



**FEUP** Universidade do Porto  
Faculdade de Engenharia

**VIBRAÇÕES DO SISTEMA VIA-MACIÇO INDUZIDAS POR  
TRÁFEGO FERROVIÁRIO. MODELAÇÃO NUMÉRICA E  
VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL**

Pedro Miguel Barbosa Alves Costa

Dissertação apresentada na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para obtenção do grau de  
Doutor em Engenharia Civil .

Orientadores: Rui Calçada (Professor Associado); António Silva Cardoso (Professor Catedrático).





***À Patrícia, à nossa filha Caetana,***

***e aos meus Pais***



## RESUMO

A dissertação dedica-se ao estudo do comportamento dinâmico de vias férreas sob a acção de tráfego, incluindo a propagação de vibrações pelo maciço de fundação. O estudo, de carácter mecanicista, envolve o desenvolvimento e a validação experimental de modelos de previsão englobando, na versão mais completa e versátil, a interacção dinâmica entre o veículo, a via férrea e o maciço de fundação.

Após a exposição sucinta dos princípios basilares da elastodinâmica, introduz-se um conjunto de modelos semi-analíticos para a simulação da resposta dinâmica do sistema via-macício de fundação face à acção de tráfego. Esses modelos têm como denominador comum o facto de permitirem a inclusão da estratificação horizontal do maciço de fundação, respeitando sempre a tridimensionalidade do problema. São admitidas diferentes tipologias de vias férreas, nomeadamente vias balastradas e não balastradas. A formulação matemática é feita, de um modo eficiente, através do desenvolvimento das equações de equilíbrio no domínio do número de onda-frequência.

A interacção dinâmica veículo-via é atendida através de um módulo computacional autónomo, que inclui a modelação estrutural do comboio e a contabilização das forças dinâmicas de interacção induzidas pelas irregularidades geométricas verticais da via.

Tendo em vista a avaliação da influência de diversos parâmetros na dinâmica do sistema, são efectuados estudos paramétricos enquadrados nos âmbitos de duas problemáticas importantes no estudo de vias férreas de alta velocidade: i) a das velocidades críticas; ii) a da propagação de vibrações induzidas pelo tráfego nas áreas vizinhas das vias férreas. Nesses estudos são identificados os parâmetros mais influentes em cada caso, tanto ao nível do cenário geotécnico como ao nível da via férrea ou do material circulante.

Após a interpretação fenomenológica das questões em estudo, desenvolvem-se modelos numéricos mais potentes e detalhados para a simulação do sistema via-macício de fundação, baseados no conceito 2.5D e formulados através dos Métodos dos Elementos Finitos (MEF) e dos Elementos de Contorno (MEC). Esses modelos são usados na simulação de obras reais, procedendo-se assim à sua validação experimental.

O bem conhecido caso de estudo situado em Ledsgard, na linha Ocidental sueca, é então revisitado, propondo-se uma metodologia eficiente para a consideração dos efeitos da não linearidade material, aspecto importante quando a velocidade de circulação se aproxima da velocidade crítica. A metodologia proposta, conjugada com o Método dos Elementos Finitos 2.5D, conduz a resultados com elevado nível de acuidade.

Perseguido os objectivos do trabalho, é apresentado o campo experimental concebido e desenvolvido de raiz em território nacional, localizado na linha do Norte junto ao Carregado. Após a descrição das actividades experimentais efectuadas, a situação real é simulada através do modelo MEF-MEC proposto. A comparação entre os resultados medidos e os numéricos permite atestar a fiabilidade dos últimos, quer no que concerne à estimativa da resposta da via férrea, quer no tocante à previsão das vibrações emanadas para a vizinhança da via durante a passagem de comboios.

Por fim, procede-se à síntese das principais conclusões retiradas dos estudos empreendidos e perspectiva-se a investigação a realizar no âmbito da temática da dissertação.



## ABSTRACT

This thesis is devoted to the study of the dynamic behaviour of railway track under traffic loads, including wave propagation through the ground. The study involves the development and the experimental validation of predictive mechanical models, comprising, on their generalized and more complete version, the dynamic interaction between the rolling stock, the track and the ground.

After a synthetic outline of the elastodynamic fundamentals, a set of semi-analytical models is presented for the prediction of track-ground vibrations induced by traffic. These models have in common the fact of allowing the inclusion of the layering of the ground, fulfilling the requirements of tridimensionality of the problem. Several types of railway track are considered, namely ballasted and non-ballasted track. The mathematical formulation is achieved by an efficient procedure, developing the equilibrium equations of all elements on the wavenumber-frequency domain.

The train-track dynamic interaction is accounted for by an autonomous computational code, which provides the structural modelling of the train as well as the determination of the interaction dynamic loads due to track unevenness.

Bearing in mind the assessment of the possible influence of several parameters on the dynamic behaviour of the system, parametric studies are developed taking into account two important issues related to the dynamic behaviour of high speed railway tracks: i) the evaluation of the critical speed; ii) the propagation of vibrations in the vicinity of the track. Through these studies which consider distinct scenarios for the ground, the track as well as the train, the most influent parameters are identified.

After interpretation of the essence of the analyzed topics, more powerful and detailed numerical models for the simulation of the track-ground system are developed. These models, based on the 2.5D coupled formulation of the finite element and boundary element methods, are used for the simulation of real case studies, performing thereby their experimental validation.

The well known case study of Ledsgard, located on the West Coast Swedish line, is revisited and a new and efficient methodology is proposed to include the effects due to material non-linear behaviour, which represent an important factor when the train speed is close to the critical speed of the track-ground system. The proposed methodology, combined with the 2.5D Finite Element Method, leads to highly accurate results.

Following the objectives of the work, a presentation is made of an experimental field, located in the Portuguese railway network, near to Carregado, which was designed and developed for the specific purposes of the present thesis. After the description of the experimental activities carried out, the real test case is simulated by the proposed numerical model based on the FEM-BEM coupling. The comparison between measurements and predictions demonstrates the reliability of the proposed numerical model, concerning the prediction not only of the track dynamic response, but also of vibrations induced in the track vicinity during the train passage.

Finally, the main conclusions of the thesis are highlighted and further developments are suggested on this research topic.





## RÉSUMÉ

Cette thèse a porté sur l'étude du comportement dynamique des voies ferrées sous les actions du trafic en considérant la propagation des vibrations à travers du massif de fondation. L'étude réalisée, ayant un caractère essentiellement mécaniste, a inclus le développement et la validation expérimentale de modèles de prévision qui, dans une version plus complète et versatile, sont capables de représenter l'interaction dynamique entre le véhicule, la voie et le massif de fondation.

Après une brève exposition des principes fondamentaux d'élasto-dynamique, quelques modèles semi-analytiques existants pour la simulation de la réponse dynamique du système voie-massif de fondation sous l'action du trafic sont présentés. Ces modèles ont en commun la capacité de pouvoir considérer la stratification horizontale du massif de fondation, tout en respectant la tridimensionnalité du problème. Différents types de voies ferrées sont considérées, notamment les voies avec ballast et les voies n'ayant pas de ballast. La formulation du problème est faite efficacement en utilisant un développement des équations d'équilibre dans le domaine du numéro d'onde-fréquence.

L'interaction dynamique entre le véhicule et la voie est considérée en utilisant un logiciel indépendant qui considère la modélisation structurale du train et qui calcule les forces dynamiques d'interaction provenant des irrégularités géométriques verticales de la voie.

Ayant l'intention d'évaluer l'influence de certains paramètres sur la dynamique du système, des études paramétriques ont été réalisées dans le contexte de deux importantes problématiques de la recherche sur les voies ferrées de grande vitesse: i) celle des vitesses critiques; ii) celle de la propagation des vibrations induites par le trafic dans les zones voisines des voies ferrées. Les paramètres les plus influents dans chaque cas ont été identifiés, notamment en ce qui concerne le scénario géotechnique, le niveau de la voie ferrée et le matériel circulant.

Après l'interprétation phénoménologique des questions étudiées, des modèles numériques plus puissants et avec plus de détail ont été développés pour la simulation du système voie-massif de fondation, utilisant le concept 2.5D et la Méthode des Éléments Finis (MEF) et la Méthode des Éléments Frontière (MEFr). Ces modèles sont ensuite utilisés dans la simulation d'ouvrages réels pour effectuer leur validation expérimentale.

Le cas d'étude bien connu situé à Ledsgard, sur la Linhe Occidentale suédoise, est ainsi revisité, étant proposée une méthodologie efficace pour la considération des effets non-linéaires matériaux, un aspect important quand la vitesse de circulation s'approche de la vitesse critique. La méthodologie proposée, associée à la Méthode des Éléments Finis 2.5D, a permis d'obtenir des résultats avec un haut niveau de précision.

Dans la poursuite des objectifs du travail, le champ expérimental est présenté. Ce champ a été totalement conçu et développé au Portugal et il est situé sur la Linhe du Nord, près de Carregado. Après la description des activités expérimentales qui ont été réalisées, la situation réelle a été simulée utilisant le modèle MEF-MEFr proposé. La comparaison des résultats mesurés avec les résultats numériques a permis de vérifier la fiabilité du modèle numérique, en ce qui concerne la réponse de la voie ferrée et la prévision des vibrations qui seront propagées dans le voisinage de la voie quand un train circulera.

Finalement, une synthèse est présentée qui résume les conclusions principales obtenues par les études réalisées et qui propose des futures recherches possibles dans ce domaine.



## AGRADECIMENTOS

Findo este trabalho, não pode o autor deixar de expressar a sua profunda gratidão a todo um numeroso conjunto de pessoas e entidades que das mais diversas formas contribuíram para que fossem alcançados os objectivos propostos.

Pela importância dos respectivos contributos, com especial reconhecimento e amizade, endereçam-se os seguintes agradecimentos:

- Aos orientadores científicos, Professores Doutores Rui Calçada e António Silva Cardoso, pelo apoio, interesse e incentivo que devotaram à orientação do presente trabalho e, principalmente, pela amizade e disponibilidade demonstrada a cada momento, que em muito superaram o seu papel institucional.
- Ao Professor Doutor Anders Bodare, do Kungl Tekniska Hogskolan (KTH) de Estocolmo, Suécia, pela forma afectiva e altruísta com que recebeu e orientou o autor durante o estágio de longa duração realizado na respectiva Universidade.
- Aos Professores Doutores Geert Degrande e Geert Lombaert, da Katholieke Universiteit Leuven, na Bélgica, pelos valiosos conselhos científicos e abertura com que receberam o autor durante a realização de dois estágios de curta duração na respectiva Universidade.
- Aos Professores Doutores José Couto Marques e Rui Faria, pela forma amiga com que sempre se mostraram disponíveis para valiosas trocas de impressão.
- Ao Professor Doutor Raimundo Delgado, director do PRODEC, pela valiosa ajuda e pragmatismo sempre presente na resolução de diversas questões burocráticas.
- À REFER, por toda a colaboração prestada, a qual foi determinante para a realização de experimentação na Linha do Norte.
- Ao LNEC, pelo empréstimo do excitador utilizado na realização de alguns ensaios de campo.
- Ao CICCOPN, pela colaboração prestada na realização dos ensaios de caracterização geotécnica no campo experimental do Carregado.
- À Mota-Engil, pela realização dos ensaios Cross-hole no campo experimental do Carregado.
- Ao Laboratório de Geotecnia da FEUP pelo empréstimo do equipamento para realização dos ensaios Cross-hole.
- À CP, por ter facultado dados relativos ao comboio Alfa-Pendular.
- A todos os colegas do grupo de investigação, com especial destaque para o Nuno Santos e Nuno Pinto, pela colaboração na realização das actividades experimentais.

- A todos os colegas, nomeadamente aos amigos Carlos Sousa, Filipe Magalhães, Luis Noites, Mário Pimentel, Miguel Azenha, Miguel Ferraz, Nuno Raposo, Topa Gomes e Xavier Romão, por sempre se empenharem em criar relações de companheirismo e de bom ambiente de trabalho, as quais, sem dúvida, contribuíram para tornar o trabalho menos árduo. Especiais agradecimentos são endereçados aos colegas Topa Gomes, pela cuidada revisão do texto, e Xavier Romão, pela tradução do resumo em francês.
- À Fundação para a Ciência e Tecnologia, pela Bolsa de Doutoramento atribuída.
- À Fundação Calouste Gulbenkian, pela bolsa atribuída para a realização de um estágio de longa duração no KTH, Suécia.
- Ao projecto “*HSR-RISK*” do *Programa MIT-Portugal* pelo apoio financeiro concedido.

Por fim, não pode o autor deixar de expressar a sua profunda gratidão, estima e admiração a seus Pais, Irmã, Avós, e de um modo especial à Patrícia e à nossa filha Caetana, pelo carinho, incentivo e compreensão que neles sempre encontrou, principalmente nos momentos de desalento.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>1</b>
1.1	Enquadramento do tema.....	1
1.2	Motivação .....	4
1.3	Objectivos e principais contributos .....	5
1.4	Organização da dissertação .....	7
<b>2</b>	<b>Propagação de vibrações em meios elásticos e isotrópicos .....</b>	<b>11</b>
2.1	Generalidades .....	11
2.2	Modelos constitutivos usados na simulação da propagação de vibrações .....	11
2.2.1	Modelos elásticos lineares.....	11
2.2.2	Comportamento elástico linear versus comportamento elastoplástico não linear	12
2.2.3	Homogeneidade versus heterogeneidade.....	14
2.2.4	Isotropia versus anisotropia.....	15
2.2.5	Estado de tensão in-situ.....	16
2.3	Propagação de ondas sísmicas em meios elásticos .....	17
2.3.1	Tipos de ondas sísmicas .....	17
2.3.2	Ondas volúmicas .....	20
2.3.2.1	Equações gerais de equilíbrio.....	20
2.3.2.2	Velocidade de propagação de ondas volúmicas .....	24
2.3.3	Reflexão e refacção de ondas volúmicas em fronteiras e interfaces.....	26
2.3.3.1	Considerações gerais.....	26
2.3.3.2	Reflexão de ondas volúmicas na superfície livre.....	27
	Formulação geral.....	27
	Reflexão de ondas P e SV .....	29
	Reflexão de ondas SH.....	34
2.3.3.3	Reflexão e refacção de ondas volúmicas em interfaces.....	34
2.3.4	Ondas superficiais .....	36

2.3.4.1	Ondas de Rayleigh .....	37
2.3.4.2	Ondas de Love .....	43
2.3.5	Dispersão e atenuação de ondas .....	45
2.3.5.1	Considerações gerais.....	45
2.3.5.2	Dispersão .....	45
2.3.5.3	Amortecimento por radiação .....	48
2.3.5.4	Amortecimento material.....	50
2.4	Propagação de vibrações em meios poroelásticos .....	56
2.4.1	Considerações gerais.....	56
2.4.2	Teoria de Biot.....	57
2.5	Considerações finais.....	63
<b>3</b>	<b>Modelação da resposta dinâmica de maciços estratificados .....</b>	<b>65</b>
3.1	Introdução.....	65
3.2	Método dos integrais transformados .....	66
3.3	Método das matrizes de transferência .....	69
3.3.1	Considerações gerais.....	69
3.3.2	Matrizes de transferência de deslocamentos (flexibilidade) e de tensões .....	70
3.3.3	Dedução das matrizes de transferência no domínio transformado .....	72
3.3.3.1	Estrato isolado.....	72
3.3.3.2	Meio semi-indefinido .....	76
3.3.3.3	Maciço estratificado sobre “bedrock” .....	77
3.3.3.4	Maciço estratificado e semi-indefinido .....	82
3.3.4	Melhoria da eficiência computacional.....	83
3.3.5	Exemplos de validação .....	85
3.3.5.1	Preâmbulo .....	85
3.3.5.2	Estrato confinado .....	85
3.3.5.3	Formação semi-indefinida.....	88

3.4	Método dos estratos finos.....	89
3.4.1	Considerações gerais .....	89
3.4.2	Formulação do método.....	90
3.4.3	Condições de fronteira.....	96
3.4.4	Extensão do modelo para simulação de meios anisotrópicos.....	97
3.4.5	Exemplos de validação.....	101
3.5	Extensão dos métodos para carregamentos móveis com velocidade constante.....	104
3.5.1	Descrição da metodologia .....	104
3.5.2	Exemplos de validação.....	107
3.6	Comportamento dos maciços sujeitos a carregamentos móveis. Estudo paramétrico.....	111
3.6.1	Considerações iniciais .....	111
3.6.2	Cargas móveis de magnitude constante (excitação quasi-estática).....	112
3.6.3	Cargas móveis com carácter harmónico (excitação dinâmica).....	121
3.7	Considerações finais .....	126
<b>4</b>	<b>Modelação simplificada de vias férreas.....</b>	<b>129</b>
4.1	Introdução.....	129
4.2	Constituição de vias-ferreas de alta velocidade .....	130
4.2.1	Via balastrada .....	130
4.2.2	Via não balastrada .....	135
4.3	Acções exercidas pelo material circulante.....	137
4.4	Modelação estrutural de vias férreas e sua interacção com o maciço de fundação.....	141
4.4.1	Considerações gerais .....	141
4.4.2	Modelos simplificados para simulação de vias férreas.....	142
4.4.3	Interface flexível via-macijo .....	149
4.4.4	Interface rígida via-macijo.....	153
4.5	Estudo paramétrico da resposta dinâmica da via férrea .....	161
4.5.1	Considerações iniciais .....	161

4.5.2	Receptância da via férrea.....	161
4.5.2.1	Explicitação do conceito.....	161
4.5.2.2	Influência das propriedades do maciço de fundação.....	164
4.5.2.3	Influência das características do balastro .....	167
	Deformabilidade do balastro.....	167
	Amortecimento do balastro .....	169
	Espessura do balastro.....	170
4.5.2.4	Influência das características das palmilhas.....	173
	Rigidez das palmilhas .....	173
	Amortecimento das palmilhas .....	174
4.5.3	Estudo de velocidades críticas .....	176
4.5.3.1	Apresentação do estudo .....	176
4.5.3.2	Maciço homogéneo semi-indefinido (Maciço 1).....	177
4.5.3.3	Maciço estratificado normalmente dispersivo (Maciço 2).....	179
4.5.3.4	Maciço estratificado inversamente dispersivo (Maciço 3).....	181
4.6	Considerações finais e conclusões.....	182
<b>5</b>	<b>Modelação 2.5D da resposta dinâmica do sistema via-maciço .....</b>	<b>185</b>
5.1	Considerações gerais.....	185
5.2	Modelos quasi-tridimensionais baseados no método dos elementos finitos .....	188
5.2.1	Considerações finais.....	188
5.2.2	Equações gerais de equilíbrio do método dos elementos finitos 2.5D .....	189
5.2.3	Formulação de elementos de volume 2.5 D .....	191
5.2.4	Modelação das travessas .....	197
5.2.5	Modelação de palmilhas e carris.....	199
5.3	Inclusão do amortecimento por radiação através de metodologias locais.....	201
5.3.1	Problemática e metodologias de tratamento.....	201
5.3.2	Métodos das fronteiras absorventes .....	205



5.3.2.1	Formulação de Lysmer-Kuhlemeyer .....	205
5.3.2.2	Formulação de White .....	209
5.3.3	Método dos elementos infinitos.....	210
5.3.3.1	Considerações gerais.....	210
5.3.3.2	Formulação geral de elementos infinitos 2.5D .....	211
5.3.3.3	Seleção dos parâmetros de decaimento e oscilação.....	215
5.4	Exigências de discretização: dimensões da malha e dos elementos finitos .....	218
5.5	Análise comparativa da eficiência das metodologias locais incluídas no MEF 2.5D	223
5.5.1	Objectivos e descrição do exemplo de estudo .....	223
5.5.2	Solicitações dinâmicas não móveis .....	224
5.5.3	Solicitações móveis .....	227
5.5.4	Solicitações harmónicas com carácter móvel.....	229
5.5.5	Considerações finais .....	231
5.6	Acoplamento 2.5D MEF-MEC.....	232
5.6.1	Considerações gerais .....	232
5.6.2	Formulação do MEC 2.5D para simulação de meios semi-indefinidos.....	235
5.6.2.1	Preâmbulo .....	235
5.6.2.2	Equações integrais de contorno.....	235
5.6.2.3	Construção da matriz de flexibilidade 2.5D .....	239
	Equações integrais de fronteira no domínio 2.5D .....	239
	Construção da matriz de flexibilidade 2.5D .....	242
5.6.3	Acoplamento através de formulação de elementos finitos.....	244
5.6.3.1	Generalidades .....	244
5.6.3.2	Matriz de rigidez do meio semi-indefinido .....	246
5.6.3.3	Resposta do meio semi-indefinido.....	248
5.6.4	Análise de estruturas com simetria geométrica e mecânica.....	250
5.7	Considerações finais e conclusões.....	254

<b>6</b>	<b>Modelação da interacção comboio-via .....</b>	<b>257</b>
6.1	Considerações gerais.....	257
6.2	Modelo de interacção entre um oscilador com um grau de liberdade e a via .....	259
6.2.1	Formulação matemática .....	259
6.2.2	Validação do modelo de interacção.....	263
6.3	Interacção comboio-via: generalização do modelo .....	265
6.3.1	Aspectos gerais .....	265
6.3.2	Equações de equilíbrio dinâmico do comboio .....	266
6.3.3	Equações de movimento da via .....	271
6.3.4	Deformação de contacto roda-carril.....	272
6.3.5	Equações gerais de interacção.....	274
6.4	Irregularidades geométricas da via férrea .....	275
6.4.1	Generalidades .....	275
6.4.2	Geração de perfis de irregularidades artificiais .....	276
6.4.3	Funções de densidade espectral de potência de irregularidades.....	277
6.5	Estudo paramétrico da interacção comboio-infraestrutura .....	279
6.5.1	Objectivos e descrição geral do exemplo .....	279
6.5.2	A influência da velocidade de circulação e da qualidade da via .....	282
6.5.2.1	Comportamento dinâmico do sistema acoplado comboio-via .....	282
6.5.2.2	Forças de interacção dinâmica comboio-via .....	285
6.5.2.3	Resposta dinâmica da via férrea .....	286
6.5.2.4	Resposta dinâmica na vizinhança da via férrea.....	289
6.5.3	Influência da estratégia de modelação do material circulante .....	294
6.5.3.1	Estratégias de modelação alternativas .....	294
6.5.3.2	Forças de interacção dinâmica comboio-via .....	295
6.5.3.3	Resposta dinâmica nas imediações da via .....	297
6.6	Considerações finais e conclusões .....	299

<b>7</b>	<b>Caso de estudo de Ledsgard.....</b>	<b>301</b>
7.1	Preâmbulo.....	301
7.2	Descrição do campo experimental de Ledsgard.....	302
7.2.1	Localização e enquadramento geral.....	302
7.2.2	Características da via férrea.....	304
7.2.3	Prospecção geotécnica relevante.....	305
7.2.4	Monitorização da resposta da via durante a passagem do comboio X2000 ....	308
7.3	Modelação numérica.....	313
7.3.1	Descrição geral do modelo.....	313
7.3.2	Análise elástica.....	316
7.3.3	Análise linear equivalente.....	322
7.3.3.1	Considerações gerais.....	322
7.3.3.2	Metodologia.....	322
7.3.3.3	Informação geotécnica complementar.....	327
7.3.3.4	Análise de resultados.....	328
	Resposta dinâmica da via férrea.....	328
	Degradação das propriedades elásticas.....	331
7.4	Conclusões.....	334
<b>8</b>	<b>Campo experimental do Carregado.....</b>	<b>337</b>
8.1	Preâmbulo.....	337
8.2	Localização e descrição geral.....	338
8.3	Caracterização geomecânica do maciço de fundação.....	341
8.3.1	Considerações gerais.....	341
8.3.2	Avaliação das propriedades deformacionais através de ensaios “in situ” .....	342
8.3.3	Avaliação do amortecimento através de ensaios.....	351
8.4	Caracterização mecânica e geométrica da via férrea.....	357
8.4.1	Considerações gerais.....	357

8.4.2	Caracterização do perfil de irregularidades da via.....	358
8.4.3	Caracterização mecânica da via .....	361
8.5	Medição de vibrações causadas pelo tráfego ferroviário .....	371
8.5.1	Descrição geral dos ensaios .....	371
8.5.2	Resultados do ensaios.....	375
8.6	Modelação numérica da passagem do comboio Alfa-Pendular .....	381
8.6.1	Considerações gerais.....	381
8.6.2	Descrição do modelo numérico .....	382
8.6.2.1	Modelação do comboio Alfa-Pendular.....	382
8.6.2.2	Modelação global do sistema via-macizo .....	385
8.6.3	Resultados numéricos versus experimentais.....	385
8.6.3.1	Resposta da via férrea .....	385
8.6.3.2	Resposta à superfície do maciço de fundação .....	388
8.6.4	Influência da velocidade de circulação .....	399
8.7	Conclusões e considerações finais .....	402
<b>9</b>	<b>Conclusões e propostas para investigação futura .....</b>	<b>405</b>
9.1	Conclusões .....	405
9.2	Propostas para investigação futura .....	410
	<b>Anexo 3.1.....</b>	<b>413</b>
	<b>Anexo 3.2.....</b>	<b>415</b>
	<b>Anexo 4.....</b>	<b>417</b>
	<b>Anexo 5.....</b>	<b>419</b>
	<b>Bibliografia .....</b>	<b>421</b>

# 1. Introdução

## 1.1 Enquadramento do tema

Surgido em meados do século XIX, o comboio tem sido desde então o meio de transporte terrestre mais utilizado. Sem embargo, o transporte ferroviário tem conhecido, tal como outros sistemas, momentos mais ou menos prósperos de desenvolvimento consoante a conjuntura económica e social. No caso particular da Europa, o transporte ferroviário experimentou, a partir da segunda metade do século XX, uma perda acentuada de preponderância face aos transportes rodoviário e aéreo. Porém, nas últimas três décadas, o desenvolvimento e implementação das novas linhas de alta velocidade, associados a um constante aperfeiçoamento da tecnologia dos comboios, tem propiciado o renascimento do transporte ferroviário, tornando-o competitivo face ao transporte rodoviário e aéreo de passageiros [1, 2]. Essa tendência está bem patente na Figura 3.2 onde se ilustra a distribuição de passageiros pelos diferentes tipos de transporte, antes e após a introdução da linha de alta velocidade que estabelece a ligação entre Paris e Bruxelas.

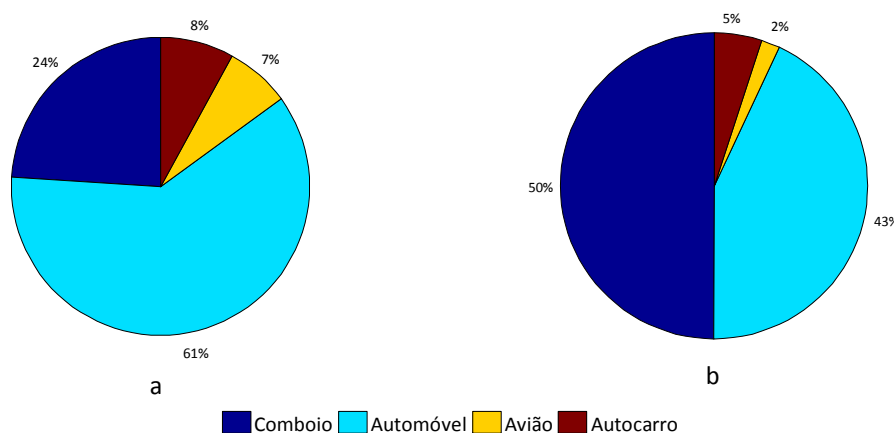


Figura 1.1 – Distribuição de passageiros pelos diferentes meios de transporte no trajecto Paris-Bruxelas: a) antes da introdução da linha de alta velocidade; b) após a introdução da linha de alta velocidade (adaptado de [1]).

O conforto e rapidez dos modernos comboios de alta velocidade têm permitido diminuir as assimetrias culturais, sociais e económicas, podendo mesmo perspectivar-se, no futuro próximo, uma acentuação dessa tendência um pouco por toda a Europa Ocidental, tal como se ilustra na Figura 1.2. A mais recente crise energética, associada ao elevado preço do petróleo, poderá ainda privilegiar a construção de novas linhas férreas, visto que do ponto de vista energético e ambiental existe uma clara supremacia do transporte ferroviário a alta-velocidade face às restantes alternativas [1].

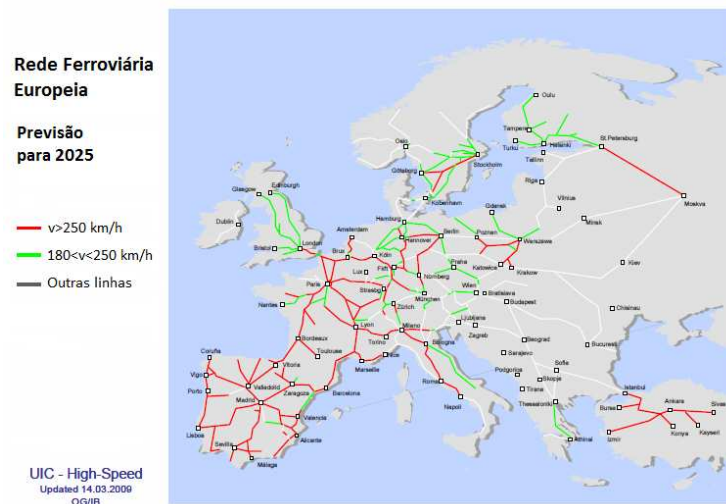


Figura 1.2 – Previsão da rede ferroviária europeia para 2025 (adaptado de [2]).

Em Portugal, embora nas últimas duas décadas tenha sido alocado um esforço considerável à modernização das linhas do Norte (Lisboa-Porto) e Sul (Lisboa-Faro), não é ainda possível ultrapassar a barreira de 220 km/h para a circulação de comboios de passageiros. Porém, a XIX Cimeira Luso-Espanhola, ocorrida em Novembro de 2003, constitui um marco na estratégia de desenvolvimento ferroviário nacional, tendo sido acordada a implementação, a nível ibérico, de uma rede ferroviária de alta velocidade, integrada nas Redes Transeuropeias.

Dadas a especificidade, a complexidade e a abrangência tecnológica exigidas pelo projecto de desenvolvimento de uma rede ferroviária de alta velocidade em território nacional, considera-se pertinente, e até mesmo imprescindível, o envolvimento da comunidade técnica e académica, nas suas diferentes valências, no estudo e compreensão desse sistema complexo, visando a obtenção de competências nacionais que contribuam para que se alcance com sucesso o objectivo proposto.

Se, por um lado, os benefícios em termos de sustentabilidade (económica, social e ambiental) inerentes ao transporte ferroviário de alta velocidade são indiscutíveis, a sua implementação suscita o surgimento de diversas problemáticas que não eram passíveis de ocorrer, ou pelo menos de forma tão acentuada, no caso do transporte ferroviário convencional. De entre as diversas questões técnicas, saliente-se que o aumento da velocidade de circulação dá origem a importantes fenómenos dinâmicos que afectam não só a estrutura ferroviária e material circulante, mas também, através das vibrações que se propagam pelos maciços de fundação, edificações próximas da via, tal como se ilustra na Figura 1.3.

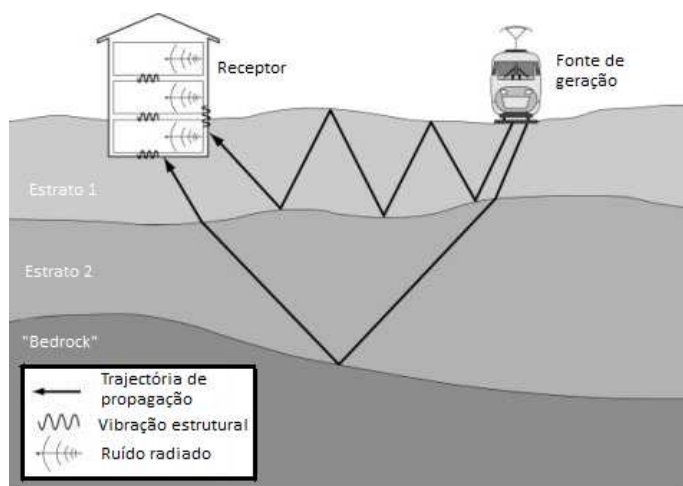


Figura 1.3 – Mecanismo de propagação de vibrações (adaptado de [3]).

Ainda que às vibrações originadas por tráfego não estejam, regra geral, associados danos estruturais nas edificações vizinhas à via férrea, as exigências sociais e ambientais, incidindo sobre os requisitos de conforto dos habitantes ou de funcionamento de equipamentos sensíveis, têm aumentado consideravelmente a importância desta temática (Figura 1.4).

Para além das questões de carácter ambiental, quando o traçado de uma linha de alta velocidade impõe o atravessamento de cenários geotécnicos adversos, incluindo camadas de solos moles, a proximidade entre as velocidades de circulação e de propagação de ondas sísmicas no maciço de fundação pode originar fenómenos de ressonância que condicionam decisivamente a operação e a segurança da via férrea.

Compreende-se pois que, dada a complexidade das questões relevantes, diversas metodologias de análise e previsão tenham vindo a ser propostas ao longo dos últimos anos, podendo ser agrupadas, ainda que de modo generalista, em: i) metodologias empíricas; ii) metodologias analíticas; iii) metodologias semi-analíticas e numéricas. Organização alternativa é proposta na ISO 14837-1 [4], a qual preconiza a distinção das metodologias existentes em três níveis, consoante os seus graus de precisão e de acuidade. Os dois primeiros níveis são adequados a análises de carácter global, visando a identificação de zonas problemáticas no âmbito da avaliação do impacto ambiental e do estudo prévio de novas vias ferroviárias. Por sua vez, abordagens mais detalhadas são objectivo das metodologias de nível 3, as quais conduzem à quantificação dos problemas, sendo por isso adequadas às fases de projecto e de análise detalhada.

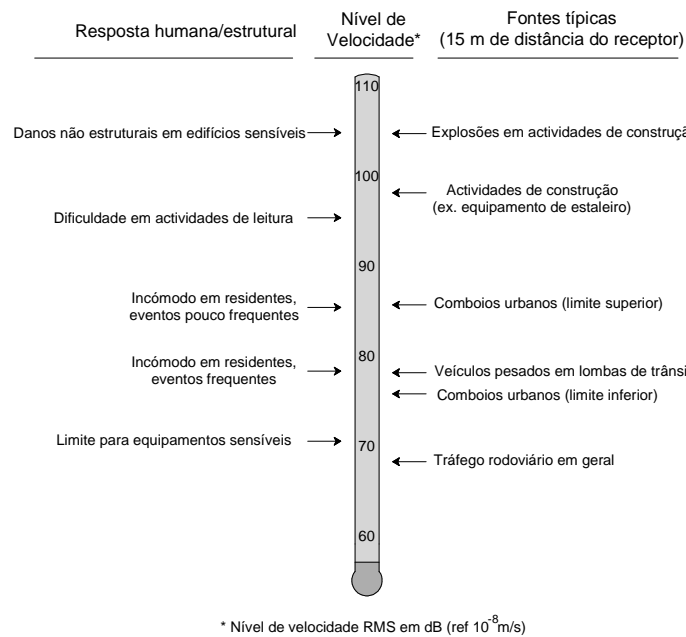


Figura 1.4 – Níveis de vibração associados a diferentes actividades humanas e suas consequências (adaptado de [3]).

No presente trabalho formulam-se, implementam-se e validam-se experimentalmente diversas metodologias semi-analíticas e numéricas, de carácter mecanicista (enquadradas no nível 3 de acordo com a organização sugerida na ISO 14837-1 [4]), as quais são usadas no estudo da resposta dinâmica do sistema veículo-via-maciço.

## 1.2 Motivação

Diversos factores contribuíram para a motivação do autor para o estudo do tema da presente dissertação, tanto de carácter científico como circunstancial.

Na perspectiva científica, apesar dos avanços muito importantes alcançados no decurso da década passada, por diferentes autores, existiam lacunas consideráveis tanto do ponto de vista numérico como experimental, para cuja resolução o autor pretende contribuir.

Relativamente às metodologias de previsão, o balanço entre eficiência computacional e acuidade dos resultados exibidos pelos modelos existentes apresentava deficiências importantes: por um lado, e apesar dos notáveis progressos computacionais, o recurso a poderosos modelos numéricos 3D exige um enorme esforço computacional, dada a vastidão do domínio a analisar; por outro lado, as metodologias semi-analíticas propostas pela generalidade dos autores, ainda que constituam abordagens eficientes do ponto de vista computacional, revelam-se limitadas quando se visa uma análise mais detalhada. Logo, como é feito no presente trabalho, o



desenvolvimento de metodologias numéricas adaptadas ao contexto do presente estudo, nomeadamente através de técnicas 2.5D, revela-se uma solução de compromisso, que permite obviar a generalidade das limitações apontadas.

Acresce que, à data de início dos trabalhos conducentes à presente dissertação, se verificava uma lacuna assinalável no que respeita a estudos de validação experimental dos modelos teóricos, sendo de salientar os trabalhos pioneiros apresentados por Lombaert et al. [5] e Auerch [6]. Por isso, foi realizado algum trabalho nesse domínio, quer usando dados de outros autores, quer trabalhando dados próprios, obtidos num campo experimental específico.

Não menos relevantes foram também os factores circunstanciais. De facto, a perspectiva de implementação de uma rede ferroviária de alta velocidade em território nacional, constitui uma oportunidade única de cooperação entre os mundos empresarial e académico, à qual a Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto não é alheia. Apesar de a unidade de investigação na qual o autor do presente estudo se integra ter já uma vasta experiência na análise dinâmica de infraestruturas ferroviárias, as competências acumuladas centravam-se essencialmente na modelação e experimentação de pontes ferroviárias, existindo uma lacuna clara no âmbito da análise dinâmica de vias ferroviárias e dos campos de vibração daí emanados. Como tal, atendendo ao cenário circunstancial nacional, bem como aos interesses particulares da unidade de investigação em que o autor se insere, o desenvolvimento do presente estudo assume uma especial relevância, o que foi muito importante para a motivação do autor.

### **1.3 Objectivos e principais contributos**

A presente investigação centra-se no desenvolvimento, implementação e validação experimental de modelos mecanicistas com vista à previsão do comportamento dinâmico da via férrea e das vibrações que daí se propagam pelo maciço de fundação.

Assim, foram desenvolvidos e implementados de raiz diferentes modelos numéricos ou semi-analíticos na plataforma Matlab 2009. Atendendo à especificidade e complexidade do problema em consideração, os modelos desenvolvidos acolhem a interacção dinâmica entre o comboio, a via férrea e o maciço de fundação, não sendo abrangida a interacção entre o maciço de fundação e as edificações próximas à via férrea. Os diversos modelos apresentam diferentes níveis de acuidade e de complexidade, tendo como denominador comum o facto de terem carácter 3D e de serem formulados no domínio do número de onda-frequência. A adequabilidade dos diferentes

modelos face aos problemas em questão é discutida, sendo apresentados vários estudos paramétricos com vista ao escrutínio da influência das características do maciço de fundação, da via férrea e do material circulante na resposta dinâmica do sistema.

Por outro lado, dando cumprimento a outra vertente do programa de investigação, definiu-se a aquisição de competências de natureza experimental no domínio da monitorização de vias férreas como objectivo complementar ao desenvolvimento de modelos teóricos, tendo em vista a validação destes. Esse objectivo culminou na instalação de um campo experimental em território nacional, o qual foi desenvolvido de raiz pelo autor do presente trabalho.

Atendendo aos objectivos referenciados, do trabalho que agora se apresenta resultam as seguintes contribuições principais:

- Formulação e desenvolvimento de um conjunto vasto de ferramentas semi-analíticas e numéricas para a análise dinâmica de vias férreas, com diferentes grau de complexidade e aplicabilidade, podendo incorporar de modo exacto a interacção dinâmica entre o veículo, a via férrea e o maciço de fundação;
- Projecto e instalação de um campo experimental em território nacional;
- Desenvolvimento de raiz de um modelo 2.5D baseado no método dos elementos finitos e no seu acoplamento com o método dos elementos de contorno;
- Formulação, desenvolvimento, implementação e validação experimental de uma metodologia para inclusão dos efeitos da não linearidade material no estudo de problemas associados a velocidades críticas, através do método dos elementos finitos 2.5D;
- Calibração e validação experimental do modelo 2.5D baseado no acoplamento entre os métodos dos elementos finitos e dos elementos de contorno;
- Realização e análise de um amplo conjunto de estudos visando avaliar a influência de diversos parâmetros intervenientes na resposta dinâmica do sistema comboio-via-macício de fundação.

## 1.4 Organização da dissertação

Dando cumprimento aos objectivos acima mencionados, a presente dissertação encontra-se organizada em nove capítulos, sendo o presente capítulo o primeiro, no qual se faz um enquadramento geral do tema e se definem os objectivos da dissertação.

O Capítulo 2 é dedicado aos conceitos gerais da propagação de vibrações em meios elásticos e isotrópicos. Trata-se de um capítulo generalista, o qual pode ser lido independentemente da restante dissertação, procurando assim familiarizar o leitor com a problemática da propagação de ondas em maciços terrosos e apresentando os princípios gerais atendidos na formulação teórica dos modelos apresentados nos capítulos subsequentes. Para além do carácter pedagógico conferido a este capítulo, são também justificadas as opções de fundo tomadas no desenvolvimento dos modelos semi-analíticos e numéricos, nomeadamente no que se refere à adequabilidade do modelo constitutivo a adoptar para o maciço mediante o nível de distorção envolvido, bem como o modelo de amortecimento ou a estratégia adoptada para a simulação de maciços terrosos saturados. Deste modo, o Capítulo 2 para além de apresentar os princípios basilares da elastodinâmica, antecipa ainda a resposta para algumas das questões que surgem nos capítulos seguintes.

O Capítulo 3 é iniciado com a apresentação do Método dos Integrais Transformados, metodologia semi-analítica utilizada na simulação de maciços estratificados semi-indefinidos submetidos a cargas móveis aplicadas à sua superfície. Seguidamente, partindo do conceito de função de Green, são apresentadas duas metodologias distintas para o seu cálculo: i) o método das matrizes de transferência proposto por Haskell-Thomson; ii) o método dos estratos finos. O método dos estratos finos é ainda generalizado para atender ao comportamento transverso-isotrópico que pode ser atribuído a alguns maciços sedimentares. Após a apresentação de um conjunto de testes de validação teórica, compreendendo solicitações dinâmicas com posição geométrica fixa ou móvel, os modelos são aplicados num estudo paramétrico no qual se discute a influência da velocidade de circulação e do cenário geotécnico na resposta dinâmica do maciço induzida por um carregamento móvel aplicado à sua superfície.

A introdução da modelação da via férrea é apresentada no Capítulo 4. Após uma sucinta descrição dos principais sistemas de via férrea, a via balastrada e a via não balastrada, e das acções induzidas pelo tráfego ferroviário, são apresentados modelos semi-analíticos especialmente concebidos para atender às diferentes tipologias da via férrea. Diferentes esquemas de interacção dinâmica entre a via férrea e o maciço de fundação, sendo este simulado através dos modelos

apresentados no Capítulo 3, são também expostos, tendo como denominador comum o conceito de rigidez equivalente tal como introduzido por Dieterman e Metrikine [7]. Após a explanação dos conceitos teóricos inerentes aos diferentes modelos é efectuado um estudo paramétrico incidindo sobre duas vertentes principais: i) discussão da influência das propriedades mecânicas dos elementos constituintes da via férrea e das condições geotécnicas na receptância do sistema; ii) estudo da velocidade crítica do sistema via-macizo, para diferentes contextos geotécnicos.

Como forma de obviar as limitações intrínsecas aos modelos semi-analíticos apresentados no Capítulo 4, sugere-se a adopção de modelos numéricos 2.5D, assunto ao qual é dedicado o Capítulo 5. Esse capítulo inicia-se com a explanação dos fundamentos gerais inerentes aos métodos numéricos 2.5D. Seguidamente, apresenta-se a formulação do método dos elementos finitos 2.5D, sendo dado especial destaque à modelação de aspectos particulares próprios ao problema em estudo, como a modelação das travessas e dos carris. Visto que o método dos elementos finitos é, na sua essência, uma ferramenta desenvolvida para a análise de meios circunscritos, apresentam-se metodologias locais (fronteiras absorventes e método dos elementos infinitos) para obviar os efeitos da reflexão espúria de ondas elásticas nas fronteiras artificiais oriundas da truncatura do modelo, sendo também discutida a sua eficiência no contexto do presente estudo. Paralelamente, o capítulo versa também sobre outra classe de modelos derivada do acoplamento 2.5D entre método dos elementos finitos e método dos elementos de contorno. A formulação de elementos de contorno 2.5D é alcançada por recurso às funções de Green tridimensionais formuladas no domínio transformado, tal como apresentado no Capítulo 3.

Por sua vez, o Capítulo 6 versa sobre a modelação da interacção dinâmica entre o comboio e a via férrea. O modelo aí apresentado é construído de forma modular, podendo ser acoplado a qualquer um dos modelos do sistema via-macizo de fundação apresentados nos capítulos antecedentes. Após a apresentação dos aspectos teóricos dos modelos de veículo implementado e de interacção com a via férrea, bem como a sua validação teórica, apresenta-se um estudo paramétrico, no qual, para além de evidenciados os aspectos basilares do comportamento dinâmico do sistema comboio-via-macizo de fundação, é discutida a influência da qualidade de nivelamento longitudinal da via férrea, da velocidade de circulação e da estratégia de modelação do próprio veículo, sugerindo-se a possibilidade de simulação através de estratégias alternativas.

Ao contrário dos capítulos precedentes, nos quais o estudo é focalizado na modelação e em análises teóricas com vista ao discernimento dos fenómenos, os Capítulos 7 e 8 são dedicados ao exame de casos de estudo, onde os resultados vaticinados pelos modelos teóricos são confrontados com a realidade física observada.

No Capítulo 7 revisita-se o caso de estudo de Ledsgard. Este famoso caso de estudo tem constituído o cenário ideal para a validação da capacidade de diferentes modelos teóricos na previsão da resposta dinâmica do sistema via-macizo, visto ser dos poucos casos documentados onde a velocidade de circulação se aproxima da velocidade crítica desse sistema. Reconhecendo a importância qualitativa, e também quantitativa, que a não linearidade material das formações geotécnicas (e também das camadas granulares da via) pode apresentar em cenários adversos como o aqui abordado, apresenta-se uma metodologia inovadora para a inclusão desses mesmos efeitos através do modelo de elementos finitos 2.5D apresentado no Capítulo 5. Após a descrição geral do caso de estudo e apresentação de uma metodologia de análise, os resultados enunciados por tal modelo são confrontados com a realidade física observada, bem como com os resultados enunciados por uma análise elástica tradicional.

O outro caso de estudo refere-se ao campo experimental do Carregado, sobre o qual versa o Capítulo 8. Por sua vez, do ponto de vista organizacional, este capítulo pode ser dividido em duas partes: i) actividades experimentais desenvolvidas; ii) modelação da resposta dinâmica do sistema comboio-via-macizo e validação experimental do modelo 2.5D baseado no acoplamento MEF-MEC. Dado o facto de este campo experimental ter sido desenvolvido integralmente no âmbito do presente estudo é dedicada uma atenção particular à descrição das actividades experimentais aí realizadas, bem como ao esforço alocado à calibração do modelo numérico por via de um conjunto de pequenas experiências efectuadas. A segunda parte do capítulo, dedicada à modelação da resposta dinâmica induzida pelo comboio Alfa-Pendular, reflecte a validação experimental do modelo numérico concebido, o qual resulta no acoplamento dinâmico entre o veículo, a via e o macizo de fundação.

Por último, no Capítulo 9 são sintetizadas as principais conclusões da dissertação e apontadas perspectivas de investigação futura, tidas como pertinentes no âmbito da temática abordada ao longo do presente estudo.



## 2. Propagação de vibrações em meios elásticos e isotrópicos

---

### 2.1 Generalidades

A natureza massiva das formações geológicas é, em boa parte, responsável pela distinção geralmente efectuada entre os domínios científicos da Dinâmica dos Solos e da Dinâmica das Estruturas. Com efeito, ao contrário da Dinâmica de Estruturas em que, regra geral, se procede a uma idealização estrutural através de concepções baseadas em elementos discretos, o carácter massivo das formações geotécnicas exige que a resposta das mesmas face a acções dinâmicas seja descrita através da teoria da propagação de ondas.

Por isso, neste capítulo abordam-se os fundamentos basilares da propagação de ondas em meios elásticos semi-indefinidos, idealização teórica comumente adoptada para a representação de maciços geotécnicos.

Uma vez que a resolução de qualquer problema mecânico exige o estabelecimento de uma lei constitutiva que relacione os estados de tensão e deformação, este capítulo inicia-se com considerações gerais acerca do comportamento dos solos face a acções dinâmicas. Após a definição do campo de validade dos diferentes modelos constitutivos apresentam-se os conceitos fundamentais da elastodinâmica. Estes conceitos servirão de base teórica para o desenvolvimento dos modelos numéricos que se apresentam nos capítulos posteriores.

### 2.2 Modelos constitutivos usados na simulação da propagação de vibrações

#### 2.2.1 Modelos elásticos lineares

O tratamento analítico de qualquer problema mecânico requer a adopção de um modelo constitutivo que traduza a realidade física do comportamento dos materiais em causa. No caso dos materiais geotécnicos, isto é, solos e rochas, existem diversos modelos para a descrição do seu comportamento com diferentes níveis de representatividade e, obviamente, de complexidade.

A grande maioria dos materiais geotécnicos apresenta um comportamento mecânico bastante complexo e dependente da escala de análise [8]. Com efeito, as propriedades mecânicas podem variar geometricamente (heterogeneidade), consoante o nível de deformação envolvido e a história de carregamento (não linearidade material) e, também, mediante a direcção de carregamento (anisotropia). O grau de heterogeneidade, não linearidade e anisotropia dos materiais é dependente da escala de análise, isto é, se se trata de uma análise ao nível microscópico ou ao nível macroscópico, e consoante o tipo de materiais. No caso dos solos, estas questões são tanto mais pronunciadas quanto menor é a escala de análise, sendo que para níveis microscópicos a teoria dos materiais contínuos deixa de ser válida dado o carácter particulado daqueles.

Face ao exposto, a definição de um modelo constitutivo universal para a descrição do comportamento dos solos necessita de um conjunto avultado de informação. Assim é mais operativo optar por modelos focalizados, que tenham presente os dois seguintes factores fundamentais. Por um lado, o modelo analítico deve simular os aspectos fundamentais do comportamento do solo para a escala de análise requerida e para o nível de deformação envolvido e, por outro, o modelo deve ser relativamente simples, de forma a não se tornar de utilização proibitiva devido à quantidade de parâmetros envolvidos ou à complexidade analítica inerente. Estes dois factores implicam muitas vezes opções contraditórias, como é bem sabido.

Tendo em conta as razões apresentadas, e seguindo a teoria da elastodinâmica clássica, no presente capítulo apenas se discute a utilização de modelos elásticos lineares ou visco-elásticos lineares. Obviamente, os modelos elásticos representam uma aproximação, ainda que simplista, ao comportamento mecânico dos solos, devendo o seu campo de validade, consoante o nível de deformação envolvido, ser objectivado. Esta e outras questões são clarificadas nos pontos seguintes, seguindo de perto as justificações apresentadas por Andersen [9].

### **2.2.2 *Comportamento elástico linear versus comportamento elastoplástico não linear***

Existem diversos problemas dinâmicos onde o nível de deformação induzido no solo implica que a componente não linear do comportamento seja relevante ou muito relevante. Exemplos disso são as zonas localizadas perto dos epicentros de sismos ou, no caso de vibrações induzidas por actividade humana, as zonas próximas da cravação de estacas ou de explosões. No caso de vibrações induzidas por tráfego ferroviário, em casos extremos, caracterizados por a velocidade de circulação dos comboios ser muito elevada em comparação com a velocidade de propagação



das ondas sísmicas no solo, o nível de deformação envolvido pode também implicar a não linearidade da resposta, embora num grau consideravelmente menor ao associado às actividades humanas anteriormente mencionadas [10]. Porém, independentemente da origem da vibração, a uma certa distância da fonte de excitação dinâmica, o comportamento do maciço situa-se geralmente no domínio das pequenas deformações, situação esta que pode ser aproximada por recurso a uma idealização elástica e linear.

Portanto, a adequabilidade dos modelos elásticos lineares à simulação do comportamento dinâmico dos solos apresenta uma forte dependência do nível de deformação envolvido, como aliás se encontra bem patente no Quadro 2.1, extraído de Ishihara [11].

Analisando o Quadro 2.1 conclui-se que quando as distorções envolvidas no problema em consideração são pequenas ou muito pequenas, isto é, regra geral inferiores a  $10^{-4}$ , o comportamento do solo pode ser razoavelmente representado por modelos elásticos lineares. No entanto, a evidência experimental mostra que, mesmo para níveis de distorção muito pequenos, ocorre sempre alguma dissipação de energia, justificando-se assim a adopção de modelos visco-elásticos lineares, mesmo para níveis de deformação reduzidos [12, 13]. Os modelos visco-elásticos lineares são caracterizados através de três parâmetros: i) o módulo de distorção,  $G_0$ ; ii) o coeficiente de Poisson,  $\nu$ ; iii) o coeficiente de amortecimento,  $\xi$ .

Quadro 2.1 – Campo de validade dos modelos constitutivos em função da distorção [11].

Distorção	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$
Fenómeno	Propagação de ondas, vibrações		Fissuras, assentamentos diferenciais		Escorregamento, compactação, liquefacção	
Características mecânicas	Elásticas		Elastoplásticas		Rotura	
Efeito de acções repetidas			Sim		Sim	Sim
Efeito da frequência de solicitação			Sim	Sim	Sim	Sim
Propriedades	Módulo de distorção, coeficiente de Poisson, amortecimento material				Ângulo de atrito coesão	
Modelos de simulação	Modelo (visco)elástico linear		Modelo visco elástico linear equivalente		Modelos cíclicos não lineares	

Quando o nível de distorção se encontra na gama entre  $10^{-4}$  e  $10^{-3}$ , o solo começa a apresentar comportamento elasto-plástico, o qual implica o aumento do amortecimento e a diminuição do módulo de distorção secante ( $G_{sec}$ ). Nestas situações, embora se assista à degradação de rigidez e ao aumento do amortecimento face ao nível de distorção envolvido, a resposta do meio mostra-se independente do número de ciclos experimentados. Embora o comportamento nesta gama de distorções não seja puramente elástico, é perfeitamente aceitável a adopção de modelos visco-elásticos lineares equivalentes, nos quais as propriedades de rigidez ( $G_{sec}$ ) e amortecimento ( $\xi$ ) são ajustadas em função do nível de distorção induzido.

Por último, quando os níveis de distorção ascendem a valores superiores a  $10^{-2}$ , a resposta do solo começa a ser controlada não apenas por parâmetros de deformabilidade, mas também por parâmetros resistentes, como o ângulo de atrito e a coesão, correspondendo a situações de rotura, tais como deslizamentos, compactação ou liquefacção [14].

Da explanação apresentada pode concluir-se que a adequabilidade da utilização de modelos (visco)elásticos lineares depende do tipo de problema em estudo e do conseqüente nível de deformação induzido no solo. No caso de vibrações induzidas por tráfego os níveis de deformação são geralmente compatíveis com a adopção de modelos visco-elásticos lineares, contudo, como se verá em capítulos posteriores, em determinadas situações os níveis de deformação ocasionados pela passagem do comboio justificam o recurso a análises (visco)elásticas equivalentes.

