e que numa vizinhança de um pólo na qual a série de Laurent da função converge não existe nenhum outro pólo. Em particular, se X é compacto cada função tem um número finito de pólos. Podemos definir pontualmente as funções $f \pm g$ e $f.g$ para os pontos de X que não são pólos de f nem de g. Ao adicionarmos, subtrairmos ou multiplicarmos as suas séries de Laurent em coordenadas locais em torno de cada um dos pólos de f e de g, observamos que $f \pm g$ e $f.g$ se prolongam de forma única a funções meromorfas em X. Logo $\mathcal{M}(X)$ é anel.

Se $f \in \mathcal{M}(X)$ for nula num aberto de X, então $f = 0$ globalmente (uma vez que X é conexo e usando o teorema da identidade). Logo, para qualquer função não nula

$f \in \mathcal{M}(X)$, podemos escrever localmente f na forma $(\varphi(x) - \varphi(x_0))g(\varphi(x))$, onde g não tem zeros nem pólos. É então claro que a função $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ é meromorfa em X e é a função inversa de f. Obtemos assim o seguinte teorema.

Teorema 1.73. *Se X é uma superfície de Riemann então $\mathcal{M}(X)$ é um corpo.*

Exemplo 1.74. Vamos considerar uma função racional $\frac{p(z)}{q(z)} \in \mathbb{C}(z)$, onde

$$p(z) = \lambda(z-a_1)^{n_1}...(z-a_r)^{n_r}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, a_i \in \mathbb{C}$$

e

$$q(z) = \mu(z-b_1)^{m_1}...(z-b_s)^{m_s}, \quad \mu \in \mathbb{C}^*, b_j \in \mathbb{C}$$

são dois polinómios primos entre si, de graus $n = n_1 + ... + n_r$ e $m = m_1 + ... + m_s$, respectivamente. Observando que, numa vizinhança perfurada de zero,

$$\frac{p(1/z)}{q(1/z)} = z^{m-n}\frac{\lambda(1-a_1z)^{n_1}...(1-a_rz)^{n_r}}{\mu(1-b_1z)^{m_1}...(1-b_sz)^{m_s}}$$

vemos que a função $\frac{p(z)}{q(z)}$ tem um pólo de ordem m_j em cada b_j e que, portanto, a função

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto \begin{cases} \frac{p(z)}{q(z)} & \text{se} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{b_1, ..., b_s\} \\ \infty & \text{se} \quad z \in \{b_1, ..., b_s\} \\ \infty & \text{se} \quad z = \infty \quad \text{e} \quad m < n \\ 0 & \text{se} \quad z = \infty \quad \text{e} \quad m > n \\ \frac{\lambda}{\mu} & \text{se} \quad z = \infty \quad \text{e} \quad m = n \end{cases}$$

é uma função meromorfa na esfera de Riemann.

Teorema 1.75. $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$.

Demonstração. Acabámos de verificar que $\mathbb{C}(z) \subseteq \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$. Vamos agora mostrar que qualquer função meromorfa f em $\hat{\mathbb{C}}$ é racional. Como $\hat{\mathbb{C}}$ é compacto, f tem um número finito de pólos $b_1, ..., b_s$ com ordens $m_1, ..., m_s$, respectivamente. Portanto, a função $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = (z-b_1)^{m_1}...(z-b_s)^{m_s}f(z)$$

é analítica em $\mathbb{C}$ com série de Taylor em 0 da forma

$$h(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + ..., \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como é produto de duas funções meromorfas, h é meromorfa numa vizinhança de ∞, ou seja, $h(1/t) = c_0 + c_1t^{-1} + c_2t^{-2} + ...$ é meromorfa numa vizinhança de $t = 0$, pelo que existe n tal que $c_i = 0$ para $i > n$. Então $f(z) = (z-b_1)^{-m_1}...(z-b_s)^{-m_s}(c_0 + c_1z + c_2z^2 + ... + c_nz^n)$, i.e., f é uma função racional. □

De um modo geral, não é elementar mostrar que uma superfície de Riemann tem funções meromorfas não constantes. O teorema que assegura a existência destas funções é o chamado Teorema de Existência de Riemann que será objecto da próxima secção.

No caso de um toro complexo a descrição das suas funções meromorfas pode ser feita de forma bastante explícita, como a seguir demonstramos.

Exemplo 1.76. Consideremos novamente o toro complexo $\mathbb{C}/\Gamma$ e a aplicação $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$. Uma função $f : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}$ é meromorfa se e somente se existir uma função meromorfa $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F = f \circ \pi$, o que implica que F satisfaz $F(z+\gamma) = F(z)$, $\forall \gamma \in \Gamma$ e $\forall z \in \mathbb{C}$, ou seja, F é Γ-periódica.

(1) Temos então que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma) &= \{f : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C} : f \text{ é meromorfa}\} \\ &\simeq \{F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : F \text{ é meromorfa e } F \text{ é } \Gamma\text{-periódica}\}. \end{aligned}$$

A $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ chamamos função Γ-*elíptica.*

(2) Consideremos a função holomorfa $\mathcal{P}$ definida pela família somável $(\frac{1}{(z+\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2})_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{C} \setminus \Gamma &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \tfrac{1}{z^2} + \textstyle\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} (\frac{1}{(z+\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}). \end{aligned}$$

Para $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \{0\}$, podemos reescrever $\mathcal{P}$ na forma

$$\mathcal{P}(z) = (\frac{1}{(z+\gamma_0)^2} - \frac{1}{\gamma_0^2}) + \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0, \gamma_0\}} (\frac{1}{(z+\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}),$$

tornando evidente que $-\gamma_0$ é um pólo de ordem 2 de $\mathcal{P}$. (É também claro que 0 é um pólo de ordem 2.) Portanto, $\mathcal{P}$ é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujos pólos são os pontos de Γ e têm todos ordem 2.

(3) Derivando $\mathcal{P}$,

$$\mathcal{P}'(z) = \frac{-2z}{(z)^4} + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{-2(z+\gamma)}{(z+\gamma)^4} = -2 \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{(z+\gamma)^3}$$

verificamos que $\mathcal{P}'$ é meromorfa com pólos em Γ de ordem 3 e que, para $\lambda \in \Gamma$,

$$\mathcal{P}'(z+\lambda) = -2 \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1)}{(z+\lambda+\gamma)^3} = -2 \sum_{\mu \in \Gamma} \frac{1)}{(z+\mu)^3} = \mathcal{P}'(z),$$

pelo que $\mathcal{P}'$ é Γ-periódica. Portanto, $\mathcal{P}' \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ e notemos que $\mathcal{P}'$ é uma função ímpar.

(4) $\mathcal{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$: Para $\mu \in \Gamma$, derivando $\mathcal{P}(z+\mu) - \mathcal{P}(z)$ obtemos $\mathcal{P}'(z+\mu) - \mathcal{P}'(z) = 0$, pelo que $\mathcal{P}(z+\mu) - \mathcal{P}(z)$ é uma aplicação constante. Como $\mathcal{P}$ é uma função par, concluímos $\mathcal{P}(z+\mu) = \mathcal{P}(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Portanto, $\mathcal{P}$ é também Γ-periódica, logo $\mathcal{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$.

(5) Vamos agora estudar os zeros de $\mathcal{P}$. Se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ é um zero de $\mathcal{P}$ então também $-\alpha$ é um zero, pois $\mathcal{P}$ é uma função par. Portanto, se α for um zero com multiplicidade 2, então

$\alpha - (-\alpha) \in \Gamma \Leftrightarrow 2\alpha \in \Gamma \Leftrightarrow \alpha \in \frac{1}{2}\Gamma$. Portanto, os únicos zeros duplos de $\mathcal{P} : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}$ são os pontos das classes $[0]$, $[\frac{w_1}{2}]$, $[\frac{w_2}{2}]$ e $[\frac{w_1+w_2}{2}]$.

(6) *Se $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ têm os mesmos pólos e as mesmas partes principais em cada pólo, então $f = g + c$, para uma constante $c \in \mathbb{C}$:* Temos que $(f - g)(\mathbb{C}/\Gamma) \subset \mathbb{C}$ e $f - g : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}$ é holomorfa. Como é também Γ-periódica, concluímos que é constante.

(7) *Se $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ têm os mesmos zeros e pólos, com as mesmas multiplicidades, respectivamente, então $f = \lambda g$, com $\lambda \in \mathbb{C}^*$:* A função $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ não tem zeros nem pólos. Como é holomorfa e Γ-periódica, é constante.

(8) *Se $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ então existem $R_1, R_2 \in \mathbb{C}(X)$ tal que $f = R_1(\mathcal{P}) + \mathcal{P}'R_2(\mathcal{P})$:* Podemos escrever $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ na forma

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2},$$

i.e., f pode ser escrita como soma de uma função par com uma função ímpar (ambas meromorfas).

Seja então h uma função par $\in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ com grau $N \geq 2$. Para $k \in \mathbb{C}$ a equação $h(z) = k$ tem N raízes, contando multiplicidades. Estas raízes são duplas se e só se $h'(z) = 0$. Como o conjunto $\{[z] \in \mathbb{C}/\Gamma : h'(z) = 0\}$ é finito, exceptuando um número finito de pontos $k \in \mathbb{C}$, a equação $h(z) = k$ tem exactamente N raízes. Portanto, existem $c, d \in \mathbb{C}$, com $c \neq d$, tais que as equações $h(z) = c$ e $h(z) = d$ têm N raízes distintas (e, como nenhuma é dupla, são distintas de $[0]$, $[\frac{w_1}{2}]$, $[\frac{w_2}{2}]$ e $[\frac{w_1+w_2}{2}]$). Sendo h par, se α é uma raiz então também $-\alpha$, portanto o conjunto dos zeros de $h(z) = c$ é da forma $a_1, -a_1, a_2, -a_2, ..., a_n, -a_n$. Analogamente, os zeros de $h(z) = d$ são $b_1, -b_1, b_2, -b_2, ..., b_n, -b_n$.

Definindo $g(z) := \frac{h(z)-c}{h(z)-d} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$, observamos que g tem zeros simples em $a_1, -a_1, a_2, -a_2, ..., a_n, -a_n$ e pólos simples em $b_1, -b_1, b_2, -b_2, ..., b_n, -b_n$. Por outro lado, a equação $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(a_i)$ tem zeros simples em $z = \pm a_i$ e a equação $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(b_i)$ tem zeros simples em $z = \pm b_i$. Pelo que, sendo

$$r(z) := \frac{(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_1)...(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_n))}{(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_1))...(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_n))},$$

g e r têm os mesmos zeros e os mesmos pólos, todos com multiplicidade 1. Existe então $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $g(z) = \lambda r(z) \Leftrightarrow \frac{h(z)-c}{h(z)-d} = \lambda r(z)$. Logo $h = R_1(\mathcal{P})$, para alguma função racional $R_1 \in \mathbb{C}(X)$.

Suponhamos que h é uma função ímpar $\in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$. Então $\frac{h}{\mathcal{P}'} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ é uma função par e temos que $\frac{h}{\mathcal{P}'} = R_2(\mathcal{P})$, para alguma função racional $R_2 \in \mathbb{C}(X)$ e, portanto, $h = \mathcal{P}'R_2(\mathcal{P})$.

Concluímos assim que qualquer função meromorfa de $\mathbb{C}/\Gamma$ é da forma $R_1(\mathcal{P}) + \mathcal{P}'R_2(\mathcal{P})$, pelo que $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma) \simeq \mathbb{C}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$.

(9) De facto, $\mathcal{P}'$ satisfaz a relação

$$(\mathcal{P}')^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_2\mathcal{P} - g_3, \quad \text{com } g_2 = 60\Sigma_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^4} \text{ e } g_3 = 140\Sigma_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^6},$$

ou seja, $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ é extensão algébrica finita de $\mathbb{C}(\mathcal{P}) \simeq \mathbb{C}(x)$.□

Mais geralmente, como corolário do teorema de existência de Riemann, mostraremos que o corpo $\mathcal{M}(X)$ das funções meromorfas definidas numa qualquer superfície de Riemann compacta X é extensão algébrica finita de $\mathbb{C}(x)$.

1.6 Teorema de Existência de Riemann

O objectivo desta secção é a demonstração do teorema de existência de Riemann, que assegura a existência de uma função meromorfa não constante definida numa superfície de Riemann compacta. Para a demonstração deste resultado vamos trabalhar em espaços de Hilbert constituídos por funções holomorfas e vamos apresentar o teorema da finitude, do qual o teorema de existência de Riemann é consequência.

Dado um aberto $D \subset \mathbb{C}$, seja $H^2(D)$ o espaço de Hilbert das funções holomorfas de quadrado integrável definidas em D.

Se X é uma superfície de Riemann compacta e $(W_i, \varphi_i)_{i\in I}$ é uma família finita de cartas holomorfas que cobrem X, para um aberto $U \subset W_i$, seja $H^2(U, \varphi_i)$ o espaço de todas as funções definidas em U tais que $f \circ \varphi_i^{-1} \in H^2(D_i)$, onde $D_i := \varphi_i(U)$. Equipando $H^2(U, \varphi_i)$ com o produto $\langle f, g\rangle := \langle f \circ \varphi_i^{-1}, g \circ \varphi_i^{-1}\rangle_{D_i}$, obtemos um espaço de Hilbert isomorfo a $H^2(D_i)$.

Se $U \subset W_i \cap W_j$, para $i, j \in I$, então $H^2(U, \varphi_i) = H^2(U, \varphi_j)$ e as normas nestes dois espaços de Banach são equivalentes.

Seja $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ uma família de abertos $U_i \subset W_i$ tais que U_i é relativamente compacto em W_i. Definimos os espaços

$$C^0(\mathcal{U}) := \bigoplus_{i\in I} H^2(U_i, \varphi_i) = \{(f_i)_i : f_i \in H^2(U_i, \varphi_i)\},$$

$$C^1(\mathcal{U}) := \bigoplus_{i,j\in I\times I} H^2(U_i \cap U_j, \varphi_i) = \{(f_{ij})_{ij} : f_{ij} \in H^2(U_i \cap U_j, \varphi_i)\}$$

e

$$C^2(\mathcal{U}) := \bigoplus_{i,j,k\in I\times I\times I} H^2(U_i \cap U_j \cap U_k, \varphi_i) = \{(f_{ijk})_{ijk} : f_{ijk} \in H^2(U_i \cap U_j \cap U_k, \varphi_i)\}$$

como somas directas de espaços de Hilbert (são ainda um espaço de Hilbert). Os elementos destes espaços denominam-se por *cocadeias* de dimensão 0, 1 e 2, respectivamente.

Seja

$$\delta_0 : C^0(\mathcal{U}) \to C^1(\mathcal{U})$$

a aplicação definida por $(f_i)_{i\in I} \mapsto (g_{ij})_{i,j\in I\times I}$ onde $g_{ij} := f_j - f_i$, e seja

$$\delta_1 : C^1(\mathcal{U}) \to C^2(\mathcal{U})$$

a aplicação definida por $(f_{ij})_{i,j\in I\times I} \mapsto (g_{ijk})_{i,j,k\in I\times I\times I}$ onde $g_{ijk} := f_{ij} - f_{ik} - f_{kj}$. Estas aplicações designam-se por aplicações *cobordo* .

Definimos ainda $Z^1(\mathcal{U}) := Ker(\delta_1)$ e $B^1(\mathcal{U}) := Im(\delta_0)$. Aos elementos de $Z^1(\mathcal{U})$ chamamos *cociclos*.

Por definição, uma cocadeia $(f_{ij})_{i,j\in I\times I} \in C^1(\mathcal{U})$ é um cociclo se

$$f_{ij} = f_{ik} + f_{kj} \quad \text{em} \quad U_i \cap U_j \cap U_k \tag{1.1}$$

e, portanto, satisfaz $f_{ii} = 0$ e $f_{ji} = -f_{ij}$. Designamos a relação (1.1) por *relação cocíclica*.

Notemos que os elementos de $B^1(\mathcal{U})$ são sempre cociclos, pois se $(f_{ij})_{i,j\in I\times I} \in B^1(\mathcal{U})$, então $f_{ij} = f_j - f_i$, pelo que $f_{ij} - f_{ik} - f_{kj} = (f_j - f_i) - (f_k - f_i) - (f_j - f_k) = 0$. Temos então que $B^1(\mathcal{U}) \subset Z^1(\mathcal{U})$, pelo que $\delta_0 : C^0(\mathcal{U}) \to Z^1(\mathcal{U})$.

Teorema 1.77 (de Finitude). *A imagem da função cobordo $\delta_0 : C^0(\mathcal{U}) \to Z^1(\mathcal{U})$ tem codimensão finita em $Z^1(\mathcal{U})$.*

Demonstração. [5], p.115.

Teorema 1.78. *Dada uma superfície de Riemann compacta X e um ponto $x_0 \in X$, existe uma função meromorfa em X que tem um pólo em x_0 e é holomorfa em $X \setminus \{x_0\}$.*

Demonstração. Sabemos que para cada ponto $x \in X$ existe uma carta (W_x, φ_x) onde W_x é uma vizinhança de x e φ_x envia W_x sobrejectivamente num disco aberto de $\mathbb{C}$. Podemos admitir que x_0 não está em W_x para $x_0 \neq x$ (uma vez que X é Hausdorff). Como X é compacto, pode ser coberto por um número finito de vizinhanças W_x, i.e., $X = \bigcup_{i\in I} W_{x_i}$, com I finito. Notemos $W_i := W_{x_i}$ e $\varphi_i := \varphi_{x_i}$. Podemos ainda admitir que $I = 0, 1, ..., s$ com $x_0 \in W_0$ e $x_0 \notin W_i$ para $i \neq 0$. Para esta cobertura consideremos a família $\mathcal{U}$ construída como anteriormente ($U_i \subset W_i$) e os espaços de Hilbert a ela associados. Vamos ainda considerar em W_0 a carta $\varphi := \varphi_0 - \varphi_0(x_0)$ que satisfaz $\varphi(x_0) = 0$.

Para $\nu \in \mathbb{N}$, vamos definir os elementos $\xi_\nu := (f_{ij}^{(\nu)})_{i,j\in I}$, onde

$$\begin{array}{ll} f_{ij}^{(\nu)} = 0 & \text{se} \quad i, j \neq 0 \\ f_{00}^{(\nu)} = 0 & \\ f_{0j}^{(\nu)} = -f_{j0}^{(\nu)} = \varphi^{-\nu} & \text{se} \quad j \neq 0 \end{array}.$$

A função $\varphi^{-\nu}$ está definida e é contínua em $W_0 \cap W_j$, uma vez que $x_0 \notin W_j$, para $j \neq 0$. Logo $\varphi^{-\nu}$ é limitada em $U_0 \cap U_j$ (pois $U_0 \cap U_j$ é relativamente compacto em $W_0 \cap W_j$). Temos então que todas as funções f_{ij} são de quadrado integrável em $U_i \cap U_j$ e satisfazem a relação cocíclica, $f_{ij} = f_{ik} + f_{kj}, \forall i, j, k \in I$. Ou seja, acabámos de definir elementos $\xi_\nu \in Z^1(\mathcal{U})$.

Pelo teorema de finitude (teorema 1.77), estes elementos ξ_ν, para $\nu \in \mathbb{N}$, são linearmente dependentes no espaço quociente $\frac{Z^1(\mathcal{U})}{Im(\delta_0)}$, uma vez que a imagem de δ_0 tem codimensão finita em $Z^1(\mathcal{U})$. Ou seja, existem $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{C}$, não todos nulos, tais que $\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \xi_\nu$ é nulo no espaço quociente. Portanto, esta soma é a imagem por δ_0 de algum elemento $(h_i)_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U})$.

Vamos agora definir uma função $f : X \setminus \{x_0\} \to \mathbb{C}$ por

$$f(x) = \begin{cases} h_j(x) & \text{se} \quad x \in U_j, j \neq 0 \\ h_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \varphi^{-\nu} & \text{se} \quad x \in U_0. \end{cases}$$

Para verificarmos que esta função está bem definida, notemos, a partir da definição da função cobordo δ_0, que $\delta_0((h_i)_{i\in I}) = (h_j - h_i)_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \xi_\nu$, pelo que em $U_i \cap U_j$, para $i \neq j$, temos

$$h_j - h_i = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu f_{ij}^{(\nu)} = 0.$$

Em $U_0 \cap U_j$,

$$h_j - h_0 = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu f_{0j}^{-\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \varphi^{-\nu},$$

pelo que $h_j = h_0 + \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \varphi^{-\nu}$.

Para $x \in U_j$, com $j \neq 0$, temos que $f(x) = h_j(x) \in H^2(U_j)$ e, para $x \in U_0$, temos que $f(x) = h_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \varphi(x)^{-\nu}$, pelo que se $x \neq x_0$ então $\varphi(x) \neq 0$ e f é holomorfa em x. Se $x = x_0$, então $\varphi(x) = 0$ e f tem um pólo em x_0. Obtemos, assim, uma função holomorfa em $X \setminus \{x_0\}$ com um pólo em x_0, como pretendido. □

Teorema 1.79 (de Existência de Riemann). *Seja X uma superfície de Riemann compacta. Para quaisquer pontos distintos $x_1, \ldots, x_n$ de X e quaisquer números complexos $c_1, \ldots, c_n$ existe uma função meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ com $f(x_i) = c_i$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ pontos distintos de X e $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Pelo teorema (1.78), para cada $i = 1, \ldots, n$, existe uma função meromorfa $f^{(i)}$ em X que tem um pólo em x_i e é holomorfa em $X \setminus \{x_i\}$. Escolhendo constantes λ_{ij} tais que $f^{(i)}(x_k) \neq f^{(i)}(x_j) + \lambda_{ij}$ para todo $k = 1, \ldots, n$, podemos definir funções

$$g^{(ij)} := \frac{f^{(i)} - f^{(i)}(x_j)}{f^{(i)} - f^{(i)}(x_j) + \lambda_{ij}}$$

para $i, j = 1, \ldots, n$ e $i \neq j$, que são holomorfas nos pontos x_k, para $k \neq i$ (pela escolha de λ_{ij} e uma vez que as funções $f^{(i)}$ são holomorfas em $X \setminus \{x_i\}$). Notemos, em particular, que $g^{(ij)}(x_j) = 0$.

Seja $\mathbb{D}$ o disco unitário de $\mathbb{C}$. Como $f^{(i)}$ é meromorfa em X com um pólo em x_i, escolhendo uma vizinhança W_i de x_i e uma carta $\varphi_i : W_i \to \mathbb{D}$ tal que $\varphi_i(x_i) = 0$, sabemos que para $x \in W_i$, $f^{(i)}(x) = m_i(\varphi_i(x))$, onde m_i é uma função meromorfa em $\mathbb{D}$, com um pólo em 0 de uma certa ordem m, ou seja, podemos, para $z \in \mathbb{D}$, escrever m_i na forma

$$m_i(z) = \frac{k_{m,i}}{z^m} + \ldots + \frac{k_{1,i}}{z} + p(z)$$

para uma função p holomorfa em $\mathbb{D}$.

Obtemos então, para $x \in W_i$,

$$g^{(ij)}(x) = \frac{\frac{k_{m,i}}{(\varphi_i(x))^m} + ... + \frac{k_{1,i}}{\varphi_i(x)} + p(\varphi_i(x)) - f^i(x_j)}{\frac{k_{m,i}}{(\varphi_i(x))^m} + ... + \frac{k_{1,i}}{\varphi_i(x)} + p(\varphi_i(x)) - (f^i)(x_j) + \lambda_{ij}}$$

$$= \frac{k_{m,i} + ... + k_{1,i}(\varphi_i(x))^{m-1} + p(\varphi_i(x))(\varphi_i(x))^m - f^i(x_j)(\varphi_i(x))^m}{k_{m,i} + ... + k_{1,i}(\varphi_i(x))^{m-1} + p(\varphi_i(x))(\varphi_i(x))^m - (f^i)(x_j)(\varphi_i(x))^m + \lambda_{ij}(\varphi_i(x))^m}.$$

Como $\varphi_i(x_i) = 0$, obtemos

$$g^{(ij)}(x_i) = \frac{k_{m,i}}{k_{m,i}} = 1$$

pelo que $g^{(ij)}$ é também holomorfa em x_i.

Definindo

$$h^{(i)} = \prod_{j \neq i} g^{ij}$$

vemos que $h^{(i)}(x_i) = \prod_{j\neq i} g^{ij}(x_i) = 1$ e $h^{(i)}(x_j) = \prod_{j \neq i} g^{ij}(x_j) = 0$. Resulta então que a função $f := \sum_{i=1}^n c_i h^{(i)}$ satisfaz $f(x_i) = c_i$, para todo $i = 1, ..., n$, tal como desejado. □

Teorema 1.80. *Seja X uma superfície de Riemann compacta e $f \in \mathcal{M}(X)$ uma função meromorfa não constante. Então $\mathcal{M}(X)$ é uma extensão algébrica finita de $\mathbb{C}(f)$.*

Demonstração. Seja f uma função meromorfa não constante em X. Vamos considerar $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ como função holomorfa, em que os seus pólos são enviados em ∞. Seja $C \subset X$ o conjunto dos pontos críticos desta função (pontos onde f não é localmente um homeomorfismo) e seja $B = f(C) \subset \hat{\mathbb{C}}$. B e C são finitos e seja $A = f^{-1}(B)$. Então $f : X \setminus A \to \hat{\mathbb{C}} \setminus B$ é um revestimento de grau n finito.

Seja $g \in \mathcal{M}(X)$. Pretendemos mostrar que existem funções meromorfas $a_1, ..., a_n$ em $\hat{\mathbb{C}}$ tal que

$$(g(x))^n + a_1(f(x))(g(x))^{n-1} + ... + a_n(f(x)) = 0.$$

Seja S o conjunto dos pólos de g. Em $\hat{\mathbb{C}} \setminus (B \cup f(S))$, vamos definir aplicações $a_\nu(z) := p_\nu(g(x_1), ..., g(x_n))$, onde cada p_ν é o ν-ésimo polinómio simétrico elementar e $\{x_1, ..., x_n\} = f^{-1}(z)$. Pela definição de polinómios simétricos elementares (quando aplicados a $\rho_1, ..., \rho_n$ são os coeficientes do polinómio de grau n cujas raízes são $\rho_1, ..., \rho_n$), obtemos

$$(g(x))^n + a_1(f(x))(g(x))^{n-1} + ... + a_n(f(x)) = 0,$$

para $x \in X \setminus (A \cup f^{-1}(f(S))$. Logo, apenas temos que mostrar que cada a_ν se prolonga meromorficamente a $\hat{\mathbb{C}}$.

Seja $b \in B \cup f(S)$ e seja V uma vizinhança de b tal que os únicos pólos de g em $f^{-1}(V)$ estejam em $f^{-1}(b)$ e tal que exista uma função holomorfa não nula ω em V com $\omega(b) = 0$. Então existe um inteiro $N > 0$ tal que $(\omega \circ f)^N g$ é holomorfa em $f^{-1}(V)$. Se W é um aberto estritamente contido em V, então $(\omega \circ f)^N g$ é limitada em $f^{-1}(W)$. E, portanto, as funções elementares simétricas $b_\nu(z) = p_\nu((\omega \circ f)^N g(x_1), ..., (\omega \circ f)^N g(x_n))$, para $z \in W \setminus \{b\}$ e

$\{x_1, ..., x_n\} = f^{-1}(z)$, são limitadas. Logo, prolongam-se holomorficamente a b. Mas $a_\nu(z) = \frac{b_\nu(z)}{(\omega(z))^{\nu N}}$, pelo que a_ν tem no máximo um pólo em b.

Como qualquer função meromorfa em $\hat{\mathbb{C}}$ é racional, mostrámos que qualquer $g \in \mathcal{M}(X)$ é algébrica sobre $\mathbb{C}(f)$ com grau $\leq n$.

Vamos escolher uma função $g_0 \in \mathcal{M}(X)$ tal que o grau $|\mathbb{C}(f, g_0) : \mathbb{C}(f)|$ é máximo. Então $\mathbb{C}(f, g_0) = \mathcal{M}(X)$. De facto, se $h \in \mathcal{M}(X)$ e $h \notin \mathbb{C}(f, g_0)$, então, como $\mathbb{C}(f)$ tem característica 0, o corpo $\mathbb{C}(f)(g_0, h)$ coincide com $\mathbb{C}(f)(g)$ para algum $g \in \mathcal{M}(X)$. Mas então o grau $|\mathbb{C}(f)(g) : \mathbb{C}(f)| = |\mathbb{C}(f)(g_0, h) : \mathbb{C}(f)|$ é maior do que $|\mathbb{C}(f, g_0) : \mathbb{C}(f)|$, o que resulta numa contradição. $\square$

Como $\mathbb{C}(f)$ é isomorfo a $\mathbb{C}(z)$, temos então que o corpo $\mathcal{M}(X)$ é uma extensão algébrica finita do corpo das funções racionais.

Capítulo 2

Revestimentos de Galois da esfera de Riemann perfurada

Neste capítulo, iremos começar por apresentar alguns resultados introdutórios que nos permitem descrever o comportamento de um revestimento de um disco aberto perfurado $\mathbb{D}^* \subseteq \mathbb{C}$. Passaremos depois a considerar revestimentos da esfera de Riemann perfurada, i.e., revestimentos da forma $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$, onde P é um conjunto finito de pontos de $\mathbb{P}^1$. Demonstrada a correspondência biunívoca entre componentes conexas $f^{-1}(D^*(p,r))$ (onde $D^*(p,r)$ é um disco aberto centrado em p de raio $r > 0$) de diferentes raios r, iremos acrescentar ao espaço X os chamados pontos ideais, construindo assim, um espaço compacto $\bar{X}$ e uma nova aplicação contínua (única) $f : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$. Esta aplicação é um revestimento ramificado - uma aplicação sobrejectiva própria com pontos que não possuem vizinhanças onde f seja injectiva e fora dos quais a aplicação é um revestimento.

Na secção (2.2), demonstraremos que $\bar{X}$ é uma superfície de Riemann compacta (quando X é conexo) e que $\bar{f}$ é holomorfa. Em particular, no final desta secção, iremos construir uma superfície de Riemann compacta a partir de um polinómio irredutível $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$.

No estudo dos revestimentos $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$, vamos ainda demonstrar que os geradores dos subgrupos estabilizadores de cada componente conexa de $f^{-1}(D^*(p,r))$ formam uma única classe de conjugação de $Aut(f)$, quando f é um revestimento de Galois. Este resultado vai-nos permitir definir, na secção (2.3), o tipo de ramificação de um revestimento de Galois finito da esfera de Riemann perfurada e apresentar uma versão topológica do teorema de existência de Riemann. Por último, vamos introduzir os espaços de moduli dos revestimentos de Galois finitos da esfera de Riemann perfurada.

2.1 Revestimentos da esfera perfurada

Vamos usar a notação $\mathbb{D}(r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| < r\}$, com $r > 0$, para um disco de $\mathbb{P}^1$ centrado em 0. Notamos por $\mathbb{D}^*(r)$ o disco perfurado $\mathbb{D}(r) \setminus \{0\}$. Vamos escrever apenas $\mathbb{D}$ para notar $\mathbb{D}(1)$.

Notemos que, sendo $f : X \to Y$ um revestimento com $Y \subset \mathbb{P}^1$, então, pelas propriedades elementares sobre revestimentos, X é uma variedade topológica.

