Tiago Marques Fardilha

A estrutura de Poisson transversa em duais de álgebras de Lie

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2003

Tiago Marques Fardilha

A estrutura de Poisson transversa em duais de álgebras de Lie

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
2003

Conteúdo

Introdução

O principal objectivo deste trabalho é definir uma estrutura de Poisson transversa a uma folha simpléctica S num ponto de M, onde M é uma variedade de Poisson. Dar-se-á especial relevo ao caso em que M é o dual de uma álgebra de Lie e incluem-se alguns exemplos concretos.

Uma variedade M diz-se "de Poisson" se e só se existir uma aplicação

$$\{,\} : C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$$

bilinear, simétrica e que satisfaça a identidade de Jacobi e a regra de Leibniz. O parêntesis $\{,\}$ pode ser explicitado para duas funções arbitrárias ou, dadas coordenadas locais $\{x_1, ..., x_n\}$ de M, pode definir-se a "matriz de Poisson no ponto p", $[\{x_i, x_j\}(p)]_{i,j=1}^{n}$. Outra forma de criar uma estrutura de Poisson em M envolve a definição de um morfismo de fibrados $B : T^*M \to TM$, satisfazendo certas propriedades.

A "característica" de uma variedade de Poisson $(M; \{,\})$ em cada ponto p é dada pela característica de $B_p : T_p^*M \to T_pM$. Se uma variedade de Poisson tem característica constante e maximal (i.e., igual à dimensão de M em todo o ponto p), então diz-se "simpléctica".

Qualquer variedade de Poisson M pode ser particionada em classes de equivalência que são subvariedades de Poisson (ou seja, subvariedades que possuem uma estrutura de Poisson dada pela restrição do parêntesis $\{,\}$ de M) e que têm característica constante e maximal. Uma tal partição diz-se uma "folheação" de M e as classes de equivalência designam-se por "folhas simplécticas". Note-se que estas folhas podem ter dimensão variável, pelo que tal folheação não é necessariamente regular.

O Teorema da Decomposição de Weinstein (ver [5]) afirma que, para qualquer ponto p de M, existe uma subvariedade $N \subset M$ que intersecta transversalmente (em p) a folha simpléctica S que passa por p. Essa subvariedade possui uma estrutura de Poisson, não necessariamente dada pela restrição da estrutura em M, e denomina-se "estrutura (ou variedade) de Poisson transversa a S em p". Além disso, Weinstein provou que, num certo sentido, a estrutura transversa é única. As diversas estruturas de Poisson transversas a S em p que poderão existir são de certeza Poisson-difeomorfas (i.e., existem difeomorfismos entre elas que são funções de Poisson).

Consideremos agora uma álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ de dimensão finita. O seu dual $\mathfrak{g}^*$ é uma variedade de Poisson quando munida do parêntesis de Lie-Poisson. Seja G o grupo de Lie conexo e simplesmente conexo do qual $\mathfrak{g}$ é álgebra de Lie. Neste caso, a folha simpléctica S em cada ponto $\mu \in \mathfrak{g}^*$ é exactamente a órbita de μ pela acção coadjunta de G em $\mathfrak{g}^*$. Neste caso particular, prova-se que a subvariedade N do Teorema da Decomposição pode ser escolhida como o espaço afim $\mu + \mathfrak{n}_{\mu}^{\circ}$ onde $\mathfrak{n}_{\mu}$ é qualquer complemento de $\mathfrak{g}_{\mu}$ em $\mathfrak{g}^*$ ($\mathfrak{g}_{\mu}$ é a álgebra de isotropia em μ).

Neste trabalho propõe-se um método de cálculo da estrutura transversa em duais de álgebras de Lie diferente do apresentado por Cushman e Roberts em [2]. Em vez de definir o parêntesis de Poisson em N a partir da decomposição de T_q^*M seguinte,

$$T_q^*M = (T_qN)^{\circ} \oplus \left(B_q\left((T_qN)^{\circ}\right)\right)^{\circ},$$

optou-se por utilizar uma decomposição de T_qM:

$$T_qM = T_qN \oplus B_q\left((T_qN)^{\circ}\right)$$

onde B é o morfismo de fibrados atrás referido. Desta maneira, a fórmula para o parêntesis de Poisson em N (que é escolhida como $\mu + \mathfrak{n}_{\mu}^{\circ}$, no caso do dual de uma álgebra de Lie) resulta mais simples. Como consequência imediata desta fórmula, obtém-se o resultado de P. Molino (1984):

Se se tiver

$$[\mathfrak{g}_{\mu}, \mathfrak{n}_{\mu}] \subset \mathfrak{n}_{\mu},$$

então a estrutura de Poisson transversa é Poisson-difeomorfa à estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}_{\mu}^*$.

De seguida, usa-se a fórmula referida para calcular explicitamente a estrutura de Poisson transversa à órbita coadjunta por qualquer ponto nos casos em que $\mathfrak{g}$ é uma das álgebras de Lie:

- $\underbrace{A_2 \times .. \times A_2}_{n \text{ vezes}}$, onde A_2 é a álgebra de Lie não-comutativa de dimensão 2;
- $\mathfrak{so}_4$, a álgebra do grupo de Lie das matrizes 4×4 ortogonais de determinante positivo SO_4;
- $\mathfrak{se}_3$, a álgebra do grupo de Lie $SE_3 = SO_3 \propto \mathbb{R}^3$.

No primeiro dos exemplos verifica-se a condição de P. Molino, pelo que a estrutura de Poisson transversa é Poisson-difeomorfa à estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}_\mu^*$.

Cushman e Roberts provaram (ver [2]) que a estrutura de Poisson transversa ao dual de uma álgebra de Lie semi-simples é polinomial (i.e., as entradas da matriz de Poisson são polinomiais). Note-se que tal não é verdade para uma escolha arbitrária de N. O que acontece é que, para todo o ponto μ, existe uma escolha de N para a qual a estrutura transversa é polinomial. É esse o caso de $\mathfrak{so}_4^*$, já que $\mathfrak{so}_4$ é semi-simples.

No exemplo relativo a $\mathfrak{so}_4^*$, escolheram-se dois complementos de $\mathfrak{g}_\mu$ possíveis. Em primeiro lugar, tomou-se para $\mathfrak{n}_\mu$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{g}_\mu$ (em relação ao produto interno usual) e, nesse caso, a estrutura transversa é polinomial. De facto, satisfaz a condição de Molino, pelo que a estrutura transversa é dada pela restrição da estrutura de Lie-Poisson a $\mathfrak{g}_\mu^*$.

Em segundo lugar, explicitou-se uma outra escolha de $\mathfrak{n}_\mu$ para a qual as entradas da matriz de Poisson transversa não são polinomiais, mas sim funções racionais das coordenadas em $N = \mu + \mathfrak{n}_\mu^\circ$.

Por último, a estrutura de Poisson transversa a $\mathfrak{se}_3^*$ resulta não-polinomial para o complemento $\mathfrak{n}_\mu$ escolhido. Este exemplo foi abordado em [2] por Cushman e Roberts, mas neste artigo foi calculada explicitamente a estrutura de Poisson transversa apenas em alguns pontos de $\mathfrak{se}_3^*$.

Capítulo 1
GENERALIDADES SOBRE VARIEDADES DE POISSON

Algumas convenções seguidas neste trabalho:

- M designará uma variedade diferenciável de dimensão finita.
- Designar-se-á por $C^{\infty}(M)$ o conjunto de todas as funções $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciáveis.
- Designar-se-á por $A^k(V)$ o conjunto das k-formas algébricas no espaço vectorial V e por $\Omega^k(M)$ o conjunto das k-formas diferenciais numa variedade diferencial M. Além disso:

$$\Omega^0(M) \overset{def}{=} C^{\infty}(M).$$

- Denotar-se-á por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vectores diferenciáveis na variedade M.
- Se $\varphi : M \to N$ é aplicação diferenciável entre variedades, então φ^* designará o pull-back por φ.
- Se Φ é uma acção de um grupo de Lie G no conjunto Y e $y \in Y$, denotar-se-á por $\Phi_G(y)$ o conjunto

$$\{\Phi_g(y) : g \in G\},$$

  que poderá ser designado por "órbita de y" (por G).
- Se M é uma variedade diferenciável, $p \in M$ e φ_t é o fluxo de $X \in \mathfrak{X}(M)$, designa-se por "curva integral de X por p", e representa-se por $\mathcal{O}$, o conjunto

$$\{\varphi_t(p) : t \in I\},$$

  onde I é o intervalo maximal onde a curva $\varphi_t(p)$ está definida.
- Dado um espaço vectorial V, designar-se-á por $\langle \alpha, v \rangle$ a avaliação de $\alpha \in V^*$ em $v \in V$.
- Por V_1° representa-se o *anulador* do subespaço vectorial $V_1 \subset V$, i.e.

$$V_1^{\circ} = \{\alpha \in V^* : \langle \alpha, v \rangle = 0, \forall v \in V_1\}$$

- Por $V_1^{\perp}$ representa-se o *subespaço ortogonal* ao subespaço vectorial $V_1 \subset V$ em relação a um produto interno a especificar.
- Usar-se-á frequentemente o isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & V & \to & V^{**} \\ & v & \mapsto & \Psi_v \end{array},$$

  onde Ψ_v é a aplicação definida por

$$\begin{array}{rccc} \Psi_v : & V^* & \to & \mathbb{R} \\ & \alpha & \mapsto & \langle \alpha, v \rangle \end{array}.$$

  Identificar-se-á frequentemente $v \in V$ com $\Psi_v \in V^{**}$.

Nota 1.1 *Todas as variedades referidas serão variedades diferenciáveis e todas as aplicações serão de classe C^{∞}, mesmo que tal facto esteja omitido no texto.*

1.1 Variedades de Poisson

Definição 1.2 *Seja M uma variedade diferenciável. Um "parêntesis de Poisson" em M é uma aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \{,\}: C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) & \rightarrow & C^{\infty}(M) \\ (f,g) & \mapsto & \{f,g\} \end{array}$$

com as seguintes propriedades:

1. *é anti-simétrica,*
$$\{f,g\} = -\{g,f\}, \forall f,g \in C^{\infty}(M);$$
2. *é bilinear,*
$$\{\lambda_1 f + \lambda_2 g, h\} = \lambda_1\{f,h\} + \lambda_2\{g,h\}, \forall \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall f,g,h \in C^{\infty}(M);$$
3. *satisfaz a identidade de Jacobi,*
$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0, \forall f,g,h \in C^{\infty}(M);$$
4. *satisfaz a regra de Leibniz,*
$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g, \forall f,g,h \in C^{\infty}(M);$$

Diz-se que $(M;\{,\})$ é uma "variedade de Poisson".

Nota 1.3 *As propriedades* 2. e 4. *implicam que, fixada $f \in C^{\infty}(M)$, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \{f,\cdot\}: & C^{\infty}(M) & \rightarrow & C^{\infty}(M) \\ & g & \longmapsto & \{f,g\} \end{array}$$

é uma derivação em $(C^{\infty}(M), \cdot)$, pelo que a seguinte definição faz sentido.

Definição 1.4 *(Campos Hamiltonianos)*

Seja $(M;\{,\})$ uma variedade de Poisson e $f \in C^{\infty}(M)$. Designa-se por "campo hamiltoniano associado à função f", denotado por X_f, ao campo definido por

$$\begin{array}{rccc} X_f: & C^{\infty}(M) & \rightarrow & C^{\infty}(M) \\ & g & \mapsto & \{f,g\} \end{array}.$$

O conjunto de todos os campos hamiltonianos em M denota-se por $\mathfrak{X}_H(M)$.

Lema 1.5 *Sejam $(M;\{,\})$ uma variedade de Poisson, $x_1,...,x_n$ coordenadas locais em M e*

$$f,g \in C^{\infty}(M).$$

Então

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\{x_i,x_j\} = \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\{x_i,x_j\}.$$

Nota 1.6 *Consequentemente, a estrutura de Poisson numa variedade M fica completamente determinada pela matriz*

$$P(p) = (P_{ij}(p))_{i,j=1}^{n},$$

onde

$$P_{ij}(p) = \{x_i, x_j\}(p).$$

A matriz P será doravante designada por "matriz de Poisson da estrutura $(M; \{,\})$" (nas coordenadas $\{x_1, ..., x_n\}$).

Prova. Tem-se

$$\{f, g\} = X_f(g) = dg(X_f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j(X_f); \tag{1.1}$$

e

$$\begin{aligned} dx_j(X_f) &= X_f(x_j) = \{f, x_j\} = -\{x_j, f\} = -df(X_{x_j}) = \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(X_{x_i}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\{x_j, x_i\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\{x_i, x_j\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

(1.1) e (1.2) provam o pretendido. ■

Definição 1.7 *Dada uma variedade M, o seu fibrado tangente TM e o seu fibrado cotangente T^*M, diz-se que uma aplicação diferenciável*

$$B : T^*M \to TM$$

é um "morfismo de fibrados" se e só se, para todo o $p \in M$, se tem:

1. $B_p : T_p^*M \to T_pM$;
2. B_p *é $\mathbb{R}$-linear.*

Lema 1.8 *Dada uma variedade de Poisson $(M, \{,\})$, é possível definir um morfismo de fibrados $B : T^*M \to TM$ tal que*

$$\{f, g\} = \langle dg, B(df)\rangle, \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Prova. Vai-se encarar B como aplicação de $\Omega^1(M)$ em $\mathfrak{X}(M)$. Seja então $\alpha \in \Omega^1(M)$. Considere-se em primeiro lugar o caso em que α é exacta, i.e., tem-se $\alpha = df$ para alguma função $f \in C^\infty(M)$. Neste caso , define-se $B(\alpha) = X_f$. Se α não for exacta, considera-se a expressão de α num sistema $(x_1, ..., x_n)$ de coordenadas locais em M:

$$\alpha = \alpha_1 dx_1 + ... + \alpha_n dx_n,\ \alpha_i \in C^\infty(M).$$

Toma-se

$$B(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B(dx_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{x_i}.$$

B assim definido é um morfismo de fibrados e verifica-se que

$$\langle dg, B(df)\rangle = \langle dg, X_f\rangle = \{f, g\}.$$

■

Nota 1.9 *A anti-simetria e a identidade de Jacobi, satisfeitas por $\{,\}$, impõem algumas condições adicionais sobre B.*

Definição 1.10 *Seja $(M;\{,\})$ uma variedade de Poisson e $p \in M$.*

- *A "característica" de $\{,\}$ em p, denotada por $car_p\{,\}$, é a característica da aplicação $B_p : T_p^*M \to T_pM$. Equivalentemente, $car_p\{,\}$ é a característica da matriz de Poisson (P_{ij}) no ponto p.*
- *O ponto p diz-se "regular" se e só se existe uma vizinhança de p em M onde $car_p\{,\}$ é constante. Caso contrário, p diz-se "singular".*
- *A estrutura $\{,\}$ diz-se "não degenerada" ou "simpléctica" se e só se, para todo o ponto $p \in M$:*

$$car_p\{,\} = \dim M.$$

Nota 1.11 *Note-se que:*

1. *Uma vez que a matriz de Poisson $(P_{i,j})$ é anti-simétrica (por anti-simetria de $\{,\}$), resulta que $car_p\{,\}$ é par.*
2. *Se p é tal que*
$$car_p\{,\} = \max_{q\in M} car_q\{,\}$$
então p é regular.

