

Maria Leonor Moreira

**Aspectos Geométricos das Teorias
de Matroides e de Matroides Orientados**

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

1993

Maria Leonor Moreira

Aspectos Geométricos das Teorias
de Matroides e de Matroides Orientados

Dissertação para prestação de provas de
Doutoramento em Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

1993

Agradecimentos

Ao meu orientador, Raul Cordovil, agradeço a ajuda constante que me deu, com os seus profundos conhecimentos e permanente disponibilidade, e a sua amizade.

Ao Grupo de Matemática Pura o apoio dado.

Ao António Guedes de Oliveira pela paciência com que leu este trabalho e a ajuda dos seus comentários.

Ao Jorge Almeida pela atenção que sempre me dispensou.

À Margarida Barros.

Agradeço ainda, ao I.N.I.C. a Bolsa para Doutoramento e à J.N.I.C.T. o subsídio para impressão deste trabalho.

Índice

1	Prefácio	3
1.1	Nota histórica	3
1.2	Resumo da dissertação	4
2	Matroides e Famílias Incomparáveis	7
2.1	Introdução	7
2.2	Matroides	9
2.2.1	Independentes – Bases	9
2.2.2	Dependentes – Circuitos	11
2.2.3	Fechados – Reticulado geométrico	14
2.2.4	Menores	17
2.2.5	Dual	19
2.2.6	Soma – Componentes conexas	23
2.2.7	Representabilidade – Menores excluídos	25
2.3	<i>Clutters</i>	27
2.3.1	<i>Clutters</i> e bases	27
2.3.2	Caracterização de <i>clutters</i> que são bases de um matroide	31
2.3.3	<i>Clutters</i> e circuitos	33
2.3.4	Operador bloqueador	34
2.3.5	Caracterização dos <i>clutters</i> que são os circuitos de um matroide	36
3	Grafo e Politope de Bases-cobases	41
3.1	Introdução	41
3.1.1	Grafo das Bases-cobases	42
3.1.2	Politope das Bases-Cobases	44
3.2	Caminhos curtos no grafo das bases-cobases	48
3.3	Blocos bem comportados	50
3.3.1	Politopes das bases-cobases de dimensão mínima	50
3.3.2	Politope das bases de um bloco redutível	58
3.4	Apêndice	61

3.4.1	Caracterização de Maurer do grafo das bases	61
3.4.2	Grafos série-paralelos	63
4	Matroides orientados e arranjos de hiperplanos	67
4.1	Introdução	67
4.2	Matroide associado a um arranjo de hiperplanos	69
4.3	Matroide orientado	73
4.3.1	Definição de matroide orientado	74
4.3.2	Representabilidade	78
4.3.3	Reticulado dos Covectores	80
4.3.4	Reticulado das faces	82
4.3.5	Representação topológica	85
4.3.6	Vértices e arestas de um matroide orientado	89
4.4	Como se pode passear num matroide orientado	92
4.4.1	Câmaras ou Topes	92
4.4.2	Galerias	93
4.4.3	Caminhos equivalentes	95
4.5	Aplicação do teorema	100
4.5.1	<i>CW</i> -complexo de Salvetti determinado por um matroide orientado	100
4.5.2	Uma apresentação do grupo fundamental $\Pi_1(\Delta_{\mathcal{M}})$	102
4.6	Apêndice	107
4.6.1	Conjuntos parcialmente ordenados, reticulados	107
4.6.2	Função de Möbius e relação de Euler	108
4.6.3	Complexos celulares regulares	109
4.6.4	Homotopia combinatória	111
	Bibliografia	113

"...The hard won theory of matroids ...rich in connections with mathematics, pure and applied, deeply rooted in the utmost reaches of combinatorial thinking, strongly motivated by the toughest combinatorial problems of our day, this theory has emerged as the proving ground of the idea that combinatorics, too, can yield to the power of systematic thinking...matroid theory reflects in an exemplary way the mathematical preoccupations of our day, such as meeting of the cross-currents of pure and applied mathematics and the cutting across party lines of separate fields, while not losing sight of the concrete objectives of solving some of the longstanding problems of contemporary mathematics." Gian-Carlo Rota, [99].

1. Prefácio

1.1. Nota histórica

A teoria de matroides nasce nos anos trinta, com uma primeira referência de van der Waerden ([96]) à axiomatização da dependência linear e algébrica, e com o artigo de fundo de Whitney [101] onde é dada a axiomática e introduzido o termo *matroide*, são estabelecidas as noções básicas da teoria e sublinhada a relação estreita com a teoria de grafos. Nessa mesma época, Birkhoff ([5]) e MacLane ([75]) estudam as ligações da teoria de matroides à teoria dos reticulados e à geometria projectiva, respectivamente.

O assunto só encontra novo alento com a publicação, no fim dos anos cinquenta, dos importantes resultados de Tutte ([94] e [95]), em particular daqueles que estão ligados ao problema da *coordenabilidade de matroides*, e, também, dos resultados de Edmonds e Fulkerson ([43]), Mirski e Perfect ([80]) que estabelecem a ligação da teoria de matroides com a *teoria transversal*.

Rockafellar em 1967 ([88]) considera inevitável a *orientação* de matroides. Cita o artigo ([79]) onde Minty introduz a definição axiomática de uma generalização do conceito de grafo orientado e dá exemplos de conceitos e resultados, em teoria de grafos e em programação linear, que considera que deveriam ser abrangidos pela *teoria de matroides orientados*.

No entanto, e devido a diversas circunstâncias, os dois artigos que introduzem a teoria de matroides orientados só são publicados em 1978:

Bland e Las Vergnas ([2]) publicam um artigo conjunto, embora tenham chegado separadamente à noção de *matroide orientado*; o primeiro motivado pela abstracção da noção de *dualidade* em programação linear e o segundo pela teoria de grafos e pela combinatória. Por seu lado, a origem do trabalho de Folkman e Lawrence ([50]) é a teoria de convexidade e o carácter do artigo é geométrico.

Continuaram a aparecer novas abordagens às duas teorias, as quais criam conexões entre elas e os mais variados ramos da matemática, da programação linear à geometria algébrica, da topologia à teoria de convexidade. Estas diferentes ligações tornam os seus resultados mais interessantes

a não-especialistas e trazem intuição e novos métodos para quem nelas trabalha.

1.2. Resumo da dissertação

As operações de *contração* e *supressão* desempenham um papel fundamental em teoria de matroides. Dado um matroide M definido num conjunto E , cada uma delas permite definir, em qualquer subconjunto de E , uma estrutura de matroide induzida pela estrutura de M , e as duas estão relacionadas pelo operador *dual*.

Em particular, estas operações possibilitam as demonstrações por indução. Qualquer matroide obtido de M utilizando consecutivamente qualquer uma delas diz-se um *menor* de M .

No segundo capítulo da dissertação damos duas das possíveis definições destas operações para *clutters* (ou *famílias incomparáveis* — famílias de subconjuntos de um conjunto finito, não comparáveis por inclusão). Estas definições são a generalização natural das mesmas operações nas famílias (incomparáveis) das bases e dos circuitos de um matroide.

O operador *dual* quando aplicado a um menor de qualquer matroide troca a operação de contração pela de supressão (e vice-versa). Os operadores *complementar* e *bloqueador* são também naturais em *clutters* quando se pretende generalizar, respectivamente, as bases e os circuitos de um matroide.

Usando a definição conveniente de *menor* de um *clutter* provamos que o operador *complementar* [resp. *bloqueador*] é o único operador de *clutters* que troca supressão por contração (e vice-versa).

Estes resultados generalizam um teorema de Kung [68] sobre dualidade de matroides, bem como um dos principais resultados de Bland e Dietrich [10] sobre dualidades combinatórias, unificando a literatura existente sobre o assunto.

Provamos também uma caracterização por *menor excluído* dos *clutters* que são a família das bases e dos que são a família dos circuitos de algum matroide.

O *grafo das bases* de um matroide é bem conhecido e foi completamente caracterizado por Maurer ([77] e [78]); ele traduz em termos de grafos a *propriedade de troca de Steiniz* que caracteriza a família das bases de um matroide.

Em [47] Farber et. al. definem um grafo, que pode ser associado a qualquer *clutter* [45] e que conjecturam ser conexo quando determinado por um matroide. Provam a conjectura para matroides gráficos e notam

que basta considerar o grafo associado a matroides cujo conjunto de suporte é união disjunta de duas bases, ditos *blocos*.

O *grafo das bases-cobases* de um *bloco* M , é o grafo cujos *vértices* são as bases de M cujo complementar também é base e tal que dois vértices estão ligados por uma *aresta* se e só se as bases que lhes correspondem só diferem em dois elementos.

No terceiro capítulo da dissertação, provamos que no grafo das bases-cobases de de um bloco gráfico (ou cográfico) dois vértices quaisquer correspondentes a bases disjuntas estão ligados por um caminho de comprimento igual ao *rank* do bloco, melhorando simultaneamente o resultado de Farber et. al. já referido e um outro resultado de Kajitani et. al. [65].

O *politopo das bases* de um matroide é o fecho convexo dos vectores de incidência das bases e está relacionado com problemas em áreas da matemática tão distintas como a programação linear ([41] e [42]) e a geometria algébrica ([52] e [54]).

Associamos a um bloco M o *politopo das bases-cobases* de M que é a intersecção dos politopos das bases de um bloco com o do seu dual. Provamos que este politopo é um *hipercubo* se e só se a sua dimensão é igual ao $rank(M)$.

Damos ainda uma caracterização construtiva, *bloco redutível*, dos matroides em que a igualdade é verificada.

O último capítulo da tese é dedicado à prova de um *teorema de homotopia para matroides orientados*.

Pelo Teorema de representação de Folkman-Lawrence, os matroides orientados podem ser vistos como uma generalização dos *arranjos de hiperplanos*. Estes são objecto de estudo de diferentes áreas da matemática (ver, e.g., [85] e [103]). O estudo do tipo de homotopia de $V = \mathbb{C}^d \setminus \mathcal{H}^{\mathbb{C}}$, complementar do complexificado de um arranjo de hiperplanos \mathcal{H} em \mathbb{R}^d , é objecto de vários trabalhos de investigação recentes. Em particular, Deligne em [37] determinou o tipo de homotopia desta variedade no caso das componentes conexas de $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{H}$, *câmaras*, serem cones sobre um $(d-1)$ -simplexo. Essencial para a sua prova foi o seguinte *resultado combinatório*: duas quaisquer *galerias* (caminhos minimais ligando *câmaras*) com as mesmas extremidades podem ser obtidas uma da outra por um número finito de deformações ditas *deformações elementares*. Salvetti em [90] determinou o tipo de homotopia de V no caso dos hiperplanos estarem em *posição geral* e salientou que este resultado era essencial para obter uma apresentação do seu grupo fundamental.

O nosso teorema generaliza para qualquer matroide orientado este resultado, mostrando, em particular, que a restrição imposta sobre as *câmaras* não é necessária.

Este resultado permitiu novos avanços no estudo da variedade em questão (ver [23], [24], [28]), tendo sido utilizado para obter uma apresentação do grupo de homotopia do *complexo de Salvetti* ([90]) associado à variedade que, na verdade, é determinado pelo matroide orientado associado ao arranjo real de hiperplanos. No fim do capítulo damos um exemplo de aplicação.

Os resultados originais expostos nesta dissertação resultam de trabalho conjunto com o meu orientador, Raul Cordovil, e estão publicados em [27], [31] e [32]. No primeiro artigo também participou Komei Fukuda.

No sentido de tornar a leitura da dissertação acessível a não-especialistas, incluímos duas secções, 2.2 e 4.3, onde são introduzidos os conceitos e os resultados básicos em teoria de matroides e de matroides orientados, respectivamente.

Uma parte das figuras foi feita por António Guedes de Oliveira, usando o programa *Mathematica*.

"... This is not to say that all aspects of combinatorial theory can be covered by the matroid umbrella; however, many parts of graph theory, transversal theory, block designs and combinatorial lattice theory can be more clearly understood by the use of matroids. Furthermore, since matroids are closely related to classical linear algebra and geometry they serve as a link between combinatorics and the more mainstream areas of mathematics...." D.J.A: Welsh, [98].

2. Matroides e Famílias Incomparáveis

2.1. Introdução

As várias definições equivalentes da estrutura de matroide, além de estabelecerem conexões entre esta teoria e diversos ramos da matemática, fornecem a compreensão das relações entre os diversos conceitos da teoria e exemplos capazes de estimular a intuição para a resolução de novos problemas.

Duas delas, já incluídas no artigo de Whitney e directamente ligadas à algebra linear e à teoria de grafos, axiomatizam, respectivamente, a família das *bases* e a dos *circuitos* de um matroide. Em ambos os casos, os elementos destas famílias são subconjuntos *incomparáveis* do *conjunto de suporte* do matroide.

Recentemente, vários autores têm definido e estudado estruturas que generalizam os matroides em diferentes direcções conforme as propriedades que interessa manter e os novos objectos que interessa enquadrar. São exemplo disso os *greedoids* [66] (veja também [97], [17]).

Em [44] foi introduzida por Edmonds e Fulkerson a noção de *clutter* com o propósito de encontrar um algoritmo capaz de resolver os chamados *problemas "bottleneck"*, de que é exemplo o problema de determinar, num grafo cujas arestas têm pesos, uma árvore T tal que é mínimo o peso da mais pesada das arestas que não pertencem a T .

Definição 2.1. Um *clutter* ou uma *família incomparável*, \mathcal{S} , é uma família de subconjuntos incomparáveis de um conjunto finito $E = E(\mathcal{S})$, i.e., para todo $S, T \in \mathcal{S}$, $S \subseteq T \implies S = T$.

$E = E(\mathcal{S})$ é o *conjunto de suporte* do *clutter* \mathcal{S} . Quando for necessário explicitá-lo, escrevemos $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, E)$.

A família das bases e a dos circuitos de qualquer matroide são exemplo de *clutters*; vamos expor na segunda parte deste capítulo os resultados obtidos em duas categorias de *clutters* que generalizam cada uma destas famílias.

As operações de supressão (\setminus) e contracção ($/$) têm um papel muito importante em teoria de matroides, em particular tornam possíveis as demonstrações por indução.

Damos duas das possíveis definições destas operações em *clutters*, uma generalizando as operações com bases e outra as operações com circuitos de um matroide.

Um operador de clutter é uma aplicação ϕ da classe de todos os clutter nela própria que associa a um clutter S de conjunto de suporte E um clutter $\phi(S)$ com o mesmo conjunto de suporte — $E(\phi(S)) = E(S) = E$.

Também vamos introduzir dois operadores na classe dos *clutter*, naturais quando se considera os *clutter* como uma generalização de cada um destes conceitos em teoria de matroides. Utilizando-as e os respectivos conceitos de menor obtivemos uma generalização de um teorema obtido por Kung ([68], Teorema 1). Ele prova que a função que a qualquer *matroide* associa o seu *dual* é a única, não-trivial, que troca *contracção* por *supressão*.

No estudo das *dualidades combinatórias* feito em [10], uma *dualidade de clutters* é um operador de *clutters*, ϕ , *involutivo* (i.e., $\phi \circ \phi(S) = S$, para todo o *clutter* S) e que troca *supressão* por *contracção* (i.e., $\phi(S \setminus X) = \phi(S)/X$ e $\phi(S/X) = \phi(S) \setminus X$, para todo o $X \subseteq E(S)$).

Provamos que os operadores *complementar* e *bloqueador* são as únicas dualidades combinatórias para cada uma das definições das operações de menor, $/$ e \setminus .

Finalmente, damos uma caracterização por *menor excluído* dos *clutter* que são a família das bases e dos que são a família dos circuitos de um matroide, usando em cada um dos casos a respectiva definição de menor.

A semelhança dos resultados obtidos em cada uma das categorias de *clutter* sugere a existência de um functor entre elas. No entanto, não fomos capazes de o formalizar.

Na primeira parte deste capítulo, fazemos um curto resumo dos conceitos básicos da teoria de matroides de modo a estabelecer notações e permitir uma leitura autossuficiente da dissertação. Incluímos também alguns resultados conhecidos, uns pela sua importância para a compreensão deste resumo, outros porque serão utilizados nos capítulos subsequentes. A título de exemplo escrevemos provas de alguns deles; o leitor interessado tem uma exposição da teoria nas duas primeiras referências obrigatórias em teoria de matroides, o livro de Welsh [98] e o de Crapo e Rota [35], e uma exposição mais completa e actualizada, feita por especialistas em cada um dos temas, nos dois livros editados recentemente por White ([99] e [100]).

2.2. Matroides

2.2.1. Independentes – Bases

Da *propriedade de troca de MacLane-Steiniz* é possível deduzir os resultados fundamentais àcerca de conjuntos independentes e bases de um espaço vectorial. Ela é usada como axioma numa das definições de *matroide*:

Definição 2.2. Seja E um conjunto finito e \mathcal{B} uma família de subconjuntos de E . \mathcal{B} é a *família das bases* de um matroide se e só se:

- 1 $\mathcal{B} \neq \emptyset$;
- 2 para todo o par $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e para todo o $b_1 \in B_1 \setminus B_2$ existe $b_2 \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 \cup \{b_2\} \setminus \{b_1\} \in \mathcal{B}$:

O par $M = (E, \mathcal{B})$ é dito um *matroide*, $E = E(M)$ é o seu *conjunto de suporte* e $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ é a família das bases do matroide M .

É consequência quase imediata da definição que os elementos de \mathcal{B} são incomparáveis (por inclusão) e que têm todos o mesmo cardinal, dito o *rank* do matroide — $rank(M) = |B|$, para qualquer $B \in \mathcal{B}$.

Exemplos

1. É claro que um conjunto finito E de vectores de um espaço vectorial V verifica os axiomas quando tomamos para \mathcal{B} os subconjuntos de E linearmente independentes e maximais. Neste caso, diz-se que $M_{Lin} = (E, \mathcal{B})$ é um *matroide linear* ou *vectorial* e o *rank* deste matroide coincide com a dimensão do subespaço vectorial de V gerado por E (em particular, se E for um conjunto gerador $rank(M) = dim(V)$).
2. Um exemplo análogo é o de *matroide afim*, $M_{Af} = (E, \mathcal{B})$, cujas bases são os subconjuntos de E maximais independentes afins. Neste caso, a dimensão do subespaço afim gerado por E é igual a $rank(M) - 1$.
3. Fazendo E o conjunto das arestas de um grafo $G = (V, E)$, a família \mathcal{B} cujos elementos são as arestas das árvores geradoras de G (das florestas geradoras se G for desconexo) verifica os axiomas das bases de um matroide. Diz-se que $M(G) = (E, \mathcal{B})$ é um *matroide gráfico* e $rank(M(G)) = |V| - \alpha$, onde α é o número de componentes conexas de G .
4. Dois matroides, $M_1 = (E_1, \mathcal{B}_1)$ e $M_2 = (E_2, \mathcal{B}_2)$, dizem-se *isomorfos* se existe uma bijecção $\phi : E_1 \rightarrow E_2$, tal que:

$$B_1 \in \mathcal{B}_1 \iff \phi(B_1) \in \mathcal{B}_2.$$

As categorias de matroides são definidas (como é usual) a menos de isomorfismo, e.g., um matroide M é linear [resp. afim ou gráfico] se existe um matroide $M' = M_{Lin}$ [$M' = M_{Af}$ ou $M' = M(G)$] tal que M é isomorfo a M' .

Tendo os exemplos em mente, são naturais as definições:

- *Conjuntos independentes* — um subconjunto I de E diz-se *independente* se está contido nalguma base, i.e., $I \subseteq B$ para algum $B \in \mathcal{B}$.

É imediato da definição, que o conjunto vazio é independente e que um subconjunto de um conjunto independente ainda é independente.

Usando o axioma 2 das bases prova-se que, dados dois conjuntos independentes I e J tais que $|I| < |J|$, então existe $x \in J \setminus I$ tal que $I \cup \{x\}$ é independente.

- *Função rank*:

$$\begin{aligned} \text{rank} : 2^E &\longrightarrow \mathbb{Z}_0^+ \\ X &\mapsto \text{rank}(X) = |\text{elem. maximal } \mathcal{I}(X)| \end{aligned}$$

onde $\mathcal{I}(X) = \{I \subseteq X : I \text{ é independente}\}$.

A função *rank* está bem definida em consequência das propriedades dos conjuntos independentes atrás mencionada.

É claro que, para todo $X \subseteq E$, $0 \leq \text{rank}(X) \leq |X|$ e que a função é crescente, i.e., para todo $X, Y \subseteq E$, $X \subseteq Y \Rightarrow \text{rank}(X) \leq \text{rank}(Y)$.

Menos óbvia é a chamada *desigualdade submodular*:

$$\forall X, Y \subseteq E, \text{rank}(X \cup Y) + \text{rank}(X \cap Y) \leq \text{rank}(X) + \text{rank}(Y).$$

Mais exemplos

1. Seja E um conjunto com n elementos e seja k um inteiro $k \leq n$; a família \mathcal{B} dos subconjuntos de E com k elementos verifica os axiomas das bases de um matroide, dito *matroide uniforme* e notado $U_{n,k}$. No caso $k = n$ (todos os subconjuntos de E são independentes) chama-se *matroide livre* e nota-se \mathcal{F}_n .

O matroide uniforme $U_{4,2}$ é o menor (com o menor número de elementos no conjunto de suporte) matroide não gráfico.

2. Seja $\mathcal{R} \subseteq Y \times I$ uma relação binária e seja $A_i = \{y \in Y : y \mathcal{R} i\}$, para cada $i \in I$. Os subconjuntos de Y que podem ser postos em correspondência bijectiva com o conjunto I são chamados *sistemas de representantes distintos* da família de conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$; estes conjuntos são as bases de um matroide $M = (Y, \mathcal{B})$ dito *matroide transversal*.

Sendo, por exemplo, $A_1 = \{a, b, c\}$ e $A_2 = \{b, c, d\}$, o matroide transversal definido por estes dois conjuntos é isomorfo a $U_{4,2}$.

Por outro lado o matroide $M = (E, \mathcal{B})$, onde $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ e todos os subconjuntos de E com dois elementos são bases excepto $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ e $\{e, f\}$, não é transversal.

3. Seja $G_k(\mathbb{C}^n)$ a *variedade de Grassmann* dos subespaços de dimensão k dos espaço vectorial complexo de dimensão n .

É usual decompor $G_k(\mathbb{C}^n)$ em *Scubert cells* [54]; dois elementos da variedade estão na mesma *Scubert cell* se é igual a dimensão da intersecção dos dois subespaços com todos os elementos uma cadeia fixada de subespaços coordenados de \mathbb{C}^n .

Gel'fand, no artigo [54] notou que esta decomposição da variedade de Grassmann está directamente ligada à teoria de matroides:

Seja $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de \mathbb{C}^n e, para todo o $J \subseteq E = \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{C}^J = \text{espaço gerado}\{e_i : i \in J\}$; dois elementos X, Y de $G_k(\mathbb{C}^n)$ estão no mesmo *estrato* Γ se:

$$\dim(X \cap \mathbb{C}^J) = \dim(Y \cap \mathbb{C}^J), \text{ para todo } J \subseteq E.$$

Estes estratos correspondem a intersecções de *Scubert cells* e determinam uma partição de $G_k(\mathbb{C}^n)$. A cada estrato Γ é associada uma aplicação:

$$\begin{aligned} r_\Gamma : 2^E &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ J &\mapsto r_\Gamma(J) = \dim(X / (X \cap \mathbb{C}^{E \setminus J})) \end{aligned}$$

onde X é um qualquer elemento de Γ .

Como foi notado no artigo já referido, r_Γ é a função *rank* de um matroide, M_Γ , dito o *matroide do estrato* Γ .

2.2.2. Dependentes – Circuitos

Seja M um matroide definido num conjunto $E = E(M)$:

- Um elemento $x \in E$ chama-se um *lacete* se $x \notin B$ para toda a base B do matroide M . I.e., x é um lacete se e só se o conjunto $\{x\}$ não é independente.

Os subconjuntos de E que não são independentes dizem-se *dependentes*; ou seja, x é um lacete se e só se $\{x\}$ é dependente.

- Um subconjunto C de E diz-se um *circuito* se é dependente e é minimal para a inclusão com esta propriedade, i.e., se C é dependente e todo o subconjunto X de C é independente.

Dois elementos $x, y \in E$ dizem-se *paralelos* se o conjunto $\{x, y\}$ é circuito.

Um matroide M sem lacetes nem elementos paralelos diz-se um *matroide simples*.

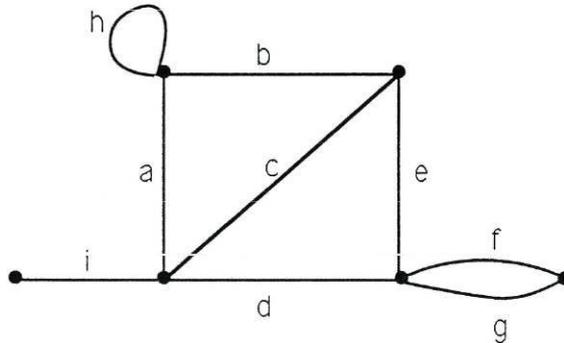
É claro que esta nomenclatura — lacete, elementos paralelos, matroide simples — provém de teoria de grafos; na verdade, para um especialista nesta área a abordagem natural da teoria de matroides é feita pela *família dos circuitos*; sendo M um matroide definido no conjunto E representaremos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M)$ esta família — $\mathcal{C} = \{C \subseteq E : C \text{ é circuito de } M\}$.

No caso de $M = M(G)$ ser um matroide gráfico determinado pelo grafo $G = (V, E)$, os circuitos de M correspondem aos *ciclos elementares* de G — $\mathcal{C}(M) = \{C \subseteq E : C \text{ é o conjunto das arestas de um ciclo elementar de } G\}$.

Decorre da definição que os elementos de \mathcal{C} são incomparáveis (por inclusão); além disso, é válida em qualquer matroide M a chamada *propriedade de eliminação dos circuitos*:

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}, (C_1 \neq C_2) \forall x \in C_1 \cap C_2, \exists C_3 \in \mathcal{C} : C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{x\}.$$

Estas duas propriedades dão a axiomática de matroides usando a família dos circuitos.



A família dos circuitos do matroide $M(G)$, onde G é o grafo da figura, é:

$$\mathcal{C} = \{ \{h\}, \{f, g\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \}$$

h é um lacete, f e g são elementos paralelos de $M(G)$.

Sendo $C_1 = \{a, b, c\}$ e $C_2 = \{c, d, e\}$, $c \in C_1 \cap C_2$ e $\{a, b, d, e\} \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{c\}$, exemplificando a propriedade de eliminação de circuitos.

Exemplo — Se $G = (V, E)$ é um grafo já vimos que G determina um matroide, $M(G)$, também chamado *matroide dos ciclos* de G . Note-se que

um mesmo matroide gráfico pode ser determinado por vários grafos não isomorfos, mesmo considerando grafos sem vértices isolados (um exemplo pode ser facilmente obtido se o matroide tiver um lacete, já que a aresta que lhe corresponde pode ser incidente em qualquer um dos vértices). Whitney determinou qual a relação que existe entre dois grafos G e H , sem vértices isolados, tais que os matroides $M(G)$ e $M(H)$ são isomorfos (ver [99], Teorema 6.3.1).

Note-se que o grafo G determina naturalmente um outro matroide no conjunto E :

um subconjunto Y do conjunto das arestas do grafo $G = (V, E)$ é um *conjunto de corte* se o grafo que se obtém de G retirando as arestas de Y , $G \setminus Y$, tem, pelo menos, mais uma componente conexa que o grafo G . Um conjunto de corte com uma só aresta chama-se um *istmo*.

$$\mathcal{C}^* = \{D \subseteq E : D \text{ é um conjunto de corte em } G, \text{ minimal (para a inclusão)}\}$$

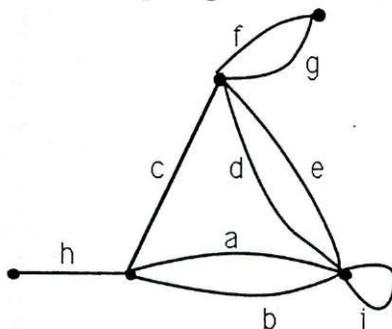
é a família dos circuitos de um matroide chamado *matroide dos cociclos* de G e notado $M^*(G)$.

Um matroide isomorfo ao matroide dos cociclos de um grafo diz-se *matroide cográfico*.

No exemplo da figura da página anterior, a família dos circuitos do matroide dos cociclos do grafo G , $M^*(G)$, é:

$$\mathcal{C}^* = \{ \{i\}, \{f, g\}, \{a, b\}, \{d, e\}, \{a, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, c, d\}, \{a, c, e\} \}$$

Portanto, neste caso, o matroide $M^*(G)$ é isomorfo ao matroide, $M(G')$, dos ciclos do grafo G' representado na figura seguinte. Note-se que em geral isto não acontece, i.e., nem sempre um matroide gráfico é cográfico (voltaremos a referir o assunto no parágrafo sobre dualidade).



As propriedades que se seguem irão ser consecutivamente utilizadas nas provas dos resultados do capítulo seguinte:

1. Se B é uma base de um matroide $M = (E, \mathcal{B})$ e $x \in E \setminus B$, existe um único circuito C tal que $C \subseteq B \cup \{x\}$:

Como todas as bases têm o mesmo cardinal, o conjunto $B \cup \{x\}$ é dependente e, portanto, contém um circuito C . Se houvesse dois circuitos contidos em $B \cup \{x\}$, x teria de pertencer a ambos e, usando a propriedade de eliminação, obteríamos um circuito contido em B , contradizendo o facto de B ser base. \square

Este circuito chama-se *circuito fundamental* de x na base B e vamos notá-lo por $Cf(B, x)$.

2. Seja $M = (E, \mathcal{B})$ um matroide, B uma base de M e $x \in E \setminus B$; $B \setminus \{y\} \cup \{x\}$ é base de M se e só se $y \in Cf(B, x)$:

Sendo $B' = B \setminus \{y\} \cup \{x\}$ base de M , se y não pertencesse ao circuito fundamental $Cf(B, x)$ então este estaria contido na base B' , contrariando a definição de circuito.

Reciprocamente, suponhamos que $y \in Cf(B, x)$ e $B' = B \setminus \{y\} \cup \{x\}$ não é base de M . Como $|B'| = |B|$, B' teria de ser dependente; portanto, existiria um circuito C' contido em B' diferente de $Cf(B, x)$, porque $y \in Cf(B, x) \setminus C'$. Como $B' \subseteq B \cup \{x\}$ isto contradiz a unicidade do circuito fundamental. \square

2.2.3. Fechados – Reticulado geométrico

A família dos *fechados* de um matroide aparece como uma abstracção combinatória das noções de ponto, recta, plano, etc., e das relações de incidência entre estes objectos.

Se $M = (E, \mathcal{B})$ é um matroide, chama-se *operador de fecho* à aplicação:

$$\begin{aligned} \sigma : 2^E &\longrightarrow 2^E \\ A &\longmapsto \sigma(A) = \{x \in E : \text{rank}(A \cup \{x\}) = \text{rank}(A)\} \end{aligned}$$

Diz-se que um subconjunto F de E é *fechado* se coincide com o seu fecho, i.e., $F = \sigma(F)$.

A aplicação σ verifica as seguintes propriedades:

- $X \subseteq \sigma(X)$, para todo $X \subseteq E$;
- $X \subseteq Y \implies \sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$, para quaisquer $X, Y \subseteq E$;
- $\sigma(\sigma(X)) = \sigma(X)$, para todo $X \subseteq E$.

Note-se que estas propriedades, juntamente com esta outra:

- Se $y \notin \sigma(X)$ e $y \in \sigma(X \cup \{x\})$ para algum $x \in E \setminus X$, então $x \in \sigma(X \cup \{y\})$

permitted definir a estrutura de matroide a partir deste operador.

O *rank* de um fechado, F , é igual ao cardinal de um subconjunto independente maximal contido em F . É usual chamar *ponto*, *recta*, *plano*, *hiper-recta* e *hiperplano* do matroide M a um fechado de *rank* 1, 2, 3, $(\text{rank}(M) - 2)$ e $(\text{rank}(M) - 1)$, respectivamente.

No caso do matroide M ser linear [afim] o fecho de qualquer subconjunto do seu conjunto de suporte é a intersecção com $E(M)$ do subespaço vectorial [afim] por ele gerado. Se $M = M(G)$ é um matroide gráfico, $G = (V, E)$ e $A \subseteq E$, uma aresta x está no fecho de A se existe um ciclo elementar de G contido em $A \cup \{x\}$.

A família dos fechados de um matroide M , $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$, parcialmente ordenada por inclusão, é um *reticulado (finito) limitado* (ver definições de reticulados no apêndice do último capítulo):

- para todo $F, G \in \mathcal{F}$, $F \cap G$ também é um fechado; como é o maior fechado contido em ambos os conjuntos coincide com o *ínfimo* de F e G — $F \wedge G = F \cap G$;
- $\sigma(\emptyset) \subseteq F$, qualquer que seja o fechado F ; portanto $\sigma(\emptyset)$ é o *elemento mínimo ou primeiro elemento* do conjunto ordenado e representa-se por 0 (note que os lacetes de M , quando existem, são os elementos de $\sigma(\emptyset)$);
- é claro que o conjunto de suporte $E = E(M)$ é o *elemento máximo* do reticulado;
- para todo $F, G \in \mathcal{F}$, a intersecção dos fechados que contêm ambos os conjuntos F e G é o seu *supremo*, ou seja, é o menor fechado que contém ambos e coincide com o fecho da sua união — $F \vee G = \sigma(F \cup G)$.

Além disso, para qualquer par de fechados F, G , toda a *cadeia maximal* entre F e G tem o mesmo número de elementos, i.e., (\mathcal{F}, \subseteq) satisfaz a *propriedade de Jordan-Dedekind*. Assim, fica bem definida neste reticulado a *função altura*:

$$h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$F \longmapsto h(F) = \text{comprimento de uma cadeia maximal entre } 0 \text{ e } F$$

Esta função coincide com a restrição da função *rank* aos fechados de M e portanto podemos afirmar que este reticulado é *semi-modular* já que, para

todo $F, G \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} h(F) + h(G) &= \text{rank}(F) + \text{rank}(G) \geq \text{rank}(F \cup G) + \text{rank}(F \cap G) = \\ &= \text{rank}(\sigma(F \cup G)) + \text{rank}(F \cap G) = h(F \vee G) + h(F \wedge G) \end{aligned}$$

Os pontos, i.e., os fechados da forma $\sigma(\{x\})$ com $x \in E$, são os *átomos* do reticulado e qualquer fechado é supremo de átomos, ou seja, o reticulado é *atómico*.

Um reticulado finito nestas condições — semi-modular e atômico — diz-se um *reticulado geométrico*.

Na verdade o recíproco também é verdadeiro:

Todo o reticulado geométrico é reticulado dos fechados de algum matroide; se o matroide for simples, ele é univocamente determinado pelo reticulado dos fechados. Ou seja, existe uma bijecção:

$$\text{matroides simples} \longleftrightarrow \text{reticulados geométricos}$$

Vão ser-nos úteis as propriedades destes reticulados que se seguem — se \mathcal{F} é um qualquer reticulado geométrico então:

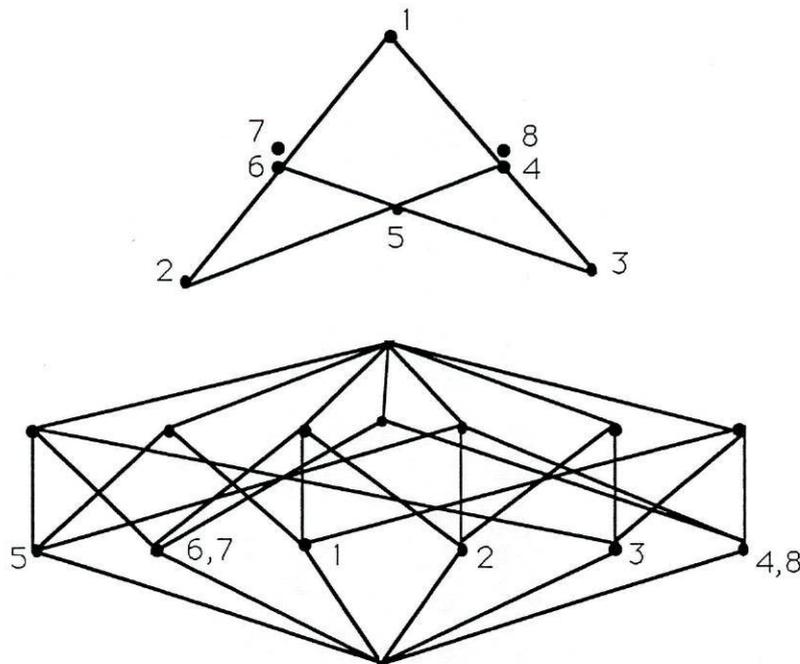
- \mathcal{F} é *coatómico*, quer dizer que todo o fechado de um matroide é intersecção de hiperplanos (coátomos);
- \mathcal{F} é *relativamente complementado*, quer dizer que, se $F \subseteq G \subseteq H$ são fechados de um matroide, existe um fechado G' tal que $G \cap G' = F$ e $\sigma(G \cup G') = H$;
- Todo o intervalo $[A, B] = \{F \in \mathcal{F} : A \subseteq F \subseteq B\}$ de \mathcal{F} é ainda um reticulado geométrico, ou seja, é ainda reticulado dos fechados de algum matroide (no próximo parágrafo, descrevemos essa estrutura).

Seja M um matroide simples de *rank* 3 e $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o seu conjunto de suporte; é usual representar geometricamente M num diagrama onde se representam os pontos x_i e se traça uma "recta" (se M não for um matroide afim a "recta" pode ter de ser uma curva!) para cada fechado de *rank* 2 com mais de três pontos. A intersecção de duas quaisquer destas "rectas" tem, no máximo um ponto.

Como M é simples, qualquer subconjunto de E com dois elementos tem *rank* 2; com esta representação distinguem-se as bases porque são os conjuntos de 3 pontos que não estão numa "recta".

É claro que dado um destes diagramas de pontos e "rectas" determina univocamente um matroide simples de *rank* 3.

No caso de o matroide ter elementos paralelos é usual sobrepor no diagrama os pontos que os representam.



Representação Euclidiana de um matroide de *rank* 3

Diagrama de Hasse do seu reticulado de fechados

2.2.4. Menores

Dado um matroide $M = (E, \mathcal{B})$, há duas operações fundamentais que permitem definir em qualquer subconjunto X de E estruturas de matroide diferentes mas que veremos estarem bem relacionadas — a *supressão* e a *contração* dos elementos de $Y = E \setminus X$:

- O matroide obtido de M por *supressão* de Y nota-se $M \setminus Y$ e é o matroide definido no conjunto $X = E \setminus Y$ cuja família de bases é:

$$\mathcal{B} \setminus Y = \text{elementos maximais (inclusão)} \{B \setminus Y : B \in \mathcal{B}\}.$$

- O matroide obtido de M por *contração* de Y nota-se M / Y e é o matroide definido no conjunto $X = E \setminus Y$ cuja família de bases é:

$$\mathcal{B} / Y = \text{elementos minimais (inclusão)} \{B \setminus Y : B \in \mathcal{B}\}.$$

- Um matroide M' é dito um *menor* de M se se pode obter de M por supressão ou contração (ou ambas) de subconjuntos de E .