### **2.2.3 Homogeneidade versus heterogeneidade**

A definição de um material como homogéneo ou heterogéneo, isto é, se as suas propriedades são independentes ou não da posição geométrica de amostragem, deve sempre ser associada à escala de análise. Se para alguns materiais, como por exemplo o aço, o grau de homogeneidade é praticamente independente da escala de análise, o mesmo não ocorre por exemplo para o betão, para a grande maioria das rochas, e, mais pronunciadamente para o solo. Com efeito, um solo é constituído por duas fases, a sólida e a fluida, sendo que a fase sólida corresponde às partículas de minerais e a fase fluida preenche os vazios entre partículas, podendo ser constituída por ar, água ou um misto dos dois fluidos como ocorre nos solos não saturados. Como é evidente, a geometria das partículas de minerais não é constante, assim como também não o é o índice de vazios. Deste modo, a uma escala de análise microscópica, o solo é claramente um material

heterogêneo, no qual a rigidez e a massa volúmica variam substancialmente em função da posição geométrica da amostra.

Sem embargo, as variações locais da massa volúmica e da rigidez não assumem grande importância em problemas de propagação de vibrações. Com efeito, tenha-se presente que as heterogeneidades locais se referem a variações das propriedades entre zonas com dimensões da ordem de grandeza do menor comprimento de onda a propagar-se, o que se traduz por um critério dependente da frequência de excitação. O limite superior das frequências de interesse, para a generalidade dos problemas de Engenharia Civil Estrutural, encontra-se confinado aos 150-200 Hz. Atendendo a que, para a grande maioria das situações práticas, a velocidade de propagação das ondas de Rayleigh é superior a 100 m/s, o menor comprimento de onda, associado à mais elevada frequência de interesse, deve rondar os 0,50 m, dimensão, em geral, substancialmente superior às dimensões para as quais se observam as heterogeneidades locais.

Face ao exposto nos parágrafos anteriores, é perfeitamente aceitável, para as aplicações usuais, considerar como homogêneas as formações geotécnicas identificadas e individualizadas pelos estudos geológico-geotécnicos, para as quais se adoptam propriedades médias. Este tipo de idealização apresenta similaridade com o verificado da Engenharia de Estruturas, onde, por exemplo, se verifica que as ligações entre elementos ou juntas não apresentam grande influência nas frequências e modos de vibração naturais mais baixos, nos quais os parâmetros de rigidez global tomam especial importância.

#### **2.2.4 *Isotropia versus anisotropia***

Embora o comportamento elástico dos solos seja habitualmente simulado com base em modelos isotrópicos, a história geológica dos maciços implica um certo grau de anisotropia, que pode ser mais ou menos pronunciado consoante o tipo de solo e sua idade geológica. No caso dos maciços sedimentares, o processo de deposição dos sedimentos e/ou os ciclos de consolidação a que a formação esteve sujeita durante a sua história geológica concorrem para que exista anisotropia intrínseca, tanto a nível das propriedades deformacionais como das propriedades resistentes [15-17]. Para os problemas abordados na presente dissertação, a anisotropia de resistência não é relevante dado que não se tratam questões relacionadas com problemas de plasticidade ou rotura. Por sua vez, a anisotropia deformacional é relevante, sendo notório que as formações geotécnicas se caracterizam, regra geral, por maior rigidez na direcção perpendicular à superfície

do terreno (direcção vertical no caso de terraplenos horizontais), apresentando isotropia transversal, isto é, nos planos paralelos à superfície do terreno.

Em problemas elastodinâmicos a grande diferença entre comportamento isotrópico e anisotrópico reside no facto de, em meios isotrópicos, a velocidade de propagação de um dado tipo de onda ser independente da direcção de propagação ao passo que tal pressuposto não é mais válido em cenários anisotrópicos. Este facto pode manifestar-se afectando todos ou apenas alguns dos tipos de onda que se propagam no meio [16].

No presente capítulo considera-se apenas materiais com comportamento isotrópico. No entanto, por se tratar de um aspecto importante em termos práticos, a anisotropia é considerada em alguns dos modelos apresentados no decorrer da presente dissertação, sendo aí devidamente discutida a sua importância. Convém contudo referir que, na grande maioria dos problemas geotécnicos, as formações são tratadas como isotrópicas não tanto por uma questão de dificuldade de modelação teórica, mas sim devido às limitações inerente à obtenção de propriedades elásticas suficientes para caracterizar um modelo anisotrópico.

### **2.2.5 Estado de tensão *in-situ***

Os maciços terrosos estão submetidos a um estado de tensão inicial, usualmente designado por estado de tensão em repouso, resultante da acção da gravidade e das condições de formação geológica. A definição do estado de tensão em repouso é um ponto crucial para a análise de grande parte das obras geotécnicas. No entanto, em problemas de vibrações, tendo presente a gama de deformações ocasionada pela propagação das ondas elásticas, o estado de tensão em repouso não é um parâmetro fulcral. Com efeito, estando o domínio de análise confinado às pequenas deformações, o processo de propagação das ondas elásticas reflecte-se em alterações do estado de tensão, mas estas são, ainda que teoricamente, independentes do estado de tensão inicial.

Convém aqui relembrar que a rigidez das formações geotécnicas tende a aumentar em profundidade, fruto do aumento da tensão de confinamento, sendo consequentemente dependente do estado de tensão em repouso. Para além do aumento da rigidez com a tensão de confinamento, ensaios laboratoriais e de campo mostram que, para tensões de confinamento elevadas, se assiste a uma diminuição do coeficiente de Poisson, em resultado de fenómenos de cimentação do solo. Como é evidenciado em secções subsequentes do presente capítulo, a

diminuição do coeficiente de Poisson traduz-se na aproximação das velocidades de propagação das ondas volúmicas.

Face ao exposto, pode concluir-se que, embora a definição do estado de tensão em repouso não seja um parâmetro fundamental para o estudo de um problema de propagação de vibrações, existem certos aspectos associados ao estado de tensão em repouso que devem ser atendidos na análise dos problemas em questão.

## 2.3 Propagação de ondas sísmicas em meios elásticos

### 2.3.1 Tipos de ondas sísmicas

Quando o estado de repouso de um meio elástico é submetido a uma perturbação local, a energia potencial elástica e a energia cinética acumuladas em torno da região perturbada dão origem a ondas que se propagam pelo meio, transportando energia para as restantes regiões [18]. Como referido anteriormente, o estado de repouso de um maciço pode ser perturbado por diferentes razões, sendo de nomear, pela sua relevância prática, as acções sísmicas e as perturbações resultantes da acção humana. Na presente dissertação analisam-se as vibrações resultantes da acção humana e com origem à superfície dos maciços.

No âmbito anteriormente indicado, quando uma acção dinâmica é aplicada à superfície de um maciço semi-indefinido, propagam-se pelo menos três tipos de ondas: i) ondas P ou de compressão; ii) ondas S ou distorcionais; iii) ondas de Rayleigh. Para além destes três tipos de ondas terem configurações de vibração distintas, as suas velocidades de propagação são também diferentes, o que aliás se encontra esquematizado na Figura 2.1, que ilustra a história temporal do deslocamento horizontal num ponto de observação à superfície de um maciço semi-indefinido.

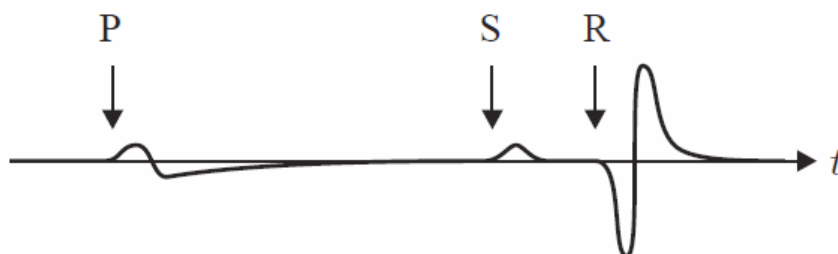


Figura 2.1 – História temporal dos deslocamentos horizontais à superfície de um maciço num ponto a certa distância da fonte.

Como se verifica na Figura 2.1, as primeiras ondas a chegar ao ponto de observação são as ondas P ou ondas de compressão, também por vezes designadas por ondas primárias, e que pertencem ao grupo das ondas volúmicas. O processo de propagação das ondas P implica o movimento contractivo e dilatativo do material, sendo as deformações induzidas puramente volumétricas, tal como se ilustra na Figura 2.2. Este tipo de ondas, ao pertencer ao grupo das ondas volúmicas, propaga-se em qualquer direcção do meio com uma velocidade de fase aqui designada por  $C_p$ .

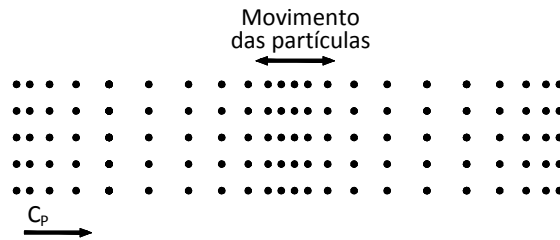


Figura 2.2 – Movimento das partículas induzido pela propagação de ondas P.

As segundas ondas a chegar são as ondas S, ou distorcionais, que se propagam com uma velocidade de fase aqui designada por  $C_s$ . Tal como as ondas P, as ondas S são também ondas volúmicas mas, ao contrário das anteriores, o processo de propagação das ondas S implica deformação a volume constante, tal como se ilustra na Figura 2.3.

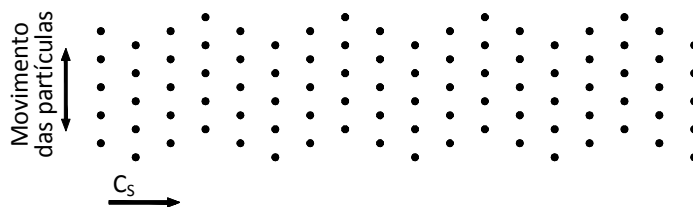


Figura 2.3 – Movimento das partículas induzido pela propagação de ondas S.

Dado que o movimento das partículas aquando da propagação de uma onda S pode apresentar componentes normal ou paralela ao plano vertical onde se inscreve direcção de propagação da onda, é usual proceder à decomposição das ondas S em ondas SV (propagação com movimento inscrito no plano) e ondas SH (propagação com movimento normal ao plano), tal como ilustrado na Figura 2.4

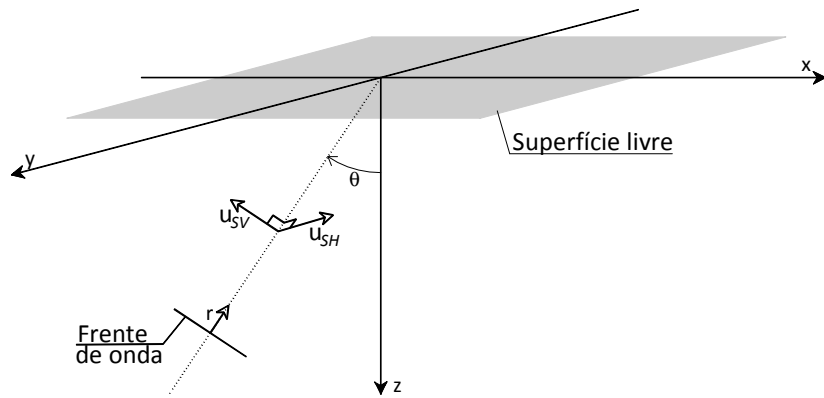


Figura 2.4 – Componentes no plano e fora do plano do deslocamento induzido pela propagação de ondas S.

Com uma velocidade de propagação ligeiramente inferior à das ondas S propagam-se as ondas de Rayleigh (ondas R). Ao contrário das anteriormente apresentadas, as ondas de Rayleigh apenas se propagam junto à superfície do meio (a amplitude dos deslocamentos decresce exponencialmente com a profundidade), sendo resultado da interação das ondas P e SV com a condição de fronteira imposta pela superfície livre. Em contraste com o que se verifica com as ondas P e S, o campo de deformação induzido pelas ondas de Rayleigh caracteriza-se por deformação volumétrica e distorcional. O movimento das partículas durante a propagação de ondas de Rayleigh encontra-se esquematizado na Figura 2.5.

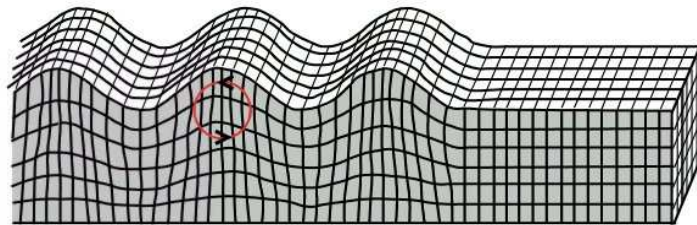


Figura 2.5 – Movimento das partículas induzido pela propagação de ondas R.

Do ponto de vista energético, quando uma acção dinâmica é aplicada à superfície de um maciço semi-indefinido, a energia implicada não se reparte de igual modo pelos diferentes tipos de ondas anteriormente mencionadas. Se a zona carregada apresentar uma dimensão relativamente reduzida quando comparada com o comprimento de onda das ondas S (dependente da frequência de excitação), então a grande maioria da energia será transportada através de ondas de Rayleigh. No entanto, caso a área carregada apresente uma grande dimensão face ao domínio de análise, a maior percentagem da energia será transportada através de ondas volúmicas. Estudos teóricos desenvolvidos por Miller e Pursey [19, 20] demonstram que cerca de 67 % da energia radiada pelo movimento oscilatório vertical de um disco à superfície de um maciço semi-

indefinido (pequena dimensão face ao domínio) é transportada através de ondas de Rayleigh, enquanto apenas 26% e 7% da energia estão associados a ondas S e P, respectivamente (ver Figura 2.6). Esta constatação teórica mostra a clara preponderância das ondas de Rayleigh na resposta observada em pontos localizados à superfície do maciço.

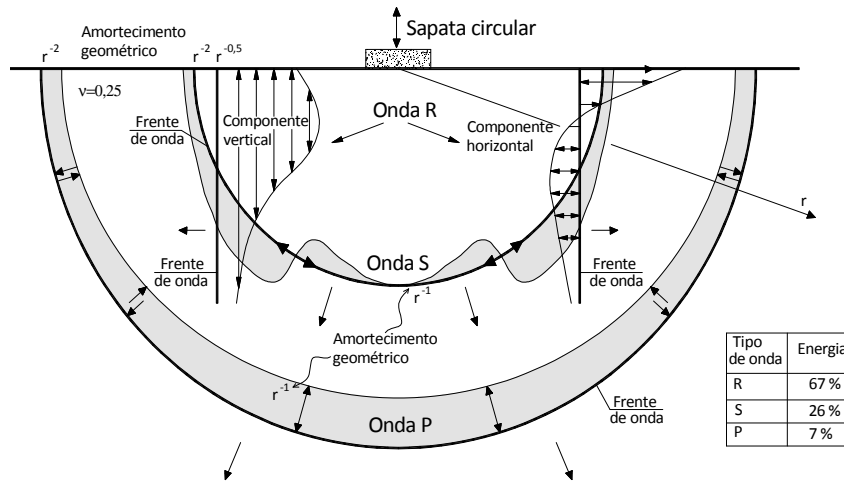


Figura 2.6 – Contribuição dos diferentes tipos de ondas para os deslocamentos de um maciço semi-indefinido, homogéneo e isotrópico face a uma excitação harmónica aplicada numa sapata circular (adaptado de [20]).

Para além das ondas P, S e de R, outro tipo de ondas podem também surgir, resultantes da interacção das ondas volúmicas com interfaces de estratos com propriedades distintas. Dado que dificilmente um maciço geotécnico pode ser idealizado como um meio semi-indefinido, homogéneo e isotrópico, isto é, com propriedades mecânicas constantes independentemente da profundidade do domínio, é expectável o surgimento de outros tipos de onda para além das anteriormente mencionadas.

Nas secções seguintes procede-se a uma análise teórica das propriedades dos diferentes tipos de onda aqui apresentados.

### 2.3.2 Ondas volúmicas

#### 2.3.2.1 Equações gerais de equilíbrio

Para o estabelecimento das equações gerais de equilíbrio elastodinâmico, num referencial cartesiano OXYZ, considere-se um elemento infinitesimal cúbico, de dimensões  $dx$   $dy$   $dz$ , situado no interior de um meio elástico, homogéneo, isotrópico e indefinido, submetido às forças volúmicas e de superfície indicadas na Figura 2.7. Por simplicidade de representação, na Figura



2.7 apenas se apresentam as tensões aplicadas nas faces segundo a direcção  $x$ , ficando subentendida a mesma variação de tensão nas restantes direcções. No mesmo referencial cartesiano, o vector de deslocamento na posição  $xyz$  e num qualquer instante temporal será aqui designado  $u(x,y,z,t)=[u_x, u_y, u_z]^T$ . Por sua vez, as tensões aplicadas nas faces do elemento infinitesimal, são caracterizadas pelo vector  $t=t(x,y,z,t)$ , cujas componentes são definidas por  $t_j=\sigma_{ij}n_j$ , sendo  $\sigma_{ij}$  as componentes do tensor das tensões de Cauchy e  $n_j$  as componentes do versor normal às faces do elemento infinitesimal. Por último, as forças volúmicas são definidas por  $\rho b$  (não representado na Figura 2.7), em que  $\rho$  é a massa volúmica e  $b$  o versor cujas componentes definem a direcção e sentido de actuação das forças volúmicas.

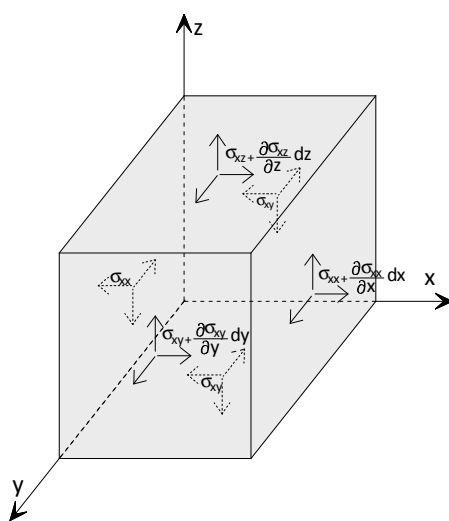


Figura 2.7 – Elemento infinitesimal submetido a forças.

O equilíbrio do elemento infinitesimal tem de ser garantido nas três direcções cartesianas, logo, aplicando a segunda lei de Newton chega-se às seguintes equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho b_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad [2.1]$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho b_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad [2.2]$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho b_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad [2.3]$$

As equações [2.1] a [2.3] podem ser escritas de uma forma mais sucinta utilizando notação tensorial,

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad [2.4]$$

em que a sinalética de um ponto sobre a variável se refere a diferenciação em ordem ao tempo.

Note-se que as equações anteriormente apresentadas foram estabelecidas tomando apenas em consideração condições de equilíbrio, sem que fosse introduzida qualquer lei constitutiva do material. Para traduzir as equações de equilíbrio tridimensional em termos de deslocamentos é necessário recorrer a uma lei constitutiva e a relações entre extensões e deslocamentos. Admitindo que o material apresenta comportamento elástico e isotrópico, e atendendo apenas ao âmbito das pequenas deformações, a relação entre estado de tensão e deformação é formalizada através da lei de Hook generalizada:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad [2.5]$$

em que  $E_{ijkl}$  é o tensor de elasticidade e  $\varepsilon_{kl}$  é o tensor das deformações.

As componentes do tensor das deformações são relacionáveis com as componentes do vector de deslocamento, tanto que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [2.6]$$

O tensor de elasticidade é constituído por 81 componentes. No entanto, dadas as condições de simetria dos tensores de tensão e deformação, apenas 21 componentes são independentes. Por outro lado, se o meio for completamente isotrópico há apenas duas constantes independentes e as relações tensão-deformação podem ser descritas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad [2.7]$$

em que  $\Delta$  é a deformação volumétrica, dada por:

$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad [2.8]$$

e  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de elasticidade de Lamé, dependentes do módulo de elasticidade ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), definidas através seguintes das expressões:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad [2.9]$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad [2.10]$$

Por último, na expressão [2.7] encontra-se ainda presente a variável  $\delta_{ij}$ , que não é mais do que o delta de Kronecker, a qual toma valores unitário, quando  $i=j$ , e nulo, nas restantes situações.

As equações de equilíbrio tridimensional em função do campo de deslocamentos, também designadas por equações de Navier, são deduzidas mediante a substituição das equações [2.6] e [2.7] na equação [2.4]. Deste modo, e após alguma manipulação matemática, o equilíbrio tridimensional fica descrito por:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad [2.11]$$

Em notação vectorial, a equação [2.11] é a equivalente a:

$$(\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div}(u)) + \mu\text{div}(\text{grad}(u)) + \rho b = \rho \ddot{u} \quad [2.12]$$

ou, de uma forma mais explícita, considerando equações escalares para o equilíbrio em cada uma das direcções,

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x + \rho b_x = \rho \ddot{u}_x \quad [2.13]$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 u_y + \rho b_y = \rho \ddot{u}_y \quad [2.14]$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z + \rho b_z = \rho \ddot{u}_z \quad [2.15]$$

em que,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad [2.16]$$

As equações [2.13] a [2.15] constituem o sistema de equações fundamental para a resolução de qualquer problema elastodinâmico, devendo ser obrigatoriamente respeitadas em qualquer ponto do domínio.

### 2.3.2.2 Velocidade de propagação de ondas volúmicas

As equações de Navier podem ser manipuladas matematicamente para dar origem a duas equações de propagação de ondas. Consequentemente, num meio indefinido, homogéneo e isotrópico, apenas é passível a propagação de dois tipos de ondas.

O significado físico das equações de Navier é usualmente explicado através da decomposição de Helmholtz do vector de deslocamentos em duas componentes: uma componente traduzida através do gradiente da função potencial escalar,  $\Phi$ , e uma segunda componente traduzida através do rotacional da função potencial vectorial,  $\Psi$  [21]. Em notação vectorial, esta decomposição é expressa como:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi \quad [2.17]$$

De uma forma mais explícita, a equação [2.17] pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} \quad [2.18]$$

$$u_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_z}{\partial x} \quad [2.19]$$

$$u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial y} \quad [2.20]$$

Atendendo à decomposição de Helmholtz, as componentes do vector de deslocamento são descritas através de quatro funções potenciais escalares,  $\Phi, \Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$ , o que implica a necessidade de uma equação adicional para que o sistema de equações seja resolúvel. De acordo com Achenbach [22], a função vectorial  $\Psi$  obedece à seguinte condição:

$$\text{div}(\Psi) = \nabla \cdot \Psi = \frac{\partial\Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_z}{\partial z} = 0 \quad [2.21]$$

Desprezando a influência das forças de massa e substituindo a expressão [2.17] na equação de Navier (expressão [2.12]), e após alguma manipulação matemática, chega-se à seguinte equação diferencial de equilíbrio:

$$\nabla\left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi - \rho\ddot{\Phi}\right] + \nabla \times \left[\mu\nabla^2\Psi - \rho\ddot{\Psi}\right] = 0 \quad [2.22]$$

A equação [2.22] só é satisfeita se forem respeitadas, simultaneamente, as seguintes condições:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi = \rho\ddot{\Phi} \Leftrightarrow \nabla^2\Phi = \frac{1}{C_p^2}\ddot{\Phi} \quad [2.23]$$

$$\mu\nabla^2\Psi = \rho\ddot{\Psi} \Leftrightarrow \nabla^2\Psi = \frac{1}{C_s^2}\ddot{\Psi} \quad [2.24]$$

em que,

$$C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad [2.25]$$

$$C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad [2.26]$$

Face ao exposto, conclui-se que o campo vectorial de deslocamentos pode ser traduzido através de duas componentes desacopladas; uma componente volumétrica (ou devida à deformação volumétrica do meio), descrita em termos da função potencial escalar  $\Phi$  e outra componente rotacional (ou devida à deformação distorcional) descrita pela função potencial vectorial  $\Psi$ . O desacoplamento entre os dois tipos de onda ocorre apenas em meios homogêneos e nos quais seja possível desprezar o efeito das forças de massa. No caso de meios estratificados, em que a condição de homogeneidade seja respeitada no interior de cada estrato individual, apenas ocorre acoplamento dos dois tipos de onda nas interfaces entre os meios com propriedades distintas [23].

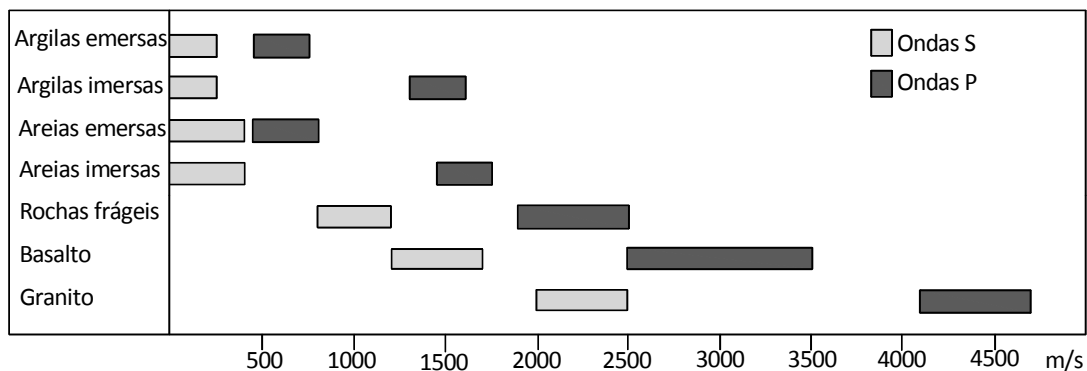
Refira-se ainda que as ondas longitudinais se propagam com velocidade  $C_p$ , que para o caso tridimensional é obtida de acordo com a equação [2.25], e que o movimento das partículas induzido pela onda ocorre somente na direcção de propagação (ver Figura 2.2). Em correspondência, a velocidade de propagação das ondas de corte,  $C_s$ , é dada pela equação [2.26]. Nesse caso, as partículas experimentam um movimento perpendicular à direcção de propagação, tal como anteriormente ilustrado na Figura 2.3.

Uma vez que a velocidade de propagação das ondas volúmicas é apenas função da massa volúmica e das propriedades elásticas do meio, as velocidades de propagação de ondas longitudinais e de corte são relacionáveis. A relação é apenas função do coeficiente de Poisson, sendo dada por:

$$\frac{C_s}{C_p} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}} \quad [2.27]$$

No Quadro 2.2 apresenta-se a gama típica de variação das velocidades de propagação de ondas volúmicas em diferentes materiais. A diferença assinalada no quadro respeitante a condições imersas ou emersas, a qual apenas se faz notar na velocidade de propagação das ondas P, deve-se à reduzida deformabilidade do fluido intersticial (água) e ao elevado acoplamento viscoso entre as fases fluída e sólida constituintes dos solos. Esta questão é devidamente discutida numa secção posterior.

Quadro 2.2 – Valores típicos da velocidade de propagação de ondas volúmicas em formações geotécnicas (adaptado de [9]).



### 2.3.3 Reflexão e refração de ondas volúmicas em fronteiras e interfaces

#### 2.3.3.1 Considerações gerais

Na secção anterior foi apresentada a teoria fundamental de propagação de ondas em meios elásticos, indefinidos, homogêneos e isotrópicos. Nesse contexto foi demonstrado que se propagam apenas dois tipos de ondas e que o fazem de forma totalmente desacoplada. No entanto, as condições anteriormente referidas dificilmente se verificam na realidade, pois os maciços geotécnicos não são indefinidos e, para além disso, é frequente a existência de heterogeneidades, podendo estas dever-se a condições geológicas, como por exemplo à estratificação do maciço, ou ser resultantes da actividade humana, como é o caso da existência de estruturas enterradas.

Sempre que uma onda incide sobre uma fronteira ou interface entre dois materiais com propriedades mecânicas distintas ocorre reflexão total ou parcial da energia transportada. Quando uma onda incide numa fronteira ocorre reflexão total da energia transportada, independentemente de a fronteira ser definida como livre ou fixa. Nos casos em que se verifique a incidência de uma onda numa interface entre dois materiais com propriedades distintas, ocorre, regra geral, reflexão parcial, isto é, parte da energia transportada é reflectida para o meio pelo qual a onda inicialmente se propagava, sendo a parte remanescente transmitida para o meio

confrontante. Devido ao contraste de propriedades mecânicas entre os meios delimitados por uma interface, as direcções das ondas incidentes e transmitidas são distintas, dizendo-se que ocorre refacção da onda.

Nos pontos seguintes será abordada a questão da reflexão de ondas volúmicas na superfície livre de um maciço semi-indefinido e os aspectos essenciais da reflexão e transmissão de ondas na interface entre materiais com características mecânicas distintas.

### 2.3.3.2 Reflexão de ondas volúmicas na superfície livre

#### *Formulação geral*

Como já referido, no interior de um meio indefinido (elástico, homogéneo e isotrópico), a propagação de ondas P e S ocorre de forma desacoplada. Esta constatação, válida para meios indefinidos, não se verifica nos meios semi-indefinidos, nos quais, devido às condições de fronteira (superfície livre dos maciços) ocorre acoplamento entre os dois tipos de ondas volúmicas, isto é, pode ocorrer transformação de ondas P em ondas S e vice-versa.

Para abordar a questão em causa, considere-se o maciço semi-indefinido representado na Figura 2.4, no qual a fronteira livre é definida pelo plano OXY. Considere-se ainda, sem perda de generalidade, que a direcção de propagação das ondas se encontra inscrita no plano OXZ, sendo definida pelo versor  $r$ .

Uma vez que a direcção de propagação das ondas volúmicas se encontra inscrita no plano OXZ, não ocorre variação espacial do campo de deslocamentos na direcção  $y$ , razão pela qual as expressões [2.18] a [2.20] se simplificam do seguinte modo:

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \quad [2.28]$$

$$u_y = \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \quad [2.29]$$

$$u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \quad [2.30]$$

De acordo com as expressões [2.28] a [2.30], o movimento das partículas no plano de propagação da onda é regido pelas funções potenciais  $\Phi$  e  $\Psi_y$ , ao passo que o movimento na direcção normal é governado pelas funções potenciais  $\Psi_x$  e  $\Psi_z$ . Como é evidente, as funções potenciais terão de obedecer às equações de Navier definidas anteriormente, verificando-se que, sem perda de

generalidade, o movimento das partículas decorrente da propagação de ondas elásticas volúmicas pode ser desacoplado em duas componentes: i) deslocamentos no plano devido à propagação de ondas P e SV; ii) deslocamentos normais ao plano de propagação, em correspondência com a propagação de ondas SH. Este desacoplamento é facilmente identificável através da análise da decomposição de Helmholtz do campo de deslocamento, no qual se observa que a componente do deslocamento normal ao plano é descrita por funções potenciais distintas das que governam o movimento no plano.

Mostrou-se que, no interior de um maciço indefinido, são desacoplados os efeitos (deslocamentos) causados pela propagação de ondas P-SV por um lado, e SH, por outro. No entanto, tal como já referido, devido às condições de fronteira impostas pela geometria do problema pode ocorrer acoplamento de diferentes tipos de ondas. No caso da superfície livre, as condições de equilíbrio da fronteira obrigam a que as tensões sejam nulas em qualquer ponto da superfície livre, o que se traduz matematicamente por:

$$\sigma_{xz}(x, y, 0) = \sigma_{yz}(x, y, 0) = \sigma_{zz}(x, y, 0) = 0 \quad [2.31]$$

Tendo em atenção a decomposição de Helmholtz do campo de deslocamentos, de acordo com as expressões [2.28] a [2.30], e procedendo à sua substituição nas expressões [2.6] e [2.7], facilmente se obtêm as seguintes condições de fronteira livre:

$$\sigma_{xz} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} \right) = 0 \quad [2.32]$$

$$\sigma_{yz} = \mu \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial z} \right) = 0 \quad [2.33]$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) - 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} \right) = 0 \quad [2.34]$$

Analisando as equações [2.32] a [2.34], que definem as condições de fronteira através das funções potenciais, conclui-se que não ocorre acoplamento na fronteira entre as ondas P-SV e SH. Por essa razão, e sem perda de generalidade dada a linearidade do sistema, a reflexão de ondas que induzem movimento das partículas no plano (ondas P e SV) é tratada separadamente da reflexão de ondas que induzem movimento normal ao plano (ondas SH).

Antes de passar ao estudo da reflexão dos diferentes tipos de ondas volúmicas na superfície livre é conveniente introduzir a notação complexa para a descrição do campo de deslocamentos



induzido por ondas harmónicas. O campo de deslocamentos (ou de outra grandeza qualquer) de uma onda harmónica pode ser descrito através de funções trigonométricas ou através de notação complexa. Embora numa primeira abordagem a notação complexa possa apresentar-se como mais difícil de interpretar, na realidade simplifica muito o tratamento matemático da problemática. Deste modo, em notação complexa, o campo harmónico de deslocamentos poderá ser traduzido da seguinte forma:

$$u_i(x_i, t) = U e^{i(kr_i x_i - \omega t)} \quad [2.35]$$

em que:  $U$  é a amplitude da função;  $\omega$  é a frequência angular;  $k$  é o número de onda;  $r_i$  representa as componentes do versor que define a direcção da onda;  $x_i$  são componentes espaciais do ponto em questão;  $t$  é o tempo.

A componente imaginária relativa ao número de onda representa o carácter harmónico espacial, ao passo que a componente homóloga referente à frequência angular representa o carácter harmónico temporal. Estas duas grandezas,  $k$  e  $\omega$ , encontram-se relacionadas através da velocidade de fase (ou velocidade de propagação), designada por  $C_i$ :

$$k_i = \frac{\omega}{C_i} \quad i = P, S \quad [2.36]$$

Embora no presente capítulo apenas se faça menção a ondas harmónicas, a generalidade do problema continua garantida, pois qualquer função matemática pode ser decomposta em funções harmónicas através de séries de Fourier (funções periódicas) ou transformadas de Fourier (funções não periódicas) [24].

### **Reflexão de ondas P e SV**

Para a análise da reflexão de uma onda plana P na superfície de um maciço semi-indefinido, considere-se o esquema representado na Figura 2.8, no qual uma onda P incide na superfície livre com um ângulo  $\theta_p$ , sendo posteriormente reflectida.

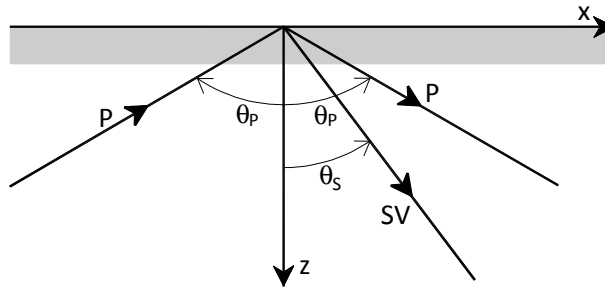


Figura 2.8 – Reflexão de ondas P (planas) na superfície livre de um maciço semi-indefinido.

Tal como já referido, o movimento das partículas induzido pelas ondas em questão pode ser descrito através das funções potenciais  $\Phi$  e  $\Psi_y$ , desde que estas obedeçam às equações de Navier (equações [2.23] e [2.24]). Deste modo, as seguintes funções potenciais são solução admissível do problema:

$$\Phi(x, z, t) = A_p^i e^{i(k_p \sin(\theta_p)x - k_p \cos(\theta_p)z - \omega t)} + A_p^r e^{i(k_p \sin(\theta_p)x + k_p \cos(\theta_p)z - \omega t)} \quad [2.37]$$

$$\Psi_y(x, z, t) = A_s^r e^{i(k_s \sin(\theta_s)x + k_s \cos(\theta_s)z - \omega t)} \quad [2.38]$$

Em que  $A_p^i$  e  $A_p^r$  representam, respectivamente, a amplitude da onda P incidente e reflectida, ao passo que  $A_s^r$  corresponde à amplitude da onda SV reflectida.

Segundo a lei de Snell aplicada à elastodinâmica [25], os ângulos da onda incidente e reflectida são relacionáveis através da velocidade de propagação de cada uma das ondas. Assim sendo, e atendendo à equação [2.36], é possível estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\sin(\theta_p)}{\sin(\theta_s)} = \frac{C_p}{C_s} = \frac{k_s}{k_p} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}} = \alpha \quad [2.39]$$

Introduzindo as expressões [2.37] e [2.38] nas condições de fronteira para  $z=0$  (equações [2.32] a [2.34]), e após alguma manipulação matemática, é possível definir o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 2\sin^2 \theta_p - \alpha^2 & -\alpha^2 \sin 2\theta_s \\ \sin 2\theta_p & 2\sin^2 \theta_p - \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_p^r \\ A_s^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin^2 \theta_p + \alpha \\ \sin 2\theta_p \end{bmatrix} A_p^i \quad [2.40]$$

A resolução do sistema de equações permite a obtenção dos coeficientes de reflexão, definidos como a razão entre as amplitudes da onda reflectida e da onda incidente:

$$\frac{A_p^r}{A_p^i} = \frac{\sin(2\theta_p)\sin(2\theta_s) - \alpha^2 \cos^2(2\theta_s)}{\sin(2\theta_p)\sin(2\theta_s) + \alpha^2 \cos^2(2\theta_s)} \quad [2.41]$$

$$\frac{A_s^i}{A_p^i} = \frac{2\sin(2\theta_p)\cos(2\theta_s)}{\sin(2\theta_p)\sin(2\theta_s) + \alpha^2 \cos^2(2\theta_s)} \quad [2.42]$$

Como é fácil de identificar, tanto os coeficientes de reflexão como os ângulos de reflexão são independentes da frequência de excitação, sendo apenas função do ângulo de incidência da onda P e do coeficiente de Poisson do meio. Nas Figuras 2.9a e 2.9b apresentam-se, respectivamente, os ângulos e coeficientes de reflexão para diferentes ângulos de incidência da onda P.

Do exame da Figura 2.9 pode concluir-se que o ângulo de reflexão da onda SV é sempre inferior ao ângulo de incidência da onda P, seguindo uma tendência de diminuição com o aumento do coeficiente de Poisson. Quando a onda P incidente é normal à fronteira livre, o problema é unidimensional, verificando-se que toda a energia incidente é reflectida sobre a forma de ondas longitudinais que apresentam a mesma amplitude embora com uma diferença de fase de  $\pi$  relativamente à onda incidente. Para ângulos de incidência intermédios entre a orientação normal e paralela à superfície livre, a energia transmitida pela onda longitudinal incidente é repartida através da reflexão de uma onda P e de uma onda SV. Deste modo conclui-se que na superfície livre do maciço ocorre acoplamento entre ondas P e ondas SV.

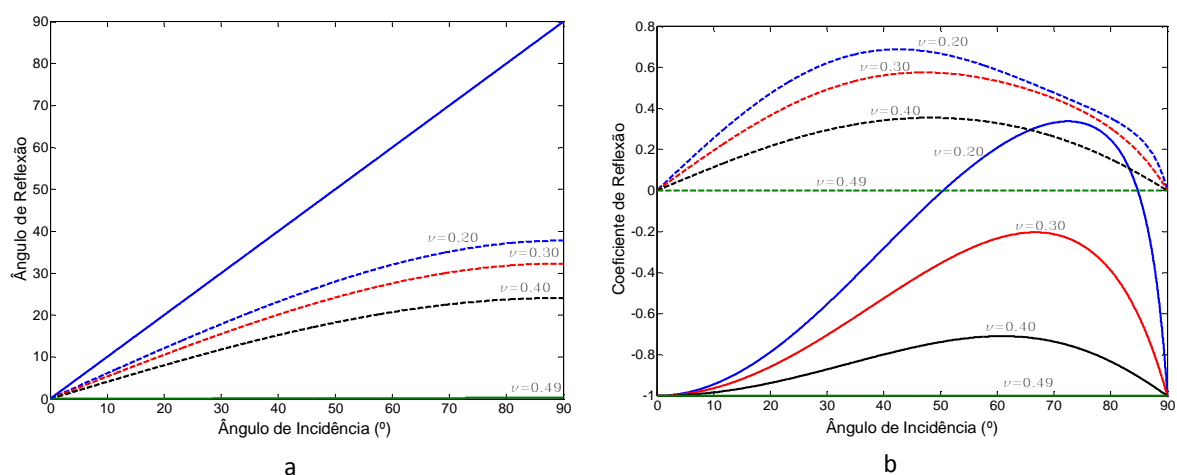


Figura 2.9 – Propriedades das ondas reflectidas na superfície livre devido à incidência de uma onda P: a) ângulo de reflexão versus ângulo de incidência; b) amplitudes relativas (linha interrompida - ondas SV; linha a cheio – ondas P).

Considere-se agora o caso de incidência de uma onda plana SV na superfície livre de um maciço semi-indefinido, tal como ilustrado na Figura 2.10.

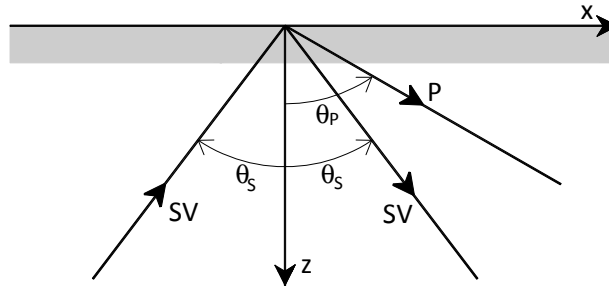


Figura 2.10 – Reflexão de ondas SV (planas) na superfície livre de um maciço semi-indefinido.

O tratamento matemático da reflexão de uma onda SV na superfície livre do maciço segue o mesmo formalismo do caso anterior, sendo que a única diferença consiste nas funções potenciais  $\Phi$  e  $\Psi_y$  a considerar. Na presente situação as funções potenciais tomam a seguinte forma:

$$\Phi(x, z, t) = A_p^r e^{i(k_p \sin(\theta_p)x + k_p \cos(\theta_p)z - \omega t)} \quad [2.43]$$

$$\Psi_y(x, z, t) = A_s^i e^{i(k_s \sin(\theta_s)x - k_s \cos(\theta_s)z - \omega t)} + A_s^r e^{i(k_s \sin(\theta_s)x + k_s \cos(\theta_s)z - \omega t)} \quad [2.44]$$

Tendo em conta as condições de fronteira que definem a superfície livre, a amplitude das ondas reflectidas é, para o caso de incidência de uma onda SV, determinada através da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 2\sin^2 \theta_p - \alpha & -\alpha^2 \sin 2\theta_s \\ \sin^2 2\theta_p & -\alpha^2 \sin 2\theta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_p^r \\ A_s^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 2\theta_s \\ -2\sin^2 \theta_p + \alpha \end{bmatrix} A_p^i \quad [2.45]$$

De acordo com o sistema de equações apresentado, os coeficientes de reflexão para uma onda SV incidente na superfície do maciço são descritos da seguinte forma:

$$\frac{A_s^r}{A_s^i} = \frac{\sin(2\theta_p)\sin(2\theta_s) - \alpha^2 \cos^2(2\theta_s)}{\sin(2\theta_p)\sin(2\theta_s) + \alpha^2 \cos^2(2\theta_s)} \quad [2.46]$$

$$\frac{A_p^i}{A_p^i} = \frac{-2\alpha^2 \sin(2\theta_p)\cos(2\theta_s)}{\sin(2\theta_p)\sin(2\theta_s) + \alpha^2 \cos^2(2\theta_s)} \quad [2.47]$$

Nas Figuras 2.11a e 2.11b apresentam-se os ângulos de reflexão e os coeficientes de reflexão, respectivamente, para diferentes ângulos de incidência da onda SV.

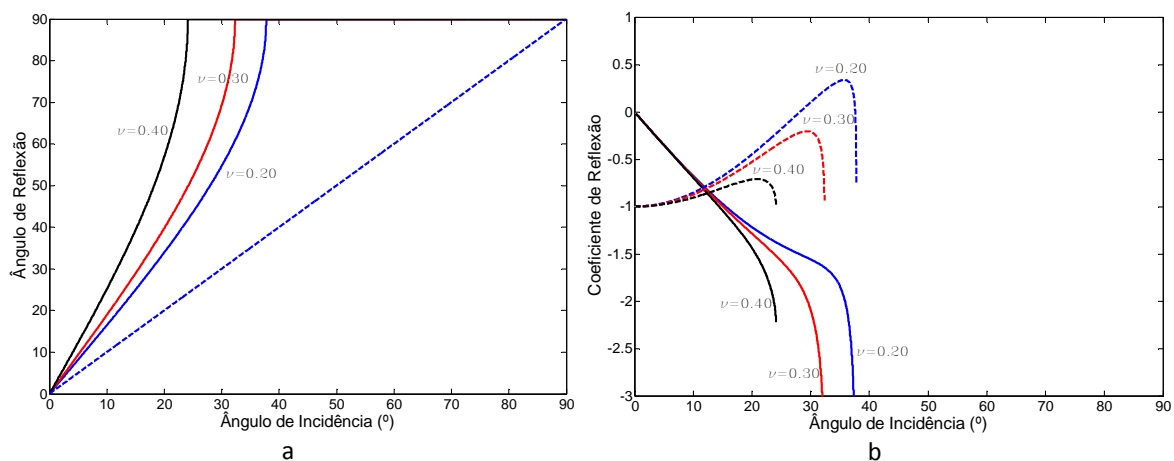


Figura 2.11 – Propriedades das ondas reflectidas na superfície livre devido à incidência de uma onda SV: a) ângulo de reflexão versus ângulo de incidência; b) amplitudes relativas (linha interrompida - ondas SV; linha a cheio – ondas P).

Da observação da Figura 2.11 retira-se de imediato que os coeficientes de reflexão e respectivos ângulos não se encontram representados para toda a gama de ângulos de incidência do primeiro quadrante. Com efeito, apenas se apresentam os valores correspondentes à gama de ângulos de incidência que conduzem a ângulos e coeficientes de reflexão reais, ou, de outra forma, apenas se apresentam os resultados para ângulos de incidência inferiores ao ângulo de incidência crítico, designado por  $\theta_c$ . O ângulo de incidência crítico resulta do facto de o ângulo da onda P reflectida ter de ser igual ou inferior a  $\pi/2$ , situação limite a que corresponde a propagação de uma onda P paralela à superfície do maciço. Quando tal condição não se verifica, ou seja, nos casos em que o ângulo de incidência da onda SV é superior ao ângulo crítico, apenas uma onda SV é reflectida. Nesta situação, a energia que para ângulos de incidência inferiores seria reflectida como uma onda longitudinal, é captada por uma onda superficial com decaimento exponencial na direcção normal à superfície do maciço, tal como se ilustra na Figura 2.12. Esta onda superficial é designada por onda de Rayleigh e será objecto de estudo numa secção posterior do presente capítulo.

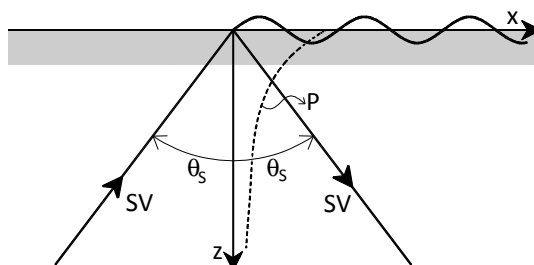


Figura 2.12 – Reflexão de ondas SV na superfície livre para ângulos de incidência superiores a  $\theta_c$ .

Do ponto de vista matemático, quando o ângulo de incidência é superior ao seu valor crítico, o ângulo que as ondas P reflectidas fazem com a normal à superfície do maciço passa a ser uma entidade complexa, como aliás se constata pela análise da equação [2.39]. Deste modo, o termo

da função exponencial imaginária presente na equação [2.43] relativo à coordenada  $z$  passa a ser também um número imaginário, o que leva a que a função exponencial relativa à coordenada  $z$  seja uma entidade real. Os termos exponenciais reais representam ondas evanescentes, ou seja, ondas que não têm carácter oscilatório e que decaem exponencialmente.

### **Reflexão de ondas SH**

O movimento das partículas induzido por uma onda plana SH apresenta apenas componente normal ao plano de propagação, ou seja, os deslocamentos são necessariamente paralelos à superfície livre do maciço.

Tendo em conta a expressão [2.29], o deslocamento normal ao plano é descrito pelas funções potenciais  $\Psi_x$  e  $\Psi_z$ . De modo a respeitar a equação de Navier (equação [2.24]), são soluções admissíveis as seguintes funções potenciais:

$$\Psi_x(x, z, t) = A_1^i e^{i(k_S \sin(\theta_S)x - k_S \cos(\theta_S)z - \omega t)} + A_1^r e^{i(k_S \sin(\theta_S)x + k_S \cos(\theta_S)z - \omega t)} \quad [2.48]$$

$$\Psi_z(x, z, t) = A_2^i e^{i(k_S \sin(\theta_S)x - k_S \cos(\theta_S)z - \omega t)} + A_2^r e^{i(k_S \sin(\theta_S)x + k_S \cos(\theta_S)z - \omega t)} \quad [2.49]$$

Aparentemente, o problema de reflexão de ondas SH na superfície livre envolve quatro amplitudes:  $A_1^i$ ;  $A_2^i$ ;  $A_1^r$  e  $A_2^r$ . No entanto, uma vez que o divergente da função potencial vectorial  $\Psi$  tem de ser obrigatoriamente nulo (ver equação [2.21]), conclui-se que  $A_1^i = -A_2^i$  e que  $A_1^r = -A_2^r$ .

Introduzindo as funções potenciais definidas em [2.48] e [2.49] na condição de fronteira livre expressa pela equação [2.33], conclui-se que  $A_1^r = -A_1^i$ , ou seja, que independentemente do ângulo de incidência da onda SH ou das propriedades mecânicas do meio, toda a energia incidente é reflectida sob a forma de uma onda SH com a mesma amplitude que a onda incidente e apresentando uma diferença de fase de  $\pi$  radianos.

### **2.3.3.3 Reflexão e refração de ondas volúmicas em interfaces**

A realidade física dos maciços geotécnicos é, regra geral, muito mais complexa do que o reflectido por uma simples idealização como um meio homogéneo semi-indefinido. Contudo, a introdução da estratificação geotécnica num modelo teórico permite refinar significativamente a simulação da realidade física.

Em geral, quando uma onda volúmica incide na interface que delimita dois meios elásticos com propriedades distintas, parte da energia transportada é reflectida para o meio inicial, sendo a parte remanescente transmitida ao meio posterior. Devido à diferença entre as velocidades de propagação das ondas nos dois meios, a direcção de propagação no meio posterior é distinta da identificada no meio inicial, dizendo-se que ocorre refacção da onda.

Seguindo o mesmo formalismo matemático que foi adoptado para o tratamento do problema de reflexão na superfície livre de um maciço, prova-se que numa interface ocorre acoplamento entre ondas P e SV, sendo este problema totalmente desacoplado da propagação de ondas SH. Deste modo, quando uma onda P incide na interface, a energia transportada é parcialmente reflectida através de uma onda P e de uma onda SV para o meio por onde se propagava inicialmente a onda P, sendo a parte remanescente transmitida ao meio seguinte através de uma onda P e de uma onda SV, tal como se ilustra na Figura 2.13a.

Uma vez que ocorre acoplamento entre ondas P e SV, a incidência de uma onda SV na interface dá origem a ondas P e SV reflectidas e também às homólogas refractadas (Figura 2.13b).

Como expectável, o movimento induzido pelas ondas SH, ao ser perpendicular ao plano, leva a que não ocorra qualquer tipo de acoplamento, sendo por isso a energia transportada parcialmente reflectida e refractada através de ondas SH, tal como se representa esquematicamente na Figura 2.13c.

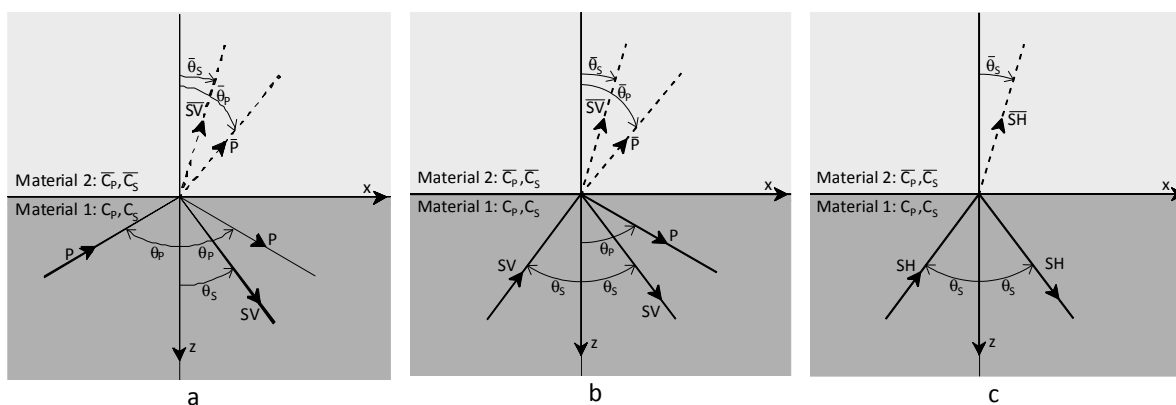


Figura 2.13 – Reflexão e refacção de ondas em interfaces: a) incidência de ondas P; b) incidência de ondas SV; c) incidência de ondas SH.

As propriedades das ondas reflectidas e refractadas, isto é, a sua amplitude e ângulo de propagação, dependem apenas do ângulo que a onda incidente faz com a normal à interface e das propriedades mecânicas dos meios confrontantes. Atendendo à lei de Snell, as orientações de propagação das ondas reflectidas, refractadas e incidentes, são relacionáveis do seguinte modo (ver Figura 2.13):

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_j} = \frac{C_i}{C_j} \quad [2.50]$$

em que  $i=P,S$  e  $j=P,S$ .

A dedução matemática dos coeficientes de reflexão e refração não é aqui apresentada, visto que segue exactamente o mesmo formalismo que foi anteriormente exposto para os problemas de reflexão na superfície livre do maciço. Ou seja, o procedimento matemático passa pela decomposição do campo de deslocamentos em cada um dos meios através das funções potenciais de Helmholtz, pela consideração das equações de Navier para cada um dos meios e pela imposição das condições de fronteira. Relativamente a estas, elas são estabelecidas tendo em conta o equilíbrio de tensões e a compatibilidade de deslocamentos ao longo da interface entre os dois meios considerados. As condições de fronteira para o problema P-SV são estabelecidas da seguinte forma (ver Figura 2.13):

$$\bar{\sigma}_{xz}(x, y, 0) = \sigma_{xz}(x, y, 0); \bar{\sigma}_{zz}(x, y, 0) = \sigma_{zz}(x, y, 0) \quad [2.51]$$

$$\bar{u}_x(x, y, 0) = u_x(x, y, 0); \bar{u}_z(x, y, 0) = u_z(x, y, 0) \quad [2.52]$$

Por sua vez, como a propagação de ondas SH apenas induz movimentos na direcção perpendicular ao plano de propagação, as condições de fronteira apenas têm em conta o equilíbrio de tensões na direcção  $y$  e a respectiva compatibilidade de deslocamentos, ou seja:

$$\bar{\sigma}_{yz}(x, y, 0) = \sigma_{yz}(x, y, 0) \quad [2.53]$$

$$\bar{u}_y(x, y, 0) = u_y(x, y, 0) \quad [2.54]$$

#### **2.3.4 Ondas superficiais**

Nas secções anteriores demonstrou-se que apenas dois tipos de ondas se podem propagar no interior de maciços indefinidos, tendo sido definidas como ondas P e ondas S. Demonstrou-se também a possibilidade de acoplamento dos dois tipos de ondas volúmicas em fronteiras livres ou interfaces entre materiais com características mecânicas distintas, tendo-se ainda identificado a possibilidade de ondas volúmicas incidentes numa superfície livre poderem dar a origem a ondas superficiais com carácter evanescente em profundidade. As ondas superficiais apenas se propagam junto à superfície do terreno e resultam da interacção das ondas volúmicas e da condição de tensões nulas ao longo da superfície livre.



Esta secção pretende apresentar os aspectos gerais da propagação de ondas de superfície em maciços semi-indefinidos. Embora em situações reais possam existir diferentes tipos de ondas superficiais, apenas serão aqui tratadas, pela sua importância teórica, a propagação de ondas de Rayleigh e de ondas de Love. Uma vez que o tráfego ferroviário excita essencialmente as componentes P-SV do campo de vibrações, a propagação de ondas de Rayleigh será analisada com maior detalhe.