Exemplo 1.12 *Se (M,ω) é uma variedade simpléctica, então*

$$\{f,g\}^\omega = \omega\left(X_f, X_g\right)$$

define uma estrutura de Poisson em M.

Se, por exemplo, $M = \mathbb{R}^{2n}$ e $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n$ são coordenadas simplécticas, tem-se:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i,$$

logo

$$\{f,g\}^\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

A matriz de Poisson de $\{,\}^\omega$ é:

$$P(p) = \begin{pmatrix} (0_{n\times n}) & (\mathbb{I}d_{n\times n}) \\ (-\mathbb{I}d_{n\times n}) & (0_{n\times n}) \end{pmatrix}, \forall p \in M.$$

Tal matriz será designada por J_0.

Note-se que esta estrutura de Poisson é simpléctica ou não degenerada.

Exemplo 1.13 *Considere-se $\mathbb{R}^{2n+m}$, com coordenadas cartesianas*

$$\{x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z_1,...,z_m\}.$$

Quando munido do parêntesis

$$\{f,g\}^m = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}\frac{dg}{dy_i} - \frac{df}{dy_i}\frac{dg}{dx_i},$$

$\mathbb{R}^{2n+m}$ *é uma variedade de Poisson que não é simpléctica se* $m \neq 0$. *A matriz de Poisson de* $(\mathbb{R}^{2n+m}; \{,\}^m)$ *nestas coordenadas é*

$$P_{ij}(p) = \begin{pmatrix} (J_0) & (0_{2n\times m}) \\ (0_{m\times 2n}) & (0_{m\times m}) \end{pmatrix}, \forall p \in M.$$

Note-se que todos os pontos são regulares.

Exemplo 1.14 *Seja* $M = \mathbb{R}^3_{xyz}$, *onde* (x, y, z) *são as coordenadas cartesianas usuais. Então pode definir-se um parêntesis de Poisson da seguinte forma: dadas* $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\{f, g\}$ *é a única função tal que*

$$\{f, g\} dx \wedge dy \wedge dz = df \wedge dg \wedge (dx + dy + dz),$$

ou seja,

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Exemplo 1.15 *Seja* $(\mathfrak{g}; [,])$ *uma álgebra de Lie real de dimensão finita. Então* $\mathfrak{g}^*$ *é uma variedade de Poisson quando munida do parêntesis assim definido (parêntesis de Lie-Poisson):*

$$\{f, g\}_L(p) = \langle p, [df_p, dg_p] \rangle,$$

onde $p \in \mathfrak{g}^*$.

Note-se que f, g *são funções de* $\mathfrak{g}^*$ *em* $\mathbb{R}$, *logo* df_p, $dg_p \in (T_p\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$.

Que $\{,\}_L$ *é anti-simétrico, bilinear e satisfaz a identidade de Jacobi resulta do facto de o parêntesis* $[,]$ *verificar essas propriedades e de* $p : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ *ser uma aplicação linear. Assim, falta apenas verificar a regra de Leibniz para* $\{,\}_L$. *Dado* $p \in \mathfrak{g}^*$, *tem-se*

$$d(fg)_p = f(p)\, dg_p + g(p)\, df_p$$

e então

$$\begin{aligned} \{fg, h\}_L(p) &= \langle p, [d(fg)_p, dh_p] \rangle \\ &= \langle p, f(p)[dg_p, dh_p] + [df_p, dh_p] g(p) \rangle \\ &= f(p)(\{g, h\}_L(p)) + (\{f, h\}_L(p))\, g(p). \end{aligned}$$

1.2 Aplicações de Poisson

Definição 1.16 *Sejam* $(M_1; \{,\}_1)$ *e* $(M_2; \{,\}_2)$ *duas variedades de Poisson.*

(i) *Uma aplicação diferenciável* $J : M_1 \to M_2$ *diz-se "de Poisson" se e só se*

$$J^*\{f, g\}_2 = \{J^*f, J^*g\}_1, \forall f, g \in C^\infty(M_2).$$

No caso de J *ser também um difeomorfismo diz-se que "*J *é um difeomorfismo de Poisson".*

(ii) *Suponha-se que* $M_1 = M_2 = M$. *Um "automorfismo infinitesimal" em* $(M; \{,\})$ *é um campo de vectores* X *em* M *cujo fluxo* φ_t *satisfaz a seguinte propriedade:* $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t : D_t \to D_{-t}$ *é aplicação de Poisson, onde* D_t *é o subconjunto (eventualmente vazio) de* M *onde o fluxo* φ_t *está definido.*

Nota 1.17 *Se* J *é um difeomorfismo de Poisson, a sua inversa também o é. Mais ainda, o conjunto dos difeomorfismos de Poisson em* M *tem estrutura de grupo relativamente à composição.*

Nota 1.18 *Os difeomorfismos de Poisson preservam a característica. Se*

$$J : M_1 \to M_2$$

é um difeomorfismo de Poisson, então

$$car_p\{,\}_1 = car_{J(p)}\{,\}_2.$$

Teorema 1.19 (Liberman, Marle) *Sejam $(M;\{,\})$ uma variedade de Poisson e X um campo de vectores diferenciável em M. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) *X é uma derivação da álgebra $(C^\infty(M);\{,\})$, i.e., dadas $f,g \in C^\infty(M)$,*

$$X(\{f,g\}) = \{X(f),g\} + \{f, X(g)\};$$

(ii) *X é um automorfismo infinitesimal.*

Prova. Provemos em primeiro lugar a igualdade

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d}{dt}\varphi_{-t}^*\{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\}\right|_{t=t_0} = \\ &= -\varphi_{-t_0}^*\left(X\{\varphi_{t_0}^* f, \varphi_{t_0}^* g\}\right) + \varphi_{-t_0}^*\{X(\varphi_{t_0}^* f), \varphi_{t_0}^* g\} + \varphi_{-t_0}^*\{\varphi_{t_0}^* f, X(\varphi_{t_0}^* g)\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde $f,g \in C^\infty(M), X \in \mathfrak{X}(M)$ e φ_t é o fluxo de X.

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\varphi_{-t}^*\overbrace{\{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\}}^{h_t}\right|_{t=t_0}(p) &= \left.\frac{d}{dt}h_t \circ \varphi_{-t}(p)\right|_{t=t_0} \\ &= \left.\frac{d}{dt}h_{t_0}\circ\varphi_{-t}(p)\right|_{t=t_0} + \left.\frac{d}{dt}h_t \circ \varphi_{-t_0}(p)\right|_{t=t_0} \\ &= d(h_{t_0})_{\varphi_{-t_0}(p)}\left(\left.\frac{d}{dt}\varphi_{-t}(p)\right|_{t=t_0}\right) + \left.\frac{d}{dt}\varphi_{-t_0}^*(h_t)(p)\right|_{t=t_0} \\ &= -d(h_{t_0})_{\varphi_{-t_0}(p)}\left(X_{\varphi_{-t_0}(p)}\right) + \varphi_{-t_0}^*\left(\left.\frac{d}{dt}(h_t)(p)\right|_{t=t_0}\right) \qquad (1.4) \\ &= -X(h_{t_0})\circ\varphi_{-t_0}(p) + \left.\frac{dh_t}{dt}\right|_{t=t_0}\circ\varphi_{-t_0}(p) \qquad (1.5) \\ &= -\left(X\{\varphi_{t_0}^* f, \varphi_{t_0}^* g\}\right)\circ\varphi_{-t_0} + \left(\frac{d}{dt}\left.\{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\}\right|_{t=t_0}\right)\circ\varphi_{-t_0}. \end{aligned}$$

Em (1.4) usou-se o facto de que

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_{\varphi_t(x)} \text{ sse } \frac{d}{dt}\varphi_{-t}(x) = -X_{\varphi_{-t}(x)}.$$

Continuando, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left.\{\varphi_t^* f, \varphi_t^* g\}\right|_{t=t_0} &= \left\{\frac{d}{dt}\left.\varphi_t^* f\right|_{t=t_0}, \varphi_{t_0}^* g\right\} + \left\{\varphi_{t_0}^* f, \frac{d}{dt}\left.\varphi_t^* g\right|_{t=t_0}\right\} = \\ &= \{X(f)\circ\varphi_{t_0}, g\circ\varphi_{t_0}\} + \{f\circ\varphi_{t_0}, X(g)\circ\varphi_{t_0}\} = \\ &= \{X(f\circ\varphi_{t_0}), g\circ\varphi_{t_0}\} + \{f\circ\varphi_{t_0}, X(g\circ\varphi_{t_0})\}. \end{aligned}$$

Para provar a última igualdade, é importante notar que, se $x \in M$, tem-se

$$\begin{aligned} (d\varphi_t)_p(X_p) &= (d\varphi_t)_p\left(\frac{d}{ds}\varphi_s(p)\Big|_{s=0}\right) = \\ &= \frac{d}{ds}(\varphi_t \circ \varphi_s)(p)\Big|_{s=0} = \\ &= \frac{d}{ds}\varphi_{t+s}(p)\Big|_{s=0} = X_{\varphi_t(p)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Assim,

$$\begin{aligned} X(f \circ \varphi_{t_0})(p) &= d(f \circ \varphi_{t_0})_p(X_p) = && (1.7) \\ &= df_{\varphi_{t_0}(p)}\left((d\varphi_{t_0})_p(X_p)\right) \\ \text{(por 1.6)} &= df_{\varphi_{t_0}(p)}\left(X_{\varphi_{t_0}(p)}\right) = \\ &= X(f) \circ \varphi_{t_0}(p) && (1.8) \end{aligned}$$

e a prova da igualdade (1.3) está completa.

Passemos à demonstração do teorema. Suponha-se satisfeita a condição (ii). Então

$$\frac{d}{dt}\varphi^*_{-t}\{\varphi^*_t f, \varphi^*_t g\}\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\{f,g\} \circ \varphi_t \circ \varphi_{-t}\Big|_{t=t_0} = 0$$

e da igualdade (1.3) vem

$$\varphi^*_{-t_0}\left(X\{\varphi^*_{t_0}f, \varphi^*_{t_0}g\}\right) = \varphi^*_{-t_0}\{X(\varphi^*_{t_0}f), \varphi^*_{t_0}g\} + \varphi^*_{-t_0}\{\varphi^*_{t_0}f, X(\varphi^*_{t_0}g)\},$$

i.e., usando (1.8) e o facto de (ii) ser satisfeita:

$$\varphi^*_{-t_0}\left(\varphi^*_{t_0}(X\{f,g\})\right) = \varphi^*_{-t_0}\left(\varphi^*_{t_0}(\{X(f),g\})\right) + \varphi^*_{-t_0}\left(\varphi^*_{t_0}(\{f, X(g)\})\right),$$

ou seja,

$$X\{f,g\} = \{X(f),g\} + \{f, X(g)\},$$

provando que a condição (i) é satisfeita.

Reciprocamente, se (i) é verificada, de (1.3) vem

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\varphi^*_{-t}\{\varphi^*_t f, \varphi^*_t g\}\Big|_{t=t_0} = \\ = \;& \varphi^*_{-t_0}\left(-X\{\varphi^*_{t_0}f, \varphi^*_{t_0}g\} + \{X(\varphi^*_{t_0}f), \varphi^*_{t_0}g\} + \{\varphi^*_{t_0}f, X(\varphi^*_{t_0}g)\}\right) = 0. \end{aligned}$$

Por isso,

$$\varphi^*_{-t}\{\varphi^*_t f, \varphi^*_t g\} \overset{(t=0)}{=} \{f,g\},$$

i.e.

$$\{\varphi^*_t f, \varphi^*_t g\} = \varphi^*_t\{f,g\}.$$

Assim, (ii) é verificada. ■

Nota 1.20 *O fluxo de um campo hamiltoniano é um difeomorfismo (local) de Poisson, já que qualquer campo hamiltoniano satisfaz a condição:*

$$X_f(\{g,h\}) = \{X_f(g), h\} + \{g, X_f(h)\}, \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Com efeito, dadas $f, g, h \in C^{\infty}(M)$, *tem-se*

$$\begin{aligned} X_f(\{g,h\}) &= \{f,\{g,h\}\} \\ &= -\{h,\{f,g\}\} - \{g,\{h,f\}\} \\ &= \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\} \\ &= \{X_f(g),h\} + \{g,X_f(h)\}. \end{aligned}$$

1.3 Subvariedades de Poisson

Definição 1.21 *Dada uma variedade de Poisson* $(M;\{,\})$, *uma sua subvariedade* N *diz-se "de Poisson" se e só se a inclusão*

$$i : N \hookrightarrow M$$

é uma aplicação de Poisson, ou seja, existe um parêntesis de Poisson $\{,\}^N$ *em* N *tal que*

$$\{f,g\} \circ i = \{f \circ i, g \circ i\}^N.$$

Por outras palavras, numa subvariedade de Poisson $N \subset M$, o parêntesis $\{f,g\}|_N$ depende apenas de $f|_N$, $g|_N$. Ver-se-á de seguida em que condições é que tal acontece.

Teorema 1.22 (Weinstein) *Dada uma variedade de Poisson* $(M;\{,\})$, *uma subvariedade* N *de* M *é"de Poisson" se e só se, para todos os pontos* q *de* N, *se tem:*

$$B_q(T_q^*M) \subset T_qN, \tag{1.9}$$

i.e., se e só se todos os campos hamiltonianos em M *são tangentes a* N.