Exemplo 2.1. Consideremos o semi-plano de Poincaré $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$. A aplicação $f_\infty : \mathbb{H} \to \mathbb{D}^*, z \mapsto \exp(iz)$ é um revestimento de Galois de grau infinito. Consideremos aplicações $\alpha_m : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definidas por $\alpha_m(z) = z + 2m\pi$, para $m \in \mathbb{Z}$. Sabemos que $\exp(iz) = \exp(iz')$ se e somente se $z' = \alpha_m(z)$. Para $x_0 \in \mathbb{H}$ e $y_0 := f_\infty(x_0)$, seja U um disco aberto centrado em x_0, com raio < 1, e tal que $U \subset \mathbb{H}$. Os discos $\alpha_m(U)$, $m \in \mathbb{Z}$, são disjuntos 2 a 2. Temos ainda que $V := f_\infty(U)$ é aberto em $\mathbb{D}^*$ e que f_∞ restringe a um homeomorfismo de $\alpha_m(U)$ em V para cada m. Como $f_\infty^{-1}(V) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_m(U)$, resulta que V é admissível para f_∞, o que mostra que f_∞ é um revestimento.

Cada α_m é claramente um automorfismo do revestimento f_∞ e o subgrupo formado por estas aplicações age transitivamente em cada fibra $f_\infty^{-1}(y_0)$, para $y_0 \in \mathbb{D}^*$. Logo, pelo lema (1.40), f_∞ é um revestimento de Galois e $Aut(f_\infty) = \{\alpha_m : m \in \mathbb{Z}\}$. Temos então que o grupo $Aut(f_\infty)$ é infinito cíclico, i.e., é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Proposição 2.2. *Seja $y_0 \in \mathbb{D}^*$. O grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{D}^*, y_0)$ é infinito cíclico, gerado pela classe do lacete $\delta : [0,1] \to \mathbb{D}^*$, $t \mapsto y_0 \exp(2\pi i t)$.*

Demonstração. Vamos considerar o revestimento de Galois f_∞ apresentado anteriormente e, para $x_0 \in f_\infty^{-1}(y_0)$, a aplicação $\Phi_{x_0} : \pi_1(\mathbb{D}^*, y_0) \to Aut(f)$ que a cada classe $[\gamma]$ faz corresponder o automorfismo que envia $[\gamma]x_0 \mapsto x_0$. Pelo lema (1.45), esta aplicação é um homomorfismo sobrejectivo.

Vamos agora ver que é injectiva. Se $[\gamma]$ pertence ao núcleo de Φ_{x_0} então o levantamento de γ em x_0 é um lacete $\tilde{\gamma}$ com base em x_0. Como $\mathbb{H}$ é simplesmente conexo, qualquer lacete com base num ponto x é homotópico ao caminho constante igual a x. Existe, portanto uma homotopia H entre $\tilde{\gamma}$ e o caminho constante igual a x_0. Então $f_\infty(H)$ é uma homotopia em $\mathbb{D}$ entre γ e o caminho constante igual a p. Logo $[\gamma] = 1$.

Seja $\tilde{\delta}$ um caminho em $\mathbb{H}$ definido por $\tilde{\delta}(t) := x_0 + 2\pi t$, para $t \in [0,1]$. Então $f_\infty(\tilde{\delta}) = \delta$. Logo $[\delta]x_0 = \tilde{\delta}(1) = x_0 + 2\pi$. Então Φ_{x_0} envia $[\delta]$ no automorfismo $\alpha_{-1} : z \mapsto z - 2\pi$. Como α_{-1} é claramente um gerador do grupo infinitamente cíclico $Aut(f_\infty) = \{\alpha_m : m \in \mathbb{Z}\}$, obtemos o pretendido. □

Exemplo 2.3. A aplicação $f_n : \mathbb{D}^*(r^{1/n}) \to \mathbb{D}^*(r)$, $z \mapsto z^n$ é um revestimento de Galois de grau n. Sendo ξ uma raiz primitiva de ordem n da unidade, então, para um disco aberto U centrado num ponto x_0 de $\mathbb{D}^*(r^{1/n})$ suficientemente pequeno temos que os discos $U_i := \xi^i U$, $i = 0, ..., n-1$, são disjuntos 2 a 2 (com aderências disjuntas). Então $V := f_n(U)$ é uma vizinhança aberta de $f_n(x_0)$ e f_n envia cada U_i homeomorficamente sobre V.

As aplicações $\alpha_{\xi^i} : z \mapsto \xi^i z$ satisfazem $f_n \circ \alpha_{\xi^i} = f_n$ e formam um subgrupo de $Aut(f_n)$. Este subgrupo age transitivamente sobre cada fibra $f_n^{-1}(y_0)$, para $y_0 \in \mathbb{D}^*(r)$, pois para quaisquer dois pontos x e x' desta fibra, temos que $x^n = y_0 = (x')^n$, o que implica que $x' = \xi^i x$ para algum $i = 0, ..., n-1$. Concluímos então, pelo lema (1.40), que $Aut(f_n) = \{\alpha_{\xi^i} : i = 0, ..., n-1\}$ e, portanto, o grupo $Aut(f_n)$ é cíclico e gerado por α_ξ.

Proposição 2.4. *Seja $f_W : W \to \mathbb{D}^*(r)$ um revestimento finito de grau n com W conexo. Então f_W é equivalente ao revestimento $f_n : \mathbb{D}^*(r^{1/n}) \to \mathbb{D}^*(r)$, $z \mapsto z^n$, ou seja, existe um homeomorfismo $\varphi : W \to \mathbb{D}^*(r^{1/n})$ tal que $(\varphi(x))^n = f_W(x)$, para todo o $x \in W$. Este homeomorfismo é único a menos do produto por uma raiz ξ de ordem n da unidade.*

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "f_W"] \\ \mathbb{D}^*(r^{1/n}) \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{D}^*(r) \end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $x \in W$ e $y_0 = f_W(x)$. O grupo $G := \pi_1(\mathbb{D}^*(r), y_0)$ age transitivamente em $f_W^{-1}(y_0)$, uma vez que $\mathbb{D}^*(r)$ é conexo. Como a fibra $f_W^{-1}(y_0)$ tem cardinalidade n, o estabilizador de x, $G_x = \{[\gamma] \in G : [\gamma]x = x\}$, é um subgrupo de G de índice n. Considerando agora o revestimento f_n, observamos que também o estabilizador $G_{x'}$ de um elemento x' de $\mathbb{D}^*(r^{1/n})$ pertencente à fibra $f_n^{-1}(y_0)$ é um subgrupo de índice n de G. Sendo $\mathbb{D}^*(r)$ homeomorfo ao disco unitário $\mathbb{D}^*$, sabemos pela proposição (2.2), que $G = \pi_1(\mathbb{D}^*(r), y_0)$ é um grupo cíclico infinito, logo G tem apenas um subgrupo de cada índice. Logo $G_x = G_{x'}$. Temos então, pela proposição (1.47), que existe um homeomorfismo $\varphi : W \to \mathbb{D}^*(r^{1/n})$ tal que $f_n \circ \varphi = f_W$.

Seja agora φ' um outro homeomorfismo entre W e $\mathbb{D}^*(r^{1/n})$ distinto de φ. Então $\alpha := \varphi'\varphi^{-1}$ é um automorfismo de f_n, pelo que é da forma $z \mapsto \xi z$, para uma raiz ξ de ordem n de 1. Logo $\varphi' = \xi\varphi$. $\square$

Corolário 2.5. *Seja $f_W : W \to \mathbb{D}^*(r)$ um revestimento finito de grau n com W conexo.*

(a) *O grupo $Aut(f_W)$ é cíclico de ordem n e tem um único elemento σ_W que satisfaz: para cada homeomorfismo $\varphi : W \to \mathbb{D}(r^{1/n})$ tal que $f_n \circ \varphi = f_W$, então $\varphi \circ \sigma_W^{-1} = \xi_n\varphi$, onde $\xi_n = exp(\frac{2\pi i}{n})$. Este elemento σ_W é gerador de $Aut(f_W)$ e vamos designá-lo por gerador distinguido de $Aut(f_W)$.*

(b) *Seja $x_0 \in W$ e $y_0 = f(x_0)$. Então o caminho $\gamma(t) := y_0 \exp(2\pi i t)$, $t \in [0,1]$, é um lacete em $\mathbb{D}(r)$ com base em y_0 e o seu levantamento por f_W com ponto inicial $\sigma(x_0)$ tem ponto final x_0.*

Demonstração. (a) Consideremos a aplicação $\varphi^* : Aut(f_W) \to Aut(f_n)$, $\beta \mapsto \varphi \circ \beta \circ \varphi^{-1}$. Para $\beta \in Aut(f_W)$ (logo $f_W \circ \beta = f_W$), então $\varphi^*(\beta)$ é um homeomorfismo que satisfaz $f_n(\varphi^*(\beta)) = f_n \circ (\varphi \circ \beta \circ \varphi^{-1}) = f_W \circ \beta \circ \varphi^{-1} = f_W \circ \varphi^{-1} = f_n$. Considerando também a sua aplicação inversa, $\beta' \mapsto \varphi^{-1} \circ \beta' \circ \varphi$, concluímos que esta aplicação é um isomorfismo, pelo que $Aut(f_W)$ é cíclico de ordem n. Este isomorfismo não depende da escolha de φ, pois se $\varphi' \neq \varphi$, para $\alpha := \varphi'\varphi^{-1}$, temos que $\varphi' \circ \beta \circ (\varphi')^{-1} = \alpha \circ (\varphi \circ \beta \circ \varphi^{-1}) \circ \alpha^{-1} = \varphi \circ \beta \circ \varphi^{-1}$ (notemos que $Aut(f_n)$ é abeliano pois, como $\xi^i \xi^j z = \xi^j \xi^i z$, então $\alpha_{\xi^i}\alpha_{\xi^j} = \alpha_{\xi^j}\alpha_{\xi^i}$).

A multiplicação por ξ_n^{-1} é um gerador de $Aut(f_n) = \{\alpha_\xi : z \mapsto \xi z, \quad \xi \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \xi^n = 1\}$. Seja σ_W a imagem (única) por $(\varphi^*)^{-1}$ deste gerador. Então $\varphi \circ \sigma_W^{-1} = \xi_n\varphi$.

(b) Seja $x_0' := \varphi(\sigma_W(x_0))$ um ponto de $\mathbb{D}^*(r^{1/n})$. Então x_0' está na fibra $f_n^{-1}(y_0)$. Vamos definir em $\mathbb{D}^*(r^{1/n})$ o caminho $\tilde{\gamma} := x_0' \exp(\frac{2\pi i t}{n})$, $t \in [0,1]$. Então $f_n(\tilde{\gamma})$ é um lacete γ em $\mathbb{D}^*(r)$ e $\tilde{\gamma}$ é o levantamento de γ por f_n com ponto inicial x_0'. Logo $\varphi^{-1}(\tilde{\gamma})$ é o levantamento de γ por f com ponto inicial $\sigma_W(x_0)$. O seu ponto final é $\varphi^{-1}(\tilde{\gamma}(1)) = \varphi^{-1}(x_0' \exp(\frac{2\pi i}{n})) = \varphi^{-1}(\xi_n x_0') = \varphi^{-1}(\xi_n \varphi(\sigma(x_0))) = \varphi^{-1}(\varphi \circ \sigma^{-1}(\sigma(x_0))) = x_0$. $\square$

Corolário 2.6. *Para $0 < \hat{r} \leq r$, seja $\hat{W} := f_W^{-1}(\mathbb{D}^*(\hat{r}))$ e $f_{\hat{W}} := f_W|_{\hat{W}}$. Então $\hat{W}$ é conexo e $f_{\hat{W}} : \hat{W} \to \mathbb{D}^*(\hat{r})$ é um revestimento de grau n. O gerador distinguindo de $Aut(f_{\hat{W}})$ é a restrição a $\mathbb{D}^*(\hat{r})$ do gerador de $Aut(f_W)$.*

Demonstração. $\hat{W}$ é definido como sendo o conjunto das fibras $f_W^{-1}(y_0)$, para y_0 em $\mathbb{D}^*(\hat{r})$. Como W é conexo, para quaisquer dois pontos x e x' de $\hat{W} \subseteq W$, sabemos que existe um caminho $\tilde{\delta}$ que une estes pontos. E podemos escolher um caminho de modo a sua imagem δ por f esteja contida em $\mathbb{D}^*(\hat{r})$, unindo as imagens $f(x)$ e $f(x')$ destes pontos. Então $\tilde{\delta}$ é um caminho contido em $\hat{W}$, o que mostra que também $\hat{W}$ é conexo. Pela alínea a) do teorema (1.39), podemos definir uma bijecção entre quaisquer duas fibras , logo a restrição de f_W a $\hat{W}$ é um revestimento do mesmo grau.

Seja $\psi : Aut(f_W) \to Aut(f_{\hat{W}})$ o homomorfismo obtido por restringirmos cada automorfismo do revestimento f_W a $\hat{W}$. Notemos que ψ é injectivo, uma vez que se $\alpha|_{\hat{W}} = \beta|_{\hat{W}}$, então como $(\alpha^{-1}\beta)|_{\hat{W}} = Id|_{\hat{W}}$, pelo lema (1.40), concluímos que $\alpha = \beta$ em W. Como $|Aut(f_W)| = |Aut(f_{\hat{W}})| = n$, ψ é isomorfismo. Então o gerador distinguido $\sigma_{\hat{W}}$ de $Aut(f_{\hat{W}})$ coincide com $\psi(\sigma_W) = \psi((\varphi^*)^{-1}(\alpha_{\xi_n}))$ (notemos que o automorfismo α_{ξ_n} gerador de $Aut(f_n)$, não depende do raio r do disco $\mathbb{D}^*(r)$). $\square$

Vamos agora descrever o comportamento dum revestimento de $\mathbb{P}^1 \setminus P$ nas vizinhanças perfuradas dos pontos excluídos.

Para $p \in \mathbb{P}^1$, vamos definir os discos abertos $D(p,r)$ por:

$$D(p,r) := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : |z-p| < r\} & \text{se} \quad p \in \mathbb{C} \\ \{z \in \mathbb{C} : |z| > r^{-1}\} \cup \{\infty\} & \text{se} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Proposição 2.7. *Seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento. Fixemos $p \in P$.*

(a) *Seja $D(p,r)$ um disco centrado em p que não contém outro elemento de P, ou seja, $D^* := D(p,r) \setminus \{p\} \subset \mathbb{P}^1 \setminus P$. Seja $\tau_p : D^* \to \mathbb{D}^*(r)$ o homeomorfismo definido por $\tau_p(z) = z - p$ se $p \neq \infty$ e por $\tau_p(z) = 1/z$ se $p = \infty$.*

Então, para cada componente conexa W de $f^{-1}(D^*)$, a aplicação $f_W := \tau_p \circ f|_W$ é um revestimento $f_W : W \to \mathbb{D}^*(r)$ de grau inferior ou igual ao grau de f. Dizemos que W é uma componente circular de raio r sobre p.

(b) *Sejam* $0 < \hat{r} < r$. *Então existe uma bijecção entre as componentes circulares de raio* r *e as componentes circulares de raio* $\hat{r}$ *sobre* p. *Se* $\hat{W} \subset W$ *então* $f_{\hat{W}}$ *é a restrição a* $\hat{W}$ *de* f_W *e* $\hat{W} = f_W^{-1}(\mathbb{D}^*(\hat{r}))$.

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f_W"'] \arrow[d, "f|_W"] \\ \mathbb{D}^*(r) & D^*(p,r) \arrow[l, "\tau_p"] \end{tikzcd}$$

Demonstração. (a) Como D^* é um aberto de $\mathbb{P}^1 \setminus P$, f restringe a um revestimento de $f^{-1}(D^*) \to D^*$. Compondo este revestimento com o homeomorfismo τ_p, obtemos um novo revestimento $f^{-1}(D^*) \to \mathbb{D}(r)$ que, como W é uma componente circular de $f^{-1}(D^*)$, se restringe a um revestimento $f_W : W \to \mathbb{D}(r)$.

(b) Consideremos a aplicação ρ que a cada componente circular W de raio r faz corresponder uma componente circular $\hat{W}$ de raio $\hat{r}$ contida em W. Vejamos que esta aplicação está bem definida e é injectiva. Dada uma componente circular W de raio r, seja $\hat{W} := f_W^{-1}(\mathbb{D}^*(\hat{r}))$. Pelo corolário anterior, $\hat{W}$ é conexo. Fazendo $\hat{X} := f^{-1}(D(p,\hat{r}) \setminus \{p\})$, temos que $\hat{W} = W \cap \hat{X}$ é aberto e fechado em $\hat{X}$, logo é uma componente conexa de $\hat{X}$. Portanto, $\hat{W}$ é uma componente circular de raio $\hat{r}$ contida em W. Suponhamos agora que $\tilde{W} \subset W$ é outra componente circular de raio $\hat{r}$. Então $f_{\tilde{W}} = f_W|_{\hat{X}}$. Como $\tilde{W} \subset \hat{X}$, então $\tilde{W} \subseteq W \cap \hat{X} = \hat{W}$. Mas então $\tilde{W} = \hat{W}$, uma vez que são ambas componentes conexas de $\hat{X}$, pelo que concluímos que W contém exactamente uma componente circular de raio $\hat{r}$.

Como cada componente circular de raio $\hat{r}$ está contida em $f^{-1}(D^*)$, está contida em exactamente uma das componentes conexas W de $f^{-1}(D^*)$. Logo, a aplicação ρ é bijectiva.
□

Definição 2.8. **(a)** Seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento. Dizemos que $r > 0$ é *suficientemente pequeno* se $D(p,r) \cap P = \{p\}$ para todo o ponto p de P.

(b) Fixando um ponto p de P, pela alínea (b) da proposição anterior, podemos definir uma relação de equivalência entre as componentes circulares W de raio suficientemente pequeno sobre p, sendo $\hat{W} \equiv W$ se $\hat{W} \subset W$ ou se $W \subset \hat{W}$. Designamos as classes de equivalência desta relação por *pontos ideais* de X sobre p. Notamos por π cada ponto ideal de X.

Observação 2.9. **(1)** Fixando um raio r suficientemente pequeno, cada ponto ideal π sobre p é representado por exactamente uma componente circular de raio r. Logo o número de pontos ideais sobre um ponto p coincide com o número de componentes conexas de $f^{-1}(D^*(p,r))$, pelo que número de pontos ideais é inferior ou igual ao grau do revestimento f.

(2) Se f for um revestimento de Galois, então $Aut(f)$ permuta transitivamente estas componentes.

Intuitivamente, estes pontos ideais correspondem aos centros em falta destas componentes. Vamos agora acrescentar esses centros a X.

Proposição 2.10. *Seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento.*

(a) *Seja $\bar{X}$ a união (disjunta) de X com todos os pontos ideais que estão sobre os pontos de P. Definimos que um conjunto U de $\bar{X}$ é aberto se $U \cap X$ é um aberto de X e se, para cada ponto ideal π de U, existir uma componente $W \in \pi$ tal que $W \subset U$. Estes abertos formam a base de uma topologia que torna $\bar{X}$ num espaço topológico Hausdorff. O revestimento f prolonga-se a uma única aplicação contínua e sobrejectiva $\bar{f} : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ com $\bar{f}(\pi) = p$ para cada ponto ideal π sobre p. Cada homeomorfismo α de $Aut(f)$ prolonga-se de forma única a um homeomorfismo $\bar{\alpha} : \bar{X} \to \bar{X}$ com $\bar{f} \circ \bar{\alpha} = \bar{f}$.*

(b) *Se X for conexo então $\bar{X}$ é conexo*

(c) *Se f for um revestimento finito então $\bar{X}$ é compacto.*

Demonstração. (a) Comecemos por verificar que estes abertos formam, de facto, uma base de topologia. Dados dois abertos U e U' desta forma, então $(U \cap U') \cap X$ é a intersecção dos abertos $U \cap X$ e $U' \cap X$. Para um ponto ideal $\pi \in U \cap U'$, como $\pi \in U$, existe uma componente circular $W \in \pi$ tal que $W \subset U$, e, como $\pi \in U'$, existe uma componente circular $W' \in \pi$ tal que $W' \subset U'$. Como, ou $W \subseteq W'$ ou $W' \subseteq W$, temos que $W \cap W'$ é uma componente circular de π e $W \cap W' \subset (U \cap U')$, o que mostra que $U \cap U'$ é um aberto. Dada uma família $(U_j)_{j \in J}$ de abertos desta forma, então $\cup_{j\in J} U_j$ é um aberto, uma vez que $(\cup_{j\in J} U_j) \cap X = \cup_{j \in J}(U_j \cap X)$ é um aberto de X, e, para $\pi \in \cup_{j\in J} U_i$, existe U_j tal que $\pi \in U_j$, e então existe $W \in \pi$ tal que $W \subset U_j \subset \cup_{j\in J}(U_j)$. Temos portanto que $\bar{X}$ é um espaço topológico e, é claro, que a topologia induzida em X coincide com a topologia original de X. Notemos que, dado um ponto ideal π, para cada componente circular $W \in \pi$, o conjunto $W \cup \pi$ é uma vizinhança aberta de π, e que cada vizinhança aberta de π contém um aberto desta forma.

É claro, pela definição, que $\bar{f}$ é sobrejectiva, uma vez que para cada $p \in P$, cada componente circular de $\bar{f}^{-1}(D^*(p, r))$ define um ponto ideal π sobre p.

Para $p \in P$, sejam $(\pi_j)_{j \in J_\pi}$ os pontos ideais sobre p. Então, para cada $j \in J_\pi$ e para r suficientemente pequeno, existe exactamente uma componente conexa $W_j \in \pi_j$ de raio r e

$$\bar{f}^{-1}(D^*(p, r)) = \bigcup_{j=1}^{s} (W_j \cup \{\pi_j\}). \tag{2.1}$$

Vejamos que $\bar{f}$ é contínua. Como f é contínua e a topologia induzida em X coincide com a topologia original de X, é suficiente que, para cada $p \in P$ e para cada r suficientemente pequeno, o conjunto $\bar{f}^{-1}(D^*(p, r))$ seja aberto. O que resulta de (2.1).

Seja $\alpha \in Aut(f)$. Para cada $p \in P$, o homeomorfismo α permuta componentes conexas W_j de (2.1). Definindo $\bar{\alpha}(\pi_j) = \pi_k$ se $\alpha(W_j) = W_k$, prolongamos α a uma bijecção $\bar{\alpha} : \bar{X} \to \bar{X}$ com $\bar{f} \circ \bar{\alpha} = \bar{f}$. Como α é contínua e como $\bar{\alpha}$ permuta vizinhanças da forma $W_j \cup \pi_j$, concluímos que $\bar{\alpha}$ é, de facto, um homeomorfismo.

Como X é denso em $\bar{X}$, os prolongamentos $\bar{f}$ e $\bar{\alpha}$, para cada $\alpha \in Aut(f)$, são únicos.

Vejamos agora que $\bar{X}$ é Hausdorff. Como $\mathbb{P}^1$ é Hausdorff, quaisquer dois pontos de $\bar{X}$ com imagens por $\bar{f}$ distintas podem ser separados por vizinhanças da forma $\bar{f}^{-1}(V)$. Considerando agora os pontos com a mesma imagem por f, como X é Hausdorff, temos apenas que verificar que dois quaisquer pontos ideais π e π' sobre um mesmo ponto p podem ser separados por vizinhanças disjuntas. E, de facto, podemos escolher vizinhanças da forma $W \cup \{\pi\}$ e $W' \cup \{\pi'\}$ para $W \in \pi$ e $W' \in \pi'$.

(b) X é conexo e é denso em $\bar{X}$.

(c) Vamos começar por notar que a topologia definida em $\bar{X}$ admite uma base numerável. Consideremos todas as componentes conexas de $f^{-1}(V)$, para todas as vizinhanças admissíveis para f da forma $V = D(a,r) \subset \mathbb{P}^1 \setminus P$, onde $a \in \mathbb{Q}$ ou $a = \infty$ e $r \in \mathbb{Q}^+$. Consideremos, ainda, todos os conjuntos da forma $W \cup \{\pi\}$, onde π é um ponto ideal e $W \in \pi$ é uma componente circular de raio $r \in \mathbb{Q}^+$. Temos, então, que cada aberto de $\bar{X}$ é uma união de conjuntos desta forma.

Como $\bar{X}$ tem uma base numerável de topologia, basta-nos mostrar que toda a sucessão em $\bar{X}$ admite uma subsucessão convergente, para concluirmos que é compacto. Seja então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em $\bar{X}$. Então $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão no espaço compacto $\mathbb{P}^1$. Logo existe uma subsucessão $(f(a_{n_j}))_{n_j\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto y_0 de $\mathbb{P}^1$.

Suponhamos que $y_0 \in \mathbb{P} \setminus P$ e seja V uma vizinhança admissível de y_0 para f. Então existe j_0 tal que, para $j > j_0$, $f(a_{n_j}) \in V$. Temos que $f^{-1}(V) = \cup_{i=1,\dots,n} U_i$, onde $n = gr(f)$ é finito. Como temos um número finito de abertos U_i, um destes abertos contém um número infinito de a_{n_j}. Seja k tal que o conjunto $\{a_{n_j} : j > j_0 \quad \text{e} \quad a_{n_j} \in U_k\}$ é infinito. Considere-se a sucessão $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ formada por esses elementos. Ora, como, $f : U_k \to V$ é um homeomorfismo, esta sucessão converge para o ponto $a := f^{-1}(y) \cap U_k$.

Suponhamos, agora, que $y_0 = p \in P$ e sejam $\pi_1, \dots, \pi_s$ os pontos ideais sobre p. Queremos mostrar que um dos pontos π_k é o limite da sucessão $(a_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$. Suponhamos que esta sucessão não converge para nenhum destes pontos ideais. Então, cada ponto π_k tem uma vizinhança da forma $W_k \cup \{\pi_k\}$ que não contém pontos da sucessão $(a_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$. Sendo $\hat{r}$ o raio mínimo deste conjunto finito de componentes e tomando para cada ponto ideal a componente circular de raio $\hat{r}$, temos que $f^{-1}(D(p,\hat{r})) = \cup_{j=1}^{m}(\hat{W}_j \cup \{\pi_j\})$. Donde concluímos que $D(p,\hat{r})$ não contém pontos da sucessão $(f(a_{n_j}))_{n_j\in\mathbb{N}}$. Mas esta sucessão converge para p. A contradição resultou de supormos que $(a_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$ não convergia para nenhum dos pontos ideais $\pi_1, \dots, \pi_s$. □

Definição 2.11. Designamos a aplicação $\bar{f}$, construída na proposição anterior, por *revestimento ramificado* associado a f.

2.2 Revestimentos ramificados da esfera de Riemann

Seja P um conjunto finito de pontos de $\mathbb{P}^1$ e seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento. Pelo teorema (1.64), sabemos que X tem uma estrutura de variedade holomorfa de dimensão 1, para a qual f é uma função holomorfa.

Vejamos como podemos obter explicitamente cartas (U, φ) em X. Consideremos abertos V de $\mathbb{P}^1 \setminus P$ que são admissíveis para f e tais que 0 e ∞ não estão simultaneamente contidos em V. Tomemos então, para cada componente U de $f^{-1}(V)$, a aplicação $\varphi = f|_U$ se $\infty \notin V$ ou a aplicação $\varphi = \frac{1}{f|_U}$ se $\infty \in V$.

Consideremos agora o revestimento ramificado $\bar{f} : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ associado a f (proposição (2.10)). Seja π um ponto ideal de X e seja $p = \bar{f}(\pi)$. Para cada componente circular $W \in \pi$, de raio r, vamos considerar o revestimento $f_W = \kappa_p \circ f|_W : W \to \mathbb{D}^*(r)$ de grau finito n, definido na proposição (2.7). Pela proposição (2.4), existe um homeomorfismo $\varphi : W \to \mathbb{D}^*(r^{\frac{1}{n}})$ tal que $\varphi^n = f_W$. Este homeomorfismo prolonga-se a um homeomorfismo φ_π de $U_\pi := W \cup \{\pi\}$ em $\mathbb{D}(r^{\frac{1}{n}})$ que envia π em 0 (notemos que φ_π é contínua em π, uma vez que φ envia vizinhanças da forma $\hat{W} \cup \{\pi\}$ nos abertos $D(0, \hat{r}^{\frac{1}{n}})$).

Construímos assim cartas holomorfas (U_π, φ_π) em torno de cada ponto ideal. Notemos, que estas cartas em conjunto com as cartas (U, φ) de X, formam uma cobertura de $\bar{X}$. Para simplificação, vamos passar a notar $\bar{f}$ apenas por f.

Teorema 2.12. *Seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento finito. Munido da estrutura holomorfa definida pelas cartas (U, φ) e (U_π, φ_π) apresentadas anteriormente, $\bar{X}$ é uma variedade holomorfa de dimensão 1 compacta e a aplicação $f : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ é holomorfa.*

Cada $\alpha \in Aut(f)$ prolonga-se de forma única a um automorfismo holomorfo $\bar{\alpha} : \bar{X} \to \bar{X}$ que satisfaz $f \circ \bar{\alpha} = f$.

Demonstração. Vamos começar por verificar que qualquer carta (U_π, φ_π) é compatível com uma carta da forma (U, φ). Pela definição da carta φ_π, temos que $\varphi_\pi^n = f_W = \kappa_p \circ f$ em $U \cap U_\pi$, para $p = f(\pi)$ e $U_\pi = W \cup \{\pi\}$, logo, $\varphi_\pi^{-1}(z) = f^{-1}|_{U \cap U_\pi}(\kappa_p(z^n))$. Então a aplicação $\varphi\varphi_\pi^{-1} : \varphi_\pi(U \cap U_\pi) \to \varphi(U \cap U_\pi)$ é a função $z \mapsto \kappa_p^{-1}(z^n)$ se $\infty \notin f(U)$ ou a função $z \mapsto \frac{1}{\kappa_p^{-1}(z^n)}$ se $\infty \in f(U)$. Esta função é holomorfa com derivada não nula (notemos que $0 \notin \varphi_\pi(U \cap U_\pi)$ pois $\pi \notin (U \cap U_\pi)$ e é um homeomorfismo, uma vez que φ e φ_π são homeomorfismos, logo é biholomorfa.

Vamos agora verificar que quaisquer duas cartas (U_π, φ_π) e $(U'_{\pi'}, \varphi'_{\pi'})$ são compatíveis. Se $\pi \neq \pi'$ então $U_\pi \cap U'_{\pi'}$ ou é vazio ou é coberto por abertos que não contêm pontos ideais, ou seja, por cartas (U, φ) definidas em X. Se $\pi = \pi'$, como $U_\pi = W \cup \{\pi\}$ e $U'_\pi = W' \cup \{\pi\}$ com $W, W' \in \pi$, estas componentes circulares satisfazem $W \subset W'$ ou $W \subset W'$. Suponhamos que $W \subset W'$ e seja r o raio da componente W. Então, pela proposição (2.4), a aplicação $\varphi'_\pi \varphi_\pi^{-1} : D(0, r^{1/n}) \to D(0, r^{1/n})$ é a multiplicação por uma raiz ξ de ordem n da unidade, logo é biholomorfa.