### 2.3.4.1 Ondas de Rayleigh

As ondas de Rayleigh (ondas R) são ondas de superfície que resultam do acoplamento entre ondas P e SV na superfície livre do maciço e que têm carácter evanescente na direcção normal à referida superfície.

Seguindo a mesma abordagem que foi apresentada para o caso das ondas volúmicas, considere-se um maciço semi-indefinido, homogéneo e isotrópico, tal como representado na Figura 2.14.

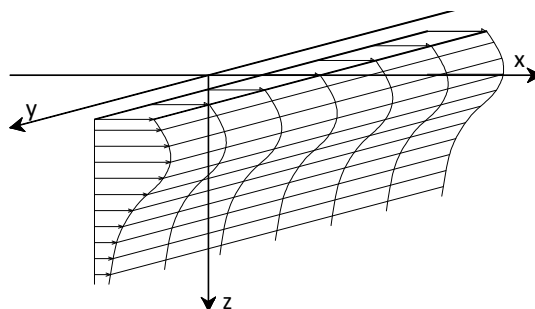


Figura 2.14 – Propagação de ondas de Rayleigh num maciço homogéneo semi-indefinido.

De acordo com os pressupostos anteriormente apresentados, o campo de deslocamentos induzidos pela passagem de uma onda pode ser decomposto através da análise de ondas planas, sem que no entanto ocorra qualquer perda de generalidade. Como tal, considere-se a propagação de ondas R no plano OXZ, tal como indicado na Figura 2.14. Uma vez que o movimento das partículas induzido pela propagação de uma onda R ocorre no plano, as equações de Navier, correspondentes à propagação de ondas P e SV, terão de ser satisfeitas em qualquer ponto do maciço. Para simplificar a leitura, essas mesmas equações são aqui reescritas:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{C_p^2} \ddot{\Phi} \quad [2.55]$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial z^2} = \frac{1}{C_S^2} \ddot{\Psi} \quad [2.56]$$

Admitindo que a propagação da onda R ocorre no sentido positivo do eixo dos  $x$ , e sabendo que as ondas R apresentam carácter evanescente na direcção normal à superfície livre (sentido positivo do eixo  $z$ ), as seguintes funções potenciais constituem soluções admissíveis das equações de Navier:

$$\Phi(x, z, t) = \varphi(z) e^{i(k_p \sin(\theta_p)x - \omega t)} \quad [2.57]$$

$$\Psi_y(x, z, t) = \psi(z) e^{i(k_s \sin(\theta_s)x - \omega t)} \quad [2.58]$$

em que  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$  são funções que definem a variação de amplitude da onda em profundidade. As restantes variáveis tomam o significado anteriormente apresentado.

Introduzindo as funções potenciais definidas em [2.57] e [2.58] nas equações de Navier ([2.55] e [2.56]), chega-se ao seguinte par de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (1 - \sin^2 \theta_p) k_p^2 \varphi = 0 \quad [2.59]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + (1 - \sin^2 \theta_s) k_s^2 \psi = 0 \quad [2.60]$$

Tendo em conta a lei de Snell, os números de onda e velocidades de propagação das ondas P e S podem ser relacionados com os homólogos relativos às ondas R. Deste modo,

$$k_R = k_p \sin \theta_p = k_s \sin \theta_s \quad [2.61]$$

$$k_p C_p = k_s C_s = k_R C_R = \omega \quad [2.62]$$

em que  $k_R$  e  $C_R$  representam o número de onda e velocidade de propagação das ondas de Rayleigh, respectivamente.

Assim sendo, as equações diferenciais definidas em [2.59] e [2.60] podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \gamma_p^2 \varphi = 0 \quad [2.63]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \gamma_s^2 \psi = 0 \quad [2.64]$$

em que  $\gamma_P$  e  $\gamma_S$  são valores reais positivos dados por:

$$\gamma_P = \sqrt{k_R^2 \left( 1 - \frac{C_R^2}{C_P^2} \right)} \quad [2.65]$$

$$\gamma_S = \sqrt{k_R^2 \left( 1 - \frac{C_R^2}{C_S^2} \right)} \quad [2.66]$$

Resolvendo as equações diferenciais [2.63] e [2.64] e atendendo à condição física de diminuição da amplitude dos movimentos com o incremento da profundidade, chega-se às seguintes soluções das funções  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$ :

$$\varphi(z) = A_P e^{-\gamma_P z} \quad [2.67]$$

$$\psi(z) = A_S e^{-\gamma_S z} \quad [2.68]$$

Deste modo, as funções potenciais que descrevem o movimento das partículas devido à propagação de ondas R são dadas por:

$$\Phi(x, z, t) = A_P e^{-\gamma_P z} e^{i(k_P \sin(\theta_P)x - \omega t)} \quad [2.69]$$

$$\Psi_y(x, z, t) = A_S e^{-\gamma_S z} e^{i(k_S \sin(\theta_S)x - \omega t)} \quad [2.70]$$

Uma vez que estas funções potenciais satisfazem as equações de Navier, fica então matematicamente demonstrado que a propagação de ondas R junto à superfície de um maciço semi-indefinido constitui uma solução admissível do problema.

Para a determinação da velocidade de fase das ondas R, bem como para a definição do campo de deslocamentos induzido, é necessário atender à condição de superfície livre. Considerando a condição física imposta pela superfície livre, já anteriormente definida pelas equações [2.32] a [2.34], e procedendo à respectiva substituição das funções potenciais dadas por [2.69] e [2.70], chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 \left[ \gamma_P^2 - k_R^2 \left( 1 - \frac{2}{\alpha^2} \right) \right] & -2ik_R \gamma_S \\ 2i\gamma_P k_R & \gamma_S^2 + k_R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_P \\ A_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [2.71]$$

Abstraindo a solução trivial, para que o sistema de equações apresentado em [2.71] não seja indeterminado é condição obrigatória que o seu determinante seja nulo. Esta condição, também designada por equação de Rayleigh, traduz-se da seguinte forma:

$$\alpha^2 \left[ \gamma_p^2 - k_R^2 \left( 1 - \frac{2}{\alpha^2} \right) \right] (\gamma_S^2 + k_R^2) - 4\gamma_p \gamma_S k_R^2 = 0 \quad [2.72]$$

Através de alguma manipulação matemática, a equação [2.72] pode ser reescrita em função da razão  $C_R/C_S$ :

$$\left( \frac{C_R}{C_S} \right)^2 \left[ \left( \frac{C_R}{C_S} \right)^6 - 8 \left( \frac{C_R}{C_S} \right)^4 + (24 - 16\alpha^2) \left( \frac{C_R}{C_S} \right)^2 + 16(\alpha^2 - 1) \right] = 0 \quad [2.73]$$

Uma vez que  $C_R^2/C_S^2=0$  não tem qualquer significado físico (tal corresponderia à não propagação de ondas R), a solução da equação [2.73] é dada pelas raízes do polinómio de terceira ordem função de  $C_R^2/C_S^2$ , ou seja:

$$\left( \frac{C_R}{C_S} \right)^6 - 8 \left( \frac{C_R}{C_S} \right)^4 + (24 - 16\alpha^2) \left( \frac{C_R}{C_S} \right)^2 + 16(\alpha^2 - 1) = 0 \quad [2.74]$$

Considerando apenas as raízes reais e admissíveis do referido polinómio, conclui-se que a velocidade de propagação das ondas R é relacionável com a velocidade de propagação das ondas S através do coeficiente de Poisson. A solução aproximada é dada pela seguinte expressão [22, 26]:

$$C_R \approx \frac{0,862 + 1,14\nu}{1 + \nu} C_S \quad [2.75]$$

Tendo em conta as conclusões anteriores e a relação entre as velocidades de propagação das ondas R e S agora apresentada, pode pois afirmar-se que as relações entre as velocidades de propagação dos diferentes tipos de ondas admissíveis num maciço semi-indefinido, homogéneo e isotrópico, dependem apenas do coeficiente de Poisson. Na Figura 2.15 mostra-se os valores que assumem essas relações para a gama de coeficientes de Poisson admissíveis, ou seja no intervalo [0; 0,5].

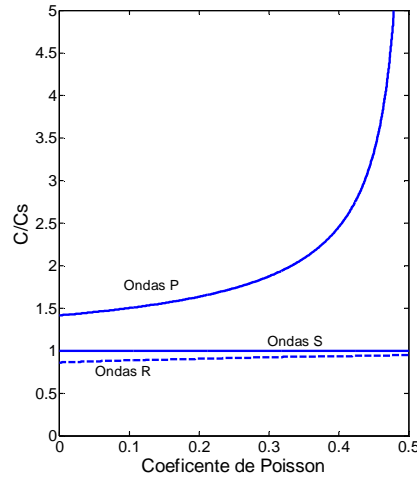


Figura 2.15 – Relação entre velocidades de propagação num maciço semi-indefinido e homogêneo.

Face ao exposto, conclui-se que a velocidade de propagação das ondas R cresce monotonicamente de  $C_R=0,862C_S$ , quando  $\nu=0$ , até atingir o valor máximo de  $C_R=0,955C_S$  para  $\nu=0,5$ .

No que toca ao campo de deslocamentos induzido por uma onda R, as componentes do mesmo são facilmente deriváveis atendendo às funções potenciais definidas em [2.69] e [2.70] e à velocidade de propagação da onda R no meio em questão. Procedendo à substituição das funções potenciais nas expressões [2.18] e [2.20], obtém-se:

$$u_x(x, z, t) = (ik_R A_p e^{-\gamma_p z} + \gamma_S A_S e^{-\gamma_S z}) e^{i(k_R x - \omega t)} \quad [2.76]$$

$$u_z(x, z, t) = (ik_R A_S e^{-\gamma_S z} - \gamma_p A_p e^{-\gamma_p z}) e^{i(k_R x - \omega t)} \quad [2.77]$$

Tendo em atenção as condições de fronteira livre para  $z=0$  (ver [2.71]), é possível estabelecer a seguinte relação entre as constantes  $A_p$  e  $A_S$ :

$$\frac{A_p}{A_S} = -\frac{\gamma_S^2 + k_R^2}{2i\gamma_p k_R} \quad [2.78]$$

Substituindo [2.78] em [2.76] e [2.77] chega-se a,

$$u_x(x, z, t) = A_S \left( \gamma_S e^{-\gamma_S z} - \frac{\gamma_S^2 + k_R^2}{2k_R} e^{-\gamma_p z} \right) e^{i(k_R x - \omega t)} \quad [2.79]$$

$$u_z(x, z, t) = iA_S \left( k_R e^{-\gamma_S z} - \frac{\gamma_S^2 + k_R^2}{2\gamma_p} e^{-\gamma_p z} \right) e^{i(k_R x - \omega t)} \quad [2.80]$$

Analisando as expressões que traduzem o campo de deslocamentos conclui-se que a componente vertical do deslocamento apresenta uma diferença de fase de  $\pi/2$  radianos face à componente horizontal. Esta diferença de fase implica que o movimento das partículas seja descrito por trajectórias elípticas nas quais a componente vertical do deslocamento é sempre superior à componente horizontal. Para melhor discernir as propriedades do campo de deslocamentos induzido pelas ondas de Rayleigh, na Figura 2.16 apresenta-se a variação em profundidade (normalizada em relação ao comprimento de onda,  $L=2\pi/k_R$ ) da amplitude das suas componentes, devidamente normalizadas em relação às amplitudes homólogas verificadas à superfície do maciço.

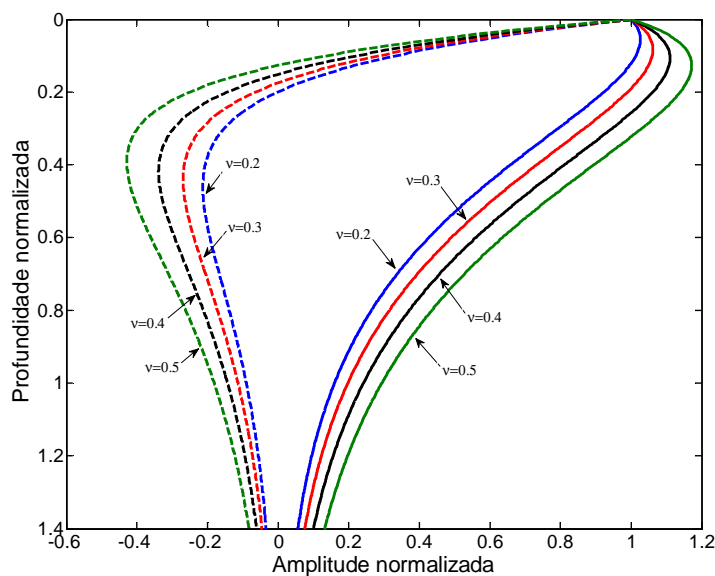


Figura 2.16 – Deslocamentos horizontais e verticais induzidos por ondas de Rayleigh não dispersivas. (linha a cheio – componente vertical; linha interrompida – componente horizontal).

Da análise dos resultados expostos na Figura 2.16, importantes conclusões podem ser retiradas:

- i) a amplitude dos deslocamentos decresce muito abruptamente em profundidade, sendo de notar que, para profundidades correspondentes a 1,5 vezes o comprimento de onda, a amplitude de ambas as componentes do deslocamento torna-se negligenciável;
- ii) o nível de penetração da onda é inversamente proporcional à frequência angular da mesma, isto é, para ondas de alta frequência apenas as zonas superficiais do maciço são interessadas, ao passo que para frequências baixas são envolvidas zonas mais profundas do maciço;
- iii) para profundidades superiores a cerca de 0,2 do comprimento de onda observa-se que a componente horizontal do deslocamento toma o sentido inverso ao verificado à superfície do maciço, significando isto que nas zonas superficiais o movimento é retrógrado, ou seja, as partículas descrevem um movimento contrário ao sentido horário quando uma onda se propaga da esquerda para a direita, observando-se o oposto para profundidades superiores ao referido valor.

A identificação das propriedades de propagação das ondas de Rayleigh é uma temática importante nos domínios da geotecnia e geofísica, pois existem diversos tipos de ensaios de caracterização mecânica de maciços que se baseiam na análise espectral das características de propagação de ondas de Rayleigh, nomeadamente os ensaios SASW e MASW [23, 27].

### 2.3.4.2 Ondas de Love

Num maciço semi-indefinido, homogéneo e isotrópico apenas se propagam três tipos de ondas: ondas P, ondas S e ondas R. No entanto, caso o maciço apresente estratificação, e se o estrato superficial apresentar uma velocidade de propagação das ondas S inferior à verificada nos estratos subjacentes, é admissível a geração de um outro tipo de ondas superficiais, designadas genericamente por ondas de Love (ondas L) em homenagem a A. Love que, em 1911, desenvolveu a teoria matemática que prova a existência deste tipo de ondas. As ondas de Love resultam da reflexão múltipla de ondas SH na superfície livre do maciço e na interface inferior do estrato superficial, ocorrendo assim concentração de energia ao longo da zona superficial do maciço. A Figura 2.17 apresenta esquematicamente o processo de concentração de energia no estrato superficial do maciço, funcionando este como um “condutor” para a propagação da referida onda. Como se pode verificar, quando o ângulo de incidência da onda SH na interface entre os dois estratos é superior ao ângulo crítico,  $\theta_c$  ( $\sin \theta_c = C_{S1}/C_{S2}$ ), a energia transportada é reflectida na sua totalidade.

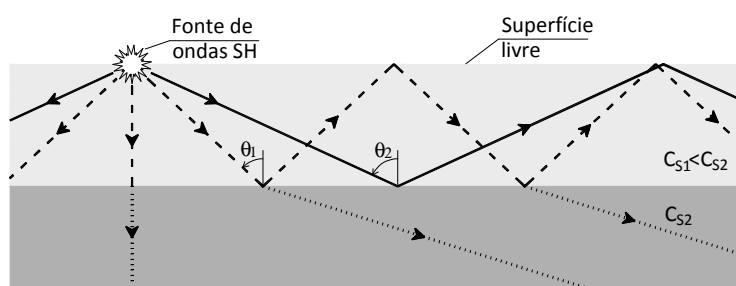


Figura 2.17 – Processo de geração de ondas de Love.

Uma vez que as ondas L resultam da interferência entre ondas SH, a superfície livre e a interface entre materiais com características distintas, o movimento das partículas gerado por este tipo de onda ocorre na direcção normal ao plano de propagação da onda, tal como se ilustra na Figura 2.18. Ao contrário das ondas R, em que a propagação da onda gera deformações volumétricas e distorcionais, a propagação de ondas L apenas admite deformações de carácter distorcionais. Tal como as ondas R, as ondas L também apresentam características evanescentes em profundidade, razão pela qual apenas se propagam na direcção paralela à superfície do maciço.

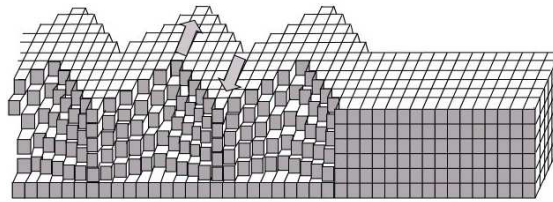


Figura 2.18 – Movimento das partículas induzido pela propagação de ondas L.

Dada a necessidade de existência de um maciço estratificado para que se possam gerar ondas L, a velocidade de propagação das mesmas passa a ser dependente da frequência de excitação. Com efeito, a estratificação do maciço leva a que este apresente carácter dispersivo, passando a velocidade de propagação a depender do grau de penetração da onda em profundidade. Deste modo, no caso das ondas L, verifica-se que a velocidade de propagação segue uma tendência de decréscimo com o aumento da frequência (diminuição do comprimento de onda) desde aproximadamente o valor da velocidade de propagação das ondas S no meio inferior (meio mais rígido) até atingir aproximadamente o valor da velocidade de propagação das ondas S verificada no estrato superficial (meio menos rígido). Para ilustrar este efeito na Figura 2.19b apresenta-se, para as condições geotécnicas indicadas na Figura 2.19a, a evolução da velocidade de propagação das ondas L. Deve ser tido em atenção que na Figura 2.19b apenas se encontra representado o primeiro modo SH, já que maciços estratificados dão origem a diferentes modos de propagação tanto de ondas L como de ondas R. Contudo, os efeitos de dispersão do maciço serão devidamente discutidos na secção seguinte do presente capítulo.

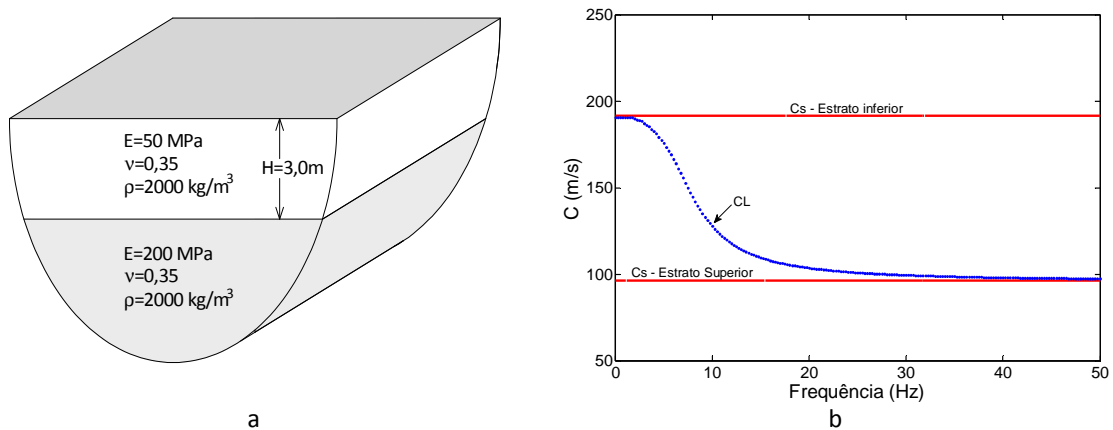


Figura 2.19 – Velocidade de propagação de ondas L: a) Estratificação do maciço; b) Velocidade de propagação versus frequência de excitação.



### **2.3.5 Dispersão e atenuação de ondas**

#### **2.3.5.1 Considerações gerais**

Nas secções anteriores discutiram-se as principais propriedades dos diferentes tipos de ondas passíveis de se propagarem num maciço semi-indefinido e estratificado. Contudo, alguns aspectos ficaram em aberto, nomeadamente a possibilidade de alteração da configuração da onda à medida que a distância da fonte ao receptor aumenta (dispersão), ou a atenuação da amplitude da mesma (amortecimento). Esta secção procura colmatar essa lacuna, o que passa pela clarificação de conceitos importantes para a descrição da problemática de propagação de ondas em maciços terrosos, tais como: dispersão, amortecimento por radiação e amortecimento material.

#### **2.3.5.2 Dispersão**

No presente contexto, o conceito de dispersão refere-se à dependência da velocidade de fase de uma onda com a frequência (ou comprimento de onda) de excitação. Deste modo, quando tal dependência se verifica a onda diz-se dispersiva, sendo usualmente designada como não dispersiva em caso contrário.

Do exposto anteriormente verifica-se que a velocidade de fase das ondas volúmicas (ver [2.25] e [2.26]) é apenas dependente das propriedades elásticas do material e da sua massa volúmica, não se identificando qualquer relação, implícita ou explícita, entre velocidade de fase e frequência de excitação. Assim sendo, a propagação de ondas volúmicas em meios elásticos contínuos é não dispersiva. Do mesmo modo, a propagação de ondas de Rayleigh num maciço homogéneo semi-indefinido apresenta também carácter não dispersivo. Fica assim clarificado que todas as ondas passíveis de se propagar num maciço homogéneo semi-indefinido apresentam carácter não dispersivo.

Por outro lado, maciços estratificados, correspondendo à generalidade das situações de foro prático, dão origem a ondas superficiais (ondas de Rayleigh e ondas de Love) dispersivas, nas quais se verifica uma clara dependência entre frequência de excitação e velocidade de fase.

O facto de um maciço ser dispersivo ou não dispersivo tem severas implicações sobre a transformação ou não da configuração de uma onda à medida que a distância entre o ponto de observação e a fonte aumenta. Com efeito, o facto de componentes da onda associadas a frequências diferentes se propagarem com velocidades distintas leva a uma alteração significativa

da configuração do padrão de deslocamentos observado. Para uma explanação mais profunda deste aspecto considere-se o exemplo apresentado na Figura 2.20, onde é avaliada a resposta do maciço, para dois cenários geotécnicos distintos, face à aplicação de uma acção vertical uniformemente distribuída numa área circular com 0,5 m de raio e inscrita na superfície livre do maciço. Na Figura 2.20c é ilustrada a variação temporal da resultante da força aplicada.

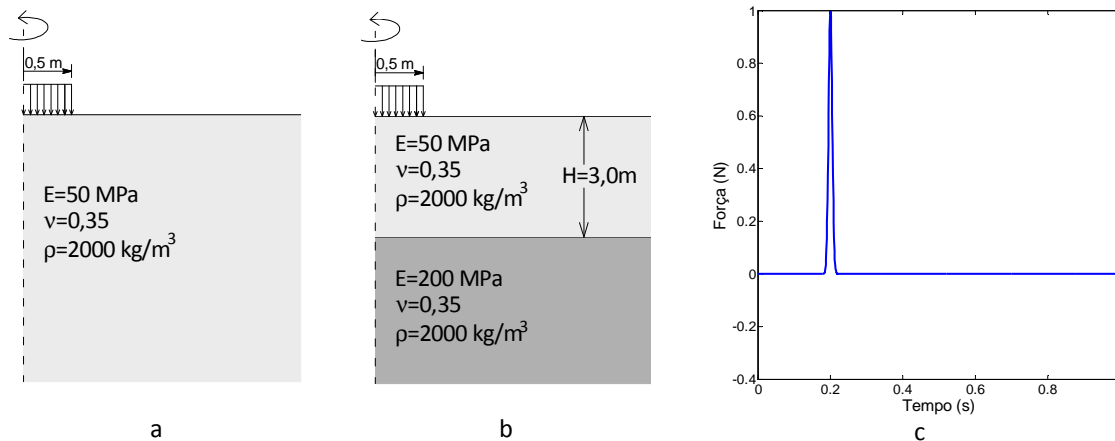


Figura 2.20 – Efeitos da estratificação. Exemplo. a) Maciço homogéneo; b) Maciço estratificado; c) História temporal da força aplicada.

As relações de dispersão do modo P-SV (ondas R), sob a forma de um diagrama velocidade de fase versus frequência, são apresentadas na Figura 2.21, para os dois cenários geotécnicos considerados. Para a situação representada pelo caso 1 (maciço homogéneo semi-indefinido) apenas existe um tipo de onda R e a sua velocidade de propagação é constante, independentemente da frequência de excitação. Situação contrária é verificada no caso 2, no qual é considerada estratificação do maciço. Com efeito, perfis dispersivos permitem a geração de vários tipos de onda de Rayleigh mediante a frequência de excitação, como aliás se encontra bem patente na Figura 2.21b.

Por outro lado, nas Figuras 2.22a e 2.22b apresenta-se a história temporal de deslocamentos verticais verificados nos pontos A e B, que distam, respectivamente, 10,0 m e 20,0 m do centro da superfície circular onde é aplicado o carregamento. Antes de mais, convém clarificar que a história temporal de deslocamentos verticais registada nos pontos A e B resulta da propagação de ondas P, S e R. Como tal, a diferença de tempos de chegada das diferentes ondas é tanto mais pronunciada quanto maior for a distância entre a fonte e o receptor. No entanto, uma vez que ondas volúmicas são não dispersivas, a abordagem aqui apresentada fica condicionada à propagação de ondas R, que aliás transportam grande parte da energia transmitida ao sistema (ver Figura 2.6). De modo a facilitar a análise das figuras, as histórias temporais encontram-se normalizadas face ao valor máximo do deslocamento vertical verificado.

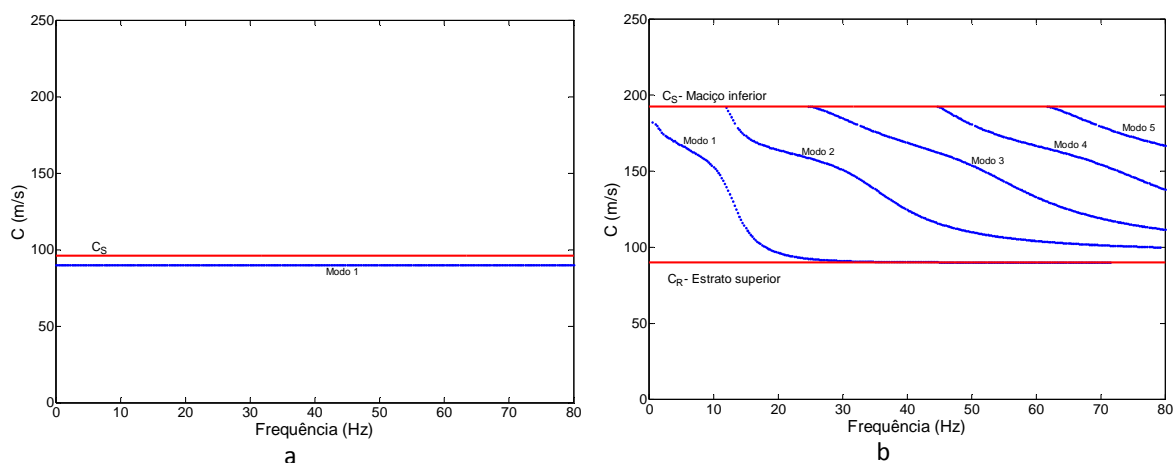


Figura 2.21 – Relações de dispersão. Exemplo. a) Maciço homogéneo; b) Maciço estratificado.

Analisando a Figura 2.22a de imediato se verifica que no caso do maciço homogéneo não ocorre uma alteração significativa da configuração da resposta observada nos pontos A e B. De facto, a menos da diferença temporal entre a chegada dos diferentes tipos de onda, o padrão de deformação é idêntico, principalmente no que toca ao acentuado pico que corresponde à deformação induzida pela propagação de ondas R. Por outro lado, o carácter dispersivo induzido pela estratificação do maciço 2 leva a que ocorra uma alteração muito significativa do padrão de deslocamento vertical induzido nos pontos A e B, a qual se encontra bem patente na Figura 2.22b. A alteração do padrão de resposta em função da distância entre o receptor e a fonte deve-se ao facto de as componentes da onda R associadas a baixas frequências se propagarem mais rapidamente que as componentes de mais alta frequência, tal como pode ser constatado por inspeção da Figura 2.22b.

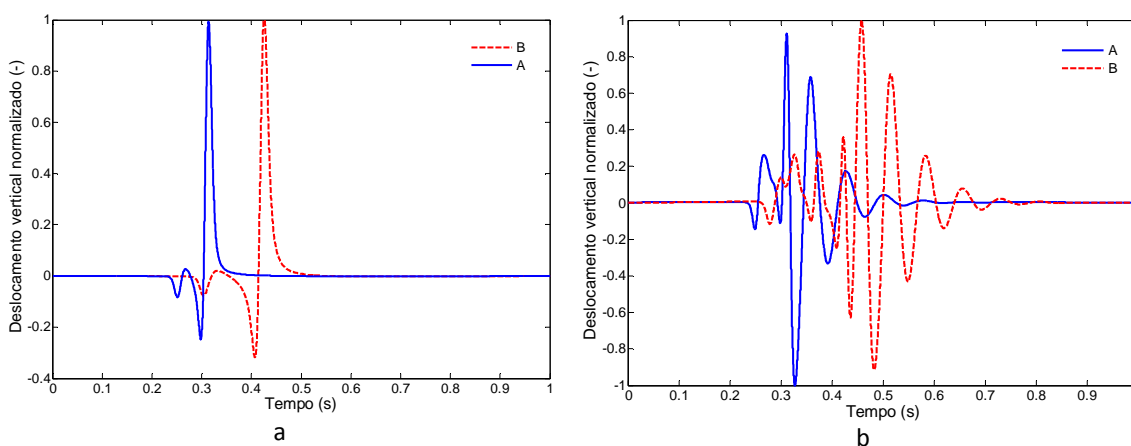


Figura 2.22 – História temporal de deslocamentos verticais em dois pontos à superfície do maciços: a) Maciço homogéneo; b) Maciço estratificado.

Embora o exemplo apresentado apenas excite os modos P-SV (ondas R), as mesmas conclusões são aplicadas aos modos SH, aliás, como já anteriormente mostrado, as ondas L apresentam obrigatoriamente carácter dispersivo.

### 2.3.5.3 Amortecimento por radiação

Quando uma onda se propaga num meio elástico tridimensional assiste-se a uma diminuição progressiva da sua amplitude com o acréscimo da distância entre o ponto de observação e a fonte energética. Este efeito é usualmente designado por amortecimento geométrico ou dissipação geométrica e resulta do espalhamento da energia transportada pela onda por um maior volume à medida que a distância entre a fonte e o ponto de observação aumenta. Como tal, e em contraponto com o amortecimento material, o amortecimento geométrico não está associado à transferência de energia para fora do sistema mas sim ao espalhamento da mesma, o que se reflecte por uma menor quantidade de energia por unidade de volume.

O grau de amortecimento geométrico depende da geometria da “frente de onda”, ou seja, da forma como a onda se espalha em uma, duas ou três dimensões. O primeiro estudo dedicado à avaliação do amortecimento geométrico de ondas induzidas por cargas dinâmicas aplicadas à superfície de um maciço semi-indefinido deve-se a Lamb [28]. O referido estudo teve como base duas situações de interesse prático: o caso de uma carga pontual e o caso de uma carga linear com desenvolvimento infinito.

A aplicação de uma carga pontual à superfície de um maciço é um problema claramente tridimensional, originando a propagação de ondas de acordo com a configuração apresentada na Figura 2.23. Na Figura 2.23a encontram-se representadas esquematicamente as frentes de onda P e S. Dado que, nas circunstâncias indicadas, as ondas volúmicas se propagam em todas as direcções, as respectivas frentes de onda apresentam configuração esférica. Uma vez que a quantidade de energia presente na frente de onda é constante, independentemente da distância entre o ponto de observação e a fonte, a amplitude dos deslocamentos induzidos no interior do maciço diminui na razão  $1/r$ , ao passo que à superfície do maciço a atenuação é inversamente proporcional ao quadrado da distância, ou seja, os deslocamentos atenuam-se na razão de  $1/r^2$ . Tendo em atenção o facto de as ondas R apenas se propagarem junto à superfície do maciço, a sua frente de onda tem uma configuração cilíndrica, tal como se ilustra na Figura 2.23b. Deste modo, os deslocamentos induzidos pelas ondas de R sofrem uma atenuação descrita pela razão  $1/r^{0.5}$ , ou seja, substancialmente inferior ao amortecimento geométrico inerente à propagação de ondas volúmicas.

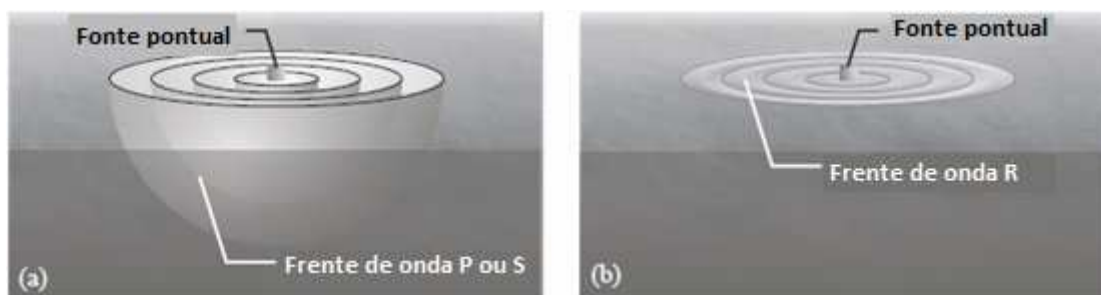


Figura 2.23 – Configuração geométrica da frente de onda em maciços semi-indefinidos e homogêneos: a) ondas volúmicas; b) ondas superficiais (adaptado de [9]).

Como seria expectável, problemas bidimensionais, tais como o do carregamento de faca com desenvolvimento infinito, originam leis de atenuação distintas das anteriormente apresentadas. Nesse caso, as frentes de onda das ondas volúmicas apresentam configuração cilíndrica, o que leva a que a atenuação dos deslocamentos induzidos por ondas P e S seja inversamente proporcional à distância entre a fonte e um ponto de observação à superfície do maciço. Caso o ponto de observação se encontre no interior do maciço, então a lei de atenuação é proporcional a  $1/r^{0.5}$ . No que toca às ondas R, dada a geometria bidimensional do problema, apenas é admissível a sua propagação na direcção paralela à superfície do terreno e, como tal, em problemas bidimensionais, não há lugar a espalhamento da energia transportada, ou seja, o amortecimento geométrico é nulo.

Sintetizando, a atenuação da amplitude do deslocamento em função da distância à fonte pode ser contabilizada através da seguinte relação, válida para materiais elásticos perfeitos:

$$\frac{u}{u_1} = \left( \frac{r_1}{r} \right)^m \quad [2.81]$$

em que  $u$  é a amplitude do deslocamento verificado num ponto à distância  $r$  da fonte;  $u_1$  é a amplitude do deslocamento homólogo num ponto localizado à distância  $r_1$  da fonte;  $m$  é uma constante que toma o valor indicado no Quadro 2.3.

No âmbito da presente dissertação, as situações anteriormente apresentadas são as que constituem maior interesse prático. Chama-se no entanto a atenção que apenas se abordaram casos correspondentes a maciços homogêneos semi-indefinidos em que a solicitação dinâmica é aplicada à superfície dos mesmos. Para situações diferentes da enunciada remete-se o leitor para obras de referência tais como [26, 29-31].

Quadro 2.3 – Coeficientes de amortecimento geométrico

Tipo de onda	Fonte	Localização do ponto de observação	m
Volúmica	Carga pontual	Superfície	2
		Interior do maciço	1
	Carga linear com desenvolvimento infinito	Superfície	1
		Interior do maciço	0,5
Superfície	Carga pontual	Superfície	0,5
	Carga linear com desenvolvimento infinito	Superfície	0

#### 2.3.5.4 Amortecimento material

Conforme já anteriormente referido, quando uma onda se propaga ocorre sempre alguma dissipação de energia, ou seja, parte da energia transportada pela onda sai do sistema mecânico considerado. Este fenómeno de dissipação energética é designado por amortecimento material. Embora verdadeiramente ainda não exista uma compreensão teórica totalmente cabal dos fenómenos que levam à dissipação energética, é possível, sem dúvida, relacioná-la com mecanismos de comportamento não linear de índole microscópica e a fenómenos friccionais inter-partículas, que levam à transformação de parte da energia mecânica em energia térmica sendo esta dissipada sob a forma de calor [32, 33].

A experiência adquirida com a realização de ensaios laboratoriais cíclicos mostra que, mesmo em ensaios conduzidos no domínio das muito pequenas deformações, ocorre sempre alguma dissipação energética [11-13, 34]. Por isso, a modelação reológica do comportamento do solo deve, tanto quanto possível, considerar os fenómenos de amortecimento material. Existem diferentes modelos para atender ao amortecimento material, sendo o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt um dos mais simples e elucidativos do ponto de vista pedagógico. Este modelo pode ser idealizado através da associação em paralelo de uma mola e um amortecedor, em que a mola representa a componente elástica, enquanto a dissipação energética é garantida pelo amortecedor. De acordo com a Figura 2.24, a associação em paralelo dos dois elementos implica que a deformação sofrida por ambos seja idêntica.

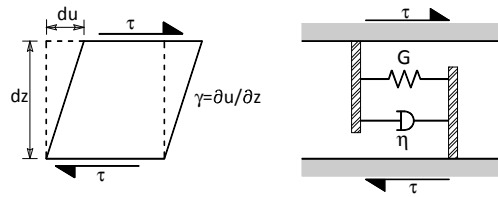


Figura 2.24 – Modelo de Kelvin-Voigt.

O comportamento reológico de um corpo de Kelvin-Voigt sujeito a ações de corte cíclicas pode então ser matematicamente expresso por:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = G\gamma + \eta\dot{\gamma} \quad [2.82]$$

em que:  $\tau$  é a tensão de corte,  $G$  é o módulo de distorção,  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade e  $\gamma$  é a distorção.

Por uma questão de simplicidade, mas sem qualquer perda de generalidade, admitindo uma ação com carácter harmónico e fazendo uso da notação complexa, pode-se escrever:

$$\tau^*(t) = \tau_A e^{i\omega t} \quad [2.83]$$

$$\gamma^*(t) = \gamma_A e^{i(\omega t - \theta)} \quad [2.84]$$

A diferença de fase entre solicitação ( $\tau$ ) e resposta ( $\gamma$ ), representada pelo ângulo de fase  $\theta$ , deve-se à presença do amortecimento. Procedendo à substituição de [2.83] e [2.84] em [2.82] obtém-se a rigidez complexa do sistema:

$$G^* = \frac{\tau^*}{\gamma^*} = G + i\eta\omega \quad [2.85]$$

A parte imaginária presente na equação [2.85] implica a existência de uma diferença de fase de  $\pi/2$  radianos entre as componentes elástica e de amortecimento, sendo que a última varia proporcionalmente com a frequência.

Considerando um ciclo de carga, a energia dissipada,  $\Delta W$ , através de um modelo de amortecimento viscoso corresponde à área assinalada na Figura 2.25 e traduz-se na seguinte equação:

$$\Delta W = \pi\eta\omega\gamma_A \quad [2.86]$$

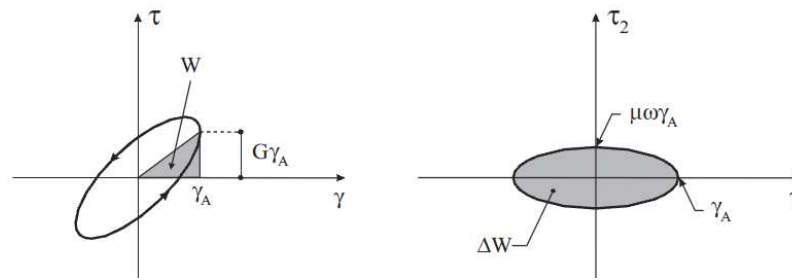


Figura 2.25 – Amortecimento viscoso. Dissipação de energia num ciclo de carga.

O modelo de amortecimento viscoso traduz uma dependência clara entre a energia dissipada e a frequência da excitação. Com efeito, existem diversos materiais em que tal relação entre energia dissipada e frequência de excitação se verifica, nomeadamente alguns elastómetros e fluidos. No entanto, no caso dos solos, a evidência experimental mostra que os fenómenos de amortecimento se devem essencialmente à fricção no contacto inter-partículas, sendo por isso de natureza histerética, isto é, não dependente da frequência de excitação [13, 35-37].

A independência da energia dissipada face à frequência de excitação foi devidamente discutida e analisada por Hardin [35, 38], tendo em conta diversos ensaios experimentais realizados pelos referidos autores. A campanha experimental então desenvolvida compreendeu ensaios com diversos níveis de distorção e frequências de excitação até aproximadamente 600 Hz. A evidência experimental mostra que para que o modelo de Kelvin-Voigt traduza o comportamento constitutivo dos solos no domínio das pequenas deformações é necessário que a viscosidade decresça proporcionalmente com a frequência de excitação, de tal modo que o produto de  $\eta$  por  $\omega$  se mantenha constante. Esta constatação experimental é traduzida matematicamente através da introdução de parâmetros de rigidez complexos e cuja parte imaginária seja constante, ou seja:

$$G^* = G + iG_i = G(1 + 2i\xi) \quad [2.87]$$

em que  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento histerético do solo, o qual é relacionável com a viscosidade da seguinte forma:

$$\xi = \frac{\eta\omega}{2G} \quad [2.88]$$

Recorrendo à teoria dos osciladores com um grau de liberdade demonstra-se que o coeficiente de amortecimento é igual à razão entre a energia dissipada e a energia potencial elástica do sistema dividida por  $4\pi$ , tal como aliás se representa na Figura 2.26.



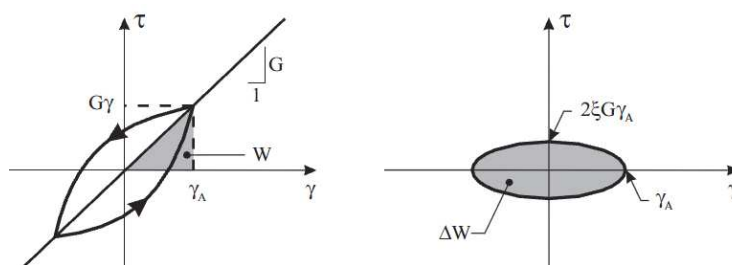


Figura 2.26 – Amortecimento histerético. Dissipação de energia num ciclo de carga.

A exposição acima apresentada assenta num modelo simples com carácter unidimensional. No entanto, a extensão do modelo de amortecimento histerético para estados tridimensionais pode ser efectuada sem grande dificuldade recorrendo ao princípio da correspondência [33]. Desse modo, para um estado de tensão-deformação tridimensional, o amortecimento histerético é tido em conta através da consideração de constantes de Lamé complexas:

$$\lambda^* = \lambda(1 + 2i\xi_\lambda) \quad [2.89]$$

$$\mu^* = \mu(1 + 2i\xi_\mu) \quad [2.90]$$

em que  $\xi_\lambda$  e  $\xi_\mu$  representam, respectivamente, os coeficientes de amortecimento relativos à deformação volumétrica e à deformação distorcional. Como é bem sabido, o comportamento constitutivo dos solos apresenta diferenças substanciais quando são submetidos a deformações volumétricas ou distorcionais. Tendo em atenção este aspecto, do ponto de vista teórico, faz todo o sentido a adopção de coeficientes de amortecimento distintos consoante o tipo de deformação experimentada pelos solos. Por outro lado, atendendo à prática de Engenharia, as dificuldades inerentes à determinação de coeficientes de amortecimento, tanto através de ensaios laboratoriais como através de ensaios de campo, leva a que, regra geral, se adopte o mesmo coeficiente de amortecimento independentemente do tipo de deformação [14, 23]. Conclusões semelhantes podem ser aplicadas ao caso de solos anisotrópicos, quando do ponto de vista teórico se exigiria a determinação de coeficientes de amortecimento distintos consoante a direcção da solicitação.

Os diversos aspectos relativos à propagação de ondas em maciços semi-indefinidos foram até então apresentados tendo como base o comportamento elástico perfeito do meio. As expressões apresentadas ao longo da exposição podem ser generalizadas tendo em conta o amortecimento histerético do solo. Para isso basta proceder à substituição das constantes de Lamé reais por constantes de Lamé complexas e prosseguir a dedução das expressões tendo em conta o mesmo formalismo matemático. Através desse procedimento, Barkan [39] procedeu à extensão da

expressão [2.81] de modo a atender não só ao amortecimento geométrico mas também ao amortecimento material, assumindo o seguinte aspecto:

$$\frac{u}{u_1} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^m e^{-\frac{\omega \xi}{C_i}(r-r_1)} \quad [2.91]$$

em que  $C_i$  é a velocidade de propagação da onda em questão e as restantes variáveis tomam o significado anteriormente apresentado.

A aplicação prática da expressão [2.91] suscita de imediato uma questão relativa aos valores de  $C_i$  e de  $m$  a adoptar, já que o tipo de onda que induz o deslocamento nem sempre é totalmente conhecido *a priori*. Para a estimativa da atenuação do deslocamento verificado à superfície do maciço e a uma distância considerável da fonte de excitação, também esta localizada à superfície do maciço, parece razoável admitir para  $C_i$  o valor da velocidade de propagação das ondas R, já que estas transportam a grande percentagem da energia transmitida ao sistema e são menos atenuadas geometricamente que as ondas volúmicas. No entanto, estudos experimentais levados a cabo por Degrande e Shillemans [40], Kim e Lee [30] e Galvín [41] mostram que, no caso de fontes de excitação móveis, as ondas volúmicas podem apresentar uma contribuição não displicente na resposta total, mesmo para distâncias consideráveis entre o ponto de observação e a fonte de excitação.

Do exposto fica a ideia de que o amortecimento material pode ser simulado através de um modelo hysterético, o que aliás resulta numa formulação matemática atraente dada a sua simplicidade. De facto, este tem sido o maior argumento para a utilização do modelo de amortecimento hysterético em problemas elastodinâmicos, sendo estes obrigatoriamente resolvidos no domínio da frequência ou considerando apenas ondas harmónicas, já que a formulação do modelo hysterético obriga a lidar com entidades complexas [37, 42, 43]. Não obstante, existem algumas questões que não podem deixar de ser devidamente discutidas, nomeadamente ao nível dos conceitos básicos a que um modelo de amortecimento deve obrigatoriamente obedecer.

A formulação de qualquer modelo de amortecimento deve obedecer aos seguintes conceitos básicos: i) o modelo deve ser causal, ou seja, a resposta do sistema deverá ser uma causa da solicitação; ii) o modelo não pode conduzir a amortecimentos negativos.

O segundo requisito é atendido tanto no modelo de amortecimento viscoso como no modelo de amortecimento hysterético. Por outro lado, o modelo de amortecimento hysterético é não causal, ou seja, em termos práticos, existe resposta do sistema antes da aplicação da solicitação. Tal facto

resulta de uma deficiência de fundo do modelo que pode ser provada teoricamente [44]. Para melhor ilustrar este efeito, considere-se o oscilador com um grau de liberdade representado nas Figuras 2.27a e 2.27b, sendo que na primeira se admite um modelo de amortecimento viscoso ao passo que na última se considera um modelo de amortecimento histerético. As propriedades mecânicas dos sistemas são indicadas nas respectivas figuras.

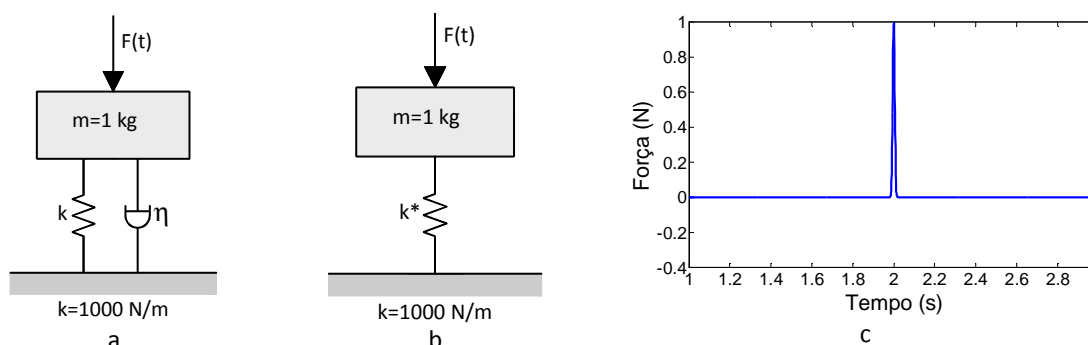


Figura 2.27 – Oscilador de um grau de liberdade: a) amortecimento viscoso; b) amortecimento histerético; c) história temporal da acção.

Na Figura 2.28a apresenta-se a resposta do sistema, considerando ambos os modelos de amortecimento, face à excitação induzida pela força impulsiva com a configuração representada na Figura 2.27c. Neste exemplo considerou-se  $\xi=0,2$  no modelo histerético, ao passo que para o modelo viscoso admitiu-se um valor para o coeficiente de viscosidade que conduzisse, para a frequência natural do sistema, à mesma atenuação que o modelo histerético. Comparando os resultados enunciados por ambos os modelos identifica-se desde logo que o modelo histerético conduz a uma resposta do sistema antecedente à aplicação da solicitação. Para além desse aspecto, é também notória uma ligeira diferença de fase que se verifica entre a resposta calculada por ambos os modelos. Contudo, o nível de amortecimento admitido neste exemplo é muito elevado quando comparado com o amortecimento dos solos no domínio das pequenas deformações. Na Figura 2.28b apresenta-se a resposta do sistema, mas considerando agora um coeficiente de amortecimento de histerético  $\xi=0,05$ , sendo que para o modelo viscoso se adoptou um valor compatível tendo em conta os aspectos anteriormente indicados. Analisando os resultados expressos na Figura 2.28b, conclui-se que a não causalidade do modelo histerético perde relevância para valores de amortecimento histerético moderados a baixos. Para além disso, a diferença de fase identificada na Figura 2.28a passa a ser desprezável na Figura 2.28b.

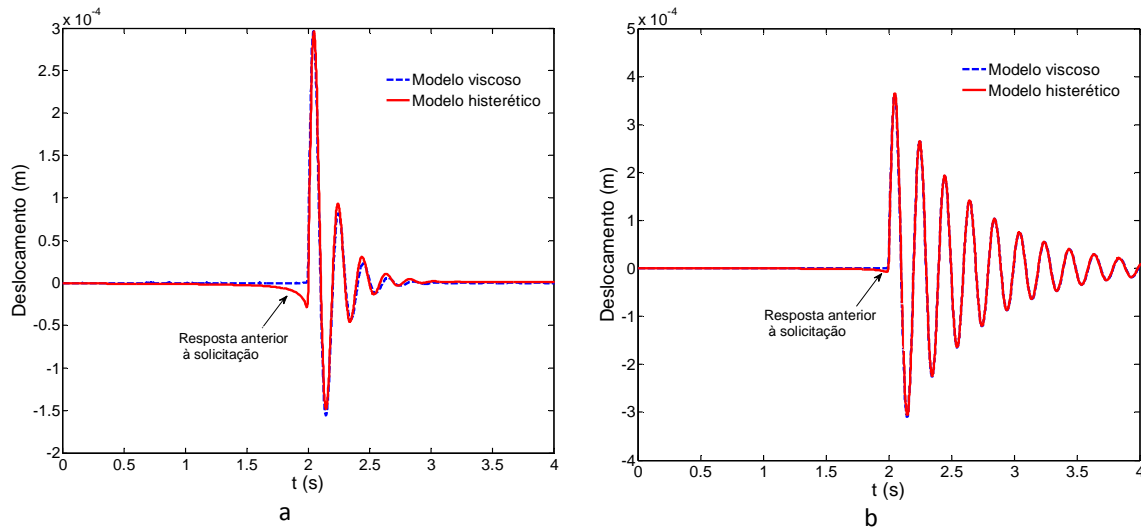


Figura 2.28 – Oscilador de uma grau de liberdade. Deslocamentos verticais da massa: a) sistema muito amortecido; b) sistema pouco amortecido.

Face ao exposto, pode concluir-se que, para valores de amortecimento relativamente baixos, os efeitos nefastos da não causalidade do modelo histerético são minimizados, razão pela qual o modelo é utilizado na grande maioria dos estudos relacionados com propagação de ondas sísmicas [45, 46].

## 2.4 Propagação de vibrações em meios poroelásticos

### 2.4.1 Considerações gerais

Ao longo do presente capítulo a propagação de ondas em maciços terrosos foi retratada à luz da mecânica dos meios contínuos, admitindo o comportamento elástico (ou viscoelástico), linear e monofásico do meio. Como é bem sabido, a realidade física dos meios terrosos é constituída por duas fases, isto é, a fase sólida, correspondente ao esqueleto constituído pelas partículas, e a fase fluida, que corresponde ao fluido intersticial. No caso de formações terrosas secas, os espaços intersticiais encontram-se preenchidos por ar, razão pela qual é perfeitamente admissível considerar que a propagação de ondas elásticas ocorre apenas através do esqueleto sólido do meio, ou seja, considerando o meio terroso como monofásico. No entanto, existem duas outras situações que merecem destaque e para as quais a consideração de um modelo monofásico poderá ser controversa, sendo elas os maciços saturados e os maciços não saturados. A distinção entre meios saturados e meios não saturados deve-se ao facto de nos primeiros o volume intersticial se encontrar totalmente preenchido por água, ao passo que nos segundos o preenchimento é parcial, ou seja, o fluido intersticial apresenta fase gasosa (ar) e fase líquida

(água). No presente estudo não será abordada a questão da propagação de ondas em meios não saturados, remetendo-se o leitor para os estudos desenvolvidos por Degrande et al. [47] e para o recente estado de arte apresentado por Schanz [48].

Relativamente aos maciços saturados, quando ocorre uma perturbação do estado de tensão do meio, a carga incremental é repartida pelas duas fases constituintes através do incremento das tensões efectivas (tensões instaladas no esqueleto sólido) e da geração de excessos de pressão intersticial (pressão instalada no fluido intersticial). Este conceito, usualmente designado por princípio da tensão efectiva, constitui um dos princípios fundamentais da Mecânica dos Solos. A propagação de ondas elásticas em meios porosos saturados implica a interacção entre as fases sólida e líquida, gerando-se excessos de pressão neutra e incrementos de tensão efectiva. Embora existam teorias anteriores para a descrição da propagação de ondas em meios saturados, as primeiras teorias consistentes e generalistas do ponto de vista teórico devem-se a Biot [49, 50].

No estudo de problemas em que o carácter não linear do comportamento constitutivo do solo seja muito relevante, como é exemplo o estudo de problemas de liquefacção do solo, a consideração do meio terroso como multifásico é crucial para a análise dos fenómenos em causa [14]. Por outro lado, em situações em que tal aspecto não tome tanta relevância, é geralmente admissível recorrer a algumas simplificações, como por exemplo através da consideração de análises em termos de tensões totais. Contudo, merece uma referência especial o facto de durante a corrente década se terem desenvolvido diversos modelos teóricos para atender à propagação de vibrações em maciços poroelásticos geradas por cargas móveis [51-56]. Apesar de existirem diversos modelos poroelásticos reportados na bibliografia, na presente dissertação a resposta dos maciços saturados é analisada tendo por base um modelo monofásico para o qual são adoptadas propriedades elásticas equivalentes, constituindo assim uma alternativa ao recurso à teoria de Biot [57].