O matroide obtido de M por supressão de Y também é chamado a *restricção* de M a $X = E \setminus Y$ e notado $M(X)$. Esta nomenclatura é a natural quando se define este menor usando a função *rank*, já que esta função em $M \setminus Y$ é igual à restrição a Y da função *rank* definida em M :

$$\text{para todo o } A \subseteq X, \text{rank}_{M \setminus Y}(A) = \text{rank}(A).$$

Enquanto no matroide M/Y :

$$\text{para todo o } A \subseteq X, \text{rank}_{M/Y}(A) = \text{rank}(A \cup Y) - \text{rank}(Y).$$

É de notar que estas operações são associativas e comutam entre si, i.e., se M é um matroide definido em E e A e B são subconjuntos de E tais que $A \cap B = \emptyset$:

- $M \setminus A \setminus B = M \setminus B \setminus A = M \setminus (A \cup B)$;
- $M/A/B = M/B/A = M/(A \cup B)$;
- $M \setminus A/B = M/B \setminus A$.

Portanto, para descrevermos os circuitos da restrição e da contracção de $M = (E, \mathcal{C})$ (úteis à compreensão da segunda parte) é suficiente fazê-lo para um subconjunto singular de E , $\{x\} \subseteq E$. A família dos circuitos de $M \setminus \{x\}$ é:

$$\mathcal{C} \setminus \{x\} = \{C \in \mathcal{C}(M) : x \notin C\}$$

A família dos circuitos de $M/\{x\}$ é:

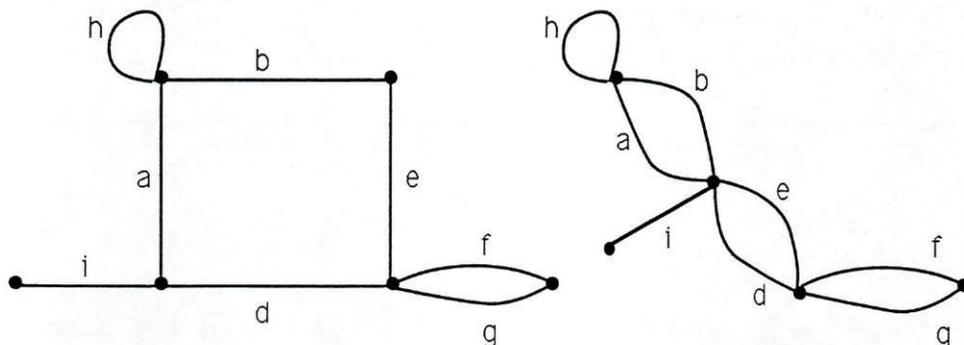
$$\mathcal{C}/\{x\} = \text{elementos minimais (inclusão) não-vazios } \{C \setminus \{x\} : C \in \mathcal{C}(M)\}$$

A condição "não-vazio" só é utilizada se $\{x\}$ for um lacete; neste caso $M/\{x\} = M \setminus \{x\}$. Note-se ainda que a operação de contracção de um elemento baixa o *rank* do matroide, a não ser que esse elemento seja um lacete; a operação de supressão de um elemento só baixa o *rank* do matroide se ele for um istmo.

No caso de matroides gráficos estas operações coincidem com as operações usuais de supressão e contracção de arestas em grafos — se $G = (V, E)$ é um grafo e $e \in E$ uma aresta de extremos os vértices $v, w \in V$:

- $G \setminus \{e\}$ é o grafo $(V, E \setminus \{e\})$;
- $G/\{e\}$ é o grafo que se obtém identificando o vértice v com o w e fazendo as correspondentes alterações nas relações de incidência no conjunto de arestas $E \setminus \{e\}$.

Na figura está representada a supressão e a contracção da aresta c no grafo G da figura da página 12; o matroide determinado por cada um destes grafos é o matroide obtido, respectivamente, por supressão e contracção do elemento c de $M(G)$:



$$M(G \setminus \{c\}) = M(G) \setminus \{c\} \text{ e } M(G / \{c\}) = M(G) / \{c\}$$

Notando que, sendo M um matroide, $A \subseteq E(M)$ e $x \in E(M)$, $x \in \sigma(A)$ se e só se existe um circuito $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $x \in C \subseteq A \cup \{x\}$, não é difícil mostrar que, se $X \subseteq E(M)$:

$$\mathcal{F}(M \setminus X) = \{F \cap (E \setminus X) : F \in \mathcal{F}(M)\}.$$

Por outro lado, se $Y \subseteq E(M)$:

$$\mathcal{F}(M / Y) = \{F \cap (E \setminus Y) : F \in \mathcal{F}(M) \text{ e } F \supseteq Y\}.$$

Assim, se $Y \subseteq X \subseteq E(M)$ e X, Y são fechados de M , então: o intervalo $[Y, X]$ do reticulado dos fechados de M é isomorfo ao reticulado dos fechados do matroide $M \setminus (E \setminus X) / Y = M(X) / Y$.

As classes dos matroides gráficos e dos uniformes são exemplos de *classes hereditárias* de matroides; quer isto dizer que qualquer menor de um matroide da classe ainda pertence à mesma classe.

Os matroides simples e os transversais são exemplo de classes não hereditárias. Em ambos os casos qualquer restrição pertence à classe mas o contraído de um matroide da classe pode não lhe pertencer.

2.2.5. Dual

A propriedade de *troca simétrica* de elementos de bases que mencionamos ao definir matroide é aparentemente mais forte que o axioma de troca mas igualmente válida em qualquer matroide M :

Se B_1 e B_2 são bases de $M = (E, \mathcal{B})$ então, para todo o $x \in B_1 \setminus B_2$ existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 \setminus \{x\} \cup \{y\}$ e $B_2 \setminus \{y\} \cup \{x\}$ são bases de M

Fixemos $x \in B_1$ e seja $D_x = \{y \in B_2 : B_1 \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}\}$; então $D_x \cap (Cf(B_2, x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, porque se esta intersecção fosse vazia então $Cf(B_2, x) \setminus \{x\}$ estaria contido no fecho de $B_1 \setminus \{x\}$ e, portanto, $\sigma(Cf(B_2, x) \setminus \{x\}) \subseteq \sigma(B_1 \setminus \{x\})$, o que é absurdo já que x pertence ao primeiro conjunto e não pertence ao segundo. Qualquer y desta intersecção não-vazia satisfaz a afirmação (veja-se a propriedade 2 dos circuitos). \square

É consequência imediata desta propriedade que, sendo $M = (E, \mathcal{B})$ um matroide, a seguinte família de subconjuntos de E verifica os axiomas das bases:

$$\mathcal{B}^* = \{E \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$$

e portanto é a família das bases de um matroide, dito o *matroide dual* de M e notado $M^* = (E, \mathcal{B}^*)$.

Por serem complementares, as bases de M^* são chamadas *cobases* de M . Esta nomenclatura é estendida aos outros conceitos — chama-se *cocircuito* de M a um circuito do seu dual, um *coponto* [uma *correcta*,...] de M é um ponto [uma *recta*,...] de M^* , o *corank* em M de um subconjunto A de E é o *rank* desse conjunto em M^* (notado por $rank^*(A)$), etc..

Entre estes conceitos duais tem particular relevância o de cocircuito, em geral e também nos resultados apresentados nesta dissertação. Vejamos como pode ser caracterizada a família

$$\mathcal{C}^* = \{C^* \subseteq E : C^* \text{ é circuito de } M^*\}$$

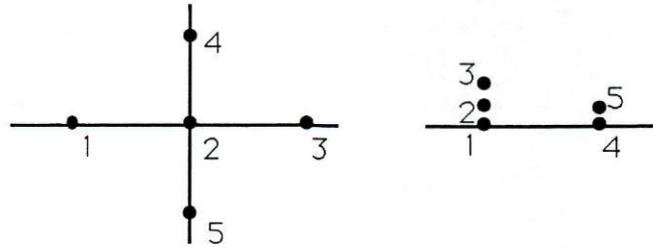
Um cocircuito de M é um subconjunto X de E , dependente em M^* e minimal para a inclusão, i.e., $X \notin \mathcal{I}^*$ e $\forall x \in X, X \setminus \{x\} \in \mathcal{I}^*$, onde \mathcal{I}^* é a família dos conjuntos independentes de M^* . Então:

1. $X \notin \mathcal{I}^* \iff \forall B^* \in \mathcal{B}^*, X \not\subseteq B^*$ e portanto $E \setminus X \not\subseteq E \setminus B^*, \forall B^* \in \mathcal{B}^*$; i.e., qualquer que seja a base B de M , $B \not\subseteq E \setminus X$.
2. Como $E \setminus (X \setminus \{x\}) = (E \setminus X) \cup \{x\}$, dizer que para todo o $x \in X$, $X \setminus \{x\} \in \mathcal{I}^*$ é equivalente a dizer que para todo o $x \in X$ existe uma base B_x de M tal que $B_x \subseteq (E \setminus X) \cup \{x\}$.

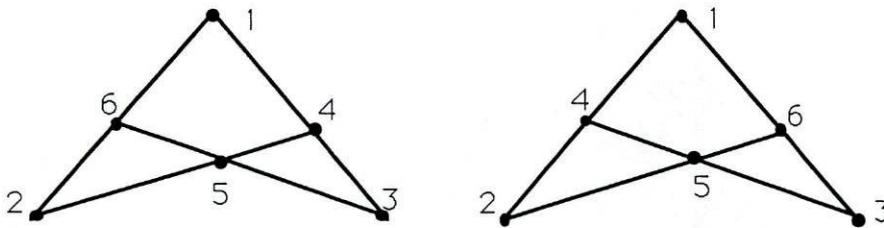
A conjunção de 1 e 2 mostra que:

$$X \in \mathcal{C}^* \iff (\sigma(E \setminus X) \subsetneq E \text{ e } \sigma((E \setminus X) \cup \{x\}) = E, \text{ para todo o } x \in X)$$

ou seja, X é um cocircuito de M se e só se $E \setminus X$ é um hiperplano de M .



Representação euclidiana de um matroide e do seu dual



Matroide afim isomorfo ao seu dual

Assim, se $M = M_{Lin}(E)$ [$M = M_{Af}(E)$] é um matroide vectorial [ou afim] e $rank(M) = r$, os hiperplanos de M são os subespaços vectoriais [ou afins] de dimensão $r - 1$ [$r - 2$] e os seus complementares são os cocircuitos de M , ou seja, os circuitos do dual.

As seguintes propriedades dos cocircuitos são frequentemente utilizadas em teoria de matroides e também nos resultados que iremos expor:

1. *Seja M um matroide e E o seu conjunto de suporte; um subconjunto X de E é uma base se e só se $X \cap C^* \neq \emptyset$, para todo o cocircuito C^* , e X é minimal com esta propriedade.*
2. *Seja M um matroide e C um circuito de M , então $|C \cap C^*| \neq 1$, para todo o cocircuito C^* de M . Na verdade, os circuitos podem ser caracterizados como os subconjuntos minimais do conjunto de suporte, $E(M)$, com esta propriedade.*
3. *Se C é um circuito qualquer de um matroide M e x, y são elementos de C , então existe um cocircuito C^* em M tal que $C \cap C^* = \{x, y\}$.*

Um cocircuito com um só elemento chama-se um *istmo*, terminologia mais uma vez herdada dos grafos. Na verdade, se $M = M(G)$ é um matroide gráfico, i.e., no caso de M ser o matroide dos ciclos de um grafo G , os cocircuitos de M são os conjuntos de corte minimais, i.e., o dual do matroide dos ciclos de G é o matroide dos cociclos de G , $(M(G))^* = M^*(G)$.

Em particular, se o grafo G tem um vértice incidente em k arestas e nenhuma delas é um lacete então $M(G)$ tem um cocircuito com k elementos correspondentes às arestas que têm esse vértice como extremidade. E um istmo de G é um cocircuito com um só elemento de $M(G)$, i. e., um istmo de $M(G)$.

O matroide dual de qualquer menor de um matroide M definido no conjunto $E = E(M)$ é um menor de M^* , o matroide dual de M :

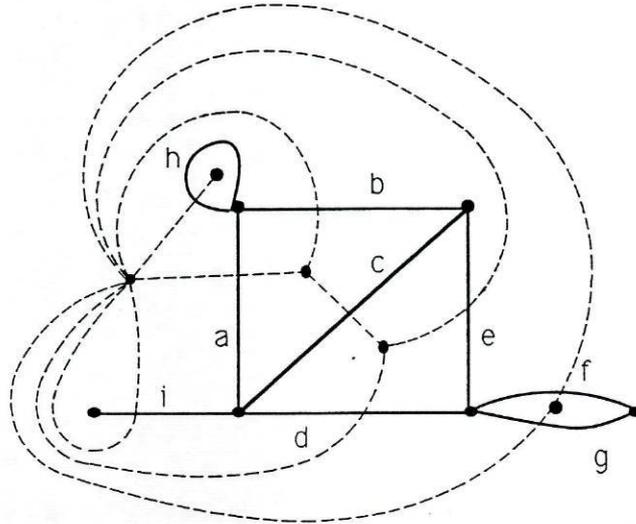
$$\text{para todo o } X \subseteq E, (M/X)^* = M^* \setminus X \text{ e } (M \setminus Y)^* = M^*/Y.$$

Há classes de matroides fechadas para a dualização; são exemplo disso os matroides uniformes (é claro que $(U_{n,k})^* = U_{n,n-k}$), a dos *matroides coordenáveis* de que falaremos já a seguir e que inclui os matroides lineares, os afins e os gráficos, ou a dos *matroides orientáveis*, de que falaremos no último capítulo.

Noutras classes há matroides cujo dual não pertence à classe. São exemplo disso os matroides transversais (ver exemplo em [100], §5.3), os vectoriais e os afins (basta tomar um exemplo com istmos!).

O dual de um matroide gráfico também pode não ser gráfico; é exemplo disso o matroide $M = M(K_5)$, onde K_5 é o grafo completo com cinco vértices. Mais precisamente, o dual do matroide dos ciclos de um grafo G , $(M(G))^*$, também é um matroide gráfico se e só se G é um grafo *planar* (ver [99], Teorema 6.1.7), i.e., G tem uma representação no plano tal que as arestas são curvas de Jordan que só se podem intersectar nos vértices que são os seus pontos extremais. Neste caso, $(M(G))^* = M(G^*)$, onde G^* é o *grafo dual* de G .

Na figura seguinte está representada a construção do grafo G^* dual do grafo (planar) G da página 12. É fácil verificar que, neste caso, $M(G^*)$ é isomorfo ao matroide $M(G')$ dos ciclos do grafo G' representado na página 13, ou seja, $M(G^*) \simeq M^*(G) \simeq (M(G))^*$.



Portanto, a noção de matroide dual generaliza a de dual de um grafo planar. Como, pelo Teorema de Kuratowski, um grafo não é planar se e só se tem um subgrafo isomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$, pode-se afirmar que um matroide cográfico também é gráfico se e só se não tem qualquer menor isomorfo a $M(K_5)$ ou a $M(K_{3,3})$.

2.2.6. Soma – Componentes conexas

A *soma directa* de matroides é uma construção tão básica como as dos menores:

Sejam $M_1 = (E_1, \mathcal{B}_1)$ e $M_2 = (E_2, \mathcal{B}_2)$ dois matroides quaisquer; a soma directa $M_1 \oplus M_2$ é o matroide cujo conjunto de suporte é $E_1 \cup E_2$ e cuja família de bases é:

$$\mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2 = \{B_1 \cup B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ e } B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

É claro que:

- Os subconjuntos independentes de $M_1 \oplus M_2$ são iguais à união de independentes de cada um dos matroides e, portanto, se $A \subseteq E_1 \cup E_2$, $rank(A) = rank_1(A \cap E_1) + rank_2(A \cap E_2)$.
- A família dos circuitos da soma é $\mathcal{C}(M_1 \oplus M_2) = \mathcal{C}(M_1) \cup \mathcal{C}(M_2)$.
- O conjunto dos fechados da soma é:

$$\mathcal{F}(M_1 \oplus M_2) = \{F_1 \cup F_2 : F_1 \in \mathcal{F}_1 \text{ e } F_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

onde \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são os conjuntos dos fechados de M_1 e M_2 , respectivamente. Portanto, o reticulado dos fechados de $M_1 \oplus M_2$ é isomorfo ao produto dos reticulados, $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

- No caso de os matroides M_1 e M_2 serem ambos vectoriais [ou afins] a sua soma directa coincide com a soma directa dos espaços vectoriais [ou afins] gerados por E_1 e E_2 .
- Se $M_1 = M(G_1)$ e $M_2 = M(G_2)$ são matroides gráficos a sua soma directa é o matroide do grafo obtido pela identificação de um vértice de G_1 com um de G_2 .

Um subconjunto A do conjunto de suporte de um matroide M diz-se um *conjunto separador* se $M = M(A) \oplus M(E \setminus A)$.

Um matroide $M = (E, \mathcal{B})$ é *conexo* se só tem os conjuntos separadores triviais, i.e., $A = \emptyset$ ou $A = E$.

Então qualquer matroide M que tenha lacetes não é conexo; sendo E o conjunto de suporte de M e L o dos lacetes, $M = M(L) \oplus M(E \setminus L)$.

A seguinte caracterização de matroides conexos é mais geométrica:

Um matroide M é conexo se e só se para quaisquer dois elementos x, y do seu conjunto de suporte, $E = E(M)$, existe um circuito $C \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\{x, y\} \subseteq C$

Se M é um matroide e E o seu conjunto de suporte, as classes de equivalência para a relação \mathcal{R} definida em $E(M)$ por:

$$x \mathcal{R} y \iff \{x, y\} \subseteq C, \text{ para algum } C \in \mathcal{C}(M)$$

são as componentes conexas de M .

Assim, sendo $\alpha = \alpha(M)$ o número de componentes de um matroide M , $M = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} M(A_i)$, onde, para todo o i , A_i é uma classe de equivalência para a relação \mathcal{R} , portanto $\emptyset \subsetneq A_i \subsetneq E$ e $M(A_i)$ é um matroide conexo.

Exemplos

- Usando a terceira propriedade dos cocircuitos enunciada no parágrafo anterior, é claro que as componentes conexas de um matroide e do seu dual coincidem.
- A noção de grafo conexo não tem qualquer tradução no matroide determinado pelo grafo; na verdade, se $M = M(G)$ é gráfico pode-se sempre encontrar um grafo conexo, H , tal que $M(G) = M(H)$. No entanto, estão bem caracterizados os grafos que determinam matroides conexos:

Um grafo $G = (V, E)$, com pelo menos três vértices, diz-se *2-conexo* se há dois vértices em V que sendo retirados a G (bem como as arestas que têm esses vértices como extremidades) dão origem a um grafo com mais componentes conexas que G e isso não acontece quando se retira só um qualquer dos seus vértices.

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, sem lacetes e com pelo menos três vértices; G é 2-conexo se e só se para todo o par de arestas de G há um circuito elementar em G que as contém; ou seja, se e só se $M(G)$ é conexo.

2.2.7. Representabilidade – Menores excluídos

O problema da representabilidade de um matroide posto por Whitney em [101], ainda não foi completamente resolvido, apesar de haver resultados muito importantes ligados aos vários aspectos deste problema.

Um matroide M definido num conjunto E é *representável* ou *coordenável* no corpo \mathbb{K} , se existe uma aplicação $\psi : E \rightarrow V$, onde V é um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , tal que, para todo o $A \subseteq E$:

$$A \text{ é independente em } M \iff \begin{cases} \psi(A) \text{ é linearmente independente em } V \text{ e} \\ \psi|_A \text{ é injectiva} \end{cases}$$

Um matroide coordenável num corpo de característica 2 diz-se *binário*, num de característica 3 é *ternário*. Um matroide coordenável em qualquer corpo diz-se *unimodular* ou *regular*.

É claro que um matroide vectorial é coordenável, mas há matroides coordenáveis que não são vectoriais. É fácil encontrar um exemplo num matroide M com vários lacetes. No caso de o matroide M ser simples as duas definições coincidem.

Se $M = (E, \mathcal{B})$ é representável e $B \in \mathcal{B}$ então a dimensão do subespaço W de V gerado por $\psi(B)$ é igual ao $\text{rank}(M)$ e $\psi(E) \subseteq W$; portanto, em geral assume-se que $\dim(V) = \text{rank}(M) = r$, ou seja $V \simeq \mathbb{K}^r$.

Por vezes é útil dar uma forma matricial à representação de um matroide:

Seja $\psi : E \rightarrow \mathbb{K}^r$ uma representação do matroide $M = (E, \mathcal{B})$, onde $|E(M)| = n$ e $\text{rank}(M) = r$. A matriz $A_\beta \in M_{r \times n}$ cujas n colunas são as coordenadas numa base β de \mathbb{K}^r dos vectores imagem dos elementos de uma base de M , determina a representação de M (conhecida a base β de V).

Então, se M é representável sobre \mathbb{K} , $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ é base de M e $E = E(M) = \{b_1, \dots, b_r, \dots, b_n\}$, o matroide M tem uma matriz de representação A_β da forma $[I_{r \times r} \ D]_{r \times n}$, para a base $\beta = \{\psi(b_1), \dots, \psi(b_r)\}$ de \mathbb{K}^r .

Um dos resultados mais importantes sobre coordenabilidade, já provado por Whitney em [101] é:

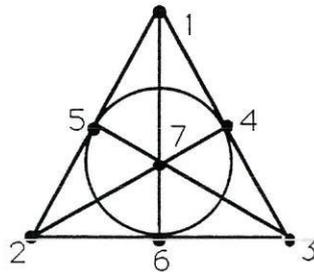
O matroide dual de um matroide representável em \mathbb{K} é representável em \mathbb{K} .

Mais, se a matriz $[I_{r \times r} \ D]$ é uma representação de M então a matriz $[D^t \ I_{(n-r) \times (n-r)}]$ é uma representação de M^* , onde D^t é a matriz transposta de D .

Exemplos

- Os matroides uniformes são coordenáveis em \mathbb{R} .
- Os matroides gráficos são representáveis em qualquer corpo \mathbb{K} ; se $M = M(G)$ e $G = (V, E)$, a *matriz de incidência* de G , $A_{|V| \times |E|}$, é uma representação de M em qualquer corpo \mathbb{K} .
- Os duais dos matroides vectoriais e afins são representáveis.
- A restrição de um matroide representável é obviamente representável. Como, para todo o M e todo $A \subseteq E(M)$, $M/A = (M^* \setminus A)^*$, qualquer menor de um matroide representável também o é.
- O *matroide de Fano*, $M = F_7$, é o matroide simples de *rank* 3 cujos pontos e rectas são os pontos e rectas do plano projectivo com sete pontos e sete rectas representado geometricamente na figura abaixo — o plano de Fano.

Utilizando um resultado conhecido de geometria projectiva ([86]) é fácil ver que este matroide é coordenável num corpo \mathbb{K} se e só se a característica de \mathbb{K} é 2.



Matroide de Fano

O matroide, M' , da configuração obtida desta retirando a "recta" que passa nos pontos 4, 5 e 6, é representável em \mathbb{K} se e só se a característica de \mathbb{K} é diferente de 2, para não forçar os pontos 4, 5, 6 a serem colineares.

Assim, a soma directa $M \oplus M'$ é um exemplo de um matroide que não é representável em qualquer corpo \mathbb{K} .

Uma classe hereditária de matroides Γ , tem uma *caracterização por menores excluídos* se existe uma colecção χ de matroides tal que, qualquer que seja o matroide M , $M \in \Gamma$ se e só se não existe em χ nenhum matroide isomorfo a um menor de M .

Ao trabalho desenvolvido por Tutte é devida grande parte destas caracterizações, cuja utilidade é manifesta.

São exemplo de caracterizações por menor excluído:

$\Gamma =$	Matroides binários	$\chi =$	$\{U_{4,2}\}$
$\Gamma =$	Matroides ternários	$\chi =$	$\{U_{5,2}, U_{5,3}, F_7, F_7^*\}$
$\Gamma =$	Matroides unimodulares	$\chi =$	$\{U_{4,2}, F_7, F_7^*\}$
$\Gamma =$	Matroides gráficos	$\chi =$	$\{U_{4,2}, F_7, F_7^*, M^*(K_5), M^*(K_{3,3})\}$
$\Gamma =$	Matroides cográficos	$\chi =$	$\{U_{4,2}, F_7, F_7^*, M(K_5), M(K_{3,3})\}$

2.3. *Clutters*

2.3.1. *Clutters e bases*

Como é natural fazer quando se considera uma generalização da família das bases de um matroide, só vamos considerar *clutters* não-vazios. Consideremos então um *clutter* $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, E)$, onde \mathcal{S} é uma família não-vazia de subconjuntos de E não comparáveis por inclusão:

Definição 2.3. Seja \mathcal{S} um *clutter* e $x \in E(\mathcal{S})$:

- x é um *lacete* de \mathcal{S} se $x \notin B, \forall B \in \mathcal{S}$;
- x é um *istmo* de \mathcal{S} se $x \in B, \forall B \in \mathcal{S}$;

O *clutter* que se obtém de \mathcal{S} por *supressão* do elemento x , nota-se $\mathcal{S} \setminus x$ e é definido por:

- $(\{B : x \notin B \text{ e } B \in \mathcal{S}\}, E \setminus \{x\})$ se x não é istmo de \mathcal{S} ;
- $(\{B \setminus \{x\} : B \in \mathcal{S}\}, E \setminus \{x\})$ se x é istmo de \mathcal{S} .

O *clutter* que se obtém de \mathcal{S} por *contração* do elemento x , nota-se \mathcal{S}/x e é definido por:

- $(\{B \setminus \{x\} : x \in B \text{ e } B \in \mathcal{S}\}, E \setminus \{x\})$ se x não é lacete;
- $(\{B : B \in \mathcal{S}\}, E \setminus \{x\})$ se x é lacete de \mathcal{S} .

Um *menor* de \mathcal{S} é um *clutter* que se pode obter de \mathcal{S} por uma sucessão de operações de contração e supressão de elementos de $E(\mathcal{S})$.

O resultado seguinte é consequência imediata das definições:

Proposição 2.4. *Se \mathcal{S} é um clutter e x um elemento do seu conjunto de suporte então x é um lacete ou um istmo se e só se $\mathcal{S} \setminus x = \mathcal{S} / x$.*

Em geral as operações de contracção e supressão não são associativas e não comutam:

Exemplo — Seja $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{S} = (\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}, E)$; Então $\mathcal{S} / 4 \setminus 3 = (\{\emptyset\}, \{1, 2\})$ e $\mathcal{S} \setminus 3 / 4 = (\{1, 2\}, \{1, 2\})$.

Vamos provar que, com esta definição, os menores de um clutter \mathcal{S} não dependem da ordem destas operações se e só se \mathcal{S} é a família das bases de um matroide.

Antes disso, vamos ver que a dualidade da teoria de matroides tem um análogo em clutters com estas operações de menor:

Operador complementar

Chamamos *operador complementar* ao operador de clutters, γ , que a qualquer clutter $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, E)$ associa o clutter, $\gamma(\mathcal{S}) = (\{E \setminus B : B \in \mathcal{S}\}, E)$.

Vamos ver que γ é o único operador não trivial que, como a dualidade em matroides, troca as operações "/" e "\":

Teorema 2.5. *Seja f um operador de clutter que troca a operação de contracção pela operação de restrição, i.e., para todo o clutter \mathcal{S} e todo o $x \in E(\mathcal{S})$, $f(\mathcal{S} / x) = f(\mathcal{S}) \setminus x$ e $f(\mathcal{S} \setminus x) = f(\mathcal{S}) / x$. Então f é uma das seguintes aplicações:*

1. o operador constante: $(\mathcal{S}, E) \mapsto (\{E\}, E)$, que a qualquer clutter associa o clutter com um único elemento igual ao conjunto de suporte;
2. o operador constante: $(\mathcal{S}, E) \mapsto (\{\emptyset\}, E)$, que a qualquer clutter associa o i.e., o clutter com um único elemento igual ao conjunto vazio;
3. o operador complementar.

Para provar o teorema vamos começar por mostrar que um clutter fica determinado por um pequeno subconjunto dos seus menores.

Proposição 2.6. *Sejam \mathcal{S} e \mathcal{T} dois clutters com o mesmo conjunto de suporte E ; se existem dois elementos distintos de E , x e y tais que:*

- $\mathcal{S} \setminus x = \mathcal{T} \setminus x$, $\mathcal{S} \setminus y = \mathcal{T} \setminus y$ e,
- $\mathcal{S} / x = \mathcal{T} / x$, $\mathcal{S} / y = \mathcal{T} / y$;

então $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Prova — Queremos provar que, dado um *clutter* \mathcal{S} e dois elementos $x, y \in E(\mathcal{S})$, $x \neq y$, os quatro menores $\mathcal{S} \setminus x$, $\mathcal{S} \setminus y$, \mathcal{S}/x e \mathcal{S}/y determinam o *clutter* \mathcal{S} .

Começemos por notar que se pode decidir se x é um lacete ou um istmo de \mathcal{S} usando os menores $\mathcal{S} \setminus y$ e \mathcal{S}/y :

Se x é lacete de \mathcal{S} , i.e., $x \notin B, \forall B \in \mathcal{S}$, então é imediato das definições que x é lacete de qualquer um destes menores.

Reciprocamente, x não é lacete de \mathcal{S} , i.e., se existe $B_x \in \mathcal{S}$ tal que $x \in B_x$, então:

- ou $y \in B_x$ portanto y não é lacete de \mathcal{S} e $x \in B_x \setminus \{y\} \in \mathcal{S}/y$,
- ou $y \notin B_x$ portanto y não é istmo de \mathcal{S} e $x \in B_x \in \mathcal{S} \setminus y$;

portanto, ou x não é lacete de \mathcal{S}/y ou x não é lacete de $\mathcal{S} \setminus y$.

De modo análogo se vê que x é istmo de \mathcal{S} se e só se é istmo de $\mathcal{S} \setminus y$ e de \mathcal{S}/y .

Assim, usando as definições, podemos reconstruir o *clutter* \mathcal{S} como segue:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} (\{B : B \in \mathcal{S} \setminus x\}, E) & \text{se } x \text{ é lacete de } \mathcal{S} \\ (\{B \cup \{x\} : B \in \mathcal{S} \setminus x\}, E) & \text{se } x \text{ é istmo de } \mathcal{S} \\ (\{B : B \in \mathcal{S} \setminus x\} \cup \{B \cup \{x\} : B \in \mathcal{S}/x\}, E) & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

o que completa a prova. \square

Vamos agora provar três lemas que estudam os operadores que obedecem às hipóteses do teorema, a partir da imagem dos *clutters* cujo conjunto de suporte tem um só elemento. Em todos eles a função f é um operador de *clutters* que troca contracção por supressão.

Lema 2.7. *Se $f(\{\{x\}, \{x\}\}) = f(\{\{\emptyset\}, \{x\}\}) = (\{\emptyset\}, \{x\})$ então, para todo o *clutter* \mathcal{S} , $f(\mathcal{S}) = (\{\emptyset\}, E(\mathcal{S}))$.*

Prova — Vamos provar o resultado por indução no $|E|$.

Se $|E| = 1$ não há nada a provar; portanto, suponhamos o lema verdadeiro para todo o *clutter* \mathcal{S} tal que $1 \leq |E(\mathcal{S})| < n$ e consideremos um *clutter* \mathcal{S} tal que $|E(\mathcal{S})| = n$.

Usando as hipóteses sobre f e a hipótese de indução podemos afirmar que, para todo o $x \in E(\mathcal{S})$:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{S}) \setminus x &= f(\mathcal{S}/x) = (\{\emptyset\}, E \setminus \{x\}) = (\{\emptyset\}, E) \setminus x \quad \text{e} \\ f(\mathcal{S})/x &= f(\mathcal{S} \setminus x) = (\{\emptyset\}, E \setminus \{x\}) = (\{\emptyset\}, E)/x \end{aligned}$$

Como E tem, pelo menos, dois elementos distintos, pela Proposição 2.6, fica provado que $f(\mathcal{S}) = (\{\emptyset\}, E)$. \square

Lema 2.8. *Se $f(\{\{x\}\}, \{x\}) = f(\{\emptyset\}, \{x\}) = (\{\{x\}\}, \{x\})$ então, para todo o clutter \mathcal{S} , $f(\mathcal{S}) = (\{E(\mathcal{S})\}, E(\mathcal{S}))$.*

Prova — Seja $g = \gamma \circ f \circ \gamma$. A função g verifica as hipóteses do lema anterior e portanto $g(\mathcal{S}) = (\{\emptyset\}, E(\mathcal{S}))$, para todo o \mathcal{S} , e $f(\mathcal{S}) = \gamma \circ g \circ \gamma(\mathcal{S}) = \gamma(\{\emptyset\}, E(\mathcal{S})) = (\{E(\mathcal{S})\}, E(\mathcal{S}))$. \square

Lema 2.9. *Se $f(\{\{x\}\}, \{x\}) = (\{\emptyset\}, \{x\})$ e $f(\{\emptyset\}, \{x\}) = (\{\{x\}\}, \{x\})$ então, para todo o clutter \mathcal{S} , $f(\mathcal{S}) = (\{E \setminus B : B \in \mathcal{S}\}, E) = \gamma(\mathcal{S})$.*

Prova — A prova deste lema é análoga à do Lema 2.7. \square

Prova do Teorema 2.5 — Suponhamos, por absurdo, que existe um operador de clutters que troca supressão por contracção e não é nenhum dos três.

Nesse caso e usando os lemas podemos afirmar que:

$$f(\{\{x\}\}, \{x\}) = (\{\{x\}\}, \{x\}) \text{ e } f(\{\emptyset\}, \{x\}) = (\{\emptyset\}, \{x\}).$$

Consideremos o clutter $\mathcal{S} = (\{\{1\}, \{2\}\}, \{1, 2\})$; usando as hipóteses sobre f podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{S} \setminus 1) &= f(\mathcal{S}/1) = f(\{\emptyset\}, \{2\}) = (\{\emptyset\}, \{2\}) \text{ e} \\ f(\mathcal{S} \setminus 2) &= f(\mathcal{S}/2) = f(\{\emptyset\}, \{1\}) = (\{\emptyset\}, \{1\}). \end{aligned}$$

Então, usando as definições de menor, como nem 1 nem 2 são istmos, terá de ser:

$$f(\mathcal{S}) = (\{\emptyset\}, \{1, 2\}) \quad (i)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{S})/1 &= f(\mathcal{S} \setminus 1) = f(\{\{2\}\}, \{2\}) = (\{\{2\}\}, \{2\}) \text{ e} \\ f(\mathcal{S})/2 &= f(\mathcal{S} \setminus 2) = f(\{\{1\}\}, \{1\}) = (\{\{1\}\}, \{1\}), \end{aligned}$$

então, como nem 1 nem 2 são lacetes:

$$f(\mathcal{S}) = (\{1, 2\}, \{1, 2\}),$$

contradizendo a afirmação (i). \square

Como corolário deste teorema obtemos o resultado de Kung já referido:

Corolário 2.10. ([68], Teorema 1) *Se $G \mapsto G^*$ é um operador de matroides tal que $(G/e)^* = G^* \setminus e$ e $(G \setminus e)^* = G^*/e$, então $G \mapsto G^*$ é um dos seguintes operadores:*

- o operador $G \mapsto F$, que a qualquer matroide associa o matroide livre no mesmo conjunto de suporte;
- o operador $G \mapsto Z$, que a qualquer matroide associa o matroide nulo (em que todos os subconjuntos do conjunto de suporte são dependentes);
- o operador dual, que a qualquer matroide associa o seu dual.

O teorema seguinte é equivalente ao Teorema 2.5 e também generaliza um outro resultado de Kung:

Teorema 2.11. ([68], Teorema 2) *Seja f um operador de clutters que comuta com as operações de contracção e supressão, i.e., para todo o clutter S e todo o $x \in E(S)$, $f(S \setminus x) = f(S) \setminus x$ e $f(S/x) = f(S)/x$. Então, se f não é um dos operadores triviais caracterizados em 1 e 2 do Teorema 1.5, f é a aplicação identidade.*

Note-se que, como o operador complementar é involutivo, ele pode ser considerado uma *dualidade de clutters*, no sentido dado em [10] e para as operações de menor aqui definidas.

Assim, em consequência do Teorema 2.5, podemos afirmar que o operador complementar γ é a única dualidade de *clutters*.

2.3.2. Caracterização de *clutters* que são bases de um matroide

No seu artigo [45] Farber torna os *clutters* uma classe hereditária definindo menor de um *clutter* e dá uma caracterização por menor excluído dos *clutters* que são bases de matroides.

Os dois resultados seguintes são análogos aos Teorema 2 e 4 de Farber mas adaptados à definição de menor de um *clutter* que foi aqui estabelecida.

Proposição 2.12. *Seja S um clutter; S é o conjunto das bases de um matroide se e só se S não tem qualquer menor isomorfo a um dos clutters seguintes:*

1. $(\{B_1, B_2\}, E = B_1 \cup B_2)$, com $|E| \geq 3$;
2. $(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}, \{1, 2, 3, 4\})$;
3. $(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}, \{1, 2, 3, 4\})$.

Chamamos *uniforme* a um *clutter* (S, E) cujos elementos têm todos o mesmo cardinal; não é exigido que $\cup_{B \in S} B = E$. Note-se que a classe dos *clutters* uniformes é hereditária, i.e., todos os seus menores são uniformes.

Lema 2.13. *Seja \mathcal{S} um clutter uniforme; \mathcal{S} é o conjunto das bases de um matroide se e só se \mathcal{S} não tem qualquer menor isomorfo a um dos clutters seguintes:*

1. $(\{B_1, B_2\}, E = B_1 \cup B_2)$, com $|B_1| = |B_2| \geq 2$;
2. condição 2 da proposição anterior;
3. condição 3 da proposição anterior.

Prova — A prova do lema é análoga à do Teorema 4 em [45], já que ela é válida para a definição de menor por nós considerada. \square

Prova da Proposição 1.12 — Se o clutter \mathcal{S} é a família das bases de um matroide, os menores de \mathcal{S} são menores do matroide e então, é claro que \mathcal{S} não pode ter qualquer menor que não verifique o lema de Steiniz como é o caso de 1, 2, 3.

Para provar o recíproco suponhamos que o clutter \mathcal{S} não é família das bases de qualquer matroide. Na colecção dos menores de \mathcal{S} que também não são famílias de bases de qualquer matroide, escolhamos o clutter \mathcal{T} cujo conjunto de suporte $E(\mathcal{T})$ é minimal para a inclusão.

Se \mathcal{T} for uniforme a proposição decorre do lema anterior.

Se o clutter \mathcal{T} não é uniforme, há dois elementos de \mathcal{T} , B_1 e B_2 , tais que $|B_1| \neq |B_2|$.