Como este conjunto de cartas cobre $\bar{X}$, obtemos uma estrutura holomorfa que torna $\bar{X}$ numa variedade holomorfa compacta.

É agora suficiente mostrarmos que $f : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ é holomorfa nas vizinhanças dos pontos ideais, uma vez que f é holomorfa em X. Se $f(\pi) \neq \infty$, a função $f \circ \varphi_\pi^{-1}$ é holomorfa em $D(0, r^{1/n})$, uma vez que é a função definida por $z \mapsto \kappa_p^{-1}(z^n)$. Se $f(\pi) = \infty$, consideremos a função $f \circ \varphi_\pi^{-1}$ composta com a função $z \mapsto 1/z$. E em $D(0, r^{1/n})$ esta função é definida por $z \mapsto z^n$, logo é também holomorfa.

Pela proposição (2.10), cada $\alpha \in Aut(f)$ é uma aplicação holomorfa e prolonga-se a um único homeomorfismo $\bar{\alpha} : \bar{X} \to \bar{X}$. Considerando cartas (U_π, φ_π) em torno dos pontos ideais, temos que $(\bar{\alpha}(U_\pi), \varphi_\pi \circ \bar{\alpha}^{-1})$ é também uma carta holomorfa. E nestas coordenadas locais, $\bar{\alpha}$ é da forma $z \mapsto \xi z$, para alguma raiz primitiva ξ de ordem n da unidade. Logo, $\bar{\alpha} : \bar{X} \to \bar{X}$ é holomorfa. □

As aplicações $\bar{\alpha}$, para $\alpha \in Aut(f)$, formam um grupo isomorfo a $Aut(f)$ sob o isomorfismo $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$. Vamos também passar a notar cada $\bar{\alpha}$ apenas por α. Identificamos assim $Aut(f)$ com um subgrupo do grupo dos automorfismos holomorfos de $\bar{X}$.

Notemos que se X for conexo então acabámos de demonstrar, usando a estrutura holomorfa definida a partir do revestimento f, que X é uma superfície de Riemann e que $\bar{X}$ é uma superfície de Riemann compacta.

Vamos agora aplicar estes resultados para demonstrar a conexidade de uma curva plana afim definida por um polinómio irredutível $F \in \mathbb{C}[x, y]$.

Lema 2.13. *Sejam $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ não todos nulos. Seja $w \in \mathbb{C}$ e suponhamos que $w^n + c_{n-1}w^{n-1} + ... + c_0 = 0$. Então*

$$|w| < 2max_j|c_j|^{1/j}.$$

Demonstração. Seja $c = max_j|c_j|^{1/j} > 0$. Se $z = \frac{w}{c}$, temos $z^n + \frac{c_{n-1}}{c}z^{n-1} + ... + \frac{c_0}{c^n} = 0$. Logo, como $|c_j| \leq c^j$,

$$|z|^n \leq |z|^{n-1} + ... + 1.$$

Se $|z| \geq 2$ então teríamos $1 \leq \frac{1}{|z|} + ... + \frac{1}{|z|^n} \leq \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n} < 1$. Logo $|z| < 2$ e $|w| < 2c$. □

Proposição 2.14. *Dado um polinómio $F \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $F(x, y) = a_n(x)y^n + ... + a_0(x)$, com $a_n(x)$ não nulo, seja $C := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y) = 0\}$ a curva plana afim definida por F e $f : C \to \mathbb{C}$ a projecção $(x, y) \mapsto x$. Seja $S_0 := \{x \in \mathbb{C} : a_n(x) = 0\}$.*

(a) *Então a aplicação $f : f^{-1}(\mathbb{C} \setminus S_0) \to \mathbb{C} \setminus S_0$ é própria.*

(b) *Seja $S_1 := \{x \in \mathbb{C} : \exists y \in \mathbb{C}$ com $F(x, y) = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\}$ e seja $C' := C \setminus f^{-1}(S_0 \cup S_1)$. Se F é irredutível então*

$$f : C' \to \mathbb{C} \setminus (S_0 \cup S_1)$$

é um revestimento de grau n e C' é uma superfície de Riemann.

(c) *Seja $\bar{C}'$ o completamento de C' construído na proposição (2.10). Então $\bar{f} : \bar{C}' \to \mathbb{P}^1$ é um revestimento ramificado e $\bar{C}'$ é uma superfície de Riemann compacta.*

Demonstração. (a) Seja $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S_0$ um compacto. Então existe $\delta > 0$ tal que $|a_n(x)| \geq \delta$ e $a_j(x) \leq 1/\delta$ para $x \in K$ e $j \neq n$. Se $(x, y) \in \mathcal{C}$ e $x \in f^{-1}(K)$, temos

$$y^n + \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} y^{n-1} + ... + \frac{a_0(x)}{a_n(x)} = 0,$$

logo, pelo lema (2.13), $|y| \leq 2max_j \delta^{-2/j}$. Portanto, o conjunto $f^{-1}(K)$ é limitado. Como $f^{-1}(K) = (K \times \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}$ é fechado em $\mathbb{C}^2$, concluímos que $f^{-1}(K)$ é compacto.

(b) A aplicação f é um revestimento finito, pela proposição (1.30) e pelo teorema da função implícita (teorema 1.53).

No exemplo (1.56).(8), foi demonstrado que $\mathcal{C} \setminus S_1$ é uma variedade holomorfa de dimensão 1.

Pretendemos agora demonstrar que, se F irredutível então $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus (S_0 \cup S_1)$ é conexa. Suponhamos que $\mathcal{C}'$ não é conexa e sejam $W_1, ..., W_s$ as componentes conexas de $\mathcal{C}'$. Então a aplicação $f_1 := f|_{W_1} : W_1 \to \mathbb{C} \setminus (S_0 \cup S_1)$ é um revestimento de grau m com $1 \leq m < n$ (corolário 1.36). Seja $\bar{W}_1$ o completamento de W_1 construído na proposição (2.10). Pelo teorema (2.12), $\bar{W}_1$ é uma superfície de Riemann compacta.

Seja $\eta : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ a projecção $(x, y) \mapsto y$. Então $\eta_1 := \eta|_{W_1}$ é holomorfa. Vejamos que η_1 se prolonga a uma função meromorfa em $\bar{W}_1$. Para $p \in P := S_0 \cup S_1 \cup \{\infty\}$, seja $a \in \bar{W}_1$ tal que $\bar{f}_1(a) = p$. Escolhamos coordenadas locais z em a e w em p de modo a que localmente f_1 seja a função $z \mapsto z^m = w$. Numa vizinhança U de u suficientemente pequena, se $z \neq 0$, temos

$$\eta_1^n(z) + \frac{a_{n-1}(w)}{a_n(w)} \eta_1^{n-1}(z) + ... + \frac{a_0(w)}{a_n(w)} = 0, \quad w = f_1(z).$$

Como as funções a_j/a_0 são meromorfas em $w = 0$, existem constantes $C > 0$ e $N > 0$ tal que $\left|\frac{a_j(w)}{a_0(w)}\right| \leq \frac{C}{|w|^N}$ perto de $w = 0$. Pelo lema (2.13), temos que $|\eta_1(z)| \leq 2max_j \frac{C^{1/j}}{|w|^{N/j}} \leq \frac{C_1}{|z|^k}$, para algumas constantes C_1 e k. Logo η_1 prolonga-se meromorficamente a $\bar{W}_1$.

Para $x \in \mathbb{P}^1 \setminus P$, seja $b_v(x)$, para $v = 1, ..., m$, a v-ésima função simétrica elementar em $y_1, ..., y_m$, onde $y_1, ..., y_m$ são as imagens por η_1 dos pontos da fibra $f_1^{-1}(x)$ (notemos que $F(x, y_j) = 0$, para todo $j = 1, ..., m$). Vamos demonstrar que as funções $b_v(x)$ se prolongam a funções meromorfas em $\mathbb{P}^1$. De facto, como os pontos y_j são valores da função η_1 que é meromorfa no completamento $\bar{W}_1$, logo, numa vizinhança de $p \in P$, temos

$$\begin{aligned} |b_v(x)| = |\Sigma_{i_1,...,i_v} \eta_1(P_{i_1})...\eta_1(P_{i_v})| &\leq C|z|^{-l} \\ &\leq C_1|x - p|^{-l} \quad (\text{ resp., } C_1|x|^{-l} \text{ se } p = \infty) \end{aligned}$$

$(P_1, ..., P_m) = f_1^{-1}(x)$.

Logo, as funções b_v são meromorfas em $\mathbb{P}^1$ e, portanto, são funções racionais de x.

Seja $G(x, y) = y^m + b_1(x)y^{r-1} + ... + b_m(x)$. Então, se $x \in \mathbb{P}^1 \setminus P$, as raízes de $G(x, y)$ (que estão em vizinhanças de $y_1, ..., y_m$) são também raízes de $F(x, y)$. Logo G divide F em $\mathbb{C}(x)[y]$ e $m \geq 1$, o que contraria a irredutibilidade de F.

Temos então que $\mathcal{C}'$ é conexa, logo é uma superfície de Riemann.

(c) Resulta do teorema (2.12). □

Proposição 2.15. *Seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento finito com X conexo. Para cada ponto $p \in P$, consideremos um disco perfurado $D^* \subset \mathbb{P}^1 \setminus P$ centrado em p de raio r suficientemente pequeno. O grupo $Aut(f)$ age sobre as componentes circulares de $f^{-1}(D^*)$. Seja $(X_i)_{i\in J}$ o conjunto das órbitas desta acção e suponhamos que $Aut(f)$ age transitivamente nas fibras $f^{-1}(D^*) \cap X_i$, para $i \in J$.*

Para cada componente circular $W \subseteq f^{-1}(D^*)$, seja $f_W : W \to \mathbb{D}^*(r)$ o revestimento definido na proposição (2.7).

(a) *Seja H_W o estabilizador de W em $H = Aut(f)$. Restringindo a acção de H_W a W, obtemos um isomorfismo*

$$H_W \to Aut(f_W).$$

Logo H_W é cíclico. Chamamos gerador distinguido de H_W ao elemento $h_W \in H_W$ que corresponde ao gerador distinguido σ_W de $Aut(f_W)$.

(b) *Seja $h \in Aut(f)$ e $W' = h(W)$. Então $hh_Wh^{-1} = h_{W'}$. Portanto, os geradores h_W das componentes circulares W pertencentes a uma mesma órbita X_i formam uma classe de conjugação $C_{p,i}$ de $Aut(f)$. A classe $C_{p,i}$ depende de p e da órbita X_i, mas não do raio do disco D^* escolhido.*

Seja n a ordem comum dos elementos da classe $C_{p,i}$. Então n é o grau do revestimento $f_W : W \to \mathbb{D}^*(r)$, para qualquer componente circular W de X_i. Em particular, $C_{p,i} = \{1\}$ se e somente se f_W é um homeomorfismo.

(c) *Seja $y \in D^*$ e $y' = \tau_p(y) \in \mathbb{D}^*(r)$. Seja $\lambda(t) := \tau_p^{-1}(y' \exp(2\pi i t))$ um lacete em D^* com base em y. Seja $x_0 \in X$ um ponto qualquer e $y_0 = f(x_0)$. Seja δ um caminho com ponto inicial y_0 e ponto final y. Então $\gamma := \delta^{-1}\lambda\delta$ é um lacete em $\mathbb{P}^1 \setminus P$ com base em y_0 e a aplicação $\Phi_{x_0} : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0) \to Aut(f)$ (definida na proposição (1.45)) envia $[\gamma]$ num elemento da classe $C_{p,i}$ associada à órbita X_i que contém a componente circular W tal que $x_0 \in W$.*

Demonstração. (a) O grupo H age sobre $f^{-1}(D^*)$, permutando as componentes circulares W de $f^{-1}(D^*)$, logo, se $h \in H$ envia um ponto de uma componente W num ponto contido numa outra componente W' então $h(W) = W'$, uma vez que $h(W)$ é conexo e as componentes circulares de $f^{-1}(D^*)$ são disjuntas. Em particular, se h envia um ponto de W num ponto de W então $h \in H_W$, sendo H_W o estabilizador de W em H.

Para $y \in D^*$, o conjunto $f^{-1}(y) \cap W$ é uma fibra do revestimento f_W. Considerando a órbita X_i da acção de $Aut(f)$ que contém W, temos que $Aut(f)$ age transitivamente sobre $f^{-1}(y) \cap X_i$. Logo, quaisquer dois pontos de $f^{-1}(y) \cap W$ podem ser enviados um no outro por um elemento $h \in Aut(f)$. Mas então, pelo que vimos anteriormente, $h \in H_W$ e concluímos que H_W age transitivamente em $f^{-1}(y) \cap W$.

A aplicação $H_W \to Aut(f_W)$, definida por $h \mapsto h|_W$, é um homomorfismo. Claramente, se $f \circ h = f$ e $h|_W(W) = W$, então $f_W \circ h|_W = f_W$. Como X é conexo, pelo lema (1.40), se $h|_W = Id_W$ então $h = Id$, o que mostra que temos um homomorfismo injectivo. Como a imagem desta aplicação é um subgrupo de $Aut(f_W)$ que age transitivamente numa fibra

$f_W^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap W$, concluímos que esta aplicação é também sobrejectiva (lema (1.40)), logo um isomorfismo entre H_W e $Aut(f_W)$.

(b) Consideremos o lacete λ definido na alínea (c). Para $x \in f^{-1}(y) \cap W$, seja $\tilde{\lambda}$ o levantamento de λ por f com ponto inicial $h_W(x)$. Então o caminho $\tilde{\lambda}$ coincide com o levantamento do lacete $y' \exp(2\pi t)$ por f_W com ponto inicial $h_W(x)$. Logo o ponto final de $\tilde{\lambda}$ é x, pela alínea (b) do corolário (2.5).

Seja $h \in Aut(f)$. O caminho $h(\tilde{\lambda})$ é o levantamento de λ por f com ponto inicial $h(h_W(x))$ que está numa componente circular $W' := h(W)$. Este caminho tem como ponto final $h(x)$. Portanto, novamente pela alínea (b) do corolário (2.5), sendo $h_{W'}$ o gerador distinguido de $H_{W'}$, temos que $h_{W'}(h(x)) = h(h_W(x))$. Então, a aplicação $h_W^{-1} \circ h^{-1} \circ h_{W'} \circ h$ fixa o ponto x e, pelo lema (1.40), concluímos que $h_W^{-1} \circ h^{-1} \circ h_{W'} \circ h = Id$. Obtemos então que

$$h \circ h_W \circ h^{-1} = h_{W'},$$

para quaisquer duas componentes W e W' pertencentes a uma mesma órbita X_i.

Pela proposição (2.7), para $\hat{W} \subset W$, temos que $f_{\hat{W}} = f_W|_{\hat{W}}$. E então, pelo corolário (2.6), o gerador distinguido de $Aut(f_{\hat{W}})$ é a restrição a $\hat{W}$ do gerador distinguido de $Aut(f_W)$. Obtemos então que $h_{\hat{W}} = h_W$, pelo que a classe $C_{p,i}$ não depende do raio r do disco D^* escolhido.

Seja n a ordem comum dos elementos da classe de conjugação $C_{p,i}$ e seja h_W um qualquer elemento de $C_{p,i}$. Então, pelo corolário (2.5), n coincide com a ordem do grupo $Aut(f_W)$, logo com o grau do revestimento f_W. E, pela proposição (2.4), $n = 1$ se e somente se f_W é um homeomorfismo.

(c) Uma vez que $\delta(1) = y \in D^*$, o levantamento $\tilde{\delta}$ de δ por f com ponto inicial x_0 tem como ponto final um ponto x que está numa componente circular W de $f^{-1}(D^*)$. O caminho $h_W(\tilde{\delta})$ é o levantamento de δ por f com ponto inicial $h_W(x_0)$. E, pela alínea (b), o levantamento de λ com ponto inicial $h_W(x)$ tem ponto final x.

Logo $\tilde{\gamma} = \tilde{\delta}^{-1}\tilde{\lambda}(h_W(\tilde{\delta}))$ é o levantamento de γ com ponto inicial $h_W(x_0)$ e tem ponto final x_0. Logo $\Phi_{x_0}([\gamma]) = h_W$ e h_W pertence a $C_{p,i}$. □

Se f for um revestimento de Galois então, como $Aut(f)$ age transitivamente nas componentes circulares de $f^{-1}(D^*)$, existe uma única órbita por esta acção. Resulta então, da proposição anterior, que a cada ponto $p \in P$ está associada uma única classe de conjugação.

Observação 2.16. A cada aplicação meromorfa não constante definida numa superfície de Riemann compacta está associado um revestimento finito da esfera de Riemann perfurada (teorema 1.70). Pelo teorema (2.12), a esse revestimento está associado um revestimento ramificado. Vejamos agora como construir um revestimento de Galois a partir de uma aplicação meromorfa definida entre superfícies de Riemann.

Teorema 2.17. *Seja $\bar{g} : \bar{X} \to \bar{Y}$ uma aplicação meromorfa entre superfícies de Riemann e suponhamos que $\bar{X}$ é compacta. Seja $C_{\bar{g}}$ o conjunto dos valores críticos de g e sejam $Y := \bar{Y} \setminus C_{\bar{g}}$ e $X := \bar{X} \setminus g^{-1}(C_{\bar{g}})$. Então $g : X \to Y$ é um revestimento finito. Seja $p : \tilde{Y} \to Y$ o revestimento universal de Y. Sejam $x_0 \in X$ e $y_0 = g(x_0)$.*

Então existe um revestimento de Galois finito $f : \tilde{Y}/H \to Y$, onde H é o menor subgrupo normal de $\pi_1(Y, y_0)$ que contém $g_*(\pi_1(X, x_0))$, e existe um levantamento de g, $\tilde{g} : X \to \tilde{Y}/H$, tal que $f \circ \tilde{g} = g$. Em particular, se g for um revestimento de Galois então f e g são revestimentos isomorfos.

Demonstração. A aplicação $g : X \to Y$ é um revestimento finito, pelo teorema (1.70). Seja H o menor subgrupo normal de $\pi_1(Y, y_0)$ tal que $g_*(\pi_1(X, x_0)) \leq H$.

Consideremos o revestimento universal $p : \tilde{Y} \to Y$ (cuja existência e unicidade são asseguradas pelo teorema (1.51) e proposição (1.50), respectivamente) e seja $\tilde{y}_0 \in p^{-1}(y_0)$. Então, pelo corolário (1.43), $Aut(p) \simeq \pi_1(Y, y_0)$. Logo, como o grupo $\pi_1(Y, y_0)$ age de forma discreta sobre $\tilde{Y}$, também H age do mesmo modo. Temos então, pelo teorema (1.46), que $p' : \tilde{Y} \to \tilde{Y}/H$ é um revestimento de Galois e H age transitivamente nas fibras de p'. Logo, $Aut(p') = H$ e, pelo corolário (1.43), $H = Aut(p') \simeq \pi_1(\tilde{Y}/H, p'(\tilde{y}_0))$. Temos ainda que p é constante nas fibras de p' (uma vez que estas estão contidas nas fibras de p), logo existe uma aplicação contínua $f : \tilde{Y}/H \to Y$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{p'} & \tilde{Y}/H \\ & {}_{p}\searrow & \downarrow_{f} \\ & & Y \end{array}$$

Pretendemos agora demonstrar que f é um revestimento. Consideremos um ponto $y \in Y$ e uma vizinhança V de y. Seja U uma qualquer componente conexa de $f^{-1}(V)$. É suficiente mostrarmos que $f|_U : U \to V$ é homeomorfismo.

Como $\tilde{Y}/H$ é localmente conexo por arcos, U é aberto e fechado em $f^{-1}(V)$. Logo, $p'^{-1}(U)$ é aberto e fechado em $p'^{-1}(f^{-1}(V)) = p^{-1}(V)$, sendo, portanto, uma união de componentes conexas de $p^{-1}(V)$. Se $\tilde{U}$ for uma dessas componentes então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{p'} & U \\ & {}_{p}\searrow & \downarrow_{f} \\ & & V \end{array}$$

Neste diagrama, $p = f \circ p'$ é um homeomorfismo, logo p' é injectiva. Se $p'(\tilde{U}) \neq U$ então $p'(p'^{-1}(U)) = \bigcup_{h \in H} p'(h.\tilde{U}) = p'(\tilde{U}) \neq U$, o que contraria o facto de $p' : \tilde{Y} \to \tilde{Y}/H$ ser sobrejectiva. Logo $p' : \tilde{U} \to U$ é bijectiva e, como é uma aplicação aberta, é um homeomorfismo. Temos então que $f|_U : U \to V$ é homeomorfismo, o que nos permite concluir que f é um revestimento.

Pelo teorema (1.42), $Aut(f) \simeq \frac{N(H)}{H} \simeq \frac{\pi_1(Y, y_0)}{H}$, uma vez que H é normal, e, como Y/H é conexo, pelo teorema (1.41), $Aut(f)$ age transitivamente em cada fibra, o que mostra que f é um revestimento de Galois.

Como $g_*\pi_1(X,x_0) \subseteq H \simeq f_*\pi_1(\tilde{Y}/H, p(\tilde{y}_0))$, o teorema (1.37) assegura a existência um levantamento $\tilde{g} : X \to \tilde{Y}/H$ tal que $f \circ \tilde{g} = g$.

Suponhamos que g é um revestimento de Galois. Então $g_*\pi_1(X,x_0)$ é um subgrupo normal, logo $g_*\pi_1(X,x_0) = H \simeq f_*\pi_1(\tilde{Y}/H, p(\tilde{y}_0))$, o que, pelo teorema (1.49), demonstra que f e g são revestimentos isomorfos. □

2.3 Espaços de moduli de revestimentos de Galois

Nesta secção trataremos apenas de revestimentos de Galois da esfera de Riemann.

Definição 2.18. Considerando ternos ordenados da forma $(G, P, \mathcal{C})$, onde G é um grupo finito, P é um subconjunto finito de $\mathbb{P}^1$ e $\mathcal{C} = (C_p)_{p\in P}$ é uma família de classes de conjugação não triviais de G, indexada por P, dizemos que dois ternos $(G, P, \mathcal{C})$ e $(G', P', \mathcal{C}')$ são *equivalentes* se $P = P'$ e existir um isomorfismo $G \to G'$ que envia a classe de conjugação C_p na classe C'_p, para todo o $p \in P$. Obtemos assim uma relação de equivalência no conjunto dos ternos ordenados e designamos cada classe $[G, P, \mathcal{C}]$ por *tipo de ramificação.*

Definição 2.19. Seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento de Galois finito. Seja $G = Aut(f)$ e para cada ponto $p \in P$ seja C_p a classe de conjugação de G associada a p.

Dizemos que p é um *ponto de ramificação* de f se $C_p \neq \{1\}$.

Seja $P' := \{p \in P : C_p \neq \{1\}\}$ o conjunto dos pontos de ramificação. Definimos o *tipo de ramificação* do revestimento f como sendo a classe $[G, P', (C_p)_{p\in P'}]$.

Observação 2.20. Seja $h : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ um automorfismo holomorfo da forma $z \mapsto z - q_0$, $\infty \mapsto \infty$, ou da forma $z \mapsto 1/z$, $0 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto 0$. Então, $f' := h \circ f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus h(P)$ é outro revestimento de Galois finito. Vejamos como se altera o tipo de ramificação.

Para $p \in P$, seja γ um lacete que dá uma volta no sentido directo em torno de p. Então $\gamma' := h \circ \gamma$ é um lacete que dá uma volta no sentido directo em torno de $h(p)$, uma vez que h preserva a orientação. Seja x_0 um ponto da fibra $f^{-1}(y_0)$, onde y_0 é a base do lacete γ. Então o levantamento de γ' por f' com ponto inicial x_0 coincide com o levantamento de γ por f com ponto inicial x_0. E o único elemento de $Aut(f)$ que envia o ponto final deste levantamento no seu ponto inicial x_0 está na classe de conjugação associada a p tal como está na classe de conjugação de $Aut(f')$ associada a $h(p)$. Ora, como $Aut(f') = G = Aut(f)$, pois, para $\alpha \in G$, $f' \circ \alpha = h \circ f \circ \alpha = h \circ f = f'$, e as classes de conjugação de um grupo são disjuntas, concluímos que $C_p = C_{h(p)}$. Logo f' tem tipo de ramificação definido pela classe $[G, h(P'), (C_{h^{-1}(q)})_{q\in h(P')}]$.

Lema 2.21. *Sejam $Y_1, ..., Y_r$ abertos de um espaço topológico Y tais que Y é a união destes abertos. Então cada caminho δ em Y é homotópico a um produto (finito) de caminhos δ_ν tais que cada δ_ν está contido num aberto Y_j.*

Demonstração. Cada imagem inversa $\delta^{-1}(Y_j)$ é um aberto de $I = [0,1]$. Logo é uma união numerável de intervalos abertos de I. Considerando todos os abertos Y_j, a união de todos os intervalos abertos I_μ que cobrem as suas imagens inversas forma uma cobertura aberta de I. Como I é compacto, existe um número de Lebesgue ϵ associado a esta cobertura, i.e., existem $0 = t_1 < t_2 < ... < t_s = 1$ tais que $|t_\nu - t_{\nu+1}| \leq \frac{\epsilon}{2}$ e $[t_\nu - \epsilon, t_\nu + \epsilon]$ está contido em algum I_μ. Então $\delta([t_\nu - \epsilon, t_\nu + \epsilon] \cap I)$ está totalmente contido num aberto Y_j. Para $\nu = 1, ..., s$, restringindo δ a $[t_\nu - \epsilon, t_\nu + \epsilon] \cap I$, definimos caminhos δ_ν, cada um deles totalmente contido num aberto Y_j. E o produto $\delta_s ... \delta_1$ é homotópico a δ. □

Notemos que o caminho $\exp(2\pi i t)$ percorre uma circunferência no sentido directo enquanto que o caminho $\exp(-2\pi i t)$ percorre a circunferência no sentido indirecto.

Teorema 2.22. *Sejam $p_1, ..., p_r$ r pontos distintos de $\mathbb{C}$ e seja $Y = \mathbb{C} \setminus \{p_1, ..., p_r\}$. Seja $y_0 \in Y$ um ponto tal que cada recta $y_0 p_i$ não contém nenhum outro ponto p_j, para $j \neq i$. Para $i = 1, ..., r$, vamos escrever cada ponto p_i na forma $p_i = y_0 + \rho_i \exp(i\vartheta_i)$ com $\rho_i \in \mathbb{R}^+$ e $0 \leq \vartheta_i \leq 2\pi$. Vamos reordenar os pontos p_i, para que $\vartheta_1 > \vartheta_2 > ... > \vartheta_r$.*

Escolhamos no plano complexo $\mathbb{C}$ semi-rectas $L_1, L_2, ..., L_r$ com origem em y_0 de modo a que cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_r)$ contenha exactamente um ponto p_i de P. Seja Y_i a componente conexa que contém p_i e seja D_i um disco centrado em p_i, cuja aderência está contida em Y_i.

Seja γ_i um lacete em $Y_i \cup \{y_0\}$ com base em y_0 que percorre a recta $y_0 p_i$ desde y_0 até à aderência de D_i, dá depois uma volta sobra a fronteira de D_i no sentido directo e retorna a y_0, novamente pela recta $y_0 p_i$.

Então:

(a) *As classes de homotopia dos lacetes $\gamma_1, ..., \gamma_r$ geram o grupo fundamental $\pi_1(Y, y_0)$.*

(b) *Seja G um grupo com geradores $g_1, ..., g_r$. Então existe um revestimento de Galois $f : X \to Y$, um isomorfismo $\theta : Aut(f) \to G$ e um ponto $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ tais que a composição de θ com a aplicação sobrejectiva $\Phi_{x_0} : \pi_1(Y, y_0) \to Aut(f)$ envia cada $[\gamma_i]$ em g_i, para $i = 1, ..., r$.*

Identificando G com $Aut(f)$ através do isomorfismo θ, se G for um grupo finito então $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, ..., p_r, \infty\}$ é um revestimento de Galois finito e para as classes de conjugação associadas $C_i := C_{p_i}$ e C_∞ de G temos que

$$g_i \in C_i \qquad e \qquad (g_1 ... g_r)^{-1} \in C_\infty,$$

para $i = 1, ..., r$.

Demonstração. Notemos que existe o ponto y_0 nas condições do enunciado, pois basta escolher um ponto fora das intersecções das rectas $p_i p_j$, que são em número finito.

(a) Vamos alargar ligeiramente cada Y_i a um conjunto $Y_i' := \{z \in \mathbb{C} : dist(z, Y_i) < \epsilon\}$, sendo ϵ tal que estes conjuntos ainda satisfaçam $Y_i' \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Então os abertos Y_i' formam uma cobertura de $\mathbb{C}$ e os abertos $Y_i' \setminus \{p_i\}$ cobrem Y.

Seja δ um lacete em Y com base em y_0. Pelo lema anterior, δ é homotópico a um produto de caminhos $\delta_s...\delta_1$ tais que cada δ_ν é um caminho contido em $A_\nu := Y_i' \setminus \{p_i\}$, para algum $i = 1,...,r$. Notemos que podemos ter $A_\nu = A_\mu$, para $\nu \neq \mu$, uma vez que o caminho δ pode passar várias vezes por dentro de um mesmo conjunto $Y_i' \setminus \{p_i\}$. Para $\nu = 1,...,s$, seja κ_ν um caminho que une y_0 ao ponto inicial de δ_ν, percorrendo a recta que une estes dois pontos. Então, como tanto y_0 como o ponto inicial de δ_ν estão em A_ν e em $A_{\nu-1}$, o caminho κ_ν está contido na intersecção $A_\nu \cap A_{\nu-1}$. Seja κ_{s+1} o caminho constante igual a y_0. Para $\nu = 1,...,s$, consideremos os caminhos $\omega_\nu := \kappa_{\nu+1}^{-1}\delta_\nu\kappa_\nu$. Então cada ω_ν é um lacete em A_ν e δ é homotópico ao produto $\omega_s...\omega_1$.

Cada espaço A_ν é homeomorfo ao disco perfurado $\mathbb{D}^*$, logo, pelo exemplo (2.1), o grupo fundamental $\pi_1(A_\nu, y_0)$ é infinito cíclico e gerado por γ_i, sendo i tal que $A_\nu := Y_i' \setminus \{p_i\}$. Portanto, ω_ν é homotópico a γ_i^q, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Como δ é homotópico a um produto de ω_ν, concluímos que é homotópico a um produto de potências dos caminhos γ_i.

(b) Para cada $i = 1,...,m$, seja R_i a semi-recta sobre a recta y_0p_i que tem origem em p_i e tal que $y_0 \notin R_i$ (a semi-recta parte de p_i com a direcção oposta a y_0). Seja $K := Y \setminus (R_1 \cup ... \cup R_m) = \mathbb{C} \setminus (R_1 \cup ... \cup R_m)$.

Vamos definir o conjunto X como sendo o produto cartesiano $Y \times G$. Neste conjunto, vamos definir uma topologia (diferente da topologia produto), através da definição de uma base de vizinhanças para cada ponto (y, g) de X:

Se $y \in K$, então essa base é constituída por conjuntos da forma

$$B \times \{g\},$$

para quaisquer discos abertos B centrados em y e contidos em K.