#### **2.4.2 Teoria de Biot**

Ao contrário das secções anteriores, nas quais a descrição matemática dos problemas foi efectuada com elevado detalhe, na presente secção apenas se apresentam os aspectos gerais da propagação de ondas em meios poroelásticos saturados. Uma análise profunda dos principais aspectos aqui atendidos poderá ser encontrada nas referências bibliográficas [47-50, 58].

À semelhança com o apresentado na secção 2.3.2.1 do presente capítulo, o equilíbrio de um elemento infinitesimal pertencente a um meio poroelástico saturado, indefinido, homogéneo e

isotrópico, expresso em termos de tensões é traduzido pelo seguinte par de equações diferenciais, também designadas por equações de Navier para meios porosos saturados:

$$\mu^s \nabla \cdot \nabla u^s + (\lambda^s + \mu^s + \alpha^2 M) \nabla \nabla \cdot w = \rho \ddot{u}^s + \rho^f \ddot{w} \quad [2.92]$$

$$\alpha M \nabla \nabla \cdot u^s + M \nabla \nabla \cdot w = \rho^f \ddot{u}^s + \frac{\rho_f a}{n} \ddot{w} + \frac{\xi}{n^2} \dot{w} \quad [2.93]$$

Em que: i) os vectores de deslocamentos são representados por  $u^j$ , em que  $j=s$  significa deslocamentos do esqueleto sólido, enquanto  $j=f$  refere-se a deslocamentos do fluido intersticial; ii) o escoamento do fluido relativamente ao esqueleto sólido é traduzido por  $w=n(u^f-u^s)$ , em que  $n$  representa a porosidade do meio; iii) a massa volúmica do meio é dada por  $\rho=\rho^s n+ \rho^f(n-1)$ , em que  $\rho^s$  e  $\rho^f$  representam a massa volúmica das partículas sólidas e do fluido, respectivamente; iv)  $\lambda^s$  e  $\mu^s$  são as constantes de Lamé relativas ao esqueleto sólido; v)  $a$  é um factor para atender à tortuosidade do meio; vi)  $\xi$  é um factor que atende à interacção viscosa entre a fase líquida e o esqueleto sólido; vii)  $M$  e  $\alpha$  são os coeficientes de Biot, dependentes do módulo de deformação volumétrica dos vários constituintes do meio, de tal modo que:

$$\alpha = 1 - \frac{K_d}{K_s} \quad [2.94]$$

$$\frac{1}{M} = \frac{n}{K_f} + \frac{\alpha - n}{K_s} \quad [2.95]$$

Nas anteriores expressões,  $K_d$ ,  $K_s$  e  $K_f$  representam o módulo de deformação volumétrica do esqueleto sólido, das partículas sólidas e do fluido intersticial, respectivamente.

Através da decomposição de Helmholtz do campo vectorial dos deslocamentos, as equações de Navier podem ser desacopladas em pares de equações que descrevem a propagação de ondas longitudinais, ondas P, e ondas de corte, ondas S. Devido ao acoplamento viscoso entre as duas fases que constituem o meio, as ondas volúmicas em meios poroelásticos apresentam carácter dispersivo.

Tendo em consideração as equações [2.92] e [2.93] e após alguma manipulação matemática, chega-se à seguinte relação de dispersão das ondas P:

$$\left(k_p^2 C_1^2 - \omega^2\right) \left(k_p^2 C_2^2 - \omega^2\right) + \frac{i\omega^2}{\chi} \left(k_p^2 C_0^2 - \omega^2\right) = 0 \quad [2.96]$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são as velocidades de propagação de ondas P no sólido poroso não dissipativo, enquanto  $C_0$  corresponde à velocidade de propagação limite para baixas frequências (as

expressões matemáticas que permitem a definição destes parâmetros podem ser encontradas em [58]). A frequência adimensional  $\chi$  é definida através da razão entre a frequência de excitação  $\omega$  e a frequência característica do sistema dada por:

$$\omega_0 = \frac{gnpp^f}{k_0\rho^f(ap-n\rho^f)} \quad [2.97]$$

na qual as variáveis ainda não definidas tomam o seguinte significado:  $g$  é a aceleração da gravidade e  $k_0$  é a permeabilidade do meio poroso.

A lei de dispersão das ondas P (equação [2.96]) permite obter a relação entre os números de onda complexos,  $k_p$ , e a frequência de excitação  $\omega$ . Por sua vez, a velocidade de propagação da onda é determinada pela razão entre a frequência e a parte real do número de onda. Tratando-se de uma relação biquadrática existem duas soluções admissíveis para a relação de dispersão, o que significa que num meio poroelástico se propagam duas ondas P ( $P_j$  com  $j=1,2$ ), com velocidades de propagação e características de atenuação distintas. No presente contexto, a velocidade de propagação das ondas P será definida como  $C_{jp}=\omega/\text{Re}(k_{jp})$  e o coeficiente de atenuação será definido como  $q_{jp}=\text{Im}(k_{jp})$ .

Ainda através das equações de Navier e da relação de dispersão das ondas P é possível definir um coeficiente que quantifique o deslocamento da fase líquida relativamente ao esqueleto sólido durante o processo de propagação de ondas P. Esse coeficiente,  $\text{cop}_j$ , é definido da seguinte forma [47]:

$$\text{cop}_j = 1 - \frac{(k_{jp}^2 \alpha M - \omega^2 \rho_f) n}{k_{jp}^2 M n^2 - \omega^2 \rho_f a n + i \omega \xi} \quad [2.98]$$

Relativamente às ondas S, seguindo o mesmo formalismo matemático chega-se à seguinte relação de dispersão:

$$(k_s^2 C_{s1}^2 - \omega^2) + \frac{i}{\chi} (k_s^2 C_{s0}^2 - \omega^2) = 0 \quad [2.99]$$

em que  $C_{s1}$  é a velocidade de propagação das ondas S no meio poroso não dissipativo e  $C_{s0}$  corresponde ao limite da velocidade de propagação das ondas de corte para baixas frequências.

Como se pode verificar, a relação de dispersão das ondas S é quadrática, o que significa que apenas um tipo de onda S é passível de se propagar num meio poroso saturado. A velocidade de

propagação das ondas S é dada por  $C_s = \omega / \text{Re}(k_s)$ , sendo que a parte imaginária do número de onda reflecte a atenuação da mesma.

Seguindo o raciocínio apresentado para as ondas P, o coeficiente que reflecte o movimento da fase líquida em relação ao esqueleto sólido,  $\cos$ , é dado por [47]:

$$\cos = 1 - \frac{-\omega^2 \rho_f n}{-\omega^2 \rho_f a n + i\omega \xi} \quad [2.100]$$

Comparando as relações de dispersão das ondas volúmicas em meios porosos saturados com as relações de dispersão para meios monofásicos conclui-se que as primeiras apresentam carácter dispersivo, para além do facto de se propagarem dois tipos de ondas P. Contudo, para melhor discernir as diferenças entre a propagação de ondas volúmicas em meios monofásicos e em poroelásticos saturados, considere-se um pequeno exemplo que permite elucidar a implicação dos referidos aspectos nas aplicações práticas no âmbito da Engenharia Civil. Admita-se então um meio poroso saturado em que  $n=0,4$  e em que o esqueleto sólido apresenta as seguintes propriedades: módulo de elasticidade,  $E_s=50 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ; coeficiente de Poisson,  $\nu=1/3$ ; massa volúmica das partículas sólidas,  $\rho_s=2650 \text{ kg/m}^3$ ; módulo de deformação volumétrica das partículas,  $K_s=36 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ . Caso o solo estivesse totalmente seco, a velocidade de propagação das ondas volúmicas seria aproximadamente igual a 224 m/s e 112 m/s para as ondas P e ondas S, respectivamente. No entanto, considere-se que o solo está saturado e que o fluido intersticial apresenta as seguintes propriedades: massa volúmica do fluido,  $\rho_f=1000 \text{ kg/m}^3$ ; módulo de deformação volumétrica do fluido,  $K_s=2,2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ; viscosidade dinâmica,  $\eta_d=1,002 \times 10^3 \text{ Ns/m}$ . Considere-se ainda que a permeabilidade do meio,  $k_0$ , toma o valor de  $1 \times 10^{-4} \text{ m/s}$  e que a tortuosidade pode ser aproximada através da porosidade de acordo com a relação proposta por Berryman [59], tomando deste modo o valor de 1,75.

Considerando as propriedades indicadas, a frequência característica do solo saturado é igual a  $\omega_0=2,53 \times 10^4 \text{ rad/m}$ , o que representa um valor extremamente elevado quando comparado com o conteúdo em frequência dos problemas com interesse para a Engenharia Civil. Note-se ainda que a frequência característica do solo saturado aumenta na razão inversa da permeabilidade, razão pela qual, para solos menos permeáveis, é expectável um valor ainda mais elevado de  $\omega_0$ .

Nas Figuras 2.29 e 2.30 apresenta-se a velocidade de propagação das ondas volúmicas e os coeficientes de atenuação em função da frequência adimensional  $\chi$ , respectivamente.



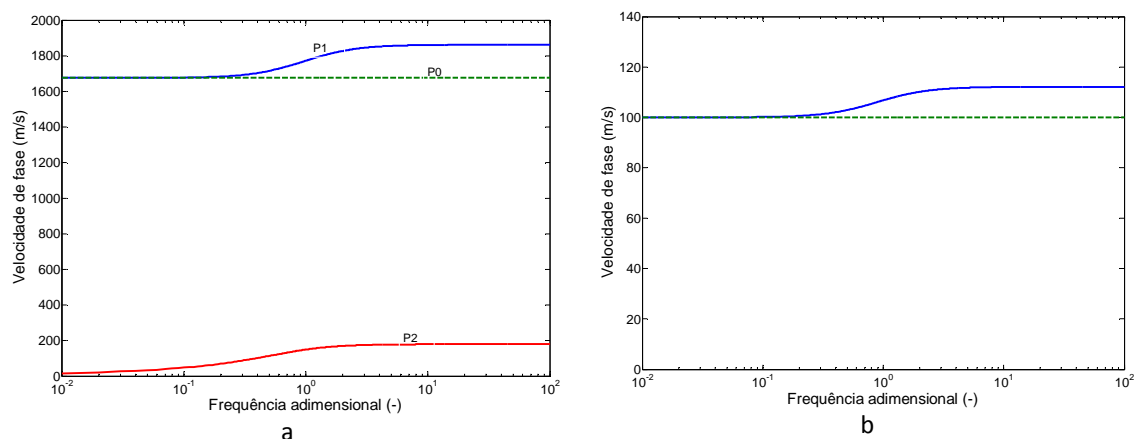


Figura 2.29 – Velocidade de propagação de ondas volúmicas num meio poroelástico: a) ondas P; b) ondas S.

Relativamente à velocidade de propagação das ondas P, verifica-se que a velocidade das duas ondas é muito distinta, sendo que para valores reduzidos de  $\chi$ , a velocidade de propagação da onda lenta (P2) é inferior à velocidade de propagação das ondas S no meio poroso saturado (ver Figura 2.29b). Para além disso, de acordo com o representado na Figura 2.30, a onda P2 é muito mais atenuada que as restantes ondas volúmicas, principalmente para valores baixos de  $\chi$ . Outro aspecto interessante refere-se ao facto de as ondas P1 e S apresentarem características “pouco dispersivas” no conteúdo em frequência interessado por problemas de vibrações induzidas por tráfego ( $\chi \ll 0,1$ ).

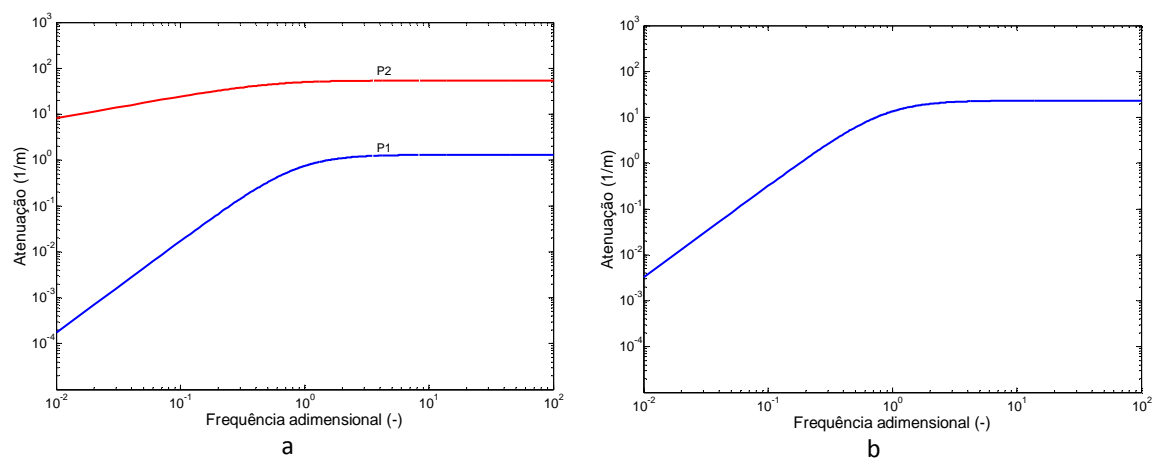


Figura 2.30 – Atenuação de ondas volúmicas num meio poroelástico: a) ondas P; b) ondas S.

Passando à análise dos coeficientes  $c_{op}$  e  $c_{os}$ , compete referir que para valores baixos de  $\chi$  ocorre um elevado acoplamento viscoso que praticamente anula a possibilidade de movimento relativo entre a fase fluida e o esqueleto sólido. Este aspecto encontra-se traduzido nas Figuras 2.31a e 2.31b, através do valor unitário apresentado pelo módulo dos coeficientes relativos às ondas P1 e S e pelo ângulo de fase nulo que os mesmos apresentam para valores reduzidos de

$\chi$  (Figura 2.32). Contudo, a Figura 2.32a revela que a propagação da onda P2 induz movimento relativo entre a fase sólida e fluída, sendo os movimentos desfasados de  $\pi$  radianos.

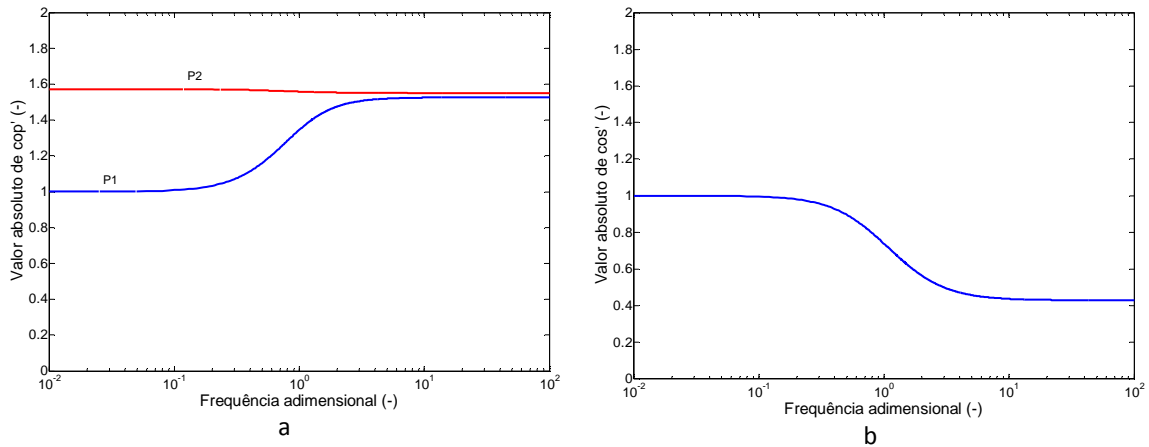


Figura 2.31 – Valor absoluto de cop: a) ondas P; b) ondas S.

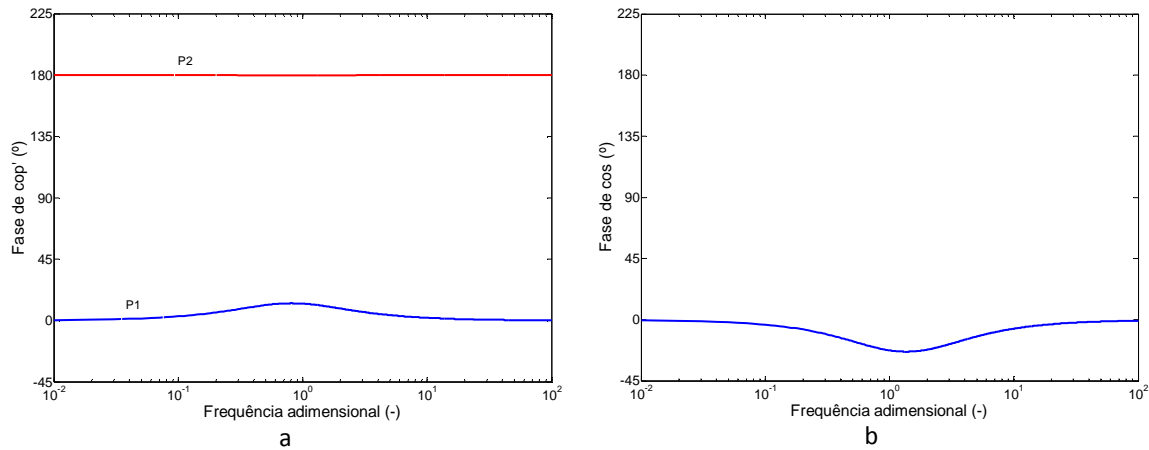


Figura 2.32 – Fase de cop: a) ondas P; b) ondas S.

Tendo em conta o facto de as ondas P2 serem fortemente atenuadas conclui-se que, para o conteúdo em frequência interessante na grande maioria dos problemas de Engenharia Civil, a resposta do solo ocorre essencialmente sob a forma de um meio monofásico constituído pela mistura da fase sólida e fluída, apresentando uma compressibilidade menor face ao esqueleto sólido devido à presença de fluido intersticial. Deste modo, para valores reduzidos de  $\chi$  é admissível analisar o meio poroso saturado através de um modelo monofásico, admitindo as seguintes propriedades elásticas equivalentes:

$$\rho_{eq} = \rho_f n + \rho_s (1 - n) \tag{2.101}$$

$$\mu_{eq} = \mu_s \tag{2.102}$$

$$\lambda_{eq} = \lambda_s + \frac{K_f}{n} \tag{2.103}$$

Para o exemplo considerado, a consideração das propriedades equivalentes conduz às seguintes velocidades de fase das ondas P e S:  $C_p=1674$  m/s e  $C_s=100$  m/s. As velocidades de propagação “equivalentes” estão representadas na Figura 2.29 através das linhas interrompidas, podendo verificar-se que correspondem à velocidade de propagação das ondas P1 e S para valores reduzidos de  $\chi$ .

Por último, convém mencionar que embora um meio poroso saturado possa ser simplifadamente tratado como um meio monofásico, existem diversas situações em que tal não é admissível. Exemplos disso são os casos em que o conhecimento da história temporal das tensões efectivas ou das pressões neutras seja fundamental, como ocorre na maioria dos problemas em que estejam envolvidos cenários de rotura do solo. Contudo, em problemas envolvendo pequenas deformações e em que os parâmetros de interesse sejam expressos em termos de deslocamentos (ou grandezas directamente deriváveis dos deslocamentos), é, regra geral, aceitável adoptar parâmetros elásticos equivalentes e considerar o meio como monofásico, ou, de acordo com a nomenclatura usual no âmbito da Mecânica dos Solos, proceder a uma análise elástica em termos de tensões totais.

## 2.5 Considerações finais

No capítulo que agora culmina expõem-se os princípios basilares da teoria de propagação de ondas em meios elásticos. Sendo um capítulo didáctico, procura-se que tenha um nível de abstracção considerável, o que permite a sua leitura independente do âmbito da presente dissertação, abordando-se algumas questões nem sempre familiares na Engenharia Civil convencional. Para além da apresentação dos conceitos fundamentais da teoria de propagação de ondas, fazem-se pequenas chamadas de atenção para alguns aspectos particulares com os quais se antecipa a resposta a algumas dúvidas que possam ser suscitadas nos capítulos subsequentes.

A teoria generalista apresentada ao longo do capítulo constitui a base da formulação teórica inerente aos modelos analíticos e numéricos que se expõem nos capítulos seguintes da presente dissertação, estando assim estabelecida a sua relação intrínseca e fundamental. Do ponto de vista mais particular, as considerações teóricas explanadas ao longo do capítulo visam justificar algumas das opções consideradas ao longo de toda a dissertação, nomeadamente no que se refere à modelação constitutiva de maciços geotécnicos.



## 3. Modelação da resposta dinâmica de maciços estratificados

---

### 3.1 Introdução

O presente capítulo versa sobre o desenvolvimento e aplicação de metodologias, que se enquadram genericamente no Método dos Integrais Transformados (MIT), visando a construção de modelos para a análise da resposta de maciços estratificados face a acções dinâmicas com carácter móvel ou fixo.

Uma vez que o MIT constitui uma metodologia de análise pouco divulgada em comparação com os métodos numéricos mais usuais, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) ou o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o capítulo inicia-se pela apresentação dos aspectos gerais do método, clarificando-se as suas vantagens e limitações em relação aos outros métodos numéricos referidos.

Posteriormente, apresentam-se duas formulações baseadas no MIT que permitem determinar, num referencial cartesiano, a resposta dinâmica em qualquer ponto do maciço face à aplicação de uma acção harmónica à superfície do mesmo. Com efeito, no contexto de aplicação do MIT, as formulações semi-analíticas para determinação de funções de Green (funções fundamentais) podem ser agrupadas em dois grandes grupos: formulações baseadas no conceito de flexibilidade (ou transferência) e formulações baseadas no conceito de rigidez. Nas formulações baseadas no conceito de transferência os deslocamentos e tensões numa das interfaces de cada estrato são relacionados com as grandezas homólogas verificadas na interface oposta. Esta formulação é usualmente designada por método das matrizes de transferência ou Método de Haskell-Thomson [60, 61]. Em contraponto, as formulações baseadas no conceito de rigidez, recorrem a conceitos similares aos inerentes ao MEF, sendo os deslocamentos das interfaces directamente relacionados com as tensões aí experimentadas [18, 33, 62, 63].

No presente capítulo são apresentados modelos baseados nos dois conceitos indicados, sendo de referir que ambas as metodologias têm sido amplamente utilizadas por diversos autores no estudo da resposta de maciços terrosos solicitados por acções de tráfego [64-72].

Os dois modelos apresentados foram implementados na plataforma MATLAB 2009, tirando partido das potencialidades oferecidas por esta plataforma para o desenvolvimento de esquemas

de computação paralela. A apresentação do formalismo matemático dos modelos é seguida pela apresentação de exemplos de validação através de comparação com resultados obtidos por outros autores.

Por último, as potencialidades dos modelos são discutidas tendo por base um estudo teórico sobre a resposta de maciços face a acções de carácter móvel aplicadas à sua superfície.

### **3.2 Método dos integrais transformados**

Existem actualmente diversas metodologias para a análise de maciços submetidos a cargas dinâmicas, podendo estas apresentar posição geométrica fixa ou móvel. Embora alguns destes métodos se devam aos trabalhos pioneiros desenvolvidos no final do século XIX e início do século XX por Lamb, Stokes e Kelvin, o desenvolvimento dos meios computacionais tem permitido o surgimento de diversas metodologias semi-analíticas e numéricas com elevado grau de acuidade e complexidade [73]. De um modo generalista, os modelos de simulação podem ser divididos em três grupos: i) formulações analíticas; ii) formulações numéricas; iii) formulações semi-analíticas.

A aplicação prática de métodos analíticos é bastante limitada, já que apenas são conhecidas soluções analíticas para problemas com geometria e condições de carregamento muito específicas, dificilmente compatíveis com a generalidade das situações práticas.

Os métodos numéricos ocupam grande destaque, dada a sua versatilidade e facilidade de aplicação a geometrias arbitrárias [41, 74-77]. De entre os vários métodos numéricos actualmente disponíveis, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é pela sua natureza o mais divulgado. Com efeito, trata-se de um método extremamente versátil, permitindo o recurso a análises dinâmicas não lineares e a consideração de geometrias muito complexas. No entanto, o MEF ajusta-se muito bem a meios circunscritos, isto é, as condições de fronteira têm de estar totalmente definidas, sendo por isso necessário proceder à truncagem do domínio de análise. Para além deste aspecto, o número de graus de liberdade envolvidos numa análise tridimensional através do MEF é extremamente elevado, principalmente quando a análise envolve frequências de excitação altas e é condição necessária a obtenção da resposta do maciço a grande distância da fonte de excitação [78-80]. Deste modo, embora do ponto de vista teórico uma análise tridimensional através do MEF não apresente dificuldades especiais, do ponto de vista computacional o problema fica comprometido dado o elevado número de graus de liberdade envolvidos [8, 80]. Em alternativa

ao MEF, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) permite reduzir consideravelmente o esforço computacional visto que apenas as fronteiras do problema têm de ser discretizadas.

Uma outra forma de resolver o problema consiste no recurso a métodos semi-analíticos, como o Método dos Integrais Transformados (MIT). Nos últimos anos esta metodologia tem conhecido grandes avanços em termos de aplicabilidade, principalmente devido ao reduzido tempo de computação exigido e pela vantagem de permitir tratar problemas de carácter “infinito” de uma forma directa, sem exigir tratamentos especiais para as fronteiras artificiais como ocorre na aplicação do MEF [65, 81-85]. Em contraponto com os métodos numéricos tradicionais, no MIT o meio estrutural é apenas parcialmente discretizado, sendo a resposta do sistema descrita através do recurso a técnicas transformadas, tais como a transformada de Fourier (mais usual), transformadas de Henkel, transformadas de Laplace, entre outras [86]. No entanto, o MIT apresenta um campo de aplicação muito restrito quando comparado com o MEF: i) não permite a consideração de efeitos não lineares; ii) impõe restrições ao nível da geometria do maciço, sendo que a sua estratificação tem de ser obrigatoriamente horizontal e paralela à superfície do terreno; iii) a inclusão de heterogeneidades locais não é admissível no método; iv) a consideração de certas condições iniciais é difícil, senão mesmo impossível [86, 87]. Sem embargo, apesar das limitações apresentadas, o recurso ao MIT permite uma melhor interpretação física dos problemas, para além de facilitar o seu tratamento analítico de uma forma elegante, principalmente no que toca à consideração de cargas dinâmicas móveis. Com o intuito de colmatar algumas das limitações do MIT, é de destacar o desenvolvimento recente de modelos que permitem o acoplamento do MIT e do MEF, tirando vantagem dos dois métodos [88-90].

Face ao exposto, pode concluir-se que o MIT constitui um método atractivo para a resolução de problemas físicos envolvendo sistemas de equações diferenciais parciais, principalmente quando a problemática em estudo envolve domínios de grandes dimensões. No caso de problemas elastodinâmicos, a tradução matemática da realidade física é materializada atendendo às equações de Navier, apresentadas no Capítulo 2, e às condições de fronteira. Metodologias mais usuais, como o MEF ou o MEC, implicam a discretização do domínio de análise, isto é, a sua divisão em pequenas porções, para as quais são estabelecidas as equações de equilíbrio dinâmico e posteriormente integradas numericamente [77, 78, 91]. Alternativamente, o MIT tira partido das propriedades das operações transformadas e permite que o domínio não seja discretizado na sua totalidade, sendo as equações diferenciais parciais transformadas em equações diferenciais ordinárias [82, 85, 87, 92, 93]. No contexto da presente dissertação recorre-se à aplicação de transformadas de Fourier relativas às variáveis espaciais  $x$  ( $x \rightarrow k_1$ ) e  $y$  ( $y \rightarrow k_2$ ) e à variável temporal  $t$  ( $t \rightarrow \omega$ ), tal como indicado:

$$\tilde{f}(k_1, k_2, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, t) e^{-i(k_1 x + k_2 y + \omega t)} dx dy dt \quad [3.1]$$

De acordo com a expressão [3.1] apenas a variável  $z$  permanece no domínio espacial. As imagens de Fourier de  $x$  e  $y$  serão designadas por números de onda,  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente, e a imagem de Fourier de  $t$  por frequência,  $\omega$ .

Tirando partido das propriedades das funções transformadas, a resolução do sistema de equações de Navier é bastante simples, podendo realizar-se de forma totalmente analítica ou recorrendo a procedimentos numéricos em que a discretização do domínio ocorre apenas ao longo da direcção  $z$  [37]. Uma vez que o objectivo final é a obtenção da resposta no domínio espaço-tempo, a resposta no domínio número de onda – frequência (resultado da resolução do sistema de equações diferenciais) tem de ser transformada novamente para o domínio inicial, recorrendo-se para isso a uma operação de transformação de Fourier inversa:

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_1, k_2, z, \omega) e^{i(k_1 x + k_2 y + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega \quad [3.2]$$

O formalismo matemático utilizado no MIT encontra-se sumariado na Figura 3.1.

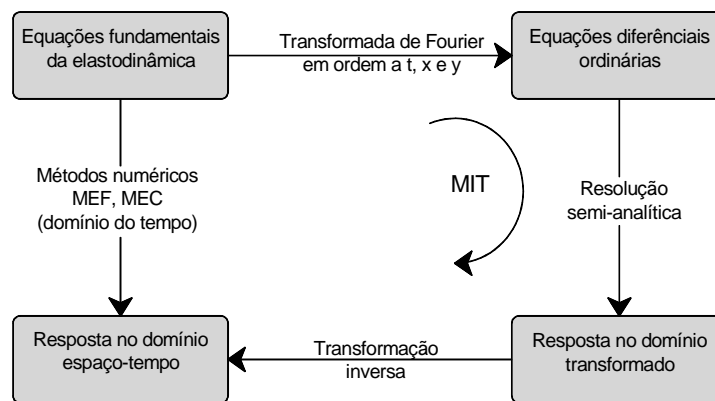


Figura 3.1 – Metodologia de resolução de problemas elastodinâmicos através do MIT.

No caso de solicitações com variação temporal harmónica, a operação de transformação é ainda mais simples, já que tanto a acção como a resposta podem ser descritas da seguinte forma genérica:

$$g(x, y, z, t) = f(x, y, z) e^{i\omega t} \quad [3.3]$$

em que a função  $f$  representa a amplitude da grandeza descrita pela função  $g$ , podendo configurar-se como uma entidade complexa.



Neste caso, para a descrição da função  $g$  basta o conhecimento da frequência de excitação,  $\omega$ , e da função de amplitude  $f$ , que é independente da variável temporal,  $t$ . Tendo em atenção este aspecto a tripla transformada de Fourier e respectiva transformada inversa podem ser simplificadas do seguinte modo:

$$\tilde{f}(k_1, k_2, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{-i(k_1 x + k_2 y)} dx dy \quad [3.4]$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_1, k_2, z, \omega) e^{i(k_1 x + k_2 y)} dk_1 dk_2 \quad [3.5]$$

Embora a grande maioria dos métodos para avaliação de funções de Green sejam baseados em análises no domínio da frequência [62, 93-95], deve ser feita uma chamada de atenção para os recentes desenvolvimentos para avaliação de funções de Green no domínio do tempo [96-98], sendo que estes métodos, embora não tratados na presente dissertação, deverão receber a devida atenção já que poderão ser promissores no estudo de vibrações induzidas por tráfego.

Em jeito de esclarecimento, recorde-se que se entende por função de Green a função que, dependendo das condições de fronteira, fornece a resposta no ponto de observação no instante de observação motivada por uma acção de magnitude unitária aplicada no ponto de aplicação no instante de emissão.

### 3.3 Método das matrizes de transferência

#### 3.3.1 Considerações gerais

O método das matrizes de transferência, também conhecido por método de Haskell-Thomson, constitui uma metodologia semi-analítica para a resolução de problemas elastodinâmicos muito económica do ponto de vista computacional visto que, independentemente do número de estratos considerados na modelação do maciço, a dimensão máxima das matrizes utilizadas não ultrapassa 6x6. Esta é habitualmente apontada como uma das vantagens do método, justificando a sua vasta utilização na resolução de diversos problemas elastodinâmicos [63, 65, 71, 72, 81, 84, 85, 99]. Para além desse facto, a resolução de problemas elastodinâmicos através deste método ocorre de forma totalmente analítica, isto é, sem que seja necessário recorrer à discretização do meio na direcção perpendicular à superfície do maciço. Embora a versão original do método tenha sido desenvolvida na década de 50 do século passado, na presente dissertação segue-se de perto a formulação proposta por Sheng et al. [71, 92] e Andersen e Clausen [85].

### 3.3.2 Matrizes de transferência de deslocamentos (flexibilidade) e de tensões

Para a introdução do conceito de transferência de deslocamentos, ou matriz de flexibilidade, considere-se um maciço semi-indefinido estratificado, no qual todos os estratos estão orientados segundo a direcção horizontal, de acordo com o ilustrado na Figura 3.2.

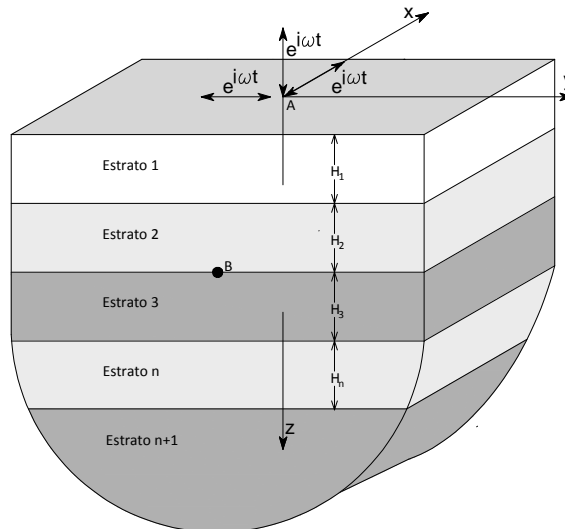


Figura 3.2 – Maciço com estratificação paralela à superfície horizontal.

Considerando uma carga unitária em cada uma das direcções cartesianas com variação temporal harmónica,  $e^{i\omega t}$ , aplicada no ponto A localizado à superfície do terreno, os deslocamentos verificados no ponto B, localizado no topo de um qualquer estrato do meio, podem ser organizados da seguinte forma matricial:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad [3.6]$$

em que as colunas da matriz [Q] representam a amplitude dos deslocamentos no ponto B induzidos por cada uma das componentes da acção P aplicada no ponto A. Deste modo, a primeira coluna de [Q] representa os deslocamentos nas três direcções coordenadas induzidos pela componente segundo a direcção x da força P, a segunda coluna as componentes do deslocamento induzido pela componente segundo a direcção y e, por último, a terceira coluna refere-se aos deslocamentos induzidos pela componente vertical da força P.

Os termos da matriz [Q] são usualmente designados por funções de Green de deslocamentos, correspondendo a matriz [Q] à matriz de flexibilidade dinâmica estacionária de A para B.

Considere-se agora que a superfície do maciço está submetida à acção de uma força harmónica uniformemente distribuída, cujas componentes são:  $p_x(x,y,0)e^{i\omega t}$ ,  $p_y(x,y,0)e^{i\omega t}$ ,  $p_z(x,y,0)e^{i\omega t}$ .

Aplicando o princípio da sobreposição dos efeitos, a resposta no ponto genérico B pode ser formalizada do seguinte modo,

$$\begin{bmatrix} u_{x,B}(x, y, \omega) \\ u_{y,B}(x, y, \omega) \\ u_{z,B}(x, y, \omega) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [Q(x-\xi, y-\zeta, \omega)] \begin{bmatrix} p_x(\xi, \zeta) \\ p_y(\xi, \zeta) \\ p_z(\xi, \zeta) \end{bmatrix} d\xi d\zeta \quad [3.7]$$

A equação [3.7] constitui uma operação de convolução. Tirando partido das operações através de transformadas de Fourier, a convolução no domínio transformado passa a uma simples operação de multiplicação. Desta forma, através de operações de transformação de todas as grandezas intervenientes para o domínio do número de onda-frequência, a equação [3.7] resulta numa simples operação de multiplicação:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{x,B}(k_1, k_2, \omega) \\ \tilde{u}_{y,B}(k_1, k_2, \omega) \\ \tilde{u}_{z,B}(k_1, k_2, \omega) \end{bmatrix} = [\tilde{Q}(k_1, k_2, \omega)] \begin{bmatrix} \tilde{p}_x(k_1, k_2) \\ \tilde{p}_y(k_1, k_2) \\ \tilde{p}_z(k_1, k_2) \end{bmatrix} \quad [3.8]$$

Uma vez que todas as grandezas intervenientes na equação [3.8] se encontram no domínio transformado, a matriz  $[Q(k_1, k_2, \omega)]$  passa a designar-se como matriz de flexibilidade no domínio transformado.

Raciócinio análogo ao utilizado para a estabelecer a matriz  $[Q]$  (e a sua homóloga no domínio transformado) pode ser estendido a outras grandezas que não deslocamentos, como por exemplo a tensões. Tendo em consideração o esquema representado na Figura 3.2, o ponto B pertence à interface superior do estrato designado por  $n$ . Uma vez que o estrato é horizontal e paralelo à superfície do terreno, apenas três componentes do tensor das tensões actuam numa faceta com a orientação da interface e que inclui o ponto B, sendo elas:  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ . Agrupando a amplitude das tensões dinâmicas estacionárias que actuam no plano da interface é possível estabelecer a matriz  $[U]$ , designada como matriz de transferência de tensões dinâmicas no plano de interface, a qual permite estabelecer uma relação entre a amplitude da força aplicada no ponto A e as tensões que actuam na faceta horizontal que inclui o ponto B:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xz,B} \\ \tilde{\sigma}_{yz,B} \\ \tilde{\sigma}_{zz,B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & \tilde{U}_{12} & \tilde{U}_{13} \\ \tilde{U}_{21} & \tilde{U}_{22} & \tilde{U}_{23} \\ \tilde{U}_{31} & \tilde{U}_{32} & \tilde{U}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \end{bmatrix} \quad [3.9]$$

Porém, para que o estado de tensão num ponto pertencente a um meio elástico e isotrópico esteja totalmente definido, é necessário o conhecimento de seis componentes do tensor das tensões. Assim sendo, para além da relação expressa em [3.9], é necessário estabelecer uma

relação entre a força  $P$ , aplicada no ponto  $A$ , e as tensões que actuam nas facetas com orientação normal ao plano de estratificação e que incluem o ponto  $B$ . Essa relação é traduzida pela matriz  $[V]$ , aqui designada como matriz de transferência de tensões dinâmicas fora do plano de interface:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{xy,B} \\ \tilde{\sigma}_{xx,B} \\ \tilde{\sigma}_{yy,B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11} & \tilde{V}_{12} & \tilde{V}_{13} \\ \tilde{V}_{21} & \tilde{V}_{22} & \tilde{V}_{23} \\ \tilde{V}_{31} & \tilde{V}_{32} & \tilde{V}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \end{bmatrix} \quad [3.10]$$

No decorrer do presente capítulo são introduzidas metodologias para determinar as componentes das matrizes  $[Q]$ ,  $[U]$  e  $[V]$  no domínio transformado, as quais permitem avaliar a reposta em termos de tensões e de deslocamentos experimentados num qualquer ponto do maciço devido a uma solicitação dinâmica, com posição geométrica fixa ou variável, aplicada à superfície do maciço.

### 3.3.3 Dedução das matrizes de transferência no domínio transformado

#### 3.3.3.1 Estrato isolado

Tal como já referido, o princípio básico do método de Haskell-Thomson reside no estabelecimento de uma relação entre tensões e deslocamentos verificados em ambas as interfaces de um estrato com orientação horizontal. Tendo em conta este pressuposto, considere-se um estrato genérico,  $j$ , que apresenta uma espessura  $h_j$ , tal como se ilustra esquematicamente na Figura 3.3. Considere-se ainda um referencial localizado na interface superior do estrato de modo a que na fronteira superior  $z=0$ , ao passo que na fronteira inferior a coordenada  $z$  toma o valor  $h_j$ .

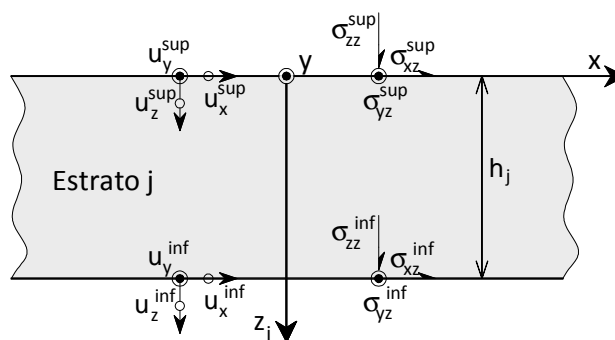


Figura 3.3 – Representação esquemática das condições de fronteira de um estrato isolado.

Admitindo uma excitação harmónica, toda e qualquer grandeza interveniente no problema pode ser matematicamente traduzida em correspondência com o apresentado na expressão [3.3]. Deste modo, no domínio transformado a amplitude da grandeza  $X$  será denotada como  $X_\omega(k_1, k_2, z)$ .

Uma vez que o estrato é horizontal, apenas três componentes do tensor das tensões actuam nas facetas com orientação paralela às interfaces. Atendendo ao referencial local, os deslocamentos e tensões que actuam na interface superior são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{\tilde{u}_{\omega j}\}^{\text{sup}} &= \{\tilde{u}_{x,\omega}^j(k_1, k_2, 0), \tilde{u}_{y,\omega}^j(k_1, k_2, 0), \tilde{u}_{z,\omega}^j(k_1, k_2, 0)\}^{\text{T}} \\ \{\tilde{\sigma}_{\omega j}\}^{\text{sup}} &= \{\tilde{\sigma}_{xz,\omega}^j(k_1, k_2, 0), \tilde{\sigma}_{yz,\omega}^j(k_1, k_2, 0), \tilde{\sigma}_{zz,\omega}^j(k_1, k_2, 0)\}^{\text{T}} \end{aligned} \quad [3.11]$$

De uma forma análoga, os deslocamentos e tensões que actuam na interface inferior são dados por:

$$\begin{aligned} \{\tilde{u}_{\omega j}\}^{\text{inf}} &= \{\tilde{u}_{x,\omega}^j(k_1, k_2, h_j), \tilde{u}_{y,\omega}^j(k_1, k_2, h_j), \tilde{u}_{z,\omega}^j(k_1, k_2, h_j)\}^{\text{T}} \\ \{\tilde{\sigma}_{\omega j}\}^{\text{inf}} &= \{\tilde{\sigma}_{xz,\omega}^j(k_1, k_2, h_j), \tilde{\sigma}_{yz,\omega}^j(k_1, k_2, h_j), \tilde{\sigma}_{zz,\omega}^j(k_1, k_2, h_j)\}^{\text{T}} \end{aligned} \quad [3.12]$$

Por uma questão de conveniência, considere-se um novo vector,  $\{S\}$ , correspondendo às condições de fronteira do problema, o qual agrupa os deslocamentos e tensões actuantes em cada uma das interfaces:

$$\{S_j\}^{\text{sup}} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{u}_{\omega j}\}^{\text{sup}} \\ \{\tilde{\sigma}_{\omega j}\}^{\text{sup}} \end{Bmatrix}; \quad \{S_j\}^{\text{inf}} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{u}_{\omega j}\}^{\text{inf}} \\ \{\tilde{\sigma}_{\omega j}\}^{\text{inf}} \end{Bmatrix} \quad [3.13]$$

Admitindo comportamento elástico linear e isotrópico para o material constituinte do estrato, a propagação de ondas nesse meio é regida pelas equações de Navier, já apresentadas no Capítulo anterior. As equações de Navier no domínio transformado são obtidas através da substituição das variáveis intervenientes no domínio tempo-espaco pelas suas imagens no domínio transformado (número de onda-frequência), sendo traduzidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\lambda_j + \mu_j)ik_1\tilde{\Delta}_j + \mu_j \left( \frac{d^2\tilde{u}_{x,j}}{dz^2} - \left( k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2\rho_j}{\mu_j} \right) \tilde{u}_{x,j} \right) &= 0 \\ (\lambda_j + \mu_j)ik_2\tilde{\Delta}_j + \mu_j \left( \frac{d^2\tilde{u}_{y,j}}{dz^2} - \left( k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2\rho_j}{\mu_j} \right) \tilde{u}_{y,j} \right) &= 0 \\ (\lambda_j + \mu_j)\frac{\partial\tilde{\Delta}_j}{\partial z^2} + \mu_j \left( \frac{d^2\tilde{u}_{z,j}}{dz^2} - \left( k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2\rho_j}{\mu_j} \right) \tilde{u}_{z,j} \right) &= 0 \end{aligned} \quad [3.14]$$

em que a amplitude da deformação volumétrica no domínio transformado é dada por:

$$\tilde{\Delta}_j = ik_1 \tilde{u}_{x,j} + ik_2 \tilde{u}_{y,j} + \frac{d\tilde{u}_{z,j}}{dz} \quad [3.15]$$

De forma a introduzir o amortecimento material, as constantes de Lamé ( $\lambda$  e  $\mu$ ) são consideradas como entidades complexas, tal como sugerido na secção 2.3.5.4 do Capítulo 2 da presente dissertação.

Como se pode verificar, as equações de Navier no domínio transformado reduzem-se a equações diferenciais ordinárias em ordem à variável  $z$ , sendo por isso facilmente resolúveis tendo presente as condições de fronteira definidas por [3.13].

As equações de Navier no domínio transformado estabelecem as condições de equilíbrio em termos de deslocamentos. Porém, as condições de fronteira do estrato  $j$  referem-se a deslocamentos e tensões nas interfaces, o que torna necessário o recurso ao modelo constitutivo de modo a expressar as tensões em função dos deslocamentos. No domínio transformado esta relação (lei de Hooke) é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xz,j} &= \mu_j \left( ik_1 \tilde{u}_{z,j} + \frac{d\tilde{u}_{x,j}}{dz} \right) \\ \tilde{\sigma}_{yz,j} &= \mu_j \left( ik_2 \tilde{u}_{z,j} + \frac{d\tilde{u}_{y,j}}{dz} \right) \\ \tilde{\sigma}_{xy,j} &= \mu_j (ik_1 \tilde{u}_{y,j} + ik_2 \tilde{u}_{x,j}) \\ \tilde{\sigma}_{xx,j} &= \lambda_j \tilde{\Delta}_j + 2\mu_j ik_1 \tilde{u}_{x,j} \\ \tilde{\sigma}_{yy,j} &= \lambda_j \tilde{\Delta}_j + 2\mu_j ik_2 \tilde{u}_{y,j} \\ \tilde{\sigma}_{zz,j} &= \lambda_j \tilde{\Delta}_j + 2\mu_j \frac{d\tilde{u}_{z,j}}{dz} \end{aligned} \quad [3.16]$$

Resolvendo o sistema de equações indicado em [3.14], os deslocamentos e as tensões em cada uma das interfaces expressam-se da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{S} \end{Bmatrix}_j^{\text{sup}} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_\omega \end{Bmatrix}_j^{\text{sup}} = [A]_j^{\text{sup}} \{b\}_j \quad [3.17]$$

$$\{\tilde{S}\}_j^{\text{inf}} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{u}_\omega\}_j^{\text{inf}} \\ \{\tilde{\sigma}_\omega\}_j^{\text{inf}} \end{Bmatrix} = e^{\beta_{p,j}h_j} [A]_j^{\text{inf}} \{b\}_j \quad [3.18]$$

em que:

$$\{b\}_j = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2\}^T \quad [3.19]$$

$$[A]_j^{\text{inf}} = [A]_j^{\text{sup}} [D]_j \quad [3.20]$$

$$\beta_{i,j} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_{i,j}^2} \quad i=P,S \quad [3.21]$$

na qual  $k_{p,j}$  e  $k_{s,j}$  são os números de onda relativos à propagação de ondas do tipo P e S no estrato j e associados à frequência de excitação,  $\omega$ .

Os termos da matriz  $[A]_j^{\text{sup}}$  dependem das propriedades (visco)elásticas do material que constitui o estrato j, dos números de onda,  $k_1$  e  $k_2$ , e da frequência de excitação,  $\omega$ . A dedução dos termos desta matriz pode ser encontrada em alguns trabalhos de referência, como por exemplo em [71, 85, 92]. No anexo 3.1 apresenta-se a configuração desta matriz tanto para solicitações dinâmicas como para solicitações estáticas.

A matriz  $[D]_j$  é uma matriz diagonal com dimensão (6x6), cujos termos são:  $D_{11}=1$ ;  $D_{22}=D_{33}=e^{(\beta_S - \beta_P)h}$ ;  $D_{44}=e^{-2\beta_P h}$ ;  $D_{55}=D_{66}=e^{-(\beta_S + \beta_P)h}$ .

Os termos do vector  $\{b\}_j$ , presente nas expressões [3.17] e [3.18], correspondem às constantes de integração, sendo que:  $a_1$  e  $a_2$  representam o movimento ascendente e descendente das ondas P; similarmemente, as constantes  $b_1$  e  $b_2$  referem-se ao movimento ascendente e descendente da componente polarizada das ondas S segundo o plano xoz;  $c_1$  e  $c_2$  representam o movimento homólogo da componente polarizada das ondas S segundo o plano yoz. Dado que, de acordo com as expressões [3.17] e [3.18], a amplitude dos deslocamentos e tensões em ambas as interfaces do estrato se encontra expressa em função do vector  $\{b\}$ , as referidas expressões podem ser combinadas entre si dando origem à matriz de transferência do estrato j,

$$\{\tilde{S}\}_j^{\text{inf}} = e^{\beta_{p,j}h_j} [A]_j^{\text{inf}} \left( [A]_j^{\text{sup}} \right)^{-1} \{\tilde{S}\}_j^{\text{sup}} \quad [3.22]$$

a qual estabelece uma relação directa entre amplitude de deslocamentos e tensões em ambas as fronteiras do estrato, indo assim ao encontro do método proposto por Haskell e Tomson [60, 61].

### 3.3.3.2 Meio semi-indefinido

Do ponto de vista matemático, um meio semi-indefinido pode ser tratado da mesma forma que um estrato isolado no qual se considera a existência de apenas uma fronteira, tal como a sua designação sugere. Admitindo a inexistência de forças exteriores aplicadas ao meio, apenas a propagação de ondas no sentido descendente constitui uma solução admissível para o problema em questão. Tendo em atenção este aspecto e seguindo o formalismo matemático apresentado para a dedução da matriz de transferência do estrato isolado, os deslocamentos e tensões na fronteira livre do meio semi-indefinido, designado no actual contexto por estrato n+1, são dados por:

$$\{\tilde{u}\}_{n+1}^{\text{sup}} = [R]\{b\}_{n+1} \quad [3.23]$$

$$\{\tilde{\sigma}\}_{n+1}^{\text{sup}} = [S]\{b\}_{n+1} \quad [3.24]$$

em que as componentes do vector  $b$  se referem às constantes de integração relativas à propagação de ondas com sentido descendente. As matrizes  $[R]$  e  $[S]$  têm dimensão  $(3 \times 3)$ , sendo a sua configuração apresentada no anexo 3.1.

Combinando as equações [3.23] e [3.24], a amplitude dos deslocamentos à superfície do meio semi-indefinido pode ser directamente relacionada com a amplitude das tensões aí aplicadas,

$$\{\tilde{u}\}_{n+1}^{\text{sup}} = [R][S]^{-1} \{\tilde{\sigma}\}_{n+1}^{\text{sup}} \quad [3.25]$$

Uma vez que as tensões à superfície do maciço resultam apenas das forças exteriores aplicadas ao meio (o sentido positivo das tensões normais ao plano é definido pelo eixo  $oz$ ),

$$\{\tilde{u}\}_{n+1}^{\text{sup}} = [R][S]^{-1} \{\tilde{p}\} \quad [3.26]$$

Comparando as equações [3.26] e [3.8], facilmente se conclui que a matriz de flexibilidade dinâmica, no domínio transformado, de um maciço semi-indefinido é dada por:

$$[\tilde{Q}] = [R][S]^{-1} \quad [3.27]$$

No que toca às matrizes de transferência de tensões dinâmicas,  $[U]$  e  $[V]$ , verifica-se que, nestas circunstâncias, todos os termos da matriz  $[V]$  são nulos e que a matriz  $[U]$  é uma matriz diagonal cujos termos correspondem à amplitude (a qual pode ser uma entidade complexa) no domínio transformado das tensões aplicadas à superfície do maciço.



### 3.3.3.3 Maciço estratificado sobre “bedrock”

Do ponto de vista da Engenharia, a solução apresentada para a descrição dos deslocamentos induzidos à superfície de um maciço semi-indefinido constitui uma solução de pouca utilidade, não obstante o interesse teórico que a mesma possa representar. Com efeito, uma aproximação razoável à realidade física dos maciços geotécnicos pode ser obtida através da consideração de um conjunto de estratos horizontais com características mecânicas distintas. Esta idealização teórica ajusta-se particularmente bem aos maciços sedimentares, nos quais é, regra geral, possível identificar formações geológicas distintas com desenvolvimento mais ou menos paralelo à superfície do terreno, consoante a escala de análise. Quando existe um grande contraste entre as propriedades deformacionais dos estratos mais superficiais do maciço e as de uma formação subjacente, normalmente rochosa, é lícito considerar que os deslocamentos na interface desta última formação são desprezáveis, podendo assim admitir-se que a fronteira inferior do maciço, constituído pelos estratos mais superficiais, é rígida.

Face ao exposto, considere-se o maciço estratificado representado na Figura 3.4, em que o estrato mais superficial é designado por  $j=1$ , enquanto o mais profundo por  $j=n$ . Para o problema em estudo considere-se ainda que a acção é aplicada na superfície livre do maciço.

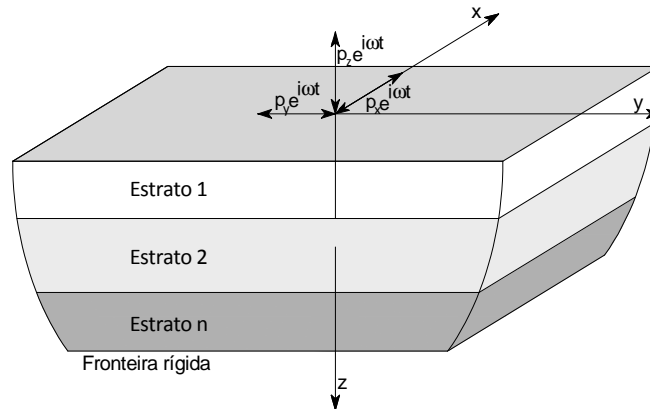


Figura 3.4 – Maciço estratificado delimitado por fronteira rígida.