Nota 1.23 *Recorde-se que, dada uma 1-forma algébrica* $\alpha_p \in T_p^*M$, *existe* $f \in C^{\infty}(M)$ *tal que* $\alpha_p = df_p$. *Então, afirmar que*

$$B_p(T_p^*M) = \mathrm{Im}(B_p) \subset T_pN,$$

é o mesmo que dizer que para qualquer $f \in C^{\infty}(M)$ *se tem*

$$\underbrace{B_p(df_p)}_{(X_f)_p} \in T_pN.$$

Prova. $(\Leftarrow)$ *Por hipótese, dado* $q \in N$ *tem-se* $B_q : T_q^*M \to T_qM$ *tal que*

$$\mathrm{Im}(B_q) \subset T_qN.$$

Dadas $\overline{f}, \overline{g} \in C^{\infty}(N)$, *sejam* $f, g \in C^{\infty}(M)$ *duas extensões quaisquer de* $\overline{f}$ *e* $\overline{g}$ *a* M, *i.e.,*

$$f \circ i = \overline{f},\ g \circ i = \overline{g}.$$

Quer-se provar que $\{f,g\}|_N = \{f,g\} \circ i$ *só depende das funções* $\overline{f}$ *e* $\overline{g}$. *Ora:*

$$\{f,g\} = X_f(g) = dg(B(df)).$$

Logo, dado $q \in N$, *vem*

$$\begin{aligned} \{f,g\}(i(q)) &= dg_q\overbrace{(B_q(df_q))}^{\in T_qN} = \\ &= dg_{i(q)}(di_q(B_q(df_q))) = \\ &= d(g \circ i)_q(B_q(df_{i(q)})) = \\ &= d\overline{g}_q(B_q(d\overline{f}_q)). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Note-se que $df_{i(q)} = d(f \circ i)_q$, *pelo que a última igualdade é verdadeira. De facto,*

$$\begin{aligned} d(f \circ i)_q (X_q) &= i^* (df)_q (X_q) \\ &= df_{i(q)} (di_q (X_q)) \\ &= df_{i(q)} (X_q), \forall X_q \in T_q N. \end{aligned}$$

A igualdade (1.10) mostra que pode ser definido um parêntesis de Poisson em N *da seguinte forma:*

$$\{\overline{f}, \overline{g}\}^N \overset{def}{=} \{f, g\} \circ i.$$

Que $\{,\}^N$ *é um parêntesis de Poisson resulta de* $\{,\}$ *ser um parêntesis de Poisson em* M. *A título de exemplo demonstra-se a identidade de Jacobi:*

$$\{\{\overline{f}, \overline{g}\}^N, \overline{h}\}^N = \{\{f, g\} \circ i, \overline{h}\}^N = \{\overline{\{f, g\}}, \overline{h}\}^N = \{\{f, g\}, h\} \circ i, \tag{1.11}$$

portanto

$$\begin{aligned} &(\{\{\overline{f}, \overline{g}\}^N, \overline{h}\}^N + + \{\{\overline{g}, \overline{h}\}^N, \overline{f}\}^N + \{\{\overline{h}, \overline{f}\}^N, \overline{g}\}^N) = \\ &= (\{\{f, g\}, h\} \circ i + \{\{g, h\}, f\} \circ i + \{\{h, f\}, g\} \circ i) \\ &= (\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} \circ i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Além disso, $\{,\}^N$ *verifica a condição de*

$$i : N \hookrightarrow M$$

ser de Poisson, pelo que a implicação está demonstrada.

($\Rightarrow$) *Reciprocamente, se* N *é uma subvariedade de Poisson então existe*

$$B^N : T^* N \to TN$$

tal que

$$\{f \circ i, g \circ i\}^N (q) = \{f, g\} \circ i (q), \forall f, g \in C^\infty (M).$$

Por outras palavras:

$$d(f \circ i)_q \left(B_q^N \left(d (g \circ i)_q \right) \right) = df_{i(q)} \left(B_{i(q)} \left(dg_{i(q)} \right) \right), \forall q \in N, \forall f, g \in C^\infty (M).$$

Como $df_{i(q)} = d(f \circ i)_q$, *a igualdade acima mostra que*

$$B_{i(q)} \left(dg_{i(q)} \right) = B_q^N \left(d (g \circ i)_q \right) \in T_q N,$$

i.e., $B_{i(q)} \left(dg_{i(q)} \right) \in T_q N$. ∎

Lema 1.24 (Weinstein) *Sejam* $J : M_1 \to M_2$ *uma aplicação de Poisson e* $h \in C^\infty (M_2)$. *Então, se*

$$\gamma_1 (t) \text{ é a curva integral de } X_{h \circ J} \text{ pelo ponto } p \in M_1$$

e se

$$\gamma_2 (t) \text{ é a curva integral de } X_h \text{ pelo ponto } J(p) \in M_2,$$

tem-se

$$\gamma_2 (t) = J (\gamma_1 (t)).$$

Prova. Sejam σ_1^t o fluxo de X_{hoJ} e $g \in C^{\infty}(M_2)$. Então, dado $p \in M_1$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(g \circ J \circ \sigma_1^t(p)\right) &= d(g \circ J)_{\sigma_1^t(p)}\left(\frac{d}{dt}\sigma_1^t(p)\right) = \\
&= d(g \circ J)_{\sigma_1^t(p)}\left(X_{h\circ J}\left(\sigma_1^t(p)\right)\right) = \\
&= \{h \circ J, g \circ J\}_1 \circ \sigma_1^t(p) = \\
&= \{h, g\}_2 \circ J \circ \sigma_1^t(p) = \\
&= dg(X_h) \circ J \circ \sigma_1^t(p).
\end{aligned}$$

Como g é arbitrária, conclui-se que $\sigma_2^t = J \circ \sigma_1^t$ é o fluxo de X_h, pelo que a curva

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & M_2 \\ t & \longmapsto & J \circ \sigma_1^t(p) \end{array}$$

é a curva integral de X_h por $J(p) \in M_2$. ∎

Corolário 1.25 *Seja N uma subvariedade de Poisson de M e $h \in C^{\infty}(M)$. A curva integral de $X_h \in \mathfrak{X}_H(M)$ por p em $N \subset M$ é a curva integral (também por p) de*

$$X_{h|_N} \in \mathfrak{X}_H(N).$$

Proposição 1.26 *Dada uma variedade de Poisson $(M; \{,\})$, pode definir-se a seguinte relação em M:*

$$p \sim q \text{ sse } \exists \sigma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M \text{ tal que}$$

(i) *$\sigma(0) = p, \sigma(\varepsilon) = q$;*

(ii) *σ é C^{∞} por bocados;*

(iii) *cada segmento C^{∞} de σ é uma curva integral de um campo hamiltoniano em M.*

Então $\sim$ é uma relação de equivalência e as classes de equivalência, $[p]$, de pontos de M são subvariedades de Poisson de M. Além disso,

$$\dim([p]) = car_p\{,\}.$$

Nota 1.27 *Como consequência, a estrutura $\{,\}$ em $[p]$ é não-degenerada ou simpléctica. Por isso, a classe $[p]$ denomina-se "folha simpléctica de $(M; \{,\})$ por p".*

Prova.

1. $\sim$ é obviamente reflexiva. Basta tomar, por exemplo, o campo hamiltoniano X_f, onde $f \equiv 0$.

2. $\sim$ é simétrica. Se $p \sim q$, basta tomar $\gamma(t) = \sigma(-t)$. Note-se que cada segmento C^{∞} de γ é curva integral de um campo hamiltoniano pois:

$$\frac{d}{dt}\gamma_i(t) = \frac{d}{dt}\sigma_i(-t) = -\frac{d}{ds}\sigma_i(s)\bigg|_{s=-t} = -X_f(\sigma_i(-t)) = X_{-f}(\gamma_i(t)).$$

3. $\sim$ é transitiva, pois a junção de duas curvas nas condições do enunciado satisfaz trivialmente as mesmas condições.

4. Seja agora $[p]$ uma classe de equivalência de $\sim$. Queremos ver que $[p]$ é uma subvariedade de Poisson de M. Pelo Lema (1.22), basta ver que $[p]$ é tal que todos os campos hamiltonianos (em M) lhe são tangentes. Mas tal acontece por definição de $[p]$: dados $q \in [p]$, $X_f \in \mathfrak{X}_H(M)$, então a curva integral de X_f por p está contida em $[p]$, logo:

$$\left(X_f\right)_q \in T_q\,[p]\,.$$

5. Pela Observação 1.20, os campos hamiltonianos são automorfismos infinitesimais, i.e., o fluxo de um campo hamiltoniano satisfaz

$$\{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\} = \{f, g\} \circ \varphi_t.$$

Em particular (ver observação 1.18), se $q, q' \in [p]$, tem-se

$$CarB_q = CarB_{q'},$$

ou seja,

$$car_q\,\{,\} = car_{q'}\,\{,\}\,.$$

Assim, basta provar que $\dim([p]) = Car\,(B_q)$ para algum $q \in [p]$. Tal é consequência do seguinte:

Lema 1.28 *Se $q \in [p]$, então $\mathrm{Im}\,(B_q) = T_q\,[p]$.*

Prova. ($\subset$) Seja $\alpha \in \Omega^1(M)$. Se α é exacta , tem-se

$$B_q\left(\alpha_q\right) = B_q\left(df_q\right) = \left(X_f\right)_q$$

(note-se que $\left(X_f\right)_q \in T_q\,[p]$ por definição de $[p]$). Se α não é exacta, existem $f_1, ..., f_n$ tais que

$$\alpha_q = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(df_i\right)_q, \text{ onde } a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

Notando que B_q é linear, vem

$$B_q\left(\alpha_q\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(X_{f_i}\right)_q \in T_q\,[p]\,.$$

Conclui-se que, dada $\alpha \in T^*M$ se tem

$$B_q\left(\alpha_q\right) \in T_q\,[p]\,.$$

($\supset$) Seja $v \in T_q\,[p]$. Então $v = \frac{d}{dt}\,\gamma(t)|_{t=0}$, onde $\gamma: I \to [p]$ é uma curva integral de um campo hamiltoniano X_f. Logo $v = \left(X_f\right)_{\gamma(0)} = \left(X_f\right)_q = B_q\,(df)$. ■

Assim, $car\,(B_q) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(B_q)\right) = \dim\left(T_q\,[p]\right) = \dim\left([p]\right)$. ■

Capítulo 2
O TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO DE WEINSTEIN

Proposição 2.1 *Sejam* $(M_1; \{,\}_1)$, $(M_2; \{,\}_2)$ *duas variedades de Poisson. Então existe em*

$$M = M_1 \times M_2$$

uma estrutura de Poisson $\{,\}$ *tal que:*

(i) $\pi_i : M \to M_i$ *é uma aplicação de Poisson para* $i = 1, 2$*;*

(ii) $\{f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2\} = 0, \forall f_i \in C^\infty(M_i)$,

onde π_1 *e* π_2 *são as projecções canónicas.*

Prova. Vai-se definir uma estrutura de Poisson em $M_1 \times M_2$ a partir de $\{,\}_1$, $\{,\}_2$. Sejam $x_1, ..., x_n$ coordenadas locais em M_1 e $y_1, ..., y_m$ coordenadas locais em M_2. Então, se

$$\begin{aligned} \pi_1 &: M_1 \times M_2 \to M_1 \\ \pi_2 &: M_1 \times M_2 \to M_2 \end{aligned}$$

são as projecções canónicas, as funções

$$\begin{aligned} z_i &= x_i \circ \pi_1, \ 1 \leq i \leq n \\ t_j &= y_j \circ \pi_2, \ 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

são coordenadas locais em $M = M_1 \times M_2$. Agora, define-se um parêntesis de Poisson em $M_1 \times M_2$ através das relações

$$\begin{aligned} \{z_i, z_j\} &= \{x_i \circ \pi_1, x_j \circ \pi_1\} = \{x_i, x_j\}_1 \circ \pi_1; \\ \{t_i, t_j\} &= \{y_i \circ \pi_2, y_j \circ \pi_2\} = \{y_i, y_j\}_2 \circ \pi_2, \\ \{z_i, t_j\} &= 0, \end{aligned}$$

notando que com esta estrutura de Poisson em M, as projecções π_1, π_2 são funções de Poisson. Em termos das matrizes de Poisson P^1 e P^2 de M_1 e M_2, obtemos

$$P = \begin{pmatrix} (P^1_{ij}) & (0_{n \times m}) \\ (0_{m \times n}) & (P^2_{kl}) \end{pmatrix}.$$

■

Definição 2.2 *A* $(M, \{,\})$ *assim definida chama-se "produto de Poisson de* $(M_1, \{,\}_1)$ *e* $(M_2, \{,\}_2)$*."*

Teorema 2.3 (da Decomposição - Weinstein) *Seja* $(M; \{,\})$ *uma variedade de Poisson de dimensão* m *e* $p \in M$ *tal que* $car_p \{,\} = 2k$*. Então existem uma subvariedade simpléctica* $S \subset M$

com dimensão $2k$, uma subvariedade $N \subset M$ com uma estrutura de Poisson, de codimensão $2k$, e uma vizinhança U de p em M onde está definido um difeomorfismo de Poisson

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & U & \to & S \times N \\ & q & \mapsto & (\varphi_S(q), \varphi_N(q)) \end{array}.$$

Além disso, a estrutura de Poisson em N satisfaz:

$$car_{\varphi_N(p)}(N) = 0.$$

Nota 2.4 *$S \times N$ está equipado com a estrutura produto de Poisson.*

Prova. Seja $p \in M$. Se $car_p \{,\} = 0$, não há nada a provar. Se $car_p \{,\} \neq 0$, existem p_1', q_1 tais que

$$\{q_1, p_1'\}(p) \neq 0.$$

Então $X_{q_1}(p) \neq 0$, logo, pelo Teorema da Rectificação do Fluxo, podemos (numa vizinhança U de p em M) encontrar uma função q_1 tal que

$$X_{q_1}(p_1) \equiv 1,$$

ou seja,

$$\{q_1, p_1\} \equiv 1.$$

Assim sendo, tem-se

$$[X_{q_1}, X_{p_1}] = X_{\{q_1, p_1\}} = X_1 \equiv 0,$$

isto é, X_{p_1} e X_{q_1} comutam. Em particular, a distribuição D gerada pelos campos X_{p_1} e X_{q_1} é involutiva. Então, o Teorema de Frobenius garante que D é integrável, i.e., por cada ponto de U passa uma subvariedade de dimensão 2, que é tangente à distribuição D. Equivalentemente, existem $x_3, ..., x_m$ tais que

$$\{q_1, p_1, x_3, ..., x_m\}$$

são coordenadas locais em U e

$$dx_i(D) = 0,$$

ou seja

$$dx_i(X_{q_1}) = dx_i(X_{p_1}) = 0, \forall i,$$

i.e.,

$$\{x_i, q_1\} = \{x_i, p_1\} = 0, \forall i. \tag{2.1}$$

Pela Identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned} \{\{x_i, x_j\}, q_1\} &= -\{\{q_1, x_i\}, x_j\} - \{\{x_j, q_1\}, x_i\} \\ &= -\{0, x_j\} - \{0, x_i\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

e, análogamente,

$$\{\{x_i, x_j\}, p_1\} = 0.$$

Dada $g \in C^\infty(M)$, temos:

$$\{g, q_1\} = \frac{\partial g}{\partial q_1}\underbrace{\{q_1, q_1\}}_{=0} + \frac{\partial g}{\partial p_1}\overbrace{\{p_1, q_1\}}^{=-1} + \sum_{1=3}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}\underbrace{\{x_i, q_1\}}_{=0}.$$

Em particular, se $g = \{x_i, x_j\}$, de (2.2)vem

$$0 = -\frac{\partial\{x_i, x_j\}}{\partial p_1},$$

ou seja, $\{x_i, x_j\}$ não depende de p_1. Análogamente se conclui que $\{x_i, x_j\}$ não depende de q_1. Estes factos e (2.1) implicam que a matriz de Poisson de $(M; \{,\})$ nas coordenadas $\{q_1, p_1, x_3, ..., x_m\}$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (0_{2\times m}) \\ (0_{m\times 2}) & (P_1(x_3, ..., x_m))_{(m-2)\times(m-2)} \end{pmatrix}.$$

Definiu-se portanto uma estrutura produto de Poisson local em $S_1 \times N_1$, onde a matriz de Poisson de S_1 é $(-J_0)_{2\times 2}$ e a matriz de Poisson de N_1 é $(P_1(x_3, ..., x_m))$. S_1 é obviamente simpléctica.