Se $y \in R_i$, a base é constituída por conjuntos da forma

$$D_g := (D^- \times \{g\}) \cup (D^+ \times \{gg_i^{-1}\}),$$

onde, para um disco aberto D centrado em y que não contém o ponto p_i e que não intersecta nenhuma outra recta y_0p_j para $j \neq i$, D^+ é definido como sendo o meio disco aberto do lado 'positivo' de R_i, i.e., D^+ é constituído pelos pontos $y' \in D$ tais que a recta y_0y' é imagem da recta y_0p_i por uma rotação no sentido directo de ângulo $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, e D^- é definido como sendo o meio disco fechado do lado 'negativo' de R_i, i.e., D^- é constituído pelos pontos $y' \in D$ tais que a recta y_0y' é imagem da recta y_0p_i por uma rotação no sentido indirecto de ângulo $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.

Claramente, para quaisquer duas vizinhanças de um ponto (y, g), temos que uma está contida na outra. Portanto, obtemos uma topologia em X definindo que um subconjunto de X é aberto se contiver uma vizinhança destas para cada um dos seus pontos.

(1) A aplicação $f : X \to Y$, $(y, g) \mapsto y$ é um revestimento.

Demonstração: Temos que $f^{-1}(B) = \cup_{g\in G}(B\times\{g\})$ e cada vizinhança $B\times\{g\}$ é enviada homeomorficamente em B. Do mesmo modo, $f^{-1}(D) = \cup_{g\in G}D_g$ e cada vizinhança D_g é enviada homeomorficamente em D. Temos ainda que $B \times \{g\}$ são componentes distintas de $f^{-1}(B)$ e D_g são componentes distintas de $f^{-1}(D)$. Logo, tanto B como D são vizinhanças admissíveis para f.

(2) Para cada $h \in G$, a aplicação $\alpha_h : X \to X$, $(y, g) \mapsto (y, hg)$, é um automorfismo do revestimento f. E temos que $\alpha_{hh'} = \alpha_h \circ \alpha_{h'}$.

Demonstração: Cada α_h permuta as vizinhanças que constituem a base da topologia, i.e., $\alpha_h(B \times \{g\}) = B \times \{hg\}$ e $\alpha_h(D_g) = D_{hg}$, logo é contínua. É claro que $\alpha_{hh'} = \alpha_h \circ \alpha_{h'}$, uma vez que $\alpha_{hh'}(y, g) = (y, hh'g) = \alpha_h(y, h'g) = \alpha_h \circ \alpha_{h'}(y, g)$, o que implica que cada α_h é bijectiva com inversa $\alpha_{h^{-1}}$. Resulta então, que cada α_h é um homeomorfismo e, como $f \circ \alpha_h = f$, α_h é um automorfismo do revestimento f.

(3) A aplicação $f : X \to Y$ é um revestimento de Galois. O grupo $Aut(f)$ dos automorfismos do revestimento f é isomorfo a G, com isomorfismo dado por $g \mapsto \alpha_g$.

Demonstração: Vamos começar por demonstrar que X é conexo. Cada um dos seus subconjuntos $K \times \{g\}$ é homeomorfo a K, logo é conexo. Seja C a componente conexa de X que contém $K \times \{1\}$. Seja D um disco centrado num ponto $y \in R_i$. Existe um caminho em D_1 que une $K \times \{1\}$ a $K \times \{g_i^{-1}\}$, uma vez que $D_1 := (D^- \times \{1\}) \cup (D^+ \times \{g_i^{-1}\})$ e $D^- \times \{1\} \subset K \times \{1\}$ e $D^+ \times \{g_i^{-1}\} \subset K \times \{g_i^{-1}\}$. Portanto, $K \times \{g_i^{-1}\}$, sendo conexo, está também contido na componente conexa C de X.

Como o automorfismo $\alpha_{g_i^{-1}}$ envia $K \times \{1\}$ em $K \times \{g_i^{-1}\}$, resulta que a componente C é enviada em si própria por todos os automorfismos da forma $\alpha_{g_i^{-1}}$. E, como os elementos g_i são geradores do grupo G, resulta que C é enviada em si própria por todos os automorfismos α_g, para $g \in G$. Portanto, C contém todos os subconjuntos de X da forma $K \times \{g\}$, para $g \in G$, pelo que é densa em X. Como as componentes conexas são fechados de X, resulta que $C = X$ e, portanto, X é conexo.

Por (2), o grupo $\{\alpha_g : g \in G\}$ é um subgrupo de $Aut(f)$. Como este subgrupo age transitivamente sobre cada fibra $f^{-1}(y) = \cup_{g \in G}(y, g)$, para $y \in Y$, resulta, pelo lema (1.40), que $Aut(f) = \{\alpha_g : g \in G\}$ e f é um revestimento de Galois.

Vamos passar a identificar G com $Aut(f)$ através do isomorfismo $g \mapsto \alpha_g$.

(4) O levantamento do caminho γ_i com ponto inicial $(y_0, 1)$ tem ponto final (y_0, g_i^{-1}).

Demonstração: O caminho $\gamma_i(t)$ intersecta a semi-recta R_i num único ponto. Seja esse ponto $\gamma_i(t_i)$. Definindo

$$\tilde{\gamma}_i(t) := \begin{cases} (\gamma_i(t), 1) & \text{para} \quad t \leq t_i, \\ (\gamma_i(t), g_i^{-1}) & \text{para} \quad t > t_i, \end{cases}$$

então $\tilde{\gamma}_i(t)$ é contínua pela definição da topologia em X. Logo $\tilde{\gamma}_i$ é o levantamento por f de γ_i com ponto inicial $(y_0, 1)$. E, claramente, (y_0, g_i^{-1}) é o seu ponto final.

(5) Para $x_0 = (y_0, 1)$, temos que $\Phi_{x_0}([\gamma_i]) = g_i$, para $i = 1, ..., r$. Logo cada g_i está na classe de conjugação C_i de $G = Aut(f)$ associada ao ponto p_i.

Demonstração: Por definição de $\Phi_{x_0} : \pi_1(Y, y_0) \to Aut(f)$, o automorfismo $\Phi_{x_0}([\gamma_i])$ envia o ponto final (y_0, g_i^{-1}) do caminho $\tilde{\gamma}_i$ no seu ponto inicial $x_0 = (y_0, 1)$. Logo $\Phi_{x_0}([\gamma_i]) = \alpha_{g_i} = g_i$. Por outro lado, como γ_i dá uma volta no sentido directo em torno de p_i, pela alínea (c) da proposição (2.15), $\Phi_{x_0}([\gamma_i])$ está na classe de conjugação $C_{p_i} = C_i$.

(6) Seja $\rho > 0$ suficientemente grande para que y_0 e todos os pontos p_i estejam contidos no interior da circunferência $\mathcal{C}_0$ de centro 0 e raio ρ. Então o caminho $\gamma_\infty := \gamma_1 ... \gamma_r$ é homotópico em Y a um lacete γ' de base y_0 que vai sobre uma recta até interceptar a circunferência $\mathcal{C}_0$, dá depois uma volta completa sobre $\mathcal{C}_0$ no sentido directo, voltando novamente a y_0 sobre a mesma recta.

Demonstração: Seja D_0 um disco aberto centrado em y_0 e tal que todos os pontos p_i estão contidos em D_0. Seja $Y_i^* := Y_i \cap D_0$. Então cada γ_i é homotópico em Y a um lacete γ_i^* com base em y_0 definido por percorrer a fronteira de Y_i^* no sentido directo. Logo γ_∞ é homotópico a $\gamma_1^* ... \gamma_r^*$. Notemos, que pela definição de produto de caminhos, neste caminho, primeiro é percorrido o caminho γ_r^*, depois o caminho γ_{r-1}^*, até que, por último, é percorrido o caminho γ_1^*. Logo $\gamma_1^* ... \gamma_r^*$ é homotópico em Y a um lacete γ^* de base y_0 que vai em linha recta até interceptar a fronteira de D_0, dando depois uma volta completa sobre a fronteira de D_0 no sentido directo, e que volta a y_0 novamente sobre a mesma recta.

Notemos que a classe de homotopia de γ^* é independente da escolha da recta que é percorrida até interceptar D_0, uma vez que se γ_a^* é um lacete que percorre uma recta entre os pontos p_1 e p_2 e γ_b^* é um lacete que percorre uma outra recta entre os pontos p_2 e p_3, então γ_b^* é homotópico a $\gamma_2^{-1}\gamma_a^*\gamma_2$. E este caminho é homotópico a γ_a^*.

É então claro que γ^* é homotópico a γ'.

(7) $(g_1 ... g_r)^{-1} \in C_\infty$

Demonstração: Seja γ' o caminho definido em (6). Então o caminho $\gamma := (\gamma')^{-1}$ é um lacete com base em y_0 que dá uma volta em torno de $p = \infty$ no sentido directo. Logo, pela alínea (c) da proposição (2.15), temos que $\Phi_{x_0}([\gamma]) \in C_\infty$. Por outro lado, como $\Phi_{x_0}([\gamma']) = \Phi_{x_0}([\gamma_\infty]) = g_1 ... g_r$, por (5) e por (6), obtemos que $(g_1 ... g_r)^{-1} \in C_\infty$. □

Podemos descrever o conjunto X através da colagem das 'folhas' $K \times \{g\}$ ao longo das semi-rectas $R_i \times \{g\}$, para $g \in G$. Quando percorremos perto de (p_i, g) um caminho no sentido directo, ao intersectarmos a semi-recta $R_i \times \{g\}$, passamos da folha $K \times \{g\}$ para a folha $K \times \{gg_i^{-1}\}$.

Corolário 2.23. *O grupo fundamental $\pi_1(Y, y_0)$ para $Y = \mathbb{C} \setminus \{p_1, ..., p_r\}$ é livre e gerado pelas classes dos lacetes $\gamma_1, ..., \gamma_r$.*

Resulta então que, para quaisquer r pontos distintos de $\mathbb{P}^1$, o grupo $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, ..., p_r\}, y_0)$ é livre em $r - 1$ geradores.

Demonstração. Seja G um grupo livre gerado por elementos $g_1, ..., g_r$. Pela parte (b) do teorema, existe um homomorfismo $\pi_1(Y, y_0) \to G$ que envia $[\gamma_i]$ em g_i. Como G é livre, existe também um homomorfismo $G \to \pi_1(Y, y_0)$. A composição destes homomorfismos é a identidade, uma vez que fixa os geradores g_i e $[\gamma_i]$ de cada grupo. Logo G e $\pi_1(Y, y_0)$ são isomorfos.

A segunda afirmação resulta do facto de $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_r\}$ ser homeomorfo a $\mathbb{C}$.□

Seja $[\gamma_i]$ o gerador de $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$ associado ao ponto p_i. Notamos a classe de conjugação de $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$ associada ao elemento $[\gamma_i]$ por $\Sigma_{p_i}(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$.

Lema 2.24. **(a)** *Seja $P' = P \setminus \{p\}$. Então o subgrupo normal de $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$ gerado por $\Sigma_p(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$ é formado por todos os elementos $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$ para os quais γ é homotopicamente nulo em $\mathbb{P}^1 \setminus P'$.*

(b) *Seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento de Galois finito. Então, para cada $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, o homomorfismo sobrejectivo $\Phi_{x_0} : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0) \to Aut(f)$ envia a classe de conjugação $\Sigma_{p_i}(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$ na classe C_{p_i} de $Aut(f)$ definida na proposição (2.15).*

Demonstração. **(a)** Notemos os elementos de P por $p_1, ..., p_r$ de modo a que $p_1 = p$. Para simplificação, identifiquemos lacetes com as suas classes de homotopia. Pelo corolário (2.23), o grupo $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$ é livre e gerado por lacetes $\gamma_1, ..., \gamma_{r-1}$ com $\gamma_i \in \Sigma_{p_i}$. Também $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P', y_0)$ é livre e gerado por lacetes $\gamma_2, ..., \gamma_{r-1}$ com $\gamma_i \in \Sigma_{p_i}$.

Seja $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0) \to \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P', y_0)$ a aplicação definida por enviar γ_1 em 1 e, para $i \neq 1$, enviar os geradores γ_i nos geradores γ_i do grupo livre $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P', y_0)$. Então o subgrupo gerado por $\Sigma_p(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$ está no núcleo de ρ, uma vez que, por definição, o lacete γ apenas rodeia o ponto p (e o mesmo acontece com qualquer lacete da forma $\omega\gamma\omega^{-1}$). Reciprocamente, se α está no núcleo de ρ então α é homotopicamente nulo em $\mathbb{P}^1 \setminus P'$. Logo, em $\mathbb{P}^1 \setminus P$, α terá que ser homotópico a γ ou a palavras da forma $\omega_1\gamma^{\varepsilon_1}\omega_1^{-1}...\omega_j\gamma^{\varepsilon_j}\omega_j^{-1}$, onde ω_i é uma palavra nos geradores $\gamma_2, ..., \gamma_{r-1}$ e $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 1, ..., j$. Portanto, α pertence ao subgrupo normal gerado por Σ_p. E temos que $\bar{\rho} : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)/\langle\Sigma_p\rangle \to \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P', y_0)$ é um isomorfismo.

(b) Resulta da proposição (2.15) que $[\gamma_i]$ é enviado por Φ_{x_0} num elemento da classe C_{p_i}. Notemos que se $[\alpha] \in \Sigma_{p_i}(\mathbb{P}^1 \setminus P, y_0)$, então $[\alpha] = [\beta\gamma_i\beta^{-1}]$, pelo que o elemento $\Phi_{x_0}(\alpha) = \Phi_{x_0}(\beta)\Phi_{x_0}(\gamma)\Phi_{x_0}(\beta)^{-1}$ está na classe C_{p_i}. Como Φ_{x_0} é sobrejectiva, temos que $\Phi_{x_0}(\Sigma_{p_i}) = C_{p_i}$. □

Podemos agora apresentar uma versão topológica do teorema de existência de Riemann.

Teorema 2.25 (de Existência de Riemann - versão topológica). *Consideremos um tipo de ramificação $\mathcal{T} = [G, P, (C_p)_{p \in P}]$. Seja $r := |P|$ e notemos os elementos de P por $p_1, ..., p_r$.*

Então existe um revestimento de Galois finito de $\mathbb{P}^1 \setminus P$ com tipo de ramificação $\mathcal{T}$ se e somente se existem geradores $g_1, ..., g_r$ de G tais que $g_1...g_r = 1$ e $g_i \in C_{p_i}$, para $i = 1, ..., r$.

Demonstração. Pela observação (2.20), podemos usar, se necessário, um automorfismo holomorfo de $\mathbb{P}^1$ e admitir que $p_r = \infty \in P$.

Suponhamos que G tem geradores $g_1, ..., g_r$ nas condições do enunciado. Então, aplicando o teorema (2.22), sabemos que existe um revestimento de Galois finito $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ e uma identificação entre $Aut(f)$ e G tal que cada elemento g_i está na classe de conjugação C_{p_i} associada a p_i, para $i = 1, ..., r-1$. Sabemos ainda que $g_r = (g_1...g_{r-1})^{-1}$ está na classe $C_\infty = C_{p_r}$. Portanto, f tem tipo de ramificação $\mathcal{T}$.

Reciprocamente, seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento de Galois finito com tipo de ramificação $\mathcal{T}$. Tomemos $G = Aut(f)$ e consideremos as classes de conjugação C_p associadas a cada $p \in P$. Para $y_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus P$, sejam $\gamma_1, ..., \gamma_{r-1}$ lacetes com base em y_0 definidos como no teorema (2.22). Seja $\gamma_r := (\gamma_1, ..., \gamma_{r-1})^{-1}$. Fixando um ponto x_0 da fibra $f^{-1}(y_0)$ e considerando o homomorfismo sobrejectivo $\Phi_{x_0} : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P) \to G$, obtemos, tal como na demonstração do teorema (2.22), que $g_i := \Phi_{x_0}([\gamma_i])$ está na classe C_{p_i}, para $i = 1, ..., r$ e que $g_1 ... g_r = 1$. E estes elementos $g_1, ..., g_r$ geram G pela alínea (a) do teorema (2.22). □

Observação 2.26. A definição de tipo de ramificação exige que todas as classes de conjugação sejam não triviais, pelo que, no teorema anterior, apenas considerámos o caso em que $C_p \neq 1$ para todo o $p \in P$, ou seja, assumimos que existe ramificação em todos os pontos de P. Contudo, esta demonstração é válida para o caso geral em que $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ é um qualquer revestimento de Galois finito e $P' = \{p \in P : C_p \neq 1\} = \{p_1, ..., p_r\}$.

Notemos que se $q \in P \setminus P'$, ou seja, $C_q = 1$, então para qualquer ponto $y_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus P$ e para qualquer ponto x_0 da fibra $f^{-1}(y_0)$, temos que $\Phi_{x_0}([\gamma_q]) = 1$. O que significa que, dado um lacete em $\mathbb{P}^1 \setminus P$ com base em y_0 que dá uma volta em torno do ponto q, o seu levantamento com ponto inicial x_0 tem também como ponto final x_0. Ou seja, dado um aberto V que contém o ponto q e não contém mais nenhum ponto de P, para qualquer componente conexa W de $f^{-1}(V \setminus \{q\})$, então $f|_W : W \to V \setminus \{q\}$ é um homeomorfismo. Em particular, concluímos que q não é um ponto de ramificação de f.

Proposição 2.27. *Sejam $f_1 : X_1 \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ e $f_2 : X_2 \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ dois revestimentos de Galois. Então f_1 e f_2 são isomorfos se e somente se têm o mesmo tipo de ramificação.*

Demonstração. Se $\rho : X_1 \to X_2$ é um homeomorfismo, então

$$\begin{array}{rcl} \varrho : Aut(f_1) & \to & Aut(f_2) \\ \alpha & \mapsto & \rho\alpha\rho^{-1} \end{array}$$

é um isomorfismo. Para $p \in P$, consideremos um lacete γ com base em $y \in \mathbb{P}^1 \setminus P$ que dá uma volta no sentido directo em torno de p. Seja $x_1 \in {f_1}^{-1}(y)$ e $x_2 = \rho(x_1)$. Consideremos os levantamentos, $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$, de γ por f_1 e por f_2, com base nos pontos x_1 e x_2, respectivamente. Então o único elemento de $Aut(f_1)$ que envia o ponto final do levantamento $\tilde{\gamma}_1$ no seu ponto inicial x_1 está na classe de conjugação C_p^1 associada a p e o único elemento de $Aut(f_2)$ que envia o ponto final do levantamento $\tilde{\gamma}_2$ no seu ponto inicial x_2 está na classe de conjugação C_p^2 associada a p. E temos que $\rho(\tilde{\gamma}_1) = \tilde{\gamma}_2$. Logo $\varrho(C_p^1) = C_p^2$, o que mostra que f_1 e f_2 têm o mesmo tipo de ramificação.

Reciprocamente, suponhamos que f_1 e f_2 têm o mesmo tipo de ramificação. Então $Aut(f_1) \simeq Aut(f_2)$. Como $Aut(f_i) \simeq \frac{\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y)}{f_{i*}(X_i, x_i)}$, para $i = 1, 2$, concluímos que

$$f_{1*}(X_1, x_1) = f_{2*}(X_2, x_2).$$

Logo, pelo teorema (1.49), f_1 e f_2 são isomorfos. □

Fixemos um grupo finito G e um inteiro $r \geq 2$.

Seja $\mathcal{O}_r$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathbb{C}$ de cardinalidade r.

Seja $\tilde{\mathcal{H}}_r(G)$ o conjunto dos pares ordenados (f, μ), onde $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus P$ é um revestimento de Galois finito com pontos de ramificação em $P \in \mathcal{O}_r$ e

$$\mu : G \rightarrow Aut(f)$$

é um isomorfismo de grupos.

Obtemos uma relação de equivalência em $\tilde{\mathcal{H}}_r(G)$ ao definir que dois pares (f, μ) e (f', μ') são *equivalentes* (onde $f' : X' \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus P$) se existir um homeomorfismo $\delta : X \rightarrow X'$ tal que $f' \circ \delta = f$ e $\mu'(g) = \delta\mu(g)\delta^{-1}$, para todo o elemento g de G.

A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \delta^* : Aut(f) & \rightarrow & Aut(f') \\ \alpha & \mapsto & \delta\alpha\delta^{-1} \end{array}$$

é um isomorfismo de grupos e temos que $\mu' = \delta^* \circ \mu$. Seja $\mathcal{H}_r(G)$ o conjunto das classes $[f, \mu]$ desta relação de equivalência.

Tomemos $(f, \mu) \in \tilde{\mathcal{H}}_r(G)$ e consideremos o homomorfismo sobrejectivo $\varphi_{x_0} = \mu^{-1} \circ \Phi_{x_0}$, onde $\Phi_{x_0} : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty) \rightarrow Aut(f)$ é o homomorfismo sobrejectivo definido na proposição (1.45) para cada $x_0 \in f^{-1}(\infty)$. Notemos ainda que, sendo P o conjunto dos pontos de ramificação de$f$, então $\varphi_{x_0}(\Sigma_p(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)) \neq 1$, para cada $p \in P$, onde $\Sigma_p(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$ é a classe de conjugação de $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$ associada ao ponto p (lema (2.24)).

Notemos ainda que, ao variar x_0 em $f^{-1}(\infty)$, estamos a compor Φ_{x_0} com automorfismos internos de $Aut(f)$. Se $x_0' \in f^{-1}(\infty)$ for um ponto distinto de x_0 e sendo $\alpha \in Aut(f)$ tal que $\alpha(x_0') = x_0$ (este automorfismo α existe porque f é revestimento de Galois), então $\Phi_{x_0'} = \alpha^{-1}\Phi_{x_0}\alpha$. E temos que $\varphi_{x_0'} = \mu^{-1}(\alpha^{-1})\varphi_{x_0}\mu^{-1}(\alpha)$.

Consideremos o conjunto dos pares (P, φ), onde $P \in \mathcal{O}_r$ e $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty) \rightarrow G$ é um homomorfismo sobrejectivo tal que $\varphi(\Sigma_p(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)) \neq 1$. Obtemos uma relação de equivalência neste conjunto ao definir que dois pares (P, φ) e (P', φ') são equivalentes se $P = P'$ e $\varphi' = A \circ \varphi$, para algum $A \in Inn(G)$. Notemos por $[P, \varphi]$ a classe de equivalência do par (P, φ).

Assim, a cada par (f, μ) podemos associar uma classe de equivalência $[P, \varphi]$, onde P é o conjunto dos pontos de ramificação do revestimento f e $\varphi = \mu^{-1} \circ \Phi_{x_0}$ para $x_0 \in f^{-1}(\infty)$.

Seja $(f', \mu') \in \tilde{\mathcal{H}}_r(G)$ um par distinto de (f, μ) e suponhamos que os revestimentos f e f' são equivalentes, i.e., $(f', \mu') \in [f, \mu]$. Queremos ver que a ambos os revestimentos está associada a mesma classe de equivalência $[P, \varphi]$. Fixemos $x_0 \in f^{-1}(\infty)$ e $x_0' = \delta(x_0) \in (f')^{-1}(\infty)$ e consideremos o par (P', φ'), onde P' é o conjunto dos pontos de ramificação do revestimento f' e $\varphi' = \mu'^{-1} \circ \Phi'_{x_0'}$. Por equivalência de (f, μ) e (f', μ'), temos que $P = P'$ e que $\Phi'_{x_0'} = \delta^*\Phi_{x_0}$. Portanto, $\varphi' = \mu'^{-1} \circ \Phi'_{x_0'} = \mu'^{-1} \circ \delta^*\Phi_{x_0} = \mu^{-1}\Phi_{x_0} = \varphi$. Tomando um ponto $x_0'' \in (f')^{-1}(\infty)$ distinto que x_0', já foi visto que o homomorfismo φ'' associado satisfaz $\varphi'' = g^{-1}\varphi' g$, para algum $g \in G$. Logo, concluímos que $[P', \varphi'] = [P, \varphi]$.

Pela alínea (b) do lema (2.22), para cada $P \in \mathcal{O}_r$ e cada homomorfismo sobrejectivo $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty) \to G$ tal que $\varphi(\Sigma_p(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)) \neq 1$, é possível construir um revestimento f com $Aut(f) \simeq G$ e tal que a classe de conjugação C_p de $Aut(f)$ associada a cada $p \in P$ é não trivial.

Obtemos, assim, uma correspondência biunívoca entre os seguintes objectos:

(1) As classes de equivalência de pares (f, μ), onde $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ é um revestimento de Galois finito com pontos de ramificação em P e $\mu : G \to Aut(f)$ é um isomorfismo.

(2) As classes de equivalência de homomorfismos sobrejectivos $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty) \to G$ tais que $\varphi(\Sigma_p(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)) \neq 1$, para $p \in P$, obtidas por composição com automorfismos internos de G.

Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{H}_r(G) & \to & \mathcal{O}_r \\ {[P, \varphi]} & \mapsto & P \end{array}$$

e, para cada $A \in Aut(G)$, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_A : \mathcal{H}_r(G) & \to & \mathcal{H}_r(G) \\ {[P, \varphi]} & \mapsto & [P, A \circ \varphi]. \end{array}$$

Notemos que se $(P, \varphi') \in [P, \varphi]$, então existe $B \in Inn(G)$ tal que $\varphi' = B \circ \varphi$ e então temos que $(P, A \circ \varphi') \in [P, A \circ \varphi]$ pois $A \circ \varphi' = A \circ B \circ \varphi = B \circ A \circ \varphi$ (como $B \in Inn(G)$, $B \circ A = A \circ B$, para todo $A \in Aut(G)$). Temos então uma acção do grupo $Aut(G)$ em $\mathcal{H}_r(G)$. Em particular, se $A \in Inn(G)$, então ϵ_A é a identidade em $\mathcal{H}_r(G)$.

Vamos agora definir uma topologia em $\mathcal{H}_r(G)$.

Seja $P = \{p_1, ..., p_r\} \in \mathcal{O}_r$ e sejam $D_1, ..., D_r$ discos abertos de $\mathbb{C}$ disjuntos centrados nos pontos $p_1, ..., p_r$, respectivamente. Seja $P' = \{p'_1, ..., p'_r\} \in \mathcal{O}_r$ tal que $p'_i \in D_i$, para todo $i = 1, ..., r$.

Seja η o homomorfismo obtido pela composição dos homomorfismos

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P', \infty) \to \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (D_1 \cup ... \cup D_r), \infty) \to \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty). \tag{2.2}$$

Notemos que, pelo teorema (2.22), o grupo $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P', \infty)$ é livre e gerado por elementos $\gamma'_1, ..., \gamma'_{r-1}$ em que cada γ'_i é um lacete com base em ∞ que dá uma volta em torno de p'_i. O mesmo acontece com $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$ para lacetes γ_i em torno de p_i. Podemos alargar homotopicamente estes lacetes (dentro de cada um dos grupos fundamentais) a lacetes γ^*_i que passem fora dos discos D_i (notemos que estes discos são disjuntos) e temos então que $\gamma^*_1, ..., \gamma^*_{r-1}$ geram o grupo livre $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (D_1 \cup ... \cup D_r)$. Definindo uma correspondência sobre os geradores destes grupos livres ($\gamma'_i \mapsto \gamma^*_i \mapsto \gamma_i$) concluímos que η é isomorfismo.

Para cada $u = [P, \varphi] \in \mathcal{H}_r(G)$, vamos definir vizinhanças da forma

$$\mathcal{N}_u(D_1, ..., D_r) := \{[P', \varphi'] \in \mathcal{H}_r(G) : P' = \{p'_1, ..., p'_r\} \quad \text{com} \quad p'_i \in D_i \quad \text{e} \quad \varphi' \equiv \varphi \circ \eta\},$$

onde por $\varphi' \equiv \varphi \circ \eta$ entendemos que existe um automorfismo $A \in Inn(G)$ tal que $\varphi' = A \circ \varphi \circ \eta$. Observemos que, como η é isomorfismo, φ' é, tal como φ, um homomorfismo sobrejectivo que satisfaz $\varphi'(\Sigma'_p) = \varphi \circ \eta(\Sigma'_p) = \varphi(\Sigma_p) \neq 1$.

Como quaisquer discos abertos D'_i e D''_i centrados num ponto p_i satisfazem $D'_i \subseteq D''_i$ ou $D'_i \subseteq D''_i$, temos que a intersecção de quaisquer duas destas vizinhanças centradas num ponto u é ainda uma vizinhança da forma $\mathcal{N}_u(D_1, ..., D_r)$. Existe, então, uma única topologia neste espaço que tem estes conjuntos como base de vizinhanças.

Obtemos também uma topologia em $\mathcal{O}_r$, ao definirmos para cada $P \in \mathcal{O}_r$ uma base de vizinhanças constituída por conjuntos da forma

$$\mathcal{N}_P(D_1, ..., D_r) := \{P' \in \mathcal{O}_r : p'_i \in D_i, i = 1, ..., r\},$$

para discos abertos disjuntos $D_1, ... D_r$ em torno dos pontos $p_1, ..., p_r$ de P.

Teorema 2.28. *A aplicação $\Psi : \mathcal{H}_r(G) \to \mathcal{O}_r$ é um revestimento e, para cada $A \in Aut(G)$, $\epsilon_A \in Aut(\Psi)$.*

Demonstração. Dado $P \in \mathcal{O}_r$, quando nos referirmos a um homomorfismo φ *admissível*, entendemos que $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty) \to G$ é um homomorfismo sobrejectivo que satisfaz $\varphi(\Sigma_p(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)) \neq 1$, para todo o $p \in P$.

Dada uma vizinhança $\mathcal{N}_P(D_1, ..., D_r)$ de $P \in \mathcal{O}_r$, temos que

$$\Psi^{-1}(\mathcal{N}_P(D_1, ..., D_r)) = \bigcup_{\varphi \text{ admissível}} \mathcal{N}_{[P,\varphi]}(D_1, ..., D_r).$$

Logo, Ψ é claramente uma aplicação contínua que envia cada $\mathcal{N}_{[P,\varphi]}(D_1, ..., D_r)$ homeomorficamente em $\mathcal{N}_P(D_1, ..., D_r)$, o que mostra que é um revestimento.

Vamos agora verificar que, para $A \in Aut(G)$, a aplicação $\epsilon_A : \mathcal{H}_r(G) \to \mathcal{H}_r(G)$ é um homeomorfismo. Esta aplicação é claramente sobrejectiva pois para cada φ temos que $\epsilon_A([P, A^{-1} \circ \varphi]) = [P, \varphi]$.

Para um automorfismo $A \in Aut(G) \setminus Inn(G)$ (caso contrário, ϵ_A é a identidade), temos que $[P, A \circ \varphi] = [P, A \circ \varphi']$ se e somente se existe $B \in Inn(G)$ tal que $A \circ \varphi' = B \circ A \circ \varphi$. E, nesse caso, temos $A \circ \varphi' = A \circ B \circ \varphi \Leftrightarrow \varphi' = B \circ \varphi$ (uma vez que B permuta com A e A é um automorfismo), logo $[P, \varphi] = [P, \varphi']$, o que mostra que ϵ_A é injectiva.