Como $E(\mathcal{T})$ é minimal para inclusão, $E(\mathcal{T}) = B_1 \cup B_2$, senão o clutter $\mathcal{T}' = \mathcal{T}/Y \setminus X$, onde $X = E(\mathcal{T}) \setminus (B_1 \cup B_2)$ e $Y = B_1 \cap B_2$, está nas mesmas condições que \mathcal{T} mas $E(\mathcal{T}') \subsetneq E(\mathcal{T})$.

Se $\mathcal{T} = \{B_1, B_2\}$ então \mathcal{T} é isomorfo ao clutter da primeira hipótese.

Se não, existe $B \in \mathcal{T} \setminus \{B_1, B_2\}$; é claro que ou $|B| \neq |B_1|$ ou $|B| \neq |B_2|$. Suponhamos, por exemplo, $|B| \neq |B_1|$ e seja $x \in B_2 \setminus B$. Então os conjuntos B e B_1 pertencem ao clutter $\mathcal{T} \setminus x$ e portanto este clutter não é uniforme e o seu conjunto de suporte, $E(\mathcal{T}) \setminus \{x\}$, está estritamente contido em $E(\mathcal{T})$ contradizendo a minimalidade deste conjunto. \square

Usando este resultado podemos agora provar o seguinte teorema:

Teorema 2.14. *Seja \mathcal{S} um clutter; as operações de supressão e contracção são associativas e comutam entre si se e só se \mathcal{S} é a família das bases de um matroide.*

Prova — Suponhamos que \mathcal{S} não é a família das bases de um matroide. Pela proposição anterior \mathcal{S} tem um menor \mathcal{T} isomorfo a um dos clutters 1, 2 ou 3:

- se $\mathcal{T} = (\{B_1, B_2\}, E = B_1 \cup B_2)$, com $|E| \geq 3$, então ou $|B_1|$ ou $|B_2|$ é maior ou igual a 2.

Suponhamos, por exemplo, $|B_1| \geq 2$ e seja x um elemento qualquer de B_1 ; então:

$$\mathcal{T}/(B_1 - x)/B_2 = (\{\{x\}\}, \{x\}) \text{ e } \mathcal{T}/B_2/(B_1 - x) = (\{\emptyset\}, \{x\});$$

- se $\mathcal{T} = (\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}, \{1, 2, 3, 4\})$ então:

$$\mathcal{T}/4/1 = (\{\{3\}\}, \{2, 3\}) \text{ e } \mathcal{T}/1/4 = (\{\{2\}, \{3\}\}, \{2, 3\});$$

- se $\mathcal{T} = (\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}, \{1, 2, 3, 4\})$ então:

$$\mathcal{T}/2/4 = (\{\{1\}\}, \{1, 3\}) \text{ e } \mathcal{T}/4/2 = (\{\{1\}, \{3\}\}, \{1, 3\}).$$

Reciprocamente, se o *clutter* \mathcal{S} é a família das bases de um matroide M então os seus menores são isomorfos aos menores de M e, portanto, as operações são associativas e comutam entre si. \square

2.3.3. *Clutters e circuitos*

Passamos agora a considerar *clutters* que generalizam a família dos circuitos de um matroide; por isso, vamos definir de outra maneira os menores de um *clutter* e considerar o caso trivial do *clutter* vazio $\mathcal{V} = \emptyset$. Para frisar a diferença, utilizamos letras diferentes para representar os *clutters* e também para os seus elementos.

Sendo \mathcal{A} uma qualquer colecção de subconjuntos de um conjunto E , vamos representar por $\min\{\mathcal{A}\}$ a colecção de conjuntos:

$$\{A \in \mathcal{A} : A \text{ é elemento minimal para a inclusão}\}.$$

Definição 2.15. Seja \mathcal{V} um *clutter* e $x \in E(\mathcal{V})$:

- O *clutter* que se obtém de \mathcal{V} por *supressão* do elemento x , é o *clutter*:
 $\mathcal{V} \setminus x = (\{C : x \notin C \text{ e } C \in \mathcal{V}\}, E \setminus \{x\}).$
- O *clutter* que se obtém de \mathcal{V} por *contracção* do elemento x , é o *clutter*:
 $\mathcal{V}/x = (\min\{C \setminus \{x\} : C \in \mathcal{V}\}, E \setminus \{x\})$

Um *menor* de \mathcal{V} é um *clutter* que se pode obter de \mathcal{V} por uma sucessão de operações de contracção e supressão de elementos de $E(\mathcal{V})$.

Até ao fim do capítulo, quando mencionarmos qualquer operação de menor é a estas definições das operações que nos referimos. Note-se que elas são associativas e comutam entre si:

Proposição 2.16. ([91], Lema 3) *Se \mathcal{V} é um clutter e X, Y são subconjuntos do seu conjunto de suporte, $E(\mathcal{V})$, então $(\mathcal{V}/X)/Y = (\mathcal{V}/Y)/X = \mathcal{V}/(X \cup Y)$, $(\mathcal{V} \setminus X) \setminus Y = (\mathcal{V} \setminus Y) \setminus X = \mathcal{V} \setminus (X \cup Y)$ e $(\mathcal{V}/X) \setminus Y = (\mathcal{V} \setminus Y)/X$.*

2.3.4. Operador bloqueador

Chama-se *operador bloqueador* ao operador de *clutters*, β , que a qualquer *clutter* $\mathcal{V} = (E, \mathcal{V})$ associa o *clutter*,

$$\beta(\mathcal{V}) = (\min\{D \subseteq E : D \cap C \neq \emptyset \forall C \in \mathcal{V}\}, E).$$

Em [91] Seymour sublinhou a importância deste operador para o estudo de *clutters* com menores definidos deste modo; em particular, ele prova que o operador β troca contracção por supressão:

Proposição 2.17. ([91], Lema 4) *Seja \mathcal{V} um clutter e X um subconjunto de $E(\mathcal{V})$; então $\beta(\mathcal{V}/X) = \beta(\mathcal{V}) \setminus X$ e $\beta(\mathcal{V} \setminus X) = \beta(\mathcal{V})/X$.*

Além disso, como foi notado em [44], β é um operador involutivo.

Vamos então provar uma outra generalização do teorema de dualidade de Bland e Dietrich para estas definições de menor. Como já referimos as provas destes teoremas usam as mesmas ideias que as dos resultados do parágrafo anterior relativo à função complementar.

Teorema 2.18. *Seja f um operador de clutters que troca a operação de contracção pela operação de supressão, i.e., para todo o clutter \mathcal{V} e todo o $x \in E(\mathcal{V})$, $f(\mathcal{V}/x) = f(\mathcal{V}) \setminus x$ e $f(\mathcal{V} \setminus x) = f(\mathcal{V})/x$. Então f é uma das seguintes aplicações:*

1. o operador constante: $(\mathcal{V}, E) \mapsto (\{\emptyset\}, E)$, que a qualquer clutter associa o clutter com um único elemento igual ao conjunto vazio;
2. o operador constante: $(\mathcal{V}, E) \mapsto (\emptyset, E)$, que a qualquer clutter associa o clutter vazio;
3. o operador bloqueador, β .

O teorema é consequência da proposição seguinte, que permite reconstruir um *clutter* a partir da supressão e da contracção de um só elemento do conjunto de suporte, e dos Lemas 2.22 a 2.25, que caracterizam as imagens de qualquer *clutter* \mathcal{V} , a partir da imagem dos *clutters* cujo conjunto de suporte tem cardinal zero.

Proposição 2.19. *Sejam \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 dois clutters com o mesmo conjunto de suporte E ; se para algum $x \in E$:*

- $\mathcal{V}_1 \setminus x = \mathcal{V}_2 \setminus x$ e,
- $\mathcal{V}_1/x = \mathcal{V}_2/x$;

então $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$.

Prova — Se $|E| = 0$ não há nada para provar. Se não, usando as definições, podemos reconstruir os *clutters* \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 como segue:

$$\mathcal{V}_i = (\{C : C \in \mathcal{V}_i \setminus x\} \cup \{C \cup \{x\} : C \in \mathcal{V}_i/x \text{ e } C \notin \mathcal{V}_i \setminus x\}, E)$$

Como os menores coincidem nalgum elemento de E , $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$. \square

Nos lemas que se seguem a função f é um operador de *clutters* que troca contracção por supressão.

Lema 2.20. *Se $f((\{\emptyset\}, \emptyset)) = (\{\emptyset\}, \emptyset)$ [resp. (\emptyset, \emptyset)] então, para todo o conjunto finito E , $f((\{\emptyset\}, E)) = (\{\emptyset\}, E)$ [resp. (\emptyset, E)].*

Prova — Suponhamos $f((\{\emptyset\}, \emptyset)) = (\{\emptyset\}, \emptyset)$; vamos provar o resultado por indução no $|E|$. A prova do resultado com a outra hipótese é análoga.

Se $|E| = 0$ não há nada a provar; portanto, suponhamos o lema verdadeiro para todo o *clutter* \mathcal{V} tal que $0 \leq |E(\mathcal{V})| < n$ e consideremos um *clutter* \mathcal{V} tal que $|E(\mathcal{V})| = n$. Seja $x \in E(\mathcal{V})$, então:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{V}) \setminus x &= f(\mathcal{V}/x) = (\{\emptyset\}, E \setminus \{x\}) = (\{\emptyset\}, E) \setminus x \quad \text{e} \\ f(\mathcal{V})/x &= f(\mathcal{V} \setminus x) = (\{\emptyset\}, E \setminus \{x\}) = (\{\emptyset\}, E)/x \end{aligned}$$

e o lema decorre da Proposição 2.19. \square

Lema 2.21. *Se $f((\emptyset, \emptyset)) = (\emptyset, \emptyset)$ [resp. $(\{\emptyset\}, \emptyset)$] então, para todo o conjunto finito E , $f((\emptyset, E)) = (\emptyset, E)$ [resp. $(\{\emptyset\}, E)$].*

Prova — Seja $g = \beta \circ f \circ \beta$. A função g verifica as hipóteses do lema anterior e este resultado decorre dele, se notarmos que $f = \gamma \circ g \circ \beta$. \square

Lema 2.22. *Não existe qualquer f que satisfaça simultaneamente as seguintes condições iniciais:*

1. $f((\{\emptyset\}, \emptyset)) = (\{\emptyset\}, \emptyset)$;
2. $f((\emptyset, \emptyset)) = (\emptyset, \emptyset)$.

Prova — Suponhamos que existe um operador de *clutters* f satisfazendo ambas as condições e seja \mathcal{V} o *clutter* $(\{a\}, \{a, b\})$. Então:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{V}) \setminus a &= f(\mathcal{V}/a) = f((\{\emptyset\}, \{b\})) \quad \text{e} \\ f(\mathcal{V})/a &= f(\mathcal{V} \setminus a) = f((\emptyset, \{b\})) \end{aligned}$$

Portanto, usando os lemas anteriores podemos afirmar que:

$$f(\mathcal{V}) \setminus a = (\{\emptyset\}, \{b\}) \text{ e } f(\mathcal{V})/a = (\emptyset, \{b\})$$

o que é uma contradição já que a primeira igualdade implica $f(\mathcal{V}) = (\{\emptyset\}, \{a, b\})$ e portanto $f(\mathcal{V})/a = (\{\emptyset\}, \{b\})$ contradizendo a segunda. \square

Lema 2.23. *Se $f((\emptyset, \emptyset)) = f((\{\emptyset\}, \emptyset)) = (\{\emptyset\}, \emptyset)$ então, para todo o clutter \mathcal{V} , $f((\mathcal{V}, E(\mathcal{V}))) = (\{\emptyset\}, E(\mathcal{V}))$.*

Lema 2.24. *Se $f((\emptyset, \emptyset)) = f((\{\emptyset\}, \emptyset)) = (\emptyset, \emptyset)$ então, para todo o clutter \mathcal{V} , $f((\mathcal{V}, E(\mathcal{V}))) = (\emptyset, E(\mathcal{V}))$.*

Lema 2.25. *Se $f((\emptyset, \emptyset)) = (\{\emptyset\}, \emptyset)$ e $f((\{\emptyset\}, \emptyset)) = (\emptyset, \emptyset)$ então, f é o operador bloqueador, β .*

As provas dos Lemas 2.23 e 2.25 são análogas à do Lema 2.20. O Lema 2.24 pode ser deduzido do Lema 2.23 da mesma maneira que o Lema 2.21 o foi do Lema 2.20.

Assim, o resultado de Bland e Dietrich é um corolário do Teorema 2.18:

Corolário 2.26. *Há um único operador de clutters involutivo que troca supressão por contracção.*

Além disso, o Teorema 2.18 tem a seguinte reformulação equivalente: à dada:

Teorema 2.27. *Seja f um operador de clutters que comuta com as operações de supressão e contracção, i.e., para todo o clutter \mathcal{V} e todo o elemento $x \in E(\mathcal{V})$, $f(\mathcal{V} \setminus x) = f(\mathcal{V}) \setminus x$ e $f(\mathcal{V}/x) = f(\mathcal{V})/x$. então, se f não é um dos operadores triviais 1 ou 2 do Teorema 2.18, f é a identidade.*

Prova — Como o operador $g = \beta \circ f$ troca supressão por contracção, basta aplicar o Teorema 1.18 a g e notar que $f = \beta \circ g$. \square

2.3.5. Caracterização dos clutters que são os circuitos de um matroide

Teorema 2.28. *Seja \mathcal{V} um clutter; \mathcal{V} não é a família dos circuitos de um matroide se e só se:*

1. \mathcal{V} é o clutter $(\{\emptyset\}, E)$, onde E é um conjunto finito, ou,

2. \mathcal{V} tem um menor isomorfo ao clutter $(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}, \{1, 2, 3\})$.

Prova — É claro que, sendo \mathcal{V} a família dos circuitos de um matroide nenhuma das duas condições pode ser satisfeita.

Reciprocamente, suponhamos que \mathcal{V} não é a família dos circuitos de um matroide nem é o clutter $(\{\emptyset\}, E)$, para qualquer conjunto finito E .

Consideremos \mathcal{W} o menor de \mathcal{V} , minimal nestas condições, i.e.:

- \mathcal{W} não é o clutter $(\{\emptyset\}, \emptyset)$ e,
- \mathcal{W} não é a família dos circuitos de um matroide mas qualquer clutter \mathcal{W}' , menor (estrito) de \mathcal{W} o é, a não ser que $\mathcal{W}' = (\{\emptyset\}, E')$, para algum subconjunto E' de $E(\mathcal{W})$.

Queremos provar que, neste caso \mathcal{W} é isomorfo a $(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}, \{1, 2, 3\})$.

Na verdade, como $\emptyset \notin \mathcal{W}$ e \mathcal{W} não é a família dos circuitos de um matroide (portanto, $\mathcal{W} \neq \emptyset$) têm de existir dois elementos de \mathcal{W} que não verificam o axioma de eliminação, i.e., existem $C_1, C_2 \in \mathcal{W}$ ($C_1 \neq C_2$) e existe um $a \in C_1 \cap C_2$ tais que, para todo $C_3 \in \mathcal{W}$, $C_3 \not\subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$.

Note-se que:

- $E(\mathcal{W}) = C_1 \cup C_2$, pela minimalidade de \mathcal{W} , já que $C_1, C_2 \in \mathcal{W} \setminus (C_1 \cup C_2)$.
- $C_1 \cap C_2 = \{a\}$.

Suponhamos, por absurdo, que existia $b \in C_1 \cap C_2$, $b \neq a$, e consideremos o clutter $\mathcal{W}' = \mathcal{W}/b$.

Como $\{b\}$ e \emptyset não são elementos de \mathcal{W} (se algum deles fosse estaria contido em $(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$), o clutter \mathcal{W}' não é do tipo $(\{\emptyset\}, E)$; portanto \mathcal{W}' é a família dos circuitos de um matroide M e os conjuntos $C'_1 = C_1 \setminus \{b\}$ e $C'_2 = C_2 \setminus \{b\}$ são circuitos de M .

Então existe $C'_3 \in \mathcal{W}'$ talque $C'_3 \subseteq (C'_1 \cup C'_2) \setminus \{a\}$. Portanto, ou $C'_3 \in \mathcal{W}$ ou $C'_3 \cup \{b\} \in \mathcal{W}$, contrariando a hipótese porque ambos estão contidos em $(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$.

- Além disso, $|C_1| = |C_2| = 2$.

Suponhamos, por absurdo, que $|C_1| \geq 3$. Sejam então $b, c \in C_1$, $b \neq a$ e $c \neq a$, e seja $\mathcal{W}' = \mathcal{W}/b$.

Comecemos por mostrar que $C_2 \in \mathcal{W}'$:

Na verdade, se $C_2 \notin \mathcal{W}'$, decorre da definição de contraído que existe $C'_4 \in \mathcal{W}'$ tal que $C'_4 \subsetneq C_2$ e $C_4 = C'_4 \cup \{b\} \in \mathcal{W}$.

Se a não pertencesse a C_4 então $C_4 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$, contrariando a hipótese feita sobre \mathcal{W} ; portanto, $a \in C_4$. Além disso, $C_4 \neq C_1$ porque senão ambos eram iguais a $\{a, b\}$, contrariando $|C_1| \geq 3$.

Seja x um elemento de $C_2 \setminus C_4$ ($\therefore x \neq a$); então $C_1, C_4 \in \mathcal{W} \setminus x$ e, pela minimalidade de \mathcal{W} , $\mathcal{W} \setminus x$ é a família dos circuitos de um matroide; assim, como $C_1 \neq C_4$ e $a \in C_1 \cap C_4$, existe $C_0 \in \mathcal{W} \setminus x$ tal que $C_0 \subseteq (C_1 \cup C_4) \setminus \{a\}$, o que contradiz a hipótese porque $C_0 \in \mathcal{W}$ e $C_0 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$. Portanto $C_2 \in \mathcal{W}'$, como afirmamos.

Como, por outro lado, $C'_1 = C_1 \setminus \{b\}$ também pertence a \mathcal{W}' , $C'_1 \neq C_2$ e $a \in C'_1 \cap C_2$, existe $C'_3 \in \mathcal{W}'$ tal que $C'_3 \subseteq (C'_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$, contradizendo a nossa hipótese sobre o clutter \mathcal{W} , já que tanto C'_3 como $C'_3 \cup \{b\}$ são subconjuntos de $(C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$ e um deles pertence a \mathcal{W} .

Portanto, sob a hipótese $|C_1| \geq 3$ chegamos a uma contradição. É claro que o mesmo aconteceria se suposéssemos $|C_2| \geq 3$.

Então, existem $C_1, C_2 \in \mathcal{T}$ tais que $|C_1| = |C_2| = 2$, $C_1 \cap C_2 = \{a\}$ e $E(\mathcal{W}) = C_1 \cup C_2$, ou seja, \mathcal{W} é isomorfo ao clutter $(\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}, \{1, 2, 3\})$. \square

Antes de terminar, vamos refazer a prova de um teorema de Vaderlind ([97], Proposição 2.3) que dá uma outra caracterização dos clutters que são matroides. A nossa prova utiliza dois lemas com um carácter matroidal.

Começemos por definir um outro operador de clutters, a aplicação $*$, que a todo o clutter $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, E)$ associa o clutter:

$$*(\mathcal{V}) = (\min\{X : X \subseteq E, X \neq \emptyset \text{ e } |X \cap C| \neq 1, \text{ para todo o } C \in \mathcal{V}\}, E).$$

Note-se que, se $\mathcal{V} = \mathcal{C}$ é a família dos circuitos de um matroide M , então $*(\mathcal{V}) = \mathcal{C}^*$ é a família dos circuitos do seu dual, M^* (veja §2.2.5).

Teorema 2.29. ([97], Proposição 2.3) *Um clutter \mathcal{V} é a família dos circuitos de um matroide se e só se \mathcal{V} é um ponto fixo do operador de clutters $\beta \circ \gamma \circ \beta \circ *$.*

Para frisar a analogia com resultados de teoria de matroides vamos usar a seguinte notação: sendo \mathcal{C} um clutter qualquer, escrevemos $\beta(\mathcal{C}) = \mathcal{B}^*$, $\gamma(\mathcal{B}^*) = \mathcal{B}$ e $\beta(\mathcal{B}) = \mathcal{C}^*$; como os operadores β e γ são involutivos, um qualquer dos clutters \mathcal{C} , \mathcal{C}^* , \mathcal{B} ou \mathcal{B}^* , determina todos os outros.

Lema 2.30. *Para todo o $B \in \mathcal{B}$ e todo $x \in B$ existe um $C^* \in \mathcal{C}^*$ tal que $C^* \cap B = \{x\}$.*

Prova — $\beta(\mathcal{B}) = \mathcal{C}^* \Rightarrow \beta(\mathcal{C}^*) = \mathcal{B}$; portanto, para qualquer $B \in \mathcal{B}$,

$$B \in \min\{X \subseteq E : X \cap C^* \neq \emptyset, \text{ para todo } C^* \in \mathcal{C}^*\};$$

assim, para todo o $x \in B$, $B \setminus \{x\} \notin \beta(\mathcal{C}^*)$, ou seja, existe $C^* \in \mathcal{C}^*$ tal que $(B \setminus \{x\}) \cap C^* = \emptyset$. Como $B \cap C^*$ é não-vazio, tem de ser igual a $\{x\}$. \square

Lema 2.31. $\mathcal{C} = \min\{C : C \subseteq E(\mathcal{B}) \text{ e } C \not\subseteq B \forall B \in \mathcal{B}\}$.

Prova — Basta notar que $\mathcal{C} = \beta \circ \gamma(\mathcal{B})$. \square

Prova do Teorema 2.29 — Como β e γ são involutivas:

$$\beta \circ \gamma \circ \beta \circ *(C) = C \iff \beta \circ \gamma \circ \beta(C) = *(C).$$

Se \mathcal{C} é a família dos circuitos de um matroide, $*(\mathcal{C})$ é a dos cocircuitos e a igualdade é verificada (ver § 2.2.5).

Reciprocamente, seja \mathcal{C} um *clutter* tal que $\beta \circ \gamma \circ \beta(C) = *(C)$ e suponha, por absurdo, que \mathcal{C} não é a família dos circuitos de um matroide.

Então, existem $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ ($C_1 \neq C_2$) e existe $a \in C_1 \cap C_2$ tal que $C_3 \not\subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{a\}$, para todo $C_3 \in \mathcal{C}$. Usando o Lema 2.31 podemos afirmar que, para algum $B_0 \in \mathcal{B}$, $C_1 \cup C_2 \setminus \{a\} \subseteq B_0$.

Aplicando agora o Lema 2.30 a um elemento x de B_0 , tal que $x \in C_1 \setminus C_2$, podemos afirmar que existe $C_0^* \in \mathcal{C}^*$ tal que $C_0^* \cap B_0 = \{x\}$.

Como $\mathcal{C}^* = \beta \circ \gamma \circ \beta(\mathcal{C})$ e, por hipótese, $\beta \circ \gamma \circ \beta(C) = *(C)$, então $C_0^* \in *(C)$ e, portanto, $C_0^* \cap C_1 = \{a, x\}$, já que $|C_0^* \cap C_1| \neq 1$.

Então, $C_0^* \cap C_2 = \{a\}$ contradizendo a hipótese. \square

Corolário 2.32. *Um clutter é o conjunto das bases de um matroide se e só se é um ponto fixo do operador $\beta \circ * \circ \beta \circ \gamma$.*

Prova — Notando que, \mathcal{C} é a família dos circuitos de um matroide se e só se $\gamma \circ \beta(\mathcal{C})$ é a família das bases do mesmo matroide, o corolário é consequência imediata do teorema. \square

"...We will explore a remarkable connection between the geometry of Schubert cells in the Grassmann manifold, the theory of convex polyhedra, and the theory of combinatorial geometries in the sense of Crapo and Rota ([35])....We believe that combinatorial methods will play an increasing role in the future of geometry and topology." I.M. Gelfand et al. [52].

3. Grafo e Polítope de Bases-cobases

3.1. Introdução

Um matroide pode ser definido como uma colecção $\mathcal{B} \neq \emptyset$ de subconjuntos de um conjunto finito $E = \{1, 2, \dots, n\}$ que verifica a *propriedade de troca de Steinitz*, para quaisquer $B, B' \in \mathcal{B}$:

para todo $x \in B \setminus B'$ existe $y \in B' \setminus B$ tal que $B \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Os elementos de \mathcal{B} são as *bases* do matroide $M = (E, \mathcal{B})$.

O estudo dos matroides a partir da noção de base tem-se mostrado particularmente interessante quer para salientar e utilizar o carácter algébrico desta estrutura como para desenvolver métodos algorítmicos, em particular algoritmos capazes de decidir se um matroide é ou não coordenável.

A conexão entre as *propriedades de troca nas bases* e as *identidades dos "brackets"* (ver [67]) deu corpo à ideia de Rota de que a teoria de matroides deveria estar estreitamente ligada à teoria dos invariantes em espaços projectivos [89]. Nesta teoria têm particular importância a *variedade de Grassmann* e os *polinómios de Grassmann-Plücker*. Na verdade, os matroides e os matroides orientados podem também ser vistos como variedades algébricas sobre \mathbb{Z}_2 e \mathbb{Z}_3 , respectivamente ([11], [59]). Os polinómios que definem estas variedades são obtidos a partir dos polinómios de Grassmann-Plücker.

Gelfand em [52] e [54] utiliza a relação entre a variedade de Grassmann e os matroides de um ponto de vista geométrico — ele estuda as classes de equivalência determinadas nesta variedade pela acção de um certo grupo e associa a cada classe um poliedro. Este poliedro é o *polítope das bases* de um matroide coordenável em \mathbb{C} . Ele salienta que o estudo da geometria destas classes de equivalência pode ser útil em problemas tão diversos como a compreensão das funções hipergeométricas generalizadas e a representabilidade de matroides.

Os resultados que vamos expôr neste capítulo estão directamente relacionados com o *polítope das bases* e utilizam fortemente a propriedade de

troca de Steiniz do conjunto das bases de um matroide.

Esses resultados dizem respeito a um grafo e a um politope associados a qualquer matroide $M = (E, \mathcal{B})$ cujo conjunto suporte E é união disjunta de duas bases; a um tal matroide chamamos um *bloco*. A uma base B de um bloco M cujo complementar $E \setminus B$ também é base chamamos *base-cobase*.

Àcerca do *grafo* e do *politope das bases-cobases* fizemos uma curta introdução.

Em apêndice fizemos um resumo curto da caracterização de Maurer do *grafo das bases* de um matroide. Damos, também, a definição e algumas propriedades dos *grafos série-paralelos*.

Se $B \subseteq E$ e $x \in E$ usamos a notação $B - x$ para o conjunto $B \setminus \{x\}$ e $B + x$ para o conjunto $B \cup \{x\}$.

Se B é uma base de M [resp. uma cobase] e $x \notin B$ usamos a notação $Cf(B, x)$ [resp. $Cf^*(B, x)$] para o (único) circuito [resp. cocircuito] contido em $B \cup \{x\}$, já introduzida no primeiro capítulo.

3.1.1. Grafo das Bases-cobases

Se M é um matroide e B é uma base de M , qualquer outra base B' pode ser obtida de B trocando um par de elementos de cada vez e obtendo a cada passo uma base de M .

Esta consequência do axioma de troca sugeriu que a qualquer matroide, M , se associasse um grafo, $G(M)$, *grafo das bases de M* , cujos vértices são as bases e cujas arestas são os pares de bases cuja diferença simétrica tem dois elementos.

O grafo das bases de um matroide foi estudado por variados autores: Cummins [36] provou que o grafo das árvores é *hamiltoniano*, i.e., tem um ciclo que passa por todos os vertices uma e uma só vez (dito *ciclo gerador*); Holzman e Harary em [63] provaram que $G(M)$ é *uniformemente hamiltoniano*, i.e., que dada uma qualquer aresta deste grafo há um ciclo gerador que a contem e um outro que a evita. Maurer em [77] e [78] caracterizou os grafos de bases usando, essencialmente, o conceito de *grafo das vizinhanças comuns* (ver apêndice). Ele dá um critério baseado neste grafo para saber distinguir se um matroide é ou não binário.

Em [47] Farber et al. introduzem um outro grafo de bases associado a matroides cujo conjunto suporte é união disjunta de duas bases e conjecturam que esse grafo é conexo, tendo-o provado no caso dos matroides gráficos e cográficos e, mais tarde em [46], para matroides transversais; chamamos a esse grafo - *grafo das bases-cobases*.

Definição 3.1. Se $M = (E, \mathcal{B})$ é um bloco, i.e., um matroide cujo conjunto suporte E é união disjunta de duas bases, chama-se *grafo das bases-cobases* de M ao grafo $G(M, M^*) = (V, A)$ onde:

$$V = \{B \in \mathcal{B} : E \setminus B \in \mathcal{B}\} \text{ e}$$

$$A = \{(B, B') : |B \Delta B'| = 2\}.$$

Conjectura 3.2. [47] $G(M, M^*)$ é conexo.

Uma outra conjectura feita por Kajitani et.al. em [65] que utiliza uma certa definição de ordem no conjunto suporte de um matroide pode ser reformulada em termos deste grafo como segue:

Conjectura 3.3. [65] *Se M é um bloco, há dois vertices v e v' em $G(M, M^*)$ correspondentes a bases disjuntas tais que $d(v, v') = \text{rank}(M)$.*

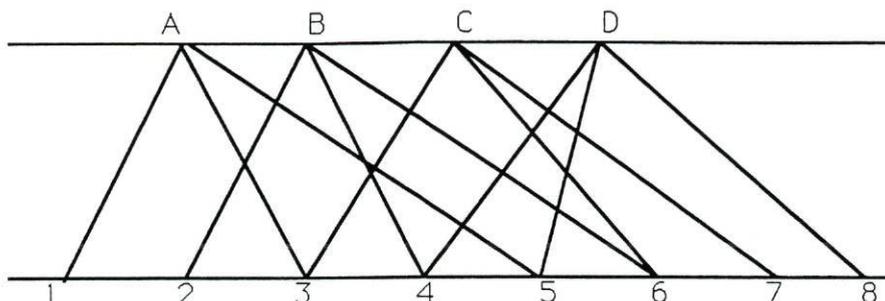
Esta conjectura, provada pelos seus autores para matroides gráficos (e cográficos) [65], tem uma aplicação interessante: um matroide $M = (E, \mathcal{B})$ que a verifica é *baseável*, i.e., sendo $r = \text{rank}(M)$, há $2r$ bases em M tais que cada elemento $e \in E$ está em exactamente r dessas bases; foi provado em [62] que esta condição é suficiente para a convergência de uma generalização do *integral de Feynman*.

Vamos provar, na primeira secção deste capítulo, um resultado mais forte: *qualquer par de bases disjuntas de um bloco gráfico (ou cográfico) está ligado por um caminho de comprimento igual ao rank do matroide*. Na verdade conjecturamos válido para qualquer bloco o seguinte enunciado:

Conjectura 3.4. *Se M é um bloco e $\text{rank}(M) = r$ então qualquer par de vertices de $G(M, M^*)$, correspondente a bases disjuntas, está ligado por um caminho de comprimento r .*

Note-se que não é válida em $G(M, M^*)$, como o era no grafo das bases, $G(M)$, a propriedade seguinte: *entre duas quaisquer base-cobases B e B' existe um caminho de comprimento igual a $\text{rank}(M) - |B \cap B'|$* . Damos a seguir um contra-exemplos para matroides transversais; veja [46] para um contra-exemplo com matroides gráficos. É no entanto facil provar, usando indução no *rank* do matroide, que no caso dos matroides induzidos por grafos *série-paralelos* a distância entre duas bases-cobases é dada por esta diferença (ver apêndice).

Exemplo 3.5. – Seja M matroide transversal de rank 4 sobre o conjunto $E(M) = \{1, \dots, 8\}$ de apresentação representada no seguinte grafo bipartido:



$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{3, 6, 7\}, D = \{4, 5, 8\}$$

Então $B_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B_2 = \{1, 2, 5, 6\}$ são base-cobases de M e qualquer caminho ligando B_1 a B_2 em $G(M, M^*)$ tem comprimento estritamente maior que 2.

As conjecturas já referidas sugeriram o problema de determinar o diâmetro de $G(M, M^*)$:

Conjectura 3.6. [61] *Se M é um bloco então o diâmetro de $G(M, M^*)$ é igual a $\text{rank}(M)$.*

3.1.2. Polítope das Bases-Cobases

Definição 3.7. Seja $M = (E, \mathcal{B})$ um matroide de rank r sobre um conjunto E . Chama-se *polítope das bases de M* , $K(M)$, ao fecho convexo dos vectores de incidência das bases de M , i.e.:

$$K(M) = \text{fecho convexo}\{v_B \in \mathbb{R}^E : B \in \mathcal{B}\}$$

onde:

$$(v_B)_e = \begin{cases} 1 & \text{if } e \in B \\ 0 & \text{if } e \notin B \end{cases}$$

Comecemos por notar algumas propriedades interessantes deste polítope:

P1 Como foi observado por Edmonds [41], $K(M)$ coincide com o conjunto das soluções do sistema linear:

$$K(M) = \left\{ x \in \mathbb{R}^E : \begin{aligned} &x_e \geq 0 \text{ para todo } e \in E, \\ &\sum_{e \in A} x_e \leq \text{rank}(A) \text{ para todo } A \subset E, \\ &\sum_{e \in E} x_e = r \end{aligned} \right\}$$

e os seus vértices são os vectores de incidência das bases.

P2 O 1-esqueleto de $K(M)$ é o grafo de bases $G(M)$:

É claro que, sendo B e B' duas bases tais que $|B \cap B'| = r - 1$, o conjunto $l = \{x \in K(M) : \sum_{e \in B \cap B'} x_e = r - 1\}$ é uma aresta de $K(M)$ que liga o vertice v_B ao vertice $v_{B'}$.

Reciprocamente, se l é aresta de $K(M)$ unindo os vertices v_B e $v_{B'}$, seja $\Psi \in (\mathbb{R}^E)^*$ a forma linear que a define, i.e.,

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= c \implies x \in l \\ \Psi(x) &\leq c \implies x \in K(M) \setminus l.\end{aligned}$$

Sendo $\Psi = \sum_{e \in E} \lambda_e \delta_e^*$, na base canónica de $(\mathbb{R}^E)^*$, e $b \in B \cup B' \setminus B \cap B'$ tal que λ_b é mínimo, suponhamos que $b \in B$. Então existe $a \in B' \setminus B$ tal que $B'' = (B - b + a) \in \mathcal{B}$. Pela escolha de b , $\Psi(v_{B''}) \geq \Psi(v_{B'})$ e pela definição de Ψ , $\Psi(v_{B''}) \leq \Psi(v_{B'})$ e portanto $B'' = B'$. \square

P3 O (n, k) -hipersimplexo definido por Gelfand et. al. em [52] é o politope das bases de um matroide de rank k definido num conjunto E de cardinal n . Os (n, k) -hipersimplexos que são a caracterizados como *politopes admissíveis* são politopes das bases de um matroide, coordenável em \mathbb{C} , associado a um estrato da variedade de Grassman, *matroide do estrato* (ver §2.2.1).

P4 As 2-faces de $K(M)$ são necessariamente triangulares ou quadrangulares.

Basta considerar dois vertices contíguos a um qualquer vertice v_B de $K(M)$ - v_{B-a+x} , v_{B-b+y} . Se $a = b$ ou $x = y$ a 2-face é um triângulo; se não, como os vectores $(v_{B-a+x} - v_B)$ e $(v_{B-b+y} - v_B)$ são linearmente independentes, o único outro vertice de $K(M)$ que está no mesmo plano é $v_{B'}$, onde $B' = (B \setminus \{a, b\}) \cup \{x, y\}$. \square

P5 Os politopes das bases de um matroide M e do seu dual M^* são isomorfos; na verdade eles podem ser obtidos um do outro pela isometria Ψ de que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^E$ associa $\Psi(x) = -x + c$ onde $c = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^E$.

P6 É claro que este politope está contido no hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^E : \sum_{e \in E} x_e = r\}$ e portanto $\dim(K(M)) \leq |E| - 1$. Mais, se M é um matroide conexo (portanto, sem lacetes), então $\dim(K(M)) = |E| - 1$.

Este resultado foi salientado por Edmonds em [41] a propósito de um problema de optimização em programação linear.

Exemplos

- $M = U_{n+1,n} \implies K(M)$ é o n -simplexo.

- $M = U_{3,2} \oplus U_{2,1} \implies K(M) \simeq K(M^*) \simeq \text{triângulo} \times \text{segmento}$



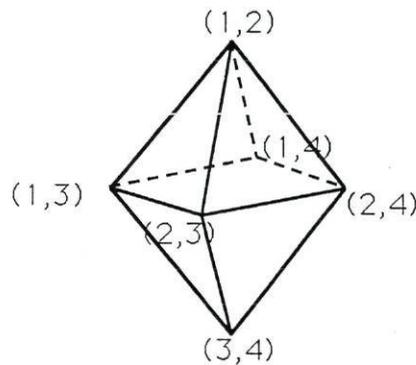
P7 $K(M_1 \oplus M_2) = K(M_1) \times K(M_2)$, já que, sendo $M = M_1 \oplus M_2$ e $E = E(M) = E_1(M_1) \cup E_2(M_2)$ o seu conjunto de suporte, então, para todo o $A \subseteq E$, $\text{rank}(A) = \text{rank}_1(A \cap E_1) + \text{rank}_2(A \cap E_2)$.

Na verdade, se M tem α componentes conexas - $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_\alpha$ - o seu politope das bases pode ser obtido por translacção do produto $K(M'_1) \times K(M'_2) \times \dots \times K(M'_\alpha)$, onde M'_i é o matroide M_i ou o seu dual, para todo o i , $1 \leq i \leq \alpha$.

Neste caso, $\dim(K(M)) = |E| - \alpha$ ([55]).

Exemplo Seja $M = M^* = U_{4,2}$; então $K(M)$ é o octaedro. As suas faces são todas triangulares e são elas próprias politopes de bases:

$$K(M(i) \oplus M/i) \simeq K(\mathcal{F}_1) \times K(U_{3,1}) \simeq \text{triângulo}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

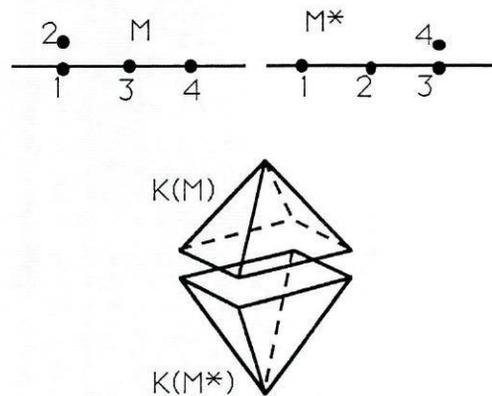


P8 A todo o subconjunto A de E corresponde uma face de $K(M)$, o politope das bases do matroide $(M(A) \oplus M/A)$ [42]. Em particular, se $M(A)$ e M/A são conexos obtemos faces de codimensão 1. No entanto, nem todas as faces de $K(M)$ podem ser obtidas deste modo.