Se $car_{\pi(p)} P_1 = 0$ (onde $\pi : M \to N_1$ é a projecção canónica), a demonstração acaba aqui. Senão, aplica-se o mesmo processo a N_1 numa vizinhança de $\pi(p)$, obtendo coordenadas locais (em M)

$$\{q_1, p_1, q_2, p_2, x_5, ..., x_m\}.$$

De modo análogo obtém-se a seguinte a matriz de Poisson:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (-J_0)_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & (-J_0)_{2\times 2} \end{pmatrix} & (0_{4\times m}) \\ (0_{m\times 4}) & (P_2(x_5, ..., x_m))_{(m-4)\times(m-4)} \end{pmatrix}$$

da qual se obtém ajustando convenientemente as coordenadas locais para

$$\{q_1, q_2, p_1, p_2, x_5, ..., x_m\}:$$

$$\begin{pmatrix} (-J_0)_{4\times 4} & (0_{4\times m}) \\ (0_{4\times m}) & (P_2(x_5, ..., x_m))_{(m-4)\times(m-4)} \end{pmatrix}.$$

Repete-se este processo tantas vezes quantas necessário, até se ter $car_{\pi(p)} P_i = 0$ ou até $N_k = \emptyset$ (caso em que M seria simpléctica). ∎

Corolário 2.5 *Se p é um ponto regular de $(M; \{,\})$ então, localmente, $(M; \{,\})$ é Poisson-difeomorfa a $(\mathbb{R}^{2k+m}; \{,\}^m)$ (ver exemplo 1.13). Por outras palavras, se p é regular existem coordenadas locais $\{q_1, ..., q_k, p_1, ..., p_k, y_1, ..., y_m\}$ em torno de p tais que a matriz de Poisson associada é*

$$\begin{pmatrix} (-\mathbb{J}_0)_{2k\times 2k} & (0)_{2k\times m} \\ (0)_{m\times 2k} & (0)_{m\times m} \end{pmatrix}.$$

Prova. Pelo Teorema da Decomposição, U é Poisson-difeomorfo a $S \times N$ com S simpléctica e N de Poisson. Como a característica é preservada por difeomorfismos de Poisson, então a característica de $(S \times N; \{,\}^{S\times N})$ é localmente constante. Considerem-se as projeccções canónicas

$$\pi_S : S \times N \to S \text{ e } \pi_N : S \times N \to N.$$

Observando que a matriz de Poisson de $(S \times N; \{,\}^{S\times N})$ em $p \in U$ é diagonal por blocos, constata-se que para todo o $q \in U$, $car_q(S \times N)$ é constante, o que implica

$$car_{\pi_N(q)}(N) \text{ constante } \forall q \in U,$$

já que $car_{\pi(q)}(S)$ é também constante. Como, por hipótese, $car_{\pi_N(p)}(N) = 0$, vem

$$car_{\pi_N(q)}(N) = 0, \forall q \in U,$$

ou seja, $\{,\}^N \equiv 0$. ∎

Este corolário mostra que, no estudo local de estruturas de Poisson, basta considerar o caso em que p é singular.

Nota 2.6 *Se S, N e S', N' são duas decomposições de M em p, então S é localmente simplectomorfa (e, portanto, Poisson-difeomorfa) a S' pelo Teorema de Darboux-Weinstein. Consequentemente, pode tomar-se para "representante" de S a folha simpléctica por p definida na nota (1.27).Prova-se também (ver* [5]*) que N e N' são localmente Poisson-difeomorfas.*

Definição 2.7 *À variedade de Poisson $(N; \{,\}^N)$ do Teorema da Decomposição chama-se "estrutura de Poisson transversa a S em p".*

Capítulo 3
A ESTRUTURA DE POISSON TRANSVERSA A UMA FOLHA SIMPLÉCTICA NUM PONTO

Sejam $(M;\{,\})$ uma variedade de Poisson de dimensão finita, $B : T^*M \to TM$ o morfismo de fibrados correspondente ao parêntesis $\{,\}$, $p \in M$ e S a folha simpléctica que passa por p. Tem-se que

$$T_pS = \operatorname{Im}(B_p).$$

Escolha-se uma subvariedade N de M tal que

$$T_pM = T_pN \oplus T_pS. \tag{3.1}$$

Tem-se então que:

$$T_p^*M = (T_pN)^\circ \oplus (T_pS)^\circ, \tag{3.2}$$

decomposição dual de (3.1).

A N chamar-se-á variedade transversa a S em p. Ver-se-á adiante que é possível introduzir em N uma estrutura de Poisson B' induzida de B - a estrutura de Poisson transversa em p, referida no Teorema da Decomposição.

A decomposição (3.1) é válida apenas para p. Em particular, não é extensível a outros pontos de N. Por cada ponto $q \neq p$ da subvariedade N passa uma folha simpléctica S_q (relativa à estrutura de Poisson em M), que pode ser bastante diferente de S. Por exemplo, a dimensão de S_q varia com o ponto q.

Define-se a seguir uma decomposição de T_qM válida para todos os pontos de uma vizinhança de p em N:

Lema 3.1 (Weinstein) *Seja $(M,\{,\})$ uma variedade de Poisson, $p \in M$ e N uma subvariedade de M que satisfaz a condição (3.1). Então existe uma vizinhança U de p em N cujos pontos q satisfazem*

$$T_qM = T_qN \oplus B_q\left((T_qN)^\circ\right). \tag{3.3}$$

Prova. Seja $p \in M$ e S a folha simpléctica por p. Vai-se provar em primeiro lugar que

$$(T_pS)^\circ = \ker B_p : \tag{3.4}$$

Tem-se as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
\alpha \quad \in \quad & \ker B_p \Longleftrightarrow \langle \beta, B_p(\alpha)\rangle = 0, \forall \beta \in T_p^*M \\
\Longleftrightarrow \quad & \langle \alpha, B_p(\beta)\rangle = 0, \forall \beta \in T_p^*M \\
\Longleftrightarrow \quad & \langle \alpha, v\rangle = 0, \forall v \in T_pS,
\end{aligned}$$

(usou-se a anti-simetria da estrutura de Poisson e o facto de que $\operatorname{Im}(B_p) = T_pS$). Ficou, portanto, provada a igualdade (3.4).

Veja-se agora que B_p envia $(T_pN)^\circ$ em T_pS de maneira sobrejectiva. Dado $v \in T_pS$, existe $\alpha \in T_p^*M$ tal que

$$B_p(\alpha) = v,$$

pela sobrejectividade de $B_p : T_p^*M \to T_pS$. Além disso, α admite uma decomposição única

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \tag{3.5}$$

com $\alpha_1 \in (T_pN)^\circ$ e $\alpha_2 \in (T_pS)^\circ$ - ver(3.2). Logo

$$B_p(\alpha) = B_p(\alpha_1) + B_p(\alpha_2) = B_p(\alpha_1), \tag{3.6}$$

pois $\alpha_2 \in \ker(B_p)$. Tem-se portanto

$$v = B_p(\alpha_1), \text{ com } \alpha_1 \in (T_pN)^\circ.$$

Como $\dim(T_pN)^\circ = \dim T_pS$ por (3.1), então $B_p|_{(T_pN)^\circ}$ é bijectiva e portanto a decomposição (3.3) é válida para o ponto p. Além disso, $B_p|_{(T_pN)^\circ}$ tem característica máxima em p logo, por um argumento de continuidade, existe uma vizinhança de p (em N) em cujos pontos q se tem $car_q\left(B_q|_{(T_qN)^\circ}\right)$ constante e maximal, ou seja, $B_q|_{(T_qN)^\circ}$ é bijectiva. Logo tem-se

$$T_qM = T_qN \oplus B_q\left((T_qN)^\circ\right)$$

para todos os pontos numa vizinhança de p. ∎

Notemos agora que (3.3) implica que

$$T_q^\circ N \cap \ker B_q = \left\{\vec{0}\right\}, \forall q \in U. \tag{3.7}$$

De facto, dado $v \in T_qM$, tem-se:

$$v = v_1 + v_2,$$

com $v_1 \in T_qN$ e $v_2 = B_q(\beta) \in B_q\left((T_qN)^\circ\right)$. Se $\alpha \in (T_qN)^\circ \cap \ker B_q$, então

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, v\rangle &= \langle \alpha, v_1 + v_2\rangle \\
&= \overbrace{\langle \alpha, v_1\rangle}^{0} + \langle \alpha, v_2\rangle \\
&= \langle \alpha, B_q(\beta)\rangle \\
&= \langle -\beta, B_q(\alpha)\rangle \\
&= 0, \text{ pois } \alpha \in \ker B_q.
\end{aligned}$$

Conclui-se que $\langle \alpha, v\rangle = 0$ para qualquer $v \in T_qM$, i.e., α é a aplicação nula.

Weinstein provou (ver [5]) que a condição (3.7) e uma condição mais fraca que (3.3) são suficientes para garantir que está definida uma estrutura de Poisson na subvariedade N (que não é necessáriamente a estrutura induzida de M dada na definição 1.21):

Proposição 3.2 (Weinstein) *Seja M uma variedade de Poisson e N uma sua subvariedade que satisfaz as seguintes condições, para cada $q \in N$:*

(i) $B_q\left((T_qN)^\circ\right) \cap T_qN = \{\vec{0}\}$;

(ii) $(T_qN)^\circ \cap \ker(B_q) = \{\vec{0}\}$.

Então está definida uma estrutura de Poisson em N.

Nas condições da Proposição 3.2, Weinstein mostrou que a decomposição (3.3) é válida para todo o $q \in N$. A partir dessa decomposição construiu uma estrutura de Poisson em M do seguinte modo: Seja π_1 a projecção

$$\pi_1 : T_qM \to T_qN,$$

com $ker\,(\pi_1) = B_q\left((T_qN)^\circ\right)$, i.e., a projecção sobre o primeiro factor associada à decomposição (3.3). Então a estrutura de Poisson em N é dada pelo único morfismo de fibrados

$$B'_q : T^*_qN \to T_qN$$

tal que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} T^*_qN & \xrightarrow{B'_q} & T_qN \\ \pi^*_1\downarrow & & \uparrow\pi_1 \\ T^*_qM & \xrightarrow[B_q]{} & T_qM \end{array}$$

ou seja,

$$B'_q = \pi_1 \circ B_q \circ \pi^*_1.$$

Nota 3.3 *Dada $(M, \{,\})$ uma variedade de Poisson, $p \in M$, S a folha simpléctica por p e uma subvariedade N tal que a decomposição (3.1) tem lugar, a "estrutura de Poisson transversa a S em p"(referida na definição 2.7) pode ser representada pelo par (N, B'), onde B' é o morfismo dado pela proposição 3.2.*

Capítulo 4

A ESTRUTURA TRANSVERSA EM DUAIS DE ÁLGEBRAS DE LIE

4.1 Algumas definições importantes

Antes de passar ao caso particular em que M é o dual de uma álgebra de Lie, é útil lembrar alguns conceitos fundamentais para esse estudo.