Os requisitos de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de tensões têm de ser obrigatoriamente respeitados na interface entre dois estratos, o que, na ausência de pressões exteriores aplicadas nessa mesma interface, resulta em,

$$\{\tilde{S}\}_j^{inf} = \{\tilde{S}\}_{j+1}^{sup} \quad [3.28]$$

Procedendo à substituição sequencial de [3.28] em [3.22] obtém-se a seguinte relação directa entre deslocamentos e tensões nas interfaces inferior e superior do maciço,

$$\{\tilde{S}\}_n^{inf} = e^{\sum_{j=1}^n \beta_{p,j} h_j} [A]_n^{inf} ([A]_n^{sup})^{-1} \dots [A]_1^{inf} ([A]_1^{sup})^{-1} \{\tilde{S}\}_1^{sup} \quad [3.29]$$

Atendendo às condições de fronteira do problema sabe-se que na interface inferior do maciço os deslocamentos são nulos,

$$\{\tilde{S}\}_n^{inf} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{u}\}_n \\ \{\tilde{\sigma}\}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\tilde{\sigma}\}_n \end{Bmatrix} \quad [3.30]$$

e que as tensões actuantes no plano que constitui a superfície livre estão em correspondência com as pressões aplicadas, logo:

$$\{\tilde{S}\}_1^{sup} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{u}\}_1 \\ \{\tilde{\sigma}\}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{u}\}_1 \\ \{\tilde{p}\} \end{Bmatrix} \quad [3.31]$$

Substituindo [3.31] e [3.30] em [3.29] obtém-se o seguinte sistema de seis equações lineares em que as incógnitas são as tensões aplicadas na interface que define o estrato rígido e os deslocamentos verificados à superfície do maciço.

$$\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\tilde{\sigma}\}_n \end{Bmatrix} = e^{\sum_{j=1}^n \beta_{p,j} h_j} \begin{bmatrix} [T]_{11} & [T]_{12} \\ [T]_{21} & [T]_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tilde{u}\}_1 \\ \{\tilde{p}\} \end{Bmatrix} \quad [3.32]$$

em que,

$$[T] = [A]_n^{inf} ([A]_n^{sup})^{-1} \dots [A]_1^{inf} ([A]_1^{sup})^{-1} = \begin{bmatrix} [T]_{11} & [T]_{12} \\ [T]_{21} & [T]_{22} \end{bmatrix} \quad [3.33]$$

Resolvendo o sistema de equações [3.32], chega-se à seguinte relação directa entre tensões e deslocamentos à superfície do maciço:

$$\{\tilde{u}\}_1^{sup} = [\tilde{Q}] \{\tilde{p}\} \quad [3.34]$$

em que,

$$[\tilde{Q}] = -([T]_{11})^{-1} [T]_{12} \quad [3.35]$$

A solução apresentada em [3.34] permite determinar a amplitude dos deslocamentos, no domínio transformado, da superfície do maciço. Porém, existem várias situações em que é do maior interesse o conhecimento dos deslocamentos e tensões em pontos no interior do maciço devido à

aplicação de cargas à sua superfície. Como tal, considere-se um ponto genérico R pertencente à interface superior de um estrato designado por r, tal como ilustrado na Figura 3.5.

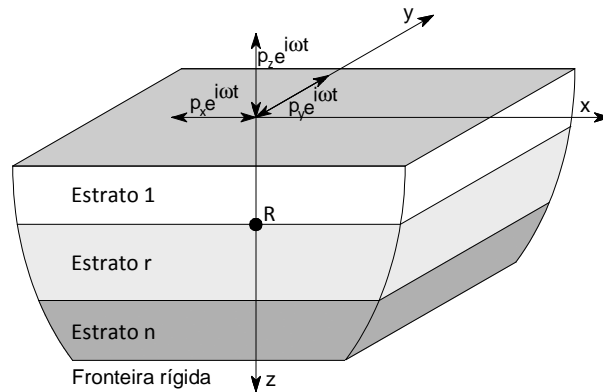


Figura 3.5 – Representação esquemática da localização do ponto de observação no interior do maciço.

Seguindo um raciocínio em tudo semelhante ao anteriormente apresentado, os deslocamentos e tensões na interface superior do estrato r são relacionáveis com os homólogos verificados à superfície:

$$\{\tilde{S}\}_r^{\text{sup}} = \{\tilde{S}\}_{r-1}^{\text{inf}} = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} [A]_{r-1}^{\text{inf}} ([A]_{r-1}^{\text{sup}})^{-1} \dots [A]_1^{\text{inf}} ([A]_1^{\text{sup}})^{-1} \{\tilde{S}\}_1^{\text{sup}} \quad [3.36]$$

ou, de um modo mais elegante,

$$\begin{Bmatrix} \{\tilde{u}\}_{r-1}^{\text{sup}} \\ \{\tilde{\sigma}\}_{r-1}^{\text{sup}} \end{Bmatrix} = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} \begin{bmatrix} [G]_{11} & [G]_{12} \\ [G]_{21} & [G]_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tilde{u}\}_1^{\text{sup}} \\ \{\tilde{p}\}_1^{\text{sup}} \end{Bmatrix} \quad [3.37]$$

em que,

$$[G] = [A]_{r-1}^{\text{inf}} ([A]_{r-1}^{\text{sup}})^{-1} \dots [A]_1^{\text{inf}} ([A]_1^{\text{sup}})^{-1} = \begin{bmatrix} [G]_{11} & [G]_{12} \\ [G]_{21} & [G]_{22} \end{bmatrix} \quad [3.38]$$

A equação [3.38] estabelece uma relação directa entre os deslocamentos e tensões na interface que inclui o ponto R e as grandezas homólogas experimentadas na superfície do maciço. Procedendo à substituição de [3.32] em [3.37] e após algumas operações algébricas, as variáveis na interface que inclui o ponto R são descritas em função das forças aplicadas à superfície do maciço,

$$\{\tilde{u}\}_r^{\text{sup}} = \{\tilde{u}\}_{r-1}^{\text{inf}} = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} ([G]_{12} - [G]_{11} [T]_{11}^{-1} [T]_{12}) \{\tilde{p}\} \quad [3.39]$$

$$\{\tilde{\sigma}\}_r^{\text{sup}} = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} \left( [G]_{22} - [G]_{21} [T]_{11}^{-1} [T]_{12} \right) \{\tilde{p}\} \quad [3.40]$$

Atendendo ao formato das matrizes [Q] e [U], as equações [3.39] e [3.40] podem ser escritas da seguinte forma:

$$\{\tilde{u}\}_r^{\text{sup}} = [\tilde{Q}] \{\tilde{p}\} \quad [3.41]$$

$$\{\tilde{\sigma}\}_r^{\text{sup}} = [\tilde{U}] \{\tilde{p}\} \quad [3.42]$$

onde,

$$[\tilde{Q}] = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} \left( [G]_{12} - [G]_{11} [T]_{11}^{-1} [T]_{12} \right) \quad [3.43]$$

$$[\tilde{U}] = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} \left( [G]_{22} - [G]_{21} [T]_{11}^{-1} [T]_{12} \right) \quad [3.44]$$

Analisando as equações agora apresentadas, facilmente se compreende que a expressão [3.35] não é mais do que um caso particular do caso geral representado por [3.43]. De facto, quando o ponto de observação e a fonte de excitação harmónica se encontram ambos no plano que define a superfície livre do maciço, o termo exponencial presente em [3.43] desaparece e a matriz [G] toma a configuração de uma matriz identidade com dimensão de 6x6.

Merece uma chamada de atenção o facto de o termo exponencial presente nas expressões [3.43] e [3.44] suscitar problemas de instabilidade numérica, já que esse termo cresce de forma abrupta com o aumento da frequência de excitação, principalmente quando os estratos que constituem o maciço apresentam espessura considerável [25, 100]. Uma forma de evitar alguns dos problemas numéricos consiste em dividir os estratos em diversos sub-estratos de modo a diminuir a espessura; outra forma, mais consistente, através da aplicação das relações de reciprocidade relativas aos termos de flexibilidade e tensão [46, 101]. Esta última metodologia obriga ao estabelecimento de matrizes de transferência para situações em que a fonte de excitação se encontre a uma profundidade superior relativamente ao ponto de observação. O procedimento de dedução dessas matrizes é em tudo semelhante ao anteriormente explanado, razão pela qual não é aqui apresentado.

Para a definição do tensor das tensões é ainda necessário o conhecimento da matriz [V]. Os termos desta matriz podem ser directamente deduzidos através do conhecimento da matriz [Q] e

[U]. Aplicando a lei de Hooke no domínio transformado (ver equação [3.16]) facilmente se chega a:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{1j} &= \mu_r (ik_1 \tilde{Q}_{2j} + ik_2 \tilde{Q}_{1j}) \\ \tilde{V}_{2j} &= \lambda_r \left( ik_2 \tilde{Q}_{2j} + \frac{\partial \tilde{Q}_{3j}}{\partial z} \right) + (\lambda_r + 2\mu_r) ik_1 \tilde{Q}_{1j} \quad j=1,2,3\end{aligned}\quad [3.45]$$

$$\tilde{V}_{3j} = \lambda_r \left( ik_2 \tilde{Q}_{1j} + \frac{\partial \tilde{Q}_{3j}}{\partial z} \right) + (\lambda_r + 2\mu_r) ik_2 \tilde{Q}_{2j}$$

Como se pode verificar, em [3.45] existem termos relativos a derivadas dos deslocamentos no domínio transformado em ordem à variável  $z$ . Estes termos podem ser obtidos de forma analítica, tendo em consideração o conhecimento prévio da matriz [U], nomeadamente os termos da última linha da referida matriz. Deste modo,

$$\frac{\partial \tilde{Q}_{3j}}{\partial z} = \frac{\tilde{U}_{3j} - \lambda_r (ik_1 \tilde{Q}_{1j} + ik_2 \tilde{Q}_{2j})}{(\lambda_r + 2\mu_r)} \quad j=1,2,3 \quad [3.46]$$

Substituindo [3.46] em [3.45],

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{1j} &= \mu_r (ik_1 \tilde{Q}_{2,j} + ik_2 \tilde{Q}_{1j}) \\ \tilde{V}_{2j} &= \lambda_r \left( ik_2 \tilde{Q}_{2j} + \frac{\tilde{U}_{3j} - \lambda_r (ik_1 \tilde{Q}_{3j} + ik_2 \tilde{Q}_{2,j})}{(\lambda_r + 2\mu_r)} \right) + (\lambda_r + 2\mu_r) ik_1 \tilde{Q}_{1j} \quad j=1,2,3 \\ \tilde{V}_{3j} &= \lambda_r \left( ik_2 \tilde{Q}_{1j} + \frac{\tilde{U}_{3j} - \lambda_r (ik_1 \tilde{Q}_{3j} + ik_2 \tilde{Q}_{2j})}{(\lambda_r + 2\mu_r)} \right) + (\lambda_r + 2\mu_r) ik_2 \tilde{Q}_{2j}\end{aligned}\quad [3.47]$$

As matrizes [U] e [V] podem ser combinadas de modo a obter uma relação directa entre o estado de tensão no ponto genérico R e as tensões aplicadas à superfície do maciço,

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{xx} \\ \tilde{\sigma}_{yy} \\ \tilde{\sigma}_{zz} \\ \tilde{\sigma}_{xy} \\ \tilde{\sigma}_{yz} \\ \tilde{\sigma}_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11} & \tilde{V}_{12} & \tilde{V}_{13} \\ \tilde{V}_{21} & \tilde{V}_{22} & \tilde{V}_{23} \\ \tilde{V}_{31} & \tilde{V}_{32} & \tilde{V}_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & \tilde{U}_{12} & \tilde{U}_{13} \\ \tilde{U}_{21} & \tilde{U}_{22} & \tilde{U}_{23} \\ \tilde{U}_{31} & \tilde{U}_{32} & \tilde{U}_{33} \end{bmatrix} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_x \\ \tilde{p}_y \\ \tilde{p}_z \end{Bmatrix} \quad [3.48]$$

### 3.3.3.4 Maciço estratificado e semi-indefinido

Na secção anterior apresentaram-se as matrizes de flexibilidade dinâmica, [Q], e de tensão dinâmica, [U] e [V], para um maciço estratificado sobrejacente a um estrato rígido. A aplicação deste modelo exige que o maciço seja discretizado em estratos até uma profundidade na qual seja possível identificar um contraste significativo entre as propriedades deformacionais das formações sobrejacentes e do estrato subjacente, de tal modo que o último possa ser considerado como indeformável. Se em muitos casos é possível identificar formações tidas como indeformáveis a profundidades aceitáveis, em muitos outros a sua ocorrência apenas se verifica a profundidades muito elevadas, o que exige um muito maior esforço computacional. De forma a contornar esta dificuldade o maciço pode ser idealizado como um conjunto de estratos paralelos com propriedades distintas, mas agora sobrejacentes a um estrato que é tido como semi-indefinido, ou seja, com desenvolvimento infinito em profundidade. Esta idealização permite considerar a estratificação do maciço nas zonas mais superficiais, sendo as zonas mais profundas modeladas através de um meio homogéneo e infinito.

Posto isto, considere-se um maciço estratificado em que o estrato superficial é referido por  $j=1$ , o estrato mais profundo por  $j=n$  e o meio semi-indefinido através de  $j=n+1$ , tal como já indicado esquematicamente na Figura 3.2.

Atendendo às condições de compatibilidade e equilíbrio (condições de fronteira), as tensões e deslocamentos experimentados na interface inferior do estrato  $n$  são obrigatoriamente iguais às grandezas homólogas verificadas na interface superior do estrato  $n+1$ . Deste modo, as condições de fronteira do problema ao nível da interface inferior são dadas por:

$$\{\tilde{u}\}_n^{\text{inf}} = \{\tilde{u}\}_{n+1}^{\text{sup}} = [\mathbf{R}][\mathbf{S}]^{-1} \{\tilde{\sigma}\}_{n+1}^{\text{sup}} \quad [3.49]$$

$$\{\tilde{\sigma}\}_n^{\text{inf}} = \{\tilde{\sigma}\}_{n+1}^{\text{sup}} \quad [3.50]$$

Introduzindo estas novas condições de fronteira e repetindo o procedimento matemático descrito de [3.29] a [3.38], obtêm-se as tensões actantes e deslocamentos experimentados pela face superior do estrato genérico designado por  $r$ , tal como a seguir indicado:

$$\{\tilde{u}\}_r^{\text{sup}} = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} \left( [\mathbf{G}]_{11} \left( [\mathbf{R}][\mathbf{S}]^{-1} [\mathbf{T}]_{21} - [\mathbf{T}]_{11} \right)^{-1} \left( [\mathbf{T}]_{12} - [\mathbf{R}][\mathbf{S}]^{-1} [\mathbf{T}]_{22} \right) + [\mathbf{G}]_{12} \right) \{\tilde{\rho}\} \quad [3.51]$$

$$\{\tilde{\sigma}\}_{r}^{\text{sup}} = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} \left( [G]_{21} ([R][S]^{-1}[T]_{21} - [T]_{11})^{-1} ([T]_{12} - [R][S]^{-1}[T]_{22}) + [G]_{22} \right) \{\tilde{p}\}$$

Logo,

$$[\tilde{Q}] = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} \left( [G]_{11} ([R][S]^{-1}[T]_{21} - [T]_{11})^{-1} ([T]_{12} - [R][S]^{-1}[T]_{22}) + [G]_{12} \right) \quad [3.52]$$

e

$$[\tilde{U}] = e^{\sum_{j=1}^{r-1} \beta_{p,j} h_j} \left( [G]_{21} ([R][S]^{-1}[T]_{21} - [T]_{11})^{-1} ([T]_{12} - [R][S]^{-1}[T]_{22}) + [G]_{22} \right) \quad [3.53]$$

Como é evidente, caso a fonte de excitação e o ponto de observação se encontrem ambos na superfície livre do maciço, o termo exponencial das equações [3.52] e [3.53] desaparece e a matriz [G] toma a configuração da matriz identidade. Além disso, comparando as expressões [3.52] e [3.53] com as homólogas relativas ao maciço estratificado com constrangimento de deslocamento na interface inferior (equações [3.43] e [3.44]), facilmente se conclui que as últimas não são mais do que um caso particular das primeiras. De facto, se o maciço subjacente for infinitamente rígido então a matriz [R] é nula, tal como traduzido pela expressão [3.23].

### 3.3.4 Melhoria da eficiência computacional

O método previamente apresentado permite a resolução do sistema de equações que rege a resposta do meio, no domínio transformado, quando submetido a uma acção estacionária aplicada à sua superfície. Como tal, tanto as componentes do tensor de deslocamentos como do tensor das tensões são traduzidas no domínio do número de onda - frequência, carecendo a transformação inversa para o domínio não transformado, tal como estipulado pelas equações [3.2] ou [3.5]. Não sendo conhecida uma expressão analítica que permita a operação de transformação inversa de forma directa, a mesma pode ser alcançada por recurso a uma transformada discreta inversa de Fourier ou recorrendo a um algoritmo matemático FFT (Fast Fourier Transform), procedimentos ambos disponíveis visto que a metodologia foi implementada na plataforma de cálculo Matlab 2009.

Relativamente às matrizes [Q] e [U] (e consequentemente também a matriz [V]) compete ainda fazer alguns comentários sobre metodologias eficientes para o seu cálculo. De facto, uma vez que

a aplicação do método anteriormente descrito está condicionada a meios homogéneos nas direcções paralelas à superfície do terreno, existe um conjunto de condições de simetria (e anti-simetria) em torno do eixo normal a essa superfície que permitem retirar algumas vantagens computacionais, nomeadamente:

$$[\tilde{Q}(k_1, k_2)] = \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\tilde{Q}(0, k_3)] \begin{bmatrix} \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.54]$$

em que,

$$k_3 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad \text{e} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \quad [3.55]$$

Em termos computacionais, a transformação de referencial indicada na equação [3.54], a qual é também extensível à matriz [U], mostra-se extremamente vantajosa pois permite que o cálculo dos termos das referidas matrizes no domínio transformado seja efectuado ao longo do eixo  $k_3$  e, seguidamente, os resultados sejam extrapolados para o plano  $k_1$ - $k_2$ . Além disso, como é bem perceptível pelas funções trigonométricas presentes nas matrizes de transformação de referencial, existe um conjunto de relações de simetria e antissimetria em torno dos eixos  $k_1$  e  $k_2$  que, quando tidas em consideração, permitem incrementar significativamente a eficiência computacional, nomeadamente:

- i.  $Q_{13}(k_1, k_2)$  e  $Q_{31}(k_1, k_2)$  são funções ímpar em relação a  $k_1$  e par em relação a  $k_2$ ;
- ii.  $Q_{23}(k_1, k_2)$  e  $Q_{32}(k_1, k_2)$  são funções par em relação a  $k_1$  e ímpar em relação a  $k_2$ ;
- iii.  $Q_{11}(k_1, k_2)$ ,  $Q_{22}(k_1, k_2)$  e  $Q_{33}(k_1, k_2)$  são funções par tanto em relação a  $k_1$  como a  $k_2$ ;
- iv.  $Q_{23}(k_1, k_2)$  e  $Q_{32}(k_1, k_2)$  são funções par em relação a  $k_1$  e ímpar em relação a  $k_2$ ;
- v.  $Q_{12}(k_1, k_2)$  e  $Q_{21}(k_1, k_2)$  são funções ímpar tanto em relação a  $k_1$  como a  $k_2$ ;

Algumas das relações acima expressas, também extensíveis para as componentes da matriz [U], não são mais válidas quando se consideram solicitações com carácter móvel: as relações de simetria e antissimetria em relação a  $k_1$  deixam de se verificar.

Uma última nota refere-se ao facto de o método anteriormente apresentado ter sido implementado tirando partido das potencialidades oferecidas pela plataforma Matlab 2009 para a condução de esquemas de computação paralela, o que, conjugado com o facto de o método lidar sempre com matrizes de pequena dimensão, se traduz numa grande eficiência computacional. Contudo, deverá também ser mencionado que para frequências elevadas e, principalmente,



quando a espessura dos estratos é significativa, a metodologia descrita dá origem a problemas de instabilidade numérica, os quais já haviam sido reportados por outros autores [72]. Para obviar esta limitação, apresenta-se numa secção subsequente do presente capítulo uma metodologia alternativa para o cálculo das funções de Green. Em jeito de antecipação, refira-se que as propriedades de simetria das funções de Green acima descritas são também válidas para esse método, já que as mesmas são intrínsecas às funções e não à metodologia de cálculo.

### 3.3.5 Exemplos de validação

#### 3.3.5.1 Preâmbulo

O processo de desenvolvimento e implementação de um modelo numérico tem de contemplar, obrigatoriamente, uma fase de validação visando avaliar a acuidade e fiabilidade do mesmo. Uma das melhores formas de proceder à validação teórica de um qualquer modelo consiste na comparação entre resultados que dele derivam com os resultados homólogos obtidos através de soluções analíticas conhecidas. Caso os problemas em estudos não apresentem solução analítica conhecida, então, a validação teórica do modelo pode passar pelo confronto entre os resultados enunciados e os homólogos obtidos por outros autores e disponíveis na bibliografia. Neste caso, deve dar-se preferência a estudos que tenham sido efectuados adoptando metodologias distintas das que se pretende validar, sob pena de não se avaliar a acuidade do modelo devido a deficiências teóricas do mesmo.

#### 3.3.5.2 Estrato confinado

Tendo em consideração os princípios acima enunciados, apresenta-se de seguida um pequeno exemplo de validação que foi previamente estudado por Jones et al. [102]. Considere-se um maciço constituído por um estrato homogéneo, com 7 m de possança, sobrejacente a um meio infinitamente rígido, tal como representado na Figura 3.6, onde se apresentam também as propriedades mecânicas do maciço. Na superfície do maciço é aplicada uma carga dinâmica harmónica, com frequência  $\omega$ , uniformemente distribuída por uma superfície com dimensões  $2a \times 2b$  m<sup>2</sup> e cuja resultante vale 1 N, ou seja:

$$p_z(x, y, 0, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a \times 2b} e^{i\omega t} & |x| \leq a, |y| \leq b \\ 0 & |x| > a, |y| > b \end{cases} \quad [3.56]$$

No domínio do número de onda – frequência, a expressão [3.56] resulta em:

$$\tilde{p}_z(k_1, k_2, 0, \omega) = \frac{\sin(k_1 a) \sin(k_2 b)}{k_1 a \times k_2 b} e^{i\omega t} \quad [3.57]$$

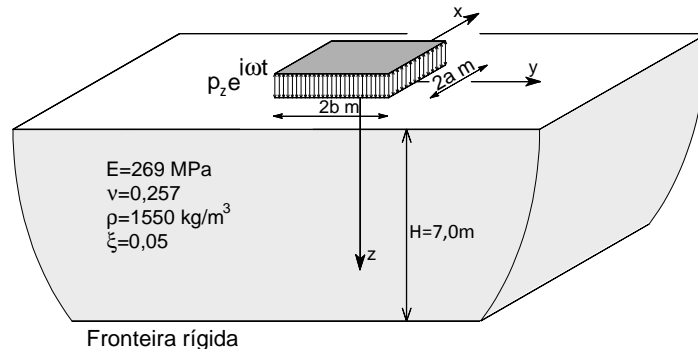


Figura 3.6 – Exemplo de validação. Comparação com proposta de Jones et al. [102].

Nas Figuras 3.7 e 3.8 apresentam-se, respectivamente, alguns resultados relativos aos deslocamentos verticais e horizontais, no domínio transformado, experimentados à superfície do maciço devido a uma acção vertical com frequência de oscilação de 64 Hz e uniformemente distribuída numa área quadrada com a=b=0,3 m.

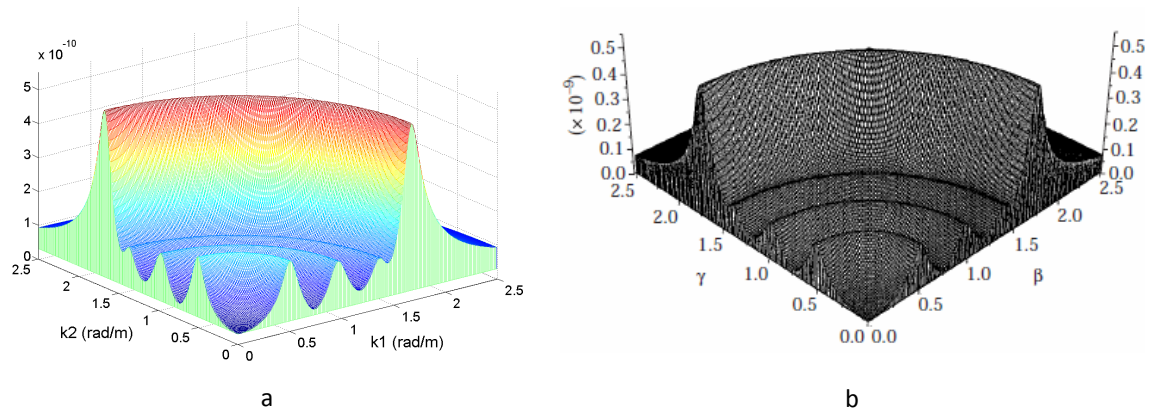


Figura 3.7 – Deslocamentos verticais no espaço transformado para uma frequência de excitação de 64 Hz: a) actual modelo; b) proposta de [102].

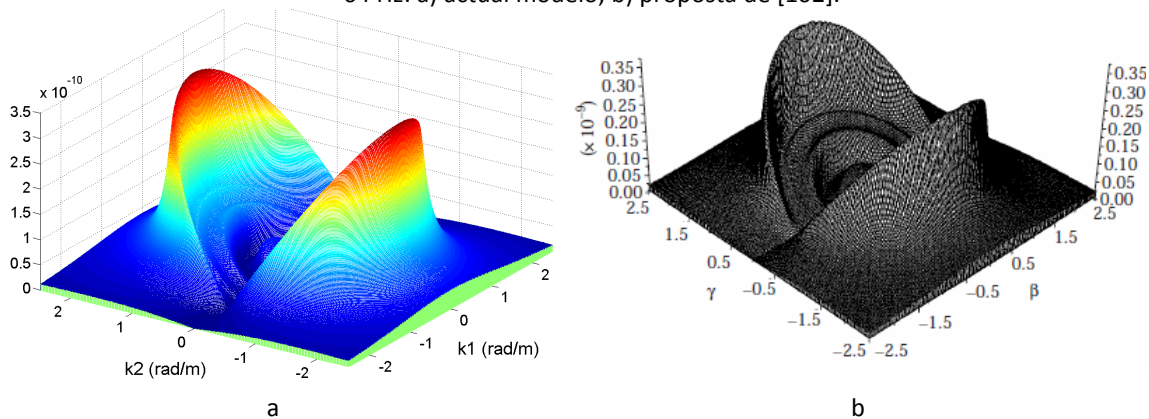


Figura 3.8 – Deslocamentos horizontais no espaço transformado para uma frequência de excitação de 64 Hz: a) actual modelo; b) proposta de [102].

O exame dos resultados apresentados nas Figuras 3.7 e 3.8 permite concluir que há uma correspondência total entre os resultados vaticinados pelo presente modelo e os homólogos apresentados por Jones et al. [102].

Para as condições do exemplo anterior, os estudos desenvolvidos por Jones et al. [102] não contemplaram o cálculo da resposta do maciço no domínio espaço-tempo. Por isso, os resultados seguidamente apresentados referem-se a uma solicitação à superfície do maciço, mas agora distribuída segundo uma área rectangular em que  $a=0,75$  m e  $b=0,125$  m, e para frequências de excitação de 16 Hz e 64 Hz. Para a determinação da resposta no domínio do número de onda considerou-se uma gama de  $k_1$  e  $k_2$  entre  $-16$  rad/m e  $16$  rad/m, devidamente discretizada em 2048 amostras, tal como sugerido no trabalho original [102]. Nas Figuras 3.9 e 3.10 apresenta-se a amplitude da componente vertical e longitudinal do deslocamento verificado à superfície do maciço ao longo do alinhamento definido por  $y=0$  para as duas frequências de excitação consideradas, respectivamente. Como se pode verificar, existe uma correspondência exacta entre a solução obtida pelo actual modelo e os resultados obtidos por Jones et al. [102], para as ambas as frequências consideradas, e independentemente da distância entre o ponto de observação e a fonte de excitação. Por uma questão de escala, e para que o detalhe da resposta seja perceptível, os resultados relativos a distâncias inferiores a 10 m em relação à fonte de excitação apresentam-se nas Figuras 3.9a e 3.10b, consoante se trate da componente vertical ou longitudinal do deslocamento.

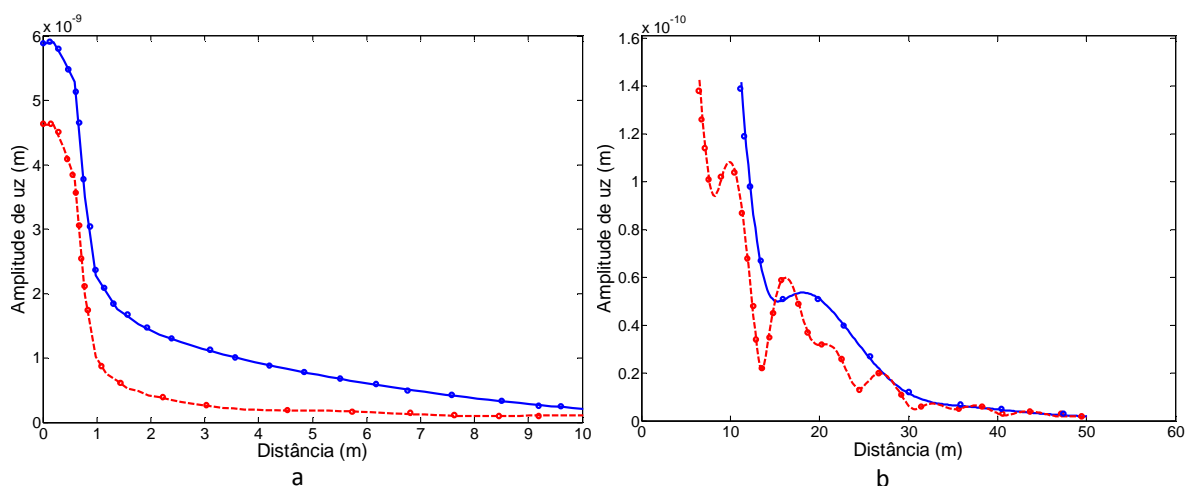


Figura 3.9 – Amplitude do deslocamento vertical ao longo do alinhamento  $y=0$ : a) Resposta para  $0 < x < 10$  m; b) Resposta para  $x > 10$  m (azul –  $f=16$  Hz; vermelho –  $f=64$  Hz; pontos - resultados propostos em [102]; linha - actual modelo).

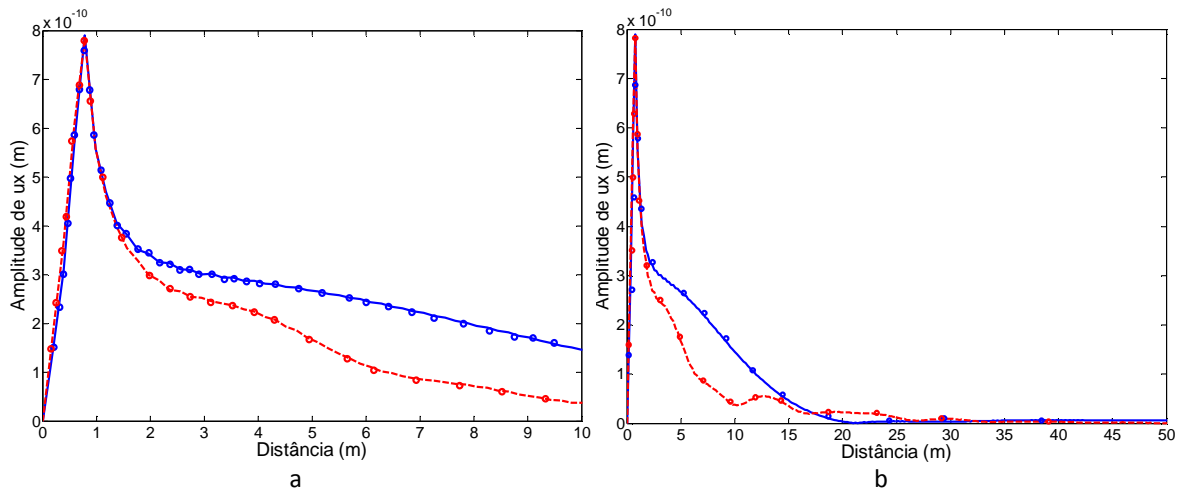


Figura 3.10 – Amplitude do deslocamento horizontal ( $u_x$ ) ao longo do alinhamento  $y=0$ : a) Resposta para  $0 < x < 10$  m; b) Resposta para  $x > 10$  m (azul –  $f=16$  Hz; vermelho –  $f=64$  Hz; pontos - resultados propostos em [102]; linha - actual modelo).

### 3.3.5.3 Formação semi-indefinida

O exemplo acima apresentado não permite avaliar a capacidade do modelo para simular maciços estratificados semi-indefinidos. De forma a colmatar esta limitação do exemplo anterior, considere-se agora um outro exemplo, definido a partir do anterior e previamente analisado por Jones et al. [103], cujas características mecânicas e geométricas estão indicadas na Figura 3.11.

A amplitude dos deslocamentos da superfície do terreno no domínio transformado é apresentada na Figura 3.12, a qual é exactamente coincidente com a figura homóloga apresentada por Jones et al. [103] (embora não ilustrada). No que toca à resposta no domínio não transformado, a Figura 3.13 apresenta a amplitude dos deslocamentos verticais ao longo do alinhamento  $y=0$ , localizado à superfície do maciço. A análise desta figura permite, uma vez mais, comprovar a perfeita concordância entre os resultados obtidos pelo actual modelo e os referentes ao estudo desenvolvido por Jones et al. [103].

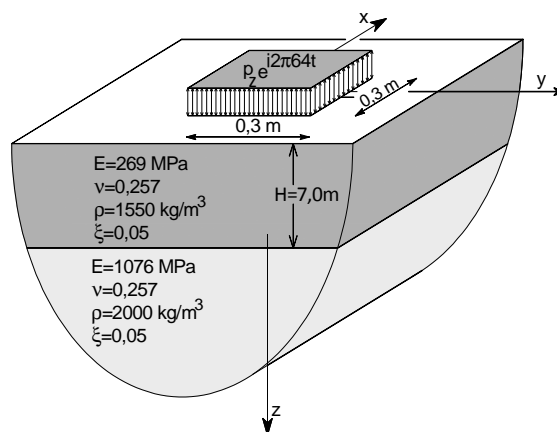


Figura 3.11 – Exemplo de validação. Maciço estratificado semi-indefinido submetido a carregamento dinâmico com posição geométrica fixa.

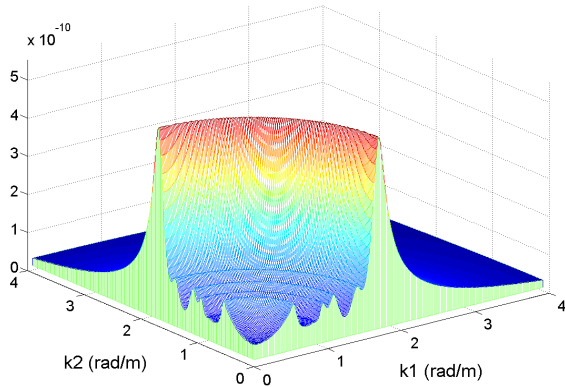


Figura 3.12 – Maciço estratificado semi-indefinido. Amplitude do deslocamento vertical à superfície no espaço transformado ( $f=64$  Hz).

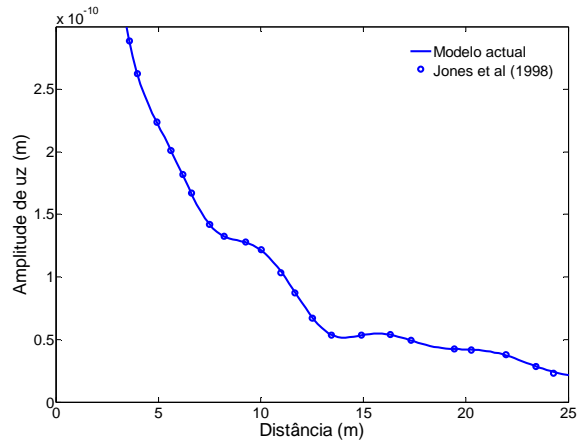


Figura 3.13 – Maciço estratificado semi-indefinido. Amplitude do deslocamento vertical ao longo do alinhamento  $y=0$ .

### 3.4 Método dos estratos finos

#### 3.4.1 Considerações gerais

O método das matrizes de transferência de Haskell-Thomson constitui uma ferramenta interessante para a análise da resposta dinâmica de maciços estratificados, com comportamento elástico linear e isotrópico. Porém, o formalismo matemático inerente ao método é bastante complexo, lidando com funções transcendentais, o que para frequências elevadas pode conduzir a instabilidades numéricas [52, 72, 104]. Além disso, a introdução de alterações ao método, como por exemplo a incorporação de um modelo material anisotrópico, embora possível [105], é sempre bastante complexa do ponto de vista matemático [23, 62, 106].

Uma forma de evitar as funções transcendentais, que tanto surgem no método das matrizes de transferência como no método das matrizes de rigidez [62], passa por adoptar um procedimento semelhante ao utilizado no método dos elementos finitos, embora discretizando o meio apenas na direcção cartesiana que caracteriza a espessura do estrato. Deste modo, o campo de deslocamentos é aproximado no interior de cada elemento através de funções polinomiais em vez das funções transcendentais complexas. Este método, também conhecido por Método dos Estratos Finos (*“Thin-Layer Method”*), proposto inicialmente por Lysmer e Waas [107] e generalizado por Kausel [37], tira assim partido das principais vantagens do MEF, combinando-o com o MIT, o que permite resolver todos os problemas relativos às fronteiras artificiais oriundas da truncagem do domínio. Contudo, embora o método seja muito atractivo do ponto de vista matemático, do ponto de vista computacional é muito menos eficiente que o método de Haskell-Thomson.

No contexto da presente dissertação, o recurso ao Método dos Estratos Finos é apenas usado quando não é possível recorrer ao Método de Haskell-Thomson. Os dois métodos encontram-se implementados num programa desenvolvido na plataforma Matlab, sendo que por defeito as funções de Green são calculadas através do Método de Haskell-Thomson. O programa desenvolvido está preparado para detectar potenciais instabilidades numéricas nas matrizes de transferência e, caso tal ocorra, determina as funções de Green através do Método dos Estratos Finos.

Nas seguintes secções, o Método dos Estratos Finos é apresentado em coordenadas cartesianas. No contexto da apresentação é admitido que o leitor se encontra familiarizado com o MEF, razão pela qual alguns passos do formalismo inerente ao método são omitidos, os quais podem ser facilmente consultados em obras de referência [108, 109].

### 3.4.2 Formulação do método

Considere-se o corpo elástico  $D$ , representado na Figura 3.14, cuja fronteira é definida como  $S=S_0 \cup S_1$ .

Seguindo a filosofia inerente ao método dos elementos finitos, o domínio  $D$  é discretizado em porções finitas, para as quais são estabelecidas as equações de equilíbrio. O equilíbrio de cada elemento finito é definido através das equações fundamentais da elastodinâmica, já anteriormente apresentadas, e tendo em consideração as condições de fronteira geométrica e mecânica.

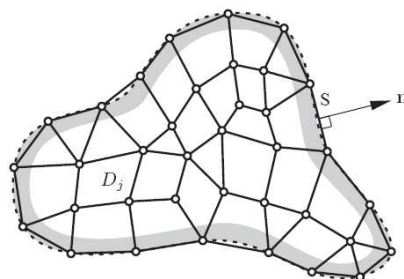


Figura 3.14 – Sólido discretizado por elementos finitos [9].

Para uma formulação em termos de elementos finitos é, regra geral, útil recorrer ao princípio dos trabalhos virtuais. Em aplicação elastodinâmicas, o estabelecimento de uma lei cinemática através da combinação do princípio dos trabalhos virtuais com o princípio d'Alembert é usualmente designado como princípio de Hamilton. Para sistema não conservativos, este princípio postula que o trabalho realizado pelas forças externas e pelas forças inerciais sobre um campo de

deslocamentos virtuais admissíveis é igual ao trabalho realizado pelas forças internas, adicionado à energia dissipada, devido a esse mesmo campo de deslocamentos virtuais. Em termos matemáticos,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV - \int_V \delta u_i (b_i - \rho \ddot{u}_i) dV - \int_{S_1} \delta u_i p_i dS \right) dt = 0 \quad i,j=x,y,z \quad [3.58]$$

em que  $\delta \varepsilon$  representa o campo de extensões virtuais associado ao campo de deslocamentos virtuais,  $\delta u$ , que é nulo nos instantes temporais  $t_1$  e  $t_2$ . As restantes variáveis tomam o significado anteriormente referido. Como é evidente, tratando-se de um problema dinâmico, as grandezas intervenientes, à excepção de  $\rho$ , obviamente, são função da posição espacial e do tempo. Uma vez que o campo de deslocamentos virtuais é arbitrário, é perfeitamente lícito admitir o seguinte:

$$\begin{aligned} \delta u_i(x, t) &= \delta u_i(x) \delta(t) \\ \delta \varepsilon_{ij}(x, t) &= \delta \varepsilon_{ij}(x) \delta(t) \end{aligned} \quad i,j=x,y,z; x=(x,y,z); t_1 < t < t_2 \quad [3.59]$$

Substituindo [3.59] em [3.58], procedendo à respectiva integração em ordem ao tempo e desprezando as forças volúmicas,  $b_i$ , obtém-se:

$$\int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV + \int_V \delta u_i \rho \ddot{u}_i dV - \int_{S_1} \delta u_i p_i dS = 0 \quad [3.60]$$

Considerando que as acções exteriores,  $p$ , apresentam variação harmónica ao longo do tempo com frequência angular  $\omega$ , a expressão [3.60] resulta em:

$$\int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV - \omega^2 \int_V \delta u_i \rho u_i dV = \int_{S_1} \delta u_i p_i dS \quad [3.61]$$

a qual traduz o equilíbrio energético em problemas elastodinâmicos.

O vector de extensões num ponto genérico do domínio não transformado é dado por:

$$\varepsilon = \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right]^T \quad [3.62]$$

Admitindo que o meio em análise apresenta desenvolvimento infinito e homogéneo no plano horizontal, considere-se que a transformada de Fourier dada pela expressão [3.4] é aplicada a todas as grandezas envolvidas em [3.61], o que corresponde a uma transformação espaço-número de onda permanecendo apenas a coordenada  $z$  no domínio não transformado. Deste

modo, no domínio transformado, as derivadas parciais em ordem a x e y podem ser determinadas analiticamente, logo a expressão [3.62] resulta no seguinte formalismo:

$$\tilde{\epsilon} = \left[ ik_1 \tilde{u}_x, ik_2 \tilde{u}_y, \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z}, ik_2 \tilde{u}_x + ik_1 \tilde{u}_y, \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial z} + ik_2 \tilde{u}_z, \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial z} + ik_1 \tilde{u}_z \right]^T \quad [3.63]$$

no qual apenas as derivadas parciais em ordem a z necessitam de ser determinadas por via numérica. Esta propriedade, associada a outras propriedades inerentes à utilização de métodos transformados, permite que o meio seja apenas discretizado ao longo da direcção z, desde que obedeça ao pressuposto de apresentar desenvolvimento infinito e homogéneo ao longo do plano horizontal, tal como se ilustra na Figura 3.15.

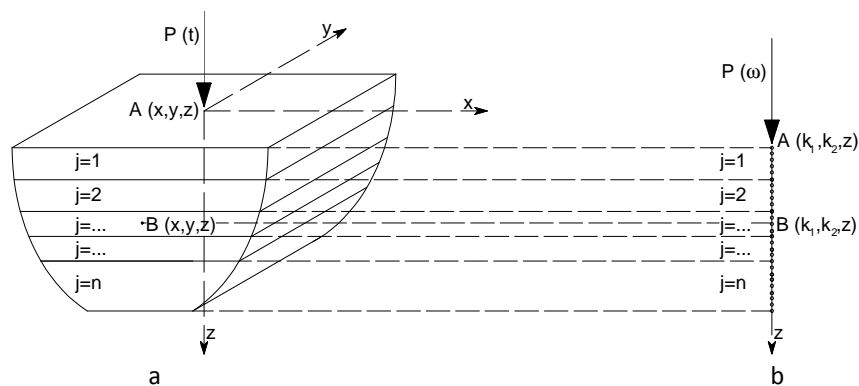


Figura 3.15 – Maciço estratificado submetido a acção dinâmica: a) domínio real; b) domínio transformado e discretização em profundidade.

No presente trabalho adoptaram-se elementos com geometria unidireccional, com três nós por elemento e dois pontos de Gauss (Figura 3.16). Cada nó apresenta três graus de liberdade, sendo por isso o problema totalmente tridimensional. Atendendo à discretização do meio em elementos finitos, o campo de deslocamentos no interior de cada elemento é aproximado a partir dos valores nodais (variáveis com índice n) através das funções de forma, de tal modo que:

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N]\{u_n\} \\ \{\delta u\} &= [N]\{\delta u_n\} \end{aligned} \quad [3.64]$$

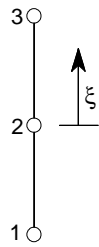
onde,

$$[N] = \left[ [N]_{i=1} \quad [N]_{i=2} \quad \dots \quad [N]_{i=ne} \right] \quad [3.65]$$

em que  $[N]_i$  representa a matriz diagonal das funções de forma associadas ao nó i de um elemento constituído por ne nós.

Para o tipo de elementos adoptados, as funções de forma no referencial local são dadas por:





$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi \\ N_2(\xi) &= 1 - \xi^2 \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi \end{aligned} \quad [3.66]$$

Figura 3.16 – Elemento finito de 3 nós.

Tendo em consideração as expressões [3.63] e [3.64], é possível estabelecer a seguinte relação directa entre o campo de extensões e os deslocamentos nodais do elemento:

$$\{\tilde{\varepsilon}\} = [\tilde{B}]\{\tilde{u}_n\} \quad [3.67]$$

em que,

$$[\tilde{B}] = [\tilde{B}_1 \quad \tilde{B}_2 \quad \tilde{B}_3] \quad [3.68]$$

e,

$$[\tilde{B}_i] = \begin{bmatrix} ik_1 N_i & 0 & 0 \\ 0 & ik_2 N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ ik_2 N_i & ik_1 N_i & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & ik_2 N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & ik_1 N_i \end{bmatrix} \quad [3.69]$$

Por uma questão de eficiência computacional, é conveniente dividir a matriz [B] em três submatrizes de modo a que todos os termos das submatrizes sejam independentes do número de onda:

$$[\tilde{B}_i] = [B_i]_0 + ik_1 [B_i]_1 + ik_2 [B_i]_2 \quad [3.70]$$

Sendo que as matrizes  $[B_i]_j$  têm a seguinte configuração:

$$[B_i]_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [B_i]_1 = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad [B_i]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [3.71]$$

Admitindo que o material apresenta comportamento elástico, linear e isotrópico, a relação entre o campo de tensões e os deslocamentos nodais é estabelecida atendendo à lei de Hooke:

$$\{\tilde{\sigma}\} = [D][\tilde{B}]\{\tilde{u}_n\} \quad [3.72]$$

Em que  $[D]$  é a matriz de comportamento elástico, cujos termos, definidos de acordo com a expressão [3.16], são entidades complexas de modo a atender ao amortecimento material.

A dedução do método sob a forma matricial é feita tendo por base o princípio de Hamilton, anteriormente descrito pela equação [3.61]. Contudo, a equação [3.61] refere-se à integração no domínio não transformado. Para proceder à aplicação do princípio de Hamilton no domínio transformado é necessário recorrer ao teorema de Parseval, que postula o seguinte [24, 110, 111] (formulação alternativa pode ser consultada em François et al. [112]):

$$\int \delta f(x)p(x)dx = \int \delta \tilde{f}(-k)\tilde{p}(k)dk \quad [3.73]$$

Deste modo, o trabalho realizado pelas forças internas e pelas forças de inércia é dado, respectivamente, por:

$$\int_V \delta \epsilon \sigma dV = \int_{k_1} \int_{k_2} \delta \tilde{u}_n(-k_1, -k_2)^T \int_z \tilde{B}(-k_1, -k_2) D \tilde{B}(k_1, k_2) dz \tilde{u}_n dk_2 dk_1 \quad [3.74]$$

$$\int_V \delta u \rho \ddot{u} dV = -\omega^2 \int_{k_1} \int_{k_2} \delta \tilde{u}_n(-k_1, -k_2)^T \int_z N^T \rho N dz \tilde{u}_n dk_2 dk_1 \quad [3.75]$$

Similarmente, o trabalho realizado pelas forças externas aplicadas na superfície do maciço é obtido através de:

$$\int_S p dS = \int_{k_1} \int_{k_2} \delta \tilde{u}_n(-k_1, -k_2)^T \tilde{p}_n dk_2 dk_1 \quad [3.76]$$

Substituindo [3.74], [3.75] e [3.76] em [3.61], e atendendo ao facto de a equação [3.61] ser válida para um campo de deslocamentos virtuais arbitrário, o equilíbrio de um elemento pode então ser definido por:

$$\left( [\tilde{K}] - \omega^2 [M] \right) \{ \tilde{u}_n \} = \{ \tilde{p}_n \} \quad [3.77]$$

em que [K] e [M] representam as matrizes de rigidez e massa no domínio transformado, sendo dadas, respectivamente, por:

$$[\tilde{K}] = \int_{\xi} [\tilde{B}(-k_1, -k_2)]^T [D] [\tilde{B}(k_1, k_2)] |J| d\xi \quad [3.78]$$

$$[M] = \int_{\xi} [N]^T \rho [N] |J| d\xi \quad [3.79]$$

sendo |J| o determinante da matriz Jacobiana.

Tendo em consideração a decomposição da matriz [B] anteriormente apresentada (equação [3.68]), a matriz [K] pode ser dividida em várias matrizes, tal como indicado em [3.80], de modo a tornar o processo de cálculo mais eficiente.

$$[\tilde{K}] = [K_0] + ik_1 [K_1] + ik_2 [K_2] + k_1^2 [K_3] + k_2^2 [K_4] + k_1 k_2 [K_5] \quad [3.80]$$

em que:

$$[K_0] = \int_{\xi} [B_0]^T [D] [B_0] |J| d\xi \quad [3.81]$$

$$[K_1] = \int_{\xi} [B_0]^T [D] [B_1] |J| d\xi - \int_{\xi} [B_1]^T [D] [B_0] |J| d\xi \quad [3.82]$$

$$[K_2] = \int_{\xi} [B_0]^T [D] [B_2] |J| d\xi - \int_{\xi} [B_2]^T [D] [B_0] |J| d\xi \quad [3.83]$$

$$[K_3] = \int_{\xi} [B_1]^T [D] [B_1] |J| d\xi \quad [3.84]$$

$$[K_4] = \int_{\xi} [B_2]^T [D] [B_2] |J| d\xi \quad [3.85]$$

$$[K_5] = \int_{\xi} [B_1]^T [D] [B_2] |J| d\xi + \int_{\xi} [B_2]^T [D] [B_1] |J| d\xi \quad [3.86]$$

Este procedimento de divisão da matriz de rigidez permite que as submatrizes de rigidez dos diversos elementos sejam assembladas uma única vez, sendo posteriormente afectadas pelos vários números de onda.

Por último, para a resolução do sistema de equações é necessário proceder à assemblagem das matrizes de massa e de rigidez dos vários elementos e definir as condições de fronteira. Uma vez que se pretende determinar soluções fundamentais, as forças externas são unitárias. No que toca ao processo de assemblagem e resolução do sistema de equações, existem diversos procedimentos que podem ser consultados na bibliografia da especialidade. Dado que o modelo foi implementado na plataforma de cálculo MATLAB, seguiu-se de perto os procedimentos sugeridos por Alberty et al. [113].

No que toca às condições de fronteira, esse aspecto é tratado com maior detalhe na secção seguinte.

### **3.4.3 Condições de fronteira**

Existem dois tipos de condições de fronteira com especial interesse para o tipo de problemas abordados na presente dissertação: i) impedimento de deslocamentos na base, com o intuito de analisar a resposta de maciços sobrejacentes a estratos indeformáveis, vulgo “bedrock”; ii) consideração de um espaço semi-indefinido, com o intuito de simular um maciço estratificado nos horizontes mais superficiais sobrejacente a um meio tido como homogéneo e com desenvolvimento infinito em profundidade.

A definição do primeiro tipo de condição de fronteira é trivial, bastando para isso prescrever que os deslocamentos do nó que estabelece o contacto entre o meio discretizado e o suposto meio indeformável sejam nulos. Por sua vez, a definição do segundo tipo de condição de fronteira é mais elaborada, já que o meio semi-indefinido subjacente ao meio discretizado apresenta propriedades dinâmicas, ou seja, massa, rigidez e amortecimento, que condicionam a resposta do sistema. Para além disso, o meio semi-indefinido terá de obedecer à condição de Sommerfeld, isto é, a energia que lhe é transmitida deverá propagar-se para infinito, não podendo regressar ao sistema em análise [114, 115]. Na presente proposta, a modelação do meio semi-indefinido é considerada através de uma formulação analítica exacta, que é acoplada ao meio discretizado, à semelhança do anteriormente explanado na formulação do método das matrizes de transferência de Haskell-Thomson.

A matriz de rigidez dinâmica do meio semi-indefinido é obtida através da inversão da matriz de flexibilidade do meio semi-indefinido (ver equação [3.26]), ou seja:

$$[\tilde{K}_{\text{dyn}}]_{s.m.} = [\tilde{S}][\tilde{R}]^{-1} \quad [3.87]$$

Esta matriz define a rigidez dinâmica do meio semi-indefinido, estabelecendo uma relação entre deslocamentos e tensões aplicadas superfície do mesmo, estando os termos relativos às propriedades de rigidez, inércia e amortecimento, devidamente combinados nos termos de rigidez dinâmica, razão pela qual não surgem matrizes explícitas relativas à rigidez ou massa como nos restantes elementos finitos (ver equação [3.77]).

Por último, a matriz de rigidez dinâmica do meio semi-indefinido é assemblada à matriz de rigidez dinâmica global, seguindo o procedimento usual da técnica dos elementos finitos. Com efeito, o meio semi-indefinido é tratado como qualquer outro elemento, com a particularidade de possuir apenas um nó, já que a matriz de rigidez dinâmica deste meio tem a dimensão de 3x3. Na Figura 3.17 ilustra-se o processo de construção da matriz de rigidez dinâmica global.

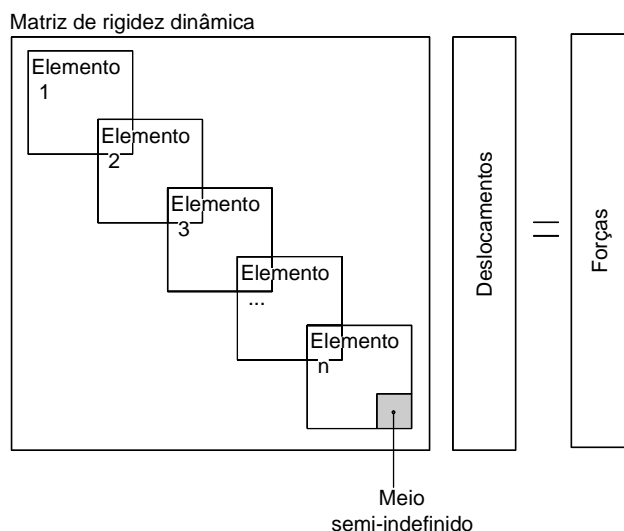


Figura 3.17 – Representação esquemática da matriz de rigidez dinâmica global de um maciço semi-indefinido.

#### 3.4.4 Extensão do modelo para simulação de meios anisotrópicos

O comportamento mecânico das formações geotécnicas pode diferir substancialmente do preconizado através de um modelo elástico e isotrópico, mesmo quando a problemática em estudo ocorre no domínio das designadas “pequenas deformações”. Principalmente quando os maciços geotécnicos são constituídos por formações sedimentares, a história de tensões e o próprio processo de transporte e deposição conferem ao solo uma estrutura caracterizada por uma orientação preferencial das partículas, pelo que existe um certo grau de anisotropia associado ao próprio processo de formação do mesmo. Esta anisotropia reflecte-se através da diferença entre as propriedades deformacionais na direcção perpendicular à orientação do

estrato (tida geralmente como horizontal) e as homólogas nas direcções inscritas no plano de estratificação. Conclui-se, pois, que o comportamento deformacional do maciço, neste tipo de situações, é descrito com maior precisão através de um modelo transverso isotrópico do que através de um modelo isotrópico [116, 117]. Como se compreende, maciços com uma história geológica mais recente apresentam menor grau de anisotropia do que os mais antigos, já que o carácter aleatório de deposição das partículas é mais evidente nos primeiros do que nos últimos [15, 118].