A continuidade resulta de

$$\epsilon_A^{-1}(\mathcal{N}_{[P,\varphi]}(D_1, ..., D_r)) = \mathcal{N}_{[P,A^{-1} \circ \varphi]}(D_1, ..., D_r).$$

Temos ainda que $\Psi \circ \epsilon_A([P, \varphi]) = \Psi([P, A \circ \varphi]) = P = \Psi([P, \varphi])$, para todo $[P, \varphi] \in \mathcal{H}_r(G)$, pelo que $\epsilon_A \in Aut(\Psi)$, para todo $A \in Aut(G)$. $\square$

Seja X uma variedade holomorfa conexa. Para $r \geq 1$, vamos definir o conjunto

$$F_r(X) := \{(x_1, ..., x_r) \in X^r : x_i \neq x_j \quad \text{para} \quad i \neq j\},$$

que designamos por *espaço de configuração* de conjuntos ordenados de r pontos distintos de X. Podemos equipar $F_r(X)$ com a topologia induzida a partir da topologia produto de $X^r = X \times ... \times X$. Este espaço pode ser construído retirando a X^r um número finito de subvariedades $V_{ij} := \{(x_1, ..., x_r) : \exists i \neq j, x_i = x_j\}$, definidas pela existência de duas coordenadas iguais. Considerando a aplicação $V_{ij} \to X^{r-1}$ definida por

$$(x_1, ..., x_r) \mapsto (x_1, ..., x_i, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_r),$$

vemos que estas subvariedades têm dimensão igual à de X^{r-1}, logo codimensão em X^r igual à dimensão de X. Portanto, podemos concluir que $F_r(X)$ é uma variedade holomorfa conexa.

Podemos definir uma acção do grupo S_r sobre o espaço de configuração $F_r(X)$ da seguinte forma

$$\begin{array}{ccc} S_r \times F_r(X) & \to & F_r(X) \\ (\sigma, (x_1, ..., x_r)) & \mapsto & \sigma(x_1, ..., x_r) := (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(r)}). \end{array}$$

Seja $O_r(X)$ o espaço das órbitas dos elementos de $F_r(X)$ pela acção de S_r, ou seja,

$$O_r(X) = \frac{F_r(X)}{S_r}.$$

Dois elementos de $F_r(X)$ estão numa mesma órbita se e somente se as suas coordenadas diferem apenas por uma permutação, pelo que podemos designar $O_r(X)$ por espaço de configuração de r pontos distintos (não ordenados) de X.

Como as coordenadas dos pontos de $F_r(X)$ são distintas duas a duas, a acção de S_r em $F_r(X)$ não tem pontos fixos, pelo que (teorema (1.46)) a projecção de $F_r(X)$ sobrejectivamente sobre $O_r(X)$

$$\vartheta : F_r(X) \to O_r(X)$$

define um revestimento de Galois de grau $r!$. Em particular, temos que $O_r(X)$ é uma variedade holomorfa conexa, uma vez que $F_r(X)$ é conexo e ϑ é um revestimento.

Notemos que $\mathcal{O}_r = O_r(\mathbb{C})$ e que a topologia atrás definida em $\mathcal{O}_r$ coincide com a topologia do espaço quociente $\frac{F_r(\mathbb{C})}{S_r}$. Temos então o seguinte resultado.

Corolário 2.29. *Considerando a estrutura de variedade holomorfa de $\mathcal{O}_r = O_r(\mathbb{P}^1)$, resulta do teorema (1.64) que $\mathcal{H}_r(G)$ tem uma única estrutura de variedade holomorfa de dimensão igual à de $\mathcal{O}_r$, i.e., r, tal que Ψ é um revestimento holomorfo.*

Capítulo 3

Acção do grupo das tranças sobre os espaços de moduli

Sabemos que o grupo fundamental de $\mathcal{O}_r$ age sobre as fibras do revestimento

$$\Psi : \mathcal{H}_r(G) \to \mathcal{O}_r.$$

Tem, portanto, interesse para o estudo dos espaços de moduli dos revestimentos de Galois da esfera de Riemann conhecer o grupo fundamental de $\mathcal{O}_r$. Iremos ver que este grupo é isomorfo ao grupo de Artin das r-tranças, $B(r)$.

Da acção do grupo fundamental de $\mathcal{O}_r$ sobre a fibra de um conjunto fixo P de pontos de ramificação, resulta uma acção de $B(r)$ sobre os sistemas de geradores de G que parametrizam esta fibra, o que permitirá estabelecer relações entre invariantes topológicos da variedade $\mathcal{H}_r(G)$ e invariantes algébricos da acção.

3.1 O grupo das tranças

Seja X um espaço topológico e fixemos r pontos distintos $p_1, ..., p_r$ de X. Considerando o espaço $X \times \mathbb{R}$, vamos considerar os r pontos distintos $(p_1, 0), ..., (p_n, 0)$ do 'plano' $X \times \{0\}$ e os r pontos distintos $(p_1, 1), ..., (p_r, 1)$ do 'plano' $X \times \{1\}$.

Definição 3.1. Uma *trança de r cordas* (ou uma *r-trança*) em X é um r-uplo ordenado de r arcos $\alpha = (\alpha^1, ..., \alpha^r)$ definidos no espaço $X \times \mathbb{R}$, onde cada arco α^i é um caminho une o ponto $(p_i, 0)$ do plano $X \times \{0\}$ ao ponto $(p_{\tau(i)}, 1)$ do plano $X \times \{1\}$, para alguma permutação $\tau \in S_r$, e tal que:

(a) cada arco α^i intersecta exactamente uma vez cada plano $X \times \{t\}$ para $t \in [0, 1]$;

(b) os r arcos $\alpha^1, ..., \alpha^n$ intersectam cada plano $X \times \{t\}$ para $t \in [0, 1]$ exactamente em r pontos distintos.

A cada arco α^i chamamos a i-ésima *corda* da trança α. Dizemos que τ é a permutação associada à r-trança α.

Observação 3.2. A condição (b) impõe que duas cordas de uma r-trança nunca se intersectem. Por (a), podemos olhar para cada corda como sendo um caminho simples $\alpha^i : [0,1] \to X \times [0,1]$, $t \mapsto (\tilde{\alpha}^i(t), \phi^i(t))$ em que $\alpha^i(0) = (p_i, 0)$, $\alpha^i(1) = (p_{\tau(i)}, 1)$ e $\phi^i : [0,1] \to [0,1]$ é estritamente crescente.

Definição 3.3. Duas r-tranças $\alpha_0 = (\alpha_0^1, ..., \alpha_0^r)$ e $\alpha_1 = (\alpha_1^1, ..., \alpha_1^r)$, com a mesma permutação τ, dizem-se *equivalentes* (ou *homotópicas*) se existir uma homotopia entre as suas cordas, i.e., se existirem r funções contínuas $H^i : [0,1] \times [0,1] \to X \times [0,1]$ tais que, para todo o $i = 1, ..., r$,

$$\begin{aligned} &H^i(0,t) = \alpha_0^i(t), \forall t \in [0,1]; \\ &H^i(1,t) = \alpha_1^i(t), \forall t \in [0,1]; \\ &H^i(s,0) = (p_i, 0) \quad \text{e} \quad H^i(s,1) = (p_{\tau(i)}, 1), \quad \forall s \in [0,1], \end{aligned}$$

em que $H_s(t) := (H^1(s,t), ..., H^r(s,t))$ é ainda uma r-trança satisfazendo as condições (a) e (b) e com a mesma permutação τ.

Esta relação binária no conjunto das r-tranças é uma relação de equivalência e, para $\bar{P} := (p_1, ..., p_r)$, notamos por $B(r, X, \bar{P})$ o conjunto das classes de equivalência das r-tranças definidas em X.

Definimos o *produto* entre duas r-tranças β_1 e β_2 de modo análogo ao produto entre caminhos, notando por $\beta_2.\beta_1$ a trança obtida pela composição de β_2 após β_1. Sendo , a i-ésima corda do produto $\beta_2.\beta_1$ é o arco

$$(\beta_2.\beta_1)^i := \begin{cases} (\tilde{\beta}_1^i(2t), \phi_1^i(t)) & \text{se} \quad t \in [0, 1/2], \\ (\tilde{\beta}_2^i(2t-1), \phi_2^i(t)) & \text{se} \quad t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Esta composição corresponde a uma colagem entre o plano superior de β_1 e o plano inferior de β_2, condensando a nova trança obtida de modo a que também esta esteja definida entre os planos $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$. Notemos que esta colagem está bem definida, uma vez que podemos identificar cada ponto final $(p_{\tau_1(i)}, 1)$ da trança β_1 com o ponto inicial $(p_{\tau_1(i)}, 0)$ de β_2. Temos assim que a trança $\beta_2.\beta_1$ envia cada ponto $(p_i, 0)$ do plano $X \times \{0\}$ num ponto $(p_{\tau_2 \circ \tau_1(i)}, 1)$ do plano $X \times \{1\}$.

O produto de duas classes de homotopia $[\beta_2].[\beta_1]$ é definido por $[\beta_2.\beta_1]$. Este produto está bem definido, uma vez que tranças homotópicas induzem a mesma permutação, i.e., se β_1^* é homotópica a β_1 então $p_{\tau(i)} = p_{\tau^*(i)}$, para todo $i = 1, ..., r$, e o produto entre classes não depende dos representantes escolhidos, pois os produtos $\beta_2^*.\beta_1^*$ e $\beta_2.\beta_1$ estão bem definidos e é fácil verificar que são homotópicos.

A r-trança *trivial* ε é a trança constituída pelos arcos definidos por $\alpha^i(t) = (p_i, t)$, que unem os pontos $(p_i, 0)$ directamente aos pontos $(p_i, 1)$. A classe de equivalência de ε actua como elemento neutro para o produto definido.

Iremos demonstrar que $B(r, X, P)$ é um grupo, a que chamamos grupo de Artin das r-tranças. Comecemos por introduzir alguns resultados, necessários a esta demonstração.

Lema 3.4. *Seja X um espaço topológico e $\phi : [0,1] \to [0,1]$ uma aplicação contínua tal que $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$. Então os caminhos $\alpha : [0,1] \to X \times [0,1]$, $t \mapsto (\alpha(t), t)$ e $\alpha' : [0,1] \to X \times [0,1]$, $t \mapsto (\alpha(\phi(t)), \phi(t))$ são homotópicos.*

Demonstração. A função

$$\begin{array}{rcl} H : [0,1] \times [0,1] & \to & X \times [0,1] \\ (s,t) & \mapsto & (\alpha((1-s)t + s\phi(t)), (1-s)t + s\phi(t)) \end{array}$$

é uma homotopia entre os caminhos α e α'. □

0.5cm Seja X uma variedade real de dimensão $d \geq 2$ conexa. Para $m \geq 0$, consideremos um conjunto $Q_m = \{q_1, ..., q_m\}$ de m pontos distintos de X (para $m = 0$, Q_0 é o conjunto vazio) e o espaço de configuração

$$F_{r,m} := F_r(X \setminus Q_m) = \{(x_1, ..., x_r) \in (X \setminus Q_m)^r : x_i \neq x_j \quad \text{para} \quad i \neq j\}.$$

Se $Q'_m = \{q'_1, ..., q'_m\}$ for outro conjunto de m pontos distintos de X, existe um homeomorfismo de X que envia Q_m em Q'_m. Temos então que os seus complementares $X \setminus Q_m$ e $X \setminus Q'_m$ são homeomorfos e que, portanto, também os espaços $F_r(X \setminus Q_m)$ e $F_r(X \setminus Q'_m)$ são homeomorfos. O que nos leva a concluir que a topologia do espaço de configuração $F_{r,m}(X)$ é independente da escolha do conjunto Q_m.

Notemos ainda que $F_{r,0}(X) = F_r(X)$ e $F_{1,m} = X \setminus Q_m$.

Teorema 3.5. *Sejam $r \geq 2$, $m \geq 0$ e $1 \leq s < r$. A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} f : F_{r,m}(X) & \to & F_{s,m}(X) \\ (x_1, ..., x_r) & \mapsto & (x_1, ..., x_s) \end{array}$$

é uma fibração localmente trivial com fibra $F_{r-s,m+s}(X)$.

Demonstração. Seja $(x_1^0, ..., x_s^0) \in F_{s,m}$. A imagem inversa deste ponto pela aplicação f é o conjunto

$$f^{-1}(x_1^0, ..., x_s^0) = \{(x_1^0, ..., x_s^0, y_1, ...y_{r-s}) : y_i \in X \setminus Q_m \text{ e } y_i \neq y_j \text{ para } i \neq j\}.$$

Definindo $Q_{m+s} := Q_m \cup \{x_1^0, ..., x_s^0\}$, temos que

$$F_{r-s,m+s}(X) = \{(y_1, ...y_{r-s}) : y_i \in X \setminus Q_{m+s} \text{ e } y_i \neq y_j \text{ para } i \neq j\},$$

pelo que temos o homeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} f : F_{r-s,m+s}(X) & \to & f^{-1}(x_1^0, ..., x_s^0) \\ (y_1, ...y_{r-s}) & \mapsto & (x_1^0, ..., x_s^0, y_1, ..., y_{r-s}) \end{array}$$

Vamos agora mostrar, apenas para $s = 1$ (o que permite simplificar a notação), que f é uma fibração localmente trivial. Seja $x_0 \in F_{1,m}(X)$ e $Q_{m+1} := Q_m \cup \{x_0\}$. Seja U uma vizinhança aberta de x_0 contida em $X \setminus Q_m$ e homeomorfa a um disco aberto de $\mathbb{R}^d$. Seja $\bar{U} := U \cup \partial U$, onde ∂U é a fronteira de U.

Vamos definir uma aplicação contínua $\theta : U \times \bar{U} \to \bar{U}$, $(x, y) \mapsto \theta(x, y) =: \theta_x(y)$ com as seguintes propriedades:

(i) $\theta_x : \bar{U} \to \bar{U}$ é um homeomorfismo que fixa ∂U pontualmente;

(ii) $\theta_x(x) = x_0$.

Pela propriedade (i), θ pode ser prolongada a uma aplicação contínua $\theta : U \times X \to X$ definindo $\theta(x, y) = y$ para $y \notin U$.

O homeomorfismo $\theta_x : X \to X$ envia $r-1$ pontos distintos de $X \setminus \{x\}$ em $r-1$ pontos distintos de $X \setminus \{x_0\}$. Ou seja, envia a fibra $f^{-1}(x)$ homeomorficamente na fibra $f^{-1}(x_0)$, pelo que localmente f pode ser representada pelo homeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} U \times F_{r-1,m+1}(X) & \to & f^{-1}(U) \\ (x, y_1, ... y_{r-1}) & \mapsto & (x, \theta_x^{-1}(y_1), ..., \theta_x^{-1}(y_{r-1})) \end{array}$$

com inversa definida por $(x, z_1, ..., z_{r-1}) \mapsto (x, \theta_x(z_1), ..., \theta_x(z_{r-1}))$.

Dada a escolha de U, basta-nos apenas demonstrar a existência da aplicação θ, com as propriedades (i) e (ii) referidas, definida num disco aberto de $\mathbb{R}^d$. Considerando em $\mathbb{R}^d$ a norma euclidiana $\|.\|$, seja $B \subset \mathbb{R}^d$ o disco aberto unitário, $\bar{B} = \{y \in \mathbb{R}^r : \|y\| \leq 1\}$ e tomemos $x_0 = 0$.

Para cada $x \in B$, seja $\alpha := (\|x\|^2 + 1/3(1 - \|x\|^2))^2$ e $\beta := (\|x\|^2 + 2/3(1 - \|x\|^2))^2$. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$t \mapsto \begin{cases} exp(\frac{1}{t-\beta} - \frac{1}{t-\alpha}) & \text{se} \quad \alpha < t < \beta \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $\Phi(y) := \frac{\int_y^\beta \phi(t)dt}{\int_\alpha^\beta \phi(t)dt}$. Então Φ satisfaz

$$\Phi(y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |y| \leq \alpha \\ 0 & \text{se} \quad |y| \geq \beta. \end{cases}$$

Definindo agora uma função $\lambda_x : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ por $\lambda_x(y) := \Phi(\|y\|^2)$, temos que

$$\lambda_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq \|y\|^2 \leq \alpha \\ 0 & \text{se} \quad \beta \leq \|y\|^2 \leq 1, \end{cases}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda : B \times \bar{B} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $\lambda(x, y) := \lambda_x(y)$ é de classe c^∞.

Para $x \in B$ vamos agora definir um campo de vectores v_x em $\bar{B}$ por

$$v_x(y) := \lambda_x(y).(x_0 - x) = -\lambda_x(y)x$$

e seja $\theta_x^t(y)$, $t \in \mathbb{R}$, o respectivo fluxo (notemos que λ é limitada). Então o homeormorfismo $\theta_x(y) := \theta_x^1(y)$ tem as propriedades desejadas. $\square$

Corolário 3.6. *Para o espaço de configuração $F_r(\mathbb{C})$ de r pontos ordenados distintos de $\mathbb{C}$ temos que*

$$\pi_i(F_r(\mathbb{C})) = 1 \quad \textit{para} \quad i \geq 2.$$

De um modo mais geral, temos, $\forall r \geq 1$ e $m \geq 0$,

$$\pi_i(F_{r,m}(\mathbb{C})) = 1 \quad \textit{para} \quad i \geq 2.$$

Demonstração. Vamos usar a notação $F_{r,m} := F_{r,m}(\mathbb{C})$ e considerar o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} F_{1,r-1} \to & F_{2,r-2} \to & \dots & \to F_{r-2,2} \to & F_{r-1,1} \to & F_{r,0} & = F_r(\mathbb{R}^2) \\ & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & F_{1,r-2} & \dots & F_{1,2} & F_{1,1} & F_{1,0} & , \end{array}$$

onde as aplicações (verticais) $F_{i,j} \to F_{i-1,j}$ são as fibrações do teorema anterior e as aplicações (horizontais) $F_{i,j} \to F_{i+1,j-1}$ são inclusões das fibras em fibras correspondentes obtidas pela inserção de uma nova coordenada.

Notemos que $\pi_i(F_{1,m}) = \pi_i(\mathbb{C} \setminus P_m) = 1$, para $i \geq 2$.

Pelo teorema da sucessão exacta de uma fibração localmente trivial (teorema 1.26), considerando a primeira fibração do diagrama anterior, temos, para $i \geq 2$, a sucessão exacta

$$\pi_{i+1}(F_{1,r-1}) \to \pi_i(F_{2,r-2}) \to \pi_i(F_{1,r-2}) \to \pi_i(F_{1,r-1})$$

e, como $\pi_i(F_{1,r-1}) = 1$, concluímos que $\pi_i(F_{2,r-2}) \simeq \pi_i(F_{1,r-2})$ e, em particular, que $\pi_i(F_{2,r-2}) = 1$.

Seguindo as várias fibrações do diagrama, vamos concluindo, do mesmo modo, que $\pi_i(F_{j,n-j}) = 1$. Da última fibração, concluímos que $\pi_i(F_{n,0}) = 1$, ou seja, $\pi_i(F_n(\mathbb{C})) = 1$, para $i \geq 2$, como pretendido.

Mais geralmente, como passo intermédio, provámos que $\pi_i(F_{j,r-j}) = 1$. Tomando $r = r' + m'$ e $j = r'$ temos que $\pi_i(F_{r',m'}) = 1$, o que nos leva a concluir que $\pi_i(F_{r,m}(\mathbb{C})) = 1$, para $i \geq 2$. □

Os espaços de configuração podem ser usados para definir uma r-trança em X. Consideremos o revestimento de Galois de grau $r!$

$$\vartheta : F_r(X) \to O_r(X)$$

definido na secção (2.3). Notemos que o grupo de automorfismos deste revestimento é isomorfo a S_r através da aplicação que envia cada $\tau \in S_r$ no automorfismo definido por

$$(x_1, ..., x_r) \mapsto (x_{\tau^{-1}(1)}, ..., x_{\tau^{-1}(r)}).$$

Escolhamos um elemento $\bar{P}_0 \in F_r(X)$ e seja $P_0 := \vartheta(\bar{P}_0) \in O_r(X)$. Vamos considerar um elemento arbitrário $[\gamma] \in \pi_1(O_r(X), P_0)$ e um seu representante $\gamma : [0,1] \to O_r(X)$ com base em P_0. Existe um único levantamento $\tilde{\gamma}$ de γ por ϑ com ponto inicial $\bar{P}_0$. Podemos olhar para $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_r)$ como um conjunto de r caminhos $\tilde{\gamma}_i : [0,1] \to X$, para $1 \leq i \leq r$, que satisfazem $\tilde{\gamma}_i(t) \neq \tilde{\gamma}_j(t)$ para $i \neq j$ e $t \in [0,1]$. Notemos que o conjunto ordenado $(\tilde{\gamma}_1(1), ..., \tilde{\gamma}_r(1))$ de pontos de X é apenas uma permutação do conjunto $(\tilde{\gamma}_1(0), ..., \tilde{\gamma}_r(0))$, uma vez que $\vartheta(\tilde{\gamma}(1)) = \vartheta(\tilde{\gamma}(0)) = P_0$.

Definindo funções $\hat{\gamma}_i : [0,1] \to X \times [0,1]$, para $1 \leq i \leq n$, por $\hat{\gamma}_i(t) := (\tilde{\gamma}_i(t), t)$, o r-uplo $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, ..., \hat{\gamma}_r)$ está nas condições da definição 3.1. Ou seja, $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, ..., \hat{\gamma}_r)$ é um sistema de r cordas que define uma r-trança no espaço $X \times [0,1]$. Em particular, o sistema $\hat{\gamma}$ une o conjunto de pontos $(p_1, 0), ..., (p_r, 0)$ de $X \times \{0\}$ (em que p_i correspondem às r coordenadas do elemento $\bar{P}_0 \in F_r(X)$) ao conjunto de pontos $(p_1, 1), ..., (p_r, 1)$ em $X \times \{1\}$, de acordo com a permutação que envia $\tilde{\gamma}(0)$ em $\tilde{\gamma}(1)$.

Teorema 3.7. *Seja $\bar{P}_0 = (p_1, ..., p_r)$ um conjunto ordenado de r pontos distintos de uma variedade conexa X e $P_0 = \vartheta(\bar{P}_0)$. Então $B(r, X, \bar{P}_0)$ é um grupo isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(O_r(X), P_0)$.*

Demonstração. Já vimos como, dado γ pertencente a uma classe $[\gamma] \in \pi_1(O_r(X), P_0)$, podemos construir uma r-trança $\hat{\gamma}$. Se $\gamma' \in [\gamma]$ é um outro caminho homotópico a γ, pela alínea (b) do teorema 1.32, então também os levantamentos $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\gamma}'$ com ponto inicial $\bar{P}_0$ são homotópicos. Logo, existe também uma homotopia entre $\hat{\gamma}$ e $\hat{\gamma}'$, pelo que $[\hat{\gamma}] = [\hat{\gamma}']$. Concluímos então que a aplicação $\pi_1(O_r(X), P_0) \to B(r, X, \bar{P}_0)$, $[\gamma] \mapsto [\hat{\gamma}]$ está bem definida.

Consideremos agora uma classe de r-tranças $[\alpha] \in B(r, X, \bar{P}_0)$ e seja $\alpha \in [\alpha]$. Então $\alpha = (\alpha^1(t), ..., \alpha^r(t))$, com $\alpha^i(t) = (\tilde{\alpha}^i(t), \phi^i(t))$. Seja $\vartheta(\alpha)(t) := (\vartheta(\tilde{\alpha}^1(t)), ..., \vartheta(\tilde{\alpha}^r(t)))$. Então $\vartheta(\alpha)$ é um lacete em $O_r(X)$ com base em P_0 (notemos que, pela definição de trança, $\alpha(t) \in F_r(X)$, para todo $t \in [0,1]$, e que $\vartheta(\alpha)(0) = \vartheta(\alpha)(1) = \{p_1, ..., p_r\}$). Se α' é uma r-trança homotópica a α, então também os lacetes $\vartheta(\alpha)$ e $\vartheta(\alpha')$ são homotópicos, pelo que também a aplicação $B(r, X, \bar{P}_0) \to \pi_1(O_r(X), P_0)$, $[\alpha] \mapsto [\vartheta\gamma]$, está bem definida.

Estas aplicações são inversas uma da outra e definem uma bijecção entre os conjuntos $\pi_1(O_r(X), P_0)$ e $B(r, X, \bar{P}_0)$.

Dadas duas classes $[\alpha], [\beta] \in B(r, X, \bar{P}_0)$, pelo lema (3.4), podemos escolher representantes $\alpha = (\alpha^1, ..., \alpha^r)$ e $\beta = (\beta^1, ..., \beta^r)$, com $\alpha^i(t) = (\tilde{\alpha}^i(t), t)$ e $\beta^i(t) = (\tilde{\beta}^i(t), t)$, para $i = 1, ..., r$. Então o produto $\beta\alpha$ é da forma $\beta\alpha = ((\beta\alpha)^1, ..., (\beta\alpha)^r)$ com

$$(\beta\alpha)^i = \begin{cases} (\tilde{\alpha}^i(2t), t) & \text{se} \quad t \in [0, 1/2], \\ (\tilde{\beta}^i(2t-1), t) & \text{se} \quad t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

E temos então que

$$\vartheta(\beta\alpha) = \begin{cases} (\vartheta(\tilde{\alpha}^1(2t)), ..., \vartheta(\tilde{\alpha}^r(2t))) & \text{se} \quad t \in [0, 1/2], \\ (\vartheta(\tilde{\beta}^1(2t-1)), ..., \vartheta(\tilde{\beta}^r(2t-1))) & \text{se} \quad t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

coincide com o produto de lacetes $\vartheta(\beta).\vartheta(\alpha)$. Logo $[\vartheta(\beta\alpha)] = [\vartheta(\beta)][\vartheta(\alpha)]$.

Concluímos, assim, que as bijecções anteriores preservam produtos e que, portanto, $B(r, X, \bar{P}_0)$ é um grupo isomorfo a $\pi_1(O_r(X), P_0)$.□

O grupo $\pi_1(F_r(X), \bar{P}_0)$ é designado por *grupo de Fox das r-tranças puras* em X.

Consideremos agora o caso particular em que X é o plano complexo $\mathbb{C}$ e fixemos os pontos

$$p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ ...,\ p_r = r.$$

Seja $\bar{P}_0 = (p_1, ..., p_r)$. Consideremos o grupo $B(r) := B(r, \mathbb{C}, \bar{P}_0)$, usualmente designado por *grupo de Artin das r-tranças geométricas.*

Seja $\vartheta : F_r(\mathbb{C}) \to O_r(\mathbb{C})$ o revestimento definido anteriormente e $P_0 := \vartheta(\bar{P}_0) \in O_r(\mathbb{C})$. Do corolário (3.6) deduzimos a sucessão exacta de grupos

$$1 \to \pi_1(F_r(\mathbb{C}), \bar{P}_0) \to \pi_1(O_r(\mathbb{C}), P_0) \to S_r \to 1.$$

Identificando

$$B(r) = \pi_1(O_r(\mathbb{C}), P_0)$$

e definindo

$$H(r) := \pi_1(F_r(\mathbb{C}), \bar{P}_0),$$

obtemos a sucessão exacta

$$1 \to H(r) \to B(r) \to S_r \to 1$$

designada por a *sucessão do grupo das r-tranças.*

O homomorfismo $\tau_r : \pi_1(O_r(\mathbb{C}), P_0) \to S_r$ é definido por enviar cada $[\gamma]$ na permutação τ do seu levantamento por ϑ. Ou, de outro modo, considerando a identificação $B(r) \simeq \pi_1(O_r(\mathbb{C}), P_0)$, τ_r é definido por enviar cada r-trança β na permutação que induz sobre os pontos $p_1, ..., p_r$.

Para $i = 1, ..., r-1$, vamos notar por σ_i a r-trança *elementar* que resulta do 'cruzamento simples' da corda α^i com a corda α^{i+1}, sendo as restantes cordas segmentos verticais que unem directamente os pontos de $z = 0$ às suas projecções ortogonais sobre $z = 1$.

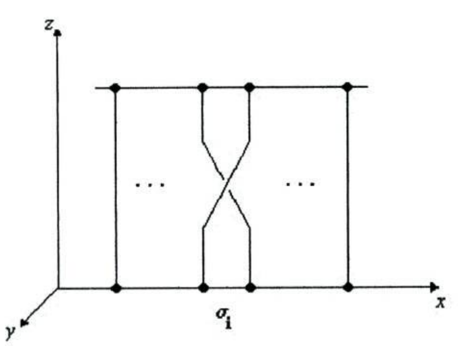

Figura 3.1: Trança elementar σ_i

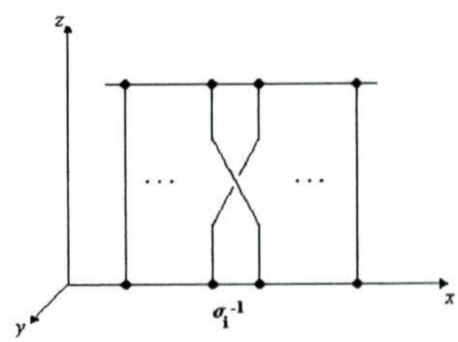

Figura 3.2: Trança elementar σ_i^{-1}

Estamos a considerar a um cruzamento em que a corda α^i passa 'à frente' da corda α^{i+1}. Portanto, σ_i^{-1} é também uma trança elementar que resulta apenas do cruzamento destas duas cordas, mas em que a corda α^i passa 'por detrás' de α^{i+1}.

Através de homotopias, podemos representar cada classe de homotopia por uma trança em que as suas cordas se vão cruzando em níveis distintos, como mostra a figura (3.3).

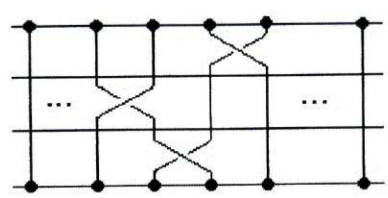

Figura 3.3: Decomposição de uma trança em tranças elementares

Observando a figura, é intuitivo notarmos que qualquer classe de equivalência pode ser representada por uma trança que se decompõe em tranças elementares, ou seja, por uma trança que pode ser escrita como um produto de tranças elementares (por exemplo, na figura, a trança representada é $\beta = \sigma_{i+2}^{-1}.\sigma_i.\sigma_{i+1}^{-1}$).

Pretendemos agora demonstrar o teorema

Teorema 3.8 (Apresentação de Artin para o grupo $B(r)$). *O grupo $B(r)$ das r-tranças geométricas admite uma apresentação dada pelos geradores*

$$\sigma_1, ..., \sigma_{r-1}$$

e pelas relações

(1) $\sigma_i.\sigma_j = \sigma_j.\sigma_i$ *se* $|i-j| \geq 2$ *e* $1 \leq i, j \leq r-1$;

(2) $\sigma_i.\sigma_{i+1}.\sigma_i = \sigma_{i+1}.\sigma_i.\sigma_{i+1}$ *se* $1 \leq i \leq r-2$.

Demonstração:

Através de alguns esquemas é fácil percebermos que as relações (1) e (2) são válidas em $B(r)$, como mostram as figuras (3.4) e (3.5).