Definição 4.1 *Seja $(\mathfrak{g}, [,])$ a álgebra de Lie de um grupo de Lie G conexo e simplesmente conexo. Sejam $g \in G$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ e $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Designe-se por "e" o elemento neutro de G. Então definem-se as seguintes acções:*

1. *A acção adjunta (Ad) de G na sua álgebra de Lie, dada por*

$$\begin{array}{rccc} Ad: & G & \rightarrow & Hom(\mathfrak{g}) \\ & g & \mapsto & Ad_g \end{array},$$

onde

$$Ad_g = \left[d\left(L_g \circ R_{g^{-1}}\right)\right]_e.$$

2. *A acção adjunta (ad) da álgebra de Lie em si própria, dada por*

$$\begin{array}{rccc} ad: & \mathfrak{g} & \rightarrow & End(\mathfrak{g}) \\ & \xi & \mapsto & ad_\xi \end{array},$$

sendo ad_ξ definida por

$$\begin{array}{rccc} ad_\xi: & \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ & \eta & \mapsto & [\xi, \eta] \end{array}.$$

3. *A acção coadjunta (Ad^*) de G no dual da sua álgebra de Lie, dada por*

$$\begin{array}{rccc} Ad^*: & G & \rightarrow & dif(\mathfrak{g}^*) \\ & g & \mapsto & Ad^*_g \end{array},$$

sendo $Ad^*_g : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ definida por

$$\left\langle Ad^*_g \mu, \xi \right\rangle = \left\langle \mu, Ad_{g^{-1}}(\xi) \right\rangle.$$

4. *A acção coadjunta (ad^*) da álgebra de Lie no seu dual, dada por*

$$\begin{array}{rccc} ad^*: & \mathfrak{g} & \rightarrow & dif(\mathfrak{g}^*) \\ & \xi & \mapsto & ad^*_\xi \end{array},$$

sendo $ad^*_\xi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\left\langle ad^*_\xi \mu, \eta \right\rangle = \left\langle \mu, ad_\xi(\eta) \right\rangle.$$

4.2 O dual de uma álgebra de Lie como variedade de Poisson

Seja agora $M = \mathfrak{g}^*$ com a sua estrutura de Lie-Poisson (ver pág. 5). Note-se que

$$T_\mu^*(\mathfrak{g}^*) \cong \mathfrak{g} \text{ e } T_\mu(\mathfrak{g}^*) \cong \mathfrak{g}^*.$$

Logo o morfismo de fibrados $B : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ associado à estrutura de Lie-Poisson é dado por:

$$\begin{aligned} \langle B_\mu(\xi), \eta \rangle &= \{\xi.\eta\}_L(\mu) \\ &= \langle \mu, [d\xi_\mu, d\eta_\mu] \rangle \\ &= \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$B_\mu(\xi) = ad_\xi^*(\mu).$$

Exemplo 4.2 *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ a álgebra de Lie do grupo de Lie*

$$SL(2,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\},$$

i.e.,

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{\xi \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}) : tr(\xi) = 0\};$$

Uma base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ é, por exemplo,

$$\left\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Tem-se

$$[E_1, E_2] = E_1E_2 - E_2E_1 = -2E_2,$$

e, análogamente,

$$\begin{aligned} [E_1, E_3] &= 2E_3; \\ [E_2, E_3] &= -E_1. \end{aligned}$$

Além disso, podemos identificar E_1, E_2, E_3 com coordenadas lineares em $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})^*, x_1, x_2, x_3$. Dados $p \in \mathfrak{g}^*$ e $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, $\{f,g\}_L(p)$ fica completamente determinado por $\{x_i, x_j\}_L$, $1 \leq i,j \leq 3$.

Tem-se que

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\}_L(p) &= \langle p, [d(x_1)_p, d(x_2)_p] \rangle \\ &= \langle p, [x_1, x_2] \rangle \\ &\cong \langle p, [E_1, E_2] \rangle \\ &= -2\langle p, E_2 \rangle \\ &= -2x_2(p). \end{aligned}$$

Assim, $\{x_1, x_2\}_L = -2x_2$. Análogamente se constata que $\{x_1, x_3\}_L = 2x_3$ e $\{x_2, x_3\}_L = -x_1$.

Lema 4.3 *Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de um grupo de Lie G e $\xi \in \mathfrak{g}$. Então o campo fundamental de ξ para a acção coadjunta Ad^* é precisamente X_ξ, o campo hamiltoniano para o parêntesis de Lie-Poisson da função linear $\xi \in \mathfrak{g}^{**}$.*

Prova. Dado $\xi \in \mathfrak{g}^{**} \subset C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)$, seja X_ξ o campo hamiltoniano de ξ para a estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}^*$). Considerem-se também as coordenadas lineares em $\mathfrak{g}^*$, $x_1, x_2, ..., x_n$. Então, para cada $\mu \in \mathfrak{g}^*$ tem-se:

$$(X_\xi)_\mu = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (dx_i)_\mu \left((X_\xi)_\mu\right) \\ &= \{\xi, x_i\}(\mu) \\ &= \langle \mu, [\xi, x_i] \rangle . \end{aligned}$$

Assim, tem-se que

$$(X_\xi)_\mu = \sum_{i=1}^{n} \langle \mu, [\xi, x_i] \rangle \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Por outro lado, dado $\xi \in \mathfrak{g}$, seja $\xi_{\mathfrak{g}^*}$ o campo fundamental para a acção coadjunta Ad^*. Considere-se também $\mu \in \mathfrak{g}^*$ e $\eta \in \mathfrak{g}$. Em primeiro lugar, note-se que

$$\left\langle Ad^*_{\exp(-t\xi)}(\mu), \eta \right\rangle = \left\langle \mu, Ad_{\exp(t\xi)}(\eta) \right\rangle, \forall t \in \mathbb{R},$$

logo

$$\frac{d}{dt}\left\langle Ad^*_{\exp(-t\xi)}(\mu), \eta \right\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle \mu, Ad_{\exp(t\xi)}(\eta) \right\rangle$$

e portanto

$$\frac{d}{dt}\left\langle Ad^*_{\exp(-t\xi)}(\mu), \eta \right\rangle|_{t=0} = \langle \mu, ad_\xi(\eta) \rangle .$$

Tem-se portanto que o campo fundamental de ξ para a acção coadjunta, isto é, $\xi_{\mathfrak{g}^*}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \left(\xi_{\mathfrak{g}^*}\right)_\mu &= \frac{d}{dt} Ad^*_{\exp(-t\xi)}(\mu)|_{t=0} \\ &= \mu \circ ad_\xi \\ &= ad^*_\xi(\mu) \in \mathfrak{g}^* \cong T_\mu(\mathfrak{g}^*) . \end{aligned}$$

Verifica-se que $\xi_{\mathfrak{g}^*}$ e X_ξ são o mesmo campo de vectores. De facto,

$$\begin{aligned} \left(\xi_{\mathfrak{g}^*}\right)_\mu &= \mu \circ ad_\xi \\ &= \beta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \beta_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \beta_i &= (dx_i)_\mu \left(\left(\xi_{\mathfrak{g}^*}\right)_\mu\right) \\ &= (dx_i)_\mu \left(ad^*_\xi \mu\right) \\ &= \left\langle x_i, ad^*_\xi \mu \right\rangle \\ &\cong \left\langle ad^*_\xi \mu, x_i \right\rangle \\ &= \langle \mu, [\xi, x_i] \rangle \\ &= \alpha_i . \end{aligned}$$

■

Como consequência (ver [4]) obtém-se o seguinte:

Corolário 4.4 *A folha simpléctica da estrutura de Lie-Poisson por μ coincide com a órbita coadjunta por μ.*

4.3 A estrutura de Poisson transversa a uma órbita coadjunta

Consideremos agora o problema de, dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e um ponto $\mu \in \mathfrak{g}^*$ singular, construir a estrutura transversa à órbita coadjunta de μ.

Seja G o grupo de Lie conexo e simplesmente conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$ e $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Seja $G\mu$ o subgrupo de isotropia de μ e $\mathfrak{g}_\mu$ a sua álgebra de Lie. Então

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\mu &= \left\{\xi \in \mathfrak{g} : ad^*_\xi \mu = 0\right\} \\ &= \ker B_\mu, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde B_μ é a estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}^*$.

Lema 4.5 (Weinstein) *Seja* $(\mathfrak{g}^*, \{,\}_L)$ *o dual de uma álgebra de Lie munido do parêntesis de Lie Poisson e seja* $\mu \in \mathfrak{g}^*$. *Seja* $\mathfrak{n}_\mu$ *um complemento de* $\mathfrak{g}_\mu$ *em* $\mathfrak{g}$, *i.e.,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\mu \oplus \mathfrak{n}_\mu . \tag{4.2}$$

Então o subespaço afim

$$\mu + \mathfrak{n}^\circ_\mu$$

intersecta transversalmente a orbita coadjunta $Ad^*_G(\mu)$.

Nota 4.6 *A soma directa* $\oplus$ *toma* $\mathfrak{g}_\mu$ *e* $\mathfrak{n}_\mu$ *como espaços vectoriais e não como álgebras de Lie.*

Prova. Note-se em primeiro lugar que

$$T_\mu\left(Ad^*_G(\mu)\right) = ad^*_{\mathfrak{g}}(\mu),$$

pois $T_\mu\left(Ad^*_G(\mu)\right) = \left\{\left(\xi_{\mathfrak{g}^*}\right)_\mu : \xi \in \mathfrak{g}\right\} = \left\{ad^*_\xi(\mu) : \xi \in \mathfrak{g}\right\}$.

Veja-se agora que

$$ad^*_{\mathfrak{g}}(\mu) = \mathfrak{g}^\circ_\mu :$$

$(\subset)$ Dados $\xi \in \mathfrak{g}, \mu \in \mathfrak{g}^*, \eta \in \mathfrak{g}_\mu$, tem-se que

$$\begin{aligned} \left\langle ad^*_\xi(\mu), \eta\right\rangle &= \langle \mu, ad_\xi(\eta)\rangle \\ &= -\langle \mu, ad_\eta(\xi)\rangle \\ &= -\left\langle ad^*_\eta \mu, \xi\right\rangle \\ &= 0, \text{ pois } \eta \in \mathfrak{g}_\mu. \end{aligned}$$

Assim, a avaliação em η de um elemento genérico de $ad^*_{\mathfrak{g}}(\mu)$ é nula, para todo o $\eta \in \mathfrak{g}_\mu$,ou seja, $ad^*_\xi(\mu) \in \mathfrak{g}^\circ_\mu$ para qualquer $\xi \in \mathfrak{g}$.

Um argumento dimensional mostra facilmente a inclusão contrária, já que

$$\dim(ad^*_{\mathfrak{g}}\mu) = \mathrm{codim}\mathfrak{g}_\mu .$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} T_\mu \mathfrak{g}^* &= \mathfrak{g}^* \\ &= \mathfrak{g}^\circ_\mu \oplus \mathfrak{n}^\circ_\mu \\ &= ad^*_{\mathfrak{g}}\mu \oplus \mathfrak{n}^\circ_\mu \\ &= T_\mu\left(Ad^*_G \mu\right) \oplus T_\mu\left(\mu + \mathfrak{n}^\circ_\mu\right), \end{aligned}$$

pelo que $\mu + \mathfrak{n}_\mu^\circ$ é transversal a $Ad_G^*\mu$. ∎

Note-se que, se $N = \mu + \mathfrak{n}_\mu^\circ$ e $\nu \in V$ (V vizinhança de 0 em $\mathfrak{n}_\mu^\circ$) então

$$\begin{aligned} T_{\mu+\nu}N &\cong \mathfrak{n}_\mu^\circ, \\ (T_{\mu+\nu}N)^\circ &\cong \mathfrak{n}_\mu \end{aligned}$$

e

$$B_{\mu+\nu}\left((T_{\mu+\nu}N)^\circ\right) \cong B_{\mu+\nu}(\mathfrak{n}_\mu) = ad_{\mathfrak{n}_\mu}^*(\mu+\nu).$$

Assim, a decomposição (3.3), atrás definida, é

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{n}_\mu^\circ \oplus ad_{\mathfrak{n}_\mu}^*(\mu+\nu) \tag{4.3}$$

e a projecção π_1 é, neste caso,

$$\pi_1 : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}_\mu^\circ \left(\cong \mathfrak{g}_\mu^*\right),$$

com núcleo $ad_{\mathfrak{n}_\mu}^*(\mu+\nu)$.

Nota 4.7 *O isomorfismo entre $\mathfrak{n}_\mu^\circ$ e $\mathfrak{g}_\mu^*$ é dado por:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n}_\mu^\circ & \longleftrightarrow & \mathfrak{g}_\mu^* \\ f & \to & f|_{\mathfrak{g}_\mu} \end{array}$$

e o seu inverso:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_\mu^* & \to & \mathfrak{n}_\mu^\circ \\ \overline{f} & \mapsto & f \end{array},$$

onde f se define da seguinte forma: Se $\xi \in \mathfrak{g}$, então

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \text{ com } \xi_1 \in \mathfrak{g}_\mu, \xi_2 \in \mathfrak{n}_\mu.$$

Então

$$f(\xi_1+\xi_2) = \overline{f}(\xi_1).$$

Em [2], a estrutura de Poisson transversa em $N = \mu + \mathfrak{n}_\mu^\circ$ é definida de uma forma diferente da que se demonstra neste trabalho. Cushman e Roberts partem de uma decomposição do espaço cotangente à variedade de Poisson num ponto:

$$T_p^*M = (T_pN)^\circ \oplus \left(B_p\left((T_pN)^\circ\right)\right)^\circ,$$

decomposição dual de (3.3). No caso específico em que $M = \mathfrak{g}^*$, Roberts e Cushman consideram a projecção associada à decomposição dual de (4.2):

$$P_{\mathfrak{g}_\mu^\circ} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_\mu^\circ,$$

com núcleo $\mathfrak{n}_\mu^\circ$, e constatam a igualdade

$$\left(B_p\left((T_pN)^\circ\right)\right)^\circ = \left\{\xi \in \mathfrak{g} : P_{\mathfrak{g}_\mu^\circ}\left(ad_\xi^*(\mu+\nu)\right) = 0\right\}.$$

Em seguida, definem uma função

$$\eta : (\mu + U) \times \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{n}_\mu$$

da seguinte forma: η é a solução (que provam ser única) da equação

$$P_{\mathfrak{g}_\mu^\circ}\left(ad_{\xi+\eta}^*(\mu+\nu)\right) = 0. \tag{4.4}$$

Assim, η depende de $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$ e de $\nu \in U \subset \mathfrak{n}_\mu^\circ$. Roberts e Cushmann (ver [2]) chegam à seguinte fórmula para o cálculo de $\{,\}_N$, a estrutura de Poisson transversa à órbita coadjunta no ponto μ :

$$\{\xi_1, \xi_2\}_N (\mu + \nu) = \left\langle \mu + \nu, [\xi_1 + \eta_\nu (\xi_1), \xi_2 + \eta_\nu (\xi_2)]_{\mathfrak{g}} \right\rangle$$

ou, equivalentemente,

$$\{\xi_1, \xi_2\}_N (\mu + \nu) = \left\langle \nu, [\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}_\mu} \right\rangle - \left\langle \mu + \nu, [\eta_\nu (\xi_1), \eta_\nu (\xi_2)]_{\mathfrak{n}_\mu} \right\rangle.$$

Assim, o cálculo da estrutura transversa reduz-se ao cálculo de $\eta_\nu(\xi)$, isto é, à resolução da equação (4.4) para η.

Neste trabalho, optou-se por uma alternativa que parece ser mais simples. O resultado seguinte fornece uma fórmula para o cálculo de $B'_{\mu+\nu}$, o morfismo de fibrados que dá a estrutura transversa a $Ad^*_G(\mu)$, a órbita coadjunta no ponto μ.