P9 Como consequência da caracterização de Maurer do grafo das bases já referida, se um grafo $G = (V, E)$ é o 1-esqueleto de um politope das bases, P , então é possível etiquetar os vértices de G (pontos extremais de P) com os elementos de uma família, $\mathcal{B} = \{B_v : v \in V\}$, de subconjuntos de um conjunto E de tal modo que (v, v') é aresta de G se e só se $|B_v \Delta B_{v'}| = 2$, i.e., o 1-esqueleto de P pode ser bem etiquetado (ver apêndice). Portanto, o 1-esqueleto de um politope de bases P só pode ser bem etiquetado pelas bases de um matroide, M , tal que $K(M) \simeq P$.

No caso de o matroide M ser um bloco, é claro que as suas bases-cobases são os vertices do politope $K(M, M^*) = K(M) \cap K(M^*)$, que chamamos *politope das bases-cobases*.

Exemplo



$$K(M, M^*) = \text{quadrado}$$

São os resultados obtidos no estudo deste politope que iremos apresentar na segunda parte deste capítulo. Em particular, fazemos uma caracterização construtiva dos matroides M cujo politope das bases-cobases é um $\text{rank}(M)$ -cubo, como no exemplo da figura, e provamos que eles coincidem com os de dimensão mínima.

Chamamos *hipercubo* a um politope que é um d -cubo para algum $d > 0$.

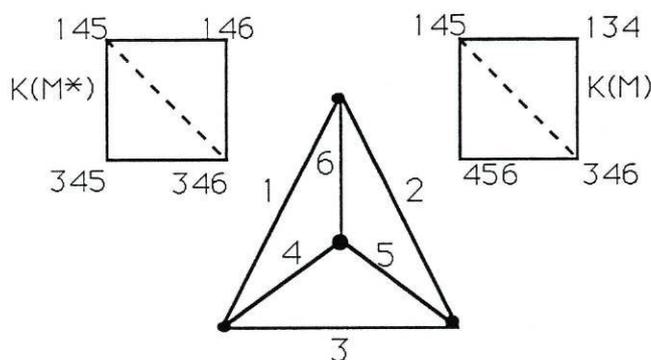
Um politope P é um d -cubo se é a soma de Minkowski de d segmentos mutuamente ortogonais todos do mesmo comprimento. Portanto, num sistema de coordenadas adequado

hipercubo = $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq d\}$, para algum $d > 0$

O número de faces de dimensão k de um d -cubo é $f_k(C_d) = 2^{d-k} \binom{d}{k}$; em particular, um d -cubo tem 2^d vértices e $2d$ faces de codimensão 1.

Note-se que, em geral, o grafo $G(M, M^*)$ não é o 1-esqueleto do politopo $K(M, M^*)$.

Considere-se, por exemplo, o matroide do grafo K_4 , representado na Figura abaixo, e as suas bases-cobases $B_1 = \{1, 4, 5\}$ and $B_2 = \{3, 4, 6\}$; os seus vectores de incidência, v_{B_1} e v_{B_2} , são vértices das faces de dimensão 2 de $K(M)$ e de $K(M^*)$ representadas na mesma figura. A intersecção destas duas faces é uma aresta de $K(M, M^*)$ e não é aresta de $G(M, M^*)$.



$G(M, M^*)$ não é o 1-esqueleto de $K(M, M^*)$

Nos artigos [20] e [48] é feito o estudo de outros politopos relacionados com o politopo $K(M, M^*)$; adiante faremos referência a uma das construções do segundo artigo.

3.2. Caminhos curtos no grafo das bases-cobases

Teorema 3.8. *Se M é um bloco gráfico e $\text{rank}(M) = r$ então qualquer par de vértices de $G(M, M^*)$, correspondente a bases disjuntas, está ligado por um caminho de comprimento r .*

Prova – A demonstração vai ser feita por indução no rank do matroide. Se $\text{rank}(M) = 1$ o resultado é trivial; suponhamo-lo verdadeiro para qualquer bloco gráfico de rank menor que r e seja $M = M(G)$ um matroide gráfico tal que $\text{rank}(M) = r$ e cujo conjunto de suporte é união de duas bases.

Comecemos por notar que um grafo, $G = (V, E)$, cujo conjunto de arestas é união de duas árvores tem, pelo menos, um vértice de grau 2 ou de grau 3, já que $|E| = |A_1| + |A_2| = 2(|V| - 1)$ e $\sum_{v \in V} \text{grau}(v) = 2|E|$.

Seja C^* o cocircuito correspondente a um tal vértice.

- Se $C^* = \{a, b\}$ e B é base-cobase então ou $a \in B$ ou $b \in B$ e não ambos, já que qualquer base tem intersecção não-vazia com qualquer

cocircuito. Portanto o conjunto das bases-cobases de M coincide com o do matroide $M \setminus \{a, b\} \oplus M^*(\{a, b\})$. Assim, supondo que $a \in B$, $B = \{b_1, \dots, b_{r-1}, a\}$ e $E \setminus B = \{c_1, \dots, c_{r-1}, b\}$ e usando a hipótese de indução para $M_1 = M \setminus \{a, b\}$ temos um caminho de comprimento $r-1$ em $G(M_1, M_1^*)$ a ligar $B-a$ a $(E \setminus B)-b$ e portanto, um caminho de comprimento r a ligar as duas bases complementares.

- Se $C^* = \{a, b, c\}$, sejam B e $B' = E \setminus B$ duas quaisquer bases disjuntas de M . Podemos supor, sem perda de generalidade, que $B \cap C^* = \{a, b\}$ (porque $B \cap C^* \neq \emptyset$ e $B' \cap C^* \neq \emptyset$) e que $a \in Cf(B, c)$ (porque a intersecção de um circuito com um cocircuito tem cardinal diferente de 1).

Como $a \in Cf(B, c)$, $B - a + c$ é base de M e o seu complementar $B' - c + a$ também é base porque $|Cf(a, B') \cap C^*| \neq 1$ e $b \notin B'$; portanto, $B-a$ e $B'-c$ são bases complementares do matroide $M/a \setminus c$ cujo *rank* é $(r-1)$.

Decorre da hipótese de indução que há r bases-cobases deste matroide, $B-a = B_0, B_1, \dots, B_{r-1} = B' - c$, tais que $|B_i \cap B_{i+1}| = r-2$ para todo $i, 0 \leq i \leq r-2$.

É consequência da definição de $M/a \setminus c$ que $B_i + a$ é base e $B_i + c$ cobase de M , para todo o i , porque B_i é base e cobase, respectivamente, de $M/a \setminus c$.

Vamos provar que, se $b \in B_i$, $B_i + a$ é também cobase de M e se $b \notin B_i$, $B_i + c$ é também base de M , para todo $i, 0 \leq i \leq r-1$. Além disso, se $b \in B_i$, um dos conjuntos $B_i + c$ e $((B_i + a) - b) + c$ é também uma base-cobase of M :

- se $b \notin B_i$ é claro que $b \notin Cf(B_i + a, c)$ e como a intersecção deste circuito com C^* não pode ser reduzida a um elemento, $a \in C(B_i + a, c)$, i.e., $(B_i + a) - a + c = B_i + c$ é base de M .
- se $b \in B_i$, $Cf^*(B_i + c, a) = \{a, b, c\}$, portanto c é elemento deste cocircuito fundamental, i.e., $B_i + a$ é cobase de M . Além disso, ou a ou b são elementos do circuito fundamental $Cf(B_i + a, c)$ que já intersecta C^* em c ; assim, se $a \in Cf(B_i + a, c)$ [resp. $b \in Cf(B_i + a, c)$] então $B_i + c$ [resp. $((B_i + a) - b) + c$] é base de M .

Podemos agora definir um caminho em $G(M, M^*)$ que liga os vertices B e B' :

$$B = B'_0 = B_0 + a, B'_1 = B_1 + a, \dots, B'_s = B_s + a,$$

$$B'_{s+1}, B'_{s+2} = B_{s+1} + c, \dots, B'_r = B_{r-1} + c = B'$$

onde s é o maior inteiro tal que $b \in B_s$.

B'_{s+1} é $B_s + c$ ou $((B_s - b) + a) + c$, conforme é a ou b que pertence a $Cf(B_s + a, c)$.

É claro que, para todo i , $0 \leq i \leq r-1$, $|B'_i \cap B'_{i+1}| = r-1$, o que conclui a prova. \square

3.3. Blocos bem comportados

3.3.1. Polítopos das bases-cobases de dimensão mínima

Proposição 3.9. *Seja M um bloco no conjunto E e $\text{rank}(M) = r$. Então:*

- $\dim(K(M, M^*)) \geq r$.
- $\dim(K(M, M^*)) = r$ se e só se $K(M, M^*)$ é um hipercubo.

Prova – Se B é uma qualquer base-cobase de M , para cada $x \in E \setminus B$ existe $y(x) = y_x \in B$ tal que $B - y_x + x$ também é base-cobase de M (basta tomar para y_x um elemento do conjunto $C(B, x) \cap C^*(B, x) \setminus \{x\}$ que é não-vazio).

Assim, quando x percorre $E \setminus B$, o conjunto $V = \{v_B\} \cup \{v_{B-y_x+x}\}$, de $r+1$ pontos de \mathbb{R}^E , é independente afim, o que prova a primeira afirmação.

Seja agora M um bloco tal que $\dim(K(M, M^*)) = \text{rank}(M)$.

Começemos por notar que, neste caso, os conjuntos $\{x, y_x\}$ definem uma partição de E em subconjuntos de dois elementos. Se isto não acontecesse, haveria, pelo menos, um elemento $b \in B$ que não era utilizado para construir as r bases-cobases $B_x = B - y_x + x$, i.e., $b \in (B \cap_{x \in E \setminus B} B_x)$. Como $E \setminus B$ também é base-cobase b seria um elemento do seu complementar, e repetindo o argumento usado no primeiro parágrafo, $(E \setminus B) - a_b + b$ seria uma base-cobase de M , para algum $a_b \in (E \setminus B)$; portanto, o seu complementar, $B' = B + a_b - b$ seria uma base-cobase de M e $b \notin B'$. Assim, o vector $v_{B'} - v_B$ seria linearmente independente dos r vectores $v_{B_x} - v_B$ e a dimensão de $K(M)$ estritamente maior que r , contrariando a hipótese.

Seja então $\{x_1, y_1\} \cup \{x_2, y_2\} \cup \dots \cup \{x_r, y_r\} = E$ essa partição.

Note-se que qualquer base-cobase de M tem que intersectar cada conjunto da partição em exactamente um elemento para pertencer ao subespaço gerado pelos vectores $v_{B-y_x+x} - v_B$ com $x \in E \setminus B$ (se para alguma base-cobase $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B}(\mathcal{M}^*)$ e para algum i , $1 \leq i \leq r$, $B' \cap \{x_i, y_i\} = \emptyset$ seria $(v_{B'})_{x_i} = 0 \neq -(v_{B'})_{y_i} = -(-1) = 1$).

Portanto, é claro que $K(M, M^*)$ é um r -cubo.

Reciprocamente, suponhamos que $K = K(M, M^*)$ é um hipercubo em \mathbb{R}^E e seja $\{F, F'\}$ um par de faces paralelas e de codimensão 1 de K . Qualquer vertice de K está numa destas faces e a cada vertice de F corresponde um (único) vertice de F' que só difere dele em duas coordenadas, i.e.,

$$x \in F \iff x + (0, \dots, 0, -1_{\text{coord. } i}, 0, \dots, 0, 1_{\text{coord. } j}, 0, \dots, 0) \in F'.$$

Assim, estabelace-se uma correspondência entre o par de faces $\{F, F'\}$ de K e os elementos $\{i, j\}$ de E , tal que $B \in F$ [resp. $B \in F'$] se e só se $i \in B$ and $j \notin B$ [resp. $i \notin B$ and $j \in B$]. Esta correspondência entre as faces de codimensão 1 de K e os elementos de E é claramente bijectiva, ou seja, K é o r -cubo e portanto $\dim(K(M, M^*)) = \text{rank}(M)$. \square

A prova deste teorema sugeriu uma primeira caracterização dos blocos com politope das bases-cobases de dimensão mínima:

Definição 3.10. Um bloco M é *fracamente redutível* se existe uma partição, $\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$, do seu conjunto de suporte $E(M)$ tal que toda a base-cobase de M tem intersecção não-vazia com cada conjunto da partição.

Nota

- É imediato da proposição que, sendo M um bloco, são equivalentes as seguintes afirmações :
 - M é fracamente redutível.
 - $\dim(K(M, M^*)) = \text{rank}(M)$.
 - $K(M, M^*)$ é um hipercubo.
- Decorre da definição que um bloco M é fracamente redutível se e só se o seu dual M^* o é; a noção de bloco fracamente redutível é, portanto, *auto-dual*.
- Se M é um bloco fracamente redutível e $\{a, b\}$ é um subconjunto de $E(M)$ que tem intersecção não-vazia com qualquer base-cobase, então $\{a, b\}$ é um dos conjuntos da partição. Se não fosse, a' e b' , os "pares" de a e de b na partição, estariam numa base-cobase B e $B \cap \{a, b\} = \emptyset$. Assim, se M é fracamente redutível, a partição de $E(M)$ é única.

É possível dar uma caracterização construtiva dos blocos fracamente redutíveis, portanto mais útil para determinar matroides M cujo politope das bases-cobases é um hipercubo de dimensão $\text{rank}(M)$.

Definição 3.11. Um bloco M é *fortemente redutível* se existe uma partição ordenada $\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ do seu conjunto de suporte, $E(M)$, tal que:

- O conjunto $\{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ é um circuito ou um cocircuito de M .
- Para todo $k, 1 \leq k \leq r-1$, o conjunto $\{a_{2k-1}, a_{2k}\}$ é um circuito ou um cocircuito de $M/\{a_{2k+2}, \dots, a_{2r}\} \setminus \{a_{2k+1}, \dots, a_{2r-1}\}$.

É claro que esta segunda noção de redutibilidade também é auto-dual. Além disso, *qualquer matroide fortemente redutível é fracamente redutível*:

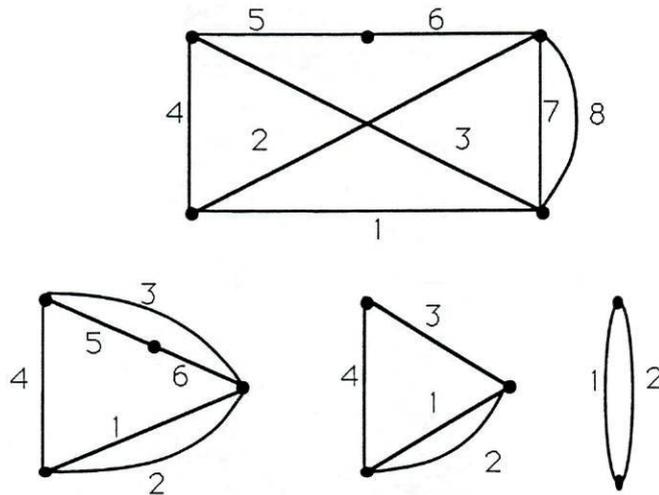
Sendo $\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ a partição dada pela redutibilidade forte e supondo, e. g., que $\{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ é um cocircuito de M , é claro que $B \cap \{a_{2r-1}, a_{2r}\} \neq \emptyset$ e $(E \setminus B) \cap \{a_{2r-1}, a_{2r}\} \neq \emptyset$, para todo B base-cobase de M . Assim, sendo, por exemplo, a_{2r} o elemento deste ultimo conjunto que está em B , $B - a_{2r}$ é base de $M_1 = M/a_{2r} \setminus a_{2r-1}$ cujo complementar $(E \setminus B) - a_{2r-1}$ também é base de M_1 ; a afirmação decorre por indução.

Um bloco que não é fracamente redutível diz-se *irredutível*.

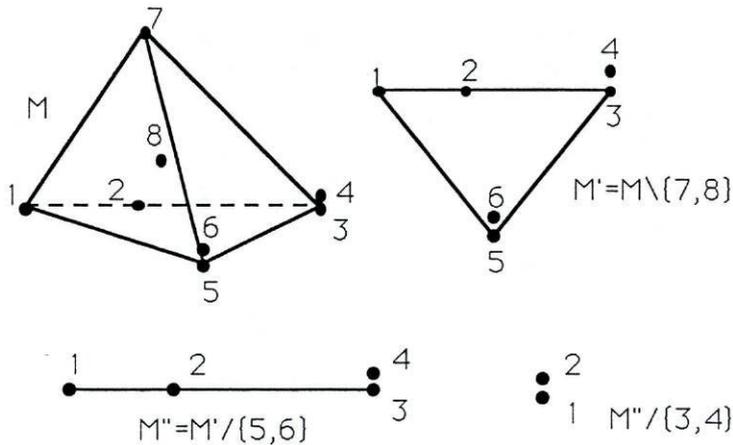
Note-se ainda que, se M é um bloco, quer exista um circuito quer um cocircuito de M com dois elementos, $\{a, b\}$, o par de matroides (M, M^*) é redutível no sentido dado por Fonlupt e Zemirline no trabalho atrás referido [48]. Segundo essa definição terá de existir uma partição do conjunto de suporte $E(M)$ em dois subconjuntos E_1 e E_2 , não-vazios, tais que $rank(E_1) + rank^*(E_2) = rank(E) = rank^*(E)$. Conforme $\{a, b\}$ é circuito ou cocircuito de M , a partição de E deve ser $E_1 = \{a, b\}$, $E_2 = E(M) \setminus \{a, b\}$ ou $E_1 = E(M) \setminus \{a, b\}$, $E_2 = \{a, b\}$. Quer dizer que a intersecção dos politopes $K(M)$ e $K(M^*)$ é uma face de ambos os politopes; por exemplo no caso de $\{a, b\}$ ser cocircuito, $K(M) \cap K(M^*) = K(M(E_1)) \oplus M/E_1 = K(M^*/E_2 \oplus M^*(E_2))$.

Exemplos

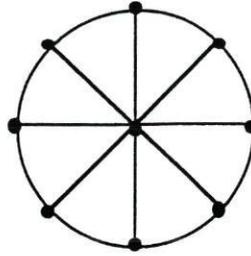
- O matroide determinado pelo grafo obtido pela duplicação das arestas de uma árvore é fortemente redutível.
- O matroide determinado pelo grafo com 8 arestas da figura seguinte é fortemente redutível relativamente à seguinte partição do conjunto das suas arestas: $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}$. Note-se que este grafo não é série-paralelo porque tem como menor $K_4 = M(G)/6 \setminus 8$.



- O matroide M representado na figura abaixo é fortemente redutível relativamente à seguinte partição do conjunto dos seus pontos : $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$. Note-se que M não é binário porque tem como menor $U_{4,2} = M/\{5, 6, 7\}\setminus 4$.



- Para todo $n \geq 2$, chama-se n -roda, W_n , ao grafo com $n + 1$ vértices, n deles ligados entre si num ciclo e todos ao vértice "central". O matroide deste grafo é um bloco, tem $2n$ elementos e $rank$ n , e é irredutível, para todo n .



$M(W_8)$ é irredutível

Vamos provar que todo o matroide fracamente redutível também é fortemente redutível, o que permitirá concluir o seguinte teorema:

Teorema 3.12. *Seja M um bloco e $\text{rank}(M) = r$; então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- M é fortemente redutível;
- $\dim(K(M, M^*)) = r$;
- $K(M, M^*)$ é um hipercubo.

Para o fazer, vamos dar uma outra definição, aparentemente mais forte do que a Definição 3.11 mas, na verdade, equivalente.

Definição 3.13. Um bloco M de $\text{rank } r$ é *fortemente redutível* se existe uma partição ordenada, $\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$, do seu conjunto de suporte tal que:

- $\{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ é um circuito de M ;
- para todo o k , $1 \leq k \leq r - 1$, $\{a_{2k-1}, a_{2k}\}$ é um circuito do bloco $M/\{a_{2k+1}, \dots, a_{2r}\}$.

Proposição 3.14. *As duas definições de redutibilidade forte são equivalentes.*

Prova – Começemos por notar que todo o matroide M que verifica esta segunda definição também verifica a primeira, para a mesma partição de $E(M)$, porque, se $\{a, b\}$ é um circuito de um matroide M então $M/a \setminus b = M/\{a, b\}$.

Para provar o recíproco, vamos usar indução em $r = \text{rank}(M)$. Se $\text{rank}(M) = 1$, o bloco M é um circuito com dois elementos e não há nada a provar. Suponhamos a proposição verdadeira para todo o bloco M tal que $1 \leq \text{rank}(M) < r$ e seja M um bloco de $\text{rank } r$ que satisfaz a

primeira definição de redutibilidade forte para uma certa partição ordenada de $E(M)$, $\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$.

Podemos admitir que $\{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ é um cocircuito de M ; caso contrário seria um circuito e a proposição decorreria da hipótese de indução aplicada a $M/a_{2r-1} \setminus a_{2r} = M/\{a_{2r-1}, a_{2r}\}$, bloco de *rank* $r - 1$.

Neste caso $\{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ também é um cocircuito do matroide $M' = M/(E \setminus \{a_{2r-1}, a_{2r}\})$. M' é de novo um bloco e $\text{rank}(M') = 1$, portanto $\{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ é um circuito de M' .

Por outro lado, usando a hipótese de indução para o matroide $M'' = M \setminus \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$, existe uma partição ordenada de $E(M) \setminus \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$, $\{a'_1, a'_2\}, \dots, \{a'_{2r-3}, a'_{2r-2}\}$, tal que M'' satisfaz a segunda definição de redutibilidade forte. Note-se que esta partição tem de ser uma reordenação da anterior porque, como partições não-ordenadas, ambas coincidem com a dada pela redutibilidade fraca.

Então $\{a'_{2r-3}, a'_{2r-2}\}$ é um circuito de M'' e portanto também é circuito de M .

Além disso, para todo o k , $1 \leq k \leq r - 2$, $\{a'_{2k-1}, a'_{2k}\}$ é circuito de $M''_k = M''/\{a'_{2k+1}, \dots, a'_{2r-2}\}$; como

$$\begin{aligned} M''_k &= M \setminus \{a_{2r-1}, a_{2r}\} / \{a'_{2k+1}, \dots, a'_{2r-2}\} = \\ &= M / \{a'_{2k+1}, \dots, a'_{2r-2}\} \setminus \{a_{2r-1}, a_{2r}\}, \end{aligned}$$

$\{a'_{2k-1}, a'_{2k}\}$ também é circuito de $M/\{a'_{2k+1}, \dots, a'_{2r-2}\}$.

Portanto M satisfaz a segunda definição de redutibilidade forte para a seguinte partição ordenada do seu conjunto-base:

$$\{a_{2r-1}, a_{2r}\}, \{a'_1, a'_2\}, \dots, \{a'_{2r-3}, a'_{2r-2}\}.$$

□

Como a noção de redutibilidade forte é auto-dual podemos obter uma terceira definição dualizando a segunda, i.e., trocando na segunda definição a palavra *circuito* pela palavra *cocircuito* e a operação $"/$ pela operação $" \setminus "$.

Estamos agora em condições de provar o Teorema 3.12 e para isso basta, como já observamos, provar que todo o bloco fracamente redutível é fortemente redutível, para uma certa ordem nos conjuntos da mesma partição:

Prova do Teorema 3.12 – Vamos fazer a prova por indução no *rank* do bloco; se $\text{rank}(M) = 1, 2$ a afirmação é óbvia e vamos supô-la verdadeira para todo o bloco M tal que $2 < \text{rank}(M) < r$.

Consideremos então um bloco M tal que $\text{rank}(M) = r$ e M é fracamente redutível, e seja $P = \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ a partição de $E(M)$ dada pela sua redutibilidade.

Comecemos por notar que $M/a_{2i-1} \setminus a_{2i}$ ainda é um bloco fracamente redutível, se $\{a_{2i-1}, a_{2i}\}$ é um dos conjuntos da partição. Na verdade, se B é base-cobase de $M/a_{2i-1} \setminus a_{2i}$ então $B + a_{2i-1}$ e $B + a_{2i}$ são bases-cobases de M , ou seja, $M/a_{2i-1} \setminus a_{2i}$ é fracamente redutível para a *partição induzida* por P em $E(M) \setminus \{a_{2i-1}, a_{2i}\}$:

$$\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2i-3}, a_{2i-2}\}, \{a_{2i+1}, a_{2i+2}\}, \dots, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}.$$

Assim, se algum dos conjuntos da partição de $E(M)$ fôr um circuito ou um cocircuito o teorema decorre da hipótese de indução.

Suponhamos, por absurdo, que nenhum dos conjuntos da partição é um circuito ou um cocircuito de M .

Por hipótese de indução os blocos de *rank* $r - 1$, $M' = M/a_{2r-1} \setminus a_{2r}$ e $M'' = M/a_{2r} \setminus a_{2r-1}$ são fortemente redutíveis, para uma certa ordem da partição induzida em $E(M) \setminus \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ pela partição P de $E(M)$.

Usando a segunda definição de bloco fortemente redutível para M' e a sua dual para M'' bem como a unicidade da partição (não-ordenada) podemos afirmar que um dos conjuntos da partição, $\{x, y\}$, é um circuito de M' e que um dos conjuntos da partição, $\{z, w\}$, é um cocircuito de M'' . Como, por hipótese, nenhum deles é circuito ou cocircuito de M , o conjunto $A = \{x, y, a_{2r-1}\}$ será um circuito e o conjunto $B = \{z, w, a_{2r-1}\}$ um cocircuito de M . Como $a_{2r-1} \in A \cap B$ e $|A \cap B| \neq 1$, os conjuntos $\{x, y\}$ e $\{z, w\}$ têm intersecção não-vazia e portanto, como ambos são elementos da partição, são iguais.

Ou seja, nestas condições, $B = A = \{x, y, a_{2r-1}\}$ é um circuito e um cocircuito de M .

Consideremos então o bloco $M_1 = M/x \setminus y$, fortemente redutível por hipótese de indução, e seja $\{b_1, b_2\}, \dots, \{b_{2r-3}, b_{2r-2}\}$ a partição ordenada de $E(M) \setminus \{x, y\}$ para a qual o matroide M_1 satisfaz a segunda definição.

Então $\{b_1, b_2, x\}$ e $\{b_{2r-3}, b_{2r-2}, x\}$ são circuitos de M e são distintos porque, $rank(M) > 2 \Rightarrow rank(M_1) \geq 2$ e, portanto, $\{b_1, b_2\}$ é diferente de $\{b_{2r-3}, b_{2r-2}\}$.

Como o matroide $M_2 = M_1/(E \setminus \{b_1, b_2, x, y\})$ é um bloco de *rank* 1 cujo conjunto de suporte é $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1, b_2\}$ é circuito e cocircuito em M_2 e, portanto, é também um cocircuito de M_1 .

Assim, sob a hipótese de nenhum conjunto da partição ser (circuito ou) cocircuito de M , $\{b_1, b_2, y\}$ será um cocircuito de M .

Chegamos a uma contradição já que, por um lado,

$$y \in \{x, y, a_{2r-1}\} \cap \{b_1, b_2, y\} \implies \{x, a_{2r-1}\} \cap \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$$

por outro lado,

$$x \in \{b_{2r-3}, b_{2r-2}, x\} \cap \{x, y, a_{2r-1}\} \implies \{b_{2r-3}, b_{2r-2}\} \cap \{y, a_{2r-1}\} \neq \emptyset$$

ou seja, $\{b_1, b_2\} \cap \{b_{2r-3}, b_{2r-2}\} \neq \emptyset$ e portanto o primeiro e o último conjuntos da partição P teriam de coincidir, contrariando $\text{rank}(M_1) \geq 2$. \square

Em blocos gráficos podemos estabelecer um critério mais imediato para determinar aqueles cujo politope das bases-cobases tem dimensão mínima — contar o número de vértices do politope, i.e., o número de bases-cobases do matroide:

Proposição 3.15. *Seja $M = M(G)$ um bloco gráfico e $r = \text{rank}(M)$; então:*

- $|\{\text{vértices de } K(M, M^*)\}| \geq 2^r$;
- $|\{\text{vértices de } K(M, M^*)\}| = 2^r$ se e só se $K(M, M^*)$ é um hipercubo.

Prova — Começemos por provar a primeira afirmação por indução em r .

Se $r = 1$, G é um ciclo com duas arestas e $M(G)$ tem 2 bases-cobases. Suponhamos então que a afirmação é verdadeira se $\text{rank}(M) < r$ e consideremos $M = M(G)$ um bloco gráfico de $\text{rank } r$.

Se G tem exactamente duas arestas incidentes nalgum dos seus vértices, seja $\{a, b\}$ o cocircuito que lhes corresponde em $M(G)$. Então

$$K(M, M^*) = K(N, N^*), \text{ onde } N = M \setminus \{a, b\} \oplus M^*(\{a, b\}),$$

e o número de bases-cobases de M é duas vezes o número de bases-cobases de $M \setminus \{a, b\}$, que, por hipótese de indução, é maior ou igual a 2^{r-1} .

Se G não tem nenhum vértice de grau dois então existe um cocircuito com três elementos em $M(G)$, $\{a, b, c\}$. Seja B uma qualquer base-cobase de M . Sem perda de generalidade (ver prova do Teorema 3.8), podemos supor que $B \cap \{a, b, c\} = \{b, c\}$ e que $b \in Cf(B, a)$ (i.e. $B - b + a$ é base-cobase de M). Assim os matroides $M' = M/b \setminus a$ e $M'' = M \setminus b/a$ são blocos de $\text{rank } r - 1$ e, por hipótese de indução, têm mais de 2^{r-1} bases-cobases.

Seja B_0 uma qualquer base de M' [resp. M'']. Repetindo o argumento usado na prova do Teorema 1.9, podemos afirmar que: se $c \in B_0$ então $B_0 + b$ [resp. $B_0 + a$] é uma base-cobase de M ; se $c \notin B_0$ então $B_0 + a$ [resp. $B_0 + b$] é uma base-cobase de M . Portanto, M tem mais de $2^{r-1} + 2^{r-1} = 2^r$ bases-cobases.

Note-se que, no caso de M ter exactamente 2^r bases-cobases, e usando o argumento anterior, podemos afirmar que todas elas ou têm a como elemento ou têm b e não ambos. I.e., $K(M, M^*) = K(N_1, N_1^*)$ onde N_1 é a soma directa do bloco (gráfico) $M/a \setminus b$ e do bloco (gráfico) de $\text{rank } 1$ cujo conjunto-base é $\{a, b\}$.

Assim, usando de novo indução no rank (os casos de $\text{rank}(M) = 1, 2$ são imediatos) podemos supor a equivalência válida para todo o bloco gráfico de rank menor que r .

Se M tem 2^r vértices, então $M/a \setminus b$ tem 2^{r-1} e, por hipótese de indução, o seu politopo é um hipercubo, na verdade, um $(r-1)$ -cubo pela Proposição 3.9. Como $K(M, M^*)$ é $K(N_1, N_1^*)$ tem de ser um r -cubo. O recíproco, é consequência imediata da Proposição 3.9. \square

3.3.2. Politopo das bases de um bloco redutível

Sendo o politopo das bases-cobases de um bloco redutível completamente caracterizado é natural perguntar como são os politopos das bases destes matroides. Uma primeira resposta é consequência, quase imediata, do que aqui já foi dito:

Proposição 3.16. *Se M é um bloco redutível e $\text{rank}(M) = r$ então uma r -face de $K(M)$ é um hipercubo.*

Prova – Como já referimos, para todo o matroide M e todo o subconjunto A do seu conjunto-base, $E(M)$, o politopo $K(M(A) \oplus M/A)$ é uma face de $K(M)$.

Seja $\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{2r-3}, a_{2r-2}\}, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}$ a partição ordenada de $E(M)$ associada, pela segunda definição, à sua redutibilidade forte. Então $K(M(\{a_{2r-1}, a_{2r}\}) \oplus M/\{a_{2r-1}, a_{2r}\})$ é face de $K(M)$ e $M(\{a_{2r-1}, a_{2r}\})$ é um bloco de rank 1; de novo:

- $\{a_{2r-3}, a_{2r-2}\}$ é circuito do matroide $M' = M/\{a_{2r-1}, a_{2r}\}$;
- o politopo $K(M'(\{a_{2r-3}, a_{2r-2}\}) \oplus M'/\{a_{2r-3}, a_{2r-2}\})$ é face de $K(M')$;
- $(M'(\{a_{2r-3}, a_{2r-2}\}))$ é um bloco de rank 1;

Repetindo este processo para os consecutivos conjuntos da partição e os consecutivos blocos conclui-se que o politopo $K(N)$ é face de $K(M)$, onde $N = N_1(a_1, a_2) \oplus \dots \oplus N_r(a_{2r-1}, a_{2r})$ e, para todo i , $1 \leq i \leq r$, N_i é um bloco de rank 1, portanto $K(N)$ é um r -cubo. \square

A propósito desta proposição podem ser formuladas duas perguntas pertinentes:

- Se o seu recíproco é verdadeiro.
- Se no politopo das bases de um bloco de rank r várias r -faces podem ser hipercubos.

Para dar resposta a estas questões, no caso do matroide ser binário vamos utilizar um resultado sobre *morfismos fracos* definidos num matroide binário. Começamos por fazer um curto resumo das noções utilizadas; nos capítulos 8 e 9 do livro de White [99] é feita a exposição das definições e dos resultados mais importantes sobre morfismos de matroides.

Morfismos fracos

Para a pergunta – quais são os morfismos na categoria dos matroides? – há duas respostas razoáveis e usuais:

- Os chamados *morfismos fortes* são a abstracção combinatória da noção de transformação linear, definidos por a imagem recíproca de um fechado ser um fechado.
- Os *morfismos fracos* cuja ideia geométrica subjacente é a de pontos em posição mais ou menos geral num espaço vectorial.

A qualquer morfismo fraco entre dois matroides, $M(E)$ e $N(F)$, está associado um morfismo fraco equivalente entre dois matroides sobre o mesmo conjunto de suporte (obtido por troca dos nomes dos elementos de um dos conjuntos de suporte):

Definição 3.17. Sejam M e N dois matroides definidos no mesmo conjunto E ; a aplicação $id : E \rightarrow E$ é um *morfismo fraco* de M em N se todo o subconjunto A de E independente em N também é independente em M .

Quer dizer que os elementos de E estão em posição mais geral em M do que em N e, em particular, $rank_M(A) \geq rank_N(A)$, para todo o subconjunto A de E .

Têm particular interesse para a caracterização dos morfismos fracos aqueles que *preservam rank* – diz-se que existe um *morfismo fraco entre $M(E)$ e $N(E)$ que preserva rank* (e usa-se a notação $M \xrightarrow{pr} N$) se a $id : E \rightarrow E$ é um morfismo fraco de M em N e $rank(M) = rank(N)$.

Assim, $M \xrightarrow{pr} N$ se e só se todas as bases de N são bases de M .

Pode-se definir uma ordem parcial nos matroides sobre o mesmo conjunto e do mesmo *rank*, por: $M \geq N$ se e só se existe $M \xrightarrow{pr} N$. Diz-se que um morfismo fraco entre M e N é *simplex* se M cobre N nesta ordem. É claro que qualquer morfismo fraco se pode escrever como uma composição de morfismos fracos simples.

Lucas em [74] fez uma descrição completa dos morfismos fracos simples entre matroides binários.

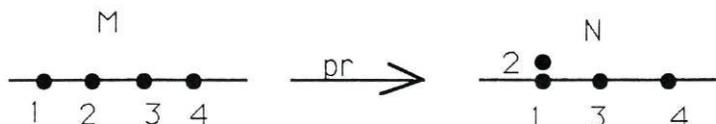
Teorema 3.18. ([74], Teorema 6.17) *Se M é um matroide binário e $M \xrightarrow{pr} N$ então existe $A \subseteq E(M)$ tal que $N = M(A) \oplus M/A$. Mais, se o morfismo for simplex N tem mais uma componente conexa do que M .*

Assim, no caso de M ser matroide binário, para cada matroide N tal que $\text{rank}(N) = \text{rank}(M)$ e $N < M$ na ordem fraca, $K(N)$ é face de $K(M)$; e se $N \ll M$ essa face é de codimensão 1.

Por outro lado, para qualquer M , a uma face de $K(M)$ corresponde um matroide N cujas bases são os vértices dessa face, ou seja, corresponde um matroide N do mesmo rank que M mas com menos bases, i.e., N tal que $M \xrightarrow{pr} N$.

Então, num matroide binário existe uma correspondência bijectiva entre as faces do seu politope das bases e os morfismos fracos definidos no matroide e que preservam rank .

Para matroides não-binários isto não acontece:



$K(N)$ = pirâmide quadrangular, não é face de $K(M)$ = octaedro

O teorema seguinte é um dos resultados obtidos por Lucas na caracterização dos mapas fracos:

Teorema 3.19. ([74], Teorema 6.16) *Seja M um matroide binário, E o seu conjunto de suporte e $M \xrightarrow{pr} N$. Então existe uma componente conexa $C \subseteq E$ do matroide N tal que os matroides M e N coincidem em C , i.e. $M(C) = N(C)$.*

Também é observado por Lucas que este resultado não é válido para matroides não binários, dando como exemplo o morfismo fraco, $M \xrightarrow{pr} N$, entre os matroides $M = U_{4,2}$ e $N = N_1 \oplus N_2$, onde N_1 e N_2 são ambos blocos de rank 1.

Voltando às questões sobre o politope das bases de um bloco podemos então afirmar o seguinte:

Teorema 3.20. *Seja M um bloco binário e $\text{rank}(M) = r$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

- 1 M é redutível.

2 $K(M)$ tem uma r -face que é um hipercubo.

3 $M \xrightarrow{pr} N$ onde o matroide N é soma directa de r pares de elementos paralelos.

Prova (1 \Rightarrow 2) Foi provado atrás;

(2 \Rightarrow 3) Basta tomar para N o matroide definido no mesmo conjunto suporte que M cujas bases são as bases de M que são vértices da face que é um r -cubo;

(3 \Rightarrow 1) Como M é binário e as componentes conexas de N são os pares de elementos paralelos, usando o teorema de Lucas acima referido podemos afirmar que $M(\{a, b\}) = N(\{a, b\})$ para algum desses pares. I. e., $\{a, b\}$ é um circuito de M .

Então, como $M/\{a, b\}$ continua a ser um matroide binário e é claro que $M/\{a, b\} \xrightarrow{rp} N/\{a, b\}$, usando indução no *rank* conclui-se que $M/\{a, b\}$ é fortemente redutível.

$M/\{a, b\}$ fortemente redutível e $\{a, b\}$ circuito de M garantem M fortemente redutível. \square

Como consequência deste teorema e da unicidade da partição do conjunto de suporte de um matroide redutível obtemos:

Corolário 3.21. *Se M é um bloco binário de rank r e alguma r -face de $K(M)$ é um hipercubo, ela é única.*

Fica em aberto a resposta à pergunta óbvia – Será esta último resultado válido para qualquer bloco?