Contudo, apesar da evidência experimental de que os maciços sedimentares são geralmente anisotrópicos, a análise da problemática inerente à propagação de ondas elásticas e vibrações usualmente não os considera como tais mas sim como isotrópicos. Esta incoerência é em boa parte justificada pela dificuldade geralmente encontrada na obtenção dos parâmetros elásticos necessários à definição de um modelo transverso-isotrópico [119, 120], bem como ao aumento significativo da complexidade do problema, principalmente caso este seja resolvido de forma totalmente analítica [105, 121, 122]. Sem embargo, no que diz respeito ao primeiro aspecto, é conveniente mencionar que nos últimos anos se tem assistido a um avanço muito significativo ao nível das técnicas laboratoriais com o intuito de permitir uma avaliação fiável dos parâmetros elásticos necessários à definição do carácter anisotrópico dos solos na gama das muito pequenas deformações [123-125].

A influência da anisotropia do solo na propagação de vibrações, questão não muito escrutinada, é um aspecto que manifestamente interessa estudar, principalmente atendendo ao facto de a razão entre os valores das propriedades deformacionais no plano de isotropia e na direcção normal a este poderem atingir valores na ordem de 2,0, como se verifica, a título de exemplo nas argilas sobreconsolidadas de Londres [125, 126].

Com o intuito de colmatar esta lacuna, procedeu-se à extensão do modelo descrito para atender ao comportamento transverso isotrópico das formações geotécnicas. A extensão do modelo permite assim considerar maciços estratificados, semi-indefinidos ou sobrejacentes a formações infinitamente rígidas, em que o domínio discretizado pode ser simulado através de um modelo transverso-isotrópico, à excepção da formação semi-indefinida subjacente à zona do maciço discretizado por elementos finitos. Este último aspecto, embora do ponto de vista formal constitua uma limitação do modelo, do ponto de vista prático não é uma limitação muito significava, visto que, para profundidades consideráveis, nas quais é lícito admitir um modelo semi-indefinido, dificilmente se consegue obter informação geotécnica suficiente que permita a definição dos parâmetros mecânicos necessários à constituição de um modelo mais elaborado do

que o isotrópico. A esta justificação acresce ainda o facto de, para o tipo de problemas abordados na presente dissertação, serem as zonas mais superficiais do maciço aquelas em que pequenas variações dos parâmetros mecânicos podem ter uma influência significativa na resposta do mesmo.

Do ponto de vista matemático, a extensão do modelo para atender ao comportamento transverso-isotrópico reflecte-se através da alteração da matriz de elasticidade dos elementos, ou seja da matriz [D] anteriormente referida. Se no modelo elástico e isotrópico a matriz [D] depende apenas de dois parâmetros, o módulo de deformabilidade (E) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), no modelo transverso-isotrópico esta dependência reflecte-se através de cinco parâmetros [117, 127].

A lei de Hooke generalizada aplicada a um sólido com comportamento transverso-isotrópico apresenta seguinte forma [108, 126, 128]:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_x &= \frac{1}{E_p}(\Delta\sigma_x - \nu_{pp}\Delta\sigma_y) - \frac{\nu_{pz}}{E_z}\Delta\sigma_z \\ \Delta\varepsilon_y &= \frac{1}{E_p}(\Delta\sigma_y - \nu_{pp}\Delta\sigma_x) - \frac{\nu_{pz}}{E_z}\Delta\sigma_z \\ \Delta\varepsilon_z &= \frac{1}{E_z}\Delta\sigma_z - \frac{\nu_{zp}}{E_p}(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y) \\ \Delta\gamma_{xy} &= \frac{1}{G_p}\tau_{xy} \\ \Delta\gamma_{yz} &= \frac{1}{G_z}\tau_{yz} \\ \Delta\gamma_{xz} &= \frac{1}{G_z}\tau_{xz}\end{aligned}\tag{3.88}$$

em que  $E_i$ ,  $\nu_i$  e  $G_i$  representam o módulo de deformabilidade, o coeficiente de Poisson e o módulo de distorção, na direcção definida pelo índice  $i$ . A direcção definida por  $i=z$  corresponde à direcção normal ao plano de isotropia, sendo as direcções inscritas neste plano definidas por  $i=p$ .

Através de considerações energéticas, Pickering [129] demonstrou que  $\nu_{pz}$  e  $\nu_{zp}$  são relacionáveis da seguinte forma:

$$\frac{v_{pz}}{v_{zp}} = \frac{E_z}{E_p} \quad [3.89]$$

O modelo é função de apenas 5 parâmetros independentes porque o módulo de distorção no plano de estratificação (plano horizontal) é traduzido da seguinte forma:

$$G_p = \frac{E_p}{2(1+v_{pp})} \quad [3.90]$$

Numa formulação matricial, a relação tensão-extensão é então expressa por,

$$\{\Delta\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\Delta\sigma\} \quad [3.91]$$

em que (note-se que, face ao exposto se pode considerar  $v_{pp}=v_p$  e  $v_{pz}=v_z$ )

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_p} & -\frac{v_p}{E_p} & -\frac{v_z}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_p} & -\frac{v_z}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Simétrico.} & & \frac{1}{G_p} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_z} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_z} \end{bmatrix} \quad [3.92]$$

Tendo em atenção a expressão matricial [3.91], compete ainda referir que para que a energia de deformação por unidade de volume seja positiva é necessário que todos os determinantes de [3.92] sejam também eles positivos. Deste modo é condição obrigatória que os parâmetros que caracterizam o modelo transverso-isotrópico obedeçam às seguintes condições inerentes ao domínio de energia positiva [129, 130]:

$$\begin{aligned} E_p, E_z, G_z &> 0 \\ -1 < v_{pp} < 1 \end{aligned} \quad [3.93]$$

$$1 - v_{pp} - 2 \frac{E_p}{E_z} v_{pz}^2 > 0$$



Por último, refere-se ainda que o amortecimento material pode ser incorporado no modelo através da consideração de propriedades elásticas complexas, atendendo assim à dissipação energética através de um modelo de amortecimento histerético. Tal como referido no Capítulo 2, o próprio processo de dissipação de energia do solo é claramente dependente do processo deformacional, sendo por isso justificada a possibilidade de consideração de coeficientes de amortecimentos distintos para deformações volumétricas e de corte, isto mesmo admitindo comportamento isotrópico para o solo. Como se compreende, a formulação de um modelo viscoelástico transverso-isotrópico com carácter generalista exige a definição de coeficientes de amortecimento não só dependentes do processo deformacional mas também da direcção de deformação. Porém, a obtenção dos parâmetros inerentes à construção do modelo é muito difícil, razão pela qual se tornaria proibitivo em termos de aplicação prática. Como tal, na presente proposta apenas se considera um coeficiente de amortecimento global, independentemente da direcção de propagação da onda ou do processo deformacional induzido no solo.

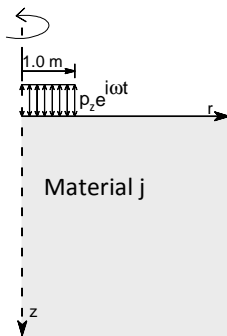
#### **3.4.5 Exemplos de validação**

A validação foi efectuada através da comparação cruzada entre os resultados obtidos pelo modelo agora descrito e pelo modelo semi-analítico das matrizes de transferência anteriormente apresentado e devidamente validado. Contudo, uma vez que se verifica uma total coincidência dos resultados obtidas pelas duas formulações, independentemente das condições de solicitação ou características geotécnicas do maciço, considera-se desnecessário explicitar essas comparações.

Em alternativa, apresenta-se um exemplo de validação que atende aos aspectos relativos ao modelo transverso-isotrópico, já que este aspecto não se encontra implementado no modelo baseado nas matrizes de transferência. Refira-se contudo que o actual modelo exige um esforço computacional consideravelmente superior ao exigido pelo método das matrizes de transferência, principalmente quando as frequências de interesse são relativamente elevadas. Esta constatação deve-se ao facto de ser necessária a discretização do domínio em profundidade de modo a que o comprimento de onda de interesse seja cerca de 6 vezes superior à dimensão dos elementos [8], o que, para frequências de excitação elevadas conduz a um número de graus de liberdade considerável.

Foi seleccionado como exemplo de validação um problema previamente estudado por Rahimian et al. [121], sendo que a metodologia adoptada pelos referidos autores é totalmente distinta da

agora apresentada. As características gerais do problema encontram-se sumariadas na Figura 3.18 sendo complementadas pela informação presente no Quadro 3.1.



Quadro 3.1 – Propriedades do meio transverso-isotrópico.

Material j	$E_z$ (MPa)	$E_p$ (MPa)	$G_z$ (MPa)	$\nu_{pz}$	$\nu_{zz}$
1	50	5	20	0,25	0,25
2	50	50	20	0,25	0,25
3	50	100	20	0,25	0,25
4	50	150	20	0,25	0,25

Figura 3.18 – Maciço semi-indefinido

Como se pode verificar, trata-se de um problema muito simples, no qual um maciço semi-indefinido é solicitado por uma carga harmónica uniformemente distribuída numa área circular com raio  $a=1,0$  m, localizada à superfície do maciço e centrada na origem do referencial. No estudo original levado a cabo por Rahimian et al. [121], a resposta do sistema é avaliada para duas frequências de solicitação, correspondendo a 50 rad/s e 300 rad/s, e considerando diferentes cenários geotécnicos, tal como indicado no Quadro 3.1. Na resolução original [121], a resposta do sistema foi avaliada no domínio do espaço-tempo, para condições de amortecimento material nulo. A consideração de amortecimento material nulo implica a existência de pólos nas funções de Green, o que exige um tratamento analítico especial do esquema de integração necessário à transformação dos resultados do domínio do número de onda-frequência para o domínio do espaço-tempo [7, 21, 72, 131, 132]. Contudo, a consideração de um valor reduzido para o amortecimento material é suficiente para que os pólos passem para o plano imaginário (atendendo ao facto de o número de onda ser uma entidade real), permitindo assim que a transformação para o domínio real (espaço-tempo) seja efectuada através de integração numérica, sem que, no entanto, os resultados difiram substancialmente dos obtidos para situações de amortecimento nulo. Por este motivo, no estudo agora apresentado admitiu-se um coeficiente de amortecimento histerético,  $\xi=0,001$ , independentemente das características mecânicas do maciço.

Para além da questão do amortecimento foi ainda necessário recorrer a outra simplificação. Tal como anteriormente referido o modelo transverso-isotrópico apenas pode ser aplicado à zona discretizada do maciço, o que exige a truncagem do domínio a partir de determinada profundidade. No presente exemplo, o domínio foi truncado aos 60 m, sendo o maciço discretizado em elementos com dimensão máxima de 30 cm.

Uma vez que o problema em estudo apresenta características axissimétricas, as funções de Green ( $u_z^G$ ) foram determinadas apenas ao longo de um eixo de números de onda, tendo-se considerado  $k_1=0$ , ou seja,  $k_2$  passa agora a corresponder à imagem transformada da coordenada radial  $r$ . A transformação para o domínio espaço é efectuada através de uma transformada inversa de Hankel, sendo a solicitação no domínio do número de onda caracterizada através de uma função de Bessel de primeira ordem:

$$u_z(r, z, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u_z^G(0, k_2, z, \omega) \frac{J_1(k_2 a)}{a} J_0(k_2 r) dk_2 \quad [3.94]$$

Nas Figuras 3.19a e 3.19b ilustra-se a evolução dos deslocamentos verticais (adimensionalizados,  $U_z^* = \pi G_z a u_z$ ) em profundidade (ao longo do eixo  $z$ ) e à superfície do maciço, respectivamente, para uma solicitação de resultante unitária e frequência de excitação  $\omega=50$  rad/s. Como é evidente, a resposta apresenta-se como um número complexo, já que a solicitação também assim é representada. Sobrepostos aos resultados obtidos pelo modelo proposto (linhas a cheio) encontram-se os resultados obtidos por Rahimian et al. [121] (pontos). Da observação das figuras retira-se de imediato que existe uma correspondência perfeita entre os resultados obtidos e as soluções de referência [121], independentemente do grau de anisotropia do maciço.

Como seria expectável, e se encontra bem patente na Figura 3.19, os deslocamentos verticais do maciço nas proximidades da fonte de excitação são tanto menores quanto maior for o módulo de deformabilidade na direcção perpendicular ao plano de isotropia.

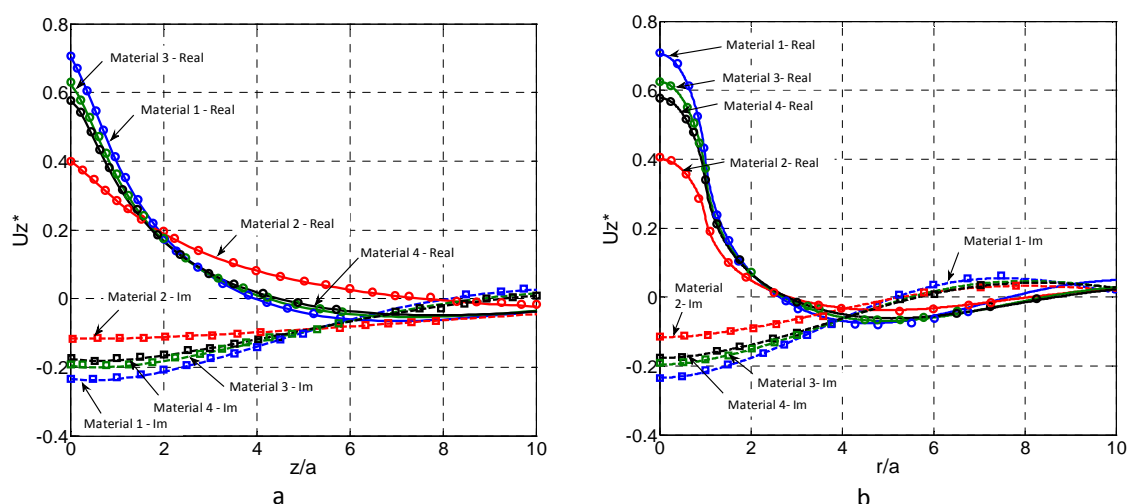


Figura 3.19 – Deslocamentos verticais adimensionalizados para  $\omega=50$  rad/s: a) ao longo do eixo dos  $z$ ; b) à superfície e ao longo de  $r$  (linhas – modelo proposto; pontos - [121]).

A Figura 3.20 corresponde às grandezas homólogas da Figura 3.19, mas agora considerando  $\omega=300$  rad/s. O exame comparativo das duas figuras, permite constatar que os comprimentos de onda gerados para a frequência de excitação mais elevada são substancialmente menores,

evidenciando-se também uma maior diferença da resposta em função do grau de anisotropia do meio. Tal como no caso anterior, e uma vez mais, os resultados obtidos pelo modelo proposto estão em excelente concordância com os resultados apresentados por Rahimian et al. [121].

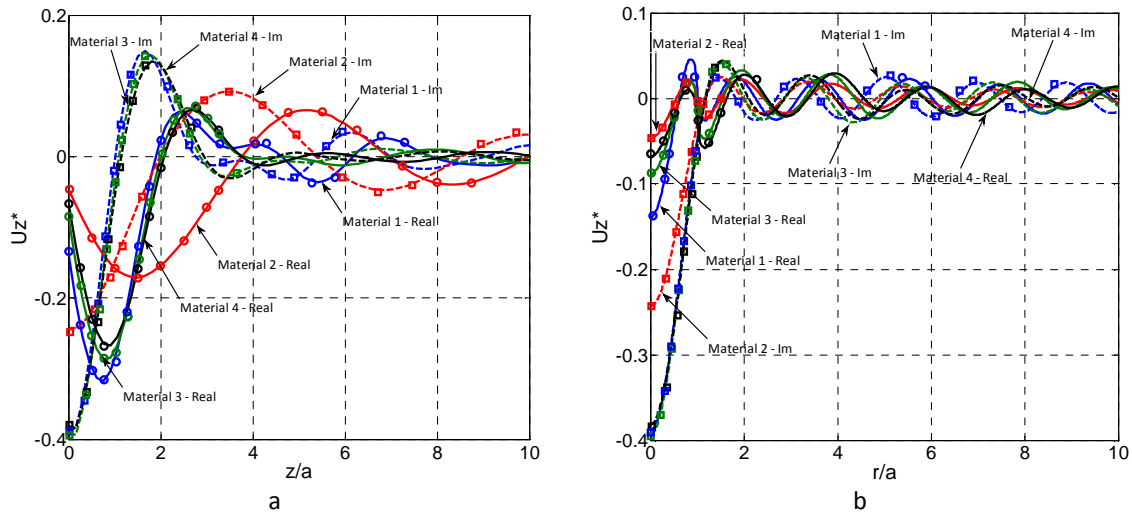


Figura 3.20 – Deslocamentos verticais adimensionalizados para  $\omega=300$  rad/s: a) ao longo do eixo dos z; b) à superfície e ao longo de r (linhas – modelo proposto; pontos - [121]).

Face aos resultados apresentados ao longo desta secção conclui-se que o modelo proposto encontra-se totalmente validado do ponto de vista teórico, tanto para condições mecânicas isotrópicas como para condições transverso-isotrópicas.

### 3.5 Extensão dos métodos para carregamentos móveis com velocidade constante

#### 3.5.1 Descrição da metodologia

Os modelos desenvolvidos até ao momento contemplam apenas situações em que a solicitação apresenta posição espacial fixa. Embora essas soluções tenham um interesse incontestável para a resolução de diversos problemas geotécnicos/estruturais, não permitem analisar os problemas a que a presente dissertação se dedica, ou seja, a análise da resposta dinâmica induzida por acções de tráfego ferroviário. A abordagem dos fenómenos dinâmicos induzidos por tráfego exige o desenvolvimento de modelos que contemplem solicitações com posição espacial variável ao longo do tempo, podendo a magnitude da solicitação ser também ela variável à medida que o carregamento se movimenta. Tendo em conta esta particularidade dos problemas em estudo, apresenta-se nesta secção uma extensão dos modelos previamente estudados para atenderem a situações de carregamentos móveis com velocidade constante.

Existem actualmente diversos procedimentos para a consideração de carregamentos móveis, tanto em modelos desenvolvidos no domínio do espaço-tempo, como em formulações no domínio do número de onda-frequência. Em seguida apenas se faz referência a formulações no domínio do número de onda-frequência, sendo o leitor remetido para os recentes trabalhos de vários autores [78, 79, 133] onde é efectuada uma descrição exhaustiva dos mais actuais métodos, desenvolvidos no domínio do espaço-tempo, para a análise da resposta dinâmica de maciços solicitados por cargas móveis.

No domínio do número de onda-frequência, a consideração de carregamentos móveis pode ser efectuada através da alteração do referencial onde são estabelecidas as equações de movimento e de equilíbrio. Esta abordagem implica a reformulação dos métodos anteriormente apresentados de modo a que o referencial, anteriormente tido com posição geométrica fixa, passe a movimentar-se conjuntamente com a solicitação [82, 133, 134]. Uma abordagem alternativa, consideravelmente mais simples e elegante do ponto de vista formal, passa por tirar partido de algumas das propriedades dos operadores transformados, nomeadamente da transformada de Fourier [63, 64, 67, 72, 135]. Seguindo esta última metodologia, considere-se o caso geral de uma carga harmónica, com frequência angular designada por  $\Omega$ , deslocando-se a velocidade constante no sentido positivo do eixo dos  $x$ . Esta solicitação é descrita matematicamente do seguinte modo:

$$P(x, y, z, t) = P_0(x, y, z)\delta(x - ct)e^{i\Omega t} \quad [3.95]$$

em que  $\delta(\cdot)$  corresponde ao operador delta de Dirac e  $c$  à velocidade de circulação do carregamento.

Aplicando uma transformada de Fourier à expressão [3.95] em ordem às variáveis espaciais  $x$  e  $y$  e tirando partido da propriedade de translação da respectiva transformada resulta em:

$$\tilde{P}(k_1, k_2, z, t) = \tilde{P}_0(k_1, k_2, z)e^{i(\Omega - k_1 c)t} \quad [3.96]$$

Considerando agora a transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência, a expressão [3.96] dá origem a:

$$\tilde{P}(k_1, k_2, z, \omega) = 2\pi\tilde{P}_0(k_1, k_2, z)\delta(\omega - (\Omega - k_1 c)) \quad [3.97]$$

O operador delta de Dirac presente em [3.97] indica que a função de carga toma valores nulos em todo o domínio à excepção dos casos em que a seguinte condição seja respeitada:

$$\omega = \Omega - k_1 c \quad [3.98]$$

o que permite concluir que a análise de um carregamento móvel no domínio do número de onda-frequência implica uma interdependência entre o número de onda e a frequência. Note-se que caso a velocidade de circulação seja nula, então esta interdependência deixa de se verificar, o que resulta na situação de solicitação com posição geométrica fixa, já previamente analisada.

Do ponto de vista matemático, a determinação das funções de Green para carregamentos móveis não exige qualquer alteração aos modelos anteriormente descritos, bastando apenas a substituição da frequência angular de excitação pela frequência determinada de acordo com a expressão [3.98].

Apesar da simplicidade de consideração de carregamentos móveis nas condições actualmente mencionadas, refira-se que, do ponto de vista computacional, a exigência aumenta significativamente, pois a simetria e antissimetria das funções de Green em torno da origem de  $k_1$  deixa de se verificar, o que leva a um significativo aumento do esforço computacional.

A determinação da resposta no domínio transformado induzidos por um carregamento móvel não constitui qualquer tipo de dificuldade. Contudo, uma referência deve ser feita no que toca à sua passagem do domínio transformado para o domínio real. Tendo em consideração a expressão [3.96], os procedimentos de cálculo anteriormente descritos permitem determinar a amplitude estacionária dos deslocamentos (ou qualquer outra grandeza) relativos a uma solicitação harmónica com frequência  $\omega = \Omega - ck_1$ , ou seja:

$$\tilde{u}_i(k_1, k_2, z, t) = \tilde{u}_i(k_1, k_2, z) e^{i(\Omega - ck_1)t} \quad [3.99]$$

em que o símbolo  $\sim$  confere à variável correspondente o significado de amplitude no domínio transformado.

A transformação inversa da equação [3.99] conduz ao seguinte resultado:

$$\tilde{u}_i(k_1, k_2, z, t) \rightarrow u_i(x - ct, y, z, t) e^{i\Omega t} \quad [3.100]$$

o que significa que ocorre naturalmente uma mudança do referencial fixo para o referencial móvel que acompanha o movimento da solicitação. Assim sendo, a determinação da resposta ao longo do tempo num ponto de observação fixo é efectuada através da consideração da amplitude estacionária da grandeza em causa em localizações variáveis no referencial móvel.

Face ao exposto, conclui-se, que uma das vantagens do recurso a formulações no domínio do número de onda-frequência reside exactamente na facilidade com que os modelos podem ser adaptados para a análise de carregamentos móveis com amplitude constante ou variável no

tempo, sem que para tal seja necessário recorrer a complexos esquemas de integração no tempo ou espaço, como é usual ocorrer nas formulações em que a resolução das equações é efectuada no domínio não transformado (espaço-tempo).

### **3.5.2 Exemplos de validação**

Tendo como objectivo a avaliação da acuidade e fiabilidade dos modelos propostos na determinação da resposta dinâmica de maciços geotécnicos face a carregamentos móveis, procede-se nesta secção à apresentação de dois pequenos exemplos previamente analisados por Barros e Luco [101]. Atendendo ao contexto em que estes exemplos são apresentados, não é efectuada uma discussão exaustiva dos resultados, visto que estes já foram devidamente analisados pelos autores originais [101].

O primeiro exemplo refere-se a uma maciço semi-indefinido que é solicitado por uma carga pontual, com direcção vertical, que circula à superfície do maciço no sentido positivo do eixo  $x$ , com velocidade  $c=700$  m/s (ver Figura 3.21). A resposta no domínio do número de onda atendeu às condições enunciadas no trabalho original [101], tendo-se considerado uma gama de  $k_1$  e  $k_2$  entre  $-7,18$  rad/m e  $7,18$  rad/m, devidamente discretizada em 2048 amostras.

Na Figura 3.21 é apresentada a história temporal do estado de tensão induzido no ponto B, localizado no eixo  $z$  e à profundidade de 10 m, pela passagem da carga à superfície do maciço. Os resultados são apresentados sob a forma adimensional em que  $t^*=C_s t/z$  e  $S_{ij}^*=\mu\sigma_{ij}/z$  (recorde-se que  $C_s$  e  $\mu$  corresponde à velocidade de propagação das ondas  $S$  e ao módulo de distorção, respectivamente;  $i,j=x,y,z$ ). O exame da figura permite constatar que há uma correspondência total entre os resultados obtidos pelo método das matrizes de transferência e os resultados propostos por Barros e Luco [101]. Compete ainda referir que a velocidade de circulação é significativamente inferior à velocidade de propagação das ondas  $S$  no solo, razão pela qual não se assiste à propagação de ondas no meio, ou seja, o carácter dinâmico do problema deve-se essencialmente ao facto da posição geométrica da solicitação variar ao longo do tempo.

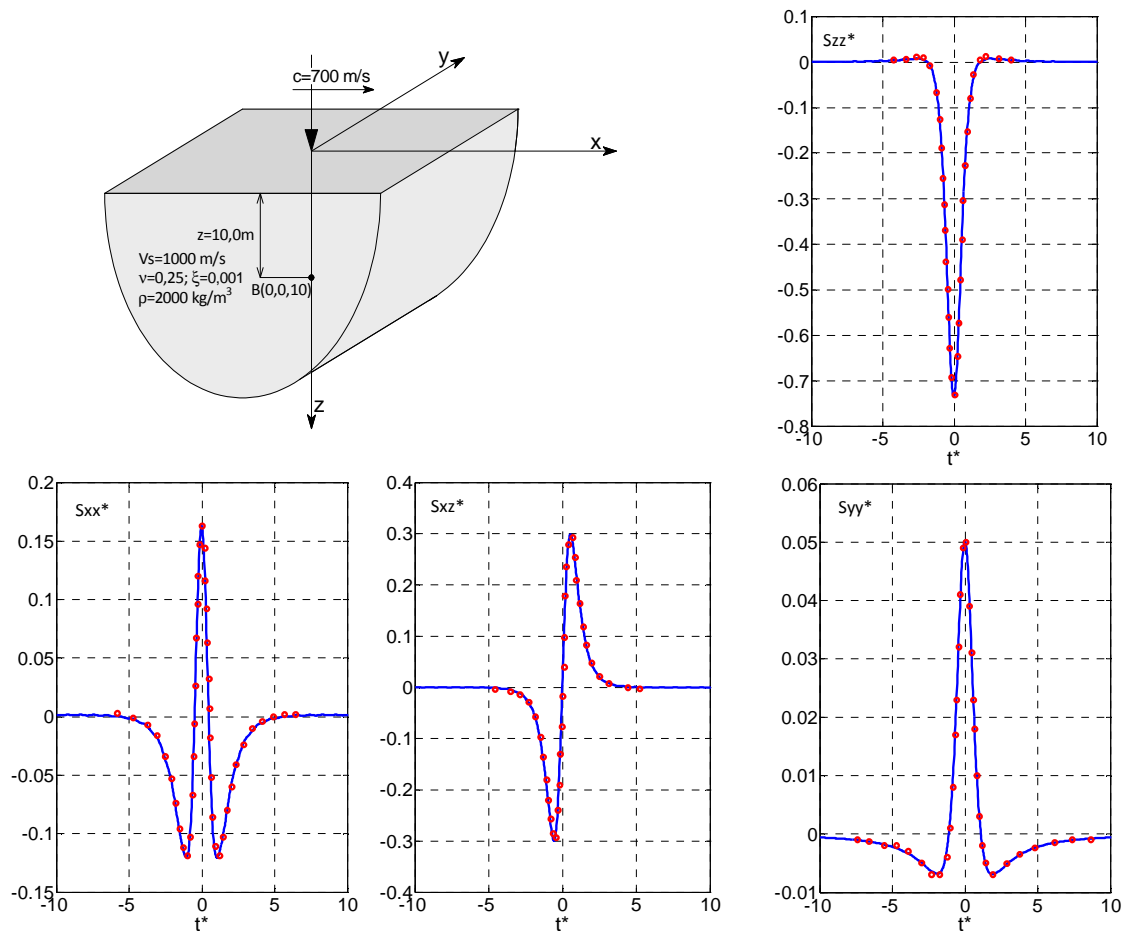


Figura 3.21 – História temporal do estado de tensão no ponto B(0,0,10) (linhas – modelo actual; pontos - proposta de Barros e Luco [101]).

De modo a avaliar também a acuidade do método dos estratos finos, analisou-se o mesmo exemplo, tendo os 10 metros superiores do maciço sido discretizados em elementos com dimensão máxima de 30 cm. A Figura 3.22 ilustra a história temporal, adimensionalizada ( $t^*=V_s*t/z$ ;  $U_i^*=\mu u_i/z$ ), dos deslocamentos verificados no ponto B. Da análise da Figura 3.22, retira-se, uma vez mais, que existe uma total concordância dos resultados obtidos através deste método com os propostos por Barros e Luco [101].



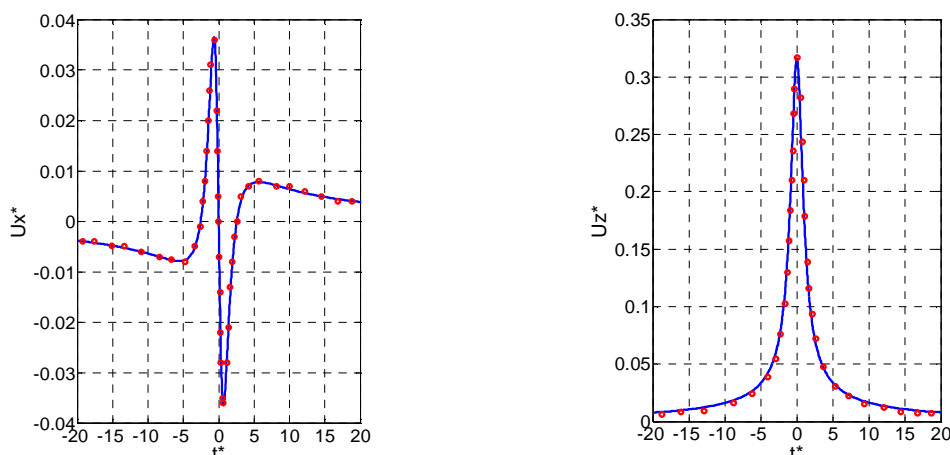


Figura 3.22 – História temporal dos deslocamentos verificados no ponto B(0,0,10) (linhas – modelo actual; pontos- proposta de Barros e Luco [101]).

Ainda que os resultados expressos nas Figuras 3.21 e 3.22 comprovem a elevada acuidade dos modelos desenvolvidos e implementados, deve ter-se presente que o exemplo analisado prima pela sua simplicidade, tanto ao nível das características mecânicas e geométricas do maciço como ao nível das condições de solitação. De modo a avaliar a fiabilidade dos modelos em condições mais complexas, considere-se agora o exemplo ilustrado na Figura 3.23, previamente analisado por Barros e Luco [101], no qual é considerado um maciço estratificado e uma velocidade de circulação do carregamento consideravelmente superior à velocidade de propagação das ondas S nos estratos mais superficiais do maciço.

A história temporal de deslocamentos observados no ponto B, localizado no eixo z e a 10 m de profundidade, é apresentada sob a forma adimensional na Figura 3.24. Por uma questão de complementaridade, os resultados relativos a deslocamentos verticais, apresentados na Figura 3.24a, foram avaliados através do método das matrizes de transferência, aos passo que a história temporal de deslocamentos horizontais (Figura 3.24b) foi determinada através do método dos estratos finos.

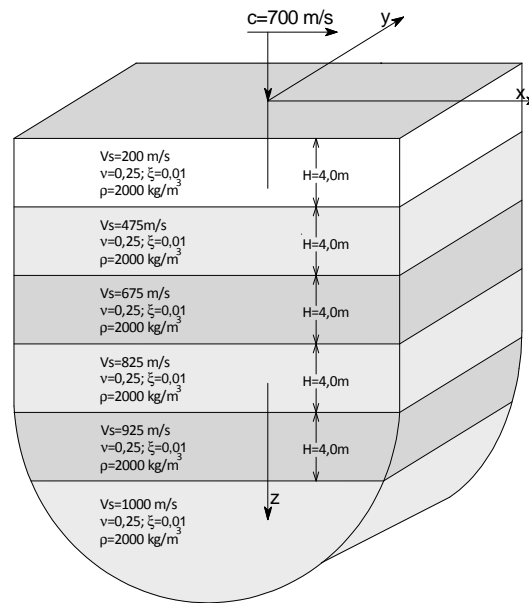


Figura 3.23 – Maciço estratificado submetido a carregamento móvel (adaptado de [101]).

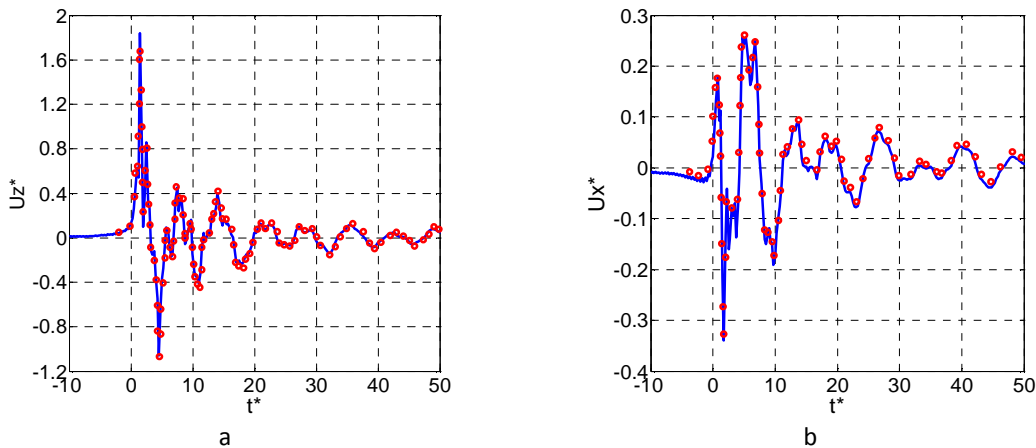


Figura 3.24 – História temporal dos deslocamentos avaliados no ponto B (0,0,10): a) deslocamentos verticais; b) deslocamentos horizontais. (linhas – modelo actual; pontos - Barros e Luco [101]).

O exame da Figura 3.24 permite constatar que, uma vez mais, há uma concordância total entre os resultados obtidos pelos métodos propostos e os resultados disponíveis na bibliografia.

Do ponto de vista da interpretação física dos fenómenos, note-se a existência de uma diferença assinalável entre os resultados expressos na Figura 3.22 e os homólogos ilustrados na Figura 3.24. Não obstante as diferenças induzidas pela estratificação do maciço, quando a velocidade de movimento da carga é superior à velocidade de propagação das ondas S no maciço assiste-se ao desenvolvimento de um verdadeiro fenómeno dinâmico, sendo possível identificar a vibração livre do meio após a passagem da carga e o desenvolvimento de um cone de Mach devido ao efeito de Doppler. Este e outros aspectos são devidamente analisados e discutidos na secção seguinte.

### 3.6 Comportamento dos maciços sujeitos a carregamentos móveis. Estudo paramétrico.

#### 3.6.1 Considerações iniciais

Nas secções anteriores desenvolvem-se duas metodologias distintas para a análise da resposta dinâmica de maciços geotécnicos face a excitações com posição geométrica fixa ou variável. Dado que a excitação induzida por carregamentos móveis assume particular importância no âmbito dos problemas abordados na presente dissertação, apresenta-se agora um estudo paramétrico focalizado na avaliação da relevância e influência dos seguintes aspectos principais: i) a velocidade de circulação; ii) a estratificação do maciço; iii) o carácter harmónico da solicitação.

No estudo paramétrico consideram-se três cenários geotécnicos distintos: i) Maciço 1 - maciço homogéneo semi-indefinido; ii) Maciço 2 - maciço estratificado semi-indefinido, em que o estrato superficial apresenta menor rigidez que o meio subjacente; iii) Maciço 3 - maciço estratificado semi-indefinido, em que o estrato superficial apresenta maior rigidez que o meio subjacente. No que concerne à solicitação, admite-se um carregamento vertical, com magnitude de 1 N, distribuído por uma área de  $2 \times 2 \text{ m}^2$ , localizada na superfície do maciço e que, no instante  $t=0 \text{ s}$ , se encontra centrada na origem do referencial. As propriedades mecânicas dos maciços geotécnicos para os três cenários considerados encontram-se sumariadas na Figura 3.25.

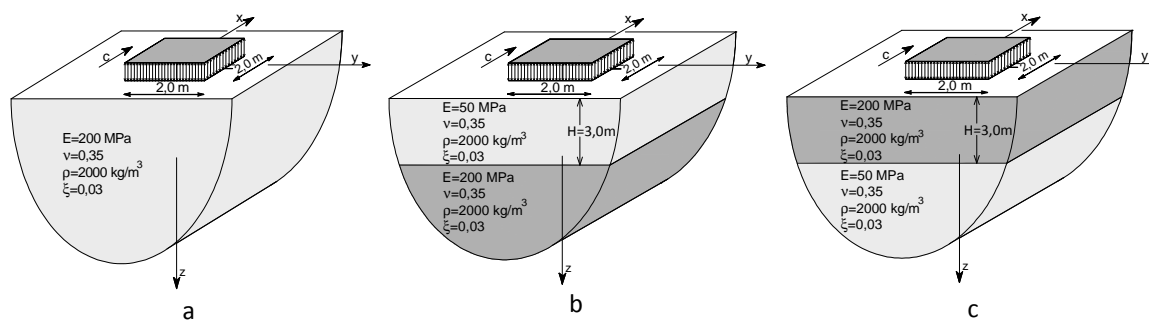


Figura 3.25 – Características gerais dos maciços considerados no estudo paramétrico: a) Maciço 1; b) Maciço 2; c) Maciço 3.

De acordo com o já explanado no Capítulo 2, quando uma excitação dinâmica é aplicada na superfície de um maciço a maior percentagem da energia transmitida ao sistema propaga-se na direcção paralela à superfície do mesmo através de ondas superficiais, isto é, ondas de Love e ondas de Rayleigh, que podem ser encaradas como os “modos” do maciço por analogia com a análise dinâmica estrutural [136]. É também demonstrado no Capítulo 2 que, em condições de isotropia elástica, os modos SH (ondas de Love) e modos P-SV (ondas de Rayleigh) são totalmente desacoplados, sendo que os primeiros apenas são excitados caso a solicitação apresente componente paralela à superfície do maciço. Uma vez que no presente caso só se consideram

fontes de excitação com direcção vertical, os modos SH não resultam em soluções interessantes, razão pela qual o estudo seguidamente apresentado se foca na análise da relação entre a resposta dinâmica do sistema, as condições de dispersão do tipo P-SV e a velocidade de circulação da solicitação.

Por uma questão de clareza de exposição, o estudo apresentado encontra-se dividido em duas partes. Na primeira consideram-se carregamentos móveis nos quais a magnitude da carga é constante ao longo do tempo, ou seja, é não oscilante, sendo este tipo de solicitação também por vezes designada como quasi-estática. Posteriormente, considera-se a possibilidade de o carregamento ter magnitude e posição geométrica variável ao longo do tempo, sendo este tipo de solicitação também por vezes designada por excitação dinâmica, em contraponto com a designação quasi-estática anteriormente referida.

### **3.6.2 Cargas móveis de magnitude constante (excitação quasi-estática)**

Os primeiros estudos relativos à análise da resposta dinâmica de meios semi-indefinidos face a solicitações móveis de magnitude constante datam do início do século passado, devendo-se aos trabalhos pioneiros desenvolvidos por Lamb [28] (posteriormente generalizado por Eason [137]). Embora se trate de um problema já devidamente escrutinado por vários autores, é aqui reanalisado, visto ser extremamente interessante do ponto de vista da interpretação teórica dos fenómenos envolvidos. Assim sendo, na Figura 3.26 ilustram-se os deslocamentos verticais da superfície do Maciço 1, no instante  $t=0$  s, para diferentes velocidades de circulação da carga no sentido positivo do eixo dos x. Os resultados são apresentados sob a forma adimensional, em que  $D^* = \mu u_z a / P$  ( $\mu$  é o módulo de distorção;  $a$  é metade do lado da área carregada;  $P$  é a resultante da pressão aplicada), sendo a velocidade de circulação dada pelo número de Mach, razão entre a velocidade de circulação e a velocidade de propagação das ondas de corte no maciço  $M = c / C_s$ .

Face ao exposto, pode concluir-se que a velocidade crítica de um maciço semi-indefinido, isto é, a velocidade de circulação para a qual se assiste à maior amplificação dinâmica, é igual à velocidade de propagação das ondas de Rayleigh nesse maciço. Ao contrário das conclusões apresentadas por Eason [137], mesmo num cenário de velocidade crítica, os deslocamentos têm carácter finito (ver Figura 3.26c). Tal facto deve-se à presença de amortecimento material, que não havia sido considerado nos estudos levados a cabo pelo referido autor. Como se compreende, a velocidade crítica encontra paralelismo na dinâmica estrutural com a frequência natural de um sistema com um grau de liberdade. Tal como num sistema com um grau de liberdade, o amortecimento material tem um papel preponderante na resposta do maciço quando solicitado em condições

correspondentes a condições de ressonância ou na proximidade desta. Este aspecto está bem patente na Figura 3.27, onde se apresenta o deslocamento de pico normalizado verificado no alinhamento  $y=0$  em função da velocidade de circulação e para dois valores distintos do coeficiente de amortecimento.

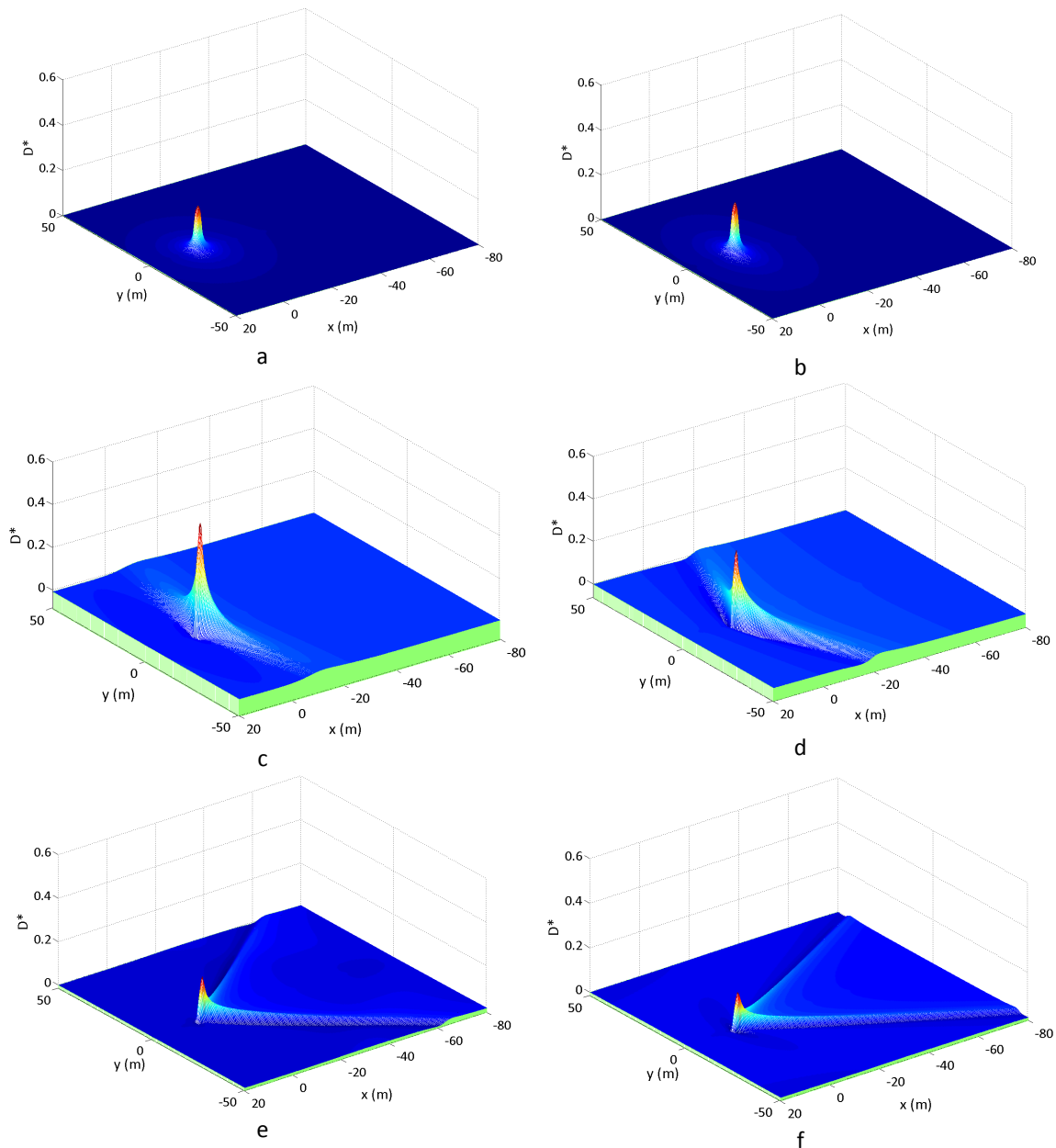


Figura 3.26 – Deslocamentos verticais superfície do Maciço 1, no instante  $t=0s$ , para solicitações com diferentes velocidades de circulação: a)  $M=0,5$ ; b)  $M=0,7$ ; c)  $M=0,934$ ; d)  $M=1,0$ ; e)  $M=1,5$ ; f)  $M=2,0$ .

Do ponto de vista da resposta dinâmica, a grande diferença entre um maciço semi-indefinido e um maciço estratificado reside no facto de o primeiro ser não dispersivo, ao passo que o segundo apresenta características dispersivas. Como já anteriormente discutido, as características dispersivas do maciço implicam uma diferença significativa na resposta do meio face a uma acção dinâmica. A este respeito, é conveniente proceder a uma diferenciação do que em sismologia se

designa por perfil normalmente dispersivo e perfil inversamente dispersivo. No caso do de um perfil normalmente dispersivo, os estratos superficiais do meio apresentam menor velocidade de propagação das ondas elásticas que os estratos subjacentes. Significa isto que ondas R associadas a frequências de excitação mais baixas têm velocidade de propagação mais elevada do que as ondas R associadas a frequências de excitação mais elevadas. Situação inversa é verificada quando o perfil é inversamente dispersivo, ou seja, nos casos em que as formações mais superficiais são mais rígidas (assumindo que a massa volúmica é constante para todo o meio) que as formações subjacentes. O Maciço 2 e o Maciço 3 (ver Figura 3.25) correspondem a casos típicos de perfis normalmente e inversamente dispersivos, respectivamente.

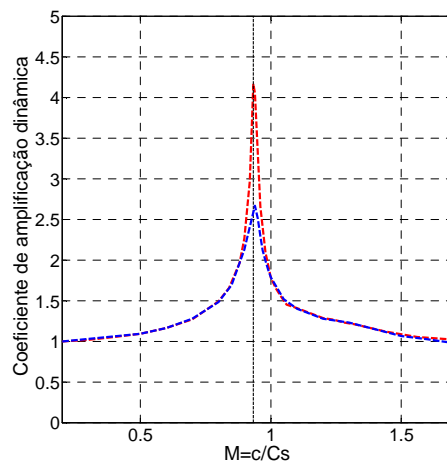


Figura 3.27 – Coeficiente de amplificação dinâmica dos deslocamentos verticais no alinhamento  $y=0$  m do Maciço 1 (linha vermelha- $\xi=0,01$ ; linha azul- $\xi=0,03$ ).

Na Figura 3.28 apresentam-se os deslocamentos verticais da superfície do Maciço 2, no instante  $t=0$  s, para diferentes velocidades de circulação definidas através  $M=c/Cs_{e.s}$  ( $Cs_{e.s}$  corresponde à velocidade de propagação de ondas S no estrato superficial). Os deslocamentos verticais encontram-se adimensionalizados atendendo ao módulo de distorção do estrato superficial,  $\mu_{e.s.}$ , ou seja,  $D^*=\mu_{e.s.}u_z/a/P$ .

Procedendo a uma análise comparativa entre os resultados expressos na Figura 3.28 e os homólogos verificados no cenário geotécnico correspondente ao Maciço 1, é possível estabelecer as seguintes notas: i) para valores de  $M$  significativamente inferiores a 1, o padrão de deformação é em tudo semelhante à deformação induzida por um carregamento estático, tal como já verificado no cenário geotécnico correspondente ao Maciço 1; ii) quando a velocidade de circulação iguala a velocidade de propagação das ondas R do estrato superior, assiste-se a uma amplificação dinâmica muito significativa, o padrão de deformação afasta-se consideravelmente do verificado para valores de  $M=0,5$  e  $M=0,7$ , contudo a zona deformada é muito mais circunscrita do que a verificada quando se admite um maciço homogéneo (ver Figura 3.26c);

iii) quando a velocidade de circulação é superior à velocidade de propagação das ondas R no estrato superficial do maciço, assiste-se a um fenómeno de vibração livre do maciço após a passagem da carga.

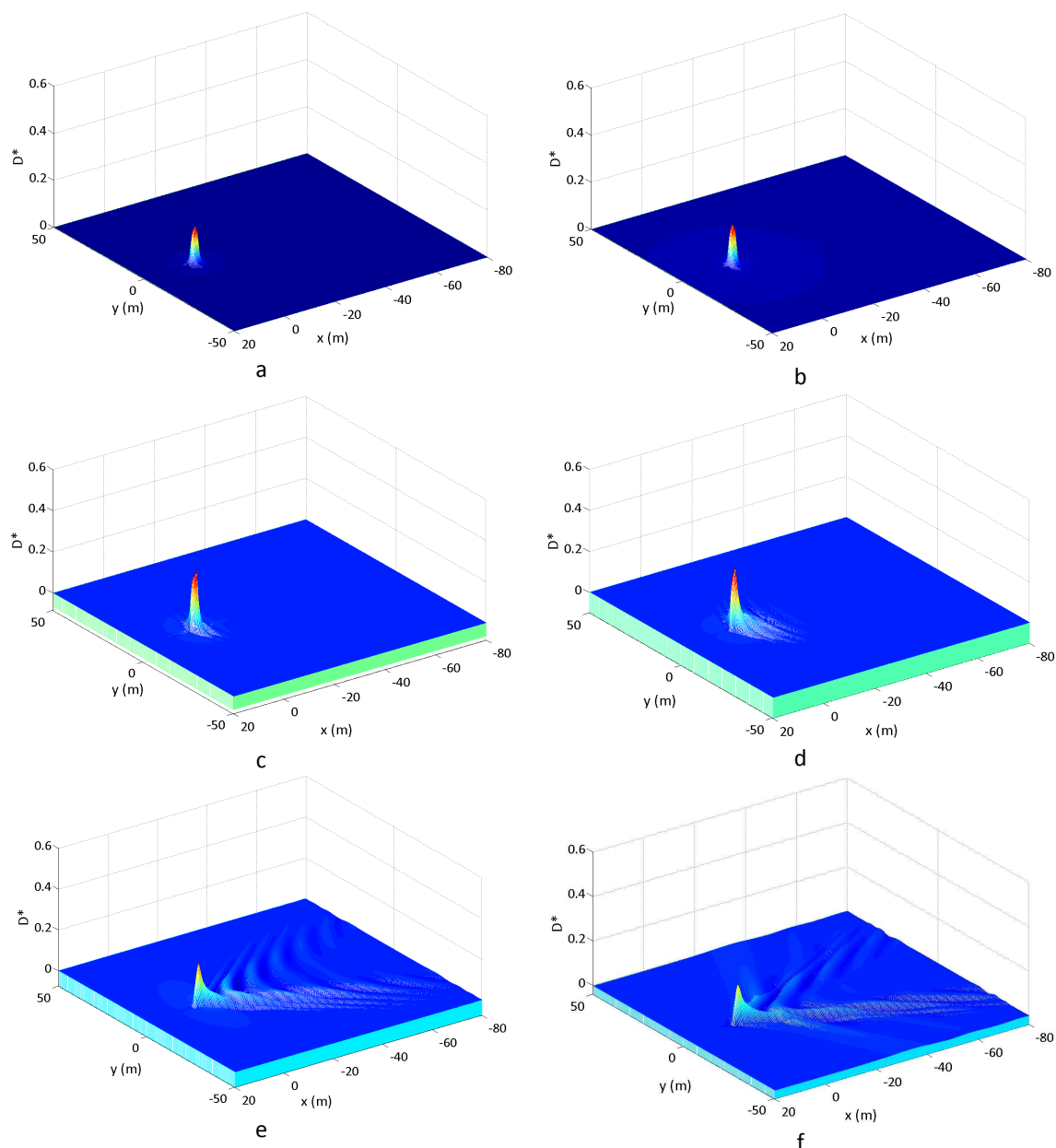


Figura 3.28 – Deslocamentos verticais da superfície do Maciço 2, no instante  $t=0$  s, para solicitações com diferentes velocidades de circulação: a)  $M=0,5$ ; b)  $M=0,7$ ; c)  $M=0,934$ ; d)  $M=1,0$ ; e)  $M=1,5$ ; f)  $M=2,0$ .

A interpretação física das particularidades da resposta dinâmica indicadas no parágrafo anterior é dada através da análise das características dispersivas do maciço. Na Figura 3.29a apresenta-se a relação de dispersão P-SV do Maciço 2 numa representação gráfica do tipo  $f$ - $k$ . Nesta representação, a velocidade de propagação das diferentes ondas P-SV é dada pelo inverso da tangente à curva de dispersão. Nos casos de excitação dinâmica com posição geométrica fixa, o carregamento é caracterizado, no referencial  $f$ - $k$ , pela representação de rectas verticais que

intersectam o eixo das abcissas na frequência correspondente à solicitação. Deste modo, e mediante as condições geométricas do carregamento, é sabido que a resposta será dominada por ondas com comprimento correspondente ao valor de  $1/k$  no ponto de intersecção da linha de carga com as curvas de dispersão. Considerando agora um carregamento móvel, as linhas de carga deixam de ser verticais, passando a ser definidas por rectas que intersectam a origem do referencial e fazem com o eixo das ordenadas um ângulo correspondente à velocidade de circulação. Estas linhas, aqui designadas por rectas de velocidade-carga, encontram-se representadas na Figura 3.29 para diferentes valores de  $M$ , em correspondência com os resultados apresentados na Figura 3.28.

A representação gráfica da Figura 3.29 permite verificar que para  $M=0,5$  e  $M=0,7$  não ocorre qualquer intersecção entre as linhas de velocidade-carga e as curvas de dispersão. Como tal, e de acordo com o apresentado na Figura 3.28, o padrão de resposta é muito semelhante ao de um carregamento estático. Porém, quando  $M=0,934$  verifica-se que a linha de velocidade-carga coincide com a curva de dispersão associada ao primeiro modo para frequências de excitação superiores a aproximadamente 20 Hz. Como tal, para esta velocidade de circulação, ocorre uma grande amplificação dinâmica, sendo que as ondas P-SV geradas se propagam a uma velocidade igual à de circulação do carregamento. Porém, nestas condições, frequências inferiores a 20 Hz, não excitam qualquer modo P-SV, ao contrário do que se verificaria caso o maciço fosse admitido como não dispersivo. É devido a este facto que se assinala a grande diferença entre os padrões de resposta ilustrados nas Figura 3.26c e Figura 3.28c.