Teorema 4.8 *Seja* $\mu \in \mathfrak{g}^*$ *tal que* $\mathfrak{g}_\mu$ *e* $\mathfrak{n}_\mu$ *estão nas condições do lema 4.5. Então a estrutura transversa à órbita coadjunta* $Ad^*_G(\mu)$ *é dada pelo morfismo*

$$B' : T^*N \to TN$$

definido por:

$$B'_{\mu+\nu}(\xi) = \pi_1 \circ ad^*_\xi(\nu), \tag{4.5}$$

onde $\xi \in \mathfrak{g}_\mu, \nu \in \mathfrak{n}_\mu^\circ$ *e* π_1 *é a projecção associada a (4.3).*

Prova. Comecemos por notar que, se $\nu \in \mathfrak{n}_\mu^\circ$ então:

$$T_{\mu+\nu}N = \mathfrak{n}_\mu^\circ \cong \mathfrak{g}_\mu^*$$

e portanto

$$T^*_{\mu+\nu}N \cong \mathfrak{g}_\mu,$$

pelo que se tem:

$$B'_{\mu+\nu} : \mathfrak{g}_\mu \to \mathfrak{g}_\mu^*.$$

Seja $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$. Então a expressão para B' (ver prop. 3.2) é dada por

$$B'_{\mu+\nu}(\xi) = \pi_1 \circ B_{\mu+\nu} \circ \pi_1^*(\xi),$$

com π_1 definida por (4.3). Mas

$$B_{\mu+\nu}(\pi_1^*(\xi)) = ad^*_{\pi_1^*(\xi)}(\mu + \nu),$$

e

$$\pi_1^*(\xi) \in \mathfrak{g},$$

logo a decomposição (4.2) implica que:

$$\exists^1 X \in \mathfrak{g}_\mu, \exists^1 Y \in \mathfrak{n}_\mu : \pi_1^*(\xi) = X + Y.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\pi_1 (B_{\mu+\nu}(\pi_1^*(\xi))) &= \pi_1 \left(ad^*_{\pi_1^*(X+Y)}(\mu+\nu) \right) \\
&= \pi_1 (ad^*_X(\mu+\nu)) + \overbrace{\pi_1 (ad^*_Y(\mu+\nu))}^{=0 \text{ pois } Y \in \mathfrak{n}_\mu} \\
&= \pi_1 (ad^*_X(\mu) + ad^*_X(\nu)) \\
&= \pi_1 (ad^*_X(\nu)),
\end{aligned}$$

pois $X \in \mathfrak{g}_\mu$.

Vai-se agora provar que $X = \xi$, o que conclui a demonstração do teorema. Por definição, $\pi_1^*(\xi) \in \mathfrak{g}$ é o único vector que satisfaz

$$\forall \mu' \in \mathfrak{g}^*, \langle \mu', \pi_1^*(\xi) \rangle = \langle \pi_1(\mu'), \xi \rangle$$

Em particular, se $\mu' \in \mathfrak{n}_\mu^\circ \subset \mathfrak{g}^*$ tem-se:

$$\forall \mu' \in \mathfrak{n}_\mu^\circ, \langle \mu', X + Y \rangle = \langle \pi_1(\mu'), \xi \rangle$$

Mas se $\mu' \in \mathfrak{n}_\mu^\circ$ então

$$\pi_1(\mu') = \mu'$$

e

$$\langle \mu', X + Y \rangle = \langle \mu', X \rangle .$$

Portanto

$$\forall \mu' \in \mathfrak{n}_\mu^\circ, \langle \mu', X \rangle = \langle \mu', \xi \rangle .$$

Logo

$$(X - \xi) \in \left(\mathfrak{n}_\mu^\circ\right)^\circ, \text{ i.e., } X - \xi \in \mathfrak{n}_\mu.$$

Mas $X, \xi \in \mathfrak{g}_\mu$ logo $X - \xi \in \mathfrak{g}_\mu$. Como $\mathfrak{g}_\mu \cap \mathfrak{n}_\mu = \left\{\vec{0}\right\}$, tem-se

$$X - \xi = \vec{0}.$$

■

Como corolário, obtém-se um resultado de P. Molino (ver secção 4.4):

Corolário 4.9 *Se $[\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{n}_\mu] \subset \mathfrak{n}_\mu$ então B' é Poisson-equivalente à estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}_\mu^*$.*

Prova. Note-se em primeiro lugar que, se $\xi \in \mathfrak{g}$ e $\mu + \nu \in N = \mu + \mathfrak{n}_\mu^\circ$, então:

$$ad_\xi^*(\nu) \in \mathfrak{n}_\mu^\circ \text{ sse } \left\langle ad_\xi^*(\nu), \eta \right\rangle = 0, \forall \eta \in \mathfrak{n}_\mu$$

ou seja, se e só se

$$\langle \nu, [\xi, \eta] \rangle = 0, \forall \eta \in \mathfrak{n}_\mu.$$

Suponha-se então que $[\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{n}_\mu] \subset \mathfrak{n}_\mu$. Tal implica:

$$[\xi, \eta] \in \mathfrak{n}_\mu.$$

Além disso, $\nu \in \mathfrak{n}_\mu^\circ$, logo

$$\langle \nu, [\xi, \eta] \rangle = 0,$$

ou seja,

$$ad_\xi^*(\nu) \in \mathfrak{n}_\mu^\circ.$$

Assim, $\pi_1\left(ad_\xi^*(\nu)\right) = ad_\xi^*(\nu)$ logo

$$B'_{\mu+\nu}(\xi) = ad_\xi^*(\nu)$$

i.e.

$$B'_{\mu+\nu}(\xi) = ad_\xi^*(\nu) = B_\nu^\circ(\xi)$$

ou

$$B'_{\mu+\nu} = B_\nu^\circ,$$

onde B° é a estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}_\mu^*$. ■

4.4 Alguns resultados sobre a estrutura transversa a uma órbita coadjunta

Em [5], Weinstein propôs o conceito de variedade de Poisson transversa a uma folha simpléctica num ponto e estudou o caso da estrutura de Poisson transversa à órbita coadjunta num ponto do dual de uma álgebra de Lie. Weinstein afirmou que a estrutura transversa a uma órbita coadjunta num ponto é sempre Poisson-difeomorfa à restrição da estrutura de Lie-Poisson em $\mathfrak{g}_\mu^*$, ou seja, dado $\nu \in N(= \mu + \mathfrak{n}_\mu^\circ)$, ter-se-ia sempre

$$B'_{\mu+\nu}(\xi) = ad_\xi^*(\nu), \forall \xi \in \mathfrak{g}_\mu. \tag{4.6}$$

Tal veio a revelar-se falso (ver [6]). De facto, Molino provou que (4.6) só tem lugar quando se tem

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\mu \oplus \mathfrak{n}_\mu$$

com

$$[\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{n}_\mu] \subset \mathfrak{n}_\mu.$$

Ou seja, só quando a projecção π_1 referida no Teorema 4.8 não é mais do que a restrição de $\mathfrak{g}^*$ a $\mathfrak{g}_\mu^*$.

Em 1996, Damianou formulou a seguinte conjectura:

Conjectura 4.10 *([3]) Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples. Então a estrutura de Poisson transversa num ponto a uma órbita coadjunta de $\mathfrak{g}^*$ é sempre polinomial.*

Damianou fez esta conjectura baseando-se em cálculos com $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Mais tarde, Cushman e Roberts (ver [2]) especificaram uma forma de cálculo da estrutura transversa à órbita coadjunta e utilizaram-na para provar a conjectura de Damianou.

Neste trabalho propõe-se uma fórmula mais simples do que a utilizada por Cushman e Roberts, da qual o resultado de P. Molino é consequência imediata.

Capítulo 5

EXEMPLOS

Neste capítulo vamos usar a fórmula (4.5) para calcular explicitamente a estrutura de Poisson transversa a uma órbita coadjunta em algumas álgebras de Lie.

Exemplo 5.1 *Tome-se* $\mathfrak{g} = \overbrace{A_2 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_2}^{n\ vezes}$, *onde* A_2 *é a álgebra de Lie não-comutativa de dimensão 2: Tomando uma base* $\{E, F\}$ *de* A_2, *então*

$$[E, F] = E.$$

Se $aE + bF, cE + dF$ *são elementos arbitrários de* A_2, *então*

$$[aE + bF, cE + dF] = adE - bcF. \tag{5.1}$$

Assim, considere-se $\{E_i, F_i\}_{i=1}^n$ *para base de* $\mathfrak{g}$ *(que identificamos com a base canónica de* $\mathbb{R}^{2n}$*) e* $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, *ou seja,*

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^{n} a_i E_i + b_i F_i, \\ \eta &= \sum_{i=1}^{n} c_i E_i + d_i F_i. \end{aligned}$$

Então

$$[\xi, \eta] = \sum_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) E_i.$$

Consideramos agora a variedade de Poisson $M = (\mathfrak{g}^*, \{,\}_L)$. *Note-se que, se* $\mu \in \mathfrak{g}^*$, *tem-se*

$$\begin{aligned} \{\xi, \eta\}(\mu) &= \langle \mu, [\xi, \eta] \rangle \\ &\cong [\xi, \eta](\mu). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Assim, $\{\xi, \eta\}_L \cong [\xi, \eta]$.

Sejam $\{e_i, f_i\}_{i=1}^n$ *a base dual de* $\{E_i, F_i\}_{i=1}^n$ *e* $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ *coordenadas lineares "naturais" em* $\mathfrak{g}^*$, *ou seja,* $x_i(e_j) = \delta_{ij}$, $y_i(f_j) = \delta_{ij}$, $x_i(f_j) = y_i(e_j) = 0$. *A matriz de Poisson de* $(\mathfrak{g}^*, \{,\}_L)$ *é*

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \\ 0 & 0 & \cdots & -x_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Tendo em atenção (5.3), dados dois elementos arbitrários ξ e η de $\mathfrak{g}$, tem-se

$$ad_{\xi}(\eta) = [\xi, \eta] = \sum_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i)\, e_i.$$

Considere-se também $\mu = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j + y_j f_j$, *elemento arbitário de* $\mathfrak{g}^*$. *Então*

$$\begin{aligned}
\left\langle ad_{\xi}^{*}(\mu), \eta \right\rangle &= \langle \mu, ad_{\xi}(\eta) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) \langle \mu, E_i \rangle \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i) \right] \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, E_i \rangle \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i d_i - b_i c_i)\, x_i.
\end{aligned}$$

Conclui-se então que

$$ad_{\xi}^{*}(\mu) = \sum_{i=1}^{n} (-b_i x_i)\, e_i + (a_i x_i)\, f_i.$$

O subálgebra de isotropia em μ é

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\mu} &= \left\{ \xi \in \mathfrak{g} : ad_{\xi}^{*}(\mu) \equiv 0 \right\} \\
&\cong \left\{ (a_1, b_1, ..., a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n} : \sum_{i=1}^{n} (-b_i x_i)\, e_i - (a_i x_i)\, f_i = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

O ponto $\mu \in \mathfrak{g}^*$ é singular se e só se pelo menos um dos x_i é nulo. Suponhamos s.p.g. que $x_1 = ... = x_m = 0$, *com* $m < n$, *i.e.,*

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{j=m+1}^{n} x_j e_j + \sum_{j=1}^{n} y_j f_j \\
&= (0, y_1, 0, y_2, ..., 0, y_m, x_{m+1}, y_{m+1}, ..., x_n, y_n),
\end{aligned}$$

com $x_{m+1}, ..., x_n \neq 0$. *Nesse caso, a matriz de Poisson (5.3) é*

$$\begin{pmatrix}
(0_{2m \times 2m}) & & & (0_{2 \times 2m}) & & \\
 & 0 & x_{m+1} & \cdots & 0 & 0 \\
 & -x_{m+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
(0_{2m \times 2}) & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \\
 & 0 & 0 & \cdots & -x_n & 0
\end{pmatrix},$$

logo

$$car(M, \{,\}_L) = 2(n - m).$$

Então

$$\mathfrak{g}_{\mu} \cong \left\{ \left(a_1, b_1, ..., a_m, b_m, \overbrace{0, ..., 0}^{n-m} \right) : a_1, b_1, ..., a_m, b_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tome-se para $\mathfrak{n}_\mu$ *um complemento ortogonal de* $\mathfrak{g}_\mu$ *em* $\mathfrak{g}$ *em relação ao produto interno usual, por exemplo,*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_\mu &= \left\{ \sum_{i=m+1}^{n} c_i e_i + d_i f_i : c_i, d_i \in \mathbb{R} \right\} \\
&\cong \left\{ (0, ..., 0, c_{m+1}, d_{m+1}, ..., c_n, d_n) : c_{m+1}, d_{m+1}, ..., c_n, d_n \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Note-se que $[\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{n}_\mu] = \{\overline{0}\}$. *Logo* $[\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{n}_\mu] \subset \mathfrak{n}_\mu$ *e portanto a estrutura de Poisson transversa em* $\mu + \mathfrak{n}_\mu^\circ$ *é dada pela restrição da estrutura de Lie-Poisson em* $\mathfrak{g}^*$ *a* $\mathfrak{g}_\mu^*$ *(corolário 4.9).*

Exemplo 5.2 *Tome-se* $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_4 = \{A \in M_{4\times 4} : A = -A^T\}$. *Uma base de* $\mathfrak{g}$ *é* $\{E_i\}_{i=1}^6$, *onde*

$$\begin{aligned}
E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
E_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Os comutadores são

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2] &= E_1E_2 - E_2E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_4; \\
[E_1, E_3] &= -E_5; [E_1, E_4] = E_2; [E_1, E_5] = E_3; [E_1, E_6] = \overline{0}; \\
[E_2, E_3] &= -E_6; [E_2, E_4] = -E_1; [E_2, E_5] = \overline{0}; [E_2, E_6] = E_3 \\
[E_3, E_4] &= \overline{0}; [E_3, E_5] = -E_1; [E_3, E_6] = -E_2; \\
[E_4, E_5] &= -E_6; [E_4, E_6] = E_5; \\
[E_5, E_6] &= -E_4.
\end{aligned}$$

Sejam $\{x_i\}_{i=1}^6$ *as coordenadas lineares em* $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{so}_4^*$, *identificadas com* $\{E_i\}_{i=1}^6$. *Então a matriz da estrutura de Lie-Poisson é a seguinte:*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -x_4 & -x_5 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & -x_6 & -x_1 & 0 & x_3 \\ x_5 & x_6 & 0 & 0 & -x_1 & -x_2 \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 & -x_6 & x_5 \\ -x_3 & 0 & x_1 & x_6 & 0 & -x_4 \\ 0 & -x_3 & x_2 & -x_5 & x_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(P) = 0$, P *tem, no máximo, característica 4. O seus valores próprios são*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0, \\
\lambda_2 &= 0, \\
\lambda_3 &= -\lambda_4 = i\sqrt{(x_5 - x_2)^2 + (x_1 + x_6)^2 + (x_4 + x_3)^2}, \\
\lambda_5 &= -\lambda_6 = i\sqrt{(x_5 + x_2)^2 + (x_1 - x_6)^2 + (x_4 - x_3)^2}.
\end{aligned}$$

Nos pontos $\mu \in \mathfrak{so}_4^*$ em que $car_\mu \{,\} = 4$ (pontos de característica máxima), a estrutura de Poisson transversa é trivialmente nula, já que tais pontos são regulares. Há que encontrar pontos μ tais que $car_\mu \{,\} = 2$. Em tais pontos (se existirem), a matriz P terá quatro valores próprios nulos. Estudar-se-á o caso em que

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

ou seja, μ é da forma

$$(x_1, x_2, x_3, -x_3, x_2, -x_1).$$

Notemos que, se

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$$

então tal μ satisfaz:

1. *$car_\mu \{,\} = 2$;*
2. *μ é singular (uma vez que em qualquer vizinhança de μ existem pontos de característica 4).*

Escolhamos uma base para:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\mu &= \left\{\xi \in \mathfrak{g} : ad_\xi^* \mu \equiv 0\right\} = \ker P(\mu) = \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 & x_2 & x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 & -x_1 & 0 & x_3 \\ x_2 & -x_1 & 0 & 0 & -x_1 & -x_2 \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 & -x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & -x_3 & x_2 & -x_2 & -x_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por exemplo:

$$\left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para $\mathfrak{g}_\mu$.