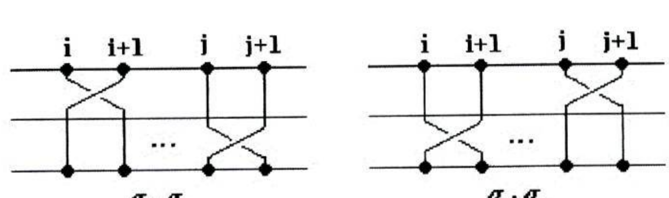

Figura 3.4: Este esquema ilustra a relação (1).

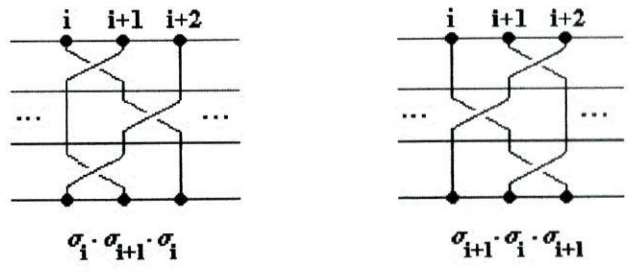

Figura 3.5: Este esquema ilustra a relação (2).

Vamos usar a identificação $B(r) \simeq \pi_1(O_r(\mathbb{C}), P_0)$, para $P_0 = \{p_1, ..., p_r\}$.

Notemos que cada r-trança elementar σ_i, para $1 \leq i \leq r-1$, pode ser representada pelo caminho (família de r caminhos) $\tilde{\gamma} : [0,1] \to F_r(\mathbb{C})$ definido por

$$\tilde{\gamma}(t) := (p_1, ..., p_{i-1}, \tilde{\gamma}_i(t), \tilde{\gamma}_{i+1}(t), p_{i+2}, ..., p_r),$$

onde $\tilde{\gamma}_i(t) := (p_i + \sin(\frac{\pi}{2}t), \sin(\pi t))$ e $\tilde{\gamma}_{i+1}(t) := (p_i + \cos(\frac{\pi}{2}t), -\sin(\pi t))$.

Como

$$\tilde{\gamma}(0) = (p_1, ..., p_i, p_{i+1}, ..., p_r) \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}(1) = (p_1, ..., p_{i+1}, p_i, ..., p_r),$$

o caminho $\tilde{\gamma}$ é enviado pelo revestimento ϑ num lacete $\gamma : [0,1] \to O_r(\mathbb{C})$ com $\gamma(0) = \gamma(1) = P_0$, que representa σ_i em $\pi_1(O_r(\mathbb{C}), P_0)$.

Seja B_r um grupo abstracto com apresentação dada por geradores

$$\bar{\sigma}_1, ..., \bar{\sigma}_{r-1}$$

e por relações

(1) $\bar{\sigma}_i.\bar{\sigma}_j = \bar{\sigma}_j.\bar{\sigma}_i$ se $|i-j| \geq 2$ e $1 \leq i, j \leq r-1$;

(2) $\bar{\sigma}_i.\bar{\sigma}_{i+1}.\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{i+1}.\bar{\sigma}_i.\bar{\sigma}_{i+1}$ se $1 \leq i \leq r-2$.

Chamemos aos elementos de B_r r-tranças algébricas.

Existe um homomorfismo $\iota_r : B_r \to B(r)$ definido por $\iota_r(\tilde{\sigma}_i) = \sigma_i$. Este homomorfismo está bem definido, uma vez que que as relações (1) e (2) são válidas em ambos os grupos. Resta-nos mostrar que ι_r é um isomorfismo para obtermos o pretendido.

Para $B(r)$ temos a sucessão exacta do grupo das tranças

$$1 \to H(r) \underset{\rho_r}{\to} B(r) \underset{\tau_r}{\to} S_r \to 1,$$

onde ρ_r é a inclusão e τ_r o homomorfismo que envia cada trança na sua permutação. Podemos então encarar $H(n)$ com o subgrupo das tranças associadas à permutação trivial.

Para o grupo abstracto B_r, temos um homomorfismo natural

$$\bar{\tau}_r : B_r \to S_r$$

definido por enviar cada $\bar{\sigma}_i$ na transposição $(i, i+1)$ de S_r, i.e., na permutação de S_r em que apenas o elemento i troca de posição com o elemento $i+1$. Como as relações (1) e (2) são válidas em S_r, $\bar{\tau}_r$ está bem definido e, uma vez que o conjunto das transposições gera S_r, é sobrejectivo.

Seja H_r o núcleo de $\bar{\tau}_r$, $H_r := ker(\bar{\tau}_r)$, e seja $\bar{\rho}_r : H_r \to B_r$ o homomorfismo definido pela inclusão.

Temos então para B_r a sucessão exacta

$$1 \to H_r \xrightarrow{\bar{\rho}_r} B_r \xrightarrow{\bar{\tau}_r} S_r \to 1.$$

Como também $\tau_r(\sigma_i)$ é a transposição $(i, i+1)$ de S_r, obtemos um diagrama comutativo de sucessões exactas

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \to & H_r & \xrightarrow{\bar{\rho}_r} & B_r & \xrightarrow{\bar{\tau}_r} & S_r \to 1 \\ & \downarrow \iota_r' & & \downarrow \iota_r & & \downarrow Id \\ 1 \to & H(r) & \to & B(r) & \to & S(r) \to 1, \end{array}$$

onde ι_r' é a restrição de ι_r ao subgrupo H_r.

Temos então que o homomorfismo $\iota_r : B_r \to B(r)$ é um isomorfismo se e somente se $\iota_r' : H_r \to H(r)$ é isomorfismo.

Vamos agora demonstrar que $\iota_r' : H_r \to H(r)$ é um isomorfismo de grupos. Para tal, comecemos por dar uma apresentação do grupo H_r.

Lema 3.9. *O grupo H_r admite uma apresentação dada pelos geradores*

$$a_{ij} := \bar{\sigma}_{j-1}\bar{\sigma}_{j-2}...\bar{\sigma}_{i+1}\bar{\sigma}_i^2\bar{\sigma}_{i+1}^{-1}...\bar{\sigma}_{j-2}^{-1}\bar{\sigma}_{j-1}^{-1} \quad \textit{para} \quad 1 \leq i < j \leq r$$

e pelas relações

$$a_{uv}^{-1}a_{ij}a_{uv} = \begin{cases} a_{ij} & \textit{se} \quad i < u < v < j \quad \textit{ou} \quad u < v < i < j, \\ a_{uj}a_{ij}a_{uj}^{-1} & \textit{se} \quad u < i = v < j, \\ a_{uj}a_{vj}a_{ij}a_{vj}^{-1}a_{uj}^{-1} & \textit{se} \quad i = u < v < j, \\ a_{uj}a_{vj}a_{uj}^{-1}a_{vj}^{-1}a_{ij}a_{vj}a_{uj}a_{vj}^{-1}a_{uj}^{-1} & \textit{se} \quad u < i < v < j. \end{cases}$$

Demonstração. [9], p.165-170.

A r-trança geométrica que corresponde a a_{ij}, é a trança em que a sua corda j dá uma volta em torno da corda i por 'detrás' das cordas intermédias, como mostra a figura (3.6).

A r-trança geométrica que corresponde a a_{ij}^{-1} coincide também com o esquema representado na figura (3.6) excepto no facto de a corda j dar uma volta em torno da corda i no

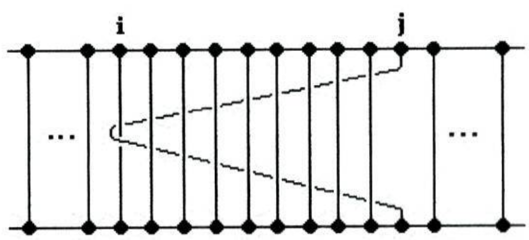

Figura 3.6:

sentido contrário (passa primeiro pela frente e depois por detrás). As tranças geométricas puras podem ser escritas como produtos de tranças deste tipo.

O grupo H_{r-1} pode ser identificado com o subgrupo de H_r gerado por

$$\{a_{ij} : 1 \leq i < j \leq r-1\}.$$

Existe um homomorfismo natural $\eta : H_r \to H_{r-1}$ definido por $\eta(a_{ij}) = a_{ij}$ se $i < j \leq r-1$ e por $\eta(a_{ir}) = 1$ se $\leq i < r$. O núcleo deste homomorfismo é o subgrupo N_r de H_r gerado pelos elementos $a_{1r}, a_{2r}, ..., a_{(r-1)r}$. Notemos que N_r é um subgrupo normal, uma vez que cada elemento da forma $a_{uv}^{-1} a_{ir} a_{uv}$ está em N_r (consideremos as relações do lema 3.9 com $j = r$).

Obtemos, assim, a sucessão exacta de grupos

$$1 \to N_r \to H_r \to H_{r-1} \to 1.$$

Vamos agora construir, para o grupo das tranças, uma sucessão exacta que corresponda a esta sucessão. Comecemos por considerar a fibração $f : F_r(\mathbb{C}) \to F_{r-1}(\mathbb{C})$ de fibra $F_{1,r-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus P_{r-1}$. Como $\pi_i(F_r(\mathbb{C})) = 1$, para $i \geq 2$, temos a sucessão exacta

$$1 \to \pi_1(F_{1,r-1}(\mathbb{R}^2)) \to \pi_1(F_r(\mathbb{R}^2)) \to \pi_1(F_{r-1}(\mathbb{R}^2)) \to 1,$$

onde $f_* : \pi_1(F_r(\mathbb{C})) \to \pi_1(F_{r-1}(\mathbb{C}))$ é o homomorfismo definido por retirarmos a corda r a cada r-trança.

Usando as identificações

$$H(r) = \pi_1(F_r(\mathbb{C})) \quad \text{e} \quad H(r-1) = \pi_1(F_{r-1}(\mathbb{C})),$$

obtemos a sucessão exacta pretendida

$$1 \to \pi_1(F_{1,r-1}(\mathbb{C})) \to H(r) \to H(r-1) \to 1.$$

Notemos que

$$ker(f_*) = \pi_1(F_{1,r-1}(\mathbb{C}))) = \pi_1(\mathbb{C} \setminus P_{r-1})$$

é um grupo livre em $r-1$ geradores. Notemos ainda que a acção do homomorfismo f_* sobre uma trança correspondente a a_{ij} é igual à acção de η sobre a_{ij}. Pelo que temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \eta & & \\ 1 \rightarrow & N_r & \rightarrow & H_r & \rightarrow & H_{r-1} \rightarrow 1 \\ & \downarrow \iota_r'' & & \downarrow \iota_r' & & \downarrow \iota_{r-1}' \\ 1 \rightarrow & \pi_1(F_{1,r-1}(\mathbb{C})) & \rightarrow & H(r) & \rightarrow & H(r-1) \rightarrow 1, \end{array}$$

onde ι_r'' é a restrição de ι_r' a N_r.

Vamos agora demonstrar que $\iota_r'' : N_r \rightarrow \pi_1(F_{1,r-1}(\mathbb{C}))$ é um isomorfismo.

Considerando os r pontos $p_1, ..., p_r$ de $\mathbb{C}$, usados para definir as r-tranças geométricas, temos que as r-tranças puras em $H(r)$ são representadas por lacetes em $F_r(\mathbb{C})$ com base no ponto $\bar{P}_0 = (p_1, ..., p_r) \in F_r(\mathbb{C})$. Do mesmo modo, as $(r-1)$-tranças puras em $H(r-1)$ são representadas por lacetes em $F_{r-1}(\mathbb{C})$ com base no ponto $(p_1, ..., p_{r-1}) \in F_{r-1}(\mathbb{C})$.

Considerando a fibração $f : F_r(\mathbb{C}) \rightarrow F_{r-1}(\mathbb{C})$, o ponto base da fibra $F_{1,r-1}(\mathbb{C}))$ é o ponto $p_r \in F_{1,r-1}(\mathbb{C})) = \mathbb{C} \setminus \{p_1, ..., p_{r-1}\}$.

A trança geométrica $\iota_r'(a_{ij})$ que corresponde ao elemento a_{ij} de H_r é a trança em que a corda j dá uma volta em torno da corda i. Temos então que $\iota_r'(a_{ir})$ é o lacete em $F_{1,r-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{p_1, ..., p_{r-1}\}$ com base em p_r que dá uma volta em torno do ponto p_i.

Resulta então que o conjunto $\{\iota_r'(a_{ir}) : 1 \leq i \leq r-1\}$ é uma base de geradores do grupo livre $\pi_1(F_{1,r-1}(\mathbb{C})) = \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, ..., p_{r-1}\})$.

Acabámos de verificar que o conjunto dos $r-1$ geradores $\{a_{ir} : 1 \leq i \leq r-1\}$ do grupo N_r é enviado sobrejectivamente sobre os $r-1$ geradores de um grupo livre. Caso existissem relações no grupo N_r, a sua imagem seria um subgrupo próprio de um grupo livre. Mas, qualquer subgrupo de um grupo livre é também um grupo livre, logo, N_r é um grupo livre e ι_r'' é um isomorfismo.

Como $H_1 = 1$ e $H(1) = \pi_1(F_1(\mathbb{C})) = 1$, temos que ι_1' é um isomorfismo. Admitamos, por hipótese de indução, que ι_{r-1}' é um isomorfismo. Como, no diagrama anterior, ι_r'' é um isomorfismo, concluímos que ι_r' é um isomorfismo.

Portanto, ι_r é um isomorfismo, o que completa a demonstração do teorema de apresentação de Artin.□

3.2 Acção do grupo das tranças

Pelo teorema (3.7), para $P \in \mathcal{O}_r$, sabemos que o grupo fundamental $\pi_1(O_r, P)$ pode ser canonicamente identificado com o grupo das r-tranças de Artin $B(r)$. Temos assim uma acção de $B(r)$ sobre as fibras do revestimento $\Psi : \mathcal{H}_r(G) \rightarrow \mathcal{O}_r$.

Para $P_0 = \{1, ..., r\} \in \mathcal{O}_r$, vamos determinar de um modo mais explícito essa acção sobre a fibra $\Psi^{-1}(P_0)$. Para isso vamos construir uma parametrização adequada desta fibra.

A fibra $\Psi^{-1}(P_0)$ é constituída por pontos $[P_0, \varphi]$ onde $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P_0, \infty) \rightarrow G$ é um homomorfismo sobrejectivo admissível. Consideremos em $\mathbb{P}^1 \setminus P_0$ lacetes $\gamma_1, ..., \gamma_r$ com base em ∞, em que cada lacete é definido por dar uma volta em torno do ponto i de P_0. (lacetes definidos como no teorema (2.22) para $y_0 = \infty$). Pelo lema (2.24), cada γ_i está na classe de conjugação Σ_i de $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P_0, \infty)$ associada ao ponto i. O produto $\gamma_1 ... \gamma_r$ é homotópico a um lacete com base em ∞ que dá uma volta em torno de todos os pontos de P_0, logo é homotopicamente nulo em $\mathbb{P}^1 \setminus P_0$. E, portanto, $[\gamma_1]...[\gamma_r] = 1$ em $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P_0, \infty)$. Ao aplicarmos o corolário (2.23), após uma transformação de coordenadas que envia o ponto r em ∞, concluímos que $\gamma_1 ... \gamma_{r-1}$ são geradores do grupo livre $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P_0, \infty)$.

Temos então que cada homomorfismo φ fica completamente determinado pelas imagens $g_1, ..., g_r$ dos geradores $\gamma_1, ..., \gamma_r$. Seja

$$\tilde{\mathcal{E}}_r(G) := \{(g_1, ..., g_r) \in G^r : G = \langle g_1, ..., g_r \rangle, g_1 ... g_r = 1, g_i \neq 1, \forall i\}.$$

O grupo $Inn(G)$ age sobre este conjunto enviando, para cada $A \in Inn(G)$, $(g_1, ..., g_r)$ em $(A(g_1), ..., A(g_r))$. Seja $\mathcal{E}_r(G)$ o conjunto das órbitas dos elementos de $\tilde{\mathcal{E}}_r(G)$ por esta acção.

Lema 3.10. *Seja $P_0 = \{1, ..., r\} \in \mathcal{O}_r$. Ao enviar cada ponto $[P_0, \varphi]$ na Inn-órbita de $(g_1, ..., g_r)$, onde $g_i = \varphi(\gamma_i)$, obtemos uma bijecção $\Psi^{-1}(P_0) \to \mathcal{E}_r(G)$.*

Demonstração. O homomorfismo sobrejectivo $\varphi : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P_0, \infty) \to G$ satisfaz $\varphi(\Sigma_i) \neq 1$, para todo o ponto i de P_0. Como $\gamma_i \in \Sigma_i$ resulta então que $\varphi(\gamma_i) \neq 1$ para todo $i = 1, ..., r$. Como $\gamma_1 ... \gamma_r = 1$, temos também que $g_1 ... g_r = 1$.

Dois homomorfismos φ e φ' correspondem a um mesmo elemento de $\Psi^{-1}(P_0)$ se e somente se $\varphi' = A \circ \varphi$, para algum $A \in Inn(G)$. E, nesse caso, os r-uplos correspondentes satisfazem $(g_1', ..., g_r') = (A(g_1), ..., A(g_r))$. Portanto a aplicação está bem definida e é injectiva.

É também sobrejectiva, uma vez que para cada $(g_1, ..., g_r) \in \mathcal{E}_r(G)$, podemos definir um homomorfismo φ ao enviarmos os geradores $\gamma_1, ..., \gamma_{r-1}$ do grupo livre $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P_0, \infty)$ nos geradores $g_1, ..., g_{r-1}$ (donde resulta que $\varphi(\gamma_r) = g_r$). □

Seja $(\theta_t)_{t \in [0,1]}$ uma família de homeomorfismos de um espaço topológico X. Dizemos que esta família é *contínua* se a aplicação $(t, x) \mapsto \theta_t(x)$ é uma aplicação contínua entre os espaços $[0, 1] \times X$ e X.

Lema 3.11. **(a)** *Cada homeomorfismo $\theta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ que fixa ∞ induz um homeomorfismo $\hat{\theta} : \mathcal{H}_r(G) \to \mathcal{H}_r(G)$ que envia $[P, \varphi]$ em $[\theta(P), \varphi\theta^{-1}]$, onde $\varphi\theta^{-1}$ é a composição de φ com a aplicação $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \theta(P), \infty) \to \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$ induzida por θ^{-1}.*

(b) *Se $(\theta_t)_{t \in [0,1]}$ é uma família contínua de homeomorfismos, então a família $(\hat{\theta}_t)_{t \in [0,1]}$ é também contínua.*

Demonstração. **(a)** Já foi visto que é possível definir um isomorfismo entre os grupos fundamentais $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \theta(P), \infty)$ e $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, \infty)$. Pela alínea (a) do lema (2.24), esta aplicação envia o subgrupo gerado pela classe de conjugação $\Sigma_{\theta(p)}$ no subgrupo gerado por Σ_p. E então $\varphi\theta^{-1} : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \theta(P), \infty) \to G$ é claramente um homomorfismo sobrejectivo que satisfaz $\varphi\theta^{-1}(\Sigma_{\theta(p)}) \neq 1$, para todo $\theta(p) \in \theta(P)$.

Como, para $A \in Inn(G)$, se $\varphi' = A \circ \varphi$ então também $\varphi'\theta^{-1} = A \circ \varphi\theta^{-1}$, concluímos que $\hat{\theta}$ está bem definida.

A aplicação inversa de $\hat{\theta}$ é $\widehat{\theta^{-1}}$, pelo que nos falta apenas mostrar que $\hat{\theta}$ é contínua. A aplicação que envia cada P em $\theta(P)$ é um homeomorfismo $\mathcal{O}_r \to \mathcal{O}_r$. Logo, para cada vizinhança $\mathcal{N}_{[\theta(P),\varphi\theta^{-1}]}(\tilde{D}_1, ..., \tilde{D}_r)$, existem discos abertos disjuntos $D_1, ..., D_r$ em torno dos pontos de P tais que $\theta(D_i) \subseteq \tilde{D}_i$. E notemos que se $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (\tilde{D}_1, ..., \tilde{D}_r), \infty)$ então $\theta^{-1}(\gamma) \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (D_1, ..., D_r), \infty)$.

Seja $[P', \varphi'] \in \mathcal{N}_{[P,\varphi]}(D_1, ..., D_r)$. Então, existe um automorfismo $A \in Inn(G)$ tal que $\varphi' = A \circ \varphi$. Para $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (\tilde{D}_1, ..., \tilde{D}_r), \infty)$, temos que $\varphi'(\theta^{-1}(\gamma)) = A \circ \varphi(\theta^{-1}(\gamma))$, ou seja, $\varphi'\theta^{-1}(\gamma) = A \circ \varphi\theta^{-1}(\gamma)$. E concluímos que $[\theta(P'), \varphi'\theta^{-1}] \in \mathcal{N}_{[\theta(P),\varphi\theta^{-1}]}(\tilde{D}_1, ..., \tilde{D}_r)$. Mostrámos que $\hat{\theta}(\mathcal{N}_{[P,\varphi]}(D_1, ..., D_r)) \subseteq \mathcal{N}_{[\theta(P),\varphi\theta^{-1}]}(\tilde{D}_1, ..., \tilde{D}_r)$, o que nos leva a concluir que $\hat{\theta}$ é contínua.

(b) Fixemos $t_0 \in [0, 1]$ e um elemento $[P, \varphi] \in \mathcal{H}_r(G)$ e consideremos uma vizinhança $\mathcal{N}_{[\theta_{t_0}(P),\varphi\theta_{t_0}^{-1}]}(\tilde{D}_1, ..., \tilde{D}_r)$. Como a família $(\theta_t)_{t\in[0,1]}$ é contínua, existe $\varepsilon > 0$ e discos abertos disjuntos $D_1, ..., D_r$ em torno dos pontos de P tal que $\theta_t(D_i) \subseteq \tilde{D}_i$ para todo o t tal que $|t - t_0| < \varepsilon$. Então, pela alínea (a), $\hat{\theta}_t(\mathcal{N}_{[P,\varphi]}(D_1, ..., D_r)) \subseteq \mathcal{N}_{[\theta(P),\varphi\theta^{-1}]}(\tilde{D}_1, ..., \tilde{D}_r)$. □

Através da bijecção estabelecida no lema (3.10), da acção de $B(r)$ sobre $\Psi^{-1}(P_0)$, resulta uma acção de $B(r)$ sobre $\mathcal{E}_r(G)$.

Pelo teorema (3.8), sabemos que $B(r)$ é gerado por elementos $\sigma_1, ..., \sigma_{r-1}$ (onde σ_i é a r-trança geométrica em que a corda i permuta com a corda $i + 1$).

Teorema 3.12. *Na acção de $B(r)$ sobre $\mathcal{E}_r(G)$, para $j = 1, ..., r - 1$, o elemento σ_j envia a Inn-órbita de $(g_1, ..., g_r)$ na Inn-órbita de*

$$(g_1, ..., g_{j-1}, g_j g_{j+1} g_j^{-1}, g_j, g_{j+2}, ..., g_r).$$

Demonstração.

Seja $P_0 = \{1, ..., r\} \in \mathcal{O}_r$ e fixemos $j \in \{1, ..., r - 1\}$. Seja $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua tal que $h(x) = 1$ para $x \leq 3/4$ e $h(x) = 0$ para $x \geq 1$. Para $z \in \mathbb{C}$ e $t \in [0, 1]$, seja

$$\theta_t(z) := \frac{2j+1}{2} + (z - \frac{2j+1}{2}) \exp(h(|z - \frac{2j+1}{2}|)\pi i t).$$

Definindo $\theta_t(\infty) = \infty$, obtemos uma família contínua $(\theta_t)_{t\in[0,1]}$ de homeomorfismos de $\mathbb{P}^1$. Dentro do disco de centro $\frac{2j+1}{2}$ e raio $3/4$, a aplicação θ_t é uma rotação de ângulo πt no sentido directo (e notemos que os pontos j e $j + 1$ de P_0 estão contidos neste disco). Fora do disco de centro $\frac{2j+1}{2}$ e raio 1, a aplicação θ_t é a identidade.

A família de caminhos em $\mathcal{O}_r$ definida por $t \mapsto \theta_t(P_0)$ é homotópica à trança σ_j. Notemos que esta família de r caminhos induz uma permutação que troca os pontos j e $j + 1$ deixando os restantes fixos. Portanto, $\theta_t(P_0)$ em $\mathcal{O}_r$ é um representante da classe de σ_i de $\pi_1(\mathcal{O}_r, P_0)$.

Pelo lema (3.11), as aplicações $\hat{\theta}_t$ formam uma família contínua de homeomorfismos de $\mathcal{H}_r(G)$. Então, fixando $u_0 = [P_0, \varphi] \in \Psi^{-1}(P_0)$, o caminho $t \mapsto \hat{\theta}_t(u_0)$ é o levantamento de σ_j por Ψ com ponto inicial u_0. E tem ponto final $\hat{\theta}_1(u_0)$. Portanto, a acção de σ_j em $\Psi^{-1}(P_0)$ coincide com $\hat{\theta}_1$ (pela definição desta acção dada no teorema (1.35)).

Considerando o ponto $u_0 = [P_0, \varphi]$ da fibra, seja $(g_1, ..., g_r) = (\varphi(\gamma_1), ..., \varphi(\gamma_r))$ o r-uplo de $\mathcal{E}_r(G)$ associado. Por definição, $\hat{\theta}_1$ envia $[P_0, \varphi]$ em $[\theta_1(P_0), \varphi\theta_1^{-1}] = [P_0, \varphi\theta_1^{-1}]$. Logo, na sua acção sobre $\mathcal{E}_r(G)$, σ_j envia a Inn-órbita de $(g_1, ..., g_r)$ na Inn-órbita de $(g'_1, ..., g'_r)$ em que $g'_i = \varphi\theta_1^{-1}(\gamma_i)$ (notemos que esta correspondência entre classes está bem definida, uma vez que em ambos os casos a relação de equivalência é definida pelos automorfismos pertencentes a $Inn(G)$).

Como a aplicação θ_1 é a identidade em $\mathbb{P}^1$ fora do disco de centro $\frac{2j+1}{2}$ e raio 1, temos que $\theta_1^{-1}(\gamma_i) = \gamma_i$ para $i \neq j, j+1$. Notemos que podemos escolher representantes das classes $[\gamma_i]$, para $i \neq j, j+1$, que estejam totalmente contidos no exterior deste disco. E, portanto, $g'_i = g_i$, para $i \neq j, j+1$.

Pela definição de θ_t, temos que $\theta_1^{-1}(\gamma_{j+1})$ é homotópico a γ_j em $\mathbb{P}^1 \setminus P_0$. Logo $g'_{j+1} = g_j$. Como $g'_1 ... g'_r = 1$, temos necessariamente que ter $g'_j = g_j g_{j+1} g_j^{-1}$. □

Se $\mathcal{H}$ é uma componente conexa de $\mathcal{H}_r(G)$, então podemos restringir Ψ a um revestimento $\mathcal{H} \to \mathcal{O}_r$. Logo a fibra em $\mathcal{H}$ sobre o ponto P_0 corresponde a uma $B(r)$-órbita em $\mathcal{E}_r(G)$. Sob a bijecção dada no lema (3.10), a cada ponto da fibra corresponde uma Inn-órbita de $\mathcal{E}_r(G)$. E pelo teorema (1.35), como $\mathcal{H}$ é conexo, a acção de $B(r) = \pi_1(\mathcal{O}_r, P_0)$ sobre esta fibra é transitiva, ou seja, aos pontos da fibra $\Psi^{-1}(P_0) \cap \mathcal{H}$ correspondem elementos de $\mathcal{E}_r(G)$ que estão todos numa mesma $B(r)$-órbita.

Obtemos assim uma correspondência biunívoca entre as componentes conexas de $\mathcal{H}_r(G)$ e as $B(r)$-órbitas de $\mathcal{E}_r(G)$.

Para cada r-uplo $\mathcal{C} = (C_1, ..., C_r)$ de classes de conjugação de um grupo G seja

$$\tilde{Ni}(G, \mathcal{C}) := \{(g_1, ..., g_r) \in G^r : G = \langle g_1, ..., g_r \rangle, g_1 ... g_r = 1, \exists \pi \in S_r : g_{\pi(i)} \in C_i, \forall i\}.$$

Ao permitir uma permutação, estamos a definir um conjunto que é independente da ordem das classes de conjugação.

Consideremos a acção do grupo das tranças $B(r)$ sobre $\tilde{Ni}(G, \mathcal{C})$, definida por

$$\sigma_j : \qquad (g_1, ..., g_r) \mapsto (g_1, ..., g_{j-1}, g_j g_{j+1} g_j^{-1}, g_j, ..., g_r),$$

para cada gerador $\sigma_1, ..., \sigma_{r-1}$ de $B(r)$.

Lema 3.13. *A acção de $Inn(G)$ em $\tilde{Ni}(G, \mathcal{C})$ deixa cada $B(r)$-órbita invariante.*

Demonstração. Para $g, h \in G$, vamos usar a notação $h^g := ghg^{-1}$. Seja $\mathcal{B}$ a $B(r)$-órbita do r-uplo $\mathbf{g} = (g_1, ..., g_r)$. As operações

$$\begin{aligned}(g_1, ..., g_r) &\mapsto (g_2, g_1^{g_2}, ..., g_r) \mapsto (g_2, g_3, g_1^{g_2 g_3}, ..., g_r) \mapsto ... \\ &\mapsto (g_2, ..., g_r, g_1^{g_2 ... g_r}) = (g_2, ..., g_r, g_1)\end{aligned}$$

mostram que $\mathcal{B}$ contém $(g_2, ..., g_r, g_1)$ (notemos que $g_2...g_r = g_1^{-1}$). Logo $\mathcal{B}$ contém cada r-uplo obtido por uma permutação cíclica de $\mathbf{g}$. E as operações

$$\begin{aligned}(g_1, ..., g_r) &\mapsto (g_1, ..., g_{r-2}, g_r, g_{r-1}^{g_r}) \mapsto (g_1, ..., g_r, g_{r-2}^{g_r}, g_{r-1}^{g_r}) \mapsto ...\\ &\mapsto (g_r, g_1^{g_r}, ..., g_{r-2}^{g_r}, g_{r-1}^{g_r}) = (g_r^{g_r}, g_1^{g_r}, ..., g_{r-2}^{g_r}, g_{r-1}^{g_r})\end{aligned}$$

em composição com uma permutação cíclica, mostram que o automorfismo interno $h \mapsto h^{g_r}$ envia $\mathbf{g}$ num elemento de $\mathcal{B}$. Então, como este automorfismo permuta as $B(r)$-órbitas, deixa $\mathcal{B}$ invariante.

Do mesmo modo, usando também permutações cíclicas, é possível mostrar que os automorfismos internos $h \mapsto h^{g_i}$ deixam $\mathcal{B}$ invariante, para $i = 1, ..., r-1$. Como o grupo G é gerado por estes elementos, obtemos o pretendido. □

Considerando a acção de $Inn(G)$ em $\tilde{Ni}(G, \mathcal{C})$, seja

$$Ni(G, \mathcal{C}) := \tilde{Ni}(G, \mathcal{C})/Inn(G)$$

o espaço quociente por esta acção.