3.4. Apêndice

3.4.1. Caracterização de Maurer do grafo das bases

Definição 3.22. Diz-se que um grafo $G = (V, A)$ é bem etiquetado se todo o vertice $v \in V$ pode ser etiquetado por subconjuntos B_v de um conjunto finito, E , de tal modo que

$$(v, v') \in A \iff (|B_v \setminus B_{v'}| = 1 \text{ e } |B_{v'} \setminus B_v| = 1).$$

Note-se que:

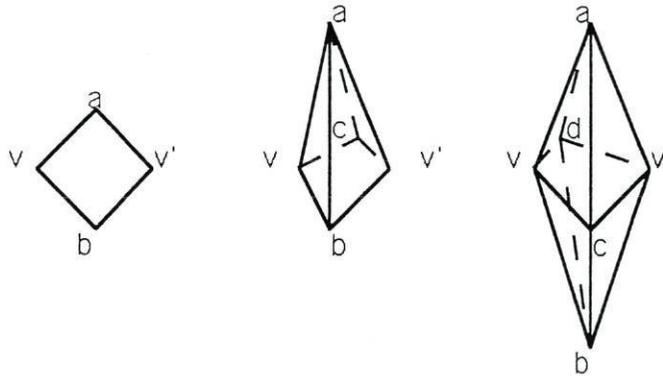
- Decorre da definição que, sendo $G = (V, A)$ bem etiquetado e v, v' vertices de G então $|B_v| = |B_{v'}|$ e que, se $\mathcal{B} = \{B_v : v \in V\}$ é o conjunto das bases de um matroide então G é o seu grafo das bases.

Definição 3.23. Seja $G = (V, A)$ um grafo sem lacetes nem elementos paralelos e $v, v' \in V$ tais que $d(v, v') = 2$, onde $d(v, v')$, a distância de v a v' , é o número de arestas de um caminho minimal ligando v a v' .

Chama-se *grafo das vizinhanças comuns a v e v'* , $VC(v, v')$, ao grafo induzido por G no conjunto de vértices $V' = \{u \in V : d(u, v) \leq 1 \text{ e } d(u, v') \leq 1\}$.

Teorema 3.24. ([77], Teorema 2.2) *Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo e bem etiquetado por uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de um conjunto finito E .*

$M = (E, \mathcal{B})$ é um matroide (e $G = G(M)$) se e só se, para todo o par de vértices $v, v' \in V$, o seu grafo das vizinhanças comuns, $VC(v, v')$, é um quadrado, uma pirâmide quadrangular ou um octaedro.



$VC(v, v')$ no grafo de bases de um matroide

Definição 3.25. Um *nivelamento* do grafo $G = (V, A)$ a partir do vértice v_0 é uma partição do conjunto dos vértices, V , em subconjuntos V_k , $k = 1, 2, \dots, n$, tais que: $V_k = \{v \in V : d(v_0, v) = k\}$.

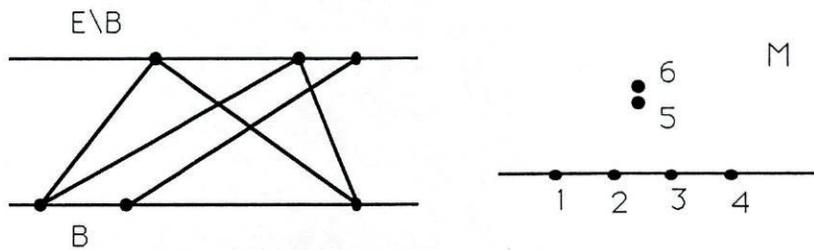
Se G está nivelado a partir de v_0 , chama-se *grafo dos vizinhos de v_0* , $N(v_0)$, ao grafo induzido por G em V_1 .

Lema 3.26. ([77], Lema 1.6) *Se $G = (V, A)$ é o grafo das bases de um matroide e VC um grafo de vizinhanças comuns octaedral contido em G , então verifica-se uma das seguintes condições:*

- para algum k , VC está contido em V_k , i.e., todos os vértices do octaedro distam o mesmo de v_0 ;
- VC atravessa dois níveis, V_j e V_{j+1} , i.e. três vértices do octaedro estão à distância j de v_0 e os outros três à distância $j + 1$;
- VC atravessa três níveis.

Esta condição de posição também é satisfeita pelos outros dois grafos VC quando considerados como subgrafos do octaedro.

Lema 3.27. ([77], Lema 1.8) *Se $G = (V, A)$ é o grafo das bases de um matroide e $v_0 \in V$ então o grafo dos vizinhos de v_0 , $N(v_0)$, é o grafo das arestas de um grafo bipartido BG . I.e, os vertices de $N(v_0)$ estão em correspondência bijectiva com as arestas de BG e dois vertices de $N(v_0)$ estão ligados por uma aresta se e só se as correspondentes arestas de BG têm um vértice comum.*



Grafo das arestas de $N(\{1, 2, 4\})$ no grafo de bases de M

Teorema 3.28. ([77], Teorema 2.1) *Seja $G = (V, A)$ um grafo.*

G é o grafo das bases de um matroide se e só se:

- G é conexo;
- para todo o par de vertices $v, v' \in V$, o seu grafo das vizinhanças comuns, $VC(v, v')$, é um quadrado, uma pirâmide quadrangular ou um octaedro;
- para todo o $v_0 \in V$ os grafos de vizinhanças comuns satisfazem a condição de posição;
- para todo o $v_0 \in V$ o grafo dos seus vizinhos, $N(v_0)$ é o grafo das arestas de um grafo bipartido.

3.4.2. Grafos série-paralelos

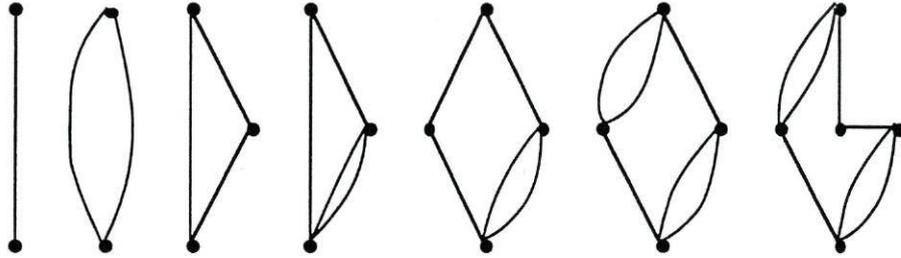
Em circuitos eléctricos são fundamentais as operações de junção de componentes em série e em paralelo. Os grafos que vamos definir são característicos deste tipo de redes eléctricas; o leitor interessado pode recorrer ao sexto capítulo de [99] e às suas referências.

Definição 3.29. Um grafo $\Gamma = (V, A)$ sem vértices isolados é *série-paralelo* se pode ser obtido de um lacete ou de um istmo por uma sucessão de *extensões em série e em paralelo*.

Γ_1 é uma *extensão em paralelo* de Γ_0 se existe um ciclo com dois elementos em Γ_1 , $\{a, b\}$, tal que $\Gamma_1 \setminus b = \Gamma_0$.

Γ_1 é uma *extensão em série* de Γ_0 se existe um cociclo com dois elementos em Γ_1 , $\{a, b\}$, tal que $\Gamma_1/b = \Gamma_0$.

Na figura abaixo, está representada uma sucessão de extensões alternadamente em paralelo e em série de um istmo.



Do mesmo modo que o Teorema de Kuratowski caracteriza os grafos planares, o teorema seguinte dá uma caracterização do tipo *subgrafo excluído* dos grafos série-paralelos:

Teorema 3.30. ([16],[38],[39]) *Um grafo Γ com, pelo menos, uma aresta é série-paralelo se e só se o matroide por ele definido, $M(\Gamma)$ é conexo e Γ não tem qualquer subgrafo isomorfo a K_4 .*

Lema 3.31. *Seja Γ um grafo série-paralelo tal que o matroide por ele definido, $M(\Gamma)$, é um bloco. Então, para todo o par, (B, B') de bases-cobases de $M(\Gamma)$ existe um caminho de comprimento $\text{rank}(M) - |B \cap B'|$ ligando os vértices que lhes correspondem no grafo das bases-cobases.*

Prova Para fazer a prova por indução no *rank* de $M(\Gamma)$ e como para $\text{rank}(M(\Gamma)) = 1$ o resultado é óbvio, suponhamos o resultado verdadeiro se $\text{rank}(M(\Gamma)) < r$ e consideremos um grafo série-paralelo Γ tal que $M(\Gamma)$ é um bloco de *rank* r .

Então, sejam B e B' duas bases-cobases de $M(\Gamma)$ e seja $|B \cap B'| = s > 0$ (se $s = 0$ o lema é um caso particular do Teorema 3.8). Quer o grafo Γ tenha sido obtido por uma extensão em série quer por uma em paralelo, i.e., quer exista um cocircuito quer um circuito com dois elementos, $\{a, b\}$, em $M(\Gamma)$, só pode acontecer uma de duas hipóteses:

- 1 Um destes elementos está em ambas as bases e o outro em nenhuma delas, e.g., $a \in B \cap B'$ e $b \notin B \cup B'$.
- 2 Cada um destes elementos está numa das bases, e.g., $a \in B$ e $b \in B'$.

Suponhamos então que $\{a, b\}$ é um cocircuito de $M(\Gamma)$.

- Na primeira hipótese $B_1 = B - a$ e $B'_1 = B' - a$ são bases-cobases do bloco série-paralelo $M_1 = M/a \setminus b$ de *rank* $r - 1$. Usando a hipótese de indução, sabemos que existe um caminho ligando estas bases em $G(M_1, M_1^*)$ de comprimento $(r-1) - |B_1 \cap B'_1| = (r-1) - (s-1) = r-s$. Como, para toda a base-cobase D nesse caminho $D + a$ é base-cobase de M , construo o caminho em $G(M, M^*)$ usando exactamente as bases $D + a$.
- Na segunda hipótese $B_1 = B - a$ e $B'_1 = B' - b$ são bases-cobases do bloco série-paralelo $M_1 = M/a \setminus b$ de *rank* $r - 1$. Usando a hipótese de indução, sabemos que existe um caminho ligando estas bases em $G(M_1, M_1^*)$ de comprimento $(r-1) - |B_1 \cap B'_1| = (r-1) - s = r-s-1$. Construo o caminho em $G(M, M^*)$ usando as bases-cobases $D + a$ e acrescento-lhe um ultimo passo que permite, trocando o elemento a pelo b , chegar a B' .

No caso de $\{a, b\}$ ser um circuito de $M(\Gamma)$ a prova é análoga. \square

"... I would like to survey the somewhat related field of *arrangements of hyperplanes*, which I expect to become increasingly popular during the next few years... the theory of arrangements may be developed, much like topology, in rectilinear or curved versions as well as in discrete and continuous variants, and that in these developements it impinges upon many aspects of convexity, topology, and geometry which seem to be quite unrelated." B. Grünbaum, [57].

4. Matroides orientados e arranjos de hiperplanos

4.1. Introdução

Um *arranjo de hiperplanos*, $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\}$, é um conjunto finito de subespaços afins de codimensão 1 de um espaço vectorial de dimensão finita. \mathcal{H} é um *arranjo central* se todos os hiperplanos contêm a origem.

Se $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\}$ é um arranjo central de hiperplanos em \mathbb{R}^d , o *complexificado* de \mathcal{H} é o arranjo complexo $\mathcal{H}^{\mathbb{C}} = \{H_1^{\mathbb{C}}, \dots, H_n^{\mathbb{C}}\}$ definido em \mathbb{C}^d pelas mesmas equações que \mathcal{H} , i.e., $H_i^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes H_i$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Recentemente, os arranjos de hiperplanos têm sido estudados sob variados pontos de vista: do da topologia algébrica, da geometria diferencial, da teoria invariante, etc. (ver, e.g., [57], [58], [84], [85], [103] e as suas referências), criando ligações entre ramos diversos da matemática e evidenciando, em alguns dos resultados obtidos, como a estrutura combinatoria subjacente influencia a estrutura algébrica, topológica e geométrica.

Em 1972, Deligne [37] resolve uma importante conjectura de Brieskorn – determina o tipo de homotopia do complemento em \mathbb{C}^d do complexificado de um arranjo real de hiperplanos \mathcal{H} , $Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H^{\mathbb{C}}$, para o caso de todas as *regiões* determinadas pelo arranjo (componentes conexas de $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$) serem *cones simpliciais abertos*.

Em 1975 Zaslavsky [102] deduz fórmulas de contagem das células maximais determinadas por um arranjo real de hiperplanos que só dependem do seu *reticulado de intersecções*, i.e., do matroide associado ao arranjo, $M_{\mathcal{H}}$. Este resultado é um caso particular (*coordenável*) de um teorema provado independentemente por Las Vergnas para *matroides orientados* em 1974 ([71], Prop.8.1).

Em 1987 Salvetti [90] conjectura que, em geral, o tipo de homotopia da variedade $Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})$, só depende do *reticulado das intersecções* da parte real. Ele constroi um *CW-complexo regular*, $\Delta_{Sal}(Y)$, homotopicamente equivalente a $Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})$ e, utilizando-o, determina o tipo de homotopia de $Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})$ no caso dos hiperplanos estarem *em posição geral*. Obtém ainda uma boa

apresentação do seu grupo fundamental e sublinha que para a obter é essencial o seguinte resultado, utilizado por Deligne no caso particular dos arranjos simpliciais:

Dois quaisquer caminhos minimais e positivos em $Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})$ com as mesmas extremidades são homotópicos.

Vamos mostrar que este resultado é generalizável a uma estrutura combinatória mais fina que a de matroide, *os matroides orientados*, e da qual os arranjos reais de hiperplanos podem ser vistos como um caso particular, o caso *ordenável*.

Esta generalização foi usada em [28] para dar uma apresentação do grupo fundamental do complexo de Salvetti associado a um matroide orientado.

Posteriormente, vários trabalhos procuram saber que propriedades (topológicas) de $Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})$ ficam determinadas pelo matroide orientado definido por \mathcal{H} , veja-se [7], [8] e [83]. Em particular, Cordovil em [23] generalizou o principal resultado de Deligne do artigo atrás referido, mostrando que o complexo de Salvetti associado a um matroide orientado simplicial é um espaço $K(\pi, 1)$ e determinou o centro do seu grupo fundamental, [24].

A exposição feita neste capítulo desenvolve-se do seguinte modo:

Começamos por associar a um arranjo de hiperplanos um matroide (ordenável) que traduz a sua estrutura unicamente combinatória.

Depois, definimos *matroide orientado* de modo a salientar o facto de esta estrutura poder ser encarada como uma generalização dos arranjos de hiperplanos; damos ainda algumas definições úteis e fazemos um resumo de alguns resultados básicos.

Em seguida descrevemos duas estruturas ordenadas directamente relacionadas, o *reticulado dos covectores* e o *reticulado das faces* do matroide orientado. O primeiro traduz a decomposição celular do espaço vectorial induzida pelo arranjo de hiperplanos e generaliza-a para um matroide orientado qualquer. O segundo, permite olhar para um matroide orientado (*acíclico*) como uma estrutura mais geral do que os politopes convexos. Damos particular atenção às faces de dimensão 1 e 2 e aos intervalos correspondentes no reticulado dos covectores porque vão ser utilizados na provas do resultado.

Aparentando ambos ser estruturas puramente algébricas são, no entanto, estes dois reticulados quem fornece, via o teorema de representação de Folkman-Lawrence, grande parte da intuição geométrica em matroides orientados. O aspecto geométrico foi salientado ao longo de todo o capítulo.

Finalmente, e para poder chegar ao resultado que queremos provar, falamos dos *covectores maximais ou topes*, i.e., das células de dimensão

máxima da decomposição celular determinada por um matroide orientado. Considerando ligadas duas *células adjacentes* definimos *caminhos minimais ou galerias* ligando topos e damos uma noção de *equivalência de caminhos* que, além de ser generalização da definição de Deligne, é também uma definição natural em matroides orientados.

Depois da prova do teorema fazemos, no final do capítulo, um curto resumo da construção do CW-complexo associado a um matroide orientado, $\Delta_{Sal}(\mathcal{M})$, da apresentação do seu grupo fundamental e ainda um exemplo de aplicação.

Escrevemos também um apêndice com algumas definições e resultados utilizados no texto para que este não ficasse sobrecarregado e ao mesmo tempo não fosse necessário recorrer à bibliografia para esclarecer alguns conceitos paralelos ao aqui versado. Este apêndice está subdividido em secções curtas para facilitar a consulta.

4.2. Matroide associado a um arranjo de hiperplanos

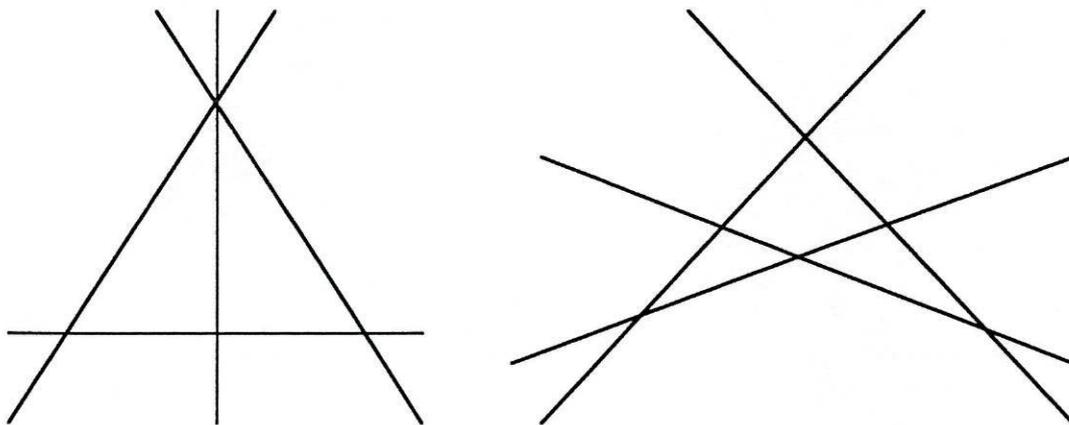


Figura 1

Na figura estão representados dois arranjos de rectas, no exemplo da esquerda todas as regiões limitadas definidas pelas rectas são triangulares e no da direita as rectas estão em posição geral, i.e., não há três rectas a passar no mesmo ponto; este tipo de informação transparece na estrutura de matroide associada a um arranjo.

Vamos passar a considerar arranjos centrais referindo, quando necessário, o caso geral.

Os exemplos da figura podem ser vistos como a intersecção com o plano $z = 1$ do arranjo central em \mathbb{R}^3 cujos elementos são os subespaços (vectoriais) de dimensão 2 gerados pelas rectas. Vista assim, a figura da esquerda

representa um arranjo central de planos, \mathcal{H}_s , em que todas as componentes conexas do complementar são cones sobre um 2-simplexo e a da direita, um arranjo central, \mathcal{H}_g , em que os planos se intersectam dois a dois em rectas todas distintas.

A estrutura de matroide associada a qualquer arranjo central \mathcal{H} é determinada pelo modo como os seus elementos se intersectam:

O matroide associado ao arranjo central $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\}$, notado $M_{\mathcal{H}}$, é o matroide linear definido por uma colecção de vectores de \mathbb{K}^d ortogonais aos hiperplanos de \mathcal{H} :

$$M(\mathcal{H}) = M_{Lin}(\{u_1, \dots, u_n\}) \text{ onde } u_i \perp H_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Vejamos que o reticulado dos fechados deste matroide, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ é isomorfo ao *reticulado das intersecções*, $\mathcal{R}(\mathcal{H})$:

Seja $\mathcal{R}(\mathcal{H}) = \{L_X = \bigcap_{H \in X} H : X \subseteq \mathcal{H}\}$ parcialmente ordenado por inclusão inversa:

$$\forall L, L' \in \mathcal{R}(\mathcal{H}), L \leq_{\mathcal{R}} L' \iff L' \subseteq L$$

É claro que o espaço vectorial V e o subespaço $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ são, respectivamente, o elemento minimal e maximal deste conjunto parcialmente ordenado e que, para quaisquer L e L' de $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, a sua intersecção cobre ambos, i.e., o supremo $L \vee L' = L \cap L'$. Isto faz de $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ um reticulado onde o ínfimo de dois quaisquer elementos é dado por

$$L \wedge L' = \bigcap_{\substack{H \in \mathcal{H} \\ H \supseteq L \cup L'}} H.$$

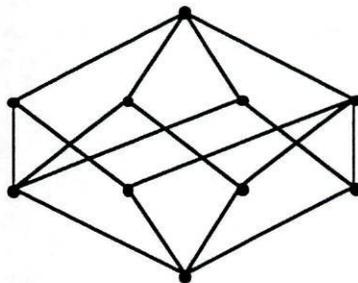
A altura de um qualquer elemento $L \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$ é $h(L) = d - \dim(L)$.

Como ambos os reticulados $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ e $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ são atómicos para ver que eles coincidem e fazendo a correspondência óbvia entre os átomos $H_i \leftrightarrow u_i$ basta notar que:

$$\begin{aligned} H_k \leq_{\mathcal{R}} (H_i \vee_{\mathcal{R}} H_j) &\iff H_k \supseteq (H_i \vee_{\mathcal{R}} H_j) \iff H_i \cap H_j = H_i \cap H_j \cap H_k \iff \\ &\iff \forall x \in V (\langle x, u_i \rangle = \langle x, u_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, u_k \rangle = 0) \iff \\ &\iff u_k = \alpha u_i + \beta u_j, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \iff u_k \in (u_i \vee_{\mathcal{F}} u_j) \iff u_k \leq_{\mathcal{F}} (u_i \vee_{\mathcal{F}} u_j). \end{aligned}$$

Então, é claro que o matroide associado ao arranjo de planos \mathcal{H}_g é o matroide uniforme $U_{4,3}$.

Na figura seguinte está representado o reticulado dos fechados do matroide associado ao arranjo central de planos \mathcal{H}_s .

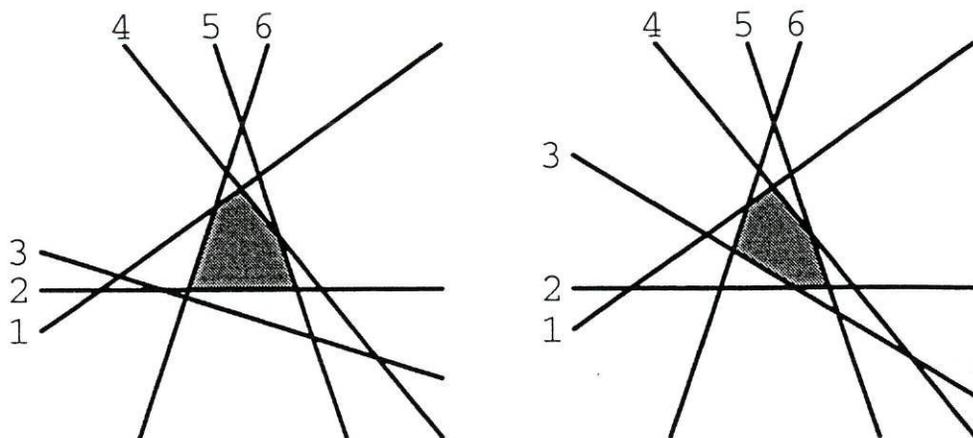


Dizem-se *simpliciais* todos os arranjos centrais em \mathbb{K}^d que, como \mathcal{H}_s , verificam a propriedade de todas as regiões de dimensão d determinadas pelo arranjo serem cones sobre um $(d - 1)$ - *simplexo*. Esta é uma das propriedades de um arranjo \mathcal{H} que só depende do seu reticulado $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, i.e., do matroide associado [103].

Um outro exemplo de uma propriedade deste tipo é o facto do arranjo central ser, como \mathcal{H}_g , *genérico*, i.e., ser um cone sobre um arranjo em posição geral. Neste caso, o matroide associado ao arranjo é uniforme.

No entanto, o matroide $M_{\mathcal{H}}$ não distingue os arranjos de planos, \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , representados pela figura seguinte. Eles têm o mesmo reticulado de intersecções, $M_{\mathcal{H}_1} = M_{\mathcal{H}_2} = U_3^6$, mas podem ser distinguidos por uma propriedade combinatoria simples: uma das regiões maximais determinadas por \mathcal{H}_1 é um cone hexagonal (com o maior número possível de faces) e em \mathcal{H}_2 , todas as regiões maximais têm um menor número de faces.

Só com o matroide do arranjo não é possível saber se a recta 3 está "acima" ou "abaixo" da intersecção da rectas 6 com a recta 2, por exemplo. A estrutura de *matroide orientado*, que veremos poder ser naturalmente associada a um arranjo real e, em particular, o seu *reticulado dos covectores*, permite distinguir estes dois arranjos.



Sendo o complexificado de um arranjo real de hiperplanos, \mathcal{H} , em \mathbb{R}^d , a família de hiperplanos de \mathbb{C}^d , $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$, dada pelas soluções complexas das mesmas equações cujas soluções reais definem \mathcal{H} , é claro que os dois arranjos têm o mesmo reticulado de intersecções, i.e., $M_{\mathcal{H}^{\mathbb{C}}} = M_{\mathcal{H}}$.

Além disso, algumas propriedades importantes de $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$ só dependem de $M_{\mathcal{H}}$; Orlik e Solomon [84] provaram que isso acontece com a cohomologia do seu complementar em \mathbb{C}^d , $Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H^{\mathbb{C}}$. Foi provado por Randell [87] e Salvetti [90] que o número de geradores e de relações do grupo fundamental de $Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H^{\mathbb{C}}$ é outra propriedade de \mathcal{H} nestas condições, resultado que motivou a conjectura de Salvetti referida na introdução.

É importante ainda notar que os complexificados dos arranjos reais são um subconjunto estrito dos arranjos de hiperplanos complexos. Como veremos, ao associar um matroide orientado a um arranjo real joga um papel importante o facto de \mathbb{R} ser um corpo ordenado. Os arranjos complexos não têm, em geral, um matroide orientado naturalmente associado e há exemplo de matroides (não-orientados) coordenáveis em \mathbb{C} , i.e., matroides associados a arranjos de hiperplanos complexos, que não são coordenáveis em \mathbb{R} e, portanto, não correspondem a qualquer arranjo real (ver em [9], ex.6.6.2, exemplo de um matroide, o *matroide de MacLane*, com 8 pontos, representável em \mathbb{C} mas não em \mathbb{R} , apesar de qualquer seu menor o ser).

4.3. Matroide orientado

Os matroides orientados podem ser vistos como uma generalização combinatorial dos arranjos centrais de hiperplanos.

Um arranjo de hiperplanos em \mathbb{R}^d define uma decomposição celular deste espaço à qual é naturalmente associável um matroide orientado coordenável. Se dermos alguma liberdade aos hiperplanos, permitindo-lhes serem antes imagens homeomorfas "bem comportadas" de hiperplanos de \mathbb{R}^d cujas intersecções são também "bem comportadas", obteremos *arranjos de pseudo-hiperplanos* com os quais é possível obter uma representação de qualquer matroide orientado. É, grosso-modo, esta a ideia do *teorema de representação* de Folkman e Lawrence [50] que referiremos com mais precisão depois de definirmos matroide orientado.

Seja então $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\}$ um arranjo central no espaço vectorial real $V = \mathbb{R}^d$ onde $H_i = \{x \in V : \langle x, u_i \rangle = 0\}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

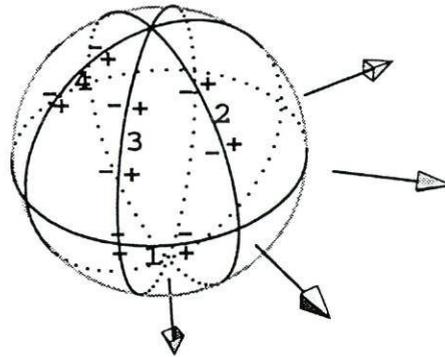
Consideremos o conjunto $E = \{1, \dots, n\}$ e a função :

$$\text{signal} : V \rightarrow \{-, 0, +\}^E$$

definida por

$$\text{signal}(x) = ((\text{signal}(x))_i)_{i \in E} = (\text{signal}(\langle x, u_i \rangle))_{i \in E}, \quad \forall x \in V.$$

Assim, $(\text{signal}(x))_i = (\text{signal}(y))_i = +$ se e só se os pontos x e y estão no mesmo "lado" de H_i , i.e., estão no mesmo semi-espaço aberto definido por H_i , $H_i^+ = \{x \in V : \langle x, u_i \rangle > 0\}$. Portanto esta função define a localização de cada ponto do espaço vectorial relativamente ao arranjo de hiperplanos, i.e., dois pontos de V têm a mesma imagem se e só se estão na mesma *célula* da decomposição celular de V definida por \mathcal{H} . O fecho de cada célula é um conjunto $\{x \in V : \langle x, v_i \rangle \leq 0, i \in E\}$, onde $v_i = \pm u_i, \forall i \in E$, ou seja, é um cone poliedral.



Na figura está representada a intersecção com a esfera do arranjo central de quatro planos em \mathbb{R}^3 , \mathcal{H}_s .

É claro que a restrição da função sinal à esfera vai ter como imagem o mesmo conjunto de vectores de $\{-, 0, +\}^E$, exceptuado o vector $(0, 0, 0, 0)$.

A imagem da função *sinal* traduz a decomposição celular de \mathbb{R}^3 determinada por \mathcal{H}_s e determina o *matroide orientado* associado a este arranjo, $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{\mathcal{H}_s}$.

Veremos que ela é o conjunto dos *covectores* do *matroide orientado coordenável*, $\mathcal{M}_{lin}(u_1, \dots, u_4)$, definido pelos sinais das dependências lineares dos vectores ortogonais aos hiperplanos, representados na figura. A imagem pela função *sinal* das doze componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}_s} H$ é o conjunto dos *covectores maximais* ou *topes* do mesmo *matroide orientado*.

4.3.1. Definição de matroide orientado

Consideremos um conjunto finito E , $|E| = n$.

Se X e Y são *subconjuntos sinalizados de E* , i.e., elementos de $\{+, 0, -\}^E$ chama-se:

- *suporte de X* ao conjunto $\underline{X} = \{e \in E : X_e \neq 0\}$;

-

$$X^+ = \{e \in E : X_e = +\}$$

$$X^- = \{e \in E : X_e = -\}$$

$$X^0 = \{e \in E : X_e = 0\}$$

- se $A \subseteq E$, $\overline{A}X$ é o conjunto sinalizado que se obtém trocando os sinais das coordenadas indexadas por elementos de A , i.e.:

$$\overline{A}X^+ = (X^+ \setminus A) \cup (X^- \cap A), \quad \overline{A}X^- = (X^- \setminus A) \cup (X^+ \cap A).$$

- *oposto* de X é o conjunto sinalizado $-X = \overline{E}X$;
- para quaisquer X, Y define-se a *composição* ou *união conforme* $X \circ Y$ por

$$\begin{aligned} (X \circ Y)_e &= X_e & \text{se } X_e \neq 0 \\ (X \circ Y)_e &= Y_e & \text{se } X_e = 0 \end{aligned}$$

Note-se que esta operação é associativa mas não é comutativa.

$X \circ Y = Y \circ X$ se e só se X e Y são *conformes*, i.e., se o conjunto $S(X, Y) = \{e \in E : X_e = -Y_e \neq 0\}$, dito *conjunto separador* de X e Y , for vazio.

Definição 4.1. Um *matroide orientado*, \mathcal{M} , é um par (E, \mathcal{V}^*) , onde E é um conjunto finito e \mathcal{V}^* é um subconjunto de $\{+, 0, -\}^E$ que verifica:

- \mathcal{V}^*_1 - $0 \in \mathcal{V}^*$ ($0_e = 0, \forall e \in E$);
- \mathcal{V}^*_2 - $\mathcal{V}^* = -\mathcal{V}^*$;
- \mathcal{V}^*_3 - \mathcal{V}^* é fechado para a composição ;
- \mathcal{V}^*_4 - se $X, Y \in \mathcal{V}^*$ e $f \in S(X, Y)$ então existe um $Z \in \mathcal{V}^*$ tal que $Z_f = 0$ e $\forall e \in E \setminus S(X, Y), Z_e = (X \circ Y)_e = (Y \circ X)_e$.

\mathcal{V}^* diz-se o conjunto dos *covectores* do matroide orientado \mathcal{M} .

Os elementos de \mathcal{V}^* de suporte minimal (para a inclusão) formam o conjunto \mathcal{C}^* dos *cocircuitos* do matroide orientado $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ e eles já determinam \mathcal{M} ; mais, qualquer covector é a composição de todos os cocircuitos conformes com ele (ver [9] Prop. 3.7.2).

O conjunto dos suportes dos cocircuitos de \mathcal{M} ,

$$\underline{\mathcal{C}}^* = \{ \underline{X} : X \in \mathcal{V}^* \text{ e } \underline{X} \text{ minimal para a inclusão } \}$$

verifica os axiomas de (co)circuitos para matroides não-orientados. $\underline{\mathcal{M}} = (E, \underline{\mathcal{C}}^*)$ é dito o *matroide subjacente* a \mathcal{M} e notado por $\underline{\mathcal{M}}$. Em particular, o *rank* do matroide orientado \mathcal{M} é, por definição, $\text{rank}(\underline{\mathcal{M}})$.

Os elementos de \mathcal{V}^* de suporte maximal formam o conjunto, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{M})$, dos *topes* ou *partições não-Radon* de \mathcal{M} .

Como o conjunto dos covectores é fechado para a composição os elementos maximais de \mathcal{V}^* têm todos o mesmo suporte:

se $T \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ então $\underline{T} = E \setminus L_E$, onde $L_E = \{e \in E : X_e = 0, \forall X \in \mathcal{V}^*\}$. Assim, $e \in L_E$ se e só se e não está no suporte de qualquer cocircuito de \mathcal{M} , i.e., se e só se $\{e\}$ é um circuito do matroide subjacente; portanto, L_E é o conjunto dos *lacetes* de $\underline{\mathcal{M}}$.

Um matroide orientado é *acíclico* se existe um tope $T \in \mathcal{T}$ tal que $T_e = +, \forall e \in E \setminus L_E$, o que equivale a dizer, pelo que notamos acima, que todo o elemento de $E \setminus L_E$ está nalgum cocircuito positivo.

Dois matroides orientados $\mathcal{M}(E)$ e $\mathcal{M}'(E)$ pertencem à mesma *classe de orientação* se e só se podem ser obtidos um do outro por *reorientação*, i.e., se e só se $\exists A \subseteq E$ tal que $\mathcal{M}' = \overline{A}\mathcal{M}$, onde:

$$\overline{A}\mathcal{M} = (E, \overline{A}\mathcal{V}^*), \text{ onde } \overline{A}\mathcal{V}^* = \{\overline{A}X : X \in \mathcal{V}^*\}.$$

Todo o matroide orientado tem uma *reorientação acíclica* com tope positivo fixado; quer dizer, se $T \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ existe $A \subseteq E$ ($A = \{e \in E : T_e = -\}$) tal que o matroide orientado $\overline{A}\mathcal{M}$ é acíclico e $\overline{A}T$ é o seu tope positivo. É claro que existe uma correspondência bijectiva entre as reorientações acíclicas de um matroide orientado e o conjunto dos seus topes.

Os hiperplanos (fechados de *corank* 1) do matroide subjacente a \mathcal{M} , sendo os complementares dos suportes dos cocircuitos, são os conjuntos da forma $E \setminus \underline{C} = C^0$ com $C \in \mathcal{C}^*$. Como, para todo o covector $X \in \mathcal{V}^*$

$$X = C_{j_1} \circ C_{j_2} \circ \dots \circ C_{j_k} \text{ com } C_{j_i} \in \mathcal{C}^*, \text{ então}$$

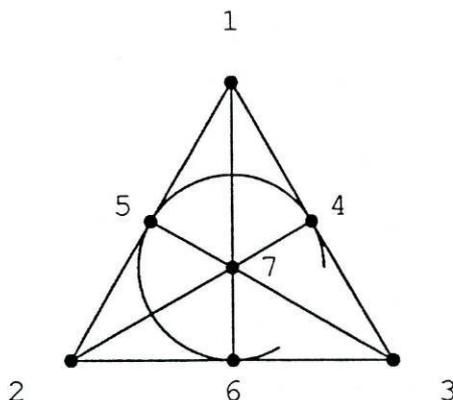
$$X^0 = \bigcap_{i=1}^k C_{j_i}^0 = \bigcap_{i=1}^k H_{j_i} \text{ é um fechado de } M, \forall X \in \mathcal{V}^*$$

e qualquer fechado, sendo intersecção de hiperplanos, pode ser assim obtido.

O matroide $\underline{\mathcal{M}}$ é univocamente determinado por \mathcal{M} mas a correspondência não é bijectiva:

- dado um matroide M num conjunto E pode não existir qualquer matroide orientado $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ tal que $M = \underline{\mathcal{M}}$; diz-se, nesse caso, que M não é orientável.

O *matroide de Fano*, é não orientável; na verdade, *um matroide binário é orientável se e só se é unimodular* ([94] e [95]) e, como referimos no primeiro capítulo, o matroide de Fano é coordenável em \mathbb{K} se e só se $\text{car}(\mathbb{K}) = 2$.



O problema da orientabilidade de um matroide continua a ter muitas questões em aberto e, em particular, não existe um algoritmo de decisão. Negativamente, é sabido que não existe qualquer critério de menores excluídos porque há famílias infinitas de matroides não-orientáveis cujos menores são orientáveis. Em [59] Guedes de Oliveira dá um processo algébrico de decisão da não-orientabilidade de um matroide utilizando os chamados *polinómios finais*.

- em geral há mais do que uma (classe de) orientação para um mesmo matroide; por exemplo, os matroides orientados \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 associados pela função *signal*, respectivamente, aos arranjos de hiperplanos \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 na figura da página 72 são diferentes (nem sequer pertencem à mesma *classe de orientação*) mas $\underline{\mathcal{M}}_1 = \underline{\mathcal{M}}_2 = U_3^6$. No caso de o matroide ser unimodular então é orientável e tem uma única classe de orientação; estão neste caso os matroides orientados definidos pelos grafos orientados.

Estendem-se a matroides orientados as operações de contração e restrição já definidas para matroides, de tal modo que qualquer menor de um matroide $\underline{\mathcal{M}}$, subjacente ao matroide orientado \mathcal{M} , é orientável pela *orientação induzida* por \mathcal{M} .