Vai-se agora escolher $\mathfrak{n}_\mu$ tal que

$$\mathfrak{n}_\mu \oplus \mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{g}.$$

Escolha 1:
Assumindo por exemplo que $x_1 \neq 0$, podemos escolher para $\mathfrak{n}_\mu$ o subespaço gerado por

$$\left\{ G_1 = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \\ x_1 \\ 0 \\ -x_3 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

*Identifica-se $\mathfrak{so}_4$ com $\mathbb{R}^6$, fazendo corresponder aos vectores $\{E_i\}_{i=1}^6$ os vectores $\{e_i\}_{i=1}^6$ da base canónica de $\mathbb{R}^6$.

Escolheu-se propositadamente $\mathfrak{n}_\mu = \mathfrak{g}_\mu^\perp$ *em relação ao produto interno usual em* $\mathbb{R}^6$. *Assim, tem-se que*

$$\mathfrak{n}_\mu^\circ \cong \mathfrak{g}_\mu.$$

Tome-se $\nu \in U \subset \mathfrak{n}_\mu^\circ$, *ou seja,*

$$\begin{aligned} \nu &= y_1F_1 + y_2F_2 + y_3F_3 + y_4F_4 \\ &= (y_1, y_2, y_3, y_3 + x_3y_4, -y_2 - x_2y_4, y_1 + x_1y_4). \end{aligned}$$

Em vista da fórmula (4.5), quer-se encontrar uma expressão para a projecção

$$\pi_1 : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}_\mu^\circ, \text{ com núcleo } ad^*_{\mathfrak{n}_\mu}(\mu + \nu).$$

Comecemos encontrar uma base para $ad^*_{\mathfrak{n}_\mu}(\mu + \nu)$. *É necessário calcular*

$$ad^*_{G_1}(\mu + \nu) \text{ e } ad^*_{G_2}(\mu + \nu)$$

e, para tal, utiliza-se a matriz de Lie-Poisson no ponto $\mu + \nu$. *Note-se que a i-ésima linha da matriz* $(P_{ij}(\mu + \nu))$ *é exactamente o vector*

$$ad^*_{E_i}(\mu + \nu)$$

e que

$$\mu + \nu = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, -x_3 + y_3 + x_3y_4, x_2 - y_2 - x_2y_4, -x_1 + y_1 + x_1y_4).$$

Tendo em conta que

$$G_1 = x_3E_1 - x_1E_3 + x_1E_4 - x_3E_6,$$

obtém-se

$$ad^*_{G_1}(\mu + \nu) = \begin{pmatrix} x_1x_2(y_4 - 2) \\ -\left(x_1^2 + x_3^2\right)(y_4 - 2) \\ x_2x_3(y_4 - 2) \\ -x_2x_3(y_4 - 2) \\ -\left(x_1^2 + x_3^2\right)(y_4 - 2) \\ -x_1x_2(y_4 - 2) \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} (y_4 - 2)W_5.$$

De forma análoga se obtém

$$ad^*_{G_2}(\mu + \nu) = \begin{pmatrix} x_1x_3(y_4 - 2) \\ x_2x_3(y_4 - 2) \\ -\left(x_1^2 + x_2^2\right)(y_4 - 2) \\ \left(x_1^2 + x_2^2\right)(y_4 - 2) \\ x_2x_3(y_4 - 2) \\ -x_1x_3(y_4 - 2) \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} (y_4 - 2)W_6,$$

pelo que uma base para $ad^*_{\mathfrak{n}_\mu}(\mu + \nu)$ *é*

$$\left\{ W_5 = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -\left(x_1^2 + x_3^2\right) \\ x_2x_3 \\ -x_2x_3 \\ -\left(x_1^2 + x_3^2\right) \\ -x_1x_2 \end{pmatrix}, W_6 = \begin{pmatrix} x_1x_3 \\ x_2x_3 \\ -\left(x_1^2 + x_2^2\right) \\ x_1^2 + x_2^2 \\ x_2x_3 \\ -x_1x_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Considerando a matriz

$$M = ([F_1]\,[F_2]\,[F_3]\,[F_4]\,[W_5]\,[W_6])$$

(obtida por concatenação dos vectores-coluna), encontrar $\pi_1(u)$ *equivale a resolver o sistema*

$$M\lambda = u, \tag{5.4}$$

escolhendo depois as primeiras quatro coordenadas do vector λ, *isto é* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, *e tomando*

$$\pi_1(u) = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4.$$

A título de exemplo explicita-se o cálculo de $\pi_1\left(ad^*_{F_1}(\nu)\right)$. *Obtém-se, da mesma maneira que* W_5 *e* W_6,

$$ad^*_{F_1}(\nu) = (0, -\left(2y_3 + x_3y_4\right), 2y_2 + x_2y_4, 2y_2 + x_2y_4, 2y_3 + x_3y_4, 0).$$

Resolve-se a equação (5.4) com $u = ad^*_{F_1}(\nu)$, *i.e.,*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = M_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(2y_3 + x_3y_4\right) \\ 2y_2 + x_2y_4 \\ 2y_2 + x_2y_4 \\ 2y_3 + x_3y_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tem-se que

$$\pi_1\left(ad^*_{F_1}(\nu)\right) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i F_i \stackrel{def}{=} w_1.$$

Pode-se então calcular a primeira linha da matriz de Poisson da estrutura transversa:

$$\begin{aligned} P'_{11}(\nu) &= \langle w_1, F_1 \rangle = 0; \\ P'_{12}(\nu) &= \langle w_1, F_2 \rangle = -4y_3 - 2x_3y_4; \\ P'_{13}(\nu) &= \langle w_1, F_3 \rangle = 4y_2 + 2x_1y_4; \\ P'_{14}(\nu) &= \langle w_1, F_4 \rangle = 2x_3y_2 - 2x_1y_3. \end{aligned}$$

Calculando $\pi_1\left(ad^*_{F_i}(\nu)\right), i = 2, 3, 4$, *obtém-se a matriz seguinte para a estrutura de Poisson transversa:*

$$P'_{ij}(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & -4y_3 - 2x_3y_4 & 4y_2 + 2y_4x_1 & 2y_2x_3 - 2y_3x_1 \\ 4y_3 + 2x_3y_4 & 0 & -4y_1 - 2y_4x_2 & -2y_1x_3 + 2y_3x_2 \\ -4y_2 - 2y_4x_1 & 4y_1 + 2y_4x_2 & 0 & -2y_2x_2 + 2y_1x_1 \\ -2y_2x_3 + 2y_3x_1 & 2y_1x_3 - 2y_3x_2 & 2y_2x_2 - 2y_1x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O facto de a estrutura de Poisson transversa resultar linear tem a ver com o facto de a condição de Molino

$$[\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{n}_\mu] \subset \mathfrak{n}_\mu$$

ser verificada para esta escolha de $\mathfrak{n}_\mu$, *logo* $P'_{ij}(\nu)$ *é a matriz da estrutura de Lie-Poisson em* $\mathfrak{g}^*_\mu$. *De facto, considerando as bases* $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ *(de* $\mathfrak{g}_\mu$*) e* $\{G_1, G_2\}$ *(de* $\mathfrak{n}_\mu$*), tem-se*

$$\begin{aligned} [F_i, G_j] &= \{0\}, \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ e } j = 1, 2; \\ [F_4, G_1] &= -\frac{x_2x_3}{x_1} G_1 - \frac{\left(x_1^2 + x_3^2\right)}{x_1} G_2; \\ [F_4, G_2] &= \frac{\left(x_1^2 + x_2^2\right)}{x_1} G_1 + \frac{x_2x_3}{x_1} G_2. \end{aligned}$$

Escolha 2:

Vai-se considerar agora um outro complemento $\mathfrak{n}_\mu$ *(para o qual a condição de Molino não é verificada). Assumindo que* $x_3 \neq 0$, *seja:*

$$\mathfrak{n}_\mu = \{\eta \in \mathfrak{g} : \eta = aE_1 + bE_2\},$$

isto é, o espaço gerado por:

$$\{G_1 = E_1, G_2 = E_2\}$$

Então:

$$\mathfrak{n}_\mu^\circ = \{(0,0,y_1,y_2,y_3,y_4) : y_i \in \mathbb{R}\},$$

isto é, o espaço gerado por

$$\{H_1 = E_3, H_2 = E_4, H_3 = E_5, H_4 = E_6\}.$$

Logo $\mu + \nu$ *é da forma*

$$(x_1, x_2, x_3 + y_1, -x_3 + y_2, x_2 + y_3, -x_1 + y_4)$$

Define-se uma base para $ad^*_{\mathfrak{n}_\mu}(\mu+\nu)$ *como sendo* $\{W_5, W_6\}$, *onde*

$$\begin{aligned} W_5 &= ad^*_{G_1}(\mu+\nu) \\ &= (0, x_3 - y_2, -x_2 - y_3, x_2, x_3 + y_1, 0); \\ W_6 &= ad^*_{G_2}(\mu+\nu) \\ &= (-x_3 + y_2, 0, x_1 - y_4, -x_1, 0, x_3 + y_1). \end{aligned}$$

A nova matriz utilizada no cálculo da projecção é:

$$M = ([H_1]\,[H_2]\,[H_3]\,[H_4]\,[W_5]\,[W_6]),$$

e encontrar $\pi_1(u)$ *equivale a resolver o sistema*

$$M\lambda = u, \tag{5.5}$$

escolhendo depois as primeiras quatro coordenadas do vector λ *e tomando*

$$\pi_1(u) = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4.$$

Nota 5.3 *Note-se que na escolha anterior de* $\mathfrak{n}_\mu$, *se tinha* $H_i \cong F_i$, *uma vez que* $\mathfrak{n}_\mu$ *era o complemento ortogonal de* $\mathfrak{g}_\mu$.

Seguidamente apresenta-se o cálculo de $\pi_1\left(ad^*_{F_1}(\nu)\right)$.

$$ad^*_{F_1}(\nu) = (0, 0, -y_1 - y_2, -y_3, -y_3, y_1 + y_2, 0).$$

Resolve-se a equação (5.4) com $u = ad^*_{F_1}(\nu)$, *obtendo*

$$\pi_1\left(ad^*_{F_1}(\nu)\right) = \left(0, 0, -y_3 - \frac{(x_2+y_3)(y_1+y_2)}{x_3 - y_2}, -y_3 + \frac{x_2(y_1+y_2)}{x_3 - y_2}, y_1 + y_2 + \frac{(x_3+y_1)(y_1+y_2)}{x_3 - y_2}, 0\right).$$

Calculando $\pi_1\left(ad^*_{F_i}(\nu)\right), i = 2,3,4,$ *e fazendo* $\langle \pi_1\left(ad^*_{F_i}(\nu)\right), F_j\rangle$ *para todos os índices* i *e* j, *obtém-se para a estrutura transversa a matriz anti-simétrica cujas entradas são*

$$\begin{aligned}
P'_{12}(\mu+\nu) &= -\frac{2x_3y_1+2x_3y_2+y_1^2-y_2^2}{x_3-y_2}\\
P'_{13}(\mu+\nu) &= -\frac{y_3\left(y_1-y_2+2x_3\right)}{x_3-y_2}\\
P'_{14}(\mu+\nu) &= -\frac{x_3\left(x_2y_1+x_2y_2+x_3y_3-y_2y_3\right)+x_2\left(y_1^2-y_2^2\right)}{x_3-y_2}\\
P'_{23}(\mu+\nu) &= -\frac{y_4\left(y_1-y_2+2x_3\right)}{x_3-y_2}\\
P'_{24}(\mu+\nu) &= \frac{x_3\left(x_1y_1+x_1y_2-x_3y_4+y_2y_4\right)+x_1\left(y_1^2-y_2^2\right)}{x_3-y_2}\\
P'_{34}(\mu+\nu) &= \frac{x_3\left(x_2y_4+x_1y_3\right)+x_2\left(y_1y_4-y_2y_4\right)+x_1\left(y_1y_3-y_2y_3\right)}{x_3-y_2}
\end{aligned}$$

Este exemplo mostra que, numa álgebra de Lie, o facto da estrutura transversa a uma órbita coadjunta, $Ad^*_G\mu$, ser polinomial ou não depende da escolha do complementar $\mathfrak{n}_\mu$ de $\mathfrak{g}_\mu$ em $\mathfrak{g}$. Dir-se-á então que a estrutura de Poisson transversa a uma órbita coadjunta é "polinomial" *se existir* um complemento $\mathfrak{n}_\mu$ de $\mathfrak{g}_\mu$ para o qual a estrutura transversa em $\mu+\mathfrak{n}^\circ_\mu$ é polinomial.