Proposição 3.14. *Seja $\mathcal{C} = (C_1, ..., C_r)$ um r-uplo de classes de conjugação de G. Seja $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ o subconjunto de $\mathcal{H}_r(G)$ formado pelos elementos $[P, \varphi]$ para os quais é possível ordenar os elementos de P por $p_1, ..., p_r$ de forma a que $\varphi(\Sigma_{p_i}) \subseteq C_i$, para $i = 1, ..., r$.*

(a) *Então $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ é uma união de componentes conexas de $\mathcal{H}_r(G)$. Sob a bijecção estabelecida no lema (3.10), à fibra em $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ de P_0 corresponde o conjunto $Ni(G, \mathcal{C})$. O que resulta numa correspondência biunívoca entre as componentes conexas $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ e as $B(r)$-órbitas de $Ni(G, \mathcal{C})$. Em particular, $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ é conexo se e somente se $B(r)$ age transitivamente em $Ni(G, \mathcal{C})$.*

(b) *Para $A \in Aut(G)$, temos que $\epsilon_A(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ se e somente se o automorfismo A deixa a $B(r)$-órbita correspondente invariante (enviando $(g_1, ..., g_r)$ em $(A(g_1), ..., A(g_r))$).*

Demonstração. (a) O conjunto $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ é aberto no espaço $\mathcal{H}_r(G)$ uma vez que todos os pontos de uma vizinhança $\mathcal{N}_{[P,\varphi]}(D_1, ..., D_r)$ correspondem a uma mesma aplicação $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus (D_1, ..., D_r), \infty) \to G$. Pelo mesmo argumento, o complementar de $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ é aberto. Logo, como $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ é aberto e fechado, é uma união de componentes conexas de $\mathcal{H}_r(G)$. Pelo lema (3.13), a aplicação $\tilde{Ni}(G, \mathcal{C}) \to Ni(G, \mathcal{C})$ induz uma bijecção entre as $B(r)$-órbitas, uma vez que $Inn(G)$ deixa cada $B(r)$-órbita invariante.

O grupo $B(r)$ age transitivamente em $Ni(G, \mathcal{C})$ se e somente se este conjunto é formado por uma só órbita que corresponde a uma única componente de $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$. O que mostra, pelo teorema (1.35), que $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ é conexo.

(b) Pela demonstração do lema (3.10), a acção de ϵ_A em $\Psi^{-1}(P_0)$ corresponde à acção de A em $\mathcal{E}_r(G)$. □

É um problema importante decidir quando é que o espaço $\mathcal{H}_r(G, \mathcal{C})$ é conexo, ou seja, quando é que $B(r)$ age transitivamente em $Ni(G, \mathcal{C})$. Clebsch deu uma resolução para este problema, para o caso particular dos revestimentos com ramificação simples (i.e., $\mathcal{C} = (C, ..., C)$, onde C é a classe das transposições em $G = S_n$ $(n > 2)$), que apresentamos agora.

Teorema 3.15. *Seja $G = S_n$ $(n \geq 2)$ e seja C a classe de conjugação de S_n formada pelas transposições. Consideremos o r-uplo $\mathcal{C} = (C, ..., C)$. Então $\tilde{N}i(G, \mathcal{C})$ é não vazio se e somente se r é par e $r \geq 2(n-1)$. Neste caso, $B(r)$ age transitivamente em $\tilde{N}i(G, \mathcal{C})$.*

Demonstração. **(1)** Se T for um conjunto de transposições que geram S_n então $|T| \geq n-1$ e existem $n-1$ elementos em T que geram S_n. Existem também $n-2$ elementos de T que geram um subgrupo de S_n isomorfo a S_{n-1}.

Demonstração. Vamos demonstrar, indutivamente, que, para cada $j = 1, ..., n-1$, existem elementos $t_1, ..., t_j \in T$ e um subconjunto B_j de $\{1, ..., n\}$ formado por $j+1$ elementos, tais que o grupo $\langle t_1, ..., t_j \rangle$ induz o grupo de simetria de B_j e fixa todos os elementos que não estão em B_j. Para $j = 1$, temos, por exemplo, $t_1 = (1, 2)$, $B_1 = \{1, 2\}$ e $\langle (1, 2) \rangle = S_2$. Suponhamos que o argumento é válido para $j < n-1$. Então existe $t_{j+1} \in T$ com $t_{j+1}(B_j) \neq B_j$. Tomemos $B_{j+1} := t_{j+1}(B_j)$ e então $t_i(B_{j+1}) \neq B_{j+1}$ para $t_i \in T \setminus \{t_1, ..., t_{j+1}\}$. Para $j = n-1$ e $j = n-2$, respectivamente, obtemos o pretendido.

(2) Consideremos r-uplos $\tau = (\tau_1, ..., \tau_r)$ de transposições de S_n tais que $\tau_1 ... \tau_r = Id$ (tal só é possível se r for par). Então cada $B(r)$-órbita nestes r-uplos contém algum τ com $\tau_{2i} = \tau_{2i-1}$, para $i = 1, ..., r/2$.

Demonstração. Vamos escrever as transposições na forma (a, b) com $a < b$. Ordenemos em cada r-uplo as transposições lexicamente, i.e., $(1, 2) < (1, 3) < ... < (2, 3) < ....$ Considerando esta ordem, ordenemos também lexicamente o conjunto dos r-uplos $(\tau_1, ..., \tau_r)$. Dado um r-uplo $\tau = (\tau_1, ..., \tau_r)$, se $\tau_i < \tau_{i+1}$ para algum $i \in \{1, ..., r-1\}$, então $\sigma_i^{-1} \in B(r)$ envia τ num r-uplo estritamente maior do que τ, considerando a ordenação introduzida (notemos que $(..., \tau_i, \tau_{i+1}, ...)$ é menor que $(..., \tau_{i+1}, \tau_i, ...)$). Logo, se tomarmos $\bar{\tau}$ maximal nesta $B(r)$-órbita, temos que $\bar{\tau}_1 \geq ... \geq \bar{\tau}_r$. Então, se $\bar{\tau}_r = (a, b) \neq \bar{\tau}_{r-1}$, o produto $\bar{\tau}_1 ... \bar{\tau}_r$ envia a num número estritamente maior. Mas $\bar{\tau}_1 ... \bar{\tau}_r = Id$, logo temos que ter $\bar{\tau}_r = \bar{\tau}_{r-1}$. Aplicando o mesmo argumento a $(\bar{\tau}_1, ..., \bar{\tau}_{r-2})$, e assim sucessivamente, demonstramos o pretendido.

(3) $Ni(G; \mathcal{C})$ é não vazio se e somente se r é par e $r \geq 2(n-1)$.

Demonstração. Se r é par e $\geq 2(n-1)$ então as r transposições

$$(1, 2)(1, 2)(2, 3)(2, 3)...(n-1, n)(n-1, n)...(n-1, n) \tag{3.1}$$

formam um elemento de $\tilde{N}i(G; \mathcal{C})$. Se $Ni(G; \mathcal{C})$ é não vazio então, pela definição de $Ni(G; \mathcal{C})$, para $\tau = (\tau_1, ..., \tau_r) \in Ni(G; \mathcal{C})$, τ gera S_n, logo $r \geq n-1$, e $\tau_1 ... \tau_r = Id$, pelo que r é um número par. Como a órbita deste elemento inclui um elemento satisfazendo $\tau_{2i} = \tau_{2i-1}$, para $i = 1, ..., r/2$, concluímos que $r \geq 2(n-1)$.

(4) Suponhamos que $\tau = (\tau_1, ..., \tau_r)$ está nas condições de (2) e que $\tau_1, ..., \tau_r$ geram S_n. Por (1) e aplicando uma sequência de operações de $B(r)$ que produzem uma permutação cíclica de $\tau_1, ..., \tau_r$ (como na demonstração do lema (3.13)), podemos concluir que $\tau_1, ..., \tau_{r-2}$ geram S_n se $r > 2(n-1)$ ou geram um subgrupo isomorfo a S_{n-1} se $r = 2(n-1)$. Pelo lema (3.13)), podemos ainda admitir que $\tau_r = (n-1, n)$.

Se $r > 2(n-1)$, então, por indução sobre r, o $r-2$-uplo $(\tau_1, ..., \tau_{r-2})$ está na $B(r)$-órbita do elemento (3.1) com comprimento $r-2$. E, portanto, τ está na $B(r)$-órbita do elemento (3.1) com comprimento r.

Se $r = 2(n-1)$, então, pelo lema (3.13), podemos admitir que $\tau_1, ..., \tau_{r-2}$ geram um subgrupo isomorfo a S_{n-1}. Então, por indução sobre n, o $r-2$-uplo $(\tau_1, ..., \tau_{r-2})$ está na $B(r)$-órbita do elemento $(1,2)(1,2)(2,3)(2,3)...(n-2, n-1)(n-2, n-1)$. E, novamente, concluímos que τ está na $B(r)$-órbita do elemento (3.1) com comprimento r. $\square$

Capítulo 4

Extensões de Galois finitas de $\mathbb{C}(x)$

No primeiro capítulo, mostrámos (teorema 1.80) que toda a função meromorfa definida numa superfície de Riemann compacta induz uma extensão algébrica finita de $\mathbb{C}(x)$. Por outro lado, mostrámos que toda a função meromorfa não constante é um revestimento ramificado da esfera de Riemann (1.70) e que todo o revestimento ramificado de $\mathbb{P}^1$ é uma função meromorfa (teorema 2.12).

Vamos agora mostrar, que dado um revestimento de Galois finito $f : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$, o corpo $\mathcal{M}(\bar{X})$ é uma extensão de Galois finita de $\mathbb{C}(x)$. Em particular, vamos obter para um qualquer grupo finito G que existe uma extensão de Galois finita L de $\mathbb{C}(x)$ tal que $G \simeq Gal(L : \mathbb{C}(x))$. Vamos também, a partir de uma extensão de Galois de $\mathbb{C}(x)$, construir um revestimento de Galois da esfera de Riemann.

Terminaremos este capítulo, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre extensões de Galois finitas de $\mathbb{C}(x)$ e revestimentos de Galois finitos da esfera perfurada, o que nos vai permitir encarar o espaço $\mathcal{H}_r(G)$ como espaço de moduli das extensões de Galois finitas de $\mathbb{C}(x)$.

Neste contexto, começaremos por definir o tipo de ramificação de uma extensão de Galois finita de $\mathbb{C}(x)$, fazendo este estudo de um modo mais geral, considerando extensões de Galois finitas $L : \mathbb{K}(x)$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo algebricamente fechado com característica 0.

4.1 Tipo de ramificação de uma extensão de Galois finita de $\mathbb{K}(x)$

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Seja Λ o conjunto das sucessões $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de elementos de $\mathbb{K}$ tais que existe $N \in \mathbb{Z}$ com $a_i = 0$ para $i < N$. Definimos a adição neste conjunto por

$$(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} + (b_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

e a multiplicação por

$$(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}.(b_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \qquad \text{onde} \qquad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Com estas operações, Λ é um anel comutativo com zero dado pela sucessão constituída unicamente por zeros e cuja unidade é a sucessão $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ com $a_0 = 1$ e $a_i = 0$ para $i \neq 0$.

De facto, Λ é corpo. Para um elemento não nulo $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda$ e N tal que $a_i = 0$ para $i < N$, podemos construir o elemento inverso de $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Definindo $b_j = 0$ para $j < -N$ e $b_{-N} = a_N^{-1}$, podemos determinar indutivamente b_j para $j = -N+1, -N+2, \ldots$ a partir das equações

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

A sucessão $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ obtida deste modo é o inverso de $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.

Podemos identificar $\mathbb{K}$ com um subcorpo de Λ através do mergulho que envia cada elemento $a \in \mathbb{K}$ na sucessão $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ em que $a_0 = a$ e $a_i = 0$ para $i \neq 0$.

Seja t a sucessão $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ em que $a_1 = 1$ e $a_i = 0$ para $i \neq 1$. O subanel $\mathbb{K}[t]$ de Λ gerado por $\mathbb{K}$ e por t é o anel de polinómios numa variável sobre $\mathbb{K}$:

$$\sum_{i=0}^{M} a_i t^i = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \qquad \text{onde} \quad a_i = 0 \quad \text{se} \quad i < 0 \quad \text{ou} \quad i > M.$$

As operações definidas em Λ coincidem com a adição e a multiplicação das séries de Laurent formais. Logo a Λ chamamos o *corpo das séries de Laurent formais* sobre $\mathbb{K}$, que notamos por $\mathbb{K}((t))$. Ao subanel de Λ constituído pelas sucessões

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

chamamos anel das séries de potências formais sobre $\mathbb{K}$ e notamos por $\mathbb{K}[[t]]$. Temos que $\Lambda = \mathbb{K}((t))$ é o corpo de fracções de $\mathbb{K}[[t]]$ e, em particular, Λ contém $\mathbb{K}(t)$, o corpo de fracções de $\mathbb{K}[t]$.

A aplicação de $\mathbb{K}[[t]]$ em $\mathbb{K}$ que envia $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ no seu termo constante a_0 é um homomorfismo de anéis ('avaliação em $t = 0$'). Se $F(y) \in \mathbb{K}[[t]][y]$ é um polinómio em y com coeficientes em $\mathbb{K}[[t]]$, seja $F_0(y) \in \mathbb{K}[y]$ o polinómio obtido pela aplicação deste homomorfismo aos coeficientes de F. O próximo resultado permite-nos relacionar factorizações de F_0 com factorizações de F.

Proposição 4.1. *Seja $F(y)$ um polinómio mónico em y com coeficientes em $\mathbb{K}[[t]]$.*

Suponhamos que o polinómio associado $F_0(y) \in \mathbb{K}[y]$ admite factorização da forma

$$F_0 = g.h$$

onde $g, h \in \mathbb{K}[y]$ são polinómios mónicos primos entre si.

Então, F admite factorização da forma

$$F = G.H$$

onde G, H são polinómios mónicos em y com coeficientes em $\in \mathbb{K}[[t]]$ tais que $G_0 = g$ e $H_0 = h$.

Demonstração. Vamos escrever

$$F = \sum_{i=0}^{\infty} F_i t^i$$

com $F_i \in \mathbb{K}[y]$. Seja $m := gr(F) = gr(F_0)$. Notemos que $F_0 = y^m$. Então $gr(F_i) < m$ para $i > 0$, uma vez que F é mónico. Sejam $r = gr(g)$ e $s = gr(h)$. Queremos encontrar

$$G = \sum_{i=0}^{\infty} G_i t^i \qquad \text{e} \qquad H = \sum_{i=0}^{\infty} H_i t^i$$

com $G_0 = g$ e $H_0 = h$, $G_i, H_i \in \mathbb{K}[y]$ com graus inferiores a r e a s, respectivamente, e $F = GH$.

A condição $F = GH$ é equivalente ao sistema de equações

$$F_k = \sum_{i+j=k} G_i H_j \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{4.1}$$

Estas equações podem ser resolvidas indutivamente do seguinte modo. Para $k = 0$, temos por hipótese que $F_0 = g.h = G_0.H_0$. Para $k = n > 0$, supondo que G_i e H_j já foram determinados para $i, j < n$ através das equações (4.1) aplicadas a $k = 1, ..., n-1$, a n-ésima equação pode ser escrita na forma

$$G_0 H_n + G_n H_0 = U_n \tag{4.2}$$

onde $U_n = F_n - \sum_{i=1}^{n-1} G_i H_{n-i} \in \mathbb{K}[y]$ tem grau inferior a m. Falta-nos apenas mostrar que a equação (4.2) pode ser resolvida para G_n e H_n com graus inferiores a r e a s, respectivamente.

Como G_0 e H_0 são polinómios primos entre si em $\mathbb{K}[y]$, o ideal gerado por G_0 e H_0 coincide com $\mathbb{K}[y]$. Logo, existem polinómios $P, Q \in \mathbb{K}[y]$ tais que $G_0 P + Q H_0 = U_n$. Pelo algoritmo da divisão, podemos escrever $P = H_0 S + R$ para $R, S \in \mathbb{K}[y]$ tais que $gr(R) < s = gr(H_0)$. Definindo $H_n = R$ e $G_n = Q + G_0 S$, então a equação (4.2) é válida e $gr(H_n) < s$. Como $G_n H_0 = U_n - G_0 H_n$, $G_n H_0$ tem grau inferior a m, logo G_n tem grau inferior a r. Obtemos assim os polinómios G_n e H_n pretendidos. □

Corolário 4.2. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado com característica 0. Seja F um polinómio mónico em y de grau $m \geq 2$ e com coeficientes em $\mathbb{K}[[t]]$. Suponhamos que o coeficiente de ordem $m-1$ de F_0 é nulo e que $F_0 \neq y^m$.*

Então F tem factorização $F = G.H$, onde G e H são polinómios em y mónicos e não constantes com coeficientes em $\mathbb{K}[[t]]$.

Demonstração. Como $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, o polinómio $F_0 \in \mathbb{K}[y]$ factoriza-se num produto de polinómios lineares mónicos. Se estes factores não forem todos iguais, então obtemos $F_0 = g.h$ com g e h não constantes e primos entre si em $\mathbb{K}[y]$. E obtemos o resultado a partir da proposição anterior.

Resta-nos apenas excluir o caso em que $F_0 = (y-a)^m$, para $a \in \mathbb{K}$. Mas neste caso, o coeficiente de ordem $m-1$ de F_0 é $-ma$, logo, como $\mathbb{K}$ tem característica 0, concluímos que $a = 0$. E, nesse caso, teríamos $F_0 = y^m$, o que contraria a hipótese do enunciado. □

Para cada inteiro positivo n, seja $\mathbb{Z}n^{-1}$ o conjunto de todos os números racionais da forma $\frac{i}{n}$, com $i \in \mathbb{Z}$. Então $\mathbb{Z}n^{-1}$ é um grupo (aditivo) isomorfo a $\mathbb{Z}$ através da aplicação $i \mapsto \frac{i}{n}$. Este grupo contém $\mathbb{Z}$ como subgrupo de índice n.

Seja Λ_n o conjunto das sucessões $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}n^{-1}}$ de elementos $a_j \in \mathbb{K}$ para os quais existe $N \in \mathbb{Z}n^{-1}$ tal que $a_j = 0$ para $j < N$. Definindo em Λ_n as operações adição e multiplicação tal como fizemos para Λ, permite-nos introduzir em Λ_n uma estrutura de corpo isomorfo a Λ e sob este isomorfismo $\Lambda_n = \mathbb{K}((\tau))$ onde $\tau = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}n^{-1}}$ é o elemento definido por $a_{\frac{1}{n}} = 1$ e $a_j = 0$ para $j \neq \frac{1}{n}$.

Notemos que, como τ é a sucessão cujo único elemento não nulo é $a_{\frac{1}{n}} = 1$, então τ^n é a sucessão cujo único elemento não nulo é $a_{\frac{n}{n}} = 1$. Pelo que a aplicação

$$\begin{array}{ll} \Lambda = \mathbb{K}((t)) & \to \Lambda_n = \mathbb{K}((\tau)) \\ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i t^i & \mapsto \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \tau^n i \end{array}$$

é um homomorfismo de corpos que envia t em τ^n, o que permite identificar Λ com o subcorpo de Λ_n formado pelas sucessões $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}n^{-1}}$ tais que $a_j = 0$ se $j \notin \mathbb{Z}$. Podemos então escrever um qualquer elemento $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}n^{-1}}$ de Λ_n na forma

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}n^{-1}} a_j t^j = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_{\frac{i}{n}} \tau^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i \tau^i,$$

identificando Λ_n com $\mathbb{K}((t^{\frac{1}{n}})) = \mathbb{K}((\tau))$.

Lema 4.3. *Suponhamos que $\mathbb{K}$ contém uma raiz primitiva ξ_n de ordem n da unidade. Então Λ_n é uma extensão de Galois de Λ de grau n. O grupo de Galois desta extensão é cíclico, gerado pelo automorfismo ω que envia uma sucessão $\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i\tau^i$ na sucessão $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(b_i\xi_n^i)\tau^i$. Temos ainda que $\Lambda_n = \Lambda(\tau)$ com $\tau^n = t$.*

Demonstração. Com alguns cálculos, facilmente se verifica que ω é um automorfismo de Λ_n. O corpo fixo deste automorfismo é formado pelos elementos $\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i\tau^i$ com $b_i = 0$ excepto nos casos em que $\xi_n^i = 1$, ou seja, quando i é múltiplo de n e portanto $\frac{i}{n} \in \mathbb{Z}$. Logo, o corpo fixo de ω coincide com Λ. Resulta então, pelo teorema de Artin, que Λ_n é uma extensão de Galois de Λ com grupo de Galois igual ao subgrupo gerado por ω. Como ω tem ordem n, resulta que $|\Lambda_n : \Lambda| = |Gal(\Lambda_n : \Lambda)| = n$.

O automorfismo ω envia τ em $\xi_n\tau$. Logo, para $\mu = 1, ..., n-1$, ω^μ envia τ em $\xi_n^\mu\tau \neq \tau$, e, portanto, nenhum elemento não trivial de $Gal(\Lambda_n : \Lambda)$ fixa τ. Logo, $\Lambda_n = \Lambda(\tau)$. □

Lema 4.4. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado com característica 0. Seja F um polinómio em y mónico, não constante e com coeficientes em $\mathbb{K}[[t]]$. Então F tem uma raiz em algum Λ_n.*

Demonstração. Suponhamos que F não tem raízes em nenhum Λ_n e que é de grau mínimo nestas condições. Então $m := gr(F) \geq 2$. Vamos escrever F da forma $F(y) = y^m + \lambda_{m-1}y^{m-1} + ... + \lambda_0$ com $\lambda_\nu \in \mathbb{K}[[t]]$. Então o polinómio

$$\tilde{F}(y) = F(y - \frac{\lambda_{m-1}}{m})$$

tem coeficiente de ordem $m-1$ nulo, pelo que substituindo F por $\tilde{F}$, podemos já supor que F tem coeficiente de ordem $m-1$ nulo. Se $F_0(y) \neq y^m$ então, pelo corolário (4.2), F tem factorização em polinómios não constantes, o que contradiz a minimalidade de F. Logo $F_0(y) = y^m$, o que implica que todos os elementos λ_ν tenham termo constante nulo.

Existe algum $\nu = 0, ..., m-2$ tal que $\lambda_\nu \neq 0$ (caso contrário, teríamos $F = y^m$ e então 0 seria uma raiz). Vamos passar a considerar apenas os valores ν nestas condições. Seja r_ν a menor potência de t em λ_ν com coeficiente não nulo, i.e.,

$$\lambda_\nu = a_\nu t^{r_\nu} \quad + \quad \text{termos de ordem superior}$$

onde $a_\nu \in \mathbb{K}$ é não nulo. Então $r_\nu > 0$, uma vez que já vimos que o termo constante é nulo. Seja u o menor dos números da forma $\frac{r_\nu}{m-\nu}$. Então u é um número racional positivo e podemos escrever $u = \frac{d}{n}$ com d e n inteiros positivos.

Vamos mergulhar Λ em $\Lambda_n = \mathbb{K}((\tau))$, como anteriormente. Consideremos o polinómio

$$F^*(y) = \tau^{-dm} F(\tau^d y) = y^m + \sum_{\nu=0}^{m-2} \lambda_\nu \tau^{d(\nu-m)} y^\nu$$

de $\Lambda_n[y]$. O coeficiente de ordem ν deste polinómio é uma série de Laurent em τ da forma

$$\begin{aligned} \lambda_\nu \tau^{d(\nu-m)} &= a_\nu t^{r_\nu} \tau^{d(\nu-m)} \quad + \quad \text{termos de ordem superior} \\ &= a_\nu \tau^{E_\nu} \quad + \quad \text{termos de ordem superior} \end{aligned}$$

onde

$$E_\nu = n(m-\nu)\left(\frac{r_\nu}{m-\nu} - u\right) \geq 0$$

e $E_\nu = 0$ para pelo menos um ν, pela escolha de u. Logo cada coeficiente de F^* é uma série de potências em τ e, pelo menos para um ν, a série correspondente tem termo constante não nulo. Então F^* está nas condições do corolário (4.2), pelo que $F^* = G.H$ para polinómios mónicos não constantes com coeficientes em $\mathbb{K}[[\tau]]$. Logo H tem grau inferior a m e, portanto, tem uma raiz em algum $\Lambda_n(\tau^{\frac{1}{n'}})$ pela minimalidade de m. Concluímos assim que F^* tem uma raiz em $\Lambda_n(\tau^{\frac{1}{n'}}) = \Lambda_{nn'}$. Portanto F tem uma raiz em $\Lambda_{nn'}$. □

O próximo teorema mostra que qualquer extensão finita de Λ é isomorfa a Λ_n, para algum número natural n.

Teorema 4.5. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado com característica 0. Seja Δ uma extensão finita do corpo $\Lambda = \mathbb{K}((t))$ de grau n. Então $\Delta = \Lambda(\tau)$ com $\tau^n = t$.*

Demonstração. Seja Δ ma extensão finita do corpo Λ e escrevamos $\Delta = \Lambda(\theta)$. Seja $F \in \Lambda[y]$ um polinómio irredutível com raiz θ. Pelo lema (1.9), podemos já supor que F está nas condições do lema anterior, logo F tem uma raiz θ' em algum $\Lambda_{n'}$. Portanto $\Delta \subset \Lambda_{n'}$.

Como o grupo $Gal(\Lambda_{n'} : \Lambda)$ é cíclico de ordem n', para cada divisor n de n' existe um único corpo entre Λ e $\Lambda_{n'}$ de grau n sobre Λ. Logo $\Delta = \Lambda_n = \Lambda(t^{\frac{1}{n}})$, pelo lema (4.3).□

Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado com característica 0.

Seja $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sistema de raízes primitivas da unidade compatíveis, ou seja, tais que se ξ_n é uma raiz primitiva de ordem n e se tivermos $n = n'n''$ então $\xi_n^{n''} = \xi_{n'}$. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\xi_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ é um tal sistema de raízes.

Seja $\Lambda = \mathbb{K}((t))$ e $\Delta : \Lambda$ uma extensão de Galois finita de grau n. Então $\Delta = \Lambda(\delta)$ com $\delta^n = t$, pelo teorema (4.5). Logo, para cada δ nestas condições, existe um único elemento $\omega \in Gal(\Delta : \Lambda)$ com $\omega(\delta) = \xi_n\delta$. Notemos que o automorfismo ω é um gerador de $Gal(\Delta : \Lambda)$, uma vez que ξ_n é uma raiz primitiva da unidade. Designamos ω por *gerador distinguido* de $Gal(\Delta : \Lambda)$.

Seja Δ' outra extensão de Galois finita de Λ tal que $\Lambda \subset \Delta' \subset \Delta$. Então, novamente pelo teorema (4.5), sabemos que existe um elemento $\delta' \in \Delta$ e um número natural n' tais que $\Delta = \Lambda(\delta')$ com $\delta'^{n'} = t$.

Queremos agora mostrar que para cada $\delta' \in \Delta$ com $\delta'^{n'} = t$, para algum $n' \geq 1$, temos que $\omega(\delta') = \xi_{n'}\delta'$, onde ω é o gerador distinguido de $Gal(\Delta : \Lambda)$. É suficiente mostrarmos este facto para $\delta' = \delta^{\frac{n}{n'}}$, pois qualquer outro valor δ' nestas condições difere apenas da multiplicação por uma raiz de ordem n' e notemos que $\frac{n}{n'}$ é um inteiro ($Gal(\Delta : \Lambda)$ é cíclico de ordem n). Pela compatibilidade das raízes primitivas, temos que $\xi_n^{\frac{n}{n'}} = \xi_{n'}$, logo $\omega(\delta') = \omega(\delta^{\frac{n}{n'}}) = \xi_n^{\frac{n}{n'}}\delta^{\frac{n}{n'}} = \xi_n^{\frac{n}{n'}}\delta' = \xi_{n'}\delta'$. Concluímos então que $\omega|_{\Delta'}$ é o gerador distinguido de $Gal(\Delta' : \Lambda)$.

Seja $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} := \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, onde ∞ é um elemento não contido em $\mathbb{K}$. Podemos prolongar cada automorfismo $\alpha \in Aut(\mathbb{K})$ a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ definindo $\alpha(\infty) = \infty$.

Para $p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, vamos definir um isomorfismo $\vartheta_p : \mathbb{K}(x) \to \mathbb{K}(t)$ por $\vartheta_p(x) = t + p$ se $p \neq \infty$ ou por $\vartheta_p(x) = \frac{1}{t}$ se $p = \infty$.

Proposição 4.6. *Seja $L : \mathbb{K}(x)$ uma extensão de Galois finita e $G = Gal(L : \mathbb{K}(x))$. Seja γ um elemento primitivo da extensão $L : \mathbb{K}(x)$. Então γ é raiz de um polinómio irredutível $F(y) \in \mathbb{K}(x)[y]$. Para $p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, seja $\vartheta_p F \in \mathbb{K}(t)[y]$ o polinómio obtido por aplicarmos ϑ_p aos coeficientes de F.*

(a) *Existe uma extensão de Galois finita Δ de Λ, um subcorpo L_ϑ de Δ e um prolongamento de ϑ_p a um isomorfismo $\vartheta : L \to L_\vartheta$ tal que:*

(1) *L_ϑ é corpo de decomposição de $\vartheta_p F$ sobre $\mathbb{K}(t)$.*

(2) *O grupo $Gal(\Delta : \Lambda)$ mantém L_ϑ invariante.*

(3) *Os factores irredutíveis de $\vartheta_p F$ em $\Lambda[y]$ têm todos o mesmo grau, digamos $n = n_{L,p}$, que não depende de Δ, L_ϑ e ϑ.*

(4) *Seja ω o gerador distinguido de $Gal(\Delta : \Lambda)$ e g_ϑ o elemento de G definido por*

$$g_\vartheta = \vartheta^{-1} \circ \omega \circ \vartheta.$$

Se $\tilde{\Delta}$ é outra extensão de Galois finita de Λ, com subcorpo $L_{\tilde{\vartheta}}$ e $\tilde{\vartheta} : L \to L_{\tilde{\vartheta}}$ é um isomorfismo prolongando ϑ_p, então $g_{\tilde{\vartheta}}$ e g_ϑ estão na mesma classe de conjugação de G, que depende apenas de p e de L. Além disso, a ordem comum dos seus elementos é $n_{L,p}$.

(b) *Podemos tomar $\Delta = \Lambda_{n_{L,p}}$ na alínea (a).*

(c) *Podemos escolher γ tal que $F(y) = F(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$ é mónico em y. Então o discriminante $D(x)$ de $F(y)$ sobre $\mathbb{K}(x)$ é um elemento não nulo de $\mathbb{K}[x]$. Se $p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ e $D(p) \neq 0$ então $n_{L,p} = 1$.*

(d) *Se $L' : \mathbb{K}(x)$ é outra extensão de Galois finita com $L' \subset L$, então a aplicação restrição de G em $G' = Gal(L' : \mathbb{K}(x))$ envia a classe C_p na classe C'_p de G' associada a p.*

Demonstração. **(a)** (1) Seja H um factor irredutível de $\vartheta_p F$. O corpo $\Delta = \frac{\Lambda[y]}{\langle H \rangle}$ é uma extensão finita de Λ e H tem uma raiz γ' em Δ (e γ' é também raiz de $\vartheta_p F$). Seja $L_\vartheta := \mathbb{K}(t)(\gamma')$. Podemos prolongar o isomorfismo ϑ_p a $\vartheta : L \to L_\vartheta$ definindo $\vartheta(\gamma) = \gamma'$. Como $L : \mathbb{K}(x)$ é uma extensão de Galois finita, também $L_\vartheta : \mathbb{K}(t)$ é extensão de Galois finita, logo, em particular, L_ϑ é corpo de decomposição de $\vartheta_p F$ sobre $\mathbb{K}(t)$. Resulta então que Δ é extensão de Galois de Λ.