Assim, sendo $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ e $A \subseteq E$, define-se:

$$\mathcal{M}(A) = (A, \mathcal{V}^*(A)), \text{ onde } \mathcal{V}^*(A) = \{X|_A : X \in \mathcal{V}^*\}$$

$$\mathcal{M}/A = (A, \mathcal{V}^*/A), \text{ onde } \mathcal{V}^*/A = \{X|_{E \setminus A} : X \in \mathcal{V}^* \text{ e } A \subseteq X^0\}$$

e verifica-se que: $\underline{\mathcal{M}}(A) = \underline{\mathcal{M}}(A)$ e $\underline{\mathcal{M}}/A = \underline{\mathcal{M}}/A$

4.3.2. Representabilidade

Vejamus que a função *senal* associada ao arranjo \mathcal{H} define um matroide orientado $\mathcal{M}_{\mathcal{H}} = (E, V_{\mathcal{H}}^*)$ cujo conjunto de covectores, $V_{\mathcal{H}}^*$, é a imagem desta função :

- Como o arranjo é central $senal(0) = 0 \in V_{\mathcal{H}}^*$;
- O arranjo tem simetria central — $senal(-x) = -senal(x)$, e portanto $X \in V_{\mathcal{H}}^* \iff -X \in V_{\mathcal{H}}^*$;
- Sejam $X = senal(x)$ e $Y = senal(y) \in V_{\mathcal{H}}^*$;

se considerarmos um ponto z muito próximo de x , só ligeiramente deslocado na direcção de y de forma a deixar os hiperplanos a que x pertence mas y não pertence — $z = x + \delta(y - x)$, com $0 < \delta < \min_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{|\langle x, u_j \rangle|}{|\langle x - y, u_j \rangle|} \right\}$ — então:

$$senal(z) = X \circ Y \in V_{\mathcal{H}}^*;$$

- Se $j_0 \in S(X, Y)$, i.e., se $(\langle x, u_{j_0} \rangle \cdot \langle y, u_{j_0} \rangle) < 0$, então:

tomando um ponto w na intersecção segmento que une x a y com o hiperplano H_{j_0} , é claro que w só pode ter *senal* diferente de x e y nos índices de outros hiperplanos que separem estes dois pontos, i.e., sendo $0 < \epsilon < 1$ tal que $\langle x + \epsilon(y - x), u_{j_0} \rangle = 0$ e $w = x + \epsilon(y - x)$: $senal(w) \in V_{\mathcal{H}}^*$, verifica as condições de \mathcal{V}_4^* .

O reticulado dos fechados de $\underline{\mathcal{M}_{\mathcal{H}}}$ coincide com o reticulado das intersecções $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, porque:

$$F \text{ é fechado de } \underline{\mathcal{M}_{\mathcal{H}}} \text{ se e só se } F = \bigcap_{i=1}^k C_{j_i}^0, C_{j_i} \in \mathcal{C}^*(\mathcal{M}_{\mathcal{H}});$$

$\forall C \in \mathcal{C}^*(\mathcal{M}_{\mathcal{H}})$, $C^0 = \{e \in E : \langle x, u_e \rangle = 0, \forall x \in senal^{-1}(C)\}$ então $senal^{-1}(C) \subseteq \bigcap_{\substack{e \in C^0 \\ H_e \in \mathcal{H}}} H_e$; e se $y \in \bigcap_{\substack{e \in C^0 \\ H_e \in \mathcal{H}}} H_e$ então $(senal(y))^0 = C^0$ porque o suporte de C é minimal.

Portanto $\underline{\mathcal{M}_{\mathcal{H}}} = M_{Lin}(\{u_1, \dots, u_n\})$.

No matroide orientado \mathcal{M}_s (figura da página 74), o matroide subjacente é isomorfo a $M_{Lin}(\{u_1, u_2, u_3, u_4\})$ cujo reticulado dos fechados está representado no parágrafo 4.2; por exemplo, $\{2, 3, 4\}$ é um fechado de *rank* 2 deste matroide e $\{2, 3, 4\} = C^0$, com $C = (+, 0, 0, 0) \in V_{\mathcal{H}}^*$ ou o seu simétrico.

É natural definir $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ usando o conjunto dos covectores quando se pretende traduzir a decomposição de \mathbb{R}^d induzida pelo arranjo \mathcal{H} . No entanto,

obtém-se o mesmo matroide orientado pela orientação dos seus circuitos \mathcal{C} [resp. pelos seus vectores \mathcal{V}] dada pelos vectores de $\{+, -, 0\}^n$ dos sinais das dependências lineares minimais [resp. quaisquer] da família de vectores ortogonais aos hiperplanos $\{u_1, \dots, u_n\}$. Esta é a maneira natural de associar um matroide orientado a uma configuração de vectores de \mathbb{R}^d .

Resumindo, há dois modos *duais* de definir o mesmo matroide orientado $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ — a dualidade de matroides estende-se a matroides orientados.

Se $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ é matroide orientado e $\mathcal{M} = \underline{\mathcal{M}}$ então o matroide dual de \mathcal{M} , \mathcal{M}^* , é orientável e o conjunto dos seus covectores é o conjunto dos vectores de \mathcal{M} :

$$\mathcal{V} = \{X \in \{-, 0, +\}^E : X \text{ é ortogonal a } Y, \forall Y \in \mathcal{V}^*\}$$

onde X *ortogonal* a Y quer dizer:

$$\underline{X} \cap \underline{Y} = \emptyset \text{ ou } \exists e, f \in \underline{X} \cap \underline{Y} : X_e \cdot Y_e = -X_f \cdot Y_f.$$

Os elementos minimais de \mathcal{V} são os circuitos de \mathcal{M} (cocircuitos de \mathcal{M}^*).

Exemplo

- Sejam $e, f \in E$ dois elementos paralelos do matroide subjacente a um matroide orientado qualquer, \mathcal{M} ; como $C = \{e, f\}$ é um circuito do matroide subjacente, qualquer cocircuito que intersecte C contem C .

Portanto, usando a condição de ortogonalidade, ou para todo o $X \in \mathcal{V}^*(\mathcal{M})$ $X_e = -X_f$, ou para todo o $X \in \mathcal{V}^*$ $X_e = X_f$, conforme e e f têm sinais iguais ou contrários no vector cujo suporte é C .

Las Vergnas em [71] generalizou para matroides orientados o *lema dos arcos coloridos*, estabelecido por Minty para grafos orientados. Como corolário desse resultado obteve que todo o elemento do conjunto de suporte de um matroide orientado ou está num circuito positivo ou está num cocircuito positivo, mas não em ambos (consequência imediata da ortogonalidade entre circuitos e cocircuitos). Assim um matroide orientado é acíclico se e só se não tem qualquer circuito positivo.

Em particular, se \mathcal{M} é um *matroide orientado afim*, i.e., associado a uma dada configuração de pontos em \mathbb{R}^d e cujos circuitos são definidos pelos sinais das dependências afins minimais, resulta da definição de dependência afim que \mathcal{M} não pode ter qualquer circuito positivo: um matroide orientado afim é acíclico.

O conjunto de vectores imagem da função sinal no caso de um arranjo \mathcal{A} não-central em \mathbb{R}^d não é combinatoricamente característico. No entanto também a um tal arranjo pode ser associado um matroide orientado $\mathcal{M}'(\mathcal{A})$

tal que um subconjunto bem caracterizável do seu *reticulado de covectores* munido da ordem induzida descreve a decomposição celular determinada por \mathcal{A} em \mathbb{R}^d (ver [28]).

Nem todos os matroides orientados são definidos por arranjos de hiperplanos. O mesmo é dizer que nem todos são determinados por uma configuração de vectores; os que o são dizem-se *representáveis* ou *coordenáveis*. Esta noção estende a noção de representabilidade em matroides já que um matroide que se sabe coordenável sobre um corpo ordenado é orientável. No entanto, o problema da representabilidade complica-se quando se passa da teoria de matroides para a de matroides orientados. Em teoria de matroides há caracterizações de matroides coordenáveis usando menores excluídos; este tipo de caracterização não pode ser feita em matroides orientados. Nem sequer para matroides orientados uniformes, contrariamente ao que tinha sido conjecturado por Grünbaum para arranjos simples de pseudorectas no plano projectivo (ver [56]), i.e., não existe uma família finita de matroides orientados uniformes de *rank* 3 tal que todo o matroide orientado uniforme não coordenável tenha um deles como menor (veja-se em [15] a construção de uma família infinita de matroides orientados uniformes, de *rank* 3 e não realizáveis).

À frente, na figura do parágrafo 4.3.5 está representado um destes matroides orientados não coordenáveis. O estudo de métodos de prova da representabilidade (*sequências solúveis*) e da não-representabilidade (*polinómios finais*) de um matroide orientado dado tem sido feito pela escola de Darmstadt (ver [13],[14],[59]).

4.3.3. Reticulado dos Covectores

No conjunto dos covectores de um matroide orientado $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ é natural definir a relação de ordem parcial correspondente a considerar na decomposição celular associada a \mathcal{H} (onde os fechos das células são cones poliedrais de dimensão, no máximo d) uma célula menor que outra se e só se o fecho da primeira é face do fecho da segunda.

Por exemplo, no matroide orientado \mathcal{M}_s , (figura da página 74) os covectores $Y_1 = (0, -, -, +)$, $Y_2 = (+, -, -, 0)$ e $Y_3 = (+, -, 0, +)$ são menores que o covector $X = (+, -, -, +)$, já que o fecho de cada uma das células correspondentes a Y_1, Y_2, Y_3 é face do fecho do cone triangular correspondente a X . Então:

$$\begin{aligned} C_Y = \text{sin}^{-1}(Y) \leq \text{sin}^{-1}(X) = C_X &\iff \\ &\iff \overline{C_Y} \text{ é face de } \overline{C_X} \iff \\ &\iff \overline{C_Y} = \overline{C_X} \cap \{H \in \mathcal{H} : C_Y \subseteq H\} \iff \\ &\iff (\text{sin}(Y) \neq 0 \Rightarrow \text{sin}(Y) = \text{sin}(X)) \end{aligned}$$

A esta relação corresponde, num matroide orientado qualquer, a seguinte ordem parcial definida em \mathcal{V}^* :

$$\forall X, Y \in \mathcal{V}^* (Y \leq X \iff \text{existe } A \subseteq E : Y|_A = X|_A \text{ e } Y|_{E \setminus A} = 0_{E \setminus A} \iff \\ \iff S(X, Y) = \emptyset \text{ e } \underline{Y} \subseteq \underline{X}).$$

Juntando um elemento maximal 1 a \mathcal{V}^* ($X \leq 1, \forall X \in \mathcal{V}^*$), o conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{L} = \mathcal{V}^* \cup \{1\}$ é um *reticulado finito*; tem um elemento mínimo, o vector nulo, e dados $X, Y \in \mathcal{V}^*$ existe sempre o menor dos elementos maiores que ambos:

$$X \vee Y = X \circ Y \text{ se } X \circ Y = Y \circ X, \text{ se não } X \vee Y = 1.$$

Em $\mathcal{M}(\mathcal{H})$, o supremo de dois covectores conformes X, Y , é o covector Z correspondente à celula, $C_Z = \text{sin}^{-1}(Z)$, de menor dimensão tal que $\overline{C_X}$ e $\overline{C_Y}$ são faces de $\overline{C_Z}$.

Por exemplo, no matroide orientado \mathcal{M}_3 , o supremo dos covectores $X = (+, 0, 0, 0)$ e $Y = (0, -, +, +)$ é o covector $Z = (+, -, +, +)$.

A generalização a um matroide orientado qualquer é imediata, se definirmos fecho de um covector $X \in \mathcal{V}^*$ como o intervalo $[0, X]$ de \mathcal{L} e face do fecho de X como qualquer intervalo $[0, Y]$ onde $Y \leq X$.

Como qualquer covector é união conforme de cocircuitos e estes são covectores de suporte minimal (cobrem 0 em \mathcal{L}), o reticulado é atómico de átomos os cocircuitos.

Sendo $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ a família dos fechados de \mathcal{M} , é claro que a função:

$$f : (\mathcal{V}^*, \leq) \longrightarrow (\mathcal{F}(\mathcal{M}), \subseteq) \\ X \longmapsto X^0$$

é sobrejectiva e inverte a ordem ($Y \leq X \implies X^0 \subseteq Y^0$).

Mais, se X cobre Y no reticulado dos covectores, então Y^0 cobre X^0 no reticulado dos fechados.

Fazemos aqui a prova deste resultado ([9], Lema 4.1.12) porque consideramos que ela é um exemplo das técnicas de demonstração recorrendo directamente à axiomática.

– Suponhamos que isto não acontece, ou seja, que, para alguns $X, Y \in \mathcal{V}^*$ e $F = Z^0 \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, $Y < X$ e $X^0 \subsetneq Z^0 \subsetneq Y^0$, i.e., $Y < X$ e $\underline{Y} \subsetneq \underline{Z} \subsetneq \underline{X}$. Podemos admitir que $Z \geq Y$ (se $S(Y, Z) \neq \emptyset$, substituímos Z por $Y \circ Z$, já que $(Y \circ Z)^0 = Z^0$).

Se $S(X, Z) = \emptyset$, como $\underline{Z} \subsetneq \underline{X}$ obtemos imediatamente a contradição.

Se existe $f \in S(X, Z)$, então, pelo axioma \mathcal{V}_4^* , existe $W \in \mathcal{V}^*$ tal que $W_f = 0$ e $W_e = (X \circ Z)_e$ se $e \notin S(X, Z)$. Então:

- $Y < W$ porque, para todo $e \in \underline{X} \setminus \underline{Z} \neq \emptyset$, $0 = Y_e \neq W_e = X_e$;
- $\underline{W} \subsetneq \underline{X}$ ($W_f = 0 \neq X_f$) e $|S(X, W)| \leq |S(X, Z)|$.

Portanto, ou $S(X, W) = \emptyset$ e já temos a contradição, ou repetindo o processo com $Z = W$ acabamos por encontrar um vector $W \in \mathcal{V}^*$ tal que $Y \leq W \leq X$. \square

Assim, a imagem de qualquer cadeia maximal de (\mathcal{V}^*, \leq) é uma cadeia maximal (invertida) do reticulado dos fechados de $\underline{\mathcal{M}}$ que sabemos ser geométrico de altura $rank(\mathcal{M})$. Então, no reticulado dos covectores, \mathcal{L} , todas as cadeias maximais têm o mesmo comprimento, i.e., \mathcal{L} verifica a condição de Jordan-Dedekind e tem altura $rank(\mathcal{M}) + 1$. Designamos por *altura* de um covector $X \in \mathcal{V}^*$ como o comprimento de uma cadeia de 0 até X em \mathcal{V}^* .

É de notar que não existe uma caracterização algébrica completa do reticulado dos covectores, no entanto, os seus intervalos de altura 2 e 3 são característicos e relevantes no resultado que vamos provar. Fazemos a sua descrição depois de vermos a representação topológica de um matroide orientado qualquer.

Dado um matroide orientado $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ está-lhe naturalmente associado um *matroide orientado simples*, $\overline{\mathcal{M}}$, i.e., tal que o matroide subjacente a $\overline{\mathcal{M}}$ é simples. O conjunto \overline{E} dos pontos de \mathcal{M} é obtido de E retirando os lacetes e aglutinando elementos paralelos:

$$\overline{E} = \{\overline{e} : e \in E \setminus l_E\} \text{ onde } \overline{e} = \{f \in E \setminus l_E : f \parallel e\}, \forall e \in E \setminus l_E$$

O reticulado dos covectores de $\overline{\mathcal{M}}$ é isomorfo ao de \mathcal{M} .

Também já vimos que todo o matroide orientado tem uma reorientação acíclica cujo reticulado de covectores é também obviamente isomorfo a \mathcal{L} .

Portanto, ao estudar propriedades que digam respeito a \mathcal{L} não se perde generalidade em supor o matroide orientado simples e acíclico; é o que faremos de agora em diante neste texto a não ser que se mencione o contrário.

4.3.4. Reticulado das faces

A noção de *face* de um matroide orientado, introduzida por Las Vergnas em [69], generaliza a de face de um polítope convexo e dá uma visão geométrica dos matroides orientados definidos por configurações de pontos.

Se $\mathcal{M}(E)$ é um matroide orientado acíclico:

- *facetas*, ou faces de *corank* 1, são os fechados de \mathcal{M} de *corank* 1 (hiperplanos) cujo complementar é suporte de um cocircuito positivo — H é faceta se e só se $E \setminus H = \underline{C} = C^+$, $C \in \mathcal{C}^*$. É o mesmo que dizer que todos os pontos de E estão todos para um "lado" de H , i.e., no mesmo semi-espço fechado $H \cup C^+$.

- *faces* são quaisquer intersecções de facetas e chama-se *pontos extremais* ou *vértices* às faces de *rank* 1; diz-se \mathcal{M} é um polítopo matroidal se todos os pontos de E são vértices.

No matroide orientado \mathcal{M}_s da página 74, todos os pontos excepto o 3 são extremais e todas as rectas excepto a recta $\{1, 3\}$ são faces.

O conjunto das faces de \mathcal{M} ordenado por inclusão é um reticulado — $\mathcal{L}_F(\mathcal{M})$. Decorre da definição de face que, se F e G são faces de \mathcal{M} , $F \wedge G = F \cap G$.

Como \mathcal{M} é um matroide orientado acíclico o tope $T_0 : (T_0)_e = +, \forall e \in E$ está em V^* , e as facetas de \mathcal{M} estão em correspondência bijectiva com os cocircuitos $C \in V^* : C \leq T_0$, i.e., os átomos de \mathcal{L} no intervalo $[0, T_0]$. Às i -faces:

$$F_i = H_1 \cap \dots \cap H_{rank(\mathcal{M})-i} = H_1 \wedge \dots \wedge H_{rank(\mathcal{M})-i}$$

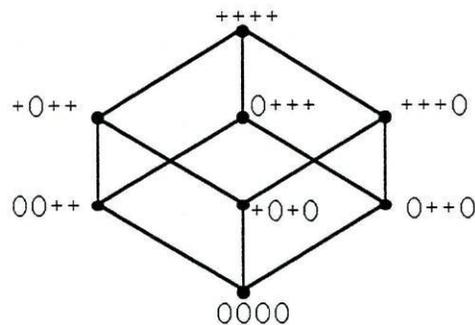
correspondem os covectores

$$X = C_1 \circ \dots \circ C_{rank(\mathcal{M})-i} = C_1 \vee \dots \vee C_{rank(\mathcal{M})-i}$$

e como $C_j \leq T_0, \forall j$, o covector X também está no intervalo $[0, T_0]$:

O reticulado \mathcal{L}_F é isomorfo ao oposto do intervalo $[0, T_0]$ de \mathcal{L} e portanto \mathcal{L}_F tem a propriedade de Jordan-Dedekind e altura $rank(\mathcal{M})$. Além disso, para qualquer reorientação acíclica de \mathcal{M} , $\overline{A}\mathcal{M}$, o vector T tal que $T^+ = A$ e $T^- = E \setminus A$ é um tope de \mathcal{M} e o reticulado das faces de $\overline{A}\mathcal{M}$ é isomorfo ao oposto do intervalo $[0, T]$ do reticulado dos covectores. Portanto, do reticulado dos covectores podem-se deduzir os reticulados das faces de todas as reorientações acíclicas do mesmo matroide; i.e., enquanto \mathcal{L}_F traduz a convexidade de \mathcal{M} , \mathcal{L} traduz a convexidade de qualquer matroide orientado da classe de orientação de \mathcal{M} , justificando a nomenclatura *grande reticulado das faces* utilizada para \mathcal{L} por alguns autores.

Na figura seguinte está representado o intervalo $[0, + + + +]$ do reticulado dos covectores do matroide orientado \mathcal{M}_s .



Notando que:

$$\begin{aligned}
 F \subseteq E \text{ é face de rank } s \text{ de um mat. or. acíclico } \mathcal{M} \text{ de rank } r &\iff \\
 &\iff F = \bigcap_{i=1}^{r-s} H_i \text{ com } E \setminus H_i = \underline{C}_i = C_i^+, C_i \in \mathcal{C}^*(\mathcal{M}) \\
 \iff E \setminus F = C_1 \circ \dots \circ C_{r-s} \text{ onde } C_i \in \mathcal{C}^*(\mathcal{M}) \text{ está contido em } E \setminus F, \forall i & \\
 &\iff E \setminus F = \underline{X} = X^+, \text{ onde } X \in \mathcal{V}^*(\mathcal{M}) \iff \\
 &\iff E \setminus F = \underline{X} = X^+, \text{ onde } X \in \mathcal{V}^*(\mathcal{M}/F) \iff \\
 &\iff \mathcal{M}/F \text{ é um matroide or. acíclico.}
 \end{aligned}$$

é fácil ver que se G é face de \mathcal{M}/X e X é face de \mathcal{M} então $\mathcal{M}/X \cup G = (\mathcal{M}/X)/G$ é acíclico, i.e., $X \cup G$ é face de \mathcal{M} e v.v., se H é face de \mathcal{M} contendo a face X , $H \setminus X$ é face de \mathcal{M}/X . Resulta assim que qualquer intervalo $[X, E]$ do reticulado das faces $\mathcal{L}_F(\mathcal{M})$ do matroide orientado acíclico \mathcal{M} é isomorfo ao reticulado das faces do matroide \mathcal{M}/X .

Usando argumentos do mesmo tipo (ver [69], lema 1.1.1 e lema 1.1.3) prova-se que os intervalos de $\mathcal{L}_F(\mathcal{M})$ da forma $[\emptyset, Y]$, onde Y é face de \mathcal{M} são isomorfos a $\mathcal{L}_F(\mathcal{M}(Y))$; resumindo, se X e Y são faces de \mathcal{M} e $X < Y$ então:

$$[X, Y] \text{ em } \mathcal{L}_F(\mathcal{M}) \text{ é isomorfo ao reticulado das faces de } \mathcal{M}(Y)/X.$$

As noções usuais de convexidade são um caso particular das definidas para matroides orientados já que no caso de termos um r -politope de vértices v_1, \dots, v_k , o matroide orientado de *rank* $(r + 1)$ definido pelas dependências afins dos vértices $\mathcal{M}_{af}(1, \dots, k)$ é acíclico e o fecho convexo de $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_s}\}$ é uma j -face do politope se e só se $\{i_1, \dots, i_s\}$ é uma face de *rank* $(j + 1)$ de \mathcal{M} .

Assim, sempre que um matroide é realizável o seu reticulado das faces \mathcal{L}_F é *politopal*, i.e., é isomorfo ao reticulado das faces de algum $(\text{rank}(\mathcal{M}) + 1)$ -politope. No entanto as duas noções não são equivalentes e o problema de determinar um exemplo de um matroide orientado com reticulado das faces não-politopal permaneceu aberto durante algum tempo (ver em [9], §1.5, um exemplo de matroide orientado uniforme e não-realizável cujo reticulado das faces é politopal).

Outras noções e resultados usuais em convexidade podem ser generalizadas para matroides orientados. São exemplo as de subconjunto convexo, de fecho convexo de um conjunto ou o teorema de Carathéodory. Em particular é válida para matroides orientados a fórmula de Euler:

$$\sum_{i=0}^{\text{rank}(\mathcal{M})} (-1)^i \cdot f_i(\mathcal{M}) = 0 \text{ onde } f_i(\mathcal{M}) = |\{F \in \mathcal{L}_F(\mathcal{M}) : \text{rank}(F) = i\}|$$

e a função de Möbius definida no reticulado das faces, \mathcal{L}_F , de um matroide orientado acíclico verifica a relação :

$$\mu(\emptyset, F) = (-1)^{\text{rank}(F)}, \quad \forall F \in \mathcal{L}_F(\mathcal{M})$$

A prova deste resultado feita em [30], obtem como corolário a generalização para matroides orientados simpliciais das relações de Dehn-Sommerville para politopos simpliciais.

4.3.5. Representação topológica

Do ponto de vista topológico, as duas noções – a de matroide orientado e a de arranjo de hiperplanos – aproximam-se.

Já referimos que num matroide orientado realizável definido num conjunto E , a família dos seus covectores está em correspondência bijectiva, através da função *signal*, com a família das células (abertas) da decomposição celular determinada em \mathbb{R}^d por um arranjo central de $|E|$ hiperplanos.

A cada $Y \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}^*$ corresponde a célula $C_Y = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{signal}(x) = Y\}$.

O fecho destas células é um cone poliedral cujas faces estão em correspondência bijectiva com os elementos do intervalo $[0, Y[$ de \mathcal{L} , i.e.:

- ao fecho da célula, \overline{C}_Y , corresponde o intervalo fechado $[0, Y]$ de $V_{\mathcal{H}}^*$;
- à fronteira destas células, $\partial C_Y = \overline{C}_Y \setminus C_Y$ corresponde o intervalo $[0, Y[$.

Além disso, $\mathbb{R}^d = \bigcup_{Y \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}^*} C_Y$ e $C_0 = \{0\}$.

Esta decomposição celular de \mathbb{R}^d traduz geometricamente a estrutura combinatória da família dos covectores de $\mathcal{M}(\mathcal{H})$.

Como já observamos, a decomposição celular determinada na esfera unitária, S^{d-1} , pelas intersecções com a esfera dos hiperplanos do arranjo \mathcal{H} estabelece o mesmo tipo de correspondência com os vectores de $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^* \setminus \{0\}$.

$S = \mathcal{H} \cap S^{d-1} = \{S_e = H_e \cap S^{d-1} : e \in E\}$ diz-se um *arranjo sinalizado de esferas* e é caracterizado por:

- $\forall e \in E$, S_e é uma esfera S^{d-2} ; $S^{d-1} \setminus S_e$ tem duas componentes conexas:

$$\begin{aligned} S_e^+ &= \{x \in S^{d-1} : \langle x, u_e \rangle > 0\} \\ S_e^- &= \{x \in S^{d-1} : \langle x, u_e \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

- $S_A = \bigcap_{e \in A} S_e$ é uma esfera para todo o subconjunto A de E ;

- se $e \in E$, $A \subseteq E$ e $S_A \not\subseteq S_e$ então $S_A \cap S_e$ é uma esfera em S_A de lados $S_A \cap S_e^+$ e $S_A \cap S_e^-$ (as duas componentes conexas de $S_A \cap S_e$).
- Se $\bigcap_{e \in E} H_e = \{0\}$ então $\bigcap_{e \in E} S_e = \emptyset$ e o arranjo \mathcal{S} diz-se *essencial*.

A imagem da função $s = \text{signal}|_{S^{d-1}}$ é $\mathcal{V}^* \setminus \{0\}$.

As células (abertas) da decomposição celular da esfera, S^{d-1} , determinada pela função s , $\sigma_Y = s^{-1}(Y) = C_Y \cap S^{d-1}$ são homeomorfas a discos abertos (a intersecção com a esfera do interior dum cone poliedral); o seu fecho $\bar{\sigma}_Y = \bigcup_{0 < X \leq Y} s^{-1}(X)$ é homeomorfo a um disco fechado e a sua fronteira uma união finita de discos abertos - $\partial\sigma_Y = \bar{\sigma}_Y \setminus \sigma_Y = \bigcup_{0 < X \leq Y} s^{-1}(X)$.

Resumindo, $\Delta = \{\sigma_X\}_{X \in \mathcal{V}^* \setminus \{0\}}$ é um *CW-complexo* regular cuja realização geométrica $\|\Delta\|$ é a esfera S^{d-1} . Esta decomposição celular regular da esfera é a essência da representação topológica de um matroide orientado qualquer:

Se no arranjo \mathcal{S} não nos restringirmos a esferas lineares e permitirmos que, para todo o $e \in E$, S_e seja imagem homeomorfa da esfera - $S_E = h(S^{d-2})$, onde h é um homeomorfismo de S^{d-1} , mantendo as outras condições, obtemos um *arranjo sinalizado de pseudoesferas* (*essencial* se $\bigcap_{e \in E} S_e = \emptyset$).

Para toda a pseudoesfera S_e , $S^{d-1} \setminus S_e$ tem duas componentes conexas cujo fecho é homeomorfo a uma d -bola, i.e., para cada S_e podemos escolher um "lado" positivo e um "lado" negativo, S_e^+ e S_e^- . Assim, podemos definir uma função $\sigma : S^{d-1} \rightarrow \{-, 0, +\}^E$ que localiza cada ponto de S^{d-1} relativamente às pseudoesferas do arranjo \mathcal{S} , analogamente ao que foi feito para o arranjo de esferas:

$$\sigma(x) = ((\sigma(x))_e)_{e \in E} \text{ onde } (\sigma(x))_e = \begin{cases} + & \text{se } x \in S_e^+ \\ 0 & \text{se } x \in S_e \\ - & \text{se } x \in S_e^- \end{cases}$$

A imagem desta função $\mathcal{V}^*(\mathcal{S}) = \{\sigma(x) : x \in S^{d-1}\} \cup \{0\} \subseteq \{-, 0, +\}^E$ verifica os axiomas dos covectores de matroides orientados definindo unicamente, a menos de reorientação, o matroide orientado simples de *rank* d , $\mathcal{M}(\mathcal{S})$.

Mais, $\Delta = \{\sigma^{-1}(X) : X \in \mathcal{V}^*(\mathcal{S}) \setminus \{0\}\}$ é a família das células de um *complexo celular regular*, $\Delta(\mathcal{S})$, tal que $\|\Delta(\mathcal{S})\| = S^{d-1}$.

O reticulado das faces deste complexo é isomorfo ao dos covectores pela aplicação que leva $X \in \mathcal{V}^*(\mathcal{S})$ na célula fechada $\delta_X = \{y \in S^{d-1} : \sigma(y) = X\}$.

Reciprocamente, se $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ é um matroide orientado de *rank* d , o reticulado dos covectores, \mathcal{L} , é isomorfo ao reticulado das faces de uma *decomposição celular regular*, $\Delta_{\mathcal{L}}$, da esfera $S^{(\text{rank}(\mathcal{M})-1)}$.

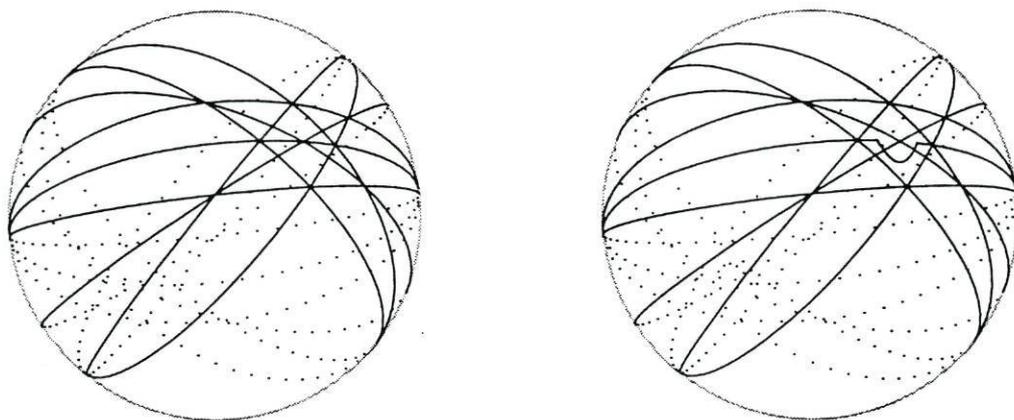
Este CW-complexo determina em $\|\Delta_{\mathcal{L}}\| = S^{d-1}$ um arranjo de pseudoesferas $\mathcal{S} = (S_e)_{e \in E}$, onde $S_e = (\Delta_{\mathcal{L}})_e^0 = \{X \in \mathcal{L} : X_e = 0\}$.

Este arranjo é único, a menos de homeomorfismo, é essencial e pode ser tomado com *simetria central*, i.e., $S_e = -S_e, \forall e \in E$.

Resumindo, *há uma correspondência bijectiva entre classes de orientação de matroides orientados simples de rank* $(d+1)$ *e classes de equivalência de arranjos sinalizados (essenciais) de pseudoesferas em* S^d , *(onde dois arranjos são equivalentes se existir um homeomorfismo de* S^d *que leva um no outro)* (teorema de Folkman-Lawrence).

Como estes arranjos podem ser tomados com simetria central e usando a identificação usual de pontos antípodos de S^d para obter o espaço projectivo real \mathbb{P}^d , aos arranjos de pseudoesferas em S^d correspondem *arranjos de pseudo hiperplanos* no espaço projectivo \mathbb{P}^d . Assim qualquer matroide orientado pode ser representado por um arranjo de pseudohiperplanos no espaço projectivo.

No caso de $d = 3$, e usando a identificação usual, ao arranjo de pseudoesferas em S^2 corresponde um arranjo de pseudorectas no plano projectivo real portanto qualquer matroide de *rank* 3 pode ser visto como tal (ver [21], Teorema 2.1). É de notar que alguns problemas sobre arranjos de rectas puderam já ser resolvidos usando matroides orientados que depois se prova, usando métodos algébricos, serem coordenáveis; ver [73] para um exemplo.



Um matroide orientado é *representável* ou *coordenável* se fôr possível "esticar" as pseudoesferas até ficarem esferas, i.e., se existe um homeomorfismo de S^d que leva as pseudoesferas em conjuntos da forma

$$S_e = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \langle x, u_e \rangle = 0 \text{ e } \|x\| = 1\}$$

O arranjo de pseudoesferas do lado direito na figura representa um matroide orientado não-coordenável. "Esticando" as pseudoesferas obtém-se o arranjo de esferas do lado esquerdo, já que, pelo teorema de Pappus, a "pseudocircunferência esticada" tem de passar pelos três pontos de intersecção das outras circunferências. Os dois matroides orientados são distintos, neste caso até os matroides subjacentes o são porque é obviamente diferente o reticulado das intersecções.

A noção de arranjo de pseudoesferas e o teorema de representação foram dados por Folkman e Lawrence em [50], um dos artigos que introduziu a teoria de matroides orientados. Quatro anos depois Mandel ao fazer na sua tese [76] o estudo dos matroides orientados do ponto de vista topológico, simplificou e esclareceu conceitos e resultados desse artigo.

Acrescentemos ainda que um importante resultado de Las Vergnas [70] permite ver os matroides orientados como "geometrias sinalizadas localmente realizáveis". Mais precisamente Las Vergnas prova que : *se M é um matroide e S é uma qualquer sinalização dos seus cocircuitos* (atribuição de sinais ao complemento de cada hiperplano de M) *essa sinalização é uma*

orientação de M se e só se para toda a correcta L , M/L com a sinalização induzida é um matroide orientado.

Como L é fechado de M e $\text{rank}(L) = \text{rank}(M) - 2$, $\text{rank}(M/L) = 2$. Decorre do teorema de representação que qualquer matroide orientado de $\text{rank} 2$ é coordenável e portanto M/L é sempre coordenável. Pode-se assim reformular o teorema dizendo que um matroide M é orientável se e só se é possível sinalizar os cocircuitos de tal modo que em torno de cada correcta se obtém uma geometria real, i. e., um matroide orientado coordenável.

Este resultado permite simplificar os algoritmos de determinação da orientabilidade nos casos em que pre-existe uma estrutura de matroide, dos quais é significativo exemplo o dos matroides orientados uniformes. Neste caso, ele é equivalente à utilização dos polinómios de Grassmann-Plücker de 3 termos na definição de um *quirotope simplicial* (ver [11]).

4.3.6. Vértices e arestas de um matroide orientado

Usando a correspondência atrás definida entre os reticulados das faces e dos covectores, vamos ver a que correspondem na representação de Folkman-Lawrence de um matroide orientado as suas faces de $\text{rank} 1$ e 2 :

Seja \mathcal{M} um matroide orientado acíclico de $\text{rank} d$:

Vértices do reticulado das faces — Como \mathcal{M} é acíclico o tope positivo $T_0 \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$; a um ponto extremal e de \mathcal{M} corresponde um covector $X \in [0, T_0]$ tal que $X^0 = \{e\}$. Como $X < T_0$, $X^+ = \underline{X}$ e portanto $T_1 = X \circ (-T_0) \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$. Então $X = T_0 \wedge T_1$ e o intervalo $[X, 1]$ de \mathcal{L} (de altura 2) tem estes 4 elementos.

Quer dizer que, na decomposição celular de S^{d-1} determinada pelo arranjo de pseudoesferas que representa \mathcal{M} , a cada ponto extremal e corresponde a $(d-1)$ -face da célula maximal correspondente ao tope T_0 que a separa do tope $\bar{e}T_0$. Se $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{H})$ é matroide orientado representável, aos pontos extremais de \mathcal{M} correspondem as faces de dimensão $d-1$ do fecho da célula maximal (ou componente conexa de $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{H}$) determinada pelo "lado" positivo H_i^+ de todos os hiperplanos $H_i \in \mathcal{H}$.

É claro que o mesmo se passa com toda a reorientação acíclica de \mathcal{M} , i.e., com todo o subconjunto A de E tal que $\bar{A}T_0$ é um tope de \mathcal{M} : e é ponto extremal de $\bar{A}\mathcal{M}$ se e só se $\frac{\bar{A}T_0}{AU\{e}}$ também é tope de \mathcal{M} . Usando a referida bijecção com o reticulado das faces de $\bar{A}\mathcal{M}$ se vê que o vector Y dado por $Y^0 = \{e\}$, $Y^+ = E \setminus A$ e $Y^- = A \setminus \{e\}$ é covector de \mathcal{M} , ínfimo em \mathcal{L} dos topes $\frac{\bar{A}T_0}{A}$ e $\frac{\bar{A}T_0}{AU\{e}}$.

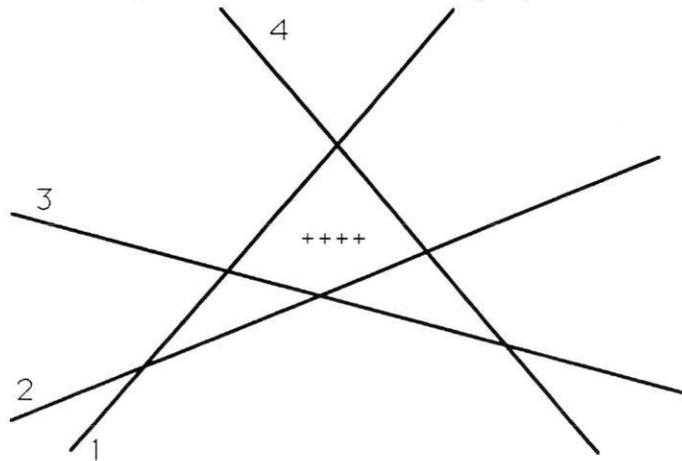
Além disso,

$$\begin{aligned} & |\{\text{pontos extremais de } \bar{A}\mathcal{M}\}| = \\ & = |\{\text{covectores de } \mathcal{L}(\mathcal{M}) \text{ cobertos por } \frac{\bar{A}T_0}{A}\}| = \end{aligned}$$

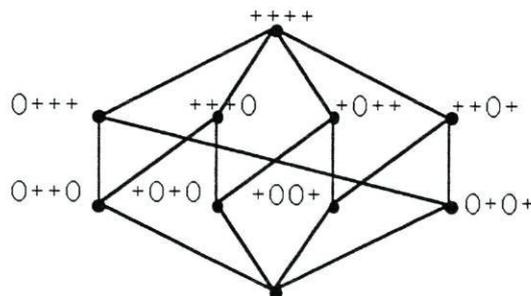
$$= |\{(d - 1)\text{-faces do fecho da célula } \sigma^{-1}(\frac{1}{A}T_0)\}| \geq d$$

Quando o número de pontos extremais de $\frac{1}{A}\mathcal{M}$ é igual ao *rank* também o número de facetas é igual a d ([69]). Neste caso, o reticulado das faces é isomorfo ao oposto do intervalo $[0, \frac{1}{A}T_0]$ de \mathcal{L} que é booleano e portanto é isomorfo ao reticulado das faces de um $(\text{rank}(\mathcal{M}) - 1)$ -simplexo. Um matroide orientado \mathcal{M} é *simplicial* se todas as reorientações acíclicas de \mathcal{M} têm $\text{rank}(\mathcal{M})$ pontos extremais.