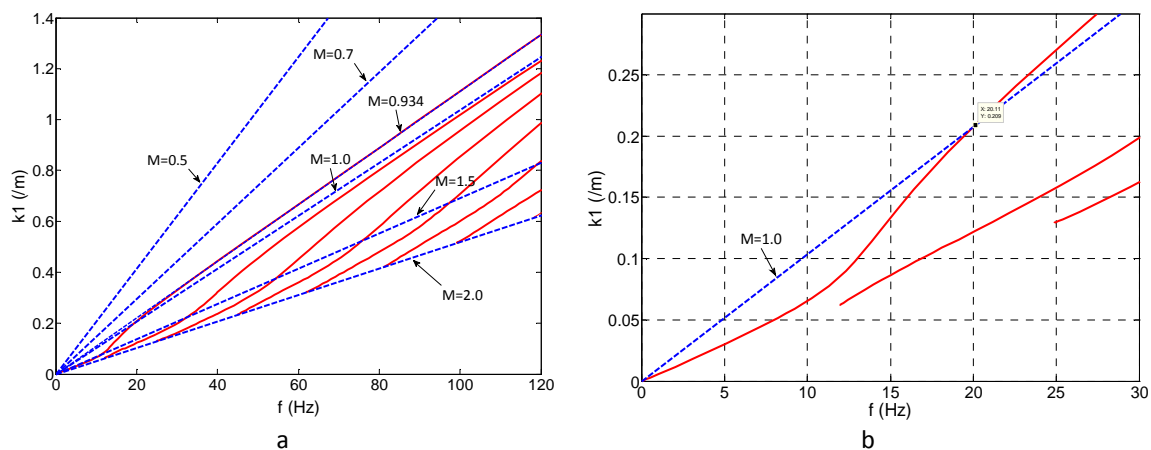


Figura 3.29 – Relação de dispersão P-SV do Maciço 2 no referencial f-k: a) vista geral; b) pormenor até aos 30 Hz.

Outro aspecto interessante, que pode ser devidamente escrutinado através das relações de dispersão, prende-se com o facto de para velocidades de circulação acima de  $C_R$  a solicitação ser seguida por uma oscilação livre do maciço. Para melhor discernir este efeito, considere-se a ampliação da relação de dispersão ilustrada na Figura 3.29b, onde também se representa a linha



velocidade-carga associada a  $M=1,0$ . Como se pode verificar, a linha velocidade-carga intersecta a curva de dispersão associada ao primeiro modo P-SV na proximidade dos 20 Hz, sendo assim expectável que a resposta seja condicionada, no domínio do espaço, por uma onda com comprimento de onda de cerca de 5,0 m (caso se opte por uma visualização no tempo, a onda está associada a uma frequência hertziana de aproximadamente 20 Hz). Analisando esta questão passo-a-passo, considere-se que a resposta de um qualquer ponto pertencente ao alinhamento definido por  $y=0$  m é dada, no domínio transformado, por:

$$u_z(k_1, y=0, z=0) = H_z(k_1, y=0, z=0) \frac{\sin(k_1 a)}{k_1 a} \quad [3.101]$$

em que  $u_z(k_1, 0, 0)$  representa a resposta no domínio semi-transformado,  $H_z(k_1, 0, 0)$  corresponde à função de transferência e os restantes termos referem-se à modelação da geometria do carregamento no domínio do número de onda.

Na Figura 3.30a representa-se a função de transferência dos deslocamentos verticais e a correspondente resposta no domínio transformado, nas condições correspondentes a  $M=1,0$ . Nesta figura encontra-se bem patente o facto de a resposta ser condicionada pela geração de uma onda com número de onda próximo de  $0,2 \text{ m}^{-1}$ . Por sua vez, na Figura 3.30b, apresenta-se o perfil de deslocamentos verticais ao longo do alinhamento  $y=0$  m, para o instante  $t=0$  s, e nas condições anteriormente referidas. Como se pode verificar, a zona carregada é seguida por uma onda com um comprimento de onda de cerca de 5,0 m, em correspondência com  $k_1=0,2 \text{ m}^{-1}$ . Note-se porém, que à frente da zona carregada não se propaga qualquer onda. Este efeito é justificado pelo simples facto de a velocidade de propagação da onda associada ao ponto de intersecção da linha velocidade-carga com a curva de dispersão ser inferior à velocidade de circulação. Esta conclusão é válida para qualquer maciço normalmente dispersivo, ou seja, nessas condições é impossível a geração de uma onda que se propague a uma velocidade mais elevada que a velocidade de circulação.

É conveniente esclarecer que para outros valores de  $M$ , a linha de velocidade-carga pode intersectar mais do que um modo P-SV, sendo por isso o padrão de resposta bastante mais complexo. Este facto é notório na Figura 3.28f, na qual se admite que  $M=2,0$ .

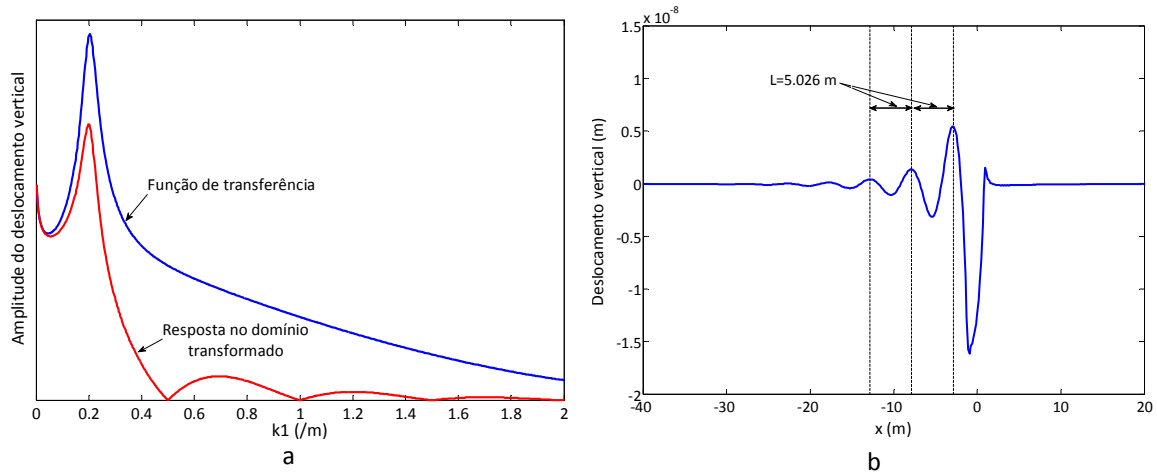


Figura 3.30 – Deslocamentos verticais no alinhamento  $y=0$  m à superfície do Maciço 2 e para  $M=1,0$ : a) Resposta no domínio transformado; b) Resposta no domínio real para  $t=0$  s.

Por último, e ainda considerando a informação presente na Figura 3.29, é possível concluir que um maciço normalmente dispersivo apresenta apenas uma velocidade crítica. Esta conclusão é justificada pelo facto de apenas para uma velocidade de circulação se conseguir uma coincidência entre a linha de velocidade-carga e a relação de dispersão de um modo P-SV. O valor crítico ocorre na proximidade do primeiro modo da relação P-SV, sendo a magnitude da amplificação máxima muito dependente da possança da formação mais superficial, tal como se ilustra na Figura 3.31 onde se apresenta a evolução do coeficiente de amplificação dinâmica no alinhamento definido por  $y=0$  m e para dois valores de espessura do estrato superficial, aqui designada pela letra H.

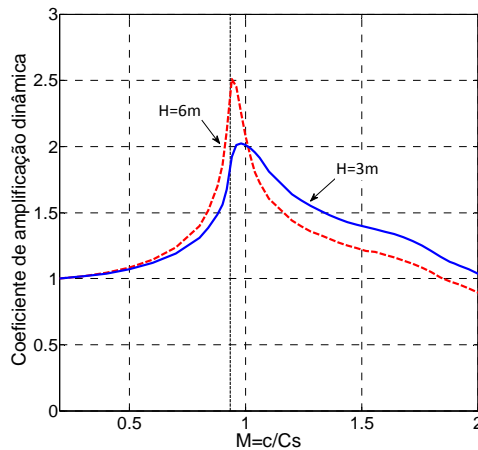


Figura 3.31 – Coeficiente de amplificação dinâmica dos deslocamentos verticais no alinhamento  $y=0$  m do Maciço 2 para dois valores de possança do estrato superficial.

A Figura 3.31 permite concluir que quanto maior for a possança do estrato mais superficial, maior é a amplificação dinâmica, assistindo-se a uma tendência de aproximação da resposta ao padrão identificado para um maciço homogéneo (ver Figura 3.27). Para além desta observação, a análise

da figura permite ainda comprovar a existência de apenas uma velocidade crítica, tal como anteriormente referido.

Prosseguindo agora com o estudo da resposta do Maciço 3, o qual apresenta um perfil inversamente dispersivo, considerem-se os resultados expressos na Figura 3.32 relativos aos deslocamentos verticais da superfície do maciço para diferentes velocidades de circulação.

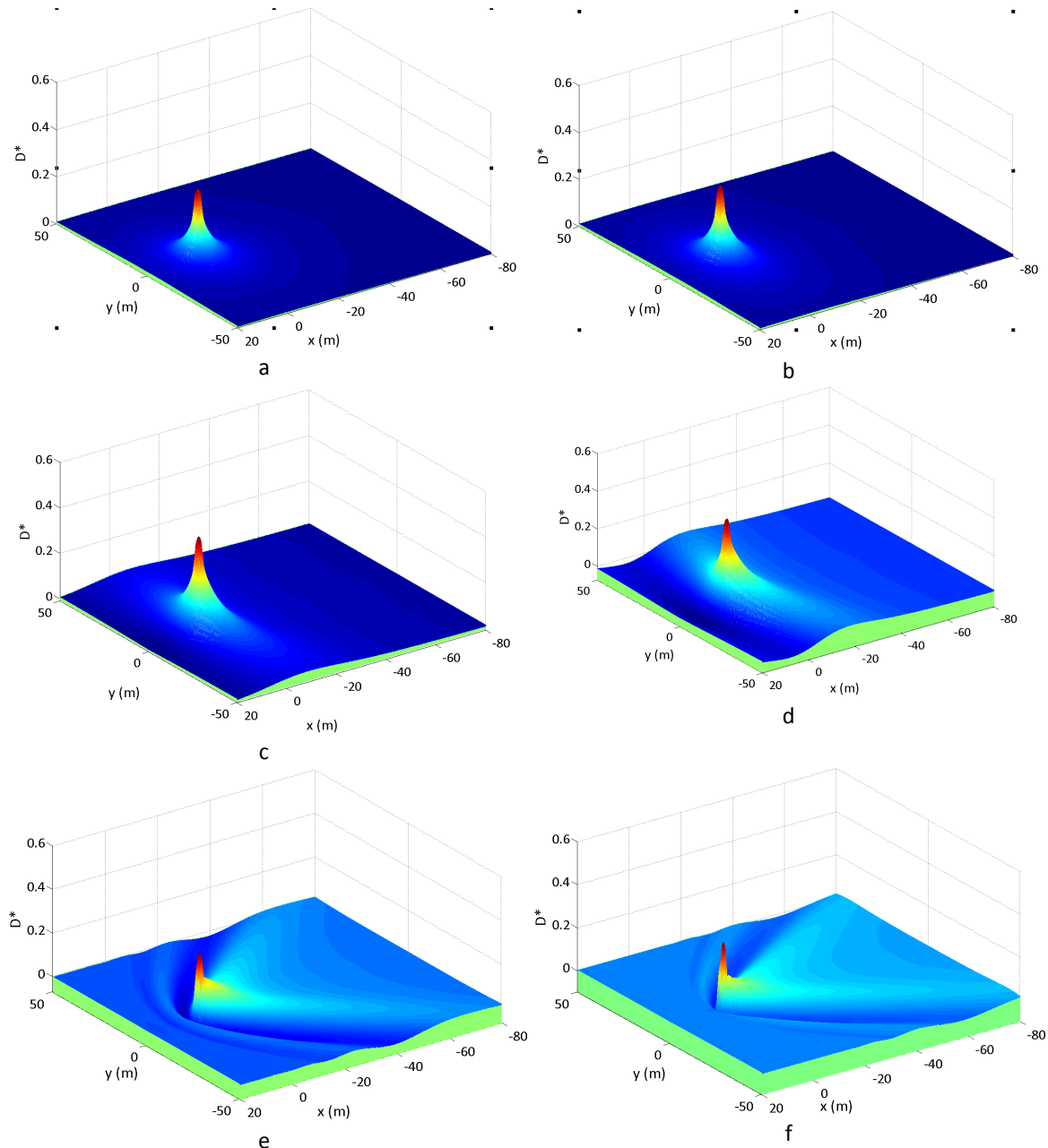


Figura 3.32 – Deslocamentos verticais da superfície do Maciço 3, no instante  $t=0$  s, para solicitações com diferentes velocidades de circulação: a)  $M=0,5$ ; b)  $M=0,7$ ; c)  $M=0,934$ ; d)  $M=1,0$ ; e)  $M=1,5$ ; f)  $M=2,0$ .

A comparação entre os resultados agora apresentados (Figura 3.32) e os homólogos relativos ao Maciço 2 (ver Figura 3.28), permite constatar a existência de algumas diferenças muito significativas ao nível das tendências seguidas pela resposta em função da velocidade de

circulação. Em primeiro lugar, refira-se que para valores reduzidos de  $M$ , o padrão de deformação é em tudo idêntico nos três casos aqui analisados, isto é, não se assiste a pronunciados efeitos dinâmicos. Contudo, quando a velocidade de circulação é ligeiramente superior à velocidade de propagação das ondas R de um maciço homogêneo com as características mecânicas da formação subjacente ao estrato superficial, assiste-se a uma muito considerável amplificação dinâmica dos deslocamentos verticais. Este facto está bem patente na Figura 3.33, onde se ilustra a evolução do coeficiente de amplificação dinâmica dos deslocamentos verticais, ao longo do alinhamento  $y=0$  m, em função da velocidade de circulação, para duas possanças distintas do estrato superficial, aqui definida pela letra H. Para além desta velocidade crítica, assiste-se também ao surgimento de uma outra, correspondente à velocidade de propagação das ondas R no estrato mais superficial. Os deslocamentos verticais da superfície do maciço, correspondentes a esta última velocidade crítica, encontram-se representados na Figura 3.32f.

A Figura 3.33, para além de revelar a existência de duas velocidades críticas, mostra também que a importância relativa de cada uma delas é claramente dependente da possança do estrato superficial. Caso a sua espessura seja reduzida, a primeira velocidade crítica é preponderante, ou seja, a resposta é condicionada pelas características mecânicas do maciço subjacente ao estrato. Porém, caso a espessura do estrato seja mais expressiva, a amplificação máxima ocorre quando a velocidade de circulação atinge a velocidade de propagação das ondas R do estrato superficial. Esta questão é devidamente justificada através da análise das relações de dispersão dos modos P-SV, que se encontram representadas na Figura 3.34, conjuntamente com as linhas de velocidade-carga para as diferentes condições indicadas na Figura 3.32.

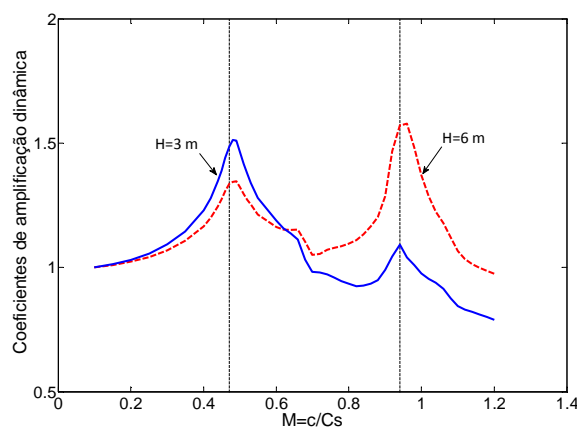


Figura 3.33 – Coeficiente de amplificação dinâmica dos deslocamentos verticais no alinhamento  $y=0$  m do Maciço 3 para dois valores de possança do estrato superficial.

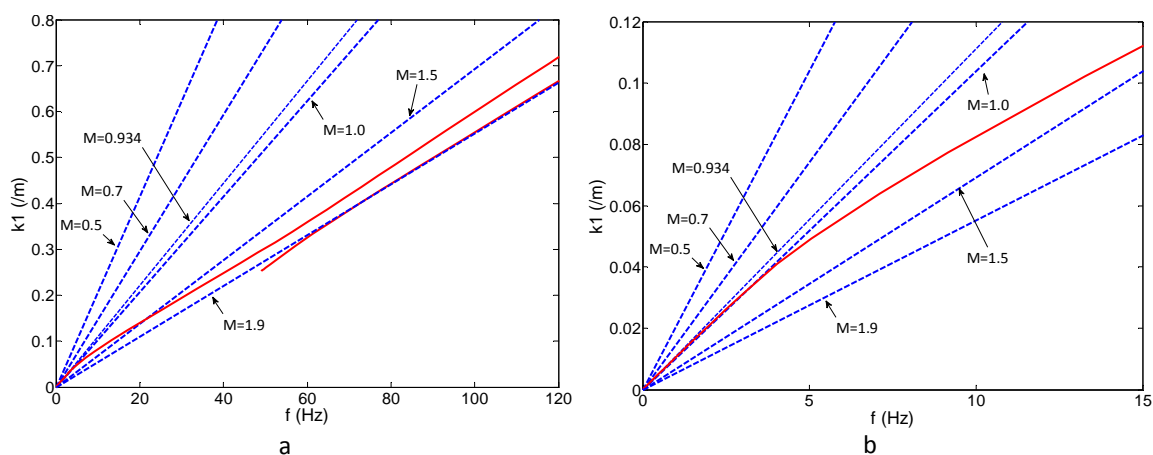


Figura 3.34 – Relação de dispersão P-SV do Maciço 3: a) geral; b) ampliação até aos 15 Hz.

Como se pode verificar, as relações de dispersão do Maciço 3 são bastante distintas das identificadas para o Maciço 2. Com efeito, quando a velocidade de circulação é ligeiramente inferior à velocidade de propagação das ondas S na formação subjacente ao estrato, assiste-se a uma coincidência, para frequências inferiores a 4Hz (ver Figura 3.34b), entre a relação de dispersão do modo P-SV e a linha velocidade-carga. Significa isto que as ondas excitadas se propagam a uma velocidade igual à de circulação do carregamento, originando assim um fenómeno semelhante à ressonância, ou seja, uma velocidade crítica. Porém, e ao contrário do que se observa no caso do Maciço 2, a coincidência entre curva de dispersão e linha de velocidade-carga não é única. Quando a velocidade de circulação atinge o valor da velocidade de propagação das ondas R no estrato superficial ( $M=1,9$ ), volta a assistir-se a uma coincidência entre velocidade de circulação e velocidade de propagação de ondas P-SV associadas ao segundo “modo”.

Por último, refira-se ainda que no presente cenário geotécnico é admissível a propagação de ondas à frente da carga. Este efeito é justificado pelo facto de a linha de velocidade-carga poder intersectar a curva de dispersão em pontos cuja velocidade de propagação é superior à velocidade de circulação, como por exemplo se verifica para  $M=1,5$  (ver Figura 3.32e e Figura 3.34a).

### 3.6.3 Cargas móveis com carácter harmónico (excitação dinâmica)

No estudo da resposta dinâmica de maciços geotécnicos face a acções de tráfego, para além da consideração da excitação quasi-estática, ou seja, a excitação induzida pelo movimento do carregamento com magnitude constante, é também importante a contemplação da designada excitação dinâmica. A excitação dinâmica corresponde ao movimento de um carregamento o qual

apresenta magnitude variável no tempo. Visto que a variação temporal da magnitude da carga pode ser traduzida através de séries ou transformadas de Fourier, a compreensão teórica da resposta do sistema face a solicitações harmónicas constitui a chave para a resolução do problema, sendo esta a temática abordada na presente secção.

Na secção anterior foi devidamente discutida a importância da estratificação do maciço na resposta do sistema face a carregamentos móveis, tendo-se apresentado a relação de dispersão P-SV como “entidade caracterizadora” da resposta dinâmica do maciço. Atendendo a este aspecto, apenas se analisa agora o cenário geotécnico referente ao Maciço 2 (Figura 3.25b), visto que conclusões em tudo semelhantes podem ser alcançadas através da interpretação das relações de dispersão para os cenários geotécnicos correspondentes ao Maciço 1 e Maciço 3.

Seguindo a metodologia de interpretação dos resultados assente nas relações de dispersão P-SV e nas linhas velocidade-carga, considere-se a relação de dispersão do Maciço 2, representada na Figura 3.35, na qual se encontram sobrepostas as linhas de velocidade-carga para diferentes velocidades de circulação de um carregamento com as características geométricas indicadas na Figura 3.25 e com uma frequência de oscilação de 20 Hz. As velocidades de circulação encontram-se definidas através do número de Mach,  $M$ , dado pela razão entre a velocidade de circulação e a velocidade de propagação das ondas S no estrato superficial do maciço.

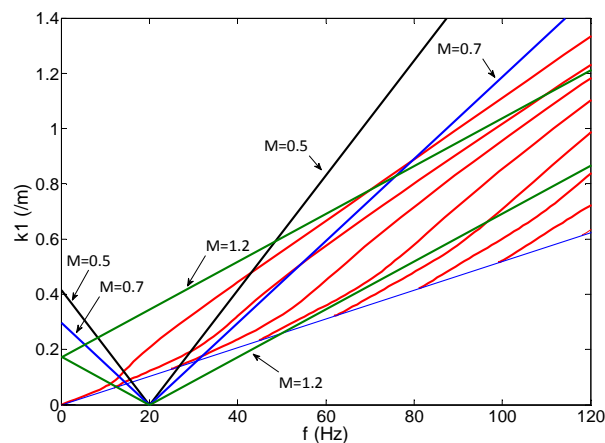


Figura 3.35 – Relação de dispersão P-SV do Maciço 2 e linhas de velocidade-carga para diferentes velocidades de circulação e frequência de oscilação  $f=20$  Hz.

As linhas de velocidade-carga intersectam o eixo das abcissas no ponto correspondente à frequência de oscilação da carga, sendo a velocidade de circulação dada pela sua inclinação. Uma vez que as funções de transferência deixam de ser simétricas (ou antissimétricas) relativamente ao número de onda, compreende-se a representação de linhas de carga nas duas direcções indicadas, mostrando-se assim como uma carga móvel oscilante a uma dada frequência gera uma resposta caracterizada não por uma frequência única, mas sim por um conjunto de frequências.

Este fenómeno deve-se ao efeito de Doppler verificado num ponto de observação fixo à medida que o carregamento numa primeira fase se aproxima e depois se afasta do referido ponto. Em paralelismo com as conclusões apresentadas para carregamentos móveis não oscilantes, a resposta do maciço será dominada pelas frequências correspondentes à intersecção das linhas velocidade-carga com as curvas de dispersão. Como se pode verificar, e ao contrário do observado para a solitação quasi-estática, a excitação dinâmica implica sempre a geração de ondas, já que, para qualquer valor da velocidade de circulação e para qualquer frequência de oscilação diferente de zero, ocorre sempre intersecção entre as linhas velocidade-carga e as curvas de dispersão. Esta conclusão é apenas aplicável a maciços semi-indefinidos, sendo que para maciços delimitados por uma fronteira inferior rígida as curvas de dispersão não são definidas para todos os valores de frequência, ou seja, para frequências baixas não ocorre propagação de ondas.

De modo a comprovar alguns dos aspectos mencionados no parágrafo anterior, considere-se que a resposta do maciço no domínio transformado, e ao longo do alinhamento  $y=0$  m, é dada pela expressão [3.100]. Nas Figuras 3.36a e 3.36b mostra-se a função de transferência e a resposta no domínio transformado para os casos em que  $M=0,5$  e  $M=1,2$ , respectivamente.

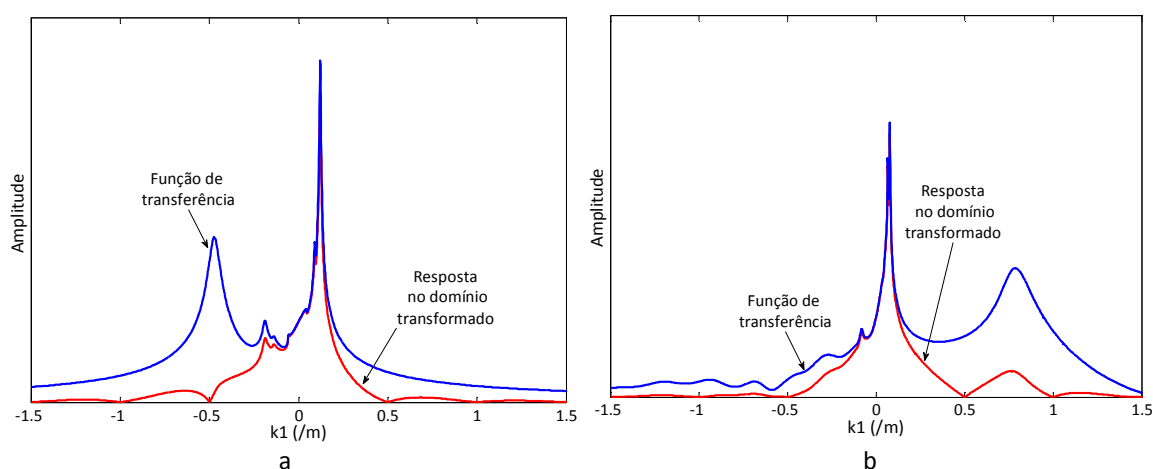


Figura 3.36 – Resposta no domínio transformado para frequência de oscilação de 20 Hz e diferentes velocidades de circulação: a)  $M=0,5$ ; b)  $M=1,2$ .

Analisando as funções de transferência apresentadas na Figura 3.36 e atendendo à representação indicada na Figura 3.35 facilmente se identifica que os picos da função de transferência estão em concordância com os pontos de intersecção das linhas velocidade-carga com as curvas de dispersão. Para além disso, verifica-se também que os valores mais acentuados da função de transferência correspondem à intersecção das linhas velocidade carga com a curva de dispersão associada ao primeiro modo P-SV. Contudo, deverá ter-se em atenção o facto da modelação da carga no domínio  $f$ - $k$  inibir a propagação de certas ondas, como aliás se verifica na Figura 3.36a,

onde o pico da função de transferência associado a  $k_1 = -0,5 \text{ m}^{-1}$  (ou  $f$  aproximadamente igual a 40 Hz) corresponde a um valor praticamente nulo da função de resposta.

Passando à interpretação dos resultados no domínio não transformado, na Figura 3.37 apresentam-se os deslocamentos verticais da superfície do Maciço 2, no instante  $t=0 \text{ s}$ , para duas velocidades de circulação distintas, definidas através  $M=c/Cs_{e.s.}$ , e para a frequência de oscilação da carga de 20 Hz. Os deslocamentos verticais encontram-se adimensionalizados atendendo ao módulo de distorção do estrato superficial,  $\mu_{e.s.}$ , ou seja,  $D^* = \mu_{e.s.} u_z a / P$ .

A análise comparativa entre as Figuras 3.37a e 3.37b permite retirar as seguintes ilações: i) para velocidades de circulação relativamente baixas, a propagação das ondas geradas origina um padrão de deformação vertical com superfícies aproximadamente circulares; ii) para velocidades correspondentes a valores de  $M$  superiores a 1, assiste-se à formação do cone de Mach e a frente de onda toma forma elíptica; iii) independentemente da velocidade de circulação, as ondas que se propagam à frente do carregamento apresentam menor amplitude e comprimento de onda do que as ondas que se propagam atrás do carregamento.

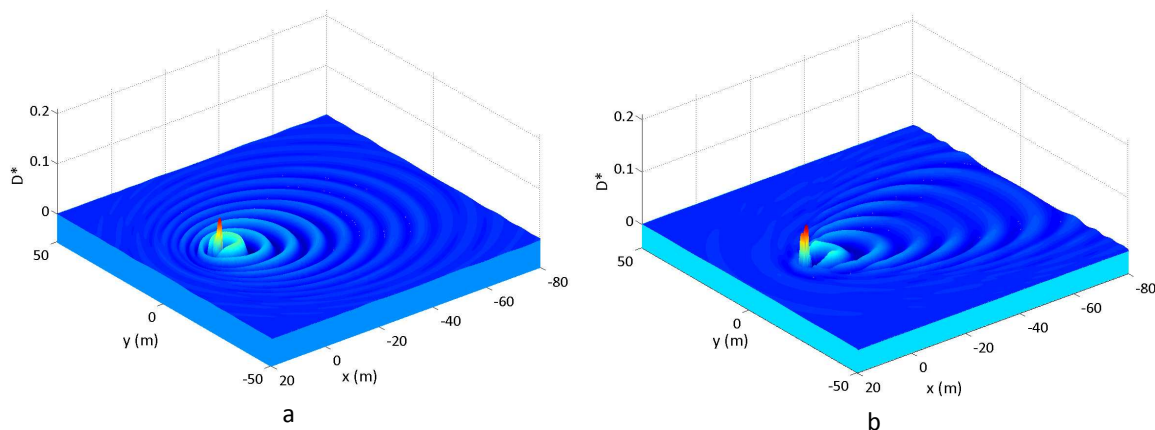


Figura 3.37 – Deslocamentos verticais da superfície do Maciço 2, no instante  $t=0 \text{ s}$ , para diferentes velocidades de circulação: a)  $M=0,5$ ; b)  $M=1,2$ .

Os mesmos resultados podem também ser representados no domínio do tempo, isto é, tomando um ponto de observação no espaço para o qual se representa a história temporal do deslocamento. Na Figura 3.38 ilustram-se os deslocamentos verticais identificados ao longo do tempo no ponto B, correspondente à origem do referencial fixo, quando o carregamento circula a uma velocidade correspondente a  $M=0,5$ . Como se pode verificar, após a passagem da carga assiste-se à vibração livre do maciço numa frequência próxima dos 14,0 Hz, em correspondência com o ponto de intersecção entre a linha de velocidade-carga e a curva de dispersão associada ao primeiro modo do maciço. Como é evidente, nos resultados apresentados apenas se considerou a parcela real do deslocamento, já que a imaginária não apresenta significado físico.



Como seria expectável, a resposta é claramente afectada pela localização do ponto de observação na direcção perpendicular à de circulação do carregamento. Para essa diferença em muito contribuem as características de amortecimento material e geométrico, bem como o carácter dispersivo do maciço em análise. Este efeito encontra-se bem patente na Figura 3.39, onde se apresentam os deslocamentos verticais determinados no ponto de observação C(0,10,0), nas condições de solicitação referidas para a Figura 3.38.

Comparando os deslocamentos verticais nos pontos de observação B e C, conclui-se que para além das diferenças expectáveis ao nível da amplitude do deslocamento, existem também diferenças significativas ao nível do conteúdo da resposta em frequência. Na presente situação, o conteúdo em frequência encontra-se balizado entre as duas frequências correspondentes à intersecção da linha velocidade-carga com a curva de dispersão associada ao primeiro modo P-SV.

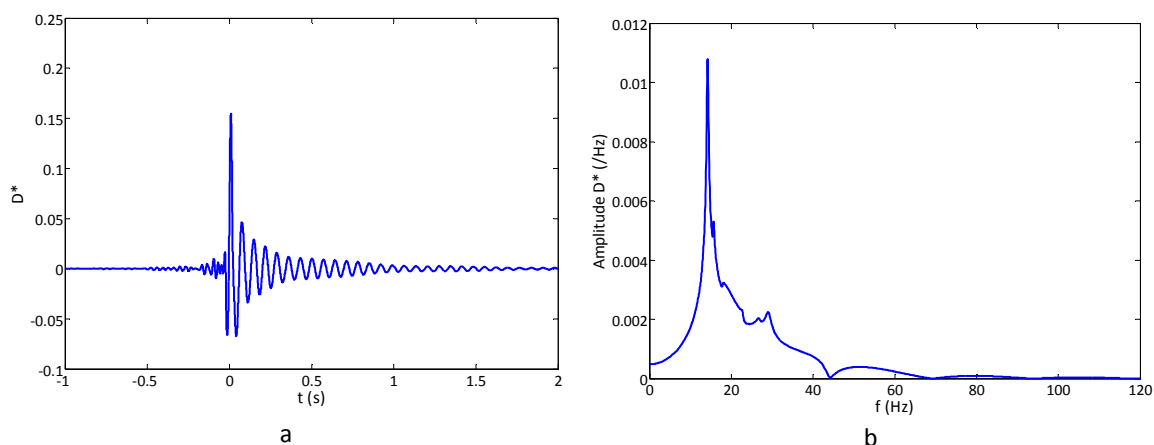


Figura 3.38 – Deslocamentos verticais do ponto B, coincidente com origem do referencial, para  $M=0,5$  e  $f=20$  Hz: a) história temporal; b) conteúdo em frequência.

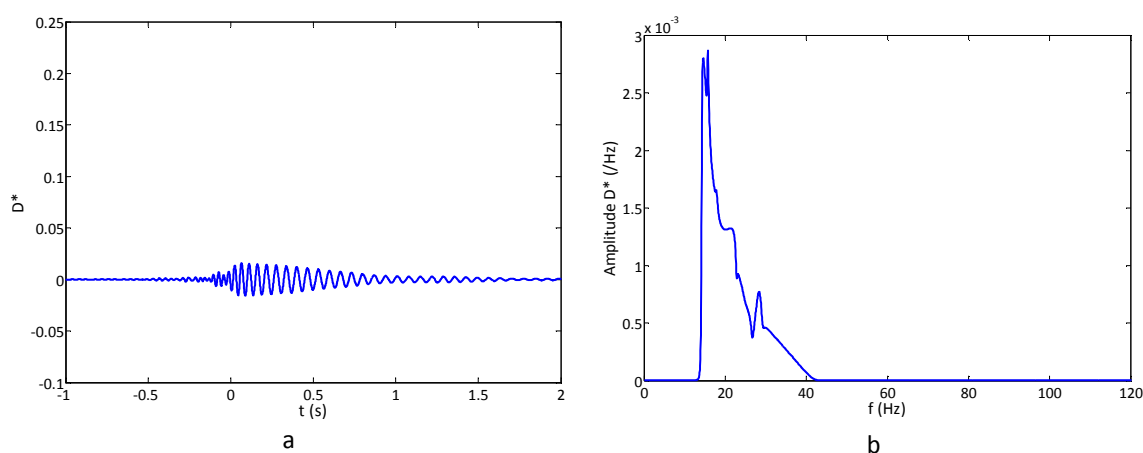


Figura 3.39 – Deslocamentos verticais do ponto C(0,10,0) para  $M=0,5$  e  $f=20$  Hz: a) história temporal; b) conteúdo em frequência.

Embora não se apresentem resultados relativos a outras velocidades de circulação e/ou frequências de oscilação do carregamento, as conclusões aqui apresentadas são em tudo

extensíveis a outros casos, já que a interpretação dos resultados é baseada na análise fundamental das curvas de dispersão do maciço e sua interação com as características da solicitação definidas através das linhas velocidade-carga.

### **3.7 Considerações finais**

No capítulo que agora termina apresentam-se duas metodologias distintas para a avaliação da resposta de maciços geotécnicos face a acções dinâmicas, com carácter móvel ou fixo, aplicadas na sua superfície. O procedimento de cálculo, baseado no MIT, revela-se extremamente eficiente para a análise de meios de grandes dimensões, não sendo necessária a adopção de metodologias especiais para o tratamento de fronteiras artificiais, até porque estas não existem na metodologia adoptada. Para além da eficiência computacional resultante da resolução dos sistemas de equações no domínio do número de onda – frequência, a extensão dos modelos para situações de solicitação com carácter móvel ocorre de forma natural, sem que seja necessária a elaboração de um algoritmo especialmente concebido para esse efeito.

Para além da exposição dos fundamentos teóricos inerentes às metodologias implementadas na plataforma Matlab 2009, apresentam-se ainda alguns exemplos de validação onde os resultados vaticinados pelos modelos desenvolvidos são confrontados com os homólogos apresentados por outros autores e devidamente reportados na bibliografia. Dos estudos de validação apresentados retira-se de imediato que existe uma concordância perfeita entre resultados, tanto para solicitações dinâmicas com posição geométrica fixa como para solicitações com carácter móvel, assim como para cenários geotécnicos correspondentes a condições de transverso-isotropia elástica. Desta forma, o conjunto de estudos apresentados permite atestar a fiabilidade dos modelos desenvolvidos, considerando-se esta ferramenta como apta para o estudo a que se propõe.

Tirando partido das potencialidades da ferramenta numérica desenvolvida apresenta-se um estudo paramétrico no qual se avalia a relevância e influência de alguns parâmetros na resposta dinâmica de maciços geotécnicos face a solicitações com carácter móvel. O estudo apresentado assenta em aspectos tidos como fundamentais, tais como a velocidade de circulação da acção e a estratificação do maciço, tendo permitido concluir que existe uma diferença comportamental da resposta muito significativa mediante a velocidade de circulação e as características dispersivas do maciço geotécnico. A análise teórica dos principais aspectos desse estudo é abordada através da interação entre as linhas velocidade-carga e as curvas de dispersão P-SV do maciço. Esta

formulação permite uma interpretação teórica consistente e eficiente da grande maioria dos fenómenos envolvidos, tal como corroborado pela análise dos resultados no domínio não transformado. As principais conclusões desse estudo permitem confirmar que a propagação de ondas no maciço está associada a velocidades de circulação elevadas, nas quais a velocidade de propagação de ondas R no maciço é superada. Para além disso, verificou-se que apenas uma velocidade crítica está associada a maciços não dispersivos ou normalmente dispersivos, enquanto maciços inversamente dispersivos podem apresentar mais do que uma velocidade crítica. Outros efeitos, como a espessura dos estratos superficiais ou o efeito de Doppler associado ao movimento da carga, foram também escrutinados no referido estudo, sendo as conclusões apresentadas ao longo da respectiva exposição.

Por último, cabe ainda aqui referir que a informação resultante da aplicação dos modelos descritos ao longo do presente capítulo é integrada em modelos globais com vista à análise da resposta de vias férreas face a acções de tráfego, os quais são expostos nos Capítulos 4 e 5 da presente dissertação.



## 4. Modelação simplificada de vias férreas

---

### 4.1 Introdução

Uma via férrea é uma estrutura simples do ponto de vista conceptual, mas de difícil análise e interpretação. Tendo em conta a sua concepção estrutural, a via de caminho de ferro pode ser dividida em dois grandes grupos: via balastrada e via não balastrada.

Tradicionalmente, a solução balastrada tem sido a mais utilizada em todo o mundo, apresentando menores custos de construção e, embora as exigências ao nível da manutenção sejam maiores, essas operações são facilitadas pela existência de equipamentos mecânicos de intervenção rápida. Embora a via balastrada conheça mais de 150 anos de existência, a previsão do seu comportamento tem-se baseado em regras empíricas [138-140]. Contudo, na última década, tem-se assistido a um considerável desenvolvimento de metodologias mecanicistas cobrindo as várias valências e vertentes do dimensionamento e análise de vias férreas balastradas [141].

O desenvolvimento das vias-férreas de alta velocidade, bem como dos metropolitanos modernos, tem potenciado o aperfeiçoamento de um outro sistema estrutural, a via não balastrada, também designada por via em laje. Como o nome indica, a via em laje caracteriza-se pela supressão de um dos principais constituintes da via tradicional, o balastro, e sua substituição por uma laje em betão armado. Tratando-se de uma solução estrutural relativamente recente, a experiência acumulada não permite ainda o estabelecimento de regras empíricas para a sua análise, razão pela qual, para além do facto de ser uma solução mais próxima da Engenharia de Estruturas, a análise deste tipo de sistema é, regra geral, efectuada por via mecanicista [139, 142].

O presente capítulo versa sobre o desenvolvimento de modelos semi-analíticos para a simulação da resposta dinâmica de vias-férreas balastradas e não balastradas. Tratando-se de modelos semi-analíticos, convém desde já referir que, devido à sua génese, a aplicação destes modelos é condicionada a restrições geométricas e mecânicas relativamente simples. Apesar destas condicionantes, as metodologias aqui apontadas permitem a incorporação dos principais constituintes da via, do maciço de fundação e das solicitações induzidas pelo tráfego. Refira-se que os modelos desenvolvidos atendem não apenas à análise da resposta dinâmica da via, mas também aos aspectos gerais da propagação de vibrações no maciço de fundação. Assim sendo,

esses modelos são significativamente mais sofisticados do que os habitualmente utilizados na Engenharia Ferroviária, pois estes, regra geral, baseiam-se na teoria da viga em fundação elástica (BOEF), sendo também designados por modelos de Winkler. Os modelos baseados na BOEF para além de não permitirem a análise da resposta dinâmica na vizinhança da via, sofrem de diversas insuficiências fundamentais principalmente quando as frequências de interesse se encontram abaixo dos 200 Hz [143]. Estas insuficiências podem ser atribuídas tanto ao facto da massa da fundação não ser incorporada no modelo como à não consideração de tensões de corte entre as molas que simulam a fundação [143-145]. Embora este último aspecto possa ser colmatado através de um modelo de fundação mais elaborado, como o modelo de Pasternak [146], a calibração dos modelos baseados no conceito BOEF é sempre discutível, já que pode conduzir a grandezas sem significado físico ou exigir uma calibração efectuada com base no conhecimento prévio da resposta [144, 146].

Relativamente à organização do capítulo, inicia-se pela descrição generalista da constituição de vias férreas balastradas e não balastradas. A descrição efectuada tem apenas o intuito de apresentar os traços gerais das soluções habitualmente utilizadas, sendo que uma descrição exhaustiva sobre esta temática pode ser encontrada nas seguintes referências: [138, 141, 147, 148]. Seguidamente, apresenta-se uma breve descrição das acções e fontes de excitação dinâmica da via induzidas pelo tráfego ferroviário de alta velocidade. Segue-se a apresentação dos modelos semi-analíticos desenvolvidos para a análise da problemática em questão. O capítulo finaliza com um estudo paramétrico da resposta dinâmica da via férrea.

## **4.2 Constituição de vias-férreas de alta velocidade**

### **4.2.1 Via balastrada**

Apesar dos mais de 150 anos de existência de via balastrada, a sua constituição fundamental mantém-se basicamente inalterada [147]. Do ponto de vista estrutural é comumente aceite que a via possa ser dividida em duas partes, tal como se ilustra esquematicamente na Figura 4.1. A parte mais superficial, designada por superestrutura, compreende o armamento da via, isto é, os carris, as fixações, as palmilhas e as travessas, e também o balastro no qual este assenta. A segunda parte, correspondente à subestrutura, é composta pelos materiais terrosos que constituem o subbalastro, o leito de via e a fundação. A composição da subestrutura é, regra geral, comum às soluções de via balastrada e não balastrada, razão pela qual a divisão feita se mostra vantajosa no contexto da actual descrição.

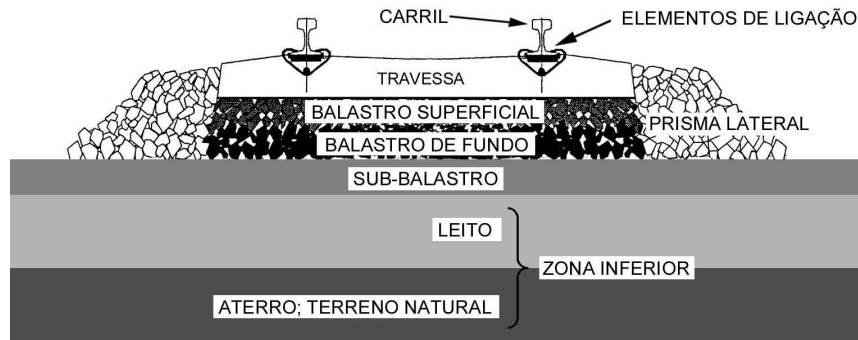


Figura 4.1 – Perfil transversal esquemático de uma via balastrada (adaptado de [138]).

Os carris constituem o elemento fundamental de qualquer via férrea, apresentando como principal função o guiamento do material circulante. Esta função é alcançada atendendo à geometria da cabeça do carril, conjugada com a conicidade das rodas e com a existência da respectiva pestana. Do ponto de vista estrutural, o carril tem ainda como função proceder à transmissão das acções induzidas pelo material circulante, bem como os esforços de origem térmica, aos elementos subjacentes da via férrea. Em linhas modernas ou de alta velocidade, o carril actualmente adoptado corresponde ao UIC 60 que é instalado em barra longa soldada, ou seja, eliminando a existência de juntas entre troços de carril. Este tipo de carril apresenta uma elevada rigidez à flexão, permitindo assim uma boa distribuição da acção pelas travessas que lhe são subjacentes.

O apoio discreto dos carris é garantido através de travessas, geralmente espaçadas de cerca de 60 cm na direcção longitudinal da via. Estes elementos encontram-se ligados aos carris, através de fixações ao nível do patim dos últimos, e têm como principal função proceder à distribuição de tensões de modo a minimizar o impacto das acções induzidas no balastro. As exigências impostas ao nível da rigidez e resistência das travessas têm levado ao progressivo abandono das travessas de madeira e uma conseqüente substituição por travessas de betão. Em vias de alta velocidade a opção por travessas do tipo monobloco em betão pré-esforçado constitui a regra seguida por grande parte das administrações ferroviárias, pese embora não sejam raros os casos de utilização de travessas bibloco.

Como já referido, em vias modernas é usual intercalar entre o carril e as travessas elementos que conferem resiliência à via, usualmente designados por palmilhas. As palmilhas são de extrema importância para o bom desempenho dinâmico das vias férreas balastradas, permitindo filtrar a transmissão de vibrações associadas a altas frequências do carril para as travessas [147, 149], que, caso contrário, poderiam danificar as últimas. Existem diversos tipos de palmilhas, com diferentes características de rigidez, sendo que este aspecto tem uma importância considerável na resposta

dinâmica da estrutura ferroviária, tal como se ilustra esquematicamente na Figura 4.2. Caso a palmilha seja pouco rígida, as travessas encontram-se bem isoladas, não sendo transmitida energia considerável aos níveis inferiores da via férrea e fundação, contudo a vibração do carril é menos amortecida. Contrariamente, caso a palmilha seja muito rígida há um maior acoplamento entre o carril e as travessas, sendo que neste caso maiores níveis de energia são transmitidos ao balastro e posteriormente ao maciço de fundação.

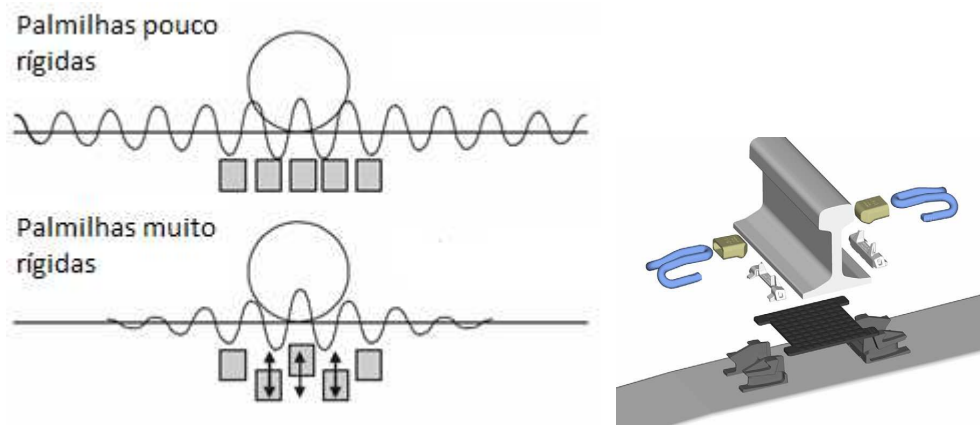


Figura 4.2 – Ilustração esquemática da influência da rigidez da palmilha no grau de acoplamento entre o carril e a travessa (adaptado de [150]).

Estudos experimentais elaborados por Oscarsson [149] e posteriormente por Maes et al. [151] mostram que o comportamento mecânico destes elementos é claramente não linear, sendo que a não linearidade da resposta se manifesta função quer do nível de tensão quer da frequência de solicitação. Relativamente à não linearidade das palmilhas face ao estado de tensão, compete referir que, geralmente, a fixação carril-travessa é pré-esforçada com uma força de aperto de modo a conferir maior rigidez à palmilha. A influência da pré-carga aplicada na rigidez da palmilha é devidamente discutida nos trabalhos experimentais desenvolvidos por Fenander [152] e Maes et al. [151], entre outros. A informação proveniente de diversos ensaios foi coligida por Thompson [150] e encontra-se sumariada na Figura 4.3, sendo que a rigidez apresentada na figura se refere a baixas frequências.



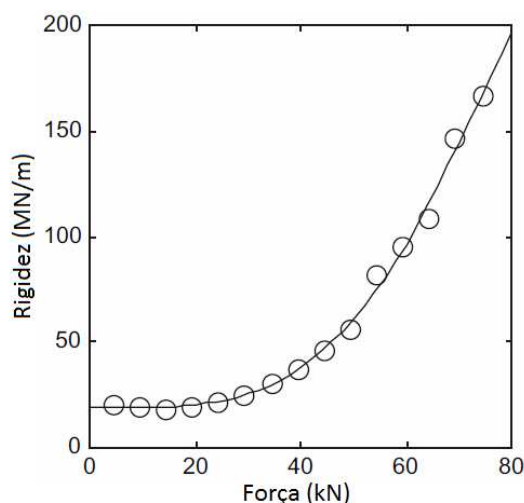


Figura 4.3 – Evolução da rigidez estática da palmilha em função da pré-carga (adaptado de [150]).

Para além do conceito de rigidez estática, note-se também que o comportamento não linear em função da velocidade de deformação do material constituinte das palmilhas leva à introdução do conceito de rigidez dinâmica, ou seja, a rigidez associada a uma dada frequência de solitação. No Quadro 4.1 apresentam-se valores da rigidez estática e dinâmica de palmilhas do tipo “Pandrol studded 10 mm” em função da pré-carga. Como se pode verificar, a não linearidade em função da frequência é menos acentuada do que a não linearidade em função da carga.

Quadro 4.1 – Rigidez estática e dinâmica de palmilhas (adaptado de [150]).

	Pré-carga (kN)				
	20	30	40	60	80
Rigidez estática (MN/m)	19	25	37	95	200
Rigidez dinâmica a 50 Hz (MN/m)	61	82	130	300	650
Rigidez dinâmica a 200 Hz (MN/m)	69	92	140	330	690
Rigidez dinâmica a 500 Hz (MN/m)	81	110	170	390	780

Retornando à descrição da via balastrada, o apoio das travessas é estabelecido através do balastro, que apresenta usualmente uma espessura de cerca de 35 cm. O balastro é constituído por material granular grosseiro, regra geral, britado, com fuso granulométrico entre 32-64 mm. Este agregado desempenha diversas funções: i) conferir um apoio adequado às travessas, limitando o seu movimento vertical, transversal e longitudinal; ii) degradar as cargas que lhe são transmitidas pelas travessas de modo a que as tensões induzidas nos materiais subjacentes sejam compatíveis com as suas características mecânicas; iii) permitir uma boa drenagem da via; iv) impedir a proliferação de vegetação na via; v) facilitar as operações de manutenção e

correção de geometria da via. É interessante notar que se por um lado a existência de balastro permite uma fácil manutenção da via, razão pela qual a via balastrada é muitas vezes preferida à via em laje, é também o balastro o material que mais manutenção exige em vias ferroviárias. Segundo Zhai et al. [153], cerca de 70% dos custos de manutenção da via nos caminhos de ferro chineses devem-se às exigências de manutenção do balastro.

Em vias férreas modernas entre a camada de balastro e a fundação é intercalada uma camada de subbalastro. Esta camada é geralmente constituída por agregado britado de granulometria extensa e a sua espessura ronda os 30 cm. À semelhança do balastro, a camada de subbalastro tem como principal função degradar e distribuir as cargas que lhe são transmitidas de modo a que os níveis de tensão atingidos nas camadas que lhe são subjacentes não ultrapassem o limite admissível. Apesar de o balastro e o subbalastro partilharem esta função, o último é bastante mais económico e eficiente do que o acréscimo da espessura da camada de balastro.

Para além da função mecânica fundamental, a camada de subbalastro, apresenta outras funções complementares, nomeadamente: i) permitir a separação entre o balastro e a fundação, evitando assim o desgaste da última e a possível contaminação do primeiro; ii) garantir uma protecção relativamente à acção do gelo; iii) contribuir para o escoamento das águas pluviais; iv) evitar a bombagem de partículas finas da fundação.

Por último, subjacente a todas estas camadas de suporte da superestrutura ferroviária, surge a fundação. Na Engenharia Rodoviária e Ferroviária é usual proceder ainda à distinção de uma camada superficial da fundação que geralmente se designa por leito. O leito não é mais do que uma camada superficial com características mecânicas superiores à restante fundação. Estas características superiores podem ser inerentes ao próprio material constituinte, isto é, características do solo, ou induzidas pelo próprio processo construtivo. Como é evidente, quando a fundação, em aterro ou no maciço geotécnico, apresenta boas características mecânicas, prescinde-se do leito de via.

A descrição apresentada para a via balastrada corresponde ao que se pode designar como solução corrente ou tradicional. Contudo, nos últimos anos, tem-se assistido a um conjunto de inovações ao nível da via balastrada, procurando-se assim dar resposta a alguns dos problemas conhecidos deste tipo de solução ferroviária. Essas inovações têm sido em boa parte estimuladas pela construção de novas linhas de alta velocidade, tendo, regra geral, como objectivo a diminuição da deterioração da via e dos consequentes custos de manutenção. A introdução de elementos resilientes sob as travessas ou sob o balastro, como medida de mitigação de vibrações, constitui um exemplo do tipo de inovações que têm vindo a ser introduzidas nos últimos anos [154].

#### **4.2.2 Via não balastrada**

Os elevados custos de manutenção da via balastrada, associados a algumas más experiências nas primeiras linhas de alta velocidade, nomeadamente no Japão, levaram ao desenvolvimento de soluções de via em laje.

Tal como o nome indica, a maior diferença entre a via em laje e a via balastrada consiste, respectivamente, na supressão ou não da camada de balastro. Em soluções não balastradas, a camada de balastro é substituída por uma laje estrutural de betão armado ou por uma camada de mistura betuminosa. A utilização de misturas betuminosas em vias ferroviárias é uma solução menos comum, razão pela qual não será aqui tratada.

As soluções de via em laje apresentam um vasto leque de concepções estruturais. Trata-se de um sistema estrutural mais permeável à inovação do que as soluções balastradas, tornando propícia a pré-fabricação de alguns dos elementos constituintes e admitindo uma panóplia muito variada de possibilidades quanto à disposição e integração dos elementos constituintes da via.

Tal como na via balastrada, nas vias em laje construídas em linhas de alta velocidade os carris geralmente adoptados correspondem ao perfil UIC 60. Em contraste, ainda ao nível do armamento, as palmilhas utilizadas em via em laje são consideravelmente mais flexíveis do que as adoptadas nas soluções balastradas [155]. Esta opção é justificada pelo objectivo de garantir um maior isolamento do carril em relação aos elementos estruturais subjacentes, evitando ou minimizando a transmissão de vibrações associadas a frequências mais elevadas e que poderiam colocar em risco a integridade estrutural dos elementos de betão armado.

Na Figura 4.4 apresenta-se, esquematicamente, o perfil transversal tipo de uma via em laje. Procedendo a uma análise comparativa entre a solução agora apresentada e a via balastrada, identificam-se algumas diferenças significativas ao nível dos seus constituintes. Na via em laje são geralmente definidas três camadas distintas ao nível do suporte da superestrutura ferroviária:

- i) Laje de betão armado: este elemento de topo recebe o armamento da via e procede à degradação das cargas de modo a que as camadas subjacentes estejam submetidas a níveis de tensão aceitáveis. O seu dimensionamento tem de atender a requisitos estritos de durabilidade, pois a sua manutenção ou substituição é extremamente onerosa.
- ii) Camada de agregados tratados com ligante hidráulico: trata-se da camada interposta entre a laje de betão armado e as camadas granulares inferiores. Tal como a laje de betão, esta camada procede à degradação das cargas e transmite-as às camadas não ligadas. Esta

camada é, regra geral, constituída por agregado de granulometria seleccionada tratado com ligante hidráulico. Nas situações em que as camadas inferiores apresentem muito boas características mecânicas, como por exemplo ocorre em vias instaladas em túneis, esta camada pode ser suprimida.