(2) O corpo L_ϑ é gerado sobre $\mathbb{K}(t)$ a partir das raízes de $\vartheta_p F$. Como $Gal(\Delta : \Lambda)$ permuta estas raízes, mantém L_ϑ invariante.

(3) Se g é um elemento do grupo $Gal(\Delta : \Lambda)$ então $g(L_\vartheta) \subseteq L_\vartheta$ e g fixa os elementos de $\mathbb{K}(t)$. Portanto, $g|_{L_\vartheta} \in Gal(L_\vartheta : \mathbb{K}(t))$ e o homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} Gal(\Delta : \Lambda) & \to & Gal(L_\vartheta : \mathbb{K}(t)) \\ g & \mapsto & g|_{L_\vartheta} \end{array}$$

é injectivo, uma vez que $\Delta = \Lambda(\gamma')$. Seja ω um gerador de $Gal(\Delta : \Lambda)$. Então o grau da extensão coincide com a ordem de ω. E então, para qualquer factor irredutível H de $\vartheta_p F$, obtemos as seguintes igualdades $gr(H) = |\Delta : \Lambda| = ord(\omega) = ord(\omega|_{L_\vartheta})$.

(4) Podemos supor que Δ e $\tilde{\Delta}$ estão ambos contidos numa extensão de Galois finita Δ_0 de Λ. Então tanto L_ϑ como $L_{\tilde{\vartheta}}$ são subcorpos de Δ_0 gerados sobre $\mathbb{K}(t)$ a partir das raízes de $\vartheta_p F$ em Δ_0. Logo $L_\vartheta = L_{\tilde{\vartheta}}$. Definindo $h := \vartheta^{-1}\tilde{\vartheta}$, h é um elemento de G. Como o gerador distinguido ω_0 de $Gal(\Delta_0 : \Lambda)$ restrito a Δ é o gerador distinguido de $Gal(\Delta : \Lambda)$, e o mesmo acontece para $\tilde{\Delta}$, obtemos $g_{\tilde{\vartheta}} = \tilde{\vartheta}^{-1}\omega_0\tilde{\vartheta} = h^{-1}\vartheta^{-1}\omega_0\vartheta h = h^{-1}g_\vartheta h$. Logo, $g_{\tilde{\vartheta}}$ e g_ϑ estão na mesma classe de conjugação de G.

(b) Como $|\Delta : \Lambda| = n_{L,p}$, Δ é isomorfo a $\Lambda_{n_{L,p}}$, pelo teorema (4.5).

(c) Podemos encarar o polinómio F como polinómio em y com coeficientes em $\mathbb{K}(x)$. Então o seu discriminante $D(x) \in \mathbb{K}[x]$ é não nulo, uma vez que F é irredutível, logo separável ($\mathbb{K}$ tem característica 0).

Se $p \in \mathbb{K}$ é tal que $D(p) \neq 0$, então o polinómio $F(p,y) \in \mathbb{K}[y]$ é separável (pela demonstração do lema (1.10)). Temos que $\vartheta_p F(y) = F(t+p, y)$, logo $\vartheta_p F(y)$ é um polinómio mónico em y com coeficientes em $\mathbb{K}[t]$. E $\vartheta_p F_0(y) = F(p,y)$. Do lema (4.1) resulta que $\vartheta_p F$ se factoriza num produto de factores lineares em $\Lambda[y]$. Logo, $n_{L,p} = gr(H) = 1$.

(d) Seja $\vartheta : L \to \Delta$ como em (a). Então $\vartheta' = \vartheta|_{L'}$ é um isomorfismo entre L' e $\vartheta'(L') \subset \Delta$ que prolonga ϑ_p. Logo $g_{\vartheta'} = (\vartheta')^{-1}\omega\vartheta' = \vartheta^{-1}\omega\vartheta|_{L'} = g_\vartheta|_{L'}$, o que mostra que estes elementos estão numa mesma classe de conjugação. □

Definição 4.7. Seja $L : \mathbb{K}(x)$ uma extensão de Galois finita e $p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$.

(a) Designamos o número $n_{L,p}$ por *índice de ramificação* de L em p.

(b) Se $n_{L,p} > 1$, dizemos que p é um *ponto de ramificação* da extensão $L : \mathbb{K}(x)$. E, nesse caso, temos que a classe de conjugação C_p associada a p de $Gal(L : \mathbb{K}(x))$ é não trivial.

(c) O grupo de Galois $G = Gal(L : \mathbb{K}(x))$, o conjunto P dos pontos de ramificação e a classe de conjugação C_p associada a cada ponto de ramificação são invariantes por isomorfismo.

Dizemos que a extensão tem *tipo de ramificação* $[G, P, (C_p)_{p \in P}]$ (definição 2.18).

4.2 Identificação entre extensões de Galois e revestimentos de Galois

Proposição 4.8. *Seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento de Galois finito e seja $f : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ o seu prolongamento holomorfo à superfície de Riemann compacta $\bar{X}$. Suponhamos que $g \in \mathcal{M}(\bar{X})$ satisfaz $g \circ \alpha = g$, para todo o automorfismo $\alpha \in Aut(f)$. Então $g = g' \circ f$, para algum $g' \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$.*

$$\begin{tikzcd} \bar{X} \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "g'"'] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja y um ponto de $\mathbb{P}^1$ e sejam x_1 e x_2 dois pontos distintos da fibra $f^{-1}(y)$. Como $Aut(f)$ age transitivamente em cada fibra , existe $\alpha \in Aut(f)$ tal que $x_2 = \alpha(x_1)$. Mas então $g(x_2) = g(\alpha(x_1)) = g(x_1)$, pelo que concluímos que todos os pontos de $f^{-1}(y)$ têm a mesma imagem por g. Seja $g'(y)$ essa imagem comum, para cada y em $\mathbb{P}^1$. Então $g = g' \circ f$.

Se $V \subset \mathbb{P}^1 \setminus (P \cup \{\infty\})$ é admissível para f e U é uma componente conexa de $f^{-1}(V)$, então para $y \in V$ temos que $g'(y) = g \circ (f|_U)^{-1}(y)$. Como $f|_U : U \to V$ é uma carta holomorfa de X, resulta que g' é meromorfa em V. Variando V, concluímos que g' é meromorfa em $\mathbb{P}^1 \setminus (P \cup \{\infty\})$.

Como $g \in \mathcal{M}(\bar{X})$, $g^{-1}(V)$ é um aberto de $\bar{X}$, para qualquer aberto V de $\mathbb{P}^1$. E, pelo teorema da aplicação aberta, teorema (1.60), $f \circ g^{-1}(V)$ é um aberto de $\mathbb{P}^1$. Ora, como f é sobrejectiva, $(g')^{-1}(V) = f \circ f^{-1} \circ (g')^{-1}(V) = f \circ g^{-1}(V)$, pelo que $(g')^{-1}(V)$ é aberto e g' é contínua em $\mathbb{P}^1$. Logo, pelo teorema do prolongamento de Riemann, teorema (1.65), $g' \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$. □

Teorema 4.9. *Seja P um subconjunto finito de $\mathbb{P}^1$ e $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ um revestimento de Galois finito. Seja $f : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ o seu prolongamento a uma função holomorfa definida na superfície de Riemann compacta $\bar{X}$.*

(a) *Então, para cada $\alpha \in Aut(f)$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \iota_\alpha : \mathcal{M}(\bar{X}) &\to \mathcal{M}(\bar{X}) \\ g &\mapsto g \circ \alpha^{-1} \end{aligned}$$

é um automorfismo de $\mathcal{M}(\bar{X})$ que fixa $\mathbb{C}(f)$.

(b) *A extensão $\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(f)$ é uma extensão de Galois e a aplicação*

$$\begin{aligned} \iota : Aut(f) &\to Gal(\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(f)) \\ \alpha &\mapsto \iota_\alpha \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

(c) *Para cada $p \in P$ seja $C_p^{top} \subseteq Aut(f)$ a classe de conjugação de p associada ao revestimento de Galois f, como na proposição (2.15).*

Para cada $p \in \mathbb{P}^1$ seja $C_p^{alg} \subseteq Gal(\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(f))$ a classe de conjugação de p associada à extensão $\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(f)$, como na proposição (4.6).

Então $C_p^{alg} = \{1\}$ se $p \notin P$ e, para cada $p \in P$, o isomorfismo

$$\iota : Aut(f) \to Gal(\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(f))$$

envia a classe C_p^{top} na classe C_p^{alg}.

Demonstração. (a) Para $g \in \mathcal{M}(\bar{X})$, temos que $g \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{M}(\bar{X})$, uma vez que α é um automorfismo holomorfo de $\bar{X}$. Portanto a aplicação ι_α está bem definida e é sobrejectiva, uma vez que $\iota_\alpha(g \circ \alpha) = g$. A sua inversa é dada por $g \mapsto g \circ \alpha$, logo ι_α é um automorfismo de $\mathcal{M}$. Temos ainda que ι_α fixa $\mathbb{C}(f)$, uma vez que $f \circ \alpha^{-1} = f$.

(b) Pela alínea anterior, para cada $\alpha \in Aut(f)$, $\iota_\alpha \in Aut(\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(f))$. Como $\iota_{\alpha\beta} = \iota_\alpha \iota_\beta$, a aplicação ι é um homomorfismo de grupos que envia $Aut(f)$ sobrejectivamente num subgrupo G de $Gal(\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(f))$.

O corpo fixo de G consiste das aplicações $g \in \mathcal{M}(\bar{X})$ tais que $g \circ \alpha = g$, para todo o α de $Aut(f)$. E essas aplicações g são da forma $g' \circ f$ com $g' \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ (pela proposição (4.8)). Como $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{C}(z)$ (teorema (1.75)), resulta que $fix(G) \simeq \mathbb{C}(f)$ e então, pelo teorema de Artin, concluímos que $\mathcal{M}(\bar{X})$ é uma extensão de Galois de $\mathbb{C}(f)$ com grupo de Galois G.

Falta mostrar que ι é injectiva. Seja $\alpha \in Aut(f) \setminus \{Id\}$ tal que $\iota_\alpha = Id$. Seja $x \in \bar{X}$ e $y = f(x)$. Pelo teorema de existência de Riemann, (teorema (1.79)), existe uma função meromorfa $g \in \mathcal{M}(\bar{X})$ que toma valores distintos em $f^{-1}(y)$. Como $x' = \alpha(x) \in f^{-1}(y)$ e $g(x') = \iota_\alpha(g)(x') = g(\alpha^{-1}(x')) = g(x)$ resulta que $x = x'$, mas então $\alpha = Id$. A contradição mostra que ι é injectiva.

(c) Seja $\Lambda = \mathbb{C}((t))$ o corpo das séries de Laurent formais (secção 4.1).

Caso 1. $p \in \mathbb{P}^1 \setminus P$.

Para um ponto x_0 da fibra $f^{-1}(p)$, vamos considerar uma carta (U, φ) como no teorema (1.64) tal que $x_0 \in U$. Se $p \neq \infty$, podemos admitir que $\infty \neq \varphi(U)$ e tomar $\varphi = f|_U$.

Se $p = \infty$ tomamos $\varphi = 1/(f|_U)$. Cada função meromorfa $g \in \mathcal{M}(\bar{X})$ tem expansão de Laurent em torno de x_0 da forma

$$g = \sum_{i=N}^{\infty} a_i(\varphi - \varphi(x_0))^i$$

(ver secção (1.4)). Enviando g em $\sum_{i=N}^{\infty} a_i t^i$ definimos um homomorfismo de anéis

$$\vartheta : \mathcal{M}(\bar{X}) \to \Lambda = \mathbb{C}((t)).$$

Este homomorfismo é não nulo, logo define um mergulho entre corpos. Vamos determinar $\vartheta(f)$. Se $p \neq \infty$ então $f = \varphi = p + (\varphi - \varphi(x_0))$ em U, logo $\vartheta(f) = p + t$. Se $p = \infty$ então $f = 1/\varphi = 1/(\varphi - \varphi(x_0))$ em U, logo $\vartheta(f) = t^{-1}$.

Portanto, $\vartheta : \mathcal{M}(\bar{X}) \to \Lambda$ é o prolongamento da aplicação $\vartheta_p : \mathbb{C}(f) \to \mathbb{C}(t)$ da secção (4.1), para $x = f$. Logo o índice de ramificação da extensão $\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(f)$ em p é 1 e $C_p^{\text{alg}} = \{1\}$, pela proposição (4.6).

Caso 2. $p \in P$.

Seja $\pi \in f^{-1}(p)$ um ponto ideal e $r > 0$ suficientemente pequeno. Para uma componente circular $W \in \pi$ de raio r, seja n o grau do revestimento $f|_W$ e seja $\varphi_\pi : W \to \mathbb{D}^*(r^{1/n})$ um homeomorfismo, dado pela proposição 2.4, tal que $\varphi_\pi^n = \kappa_p \circ f$. Então, tal como foi visto na secção 2.1, para $U_\pi = W \cup \{\pi\}$, (U_π, φ_π) é uma carta holomorfa centrada em π. Cada função $g \in \mathcal{M}(\bar{X})$ tem expansão de Laurent em torno de π da forma

$$g = \sum_{i=N}^{\infty} b_i \varphi_\pi^i$$

(notemos que $\varphi_\pi^n(\pi) = \kappa_p \circ f(\pi) = 0$). Enviando g em $\sum_{i=N}^{\infty} a_i \tau^i$ definimos um homomorfismo de anéis

$$\vartheta : \mathcal{M}(\bar{X}) \to \Lambda_n = \mathbb{C}((\tau)),$$

onde $\Lambda_n = \mathbb{C}((\tau))$, definido na secção 4.1, é uma extensão do corpo $\Lambda = \mathbb{C}((t))$ com $t = \tau^n$.

Temos que ϑ é um prolongamento da aplicação $\vartheta_p : \mathbb{C}(f) \to \mathbb{C}(t)$. De facto, a partir de $\varphi_\pi^n = \kappa_p \circ f$, obtemos que $f = \kappa_p^{-1} \circ \varphi_\pi^n = p + \varphi_\pi^n$ se $p \neq \infty$ e $f = 1/\varphi_\pi^n$ se $p = \infty$. Logo, $\vartheta(f) = p + \tau^n = p + t$, se $p \neq \infty$, e $\vartheta(f) = \tau^{-n} = t^{-1}$ se $p = \infty$.

Seja ω o gerador distinguido de $Gal(\Lambda_n : \Lambda)$, definido na secção (4.1). Pelo lema (4.3), ω é definido por

$$\omega(\sum_{i=N}^{\infty} b_i \tau^i) = \sum_{i=N}^{\infty} (b_i \xi_n^i) \tau^i. \tag{4.3}$$

Pela definição da classe C_p^{alg}, na proposição (4.6), esta classe contém o elemento

$$\vartheta^{-1} \circ \omega \circ \vartheta.$$

Pela definição da classe C_p^{top}, na proposição (2.15), esta classe contém o gerador distinguido h_W do estabilizador de W em $Aut(f)$. Logo, ficará demonstrado que $\iota(C_p^{\text{top}}) = C_p^{\text{alg}}$, se mostrarmos que

$$\iota(h_W) = \vartheta^{-1} \circ \omega \circ \vartheta. \tag{4.4}$$

Ora, por definição, h_W fixa W, logo fixa U_π e, por restrição, dá origem ao gerador distinguido do revestimento $f_W = \kappa_p \circ f : W \to \mathbb{D}^*(r)$. Como $\varphi_\pi^n = f_W$ em W, obtemos, pelo corolário (2.5), que $\varphi_\pi \circ h_W^{-1} = \xi_n \varphi_\pi$ em W (logo também em U_π). Para $g \in \mathcal{M}(\bar{X})$, temos que $\iota(h_W)(g) = g \circ h_W^{-1} = \sum_{i=N}^{\infty} b_i(\varphi_\pi \circ h_W^{-1})^i = \sum_{i=N}^{\infty} b_i(\xi_n\varphi_\pi)^i$ numa vizinhança de π. Comparando este resultado com a descrição feita em (4.3) de ω obtemos (4.4). □

Teorema 4.10. *Seja $L : \mathbb{C}(x)$ uma extensão de Galois finita. Então existe um revestimento de Galois finito $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ e um $\mathbb{C}$-isomorfismo de corpos $L \to \mathcal{M}(\bar{X})$ que envia x em f.*

Demonstração. Escolhamos um polinómio $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, irredutível como polinómio em y e tal que L é o corpo de decomposição de F sobre $\mathbb{C}(x)$. Seja n o grau de F em y. Pelo lema (1.10), sabemos que existe apenas um número finito de pontos $p \in \mathbb{C}$ para os quais o polinómio $F(p, y) \in \mathbb{C}[y]$ tem menos do que n raízes distintas. Seja P a reunião destes pontos com o ponto ∞.

Seja X' o conjunto dos $n+1$-uplos $(v, u_1, ..., u_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tais que $v \in \mathbb{P}^1 \setminus P$ e $F(v, u_1) = ... = F(v, u_n) = 0$ com $u_1, ..., u_n$ distintos (ou seja, $u_1, ..., u_n$ são as n raízes distintas de $F(v, y)$). Consideremos em X' a topologia induzida como subespaço de $\mathbb{C}^{n+1}$.

(1) A aplicação $f' : X' \to \mathbb{P}^1 \setminus P$, $(v, u_1, ..., u_n) \mapsto v$, é um revestimento e o grupo simétrico S_n actua como grupo de automorfismos do revestimento f', permutando $u_1, ..., u_n$.

Demonstração. Pelo teorema da função implícita, teorema (1.53), para cada $v_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus P$, existem funções holomorfas $\psi_1, ..., \psi_n$ definidas numa vizinhança V de v_0, tais que

$$\psi_1(v), ..., \psi_n(v)$$

são precisamente as raízes de $F(v, y)$, para cada $v \in V$.

Para cada $\sigma \in S_n$, seja

$$U_\sigma := \{(v, \psi_{\sigma(1)}(v), ..., \psi_{\sigma(n)}(v)) : \quad v \in V\}.$$

Então $(f')^{-1}(V)$ é a união disjunta dos conjuntos U_σ.

A aplicação $V \to U_\sigma$, $v \mapsto (v, \psi_{\sigma(1)}(v), ..., \psi_{\sigma(n)}(v))$, é inversa de $f'|_{U_\sigma} : U_\sigma \to V$. Logo ambas as aplicações são homeomorfismos. Tomando V compacta e conexa, também os conjuntos U_σ são compactos e conexos. Logo os conjuntos U_σ são abertos de $(f')^{-1}(V)$, uma vez que são disjuntos. E, portanto, são componentes conexas de $(f')^{-1}(V)$. Logo, qualquer disco conexo contido em V e centrado em v_0 é uma vizinhança admissível para f'. O que mostra que f' é revestimento. E, claramente, $S_n = Aut(f')$.

(2) Seja X uma componente conexa de X'. Então a restrição de f' a X é um revestimento de Galois finito $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$.

Demonstração. Pelo corolário (1.36), $f = f'|_X$ é um revestimento. Seja $v \in \mathbb{P}^1 \setminus P$ e sejam $u, u' \in f^{-1}(v)$. Por (1), existe $\alpha \in Aut(f')$ tal que $\alpha(u) = u'$. Então α envia a componente conexa X sobre si própria, uma vez que $u, u' \in X$. Concluímos que α se restringe a um automorfismo do revestimento f e que $Aut(f)$ age transitivamente sobre

$f^{-1}(v)$. Temos assim que f é um revestimento de Galois de grau finito, uma vez que $gr(f) \leq gr(f') = n!$.

(3) Vendo $\mathcal{M}(\bar{X})$ como subcorpo de $\mathcal{M}(X)$, temos que $\mathcal{M}(\bar{X})$ é algebricamente fechado em $\mathcal{M}(X)$.

Demonstração. Pretendemos mostrar que se $h \in \mathcal{M}(X)$ é algébrico sobre $\mathcal{M}(\bar{X})$, então $h \in \mathcal{M}(\bar{X})$.

Para simplificação da demonstração, suponhamos que $\bar{X} \setminus X = \{p_0\}$. Seja $h \in \mathcal{M}(X)$ um função que satisfaz uma equação polinomial de grau $n \geq 1$

$$a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} + ... + a_0 = 0,$$

com $a_i \in \mathcal{M}(\bar{X})$. Multiplicando ambos os membros da equação por uma potência suficientemente grande de $(z - p_0)$, podemos supor que nenhuma das funções a_i tem um pólo em p_0. A equação

$$q^n = -b_{n-1} q^{n-1} - ... - b_0,$$

com $b_i = a_i a_n^{n-i}$, tem solução $q = a_n h$. Como todas as funções a_i são limitadas numa vizinhança de p_0, resulta que também q é limitada numa vizinhança de p_0. Logo pelo teorema do prolongamento de Riemann, q prolonga-se como função meromorfa a $\bar{X}$. E, portanto, $h = \frac{q}{a_n} \in \mathcal{M}(\bar{X})$.

No caso geral, quando $\bar{X} \setminus X$ é um conjunto de pontos em número finito, como h é meromorfa em cada um dos pontos, concluímos que h é meromorfa em $\bar{X}$.

(4) Para $i = 1, ..., n$, a função $g_i : X \to \mathbb{C}, (v, u_1, ..., u_n) \mapsto u_i$, prolonga-se a uma função meromorfa g_i em $\bar{X}$, que satisfaz a equação $F(f, g_i) = 0$.

Demonstração. Cada ponto de X tem uma vizinhança da forma U_σ, e a aplicação $f|_{U_\sigma}$ é uma carta holomorfa em X, considerando a estrutura complexa definida em X no teorema (1.64). Nestas coordenadas locais, cada g_i é representada pela função holomorfa $\psi_{\sigma(i)}$. O que mostra que g_i é meromorfa em X.

Para $u = (v, u_1, ..., u_n) \in X$, temos que $F(v, u_i) = 0$. Logo $F(f(u), g_i(u)) = 0$, para todo o u de X. Vistas como elementos de $\mathcal{M}(X)$, as funções f e g_i satisfazem a equação $F(f, g_i) = 0$. Portanto, como $f \in \mathcal{M}(\bar{X})$ e $\mathcal{M}(\bar{X})$ é algebricamente fechado em $\mathcal{M}(X)$, resulta que $g_i \in \mathcal{M}(\bar{X})$.

(5) As funções $g_1, ..., g_n$ geram $\mathcal{M}(\bar{X})$ sobre $\mathbb{C}(f)$.

Demonstração. Pelo teorema (4.9), todo o elemento de $Gal(\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(f))$ é da forma ι_α, para $\alpha \in Aut(f)$. É então suficiente mostrar o seguinte: se ι_α fixa $g_1, ..., g_n$ então $\alpha = Id$.

De facto, se ι_α fixa $g_1, ..., g_n$ então, para todo $u \in X$, temos que $g_i(u) = g_i(\alpha^{-1}(u))$, para $i = 1, ..., n$. Como também $f(u) = f(\alpha^{-1}(u))$, resulta que $u = \alpha^{-1}(u)$, pelas definições de f e de cada g_i. E, então, $\alpha = Id$.

(6) Concluímos então que, como as funções $g_1, ..., g_n$ são raízes distintas do polinómio irredutível $F(f, y)$ sobre $\mathbb{C}(f)$, o corpo $\mathcal{M}(\bar{X})$ é um corpo de decomposição de F sobre $\mathbb{C}(f)$. E sabemos que $\mathcal{M}(\bar{X})$ é extensão de Galois de $\mathbb{C}(f)$. □

Teorema 4.11 (de Existência de Riemann - versão algébrica). *Consideremos um tipo de ramificação $\mathcal{T} = [G, P, (C_p)_{p \in P}]$. Seja $r := |P|$ e notemos os elementos de P por $p_1, ..., p_r$.*

Então existe uma extensão de Galois finita de $\mathbb{C}(x)$ de tipo de ramificação $\mathcal{T}$ se e somente se existem geradores $g_1, ..., g_r$ de G tais que $g_1...g_r = 1$ e $g_i \in C_{p_i}$, para $i = 1, ..., r$.

Demonstração. Dada uma extensão de Galois finita $L : \mathbb{C}(x)$, seja $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ o revestimento dado no teorema (4.10). Pela alínea (c) do teorema (4.9), o conjunto dos pontos de ramificação desta extensão são exactamente os elementos $p \in P$ para os quais $C_p^{\text{top}} \neq \{1\}$. Logo, pela observação (2.26), o grupo $Aut(f)$ tem geradores $h_1, ..., h_r$ com $h_1...h_r = 1$ e $h_i \in C_{p_i}^{\text{top}}$, para todo $i = 1, ..., r$. Então, as imagens de $h_1, ..., h_r$ pelo isomorfismo ι são geradores de $Gal(\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(x))$, que gozam das mesmas propriedades. O que mostra o pretendido, uma vez que $L \simeq \mathcal{M}(\bar{X})$.

Reciprocamente, suponhamos que existem geradores $g_1, ..., g_r$ de G tais que $g_1...g_r = 1$ e $g_i \in C_{p_i}$, para $i = 1, ..., r$. Pela versão topológica do teorema de existência de Riemann (teorema (2.25)), existe um revestimento de Galois finito $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ com tipo de ramificação $\mathcal{T}$. Seja $\bar{f} : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ o revestimento ramificado associado a f. Pelo teorema (4.9), a extensão de Galois $\mathcal{M}(\bar{X}) : \mathbb{C}(\bar{f})$ tem o mesmo tipo de ramificação. □

Podemos agora sintetizar os resultados apresentados.

Teorema 4.12. *Seja G um grupo finito, P um subconjunto finito de $\mathbb{P}^1$ e $y \in \mathbb{P}^1 \setminus P$.*

Então existe uma correspondência biunívoca entre os objectos:

(1) *As classes de $\mathbb{C}(x)$-isomorfismos de extensões de Galois $L : \mathbb{C}(x)$ com grupo de Galois isomorfo a G e com pontos de ramificação contidos em P.*

(2) *As classes de isomorfismo de revestimentos de Galois $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus P$ com grupo de automorfismos isomorfo a G.*

(3) *Os subgrupos normais do grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus P, y)$ com quociente isomorfo a G.*

Demonstração. A correspondência entre (2) e (3) resulta da teoria geral de revestimentos (teorema (1.52)).

Vamos agora estabelecer uma relação entre (1) e (2). Para cada revestimento f como em (2), podemos associar, como no teorema (4.9), uma extensão $L : \mathbb{C}(x)$ de (1). E a menos de $\mathbb{C}(x)$-isomorfismos, revestimentos isomorfos induzem a mesma extensão. Logo, obtemos uma aplicação que envia objectos de (2) em objectos de (1). Esta aplicação é sobrejectiva pelo teorema (4.10).

Sejam f e f' dois revestimentos de (2) e sejam L e L' as extensões associadas aos revestimentos f e f', respectivamente. Suponhamos que existe um $\mathbb{C}(x)$-isomorfismo $\theta : L \to L'$. Então L e L' têm o mesmo tipo de ramificação $\mathcal{T}$. Logo, pela alínea (c) do teorema (4.9), também f e f' têm o mesmo tipo de ramificação, sendo, portanto, isomorfos. □

Consideremos o espaço de moduli $\mathcal{H}_r(G)$ dos revestimentos de Galois da esfera de Riemann perfurada e o revestimento $\Psi : \mathcal{H}_r(G) \to \mathcal{O}_r$.

Para $P \in \mathcal{O}_r$, vamos definir uma relação de equivalência entre os pares (L, ν), onde L é uma extensão de Galois finita de $\mathbb{C}(x)$ com pontos de ramificação contidos em P e $\nu : G \to Gal(L : \mathbb{C}(x))$ é um isomorfismo. Dizemos que dois pares (L, ν) e (L', ν') são *equivalentes* se existir um $\mathbb{C}(x)$-isomorfismo $\rho : L \to L'$ tal que $\nu'(g) = \rho\nu(g)\rho^{-1}$, para todo o elemento g de G.

Teorema 4.13. *Existe uma correspondência biunívoca entre os elementos $u = (f, \mu)$ de $\mathcal{H}_r(G)$ e as classes de equivalência de pares (L, ν), onde L é uma extensão de Galois finita de $\mathbb{C}(x)$ com r pontos de ramificação e $\nu : G \to Gal(L : \mathbb{C}(x))$ é um isomorfismo. Sob esta correspondência, $\Psi(u)$ é o conjunto dos pontos de ramificação de $L : \mathbb{C}(x)$.*

Temos ainda que ao elemento $\epsilon_A(u)$ corresponde a extensão $(L, \nu \circ A^{-1})$, para cada $A \in Aut(G)$.

Demonstração. A cada par $u = (f, \mu)$ podemos associar o par (L, ν) obtido por tomarmos $L = \mathcal{M}(\bar{X})$ e $\nu = \iota \circ \mu$, onde ι é o isomorfismo $Aut(f) \to Gal(L : \mathbb{C}(x))$ definido no teorema (4.9). Do teorema (4.12), resulta que a correspondência entre classes de equivalência é biunívoca. Sabemos ainda, pela alínea (c) do teorema (4.9), que os pontos de ramificação de L são exactamente os pontos de $\Psi(u) = P$.

Para $u' = \epsilon_A(u) = [P, A \circ \varphi]$, temos que $A \circ \varphi = A \circ \mu^{-1} \circ \Phi_{x_0} = (\mu \circ A^{-1})^{-1} \circ \Phi_{x_0}$, pelo que $\nu' = \iota \circ (\mu \circ A^{-1}) = \nu \circ A^{-1}$. $\square$

Bibliografia

[1] Bredon, Glen E.; *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] Brison, Owen J.; *Teoria de Galois*, Universidade de Lisboa, Lisboa, 1999.

[3] Fischer, Gerd; *Plane Algebraic Curves*, American Mathematical Society, 2001.

[4] Farkas, Hershel M.; Kra, Irwin; *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[5] Forster, Otto; *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[6] Fulton, W.; *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Ann. Math. 90 (1969), 542-575.

[7] Fried, Michael D.; *Fields of definition of functions fields and Hurwitz families - groups as Galois groups*, Communications in Algebra 5 (1977), 17-82.

[8] Fried, Michael D.; Volklein, Helmut; *The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces*, Mathematische Annalen 290 (1991), 771-800.

[9] Hansen, Vagn Lundsgaard; *Braids and Coverings: selected topics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[10] Hurwitz, A. ; *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Mathematische Annalen 39 (1891), 1-61.

[11] Kirwan, Frances; *Complex Algebraic Curves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[12] Lee, John M.; *Introducion to Topological Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[13] Narasimhan, Raghavan; *Compact Riemann Surfaces*, Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland, 1992.

[14] Rotman, Joseph J.; *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] Volklein, Helmut; *Groups as Galois Groups: an introduction*, Cambridge University Press, New York, 1996.

[16] Volklein, Helmut; *Moduli spaces for covers of the Riemann sphere*, Israel Journal of mathematics 85 (1994), 407-430.

Índice