Uma das mais antigas conjecturas em matroides orientados, posta por Las Vergnas em [69] e verdadeira para matroides orientados coordenáveis (ver [19]), afirma que todo o matroide orientado tem uma reorientação acíclica simplicial, i.e., uma das células maximais da representação do matroide é um pseudo-simplexo de dimensão $\text{rank}(\mathcal{M}) - 1$.



O matroide orientado uniforme \mathcal{M}_g determinado pelo arranjo de planos \mathcal{H}_g representado pelo arranjo de rectas da figura, tem quatro pontos extremais e o seu reticulado das faces é isomorfo ao intervalo $[0, + + + +]$ do reticulado dos covectores representado na figura seguinte, ou seja, ao reticulado das faces de um quadrado.



Note que, e.g., o matroide orientado $\frac{1}{2}\mathcal{M}_g$, é uma reorientação acíclica de \mathcal{M}_g , tem três pontos extremais e o seu reticulado das faces é isomorfo ao

de um triângulo e, portanto, é isomorfo ao reticulado das faces do matroide orientado \mathcal{M}_s .

Arestas do reticulado das faces - a uma face de *rank* 2 de \mathcal{M} , $F_2 = \{e_1, \dots, e_m\}$, corresponde um covector $Y \in [0, T_0]$ (i.e., $Y^+ = \underline{Y}$) tal que $Y^0 = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Em \mathcal{L}_F o intervalo $[0, F_2]$ (isomorfo ao reticulado das faces de qualquer matroide orientado acíclico de *rank* 2) é um "diamante" indicando quais os pontos da aresta que são os seus vértices.

O intervalo $[Y, 1]$ do reticulado \mathcal{L} permite obter a ordem dos pontos na aresta; esta informação também pode ser deduzida do conhecimento dos vértices das reorientações acíclicas de \mathcal{M} por mudança de sinal em pontos de F_2 :

olhando para um matroide orientado acíclico $\mathcal{M}(E)$ de *rank* 2 como uma recta com $|E|$ pontos, é fácil notar que, sendo a e b os pontos extremais de \mathcal{M} , $x_1 \neq a$ é ponto extremal do matroide orientado acíclico $\overline{a}\mathcal{M}$ se e só se x_1 é o ponto de E que se segue a a quando se percorre a recta no sentido de a para b . E assim sucessivamente até obtermos uma reorientação acíclica de \mathcal{M} , $\overline{x_1 \dots x_k}\mathcal{M}$, que tem novamente b como ponto extremal.

Sejam $a = e_i$ e $b = e_j$ os vértices de F_2 e X_a e X_b os vectores que lhes correspondem no intervalo $[Y, T_0]_{\mathcal{L}}$ de altura 2 isomorfo ao oposto de $[0, F_2]_{\mathcal{L}_F}$. Além de X_a e X_b no intervalo $[Y, 1]$ está qualquer vector $Z \in \mathcal{V}^*$ tal que $Z = Y \circ Z$ e só estes.

Os vectores nestas condições são os topes correspondentes às reorientações acíclicas de \mathcal{M} por mudança de sinal em pontos de F_2 e os covectores de *corank* 2 (em \mathcal{L}) correspondentes aos vértices dessas reorientações. Portanto, na representação topológica de \mathcal{M} , o fecho da célula $\sigma^{-1}(Y)$ é face dos fechos das células correspondentes a todos estes covectores (e só deles).

Pode-se assim definir uma correspondência entre conjunto dos topes e o dos covectores de *corank* 2 em $[Y, 1]$ partindo, por exemplo, de T_0 e esgotando dois a dois os elementos de ambos os conjuntos até chegar de novo a dois covectores cobertos por um mesmo tope. Então, um intervalo $[Y, 1]$ de altura 3 em \mathcal{L} é isomorfo ao reticulado das faces de um polígono com tantos lados como o número de topes nesse intervalo. Note-se que esse número tem de ser par já que

$$Y \circ Z \in [Y, 1] \iff Y \circ (-Z) \in [Y, 1]$$

e maior ou igual a quatro; dá-se a igualdade quando a face F_2 só tem dois pontos - os seus vértices.

O que foi observado é consequência quase imediata do teorema de Folkman-Lawrence se notarmos que para todo o covector Y , o intervalo $[Y, 1]$ de \mathcal{L} é isomorfo ao reticulado dos covectores do matroide orientado acíclico $\mathcal{M} \setminus \underline{Y}$. Como este matroide, no caso de $Y^0 = F_2$, tem *rank* 2, decorre do teorema de representação que este intervalo de \mathcal{L} é isomorfo ao reticulado das faces de uma decomposição celular regular de S^1 e este é obviamente isomorfo ao das de um polígono.

Na verdade usando argumentos semelhantes é fácil ver que qualquer intervalo de altura 3 de \mathcal{L} é deste tipo, sem a obrigatoriedade do número de lados ser par (ver [9], prop.4.1.17).

4.4. Como se pode passear num matroide orientado

4.4.1. Câmaras ou Topes

A família $\mathcal{T}(\mathcal{M}) \subseteq \{+, -\}^E$ dos covectores maximais ou topes de um matroide orientado determina-o por si só, como foi observado por Mandel [22]:

$$\mathcal{V}^* = \{X \in \{+, 0, -\}^E : X \circ \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}\}.$$

Ao contrário de todas as outras, esta definição de matroide orientado não generaliza qualquer conceito de teoria de matroides ([25], [72], [92]), tornando particularmente interessante um dos primeiros resultados de Las Vergnas, já citado na introdução, que mostra que o número de reorientações acíclicas de um matroide orientado acíclico \mathcal{M} só depende do matroide subjacente $\underline{\mathcal{M}}$:

$$|\mathcal{T}(\mathcal{M})| = \sum_{F \in \mathcal{F}} |\mu_{\mathcal{F}}(\emptyset, F)|,$$

onde $\mu_{\mathcal{F}}$ é a função de Möbius do reticulado \mathcal{F} dos fechados de $\underline{\mathcal{M}}$.

Já vimos que sendo \mathcal{M} um matroide orientado acíclico $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ pode ser visto como o conjunto das reorientações acíclicas de \mathcal{M} :

$$A = T^+, T \in \mathcal{T}(\mathcal{M}) \iff \overline{A}\mathcal{M} \text{ é acíclico.}$$

No caso de o matroide orientado ser representável esta família de vectores tem interpretações geométricas particularmente interessantes:

- Se $\mathcal{M}(E)$ é definido por uma certa configuração de pontos em \mathbb{R}^d (portanto acíclico), $\overline{A}\mathcal{M}$ é reorientação acíclica de \mathcal{M} se e só se:
 - existe uma transformação projectiva $t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, não-singular e permissiva para o conjunto E de pontos de \mathcal{M} tal que $\overline{A}\mathcal{M}$ é

o matroide orientado definido pelos pontos da imagem $t(E)$ (ver [34]).

ou

- existe um hiperplano de \mathbb{R}^d que separa os pontos de A dos de $E \setminus A$, i.e., os fechos convexos (em \mathbb{R}^d) de A e de $E \setminus A$ não se intersectam (ver [33]); esta interpretação geométrica explica a nomenclatura *partições não-Radon*.
- Se $\mathcal{M}(E)$ é definido por um arranjo central \mathcal{H} de hiperplanos de \mathbb{R}^d já vimos que aos topes correspondem bijectivamente as componentes conexas de $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{H}$. No problema que vamos resolver olhamos para $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ como uma generalização desta situação geométrica, i.e., como um conjunto em bijecção com o conjunto das células maximais (de dimensão topológica $\text{rank}(\mathcal{M})$) da decomposição celular da esfera $S^{\text{rank}(\mathcal{M})-1}$ determinada por \mathcal{M} .

4.4.2. Galerias

Duas componentes conexas de $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{H}$ são *adjacentes* se têm uma face de dimensão $(d-1)$ em comum. Esta noção utilizada por Deligne em [37] para arranjos simpliciais tem como generalização natural em matroides orientados considerar adjacentes dois topes que na representação de Folkman-Lawrence têm uma $(d-1)$ -face comum.

Seja \mathcal{M} um matroide orientado simples e acíclico definido num conjunto E :

Definição 4.2. Dois topes T e U de $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ são *adjacentes* se existe um covector $X \in \mathcal{L}$ tal que $|X^0| = 1$ e $X = T \wedge U$.

Chama-se *grafo dos topes*, $G(\mathcal{T})$, ao grafo cujos vértices são os topes e cujas arestas são os pares de vértices adjacentes.

(Veja, na figura do parágrafo 4.4.3, o grafo dos topes do matroide orientado \mathcal{M}_g).

Faz então sentido falar em caminhos neste grafo e em caminhos minimais a que chamamos *galerias*. Note-se primeiro que:

$$T, U \in \mathcal{T}(\mathcal{M}) \text{ são adjacentes se e só se } \exists e \in E \text{ tal que } T =_{\bar{e}} U$$

Como $S(T, U) = \{e\}$ decorre do axioma de eliminação, \mathcal{V}_4^* , a existência do covector X nas condições da definição. A outra implicação é imediata com $\{e\} = X^0$.

Definição 4.3. Uma família $G = (T_0, T_1, \dots, T_n)$ de $n+1$ elementos de $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ é uma *galeria* entre T_0 e T_n se:

- T_i é adjacente a T_{i-1} para todo o i , $1 \leq i \leq n$;
- $|S(T_0, T_n)| = |\{e \in E : (T_0)_e = -(T_n)_e\}| = n$.

Observe-se que:

- Existe sempre uma galeria ligando dois quaisquer topes de \mathcal{M} .

Na verdade, dada uma reorientação acíclica de \mathcal{M} , $\overline{A}\mathcal{M}$, existe uma ordem nos pontos extremais de \mathcal{M} pertencentes a A de tal modo que os matroides orientados obtidos pelas sucessivas mudanças de sinal nessa ordem são todos acíclicos (ver [21]) – ligando dois quaisquer vértices T e U do grafo dos topes existe um caminho de comprimento $|S(T, U)|$. Em [26] está provado que $G(T)$ é mesmo $(\text{rank}(\mathcal{M}))$ -conexo e notado que este resultado é o melhor possível já que no caso de \mathcal{M} ser coordenável, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{H})$, pelo menos uma componente conexa de $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{H}$ é um $(\text{rank}(\mathcal{M}) - 1)$ -simplexo, i.e., existe um tope $T \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ que tem exactamente $\text{rank}(\mathcal{M})$ topes adjacentes.

O grafo dos topes, não-etiquetado, determina o matroide orientado de maneira única, a menos de reorientação ([7]); em [26] é dado um algoritmo para a construção do conjunto dos topes de \mathcal{M} a partir deste grafo. Algumas características deste grafo são simples de obter – o grau de qualquer vértice é maior ou igual a $\text{rank}(\mathcal{M})$, o diâmetro do grafo é dado pela distancia entre dois topes simétricos e é igual ao número de elementos de E , o grafo é bipartido. No entanto, não é conhecida (exceptuando o caso de $\text{rank}(\mathcal{M}) \leq 3$ [51]), uma caracterização gráfica de $G(T)$; ela daria uma nova axiomatização para matroides orientados.

- Há exactamente duas galerias ligando dois topes T e U de \mathcal{M} se e só se um pode ser obtido do outro por mudança de sinal numa face de $\text{rank } 2$ da reorientação acíclica de \mathcal{M} a que ele corresponde. Dito doutro modo:

Lema 4.4. *Existem exactamente dois caminhos em $G(T)$ de comprimento $|A|$ entre T e U se e só se, sendo $A = \{e \in E : T_e = -U_e\}$ e $B = \{e \in E : T_e = -(T_0)_e = -\}$, A é uma face de $\overline{B}\mathcal{M}$ de $\text{rank } 2$.*

Prova – Se A é face de $\text{rank } 2$ de $\overline{B}\mathcal{M}$ e Y é o covector que lhe corresponde em \mathcal{L} ($Y \leq T$, $Y \leq U$ e $Y_0 = A$) vimos, no parágrafo 4.3.6, que existem exactamente dois caminhos correspondentes a percorrer os pontos da face A nos dois sentidos possíveis: aqueles cuja primeira aresta é cada um dos covectores correspondentes aos pontos extremais de A em $\overline{B}\mathcal{M}$.

Recíprocamente, se existem exactamente duas galerias ligando os topes T e U então, sendo $Y = T \wedge U \in \mathcal{L}$, o intervalo $[Y, 1]$ de \mathcal{L} é isomorfo ao reticulado das faces de um polígono e portanto tem altura 3. Pela correspondência que definimos entre \mathcal{L}_F e os intervalos $[0, T]$ de \mathcal{L} isso quer dizer que Y^0 é face de *rank* 2 da reorientação acíclica de \mathcal{M} correspondente ao tope T . \square

4.4.3. Caminhos equivalentes

Pelo que foi observado faz sentido definir do seguinte modo a equivalência entre caminhos minimais ligando dois topes:

Definição 4.5. Duas galerias com as mesmas extremidades,

$$G = (T_0, T_1, \dots, T_n) \text{ e } G' = (T'_0 = T_0, T'_1, \dots, T'_n = T_n)$$

são *equivalentes* se podem ser obtidas uma da outra efectuando um número finito de *deformações elementares*.

A galeria $G = (T_0, T_1, \dots, T_n)$ é uma *deformação elementar* da galeria $G' = (T'_0 = T_0, T'_1, \dots, T'_n = T_n)$ se:

1. Existem dois inteiros p e q , $0 \leq p < q \leq n$ tais que, para todo o i :

$$0 \leq i \leq p \text{ ou } q \leq i \leq n \implies T_i = T'_i$$

2. As galerias $G_1 = (T_p, T_{p+1}, \dots, T_q)$ e $G'_1 = (T'_p, T'_{p+1}, \dots, T'_q)$ são únicas em $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ com estas extremidades.

Ou seja, são, por definição, equivalentes os caminhos que só diferem no sentido de percurso de um número finito de faces de *rank* 2 de algumas das reorientações acíclicas de \mathcal{M} correspondentes a topes que são vértices comuns. Podemos agora enunciar:

Teorema 4.6. *No conjunto dos topes de um matroide orientado duas quaisquer galerias com as mesmas extremidades são equivalentes.*

Como já referimos, este resultado foi provado por Deligne para um arranjo de hiperplanos, \mathcal{H} , em que todas as *câmaras* são cones simpliciais. Neste caso, na decomposição celular definida pela intersecção dos hiperplanos de \mathcal{H} com a esfera todas as células maximais são simplexos, ou seja, o matroide orientado $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{H})$ é simplicial.

Num outro caso particular, o de $\text{rank}(\mathcal{M}) = 3$, o teorema está implícito em [21]. Na verdade do Teorema 2.1 deste artigo pode ser deduzido que, no caso de $\text{rank}(\mathcal{M})$ ser 3, além de duas galerias com as mesmas extremidades,

T_0 e T_n , serem equivalentes, o número mínimo de deformações elementares para chegar de uma até à outra é igual ao número de rectas do matroide orientado $\mathcal{M}(A)$ onde $A = \{e \in E : (T_n)_e = -(T_0)_e\}$.

Vamos provar o teorema por indução no comprimento das galerias e para isso precisamos de garantir a possibilidade de conseguir galerias equivalentes às dadas mas com um "bom primeiro passo"; dar um bom passo é, por definição da equilência, percorrer faces de *rank* 2 de \mathcal{M} ou de alguma reorientação acíclica conveniente.

Consideremos então o conjunto das reorientações acíclicas de \mathcal{M} ,

$$\mathcal{AC} = \mathcal{AC}(\mathcal{M}) = \{A \subseteq E : A = T^-, \text{ para algum } T \in \mathcal{T}(\mathcal{M})\}$$

e, para cada elemento deste conjunto, $A \in \mathcal{AC}$, o grafo G_A : os vértices [resp. as arestas] de G_A são os fechados de $\underline{\mathcal{M}}$ de *rank* 1 [resp. de *rank* 2] incluídos em A e pertencentes ao conjunto \mathcal{AC} .

Proposição 4.7. *Para todo o $A \in \mathcal{AC}$ o grafo G_A é conexo.*

Nota 4.8. 1. Se A for um fechado do matroide subjacente $\underline{\mathcal{M}}$ então existe um covector $X \in \mathcal{L}$ tal que $X^0 = A$ e $X \in [0, T_0] \cap [0, \overline{A}T_0]$, portanto $X^+ = E \setminus A$ e A é face de \mathcal{M} .

Sendo A face de \mathcal{M} vimos que $[0, A]_{\mathcal{L}_F(\mathcal{M})} \simeq \mathcal{L}_F(\mathcal{M}(A))$. Então, neste caso o grafo G_A é o 1-esqueleto do reticulado das faces do matroide orientado acíclico $\mathcal{M}(A)$ e portanto é conexo.

2. Se \mathcal{M} for simplicial, para todo o $A \in \mathcal{AC}$, $\overline{A}\mathcal{M}$ tem $r = \text{rank}(\mathcal{M})$ pontos extremais e o intervalo $[0, \overline{A}T_0]$ é booleano. Neste caso, o grafo G_A é o grafo completo K_r e portanto é $(r-1)$ -conexo.
3. Se considerarmos o conjunto \mathcal{AC} parcialmente ordenado por inclusão ele tem elemento mínimo e elemento máximo, \emptyset e E , respectivamente. Em geral este conjunto parcialmente ordenado não é um reticulado, nem mesmo quando o \mathcal{M} é coordenável (ver em [40] um exemplo). No entanto, qualquer cadeia maximal de ultimo elemento $A \in \mathcal{AC}$ tem comprimento $|A|$ pelo que já foi observado a propósito da conexão do grafo dos topes. Como conjunto ordenado, \mathcal{AC} , é isomorfo ao conjunto dos topes $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ com a relação de ordem definida pelas mudanças de sinal relativamente a um tope fixado, e.g., $T_0 \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$. A altura de um qualquer $T \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ dá o cardinal do conjunto separador dos dois topes, $|S(T, T_0)|$, e no caso de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ dá o número de hiperplanos que é preciso "atravessar" para chegar da câmara T_0 à T sem "atravessar" duas vezes o mesmo hiperplano (ver um exemplo na figura seguinte).

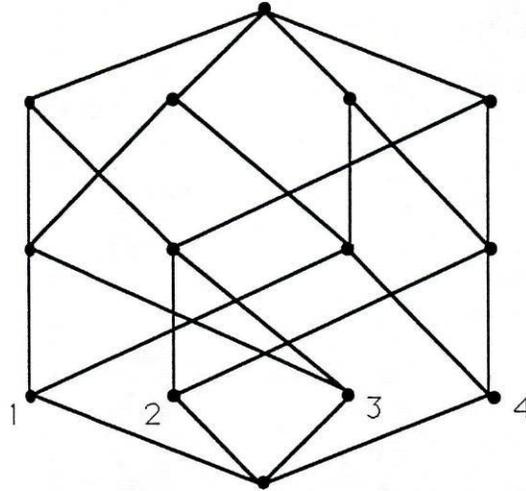


Diagrama do conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{AC}(\mathcal{M}_g)$

4. Na prova da proposição vamos utilizar um resultado de Cordovil que relaciona a generalização da fórmula de Euler para matroides orientados com os elementos deste conjunto \mathcal{AC} :

Teorema 4.9. ([22], Teorema 2.2) *Seja $A \in \mathcal{AC}$ tal que $A \neq \emptyset$ e $A \neq E$; então:*

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{L}_F(\mathcal{M}) \\ F \cap A = \emptyset}} (-1)^{\text{rank}(F)} = 0 \text{ e } \sum_{\substack{F \in \mathcal{L}_F(\mathcal{M}) \\ F \cap A \neq \emptyset}} (-1)^{\text{rank}(F)} = 0$$

Como corolário do teorema anterior, Cordovil calculou a função de Möbius em \mathcal{AC} ; este corolário generaliza para matroides orientados um resultado de Edelman em [40] para arranjos de hiperplanos.

Corolário 4.10. ([22], Corolário 2.10) *Se $A \in \mathcal{AC}$ então:*

$$\mu(\emptyset, A) = \begin{cases} (-1)^{\text{rank}(A)} & \text{se } A \text{ é uma face de } \mathcal{M} \\ 0 & \text{se não é} \end{cases}$$

Prova da proposição – No caso de $|A| \leq 2$, G_A resume-se a um vértice ou a dois vértices ligados por uma aresta, e o resultado é imediato.

Suponhamo-lo verdadeiro para todo o $A \in \mathcal{AC}$ tal que $|A| \leq n$ e consideremos $B \subseteq E$ tal que $\overline{B}\mathcal{M}$ é acíclico e $|B| = n + 1$.

Podemos supor que B não é face de \mathcal{M} porque, caso o seja, a proposição decorre do que foi observado na Nota 4.8.

Seja μ a função de Möbius do conjunto parcialmente ordenado \mathcal{AC} e consideremos um vértice x , qualquer, do grafo G_B . Vejamos que x não pode ser um vértice isolado:

- Por definição de função de Möbius de um conjunto parcialmente ordenado:

$$\begin{aligned}\mu(\emptyset, \{x\}) &= -1 \\ \mu(\emptyset, B) &= - \sum_{\substack{A \subsetneq B \\ A \in \mathcal{A}\mathcal{C}}} \mu(\emptyset, A)\end{aligned}$$

- Mas

$$\sum_{\substack{A \subsetneq B \\ x \notin A \in \mathcal{A}\mathcal{C}}} \mu(\emptyset, A) = \sum_{A \subseteq B \setminus \{x\}} \mu(\emptyset, A),$$

e a segunda soma vale zero porque, mesmo que $B \setminus \{x\} \notin \mathcal{A}\mathcal{C}$, como $|B| > 2$, há, pelo menos um $y \neq x$ em B que é ponto extremal de \mathcal{M} . I.e., há, pelo menos um $A \in \mathcal{A}\mathcal{C}$, não-vazio, tal que $A \subseteq B \setminus \{x\}$.

- Assim, resulta das duas igualdades anteriores que:

$$\mu(\emptyset, B) = - \sum_{\substack{x \in A \subsetneq B \\ A \in \mathcal{A}\mathcal{C}}} \mu(\emptyset, A);$$

Pelo resultado referido em 4, $\mu(\emptyset, A) \neq 0$ só se A for face de \mathcal{M} , portanto:

$$0 = \mu(\emptyset, B) = - \sum_{\substack{x \in A \subsetneq B \\ A \in \mathcal{A}\mathcal{C} \cap \mathcal{L}_F(\mathcal{M})}} \mu(\emptyset, A).$$

- Sendo esta última soma igual a zero e $\mu(\emptyset, \{x\}) = -1$ tem de existir uma face A de \mathcal{M} que tem x como um dos seus pontos extremais e que é um subconjunto próprio de B .

Então, existe uma face $A' \subseteq A$ tal que $x \in A'$ e $\text{rank}(A') = 2$, i.e., x é vértice de (pelo menos) uma aresta da face A . Isto porque, sendo $\mathcal{L}_F(\mathcal{M})$ um reticulado de Jordan-Dedekind, as cadeias maximais cujo elemento máximo é A têm comprimento igual a $\rho(A) = \text{rank}(A) \geq 2$.

A' é a aresta de B procurada.

Como nenhum vértice de G_B é isolado escolhemos um vértice $x_0 \in B$ tal que $B \setminus \{x_0\} \in \mathcal{A}\mathcal{C}$. A existência de um tal vértice é garantida pela conexão do grafo dos topes que já referimos.

Por hipótese de indução, o grafo $G_{B \setminus \{x_0\}}$ é conexo; além disso, todas as suas arestas são arestas de G_B . Como G_B só tem mais um vértice que não é isolado, este grafo é conexo. \square

Prova do teorema – Por indução no comprimento das galerias.

Sejam G e G' duas quaisquer galerias diferentes e com as mesmas extremidades,

$$G = (T_0, T_1, \dots, T_n) \text{ e } G' = (T'_0 = T_0, T'_1, \dots, T'_n = T_n).$$

Se $n = 2$ então $T_2 = \overline{\{a,b\}} T_0$ e $G = (T_0, \overline{\{a\}} T_0, T_2)$ e $G' = (T_0, \overline{\{b\}} T_0, T_2)$, ou v.v.. Sendo assim, G e G' são únicas com estas extremidades e portanto podem-se obter uma da outra fazendo uma só deformação elementar.

Suponhamos o teorema verdadeiro para galerias com n elementos e provemos que isso faz de G e G' galerias equivalentes:

- Vamos supor que $(T_0)_e = +, \forall e \in E$. Não se perde generalidade, porque isso acontece numa reorientação acíclica de \mathcal{M} e a noção de galerias equivalentes depende da classe de orientação e não do matroide orientado. Sendo $A = \{e \in E : T_n = -T_0\}$ o conjunto das coordenadas negativas de T_n , $A \in \mathcal{AC}$.

Sejam a e b os elementos de A tais que $T_1 = \overline{\{a\}} T_0$ e $T'_1 = \overline{\{b\}} T_0$, respectivamente. Então a e b são vértices do grafo G_A ; no caso de serem iguais o teorema decorre da hipótese de indução. Sendo distintos, acabamos de provar que existe um caminho em G_A ligando os dois vértices.

- Suponhamos que esse caminho tem uma só aresta, i.e., a e b são os pontos extremos de uma aresta de $\mathcal{L}_F(\mathcal{M})$ contida em A :

$$F_2 = \overline{\{a, b\}} = \text{fecho em } \underline{\mathcal{M}} \text{ de } \{a, b\}.$$

Como vimos no Lema 4.4, há exactamente duas galerias com T_0 e $U = \overline{F_2} T_0$ como extremidades; sejam elas G_1 e G_2 .

Compondo cada uma destas galerias com uma terceira ligando U a T_n (existe pelo menos uma por causa do grafo dos topos ser conexo) obtemos duas novas galerias, UG_1 e UG_2 , com T_0 e T_n como extremidades; estas duas são, por construção, equivalentes.

Por outro lado, G e UG_1 são também equivalentes – têm T_0 e T_1 em comum e, por hipótese de indução, duas quaisquer galerias entre T_1 e T_n são equivalentes. É claro que o mesmo acontece com G' e UG_2 e podemos assim concluir que G e G' são equivalentes.

Usando este argumento consecutivamente e para todas as arestas do caminho que liga a com b em G_A , obtemos o teorema. \square

4.5. Aplicação do teorema

Como referimos na introdução, para estudar a topologia do complemento do complexificado de um arranjo real de hiperplanos, $Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}})$, Salvetti associou a Y um CW-complexo regular e finito, $\Delta_{Sal}(Y)$, homotopicamente equivalente à variedade Y . Usando o teorema de Deligne que acabamos de generalizar para matroides orientados, ele deu uma apresentação do grupo fundamental $\Pi_1(Y)$ em que o número de geradores bem como o de relações só dependem do reticulado das intersecções $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Estes resultados são tão mais importantes quanto não-trivial é a variedade em questão, mesmo quando o arranjo \mathcal{H} é relativamente simples (veja-se [29]).

Tanto Ziegler em [103] como Gel'fand e Rybnikov em [53] notaram que o complexo de Salvetti associado a um arranjo de hiperplanos depende unicamente do matroide orientado (representável) por ele determinado, i.e., se a dois arranjos reais, \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , está associado o mesmo matroide orientado então as variedades por eles determinadas são homotopicamente equivalentes:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{H}_1} = \mathcal{M}_{\mathcal{H}_2} \implies Y(\mathcal{H}_1^{\mathbb{C}}) \approx Y(\mathcal{H}_2^{\mathbb{C}}).$$

Dada a representação topológica de um matroide orientado, é natural perguntar se esta construção de Salvetti é generalizável a um matroide orientado qualquer. A resposta afirmativa a esta questão foi dada em [28]; vamos aqui descrever sucintamente a construção do CW-complexo de Salvetti $\Delta_{\mathcal{M}} = \Delta_{Sal}(\mathcal{M})$ determinado por um matroide orientado qualquer e o resultado do mesmo artigo que utiliza o Teorema 4.6 e obtém uma apresentação do seu grupo fundamental, $\Pi_1(\Delta_{\mathcal{M}})$, em que o número de geradores e o número de relações só depende de $\underline{\mathcal{M}}$.

4.5.1. CW-complexo de Salvetti determinado por um matroide orientado

Consideremos $\mathcal{H} = \{H_1, H_2\}$ um arranjo central de duas rectas em \mathbb{R}^2 , por exemplo, $H_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $H_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. E seja:

$$Y = Y(\mathcal{H}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^2 \setminus (\{(z, 0) : z \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, w) : w \in \mathbb{C}\})$$

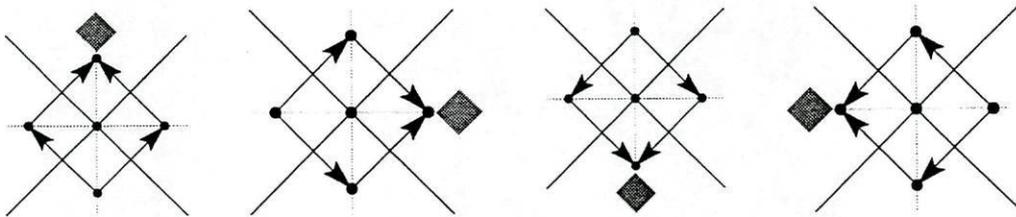
o complemento em \mathbb{C}^2 do complexificado de \mathcal{H} .

O complexo de Salvetti associado a \mathcal{M} é construído do seguinte modo: para cada tope $T \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ e cada covector $X \in [0, T]$, associamos ao par (X, T) uma célula de dimensão igual a $(rank(\mathcal{M}) - h(X))$, onde $h(X)$ é a altura de X no reticulado dos covectores.

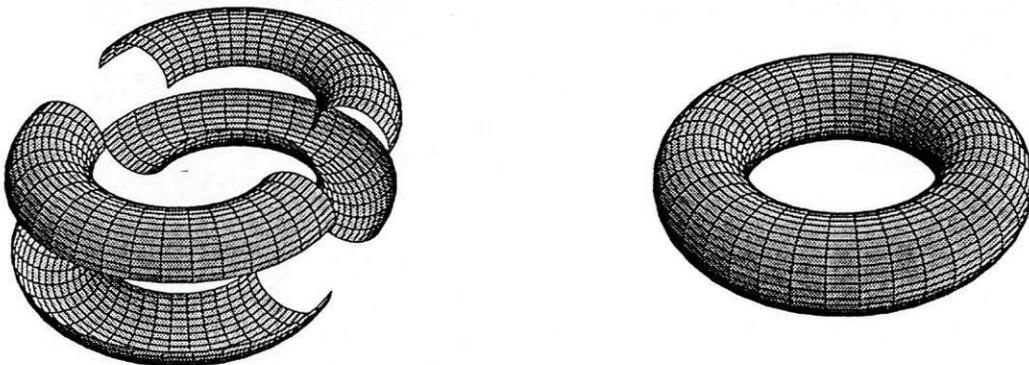
Assim, neste caso, há quatro células de dimensão 0, quatro células de dimensão 2 e oito células de dimensão 1. Cada covector X , tal que

$rank(\mathcal{M}) - h(X) = 1$ define duas arestas, uma para cada um dos tope a que é adjacente.

Uma célula (Y, U) é face de (X, T) se e só se $X \leq Y$ e $U = Y \circ T$, i.e., U é o tope adjacente a Y mais próximo de T . Então é claro que, no exemplo, todas as 2-células têm quatro vértices, correspondentes aos pares (T, T) , representados na figura por um ponto na região correspondente ao tope T . Cada uma das arestas correspondentes a um mesmo covector X está representada por um segmento que "o" cruza e orientada para o tope que a determina. As 2-células, correspondentes aos pares $(0, T)$, têm todas quatro arestas e estão representadas a cinzento na região T .



O complexo de Salvetti determinado por \mathcal{M} é homotopicamente equivalente a um toro, cuja decomposição nas quatro células de dimensão 2 está representada na figura abaixo.



Em geral, se $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ é um matroide orientado e \mathcal{T} o conjunto dos

seus topes, em

$$P = P(\mathcal{M}) = \{(X, T) \in \mathcal{V}^* \times \mathcal{T} : X \leq T\},$$

defina-se a relação de ordem:

$$(Y, U) \leq (X, T) \iff X \leq Y \text{ e } U = Y \circ T.$$

Para todo o $(X, T) \in P$ são isomorfos os conjuntos parcialmente ordenados:

$$\{(Y, U) \in P : (Y, U) < (X, T)\} = P_{<(X, T)} \simeq \mathcal{V}_{>X}^* = \{Z \in \mathcal{V}^* : Z > X\},$$

Pelo teorema de Folkman-Lawrence, o segundo é isomorfo ao reticulado das faces de uma decomposição celular regular da esfera de dimensão $\text{rank}(\mathcal{M} \setminus \underline{X})$. P é isomorfo ao reticulado das faces de um complexo celular regular $\Delta_{P(\mathcal{M})}$, único a menos de homeomorfismo ([6], ver apêndice).

Definição - O CW-complexo de Salvetti de \mathcal{M} é o complexo celular regular, $\Delta_{\mathcal{M}} = \Delta_{P(\mathcal{M})}$, determinado, a menos de homeomorfismo, por $P(\mathcal{M})$.

4.5.2. Uma apresentação do grupo fundamental $\Pi_1(\Delta_{\mathcal{M}})$

É sabido que o grupo fundamental de um complexo celular conexo, Δ , pode ser calculado a partir de $\Delta_{\leq 2}$, o 2-esqueleto de Δ :

$\Pi_1(\Delta)$ é o quociente do grupo dos caminhos nas arestas pela relação de homotopia combinatória (ver apêndice).

Em $\Delta_{\mathcal{M}}$ o conjunto dos vértices (0-células) identifica-se com $\mathcal{T}(\mathcal{M})$,

$$V = C_0 = \{(T, T) : T \in \mathcal{M}\}.$$

Uma aresta (1-célula) de $\Delta_{\mathcal{M}}$ é um par $(X, T) \in \mathcal{V}^* \times \mathcal{T}$ tal que T cobre X em $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, $X \ll T$. Como vimos em 1.4.1., isto quer dizer que $|X^0| = 1$ e existe (um único) $T' \in \mathcal{T}$ tal que $X = T \wedge T'$. Claro que neste caso (X, T') também é uma aresta de $\Delta_{\mathcal{M}}$. Como $\{T, T'\}$ é uma aresta do grafo dos topes, pode-se identificar o 1-esqueleto de $\Delta_{\mathcal{M}}$ com o grafo que se obtém de $G(\mathcal{T})$ duplicando as arestas:

$$E = C_1 = \{e = (T, T'), e^* = (T', T) : \{T, T'\} \text{ é aresta de } G(\mathcal{T})\}.$$

A relação de homotopia combinatória além de identificar caminhos que só diferem em percorrer uma aresta consecutivamente nos dois sentidos também o faz àqueles que só diferem num caminho que percorre a fronteira de uma 2-célula. Assim, para calcular $\Pi_1(\Delta_{\mathcal{M}})$, além de se necessário definir uma orientação das 1-células de $\Delta_{\mathcal{M}}$ precisamos também de conhecer a fronteira das 2-células:

- Os elementos de E podem ser canonicamente orientados considerando que o primeiro elemento do par é o vértice inicial, i.e., sendo $e = (T, T')$, $\epsilon(e) = +$ se e só se a aresta e é percorrida de T para T' , como no exemplo da figura 5antonio.

Um *caminho nas arestas* de $\Delta_{\mathcal{M}}$, diz-se *positivo* [resp. *negativo*] se todas as suas arestas são percorridas no sentido positivo [resp. negativo]. Um caminho, γ , nas arestas de $\Delta_{\mathcal{M}}$ diz-se *minimal* se o seu comprimento é o menor dos comprimentos dos caminhos com os mesmos vértices inicial e final que γ .

- A fronteira de uma célula de dimensão 2, σ_2 , do complexo $\Delta_{\mathcal{M}}$ é igual à união de dois caminhos nas suas arestas, minimais, positivos e com os mesmos vértices inicial e final, porque:

à célula σ_2 corresponde um covector $X \in \mathcal{V}^*$ tal que $X^0 = F_2$ é uma 2-face de alguma reorientação acíclica de \mathcal{M} ; $F_2 \in \mathcal{L}_F(\overline{B}\mathcal{M})$, para algum $B \subseteq E$.

Do que foi visto no §4.3.6 se deduz que os vértices da fronteira de σ_2 correspondem, bijectivamente, aos elementos de $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ pertencentes ao intervalo $[X, 1]$ de $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ e as arestas à duplicação ("orientada") das arestas da restrição do grafo dos topes, $G(\mathcal{T})$, a estes vértices. Em particular, os topes $T = (B, E \setminus B)$ e $U = \overline{F_2} T$ "são" vértices de σ_2 .

Pelo Lema 4.4 há exactamente dois caminhos em $G(\mathcal{T})$ ligando os topes T e U de comprimento $|F_2|$. É claro que caminhos minimais em $G(\mathcal{T})$ estão em correspondência bijectiva com caminhos nas arestas de $\Delta_{\mathcal{M}}$, minimais e positivos. Da construção dos caminhos dados por aquele lema decorre que a união dos vértices e das arestas nos dois caminhos que lhes correspondem em $\Delta_{\mathcal{M}}$ é a fronteira de σ_2 . Além disso, é possível orientar (topologicamente o 2-esqueleto de $\Delta_{\mathcal{M}}$ de tal modo que a fronteira de cada 2-célula se obtém percorrendo um dos caminhos no sentido positivo e o outro no negativo; (ver exemplo no fim do parágrafo).

Assim, podemos reescrever o Teorema 4.6 como segue:

Teorema 4.11. *São combinatoriamente homotópicos quaisquer dois caminhos nas arestas de $\Delta_{\mathcal{M}}$ minimais, positivos (ou negativos) e com os mesmos vértices inicial e final.*

Para poder calcular o grupo fundamental e fazendo, se necessário uma reorientação de \mathcal{M} , fixemos o vértice T_0 ($(T_0)_i = +, \forall i$) e consideremos os caminhos fechados de vértice inicial e final T_0 .

O número de geradores deste grupo teria de ser no máximo igual ao número de arestas de $\Delta_{\mathcal{M}}$. Na verdade, há um conjunto de geradores bem menor – os caminhos que, partindo de um vértice (tope) fixado vão dar uma volta em torno de cada um hiperplanos (pseudohiperplanos).

Teorema 4.12. ([28], Teorema 3.4.) *Seja $\gamma_0 = a_1 a_2 \cdots a_n$ a um caminho positivo nas arestas de $\Delta(\mathcal{M})$ correspondente a uma galeria que liga T_0 a $-T_0$ fixada. Então: O conjunto $\{\bar{\alpha}_i\}_{i=1, \dots, n}$ é um sistema de geradores de $\Pi_1(\Delta_{\mathcal{M}})$, onde $\bar{\alpha}_i$ é a classe de equivalência do caminho nas arestas:*

$$\alpha_i = a_1 a_2 \cdots a_i a_i^* a_{i-1}^{-1} \cdots a_2^{-1} a_1^{-1}, \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Portanto o grupo tem uma apresentação com tantos geradores como os fechados de rank 1 de $\underline{\mathcal{M}}$.