Tendo em conta o exemplo seguinte, introduz-se a noção de produto semi-directo em grupos e álgebras de Lie:

Definição 5.4 *Seja* G *um grupo de Lie e* V *um espaço vectorial real de dimensão finita onde* G *actua por uma acção de classe* C^∞. *O "produto semi-directo entre* G *e* V*", denotado* $(G\propto V,\cdot)$, *é o grupo de Lie assim definido:*

1. *Enquanto variedade diferenciável,* $G\propto V = G\times V$.
2. *Se* $g_1,g_2\in G$ *e* $v_1,v_2\in V$, *então*

$$(g_1,v_1)\cdot(g_2,v_2) = (g_1g_2, v_1+\Phi_{g_1}v_2).$$

Análogamente se define o produto semi-directo entre uma álgebra de Lie e um espaço vectorial:

Definição 5.5 *Se* $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie real que actua através de* Φ *num espaço vectorial* V, *de dimensão finita, define-se o produto semi-directo* $\mathfrak{g}\propto V$ *como sendo a álgebra de Lie definida por:*

1. *Enquanto espaço vectorial,* $\mathfrak{g}\propto V=\mathfrak{g}\times V$.
2. *Se* $\xi,\eta\in\mathfrak{g}$ *e* $v_1,v_2\in V$, *então*

$$\left[(\xi,v_1),(\eta,v_2)\right]_{\mathfrak{g}\propto V} = \left(\left[\xi,\eta\right]_{\mathfrak{g}}, \Phi_\xi v_2-\Phi_\eta v_1\right).$$

Exemplo 5.6 (Cushman, Roberts) *Considere-se a álgebra de Lie* $\mathfrak{g}=\mathfrak{se}_3$ *do grupo euclideano* $SE_3 = SO_3\propto\mathbb{R}^3$ *para a acção usual de* SO_3 *em* $\mathbb{R}^3$. *Através do produto exterior, identifica-se* $\mathbb{R}_3$ *com* $\mathfrak{so}_3=\left\{A\in M_{3\times3}: A=-A^T\right\}$ *do seguinte modo: a cada*

$$a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$$

associa-se

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}\in\mathfrak{so}_3.$$

Se $a, b \in \mathbb{R}^3$ e $A, B \in \mathfrak{so}_3$ são tais que:

$$a \cong A, b \cong B$$

então

$$\begin{aligned}
a \times b &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\
&\cong \begin{pmatrix} 0 & -a_1b_2 + a_2b_1 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 & 0 & -a_2b_3 + a_3b_2 \\ -a_3b_1 + a_1b_3 & a_2b_3 - a_3b_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= AB - BA \\
&= [A, B].
\end{aligned}$$

Assim, tem-se que $(\mathbb{R}^3, \times) \cong (\mathfrak{so}_3; [,])$ *, logo*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Por outro lado, a acção Φ de $\mathfrak{so}_3$ em $\mathbb{R}^3$ é equivalente à acção de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ dada pelo produto externo $\times$. Se $\alpha \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}_3$,

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\alpha) &= A.\alpha \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a_3\alpha_2 + a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1 - a_1\alpha_3 \\ -a_2\alpha_1 + a_1\alpha_2 \end{pmatrix} \\
&\cong (a_1, a_2, a_3) \times (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
&= a \times \alpha.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

através da identificação habitual usando o produto interno em $\mathbb{R}^3$. Com estas identificações vai-se calcular uma expressão para $ad_\xi(\eta)$ e $ad_\xi^*(\mu)$, onde $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ e $\mu \in \mathfrak{g}^*$. Doravante, usar-se-á a notação

$$\xi = (a, b), \eta = (c, d), \mu = (x, y).$$

Usando as identificações atrás temos então que:

$$\begin{aligned}
ad_\xi(\eta) &= [\xi, \eta] \\
&= [(a, b), (c, d)] \\
&= (a \times c, a \times d - c \times b) \\
&\cong (AC - CA, Ad - Cb),
\end{aligned}$$

pela definição de produto semi-directo de uma álgebra de Lie actuando sobre um espaço vectorial. Tem-se também que

$$\begin{aligned}
ad_\xi^*(\mu) &= ad_{(a,b)}^*(x, y) \\
&= (x \times a + y \times b, y \times a).
\end{aligned}$$

De facto,

$$\begin{aligned}\left\langle ad_{\xi}^{*}(\mu),\eta\right\rangle &= \langle\mu, ad_{\xi}(\eta)\rangle\\ &= \langle(x,y),(a\times c, a\times d - c\times b)\rangle\\ &= \langle x, a\times c\rangle + \langle y, a\times d\rangle - \langle y, c\times b\rangle\\ &= \langle x\times a, c\rangle + \langle y\times a, d\rangle + \langle y\times b, c\rangle\\ &= \langle x\times a + y\times b, c\rangle + \langle y\times a, d\rangle\\ &= \langle(x\times a + y\times b, y\times a),(c,d)\rangle .\end{aligned}$$

para qualquer $\eta = (c,d)$. *Logo*

$$ad_{\xi}^{*}(\mu) = (x\times a + y\times b, y\times a).$$

O subgrupo de isotropia em μ *é*

$$\mathfrak{g}_{\mu} = \mathfrak{g}_{(x,y)} = \left\{(a,b)\in\mathfrak{g} : (x\times a + y\times b, y\times a) = \vec{0}\right\}.$$

Há que encontrar os pontos $\mu\in\mathfrak{g}^{*}$ *nos quais a estrutura de Poisson é singular. Para tal, vai-se calcular a matriz de Poisson de* $(\mathfrak{g}^{*},\{,\}_{L})$, *que não é mais do que a matriz que representa*

$$B_{\mu}:\begin{array}{ccc}\mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g}^{*}\\ \xi & \longmapsto & ad_{\xi}^{*}\mu\end{array},$$

por exemplo na base canónica de $\mathbb{R}^{3}\times\mathbb{R}^{3}(\overset{\times}{\cong}\mathfrak{g}\overset{\langle,\rangle}{\cong}\mathfrak{g}^{*})$ *ou na base correspondente de* $\mathfrak{so}_{3}\propto\mathbb{R}^{3}$:

$$\begin{aligned}E_{1} &\cong \left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},(0,0,0)\right),\\ E_{2} &\cong \left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},(0,0,0)\right),\\ E_{3} &\cong \left(\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},(0,0,0)\right),\\ E_{4} &\cong ((0),(1,0,0)), E_{5}\cong((0),(0,1,0)), E_{6}\cong((0),(0,0,1)).\end{aligned}$$

Representou-se a matriz nula por (0). *Tem-se que*

$$B_{\mu}(E_{1}) = ad_{E_{1}}^{*}(\mu) = (0, x_{3}, -x_{2}, 0, y_{3}, -y_{2}).$$

Análogamente se calculam $B_{\mu}(E_{i}), i = 2,...,6$, *obtendo-se a matriz de Poisson*

$$P_{\mu} = P_{(x,y)} = \begin{pmatrix}0 & x_{3} & -x_{2} & 0 & y_{3} & -y_{2}\\ -x_{3} & 0 & x_{1} & -y_{3} & 0 & y_{1}\\ x_{2} & -x_{1} & 0 & y_{2} & -y_{1} & 0\\ 0 & y_{3} & -y_{2} & 0 & 0 & 0\\ -y_{3} & 0 & y_{1} & 0 & 0 & 0\\ y_{2} & -y_{1} & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Como $det(P)\equiv 0$, *tem-se*

$$\max\{car_{\mu}(P) : \mu\in\mathfrak{g}^{*}\} < 6$$

e os pontos μ com característica 4, a existirem, são regulares. Pontos com característica 4 são todos aqueles que satisfazem

$$y_i \neq 0 \text{ para algum } i = 1, 2, 3.$$

Por outro lado,

$$car_\mu (P) = 2 \Longrightarrow \mu \text{ singular.}$$

Para provar esta afirmação, note-se em primeiro lugar que se $car_\mu (P) = 2$ então $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. De facto, $\mu = (x_1, x_2, x_3, \varepsilon, 0, 0)$ está ε-próximo de $(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)$ e tem característica 4 se $\varepsilon \neq 0$. Por isso, μ é singular.

Finalmente, os pontos de característica 2 são exactamente os pontos da forma

$$\mu = \left(x, \vec{0}\right) = (x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0), \text{ com } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0. \tag{5.6}$$

Vai-se agora calcular a estrutura de Poisson transversa à órbita coadjunta para os pontos (5.6). Tem-se que

$$\begin{aligned} ad^*_\xi (\mu) &= 0 \Longleftrightarrow ad^*_{(a,b)} \left(x, \vec{0}\right) = 0 \Longleftrightarrow \left(x \times a, \vec{0}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x \times a = 0 \Longleftrightarrow a = kx, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_\mu &= \left\{\xi \in \mathfrak{g} : ad^*_\xi (\mu) = 0\right\} \\ &= \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : a = kx, b \in \mathbb{R}^3\right\}, \end{aligned}$$

i.e., é o espaço gerado por

$$\left\{ F_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Uma escolha possível para $\mathfrak{n}_\mu$ é, assumindo por exemplo que $x_3 \neq 0$, o espaço gerado por

$$\left\{ G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

caso em que $\mathfrak{n}_\mu^\circ$ é gerado por

$$\left\{ H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, H_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Denotar-se-á por $(0, 0, x_3^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, y_3^\circ)$ *um elemento arbitrário de* $\mathfrak{n}_\mu^\circ$*, de modo a manter a notação usada por Cushman e Roberts. Seja* $\nu = (x^\circ, y^\circ) \in n_\mu^\circ$*. Tem-se*

$$\begin{aligned} ad_\xi^*(\mu+\nu) &= ad^*_{(a_1,a_2,0,0,0,0)}(x+x^\circ, y^\circ) \\ &= ((x+x^\circ)\times(a_1,a_2,0), y^\circ \times (a_1,a_2,0)) \\ &= ((x_1,x_2,x_3+x_3^\circ)\times(a_1,a_2,0), (y_1^\circ,y_2^\circ,y_3^\circ)\times(a_1,a_2,0)) \\ &= (-(x_3+x_3^\circ)a_2, (x_3+x_3^\circ)a_1, x_1a_2-x_2a_1, -y_3^\circ a_2, y_3^\circ a_1, y_1^\circ a_2 - y_2^\circ a_1), \end{aligned}$$

portanto uma base para $ad^*_{n_\mu}(\mu+\nu)$ *é* $\{W_5, W_6\}$*, onde*

$$\begin{aligned} W_5 &= (0, x_3+x_3^\circ, -x_2, 0, y_3^\circ, -y_2^\circ), \\ W_6 &= (-x_3-x_3^\circ, 0, x_1, -y_3^\circ, 0, y_1^\circ). \end{aligned}$$

Obtém-se a matriz:

$$M = ([H_1][H_2][H_3][H_4][W_5][W_6]),$$

e encontrar $\pi_1(u)$ *é resolver o sistema:*

$$M\lambda = u, \tag{5.7}$$

tomando depois

$$\pi_1(u) = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 + \lambda_4 H_4.$$

A título de exemplo apresenta-se $\pi_1\left(ad^*_{F_3}(\nu)\right)$.

$$ad^*_{F_3}(\nu) = (-y_3^\circ, 0, y_1^\circ, 0, 0, 0).$$

Resolve-se a equação (5.4) com $u = ad^*_{F_1}(\nu)$*, obtendo*

$$\pi_1\left(ad^*_{F_3}(\nu)\right) = \left(0, 0, y_1^\circ - \frac{x_1 y_3^\circ}{x_3+x_3^\circ}, \frac{(y_3^\circ)^2}{x_3+x_3^\circ}, 0, -\frac{y_1^\circ y_3^\circ}{x_3+x_3^\circ}\right).$$

De modo análogo aos exemplos anteriores obtém-se para a estrutura transversa a seguinte matriz:

$$P'_{\mu+\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{x_3(x_2y_3^\circ - x_3y_2^\circ - x_3^\circ y_2^\circ)}{x_3+x_3^\circ} & \frac{x_3(x_1y_3^\circ - x_3y_1^\circ - x_3^\circ y_1^\circ)}{x_3+x_3^\circ} & \frac{x_3(x_2y_1^\circ - x_1y_2^\circ)}{x_3+x_3^\circ} \\ \frac{x_3(x_2y_3^\circ - x_3y_2^\circ - x_3^\circ y_2^\circ)}{x_3+x_3^\circ} & 0 & -\frac{(y_3^\circ)^2}{x_3+x_3^\circ} & \frac{y_2^\circ y_3^\circ}{x_3+x_3^\circ} \\ -\frac{x_3(x_1y_3^\circ - x_3y_1^\circ - x_3^\circ y_1^\circ)}{x_3+x_3^\circ} & \frac{(y_3^\circ)^2}{x_3+x_3^\circ} & 0 & -\frac{y_1^\circ y_3^\circ}{x_3+x_3^\circ} \\ -\frac{x_3(x_2y_1^\circ - x_1y_2^\circ)}{x_3+x_3^\circ} & -\frac{y_2^\circ y_3^\circ}{x_3+x_3^\circ} & \frac{y_1^\circ y_3^\circ}{x_3+x_3^\circ} & 0 \end{pmatrix}$$

Bibliografia

1. Ralph Abraham & Jerrold E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, second edition, Benjamin Cummings, Reading, Massachussets, 1978.
2. Richard Cushman & Mark Roberts, *Poisson structures transverse to coadjoint orbits*, Bull. Sci. Math., **126**, (7), 2002, 525 - 614.
3. P. A. Damianou, *Transverse Poisson structures of coadjoint orbits*, Bull. Sci. Math., **120** (1996), 195 - 214.
4. Paulette Libermann & Charles-Michel Marle,1994, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D Reidel, Dordrecht, Holland, 1987.
5. Alan Weinstein, *The local structure of Poisson Manifolds,* Journal of Differential Geometry, **18** (1983), 523-557.
6. Weinstein, *Errata and addenda to "The local structure of Poisson Manifolds",* Journal of Differential Geometry, **22** (1985), 255

Tiago Marques Fardilha

A estrutura de Poisson transversa em duais de álgebras de Lie

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Departamento de Matemática Aplicada
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

2003