Para obter este resultado foi utilizada a equivalência entre caminhos minimais positivos com as mesmas extremidades e as fronteiras das 2-células.

Nas duas últimas figuras está parcialmente representado o conjunto dos covectores do matroide orientado \mathcal{M}_s . Foram traçadas todas as arestas de $\Delta_{\mathcal{M}}$ correspondentes aos topes representados e sublinhada a equivalência entre os caminhos $\beta(d_4)$ e $\beta(b_2)$ e os caminhos geradores α_4 e α_2 , respectivamente.

$$\beta(d_4) = A_2 A_3 A_4 A_1 d_4 D_3^{-1} D_2^{-1} D_1^{-1} \approx \alpha_4 = D_1 D_2 D_3 D_4 d_4 D_3^{-1} D_2^{-1} D_1^{-1};$$

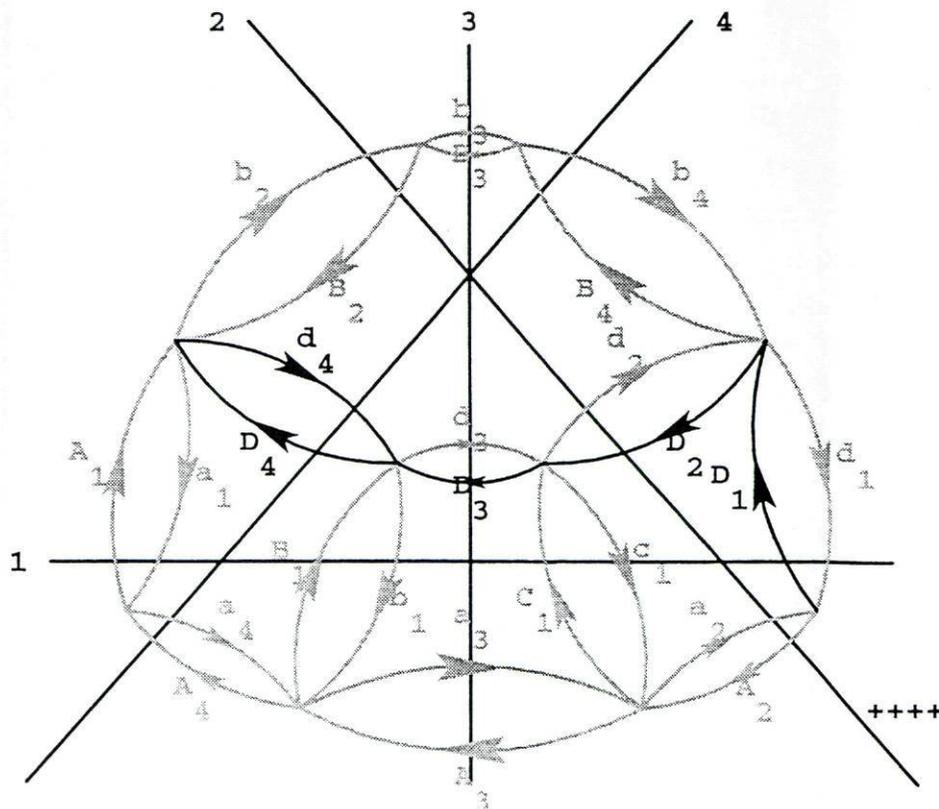
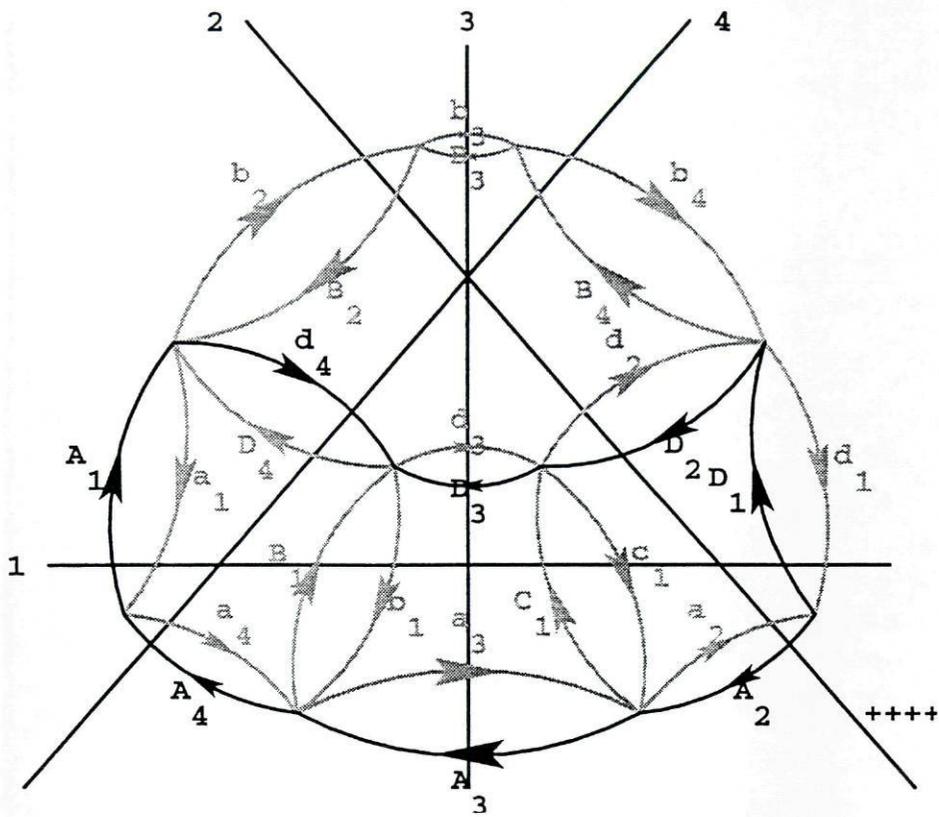
$$\beta(b_2) = D_1 D_2 D_3 D_4 b_2 B_3^{-1} B_4^{-1} D_1^{-1} \approx \alpha_2 = D_1 D_2 d_2 D_1^{-1}.$$

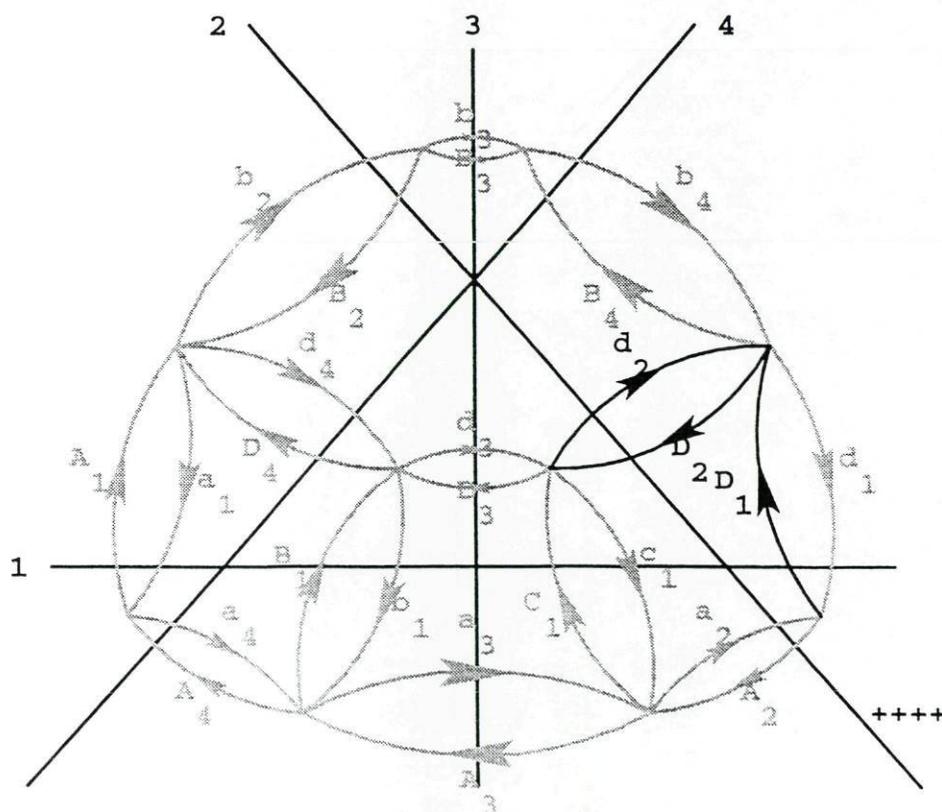
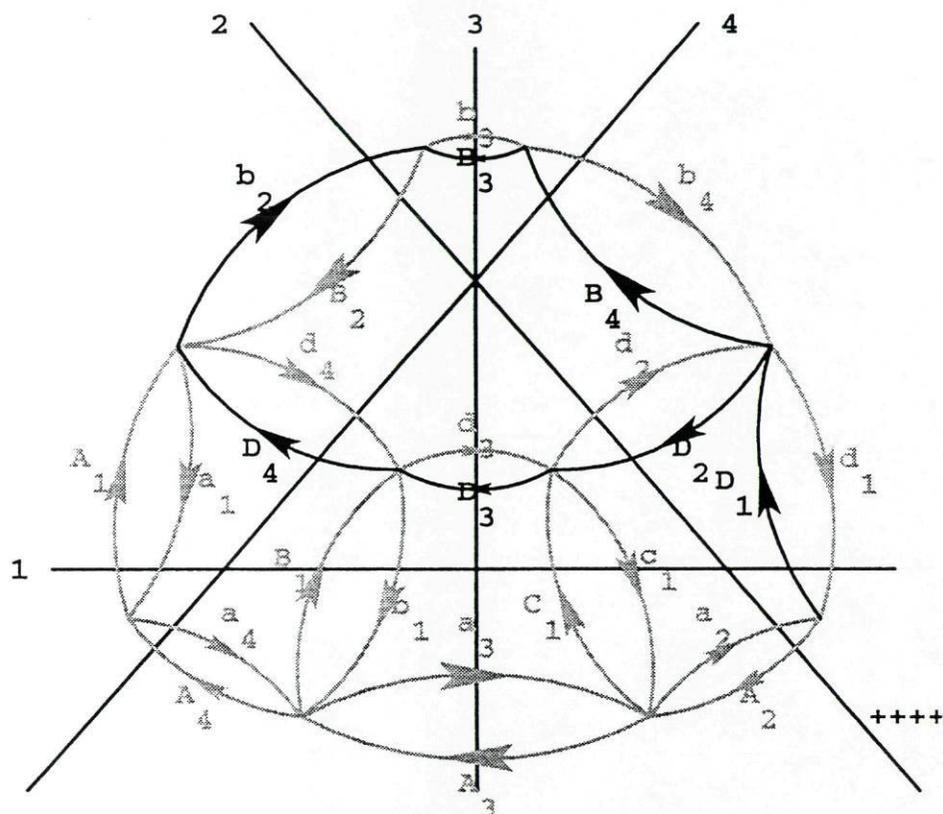
No primeiro caso, a equivalência é consequência do Teorema 4.11, já que $\gamma_0 = A_2 A_3 A_4 A_1$ e $\gamma_1 = D_1 D_2 D_3 D_4$ são caminhos minimais positivos com as mesmas extremidades.

No segundo precisamos de usar a fronteira da 2-célula $\sigma_2 = (Y, Y \circ T_0)$ onde Y é o cocircuito $(-, 0, 0, 0)$; é fácil ver que esta fronteira é união dos caminhos minimais positivos, $\gamma = D_3 D_4 b_2$ e $\gamma' = d_2 B_4 B_3$

É conhecido que cada 2-célula de $\Delta_{\mathcal{M}}$ determina uma relação nos geradores do grupo fundamental, na verdade o número de relações também foi em [28] substancialmente reduzido:

Teorema 4.13. ([28], Teorema 3.8.) *Sejam $(Y, Y \circ T_0)$ e $(Y', Y' \circ T_0)$ duas quaisquer 2-células de $\Delta_{\mathcal{M}}$ tais que $Y^0 = (Y')^0$; então as relações nos geradores do grupo determinadas por estas células são conjugadas. Portanto $\Pi_1(\Delta_{\mathcal{M}})$ tem uma apresentação com uma relação para cada fechado de dimensão dois de $\underline{\mathcal{M}}$.*





4.6. Apêndice

4.6.1. Conjuntos parcialmente ordenados, reticulados

Damos unicamente as definições dos conceitos de teoria de reticulados utilizados no texto; ao leitor interessado referimos [81].

Definição 4.14. Seja P um conjunto (finito) parcialmente ordenado pela relação \leq ; diz-se que:

1. o *dual* ou *oposto* de P , P^* , é o conjunto parcialmente ordenado que se obtém invertendo a ordem em P i.e.,

$$x \leq_{P^*} y \Leftrightarrow y \leq_P x.$$

2. P é *limitado* se tem um único elemento maximal e um único elemento minimal; por P ser finito estes elementos são, respectivamente, o máximo e o mínimo de P e são geralmente notados por 1 e por 0.
3. se a, b são elementos de P diz-se que b *cobre* a e nota-se $a < b$, se

$$a < b \text{ e } \forall x \in P (a < x \Rightarrow b \leq x).$$

4. quando P tem elemento mínimo, os *átomos* de P são os elementos de P que o cobrem e os *coátomos* os que são cobertos pelo elemento máximo (quando ele existe).
5. uma *cadeia* de P é um subconjunto C de P totalmente ordenado pela mesma relação; o comprimento de uma cadeia C é igual a $|C| - 1$. Uma cadeia C_M diz-se *maximal* se todo o elemento de C_M cobre o seu antecessor.
6. P tem a *propriedade de Jordan-Dedekind* se todas as cadeias maximais em P têm o mesmo comprimento l , dito o comprimento de P . Neste caso, define-se a *altura* de qualquer elemento $x \in P$, $\rho(x)$, como o comprimento do conjunto parcialmente ordenado $P_x = \{y \in P : y \leq x\}$.
7. se $x, y \in P$, se existe elemento mínimo do conjunto $\{w \in P : x \leq w \text{ e } y \leq w\}$ ele é o *supremo* de x e y e nota-se $x \vee y$. De modo análogo se define o *ínfimo* de dois elementos de P , $x \wedge y$.
8. P é um *reticulado* se existem $x \wedge y$ e $x \vee y$ para todo o par de elementos x, y de P . Um reticulado é:

- (a) *atómico* se todo o elemento x de P é supremo de átomos de P e é *coatómico* se todo o elemento é ínfimo de coátomos.

(b) *relativamente complementado* se

$$\forall x, y, z \in R : x < y < z \exists y' \in R : (y \vee y' = z, y \wedge y' = x).$$

(c) *booleano* se é isomorfo ao conjunto das partes de um conjunto ordenado pela relação de inclusão.

9. Se (P_1, \leq_1) e (P_2, \leq_2) são reticulados, o seu *produto* é o reticulado $(P_1 \times P_2, \leq)$, onde $P_1 \times P_2 = \{(a, b) : a \in P_1, b \in P_2\}$ e a relação de ordem neste conjunto é definida por:

$$(a, b) \leq (c, d) \iff a \leq_1 c \text{ e } b \leq_2 d.$$

4.6.2. Função de Möbius e relação de Euler

Definição 4.15. Seja P um conjunto parcialmente ordenado finito. A *função de Möbius de P* é a função inteira $\mu = \mu_P$ definida em $P \times P$ por:

$$\mu_P(x, y) = \begin{cases} -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) & \text{se } x < y \\ 1 & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \not\leq y \end{cases}$$

É característica da função de Möbius a *propriedade de inversão*, particularmente utilizada nalguns conjuntos parcialmente ordenados bem conhecidos como $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$, o conjunto das partes de um conjunto X ordenado por inclusão, e $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, os naturais ordenados pela relação de divisibilidade: Se f é uma função de valores reais, definida no conjunto parcialmente ordenado P e $g(y) = \sum_{x \leq y} f(x)$ então a função de Möbius do conjunto parcialmente ordenado P permite obter f em função de g

$$f(y) = \sum_{x \leq y} g(x) \mu_P(x, y)$$

O livro de Aigner, [1], é uma boa referência para um estudo completo das características desta função bem como de resultados uteis ao seu cálculo particularmente no caso de P ser um reticulado.

No livro [100], é feito um resumo dos resultados conhecidos sobre a função de Möbius do reticulado dos fechados de um matroide. É também definido o *polinómio característico* de um matroide e traduzido para linguagem matroidal o chamado *problema crítico* que permite obter nesta linguagem um problema equivalente ao da coloração de um mapa com 4 cores.

Para poder classificar matroides orientados acíclicos de *rank* n , como no caso dos n -politopes convexos, uma das perguntas plausíveis é:

Quais os n -uplos ordenados (x_1, \dots, x_n) admissíveis se, $\forall i : 1 \leq i \leq n$, $x_i = f_i$ for o número de faces de rank i do matroide orientado?

Para politopos este problema só está completamente resolvido em dimensão 3. No entanto, para qualquer politopo convexo C de dimensão n há uma relação linear entre todas as coordenadas de um tal n -uplo, a chamada *relação de Euler*:

$$\sum_{i=-1}^n (-1)^i \cdot f_i(C) = 0 \text{ onde, por definição, } f_{-1}(C) = 1$$

Como já referimos no texto a relação de Euler é válida para matroides orientados.

4.6.3. Complexos celulares regulares

As decomposições celulares de que falamos nesta secção são uma classe particular dos *CW-complexos*, próxima dos complexos simpliciais – *os CW-complexos regulares e finitos*. As definições e resultados mais gerais podem ser consultados em qualquer livro básico de topologia algébrica, ver, e.g., [93]. Aqui restringir-nos-emos ao que foi utilizado no texto.

Definição 4.16. 1. Uma *célula* (de dimensão d) é um espaço homeomorfo a $B_d = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}$ para algum d ; e uma *célula aberta* (de dimensão d) é um espaço homeomorfo ao $\text{Int } B_d$.

2. Um *CW-complexo*, Δ , é uma colecção de células abertas disjuntas, $\{\sigma\}_{\sigma \in \Delta}$, cuja união é um espaço topológico de Hausdorff, $\|\Delta\|$, e tais que:

C Para cada σ existe uma aplicação contínua, $f_\sigma : B_d \rightarrow \|\Delta\|$ que restrita ao interior de B_d é um homeomorfismo sobre σ e cuja imagem da fronteira de B_d está contida numa união finita de células abertas de dimensão menor que d ;

W Um conjunto F é fechado em $\|\Delta\|$ se $F \cap \bar{\sigma}$ é fechado em $\bar{\sigma}$ para todo o σ .

3. Se a colecção de células abertas é finita diz-se que Δ é um *CW-complexo finito*. Note-se que neste caso a condição [W] é redundante.

4. Se para todo σ se puder tomar para função característica $f_\sigma : B_d \rightarrow \|\Delta\|$ um *homeomorfismo* tal que $f_\sigma(S_{d-1})$ é igual a uma união finita de células abertas de dimensão menor que d , o CW-complexo diz-se *regular*.

Os exemplos mais comuns de complexos celulares regulares são os complexos polidrais Π , cujas células são politopos convexos que se intersectam

segundo faces comuns; quando estes politopos são fecho convexo de um conjunto independente afim de pontos de \mathbb{R}^d , i.e., os elementos de Π são simplexos, então o complexo é simplicial.

- Se $\sigma, \tau \in \Delta$ e $\sigma \subseteq \tau$ diz-se que σ é face de τ .
- O conjunto parcialmente ordenado das faces de Δ , $\mathcal{F}(\Delta)$, é o conjunto das células de Δ ordenado por inclusão.
- $\Gamma \subseteq \Delta$ é um subcomplexo se toda a célula de Δ que é face de uma célula Γ também é célula de Γ .
- O k -esqueleto de Δ é o subcomplexo $\Delta_{\leq k} = \{\sigma \in \Delta : \text{dimensão de } \sigma \leq k\}$. As células de dimensão 0 [resp. 1] chamam-se *vértices* [resp. *arestas*].
- Se um espaço topológico T é homeomorfo a $\|\Delta\|$ diz-se que Δ é uma decomposição celular regular de T .

Definição 4.17. Seja $\langle P, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado. O complexo das cadeias de P , $K_{ord}(P)$, é o complexo simplicial abstracto cujos vértices são os elementos de P e cujos simplexos são as cadeias de P , i.e., os subconjuntos totalmente ordenados de P .

Representamos por $\|K_{ord}(P)\|$ ou por $\|K\|$ a realização geométrica de um tal complexo.

Proposição 4.18. ([9], Prop.4.7.8) *Se Δ é um complexo celular regular então o espaço topológico $\|\Delta\|$ é homeomorfo à realização geométrica do complexo das cadeias do conjunto das faces de Δ , $\|K_{ord}(\mathcal{F}(\Delta))\|$.*

Este homeomorfismo pode ser escolhido de tal modo que a sua restrição a uma qualquer célula $\sigma \in \Delta$ é um homeomorfismo sobre o complexo geométrico associado ao conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{F}_{\leq \sigma} = \{\tau \in \mathcal{F}(\Delta) : \tau \leq \sigma\}$, $\|K_{ord}(\mathcal{F}_{\leq \sigma})\|$.

Corolário 4.19. *Se Δ é um complexo celular regular então $\|\Delta\|$ é determinado, a menos de homeomorfismo, por $\mathcal{F}(\Delta)$. Mais, para todo o $\sigma \in \Delta$, $\|K_{ord}(\mathcal{F}_{< \sigma})\|$ é homeomorfo à esfera $S^{(\dim \sigma - 1)}$.*

Assim, se $P \simeq \mathcal{F}(\Delta)$ então o complexo simplicial $\|K_{ord}(P)\|$ é uma subdivisão baricêntrica de $\|\Delta\|$. Reciprocamente, é possível caracterizar os conjuntos parcialmente ordenados obtidos deste modo – os conjuntos parcialmente ordenados CW:

Teorema 4.20. ([6]) *Seja P um conjunto parcialmente ordenado tal que, para todo o $x \in P$, $x \neq 0$, o complexo simplicial $\|K_{ord}(P_{< x})\|$ é homeomorfo a uma esfera; então existe um complexo celular regular, Δ , tal que $P \simeq \mathcal{F}(\Delta)$.*

4.6.4. Homotopia combinatória

Seja Δ um CW -complexo conexo. O 2-esqueleto de Δ , $\Delta_{\leq 2} = V \cup E$, determina o grupo de homotopia de Δ .

Consideremos as *arestas* (células de dimensão 1) de Δ com uma orientação fixada; então:

Definição 4.21. 1. Um *caminho nas arestas* de Δ , γ , é um produto finito de arestas sinalizadas:

$$\gamma = e_1^{\epsilon_1} \cdot e_2^{\epsilon_2} \cdots e_n^{\epsilon_n} \text{ onde } e_i \in E, \epsilon_i \in \{-1, +1\}, \forall i, 1 \leq i \leq n$$

tais que o vértice inicial de qualquer aresta é o vértice final da anterior e uma aresta e_i é percorrida segundo o seu sentido se e só se $\epsilon_i = +$.

2. O *comprimento* de um caminho é dado pelo número de arestas do caminho, $\text{comprimento}(\gamma) = n$.
3. É também um caminho de arestas o *caminho vazio*, i.e., aquele que é constituído por um vértice isolado.
4. γ é um *caminho fechado* se o vértice inicial de e_1 coincide com o vértice final de e_n .
5. O produto de dois caminhos fechados, γ e γ' , com o mesmo vértice inicial é dado pela justaposição dos dois caminhos, i.e.:

$$\gamma \cdot \gamma' = e_1^{\epsilon_1} \cdot e_2^{\epsilon_2} \cdots e_n^{\epsilon_n} \cdot e_1^{\epsilon'_1} \cdot e_2^{\epsilon'_2} \cdots e_n^{\epsilon'_n}.$$

Definição 4.22. Dois caminhos, γ e γ' , com o mesmo vértice inicial são *combinatoriamente homotópicos*, $\gamma \approx \gamma'$, se é possível obter um do outro efectuando um número finito das seguintes *deformações elementares*:

- Inserir ou retirar uma aresta que é percorrida consecutivamente num sentido e no oposto, $e^\epsilon \cdot e^{-\epsilon} \approx \emptyset$.
- Inserir ou retirar um caminho fechado que percorre a fronteira de uma célula de dimensão 2, $\gamma(\text{fronteira}\sigma_2) \approx \emptyset$.

Proposição 4.23. O grupo fundamental $\Pi_1(\Delta)$ coincide com o grupo cujos elementos são as classes de caminhos fechados nas arestas de Δ e de vértice inicial fixado, O :

$$\bar{\gamma} = \{\gamma' : \gamma' \approx \gamma\}$$

e onde o produto de duas classes é a classe do produto de dois dos seus respectivos representantes.

Bibliografia

- [1] M. Aigner, *Combinatorial theory*, Springer-Verlag (1979) New York.
- [2] R. G. Bland e M. Las Vergnas, *Orientability of matroids*, J. Comb. Theory, Ser. B 24 (1978), 94-123.
- [3] M. Bayer e B. Sturmfels, *Lawrence polytopes*, Canadian J. Math., 42 (1990), 62-79.
- [4] D. W. Barnette, *Graph theorems for manifolds*, Israel J. of Math. 16 (1973), 62-72.
- [5] G. Birkhoff, *Abstract linear dependence in lattices*, Amer. J. of Math. 57 (1935), 800-804.
- [6] A. Björner, *Posets, regular CW posets and Bruhat order*, Europ. J. of Combinatorics 5 (1984), 7-16.
- [7] A. Björner, P.H. Edelman e G.M. Ziegler, *Hyperplane arrangements with a lattice of regions*, Discrete Comput. Geometry 5 (1990), 263-288.
- [8] A. Björner e G.M. Ziegler, *Combinatorial Stratification of Complexified Arrangements*, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), 105-149.
- [9] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White e G.M. Ziegler, *Oriented matroids*, Cambridge Univ. Press, (1993).
- [10] R.G.Bland e B.L.Dietrich, *A unified interpretation of several combinatorial dualities*, Cornell University School of OR/IE Technical Report N. 726 (1986); também publicado como IBM Research Report 12527 (1987).
- [11] J. Bokowski, A. Guedes de Oliveira e J.Richter-Gebert, *Algebraic varieties characterizing matroids and oriented matroids*, Advances in Maths. 87 (1991), 160-185.
- [12] J. Bokowski e A. Guedes de Oliveira, *Invariant theory-like theorems for matroids and oriented matroids*, Advances in Math., aguarda publicação.
- [13] J. Bokowski, B. Sturmfels, *On the coordinatization of oriented matroids*, Discrete Comput. Geometry 1 (1986), 293-306.
- [14] J. Bokowski, B. Sturmfels, *Computational Synthetic Geometry*, Lecture Notes in Math.1355 , Springer, Heidelberg (1989).

- [15] J. Bokowski, B. Sturmfels, *An infinite family of minor-minimal nonrealizable 3-chirotopes*, Math. Zeitschrift 200 (1989), 583-589.
- [16] T. Brylawski, *A combinatorial model for series-parallel networks*, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971), 1-22.
- [17] T. Brylawski e E. Dieter, *Exchange Systems*, Discrete Math. 69 (1988), 123-151.
- [18] H. Bruggesser e P. Mani, *Shellable decompositions of cells and spheres*, Math. Scand. 29 (1971), 197-205.
- [19] P. Camion, *Modules Unimodulaires*, J. Comb. Theory 4 (1968), 301-362.
- [20] M. Conforti, M. Laurent, *On the facial structure of independence system polyhedra*, Math. of Operations Research 13 (1988), 543-555.
- [21] R. Cordovil, *Sur les matroïdes orientés de rang trois et les arrangements de pseudodroites dans le plan projectif réel*, Europ. J. Combinatorics 3 (1982), 307-318.
- [22] R. Cordovil, *A combinatorial perspective of the non-Radon partitions*, J. Comb. Theory Ser.A 38 (1985), 38-47.
- [23] R. Cordovil, *On the homotopy type of the Salvetti complexes determined by simplicial arrangements*, Europ. J. Combinatorics, aguarda publicação.
- [24] R. Cordovil, *On the center of the fundamental group of the complement of a hyperplane arrangement*, Port. Math., aguarda publicação.
- [25] R. Cordovil e W. Bienia, *An axiomatic of the non-Radon partitions*, Europ. J. Combinatorics 8 (1987), 1-4.
- [26] R. Cordovil e K. Fukuda, *Oriented matroids and combinatorial manifolds*, Europ. J. Combinatorics 14 (1993), 9-15.
- [27] R. Cordovil, K. Fukuda e M.L. Moreira, *Clutters and matroids*, Discrete Math. 89 (1991), 161-171.
- [28] R. Cordovil e A. Guedes de Oliveira, *A note on the fundamental group of the Salvetti complex determined by an oriented matroid*, Europ. J. Combinatorics 13 (1992), 429-437.
- [29] R. Cordovil, A. Guedes de Oliveira e M. Las Vergnas, *A generalized Desargues configuration and the pure braid group*, pre-publicação CMAF, 1992.
- [30] R. Cordovil, M. Las Vergnas e A. Mandel, *Euler's relation, Möbius functions and matroid identities*, Geometriae Dedicata 13 (1982), 147-162.
- [31] R. Cordovil e M.L. Moreira, *Bases-cobases graphs and polytopes of matroids*, Combinatorica 13 (2) (1993), 157-165.
- [32] R. Cordovil e M.L. Moreira, *A homotopy theorem on oriented matroids*, Discrete Math. 111 (1993), 131-136.
- [33] R. Cordovil e I. P. da Silva, *A problem of MacMullen on the projective equivalences of polytopes*, Europ. J. Combinatorics 6 (1985), 157-161.

- [34] R. Cordovil e I. P. da Silva, *Determining a matroid polytope by non-Radon partitions*, Linear Algebra Appl. 94 (1987), 55-60.
- [35] H. Crapo e G.-C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory: Combinatorial Geometries*, Preliminary edition, M.I.T. Press (1970), Cambridge, Mass..
- [36] R.L. Cummins, *Hamiltonian circuits in tree graphs*, IEEE Trans. Comput. Theory 13 (1966) 82-90.
- [37] P. Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Inventiones Math. 17 (1972), 273-302.
- [38] G.A. Dirac, *A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs*, J. London Math. Soc. 27 (1952), 85-92.
- [39] R.J. Duffin, *Topology of series-parallel networks*, J. Math. Anal. Appl. 10 (1965), 303-318.
- [40] P. Edelman, *A partial order on the regions of \mathbb{R}^n dissected by hyperplanes*, Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1984), 617-631.
- [41] J. Edmonds, *Matroids and the greedy algorithm*, Math. Programming 1 (1971), 127-136.
- [42] J. Edmonds, *Submodular functions, matroids and certain polyhedra*, Proc. Int. Conf. Combinatorics (Calgary), Gordon and Breach, New York (1970), 69-87.
- [43] J. Edmonds e D.R. Fulkerson, *Transversals and matroid partition*, J. Res. Nat. Bur. Stand., 69B (1965), 147-153.
- [44] J. Edmonds e D.R. Fulkerson, *Bottleneck extrema*, Journal of Combinatorial Theory 8 (1970), 299-306.
- [45] M. Farber, *A note on basis pair graphs*, Research Report Corr 84-13, Univ. of Waterloo (1984), não publicado.
- [46] M. Farber, *Basis pair graphs of transversal matroids*, Discrete Math. 73 (1989), 245-248.
- [47] M. Farber, B. Richter e H. Shank, *Edge-disjoint spanning trees: A connectedness theorem*, J. of Graph Theory 8 (1985), 319-324.
- [48] J. Fonlupt e A. Zemirline, *On the number of common bases of two matroids*, Discrete Math. 45 (1983), 217-228.
- [49] M. J. Falk e B. Sturmfels, *Homotopy types of arrangements and matroid realizations*, preprint (1990).
- [50] J. Folkman e J. Lawrence, *Oriented matroids*, J. Combin. Theory, Ser. B 25 (1978), 199-236.
- [51] K. Fukuda, *Antipodal graphs and oriented matroids*, Research Report 90-14, Graduate School of Systems Management, University of Tsukuba, Tokyo (1990).

- [52] I.M. Gelfand, R.M. Goresky, R.D. MacPherson e V. Serganova, *Combinatorial geometries, convex polyhedra and Schubert cells*, Adv. in Math. 63 (1987), 301-306.
- [53] I. M. Gel'fand e G. L. Rybnikov, *Algebraic and topological invariants of oriented matroids*, Soviet Math. Doklady, 40 (1990), 148-152.
- [54] I.M. Gelfand e V. Serganova, *Combinatorial geometries and torus strata on homogeneous compact manifold*, Uspekhi Mat. Nank 42:2 (1987), 107-134.
- [55] R. Giles, *Submodular functions, graphs and integer polyhedra*, Ph. D. Thesis (1975) Univ. Waterloo.
- [56] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Interscience Publ., London (1967).
- [57] B. Grünbaum, *Arrangements of hyperplanes*, Proc. Second Louisiana Conf. on Combinatorics and Graph Theory (1971), 41-106.
- [58] B. Grünbaum, *Arrangements and spreads*, CBMS Regional Conference Series in Math. 10, Amer. Math. Soc., Providence , R. I. (1972).
- [59] A. Guedes de Oliveira, *Oriented matroids and projective invariant theory*, Dissertation, TH Darmstadt (1990).
- [60] K. Handa, *A characterization of oriented matroids in terms of topes*, Europ. J. of Combinatorics 11 (1990),41-45.
- [61] Y. Hamidoune, *Comunicação pessoal*, June 89.
- [62] P. Hell e E.R. Speer, *Matroids with weighted bases and Feynman integrals*, Annals of Discrete Math. 20 (1984), 165-175.
- [63] C.A. Holzman e F. Harary, *On the tree graph of a matroid*, SIAM J. Appl. Math. 22 (1972), 187-193.
- [64] Y. Kajitani, K. Sugishita, *Ordering of elements of a matroid such that its consecutive r elements are independent*, Proc. Techn. Group Circuits and Systems, Inst. of Elect. and Com. Eng. of Japan, CAS83-124 (1983), 89-94.
- [65] Y. Kajitani, S. Ueno, H. Miyano, *Ordering of the elements of a matroid such that its consecutive w elements are independent*, Discrete Math. 72 (1988), 187-194.
- [66] B. Korte e L. Lovász, *Greedoids – A structural framework for the greedy algorithm*, Progress in Combinatorial Optimizations: Proc. of the Silver Jubilee Conference on Combinatorics, Waterloo, 1982 (Academic Press, New York, 1984).
- [67] J.P.S. Kung, *Alternating basis exchanges in matroids*, Proc. Amer. Math. Soc. 71 (1978), 355-358.
- [68] J.P.S. Kung, *A characterization of orthogonal duality in matroid theory*, Geometriae Dedicata 15 (1983), 69-72.
- [69] M. Las Vergnas, *Convexity in oriented matroids*, J. Combin. Theory, Ser. B 29 (1980), 231-243.

- [70] M. Las Vergnas, *Oriented matroids as signed geometries real in corank 2*, Finite and infinite sets, (Proc. 6th Hungarian Combinatorial Conf. Eger 1981), North-Holland (1984), 555-565.
- [71] M. Las Vergnas, *Matroïdes orientables*, Preprint (1974), não-publicado.
- [72] J. Lawrence, *Lopsided sets and orthant-intersection by convex sets*, Pac. J. Math. 104 (1983), 155-173.
- [73] D. Ljubić, J.-P. Roudneff e B. Sturmfels, *Arrangements of lines and pseudolines without adjacent triangles*, J. Combinatorial Theory, A, 50 (1989), 24-32.
- [74] D. Lucas, *Weak maps of combinatorial geometries*, Trans. of Amer. Math. Soc. 206 (1975), 247-279.
- [75] S. MacLane, *Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry*, Amer. J. of Math. 58 (1936), 236-240.
- [76] A. Mandel, *Topology of oriented matroids*, Ph.D. Thesis (1982) University of Waterloo.
- [77] S.B. Maurer, *Matroid basis graph I*, J. Combin. Theory B 14 (1973), 216-240.
- [78] S.B. Maurer, *Matroid basis graph II*, J. Combin. Theory B 15 (1973), 121-145.
- [79] G.J. Minty, *On the abstract foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming*, J. Math. Mech. 15 (1966), 485-520.
- [80] L. Mirsky e H. Perfect, *Systems of representatives*, J. Math. Anal. and Appl. 15 (1966), 520-568.
- [81] J. Morgado, *Introdução à teoria dos reticulados I e II*, Textos de Matemática, Inst. de Física Matemática, Univ. do Recife (1962).
- [82] B. S. Munson, *Face lattices of oriented matroids*, Ph.D. Thesis, Cornell University (1984).
- [83] P. Orlik, *Introduction to arrangements*, CBMS Lecture Notes 72, Amer. Math. Soc., 1989.
- [84] P. Orlik e L. Solomon, *Combinatorics and topology of complements of hyperplanes*, Inventiones Math., 56 (1980), 167-189.
- [85] P. Orlik e H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Springer Verlag (1992).
- [86] R. Rado, *Note on independence functions*, Proc. London Math. Soc. 7 (1957), 300-320.
- [87] R. Randell, *The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes*, Invent. Math. 69 (1982), 103-108. Correction: Invent. Math. 80 (1985) 467-468.

- [88] R.T. Rockafellar, *The elementary vectors of a subspace of \mathbb{R}^n , in combinatorial mathematics and its applications*, Proc. of the Chapel Hill Conf., Univ. of North Carolina Press (1969) Chapel Hill.
- [89] G.-C. Rota, J.N.Srivastava et al., (eds), *A survey of Combinatorial Theory*, North-Holland Publishing Company (1973).
- [90] M. Salvetti, *Topology of the complement of real hyperplanes in \mathbb{C}^n* , Inventiones Math. 88 (1987), 603-618.
- [91] P.D.Seymour, *The forbidden minors of binary clutters*, J. London Math. Soc.(2) , 12 (1976), 356-360.
- [92] Ilda P. F. da Silva, *An axiomatic for the set of maximal vectors of an oriented matroid based on the symmetry properties of the set of vectors*, pré-publicação, CMAF (1992).
- [93] H. Seifert e W. Threlfall, *Seifert and Threlfall: a textbook of topology*, Academic Press (1980).
- [94] W.T. Tutte, *A homotopy theorem for matroids I and II*, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), 144-174.
- [95] W.T. Tutte, *Matroids and graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), 527-552.
- [96] B.L. Van der Waerden, *Modern Algebra*, Springer (Berlim) 1937.
- [97] P.Vaderlind, *Clutters and semimatroids*, European J. Combinatorics, 7 (1986), 271-282.
- [98] D.J.A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic Press, London (1976).
- [99] N. White (ed), *Theory of Matroids*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 26, Cambridge Univ. Press (1986).
- [100] N. White (ed), *Combinatorial Geometries*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 29, Cambridge Univ. Press (1987).
- [101] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, Amer. J. Math. 57 (1935), 509-533.
- [102] T. Zaslasky, *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes*, Mem. Amer. Math. Soc. 1 (1975), n.154.
- [103] G. M. Ziegler, *Algebraic combinatorics of hyperplane arrangements*, Ph.D. dissertation, M.I.T. (1987).