- iii) Camada de material granular não ligado: trata-se de uma camada em tudo semelhante à camada de subbalastro, desempenhando funções equivalentes às deste.

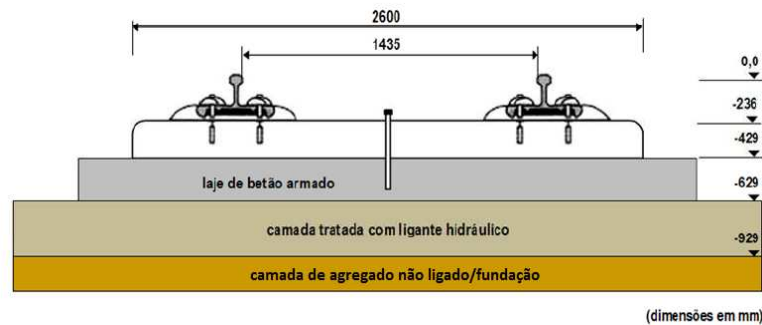


Figura 4.4 – Perfil transversal esquemático de uma via em laje (adaptado de [148]).

Uma vez que a opção por vias não balastradas implica maiores custos de construção, esta solução está geralmente associada à necessidade de responder a exigências mais elevadas ao nível da durabilidade e resistência, satisfazendo maiores volumes de tráfego, velocidades mais elevadas ou cargas por eixo superiores às verificadas em condições de exploração usuais em via balastrada.

Grande parte dos trabalhos de investigação sobre via em laje têm sido desenvolvidos no Japão, de onde a tecnologia é oriunda, e também em alguns países da Europa, onde a solução tem sido adoptada com sucesso em alguns troços de linhas de alta velocidade [156].

A versatilidade permitida pelos sistemas de via em laje tem dado lugar a diversas inovações. Na Figura 4.5, apresenta-se uma proposta de agrupamento de diferentes soluções atendendo à sua morfologia e processo construtivo. Contudo, refere-se ainda que outro tipo de classificações é também possível, por exemplo, atendendo às diferentes possibilidades de colocação de elementos resilientes na via.

Apesar da existência de sistemas bastante diversos, face à via balastrada, todas as soluções de via em laje apontam no seguinte sentido: i) redução dos custos de manutenção, embora com um acréscimo considerável de custos de construção; ii) redução drástica das operações de manutenção ao invés da facilidade da sua realização; iii) favorecimento da durabilidade do sistema ao invés da facilidade de renovação periódica.

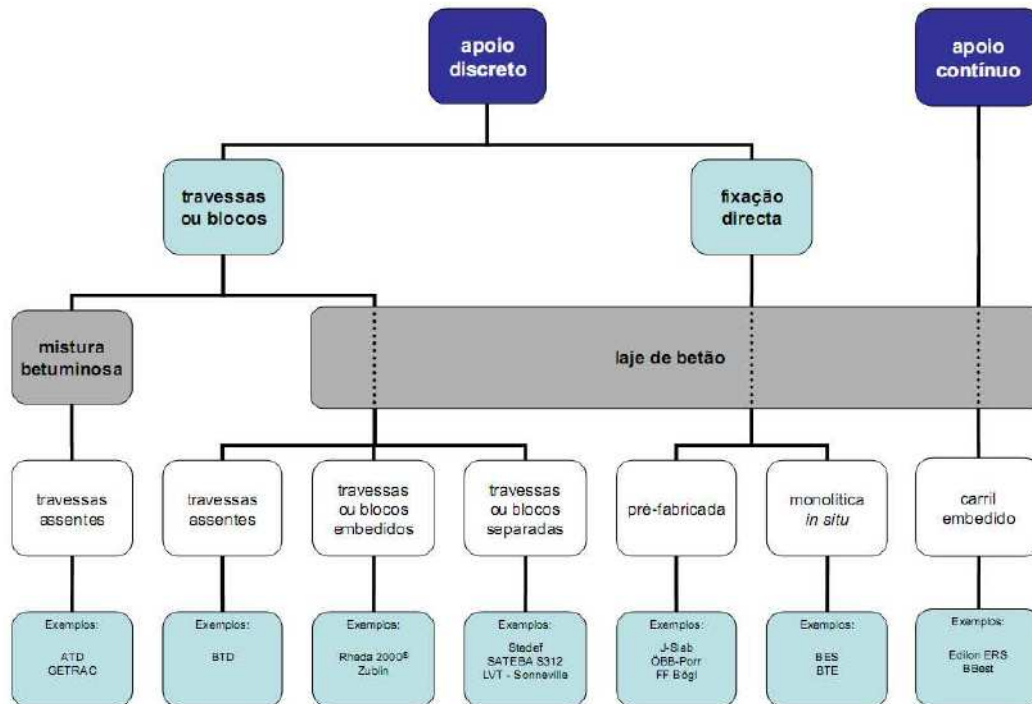


Figura 4.5 – Organização das diferentes soluções comerciais de via em laje, atendendo aos principais aspectos morfológicos [148].

Porém, apesar das notórias vantagens que a via em laje possa apresentar face às soluções balastradas, cabe aqui referir que a solução não balastrada apresenta menor nível de absorção de ruído e vibrações, razão pela qual, em ambiente urbano, esta solução tem sido por vezes preterida face aos sistemas tradicionais [142].

### 4.3 Acções exercidas pelo material circulante

A compreensão do tipo e magnitude das acções a que uma estrutura ferroviária está exposta constitui a base essencial para uma análise mecanicista dos problemas envolvidos. Relativamente ao tipo de acções, cabe proceder à distinção entre acções mecânicas induzidas pelo material circulante, podendo estas ser estáticas ou dinâmicas, e acções de origem térmica que levam à dilatação e contracção dos carris. As acções de origem térmica não são tratadas na presente dissertação, bem como todas as provenientes de assentamentos de apoio ou oriundas de fenómenos que não sejam directamente relacionados com o tráfego.

As acções induzidas pelo material circulante traduzem-se por forças verticais, longitudinais e transversais, que devido ao seu carácter dinâmico constituem os mecanismos de excitação da via

[138]. A norma europeia ISO 14837-1 – “*Vibrações mecânicas – geração de ruído e vibrações devido a sistemas ferroviários*” [4] refere dez mecanismos de excitação:

- a) Excitação quasi-estática, ou seja, a excitação gerada devido ao movimento, com velocidade constante, das cargas correspondentes ao peso do comboio por eixo;
- b) Excitação induzida pelas imperfeições geométricas e materiais inerentes ao processo de fabrico das rodas e carris;
- c) Excitação paramétrica devido à variação de rigidez motivada pelo carácter discreto do apoio dos carris (em soluções com apoio contínuo, como é o caso das vias com carril embecido, este mecanismo de excitação não se desenvolve);
- d) Excitação devido a irregularidades geométricas da via e das rodas do material circulante;
- e) Excitação devido a descontinuidades da via, como por exemplo devida à existência de aparelhos de mudança de via;
- f) Excitação induzida pelo deficiente funcionamento da suspensão do material circulante;
- g) Excitação devido à variação espacial das propriedades mecânicas da superfície de contacto roda-carril;
- h) Excitação advinda de cargas laterais impostas pelo material circulante;
- i) Excitação devido a alterações das condições de circulação, tais como arranque ou frenagem;
- j) Condições ambientais extremas que possam dar origem a alteração das propriedades dinâmicas dos elementos.

No âmbito da presente dissertação apenas se consideram os mecanismos de excitação associados a forças verticais induzidas pelo material circulante. Nesse contexto, e atendendo aos mecanismos de excitação anteriormente referenciados, é possível proceder a um agrupamento dos mesmos tendo em consideração a constância ou não da magnitude das forças verticais de interacção entre o veículo e a via. Segundo a tendência internacional, é comumente aceite o seguinte agrupamento dos mecanismos de excitação [157-159]: i) excitação quasi-estática; ii) excitação dinâmica; iii) excitação paramétrica.

A excitação quasi-estática é induzida pelo movimento das cargas correspondentes à distribuição do peso estático do veículo por eixo. O carácter dinâmico desta excitação deve-se ao facto de, em

qualquer ponto do domínio, ocorrer uma alteração temporal dos estados de tensão e deformação da via e do maciço de fundação originada pelo carácter móvel da solicitação. Porém, uma vez que os campos de deformação acompanham o movimento das cargas, o deslocamento vertical das massas do comboio é também ele constante, ou seja, não se desenvolvem forças de inércia ao nível do veículo. Esta excitação está sempre associada a frequências relativamente baixas, dependentes da velocidade de circulação e da geometria do veículo [66, 157, 160]. Tal como já ilustrado no Capítulo 3, o campo de deformação induzido pela solicitação quasi-estática encontra-se confinado à vizinhança da zona de aplicação da acção, a menos que a velocidade de circulação seja suficientemente elevada para dar origem ao desenvolvimento do cone de Mach.

Ao contrário da excitação quasi-estática, a excitação dinâmica decorre da interacção dinâmica veículo-via, podendo dever-se a vários dos mecanismos anteriormente indicados. A ocorrência de interacção dinâmica veículo-via implica a geração de acelerações no veículo e consequentes forças de inércia. Os factores que mais comumente são apontados como geradores de forças de interacção são: i) as irregularidades geométricas da via e das rodas (mecanismos tipo d); ii) as descontinuidades da via (mecanismo tipo e); iii) as diferenças de rigidez da via ao longo da direcção longitudinal (mecanismo tipo c). O conteúdo em frequência e magnitude das forças de interacção dinâmica veículo-via é claramente dependente da velocidade de circulação e das propriedades dinâmicas do veículo e da infraestrutura ferroviária.

Dado que as irregularidades geométricas da via são apontadas como um dos principais factores para o desenvolvimento das forças de interacção, considere-se a representação esquemática ilustrada na Figura 4.6 [134]. Na presença de uma imperfeição geométrica ao longo da via, o material circulante sofre um deslocamento vertical temporalmente variável à medida que se desloca. Supondo que o perfil de irregularidade da via tem uma configuração harmónica, com comprimento de onda  $L$ , e que o veículo circula a uma velocidade constante,  $c$ , a excitação das massas do veículo é caracterizada pela frequência  $f=c/L$ . Como é evidente, a amplitude e fase das forças de inércia desenvolvidas no veículo dependem das características dinâmicas do mesmo e da via férrea, já que os dois sistemas se encontram acoplados [161]. Analogia idêntica pode ser aplicada ao caso das imperfeições geométricas das rodas do veículo. Vários autores referem que no contexto de comboios de alta velocidade, a amplitude das forças dinâmicas devidas às irregularidades da via tende a aumentar significativamente com o acréscimo da velocidade de circulação [5, 6, 66]. Estudos experimentais recentes, conduzidos por Katou et al. [162], nos quais as próprias rodas do veículo foram instrumentadas, mostram que a componente dinâmica da força vertical exercida pelo material circulante, no cenário avaliado no estudo, corresponde a cerca de 10% da acção total, sem que contudo seja referida a gama de frequências envolvida na

análise. Este último aspecto é de crucial importância já que as forças dinâmicas associadas a frequências elevadas podem tomar valores muito mais significativos do que os indicados pelos referidos autores.

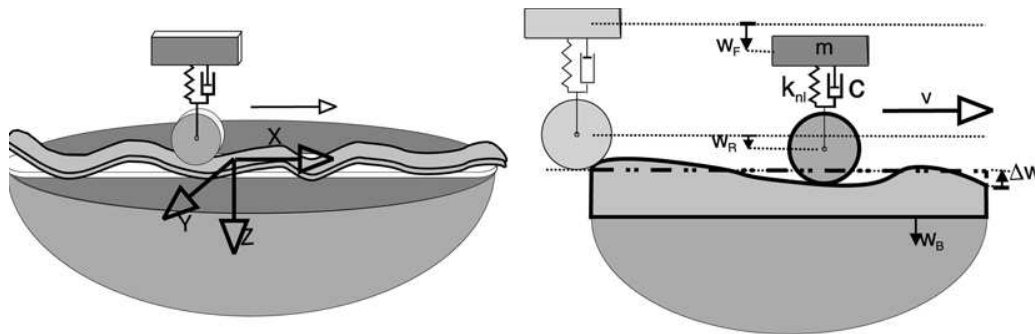


Figura 4.6 – Mecanismo de geração de excitação dinâmica do veículo devido às irregularidades da via.

Face ao exposto até ao momento, pode concluir-se que num cenário hipotético de total perfeição geométrica das rodas e da superfície de rolamento, não há lugar à geração de forças de interação dinâmica veículo-via. Esta condição pode verificar-se caso a rigidez da via seja totalmente homogênea, o que, com excepção das soluções de via com carril embebido, não se verifica, mesmo num cenário hipotético, dado o carácter discreto do suporte do carril. Portanto, em regra ocorre a geração de uma força de interação dinâmica que habitualmente é diferenciada das anteriormente referidas e designada por excitação paramétrica. A excitação paramétrica deve-se então à diferença de deformabilidade da via consoante esta é solicitada sobre os apoios do carril ou entre estes, dando assim origem a uma excitação harmónica dependente da distância entre travessas, daí se designar como paramétrica, pois depende de um parâmetro geométrico da via. Embora diversos autores não apontem uma importância significativa a este tipo de excitação [161, 163], estudos numéricos com alguma base de validação experimental, desenvolvidos por Auerch [6, 157], revelam que a excitação paramétrica pode ter um contributo significativo nas vibrações induzidas no maciço de fundação, mas essa contribuição é muito dependente das propriedades das palmilhas e do veículo. Para além deste aspecto, os estudos elaborados pelo referido autor permitem ainda concluir que a força dinâmica devido à parametrização geométrica da via tende a aumentar em consonância com a velocidade de circulação, mas mantém-se constante quando a frequência de excitação induzida pela parametrização da via ultrapassa a frequência de ressonância do sistema via-veículo.



## **4.4 Modelação estrutural de vias férreas e sua interacção com o maciço de fundação**

### **4.4.1 Considerações gerais**

A modelação analítica de vias férreas tem suscitado interesse desde longa data. Os modelos iniciais, propostos no final do século XIX por Zimmermann [164], baseavam-se no conceito de viga em apoio elástico, tal como sugerido por Winkler. Curiosamente, este tipo de modelação subsistiu até aos dias de hoje, com algumas melhorias, é certo, nomeadamente no que se refere à generalização das soluções de modo a atender à resposta dinâmica induzida por carregamentos móveis [165]. Partindo da solução base da viga em apoio elástico, é possível o aperfeiçoamento do modelo através da discretização e individualização dos vários elementos, construindo-se assim um modelo com múltiplos graus de liberdade de modo a atender à especificidade dos vários elementos constituintes da via férrea. Porém, tal como anteriormente referido, o modelo de Winkler assenta no pressuposto de que a fundação pode ser devidamente simulada através de um conjunto de molas ou molas e amortecedores (modelo de Kelvin), apresentando por isso sérias limitações na gama das baixas e médias frequências já que a dinâmica da fundação não é devidamente atendida. Esta limitação dos modelos de Winkler foi recentemente ultrapassada através da introdução do conceito de rigidez equivalente, tal como proposto pelos trabalhos pioneiros de Dieterman e Metrikine [7, 131] e posteriormente de Kononov e Wolfer [166]. Neste contexto, a rigidez da fundação passa a ser definida como uma grandeza dependente da frequência angular e do número de onda, sendo determinada pela resposta dinâmica do maciço subjacente à via face à solicitação que lhe é imposta por esta.

Os modelos seguidamente apresentados baseiam-se no conceito de rigidez equivalente, através do acoplamento do modelo da via férrea com o modelo de resposta dinâmica do maciço, apresentado no capítulo anterior. Visto que foram desenvolvidos e implementados diferentes tipos de modelos e com diferentes esquemas de interacção com o maciço de fundação, numa primeira fase apresentam-se os modelos de um modo genérico, sendo posteriormente discutidos os modelos de interacção dinâmica via-macício de fundação.

#### 4.4.2 Modelos simplificados para simulação de vias férreas

O modelo mais simples para a simulação da via férrea consiste em admitir que todos os componentes da via podem ser assimilados a uma viga de Bernoulli-Euler, com comprimento infinito, que se encontra apoiada na superfície do maciço de fundação, tal como ilustrado na Figura 4.7a.

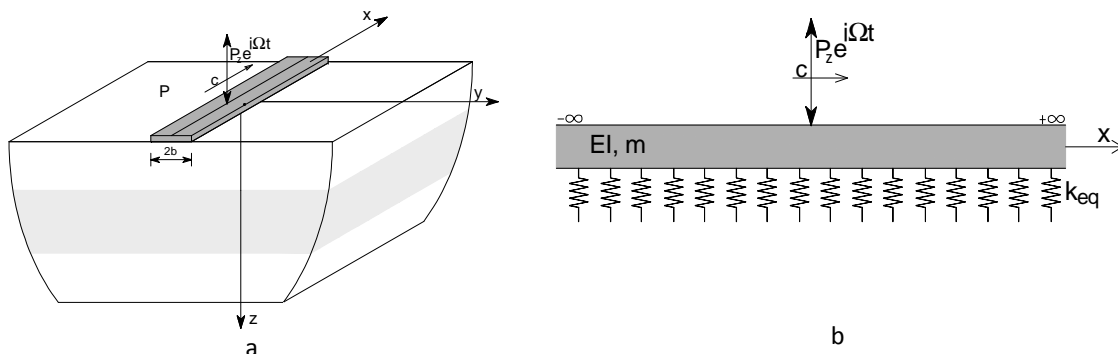


Figura 4.7 – Viga sobre maciço de fundação: a) modelo tridimensional; b) modelo com rigidez equivalente.

Do ponto de vista da formulação matemática do modelo e tirando partido do conceito de rigidez equivalente, o maciço de fundação pode ser substituído por uma fundação elástica cuja lei de comportamento depende da frequência de excitação e inclui os efeitos inerentes ao carácter contínuo do maciço, tal como representado na Figura 4.7b.

Considerando que a via é solicitada por uma carga móvel (velocidade  $c$ ), que para o caso geral pode apresentar magnitude harmónica no tempo (com amplitude  $P_z$ ) definida pela frequência angular,  $\Omega$ , o equilíbrio dinâmico do sistema, em regime estacionário, é reflectido através da seguinte equação:

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + k_{eq} u(x, t) + m \ddot{u}(x, t) = P_z \delta(x - ct) e^{i\Omega t} \quad [4.1]$$

em que:  $EI$  é a rigidez de flexão da via;  $k_{eq}$  é a rigidez equivalente da fundação e  $m$  é a massa da via por unidade de comprimento;  $u$  é o deslocamento vertical da via

A solução da equação é facilitada tirando partido da transformação do domínio do espaço-tempo para o domínio do número de onda-frequência. Deste modo, aplicando uma transformada de Fourier em ordem ao espaço e tirando partido das propriedades de derivação no domínio do número de onda, o equilíbrio é definido por:

$$EI k_1^4 u(k_1, t) + k_{eq} u(k_1, t) + m \ddot{u}(k_1, t) = P_z e^{i(\Omega - k_1 c)t} \quad [4.2]$$

Tendo em linha de conta o facto de a solicitação ter carácter harmónico ao longo do tempo, definido pela frequência angular,  $\omega = \Omega - k_1 c$ , a equação anterior pode ser matematicamente manipulada dando origem a:

$$EIk_1^4 \tilde{u}(k_1, \omega) + k_{eq} \tilde{u}(k_1, \omega) - m\omega^2 \tilde{u}(k_1, \omega) = \tilde{P}_z(k_1, \omega) \quad [4.3]$$

Ou seja,

$$\tilde{u}(k_1, \omega) = \frac{\tilde{P}_z}{EIk_1^4 - m\omega^2 + k_{eq}} \quad [4.4]$$

Como é evidente, o modelo apresentado pode ser melhorado através da consideração do amortecimento da própria via. Uma forma simples de contemplar este parâmetro passa pela introdução de grandezas de rigidez complexa, correspondendo assim à consideração de um modelo de amortecimento hysterético.

Os resultados obtidos através da resolução da equação [4.4] referem-se ao domínio transformado. Tal como já anteriormente analisado no Capítulo 3, os resultados no domínio não transformado são obtidos através da aplicação de uma transformada inversa de Fourier relativa ao número de onda. Após a operação de transformada inversa, as amplitudes dos deslocamentos são apresentadas atendendo a um referencial móvel, sendo passados para o referencial fixo através do procedimento anteriormente descrito.

Apesar da simplicidade do modelo agora apresentado, saliente-se que tem sido utilizado com sucesso em diversos estudos relativos à análise de vibrações induzidas por tráfego na gama das baixas frequências [68, 81, 167, 168]. Contudo, é de realçar que a calibração do modelo e a definição de alguns parâmetros, como por exemplo a rigidez à flexão da via, pode oferecer sérias dificuldades [169, 170].

Ainda na óptica dos modelos semi-analíticos, nos últimos anos têm surgido diversas propostas que permitem atender ao comportamento particular de cada um dos elementos que constituem a via férrea [5, 63, 71, 72, 171, 172]. O modelo desenvolvido e implementado na presente dissertação encontra-se esquematizado na Figura 4.8.

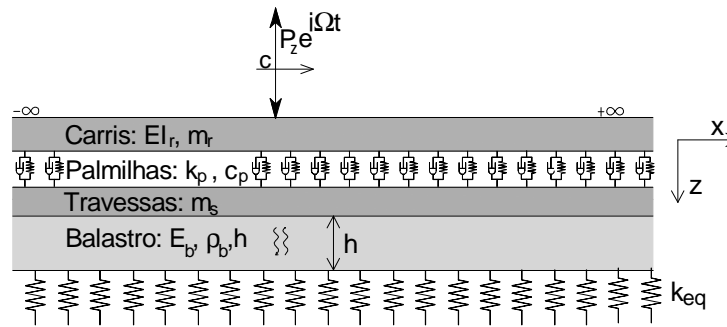


Figura 4.8 – Modelo semi-analítico de via estratificada.

A Figura 4.8 mostra que o modelo proposto é contínuo, ou seja, os elementos discretos, tais como palmilhas e travessas, são atendidos no cálculo através de uma formulação contínua equivalente. Esta simplificação traduz-se por uma enorme vantagem em termos de formulação matemática, pois o modelo passa a ser invariante na direcção de desenvolvimento da via, permitindo o recurso à transformação da variável espacial  $x$  para o domínio do número de onda. O campo de validade dos modelos contínuos equivalentes tem sido discutido por diversos autores, os quais têm chegado à conclusão praticamente unânime de que para frequências de excitação inferiores a cerca de 600 Hz não existe uma diferença assinalável entre as respostas obtidas por modelos discretos ou contínuos [65, 143, 171, 173, 174]. Convém contudo esclarecer que efeitos como a excitação paramétrica induzida pelo carácter periódico das travessas não podem ser atendidos em modelos contínuos equivalentes, pois este tipo de excitação surge devido à diferença de deslocamento no ponto de interacção roda-carril consoante a roda se localiza entre travessas ou sobre estas.

No que concerne à simulação dos carris, esta pode ser efectuada com base numa viga de Bernoulli-Euler ou através de uma viga de Timoshenko. Apesar de se reconhecer que a formulação proposta por Timoshenko é mais completa, estudos efectuados por diversos autores mostram que na gama de frequências até aos 500 Hz as diferenças encontradas entre resultados obtidos pelas duas formulações são mínimas [175]. Atendendo a este facto optou-se pela implementação da viga de Bernoulli-Euler dada a simplicidade da sua formulação. Assim, o comportamento mecânico dos carris é descrito através de dois parâmetros: a rigidez de flexão, aqui definida por  $EI_r$ , e a massa por unidade de comprimento, definida por  $m_r$ .

Tal como ilustrado na Figura 4.8, a ligação dos carris às travessas é estabelecida através de um conjunto mola-amortecedor, uniformemente distribuído ao longo do comprimento de desenvolvimento da via, através do qual se simula o comportamento mecânico das palmilhas. As propriedades mecânicas deste elemento são caracterizadas pela rigidez complexa equivalente,  $k_p^*$ , definida por:

$$k_p^* = k_p + i\omega c_p \quad [4.5]$$

em que  $k_p$  e  $c_p$  representam a rigidez e amortecimento equivalentes das palmilhas, ou seja, o valor correspondente a cada palmilha individual dividido pelo seu afastamento longitudinal.

No modelo proposto é admitido que as travessas podem ser assemelhadas a corpos rígidos, razão pela qual a simulação das mesmas é atendida através da consideração de uma massa equivalente, uniformemente distribuída ao longo da direcção longitudinal da via. O parâmetro equivalente, aqui definido por  $m_s$ , corresponde à massa das travessas por unidade de desenvolvimento da via.

Relativamente à simulação do balastro, reconhece-se que o modelo proposto é relativamente simples face à complexidade da realidade física: admite-se que as camadas granulares acima do terreno natural, ou seja, as camadas de balastro, sub-balastro e aterros de pequena altura, podem ser simulados através de um único elemento com propriedades médias equivalentes. Ao contrário da generalidade dos modelos da classe semi-analítica, as camadas granulares não são simuladas através de conjuntos mola-amortecedor, como proposto por Lombaert et al. [5, 66], ou como barras com variação linear de deslocamento, tal como sugerido por Sheng et al. [71], mas sim por elementos deduzidos através da equação exacta da propagação de ondas unidireccionais. Estes elementos têm como vantagem o facto de, para o mesmo esforço de cálculo, permitirem atender de uma forma mais correcta à propagação de ondas ao longo da direcção vertical das camadas granulares. Refira-se, contudo, que a simulação da propagação de ondas ao longo do balastro e na direcção de desenvolvimento da via não é tida em conta na presente proposta, assim como também não o é em alguma das formulações anteriormente referidas. Outro aspecto que deve ser esclarecido prende-se com o carácter discreto do balastro. A dimensão das partículas de balastro, bem como os vazios inter-partículas, levantam algumas reservas quanto à sua modelação à luz da mecânica dos meios contínuos. Estudos elaborados por Ricci et al. [176] mostram que o carácter discreto do balastro influencia a resposta ao nível da via, sendo de notar que, tal como seria expectável, existe uma aproximação consistente das respostas obtidas por modelos discretos ou contínuos à medida que a dimensão das partículas tende para zero. Porém, a complexidade dos modelos discretos é muito elevada e o nível de simplificação exigido para a sua aplicação a problemas práticos leva a que ainda estejam confinados a análises puramente teóricas.

O modelo proposto para a simulação das camadas granulares da via é definido através da largura da via,  $2b$ , do módulo de deformabilidade do material em causa,  $E_b$ , da massa volúmica do material,  $\rho_b$ , e da espessura da camada,  $h_b$ . A introdução do amortecimento material é efectuada através da consideração de propriedades elásticas complexas,

$$E_b^* = E_b(1 + 2i\xi_b \text{sign}(\omega)) \quad [4.6]$$

em que  $\xi_b$  representa o coeficiente de amortecimento hysterético do balastro.

Tendo em mente o esquema estrutural representado na Figura 4.8, o equilíbrio dos diferentes elemento estruturais é descrito por:

- *Carris*

$$EI_r \frac{\partial^4 u_r(x,t)}{\partial x^4} + m_r \ddot{u}_r(x,t) + k_p(u_r(x,t) - u_s(x,t)) = P_z e^{i\Omega t} \delta(x-ct) \quad [4.7]$$

- *Travessas*

$$m_r \ddot{u}_s(x,t) + k_p[u_s(x,t) - u_r(x,t)] = -F_2(x,t) \quad [4.8]$$

em que  $F_2$  representa a força de interacção travessas-balastro;  $u_r$  e  $u_s$  representam os deslocamentos verticais do carril e travessa, respectivamente.

- *Balastro*

$$\frac{2\omega E_b^* b \alpha}{C_p} \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\omega}{C_p} h\right)} & -\frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{C_p} h\right)} \\ -\frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{C_p} h\right)} & \frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\omega}{C_p} h\right)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s(x, \omega) \\ u_{bb}(x, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2(x, \omega) \\ -k_{eq} u_{bb}(x, \omega) \end{Bmatrix} \quad [4.9]$$

em que  $k_{eq}$  é a impedância do maciço (ou a rigidez equivalente),  $u_{bb}$  é o deslocamento vertical do plano inferior do estrato e  $C_p$  é a velocidade de propagação de ondas na direcção vertical do meio, dada por:

$$C_p = \sqrt{\frac{E_b^*}{\rho_b}} \quad [4.10]$$

Relativamente ao parâmetro  $\alpha$ , a sua introdução prende-se com o facto de nem toda a rigidez e massa do balastro participarem no equilíbrio dinâmico do sistema. Estudos numéricos e experimentais conduzidos por diversos autores apontam no sentido de apenas uma parcela do balastro colaborar para o equilíbrio do sistema [5, 66, 177, 178]. Atendendo às diferentes propostas apresentadas na bibliografia, o valor de 0,5 para o parâmetro  $\alpha$  pode ser tomado como referência para as espessuras usuais da camada de balastro.

Acoplando as equações [4.7], [4.8] e [4.9], e procedendo à transformação para o domínio do número de onda-frequência, o sistema de equações global pode ser organizado na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} EIk_1^4 + k_p^* - \omega^2 m_r & -k_p^* & 0 \\ -k_p^* & k_p^* + \frac{2\omega E_b^* b \alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{C_p} h\right) C_p} - \omega^2 m_s & -\frac{2\omega E_b^* b \alpha}{\sin\left(\frac{\omega}{C_p} h\right) C_p} \\ 0 & -\frac{2\omega E_b^* b \alpha}{\sin\left(\frac{\omega}{C_p} h\right) C_p} & \frac{2\omega E_b^* b \alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{C_p} h\right) C_p} + k_{eq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_r(k_1, \omega) \\ \tilde{u}_s(k_1, \omega) \\ \tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{P}(k_1, \omega) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [4.11]$$

A resolução do sistema de equações [4.11] permite obter os deslocamentos verticais, no domínio transformado, relativos aos diferentes graus de liberdade da via férrea. A passagem para o domínio não transformado é efectuada de acordo com os pressupostos já anteriormente explanados.

Tal como anteriormente referido, as soluções de via não balastrada apresentam particularidades distintas da via tradicional, exigindo por isso o desenvolvimento de modelos específicos para a sua análise. Com esse intuito, foram também desenvolvidos modelos para análise de via não balastrada, tal como o exemplificado na Figura 4.9. O modelo adoptado é muito simples, tendo carácter bidimensional ao longo da direcção de desenvolvimento da via. Tal como nos modelos anteriores, os carris são simulados através de uma viga de Bernoulli-Euler e as palmilhas por conjuntos mola-amortecedor equivalentes. Na presente proposta, é admitido que a laje de betão armado assenta directamente no maciço de fundação. Dado que o modelo é bidimensional, adoptou-se um modelo de viga de Bernoulli-Euler para a simulação da laje estrutural.

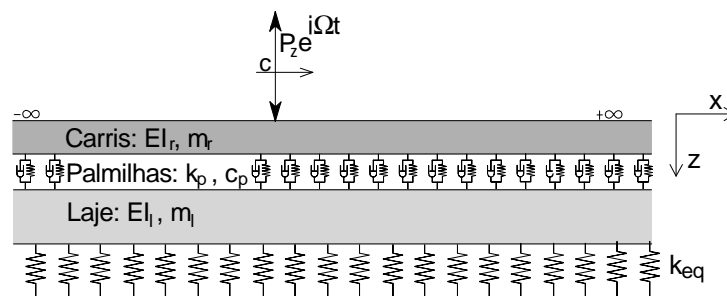


Figura 4.9 – Modelo semi-analítico de via não balastrada.

O equilíbrio dos vários elementos estruturais é definido pelas seguintes equações diferenciais:

$$EI_r \frac{\partial^4 u_r(x,t)}{\partial x^4} + m_r \ddot{u}_r(x,t) + k_p (u_r(x,t) - u_l(x,t)) = P e^{i\Omega t} \delta(x-ct) \quad [4.12]$$

e

$$EI_l \frac{\partial^4 u_l(x,t)}{\partial x^4} + m_l \ddot{u}_l(x,t) + k_p (u_l(x,t) - u_r(x,t)) = -k_{eq} u_l(x,t) \quad [4.13]$$

em que  $u_l$  representa o deslocamento da laje,  $EI_l$  é a rigidez à flexão da laje e  $m_l$  é a massa da laje por unidade de desenvolvimento longitudinal. As restantes variáveis tomam o significado anteriormente referido.

Tal como nos modelos anteriormente apresentados, a resolução do problema passa pela transformação de todas as variáveis do domínio real para o domínio transformado. Após essa operação e alguma manipulação matemática, o sistema de equações que rege o equilíbrio e o movimento do sistema, pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} EI_r k_1^4 + k_p^* - \omega^2 m_r & -k_p^* \\ -k_p^* & k_p^* + EI_l k_1^4 - \omega^2 m_l + k_{eq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_r(k_1, \omega) \\ \tilde{u}_l(k_1, \omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{P}(k_1, \omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [4.14]$$

Note-se que, nos casos em que se pretenda simular a presença de um aterro de pequena espessura, o modelo agora proposto pode ser complementado por um estrato idêntico ao utilizado na simulação do balastro, tal como ilustrado no modelo anteriormente apresentado. Da mesma forma, elementos resilientes, tais como mantas inferiores à laje, também podem ser incorporados no modelo com relativa facilidade, implicando apenas a consideração de maior número de graus de liberdade.

Para finalizar, refira-se que a interação entre os modelos de via e o modelo de fundação é estabelecida através do parâmetro  $k_{eq}$ , ou seja, a impedância do maciço de fundação, também por vezes designada por rigidez equivalente. Caso se considere um valor constante para este parâmetro, então, o modelo redundaria no caso típico da fundação de Winkler. Nas secções seguintes é apresentada a forma de acoplamento entre os modelos de via e os modelos de simulação da resposta de maciços estratificados apresentados no Capítulo 3 da presente dissertação. Nessas circunstâncias, a impedância do maciço é formulada como uma entidade dependente do número de onda e frequência de excitação, ou seja, representa uma muito maior proximidade com a realidade do que a simples consideração de uma fundação de Winkler.



#### **4.4.3 Interface flexível via-macizo**

O acoplamento entre os modelos da via e do macizo geotécnico, sendo que este último é apresentado no Capítulo 3, é estabelecido atendendo ao equilíbrio de tensões e compatibilidade de deslocamentos ao nível dos pontos de contacto dos dois meios. Como se compreende, atendendo à simplicidade dos modelos de via anteriormente explanados, nos quais apenas o equilíbrio e movimento da direcção vertical é formulado matematicamente, nem todas as condições de compatibilidade e equilíbrio podem ser respeitadas. Com efeito, o acoplamento entre os dois modelos é estabelecido respeitando apenas o equilíbrio de tensões e compatibilidade de deslocamentos na direcção vertical. Este tipo de simplificação é usualmente designado por “*Condição de fronteira relaxada*”, pois admite-se a possibilidade de escorregamento, nas direcções transversal e longitudinal, entre a via e o macizo subjacente. Para além desta simplificação, o facto do modelo de via ter carácter bidimensional ao passo que o macizo geotécnico é simulado com base num modelo tridimensional, obriga à consideração de uma condição de fronteira adicional relativa à distribuição transversal de tensões ou de deslocamentos verticais ao nível da área de contacto macizo-via.

A distribuição de tensões verticais na direcção transversal da via e ao longo da interface macizo-via é complexa, sendo condicionada pela interacção entre os dois meios, na qual a deformabilidade da via no plano transversal assume especial importância. Visto que os modelos de via anteriormente apresentados são bidimensionais com desenvolvimento longitudinal, a determinação da distribuição de tensões na direcção transversal fica desde logo condicionada. Como tal, é necessário admitir hipóteses para essa distribuição de tensões. Uma forma simples de resolver o problema de interacção via-macizo passa por admitir que a distribuição longitudinal das tensões verticais de contacto é regida pela rigidez da via, ao passo que na direcção transversal toma uma configuração uniforme, tal como ilustrado na Figura 4.10a.

Tendo em atenção a distribuição de tensões verticais referida, a compatibilidade de deslocamentos do macizo e da via pode ser assegurada obrigando a que o deslocamento vertical da interface inferior da via seja igual ao deslocamento vertical do macizo ao longo da linha média da interface via-macizo, como se mostra na Figura 4.10b.

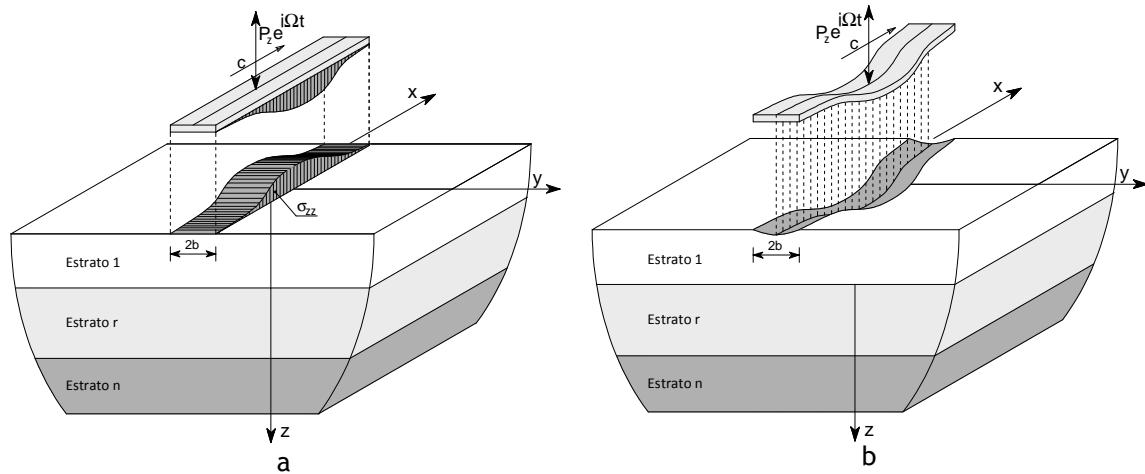


Figura 4.10 – Condições de fronteira na interface flexível via-macizo: a) equilíbrio de tensões; b) compatibilidade de deslocamentos.

Atendendo à simplificação indicada, e admitindo que o referencial se encontra alinhado de modo que o eixo da via é coincidente com o eixo dos  $x$ , as condições de fronteira a considerar na resolução do problema de interacção via-macizo são:

$$|y| \leq b \begin{cases} \sigma_{zz}(x, y, 0, t) = \frac{F_g(x, t)}{2b} \\ u_z(x, 0, 0, t) = u_{bb}(x, t) \\ \sigma_{xz}(x, y, 0, t) = \sigma_{yz}(x, y, 0, t) = 0 \end{cases} \quad [4.15]$$

$$|y| > b \begin{cases} \sigma_{zz}(x, y, 0, t) = \sigma_{xz}(x, y, 0, t) = \sigma_{yz}(x, y, 0, t) = 0 \end{cases}$$

em que:  $F_g$  representa a força de interacção via-macizo (força por unidade de comprimento);  $u_{bb}$  representa o deslocamento vertical do grau de liberdade da via que estabelece a interacção com o macizo de fundação;  $u_z$  representa o deslocamento vertical do macizo de fundação.

No domínio transformado (relativo ao tempo e espaço nas direcções  $x$  e  $y$ ) a equação [4.15] toma a seguinte configuração:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{zz}(k_1, k_2, 0, \omega) = \tilde{F}_g(k_1, \omega) \frac{\sin(k_2 b)}{k_2 b} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_z(k_1, k_2, 0, \omega) dk_2 = \tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) \\ \tilde{\sigma}_{xz}(k_1, k_2, 0, \omega) = \tilde{\sigma}_{yz}(k_1, k_2, 0, \omega) = 0 \end{cases} \quad [4.16]$$

Considerando agora o conceito de função de Green no domínio transformado, tal como apresentado no Capítulo 3, os deslocamentos verticais da superfície do macizo, nesse mesmo domínio, induzidos pela acção descrita pela equação [4.16] são dados por:

$$\tilde{u}_z(k_1, k_2, 0, \omega) = \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \tilde{F}_g(k_1, \omega) \frac{\sin(k_2 b)}{k_2 b} \quad [4.17]$$

em que  $u_{zz}^G$  representa a função de Green no domínio transformado relativa aos deslocamentos verticais induzidos por uma força unitária vertical, com frequência harmónica  $\omega$ , aplicada à superfície do maciço (termo  $Q_{33}$  da matriz de flexibilidade, ver secção 3.4.2).

Procedendo à substituição da equação [4.17] em [4.16], facilmente se conclui que

$$\tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) = \tilde{u}_z(k_1, 0, 0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \frac{\sin(k_2 b)}{k_2 b} dk_2 \tilde{F}_g(k_1, \omega) \quad [4.18]$$

Dado que nos modelos de via, a força de interacção via-maciço é expressa através da rigidez equivalente do maciço (impedância),  $k_{eq}$ , a equação pode ser manipulada de modo a que:

$$\tilde{F}_g(k_1, \omega) = \tilde{k}_{eq}(k_1, \omega) \tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) \quad [4.19]$$

em que a rigidez equivalente é dada por:

$$\tilde{k}_{eq}(k_1, \omega) = \frac{2\pi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \frac{\sin(k_2 b)}{k_2 b} dk_2} \quad [4.20]$$

O conceito de rigidez equivalente foi inicialmente proposto por Dieterman e Metrikine [7] baseando-se em conceitos de subestruturação, conduzindo a que o maciço geotécnico possa ser substituído por uma rigidez equivalente dependente do número de onda e da frequência. A parte real da rigidez equivalente representa a rigidez e inércia do maciço, enquanto a parte imaginária refere-se ao amortecimento, tanto material como geométrico.

Este esquema de interacção via-maciço tem sido seguido por diversos autores, sendo de realçar os trabalhos indicados nas seguintes referências bibliográficas: [63, 68, 71, 83, 136, 166-168]. Muito embora a vasta utilização deste modelo de interacção, compreende-se que os deslocamentos da via possam ser sobrestimados pelo facto de se admitir que o deslocamento da interface inferior desta é igual ao deslocamento no ponto médio da área de interface do maciço. Tendo em atenção este aspecto, muito recentemente alguns autores sugerem um novo modelo de interacção em que a compatibilidade de deslocamentos da interface via-maciço é estabelecida através da média de deslocamentos verificados na secção transversal da área do maciço solicitada pela via [132, 144]. Deste modo, as condições de fronteira a considerar na resolução do problema de interacção dinâmica são as seguintes:

$$|y| < b \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zz}(x, y, 0, t) = \frac{F_g(x, t)}{2b} \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b u_z(x, y, 0, t) dy = u_{bb}(x, t) \\ \sigma_{xz}(x, y, 0, t) = \sigma_{yz}(x, y, 0, t) = 0 \end{array} \right. \quad [4.21]$$

$$|y| > b \left\{ \sigma_{zz}(x, y, 0, t) = \sigma_{xz}(x, y, 0, t) = \sigma_{yz}(x, y, 0, t) = 0 \right.$$

As quais se reflectem no domínio transformado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{zz}(k_1, k_2, 0, \omega) = \tilde{F}_g(k_1, \omega) \frac{\sin(k_2 b)}{k_2 b} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-b}^{+b} \tilde{u}_z(k_1, k_2, 0, \omega) e^{ik_2 y} dy dk_2 = \tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) \\ \tilde{\sigma}_{xz}(k_1, k_2, 0, \omega) = \tilde{\sigma}_{yz}(k_1, k_2, 0, \omega) = 0 \end{array} \right. \quad [4.22]$$

Comparando as condições de fronteira definidas por [4.22] com as homólogas definidas por [4.16], é possível concluir que a única diferença reside na compatibilização de deslocamentos entre a interface inferior da via e o maciço. Atendendo à relação entre a pressão aplicada ao maciço e o deslocamento induzido, expressa por [4.17], a equação [4.22] pode ser manipulada de modo a conduzir ao seguinte resultado:

$$\tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-b}^{+b} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \frac{\sin(k_2 b)}{k_2 b} e^{ik_2 y} dy dk_2 \tilde{F}_g(k_1, \omega) \quad [4.23]$$

que por sua vez conduz a:

$$\tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \frac{\sin(k_2 b)}{k_2 b} \int_{-b}^{+b} e^{ik_2 y} dy dk_2 \tilde{F}_g(k_1, \omega) \quad [4.24]$$

Integrando em ordem à variável  $y$ , obtém-se

$$\tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \frac{\sin(k_2 b)}{k_2 b} \frac{e^{ik_2 b} - e^{-ik_2 b}}{ik_2} dk_2 \tilde{F}_g(k_1, \omega) \quad [4.25]$$

Atendendo agora às propriedades da notação complexa, o deslocamento da interface inferior da via no domínio transformado é dado por:

$$\tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \frac{\sin(k_2 b)^2}{(k_2 b)^2} dk_2 \tilde{F}_g(k_1, \omega) \quad [4.26]$$

Retomando o conceito de rigidez equivalente, tem-se:

$$\tilde{k}_{eq}(k_1, \omega) = \frac{2\pi}{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \frac{\sin(k_2 b)^2}{(k_2 b)^2} dk_2} \quad [4.27]$$

Comparando as expressões [4.27] e [4.20], constata-se que o esforço de cálculo é em tudo idêntico, porém, segundo Auersch [144], a consideração da interacção maciço-via através da média dos deslocamentos transversais conduz a soluções mais realistas na gama das frequências mais elevada.

Convém ainda referir que, em ambos os modelos de interacção apresentados, é admitido como ponto de partida que a distribuição de tensões de interacção maciço-via é uniforme ao longo da largura da via. Em Engenharia de Fundações, este tipo de pressuposto é, regra geral, definido como fundação flexível. No entender do autor, esta formulação deve conduzir a resultados satisfatórios quando a espessura das camadas granulares seja suficiente para permitir a degradação da acção aplicada pelo comboio e, conseqüentemente, a uniformização de tensões ao longo do plano de contacto via-maciço. Nas situações em que este pressuposto não se verifique, a rigidez transversal da via, seja conferida pelas travessas ou pela laje de betão armado (nos casos de via em laje), induz uma uniformização de deslocamentos na interface via-maciço e, conseqüentemente, a tensão vertical de interacção distanciar-se-á consideravelmente da distribuição uniforme.

#### 4.4.4 Interface rígida via-maciço

Caso a rigidez transversal da via seja relativamente elevada, os deslocamentos verticais ao longo do alinhamento transversal da interface via-maciço tendem a ser constantes [132]. Nestas circunstâncias, a distribuição transversal de tensões verticais exercidas pela via ao maciço de fundação afasta-se consideravelmente da distribuição uniforme, tal como ilustrado na Figura 4.11a. Com efeito, e ao contrário da formulação apresentada na secção anterior, a distribuição de tensões é um dado desconhecido à partida, sendo condicionada pela imposição de deslocamento vertical constante ao longo da direcção transversal da interface e determinada através da resolução do problema de interacção via-maciço. A resolução semi-analítica do problema é simplificada caso se opte pela discretização da direcção transversal da interface em pequenas porções, no interior das quais se admite uma distribuição uniforme de tensões. Como é evidente, e de modo semelhante à utilização de qualquer outro método discretizado, a solução obtida é

uma aproximação à solução exacta, tendendo para esta à medida que aumenta a discretização da secção, como aliás se mostra na representação esquemática da Figura 4.11b. No interior de cada elemento discreto é considerado um ponto de colocação, com posição geométrica definida por  $y_n$ , ou seja, um ponto localizado no centro do elemento e no qual é imposta a compatibilidade de deslocamento vertical entre a via ( $u_{bb}$ ) e o maciço ( $u_z(x, y_n, 0)$ ) ou seja:

$$u_{bb}(x, t) = u_z(x, y_n, 0, t) \quad 1 \leq n \leq N \quad [4.28]$$

A secção transversal da interface via-macício, de dimensão  $2b$ , é discretizada em  $N$  elementos de igual dimensão, definida por  $\Delta y$ , logo:

$$N = \frac{2b}{\Delta y} \quad [4.29]$$

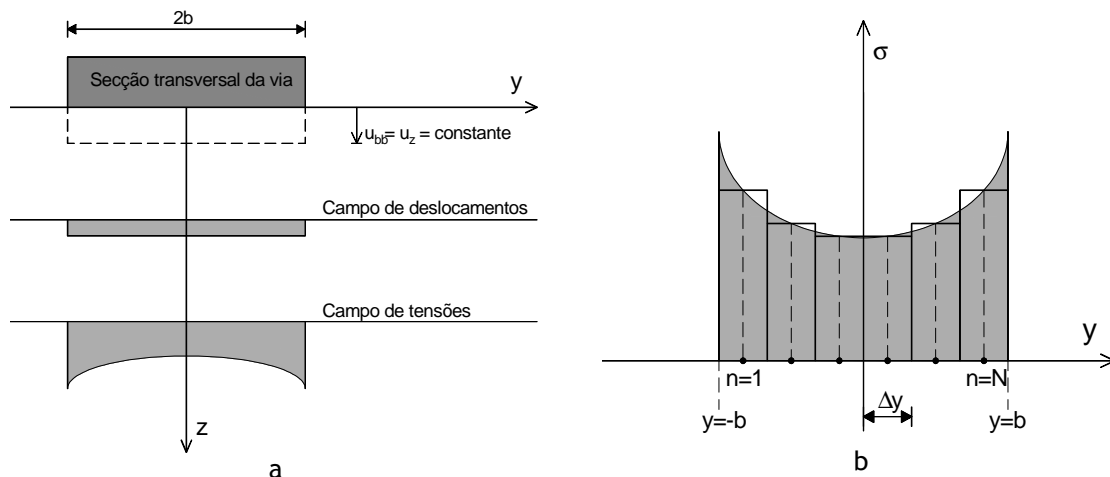


Figura 4.11 – Interface rígida via-macício: a) compatibilidade de deslocamentos; b) discretização do campo de tensões na direcção transversal.

Por sua vez, admitindo que a via se encontra alinhada com o eixo longitudinal do sistema de referência do maciço, os alinhamentos definidos por  $y_n$  são dados por:

$$y_n = -b + \Delta y \frac{2n-1}{2} \quad 1 \leq n \leq N \quad [4.30]$$

A determinação da força global de interacção via-macício (por unidade de comprimento) resulta do somatório das forças equivalentes que são transmitidas por cada elemento individual ( $F_n$ ), ou seja:

$$F_g(x, t) = \sum_{n=1}^N F_n = \Delta y \sum_{n=1}^N \sigma_{zz, n} H\left(\frac{\Delta y}{2} - |y - y_n|\right) \quad |y| \leq b \quad [4.31]$$

em que  $H$  representa a função de Heaviside, a qual determina valor nulo caso o argumento seja negativo e valor unitário nas restantes situações.

Em jeito de síntese, o problema de interacção via-macço impõe as seguintes condições de fronteira à superfície do último:

$$|y| \leq b \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zz}(x, y, 0, t) = \sum_{n=1}^N \frac{F_n(x, t)}{\Delta y} H\left(\frac{\Delta y}{2} - |y - y_n|\right) \\ u_z(x, y_n, 0, t) = u_{bb}(x, t) \\ \sigma_{xz}(x, y, 0, t) = \sigma_{yz}(x, y, 0, t) = 0 \end{array} \right. \quad [4.32]$$

$$|y| > b \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{zz}(x, y, 0, t) = \sigma_{xz}(x, y, 0, t) = \sigma_{yz}(x, y, 0, t) = 0 \end{array} \right.$$

No domínio transformado, as equações de fronteira expressas por [4.32] resultam em

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{zz}(k_1, k_2, 0, \omega) = \sum_{n=1}^N \frac{F_n(k_1, \omega)}{\Delta y} \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2}}^{y_n + \frac{\Delta y}{2}} e^{-ik_2 y} dy = \sum_{n=1}^N F_n(k_1, \omega) \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y}{2}\right)}{k_2 \frac{\Delta y}{2}} e^{-ik_2 y_n} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_z(k_1, k_2, 0, \omega) e^{ik_2 y_n} dk_2 = \tilde{u}_z(k_1, y_n, 0, \omega) = \tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) \\ \tilde{\sigma}_{xz}(k_1, k_2, 0, \omega) = \tilde{\sigma}_{yz}(k_1, k_2, 0, \omega) = 0 \end{array} \right. \quad [4.33]$$

Tal como nos modelos anteriores, o processo de dedução da rigidez equivalente passa pelo estabelecimento de uma relação entre a pressão vertical aplicada ao macço e o deslocamento vertical nos pontos de interacção. Deste modo, recorrendo à expressão [4.17] é possível desenvolver a seguinte relação, no domínio transformado, entre as tensões verticais transmitidas pela via ao macço de fundação e os deslocamentos verticais à superfície do mesmo:

$$\tilde{u}_z(k_1, k_2, 0, \omega) = \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \sum_{n=1}^N F_n(k_1, \omega) \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y}{2}\right)}{k_2 \frac{\Delta y}{2}} e^{-ik_2 y_n} \quad [4.34]$$

O deslocamento vertical num ponto genérico de interacção via-macço, definido por  $y_m$ , é obtido através da transformada inversa do número de onda para o domínio não transformado relativo à coordenada transversal, ou seja:

$$\tilde{u}_z(k_1, y_m, 0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \sum_{n=1}^N F_n(k_1, \omega) \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y}{2}\right)}{k_2 \frac{\Delta y}{2}} e^{ik_2 (y_m - y_n)} dk_2 \quad m=1, 2, \dots, N \quad [4.35]$$

Tal como nos modelos de interacção apresentados na secção anterior, o argumento do integral indicado na expressão [4.35] tende rapidamente para zero, o que permite a sua integração numérica com relativa simplicidade.

Introduzindo em [4.35] a condição de compatibilidade de deslocamentos verticais via-maciço, facilmente se conclui que:

$$\tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) F_n \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y}{2}\right)}{k_2 \frac{\Delta y}{2}} e^{ik_2(y_m - y_n)} dk_2 \quad \forall m \quad [4.36]$$

Esta última relação pode ser escrita na forma tensorial, ou seja:

$$\tilde{H}_{mn}(k_1, \omega) \tilde{F}_n(k_1, \omega) = \tilde{u}_{bb}(k_1, \omega) \quad [4.37]$$

sendo os termos da matriz H dados por:

$$\tilde{H}_{mn}(k_1, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{zz}^G(k_1, k_2, 0, \omega) \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y}{2}\right)}{k_2 \frac{\Delta y}{2}} e^{ik_2(y_m - y_n)} dk_2 \quad [4.38]$$

Tendo em consideração o conceito de rigidez equivalente é possível estabelecer uma relação entre a força equivalente à tensão uniformemente distribuída no interior de cada elemento de interface e o deslocamento do respectivo ponto de colocação o qual, por sua vez, é igual ao experimentado pela interface inferior da via. Deste modo introduza-se a seguinte variável:

$$\tilde{\kappa}_n(k_1, \omega) = \frac{\tilde{F}_n(k_1, \omega)}{\tilde{u}_{bb}(k_1, \omega)} \quad [4.39]$$

a qual traduz o contributo de cada elemento discreto da interface para a rigidez equivalente global, tal como expresso por [4.19].

Procedendo à substituição de [4.39] em [4.37] chega-se a uma sistema de equações lineares cujas incógnitas são os valores do vector  $\kappa_n$ , as quais são iguais a:

$$[\tilde{\kappa}(k_1, \omega)]_{N \times 1} = [\tilde{H}(k_1, \omega)]_{N \times N}^{-1} [1]_{N \times 1} \quad [4.40]$$

Ora, se a força global de interacção via-maciço ( $F_g$ ) resulta do somatório das contribuições representadas pelas forças equivalentes às tensões verticais aplicadas na fronteira de cada elemento discreto ( $F_n$ ), então a rigidez equivalente,  $k_{eq}$ , não é mais do que:



$$\tilde{k}_{eq}(k_1, \omega) = \frac{\sum_{n=1}^N \tilde{F}_n(k_1, \omega)}{\tilde{U}_{bb}(k_1, \omega)} \quad [4.41]$$

Por sua vez, substituindo [4.39] em [4.41], facilmente se obtém o seguinte resultado final:

$$\tilde{k}_{eq}(k_1, \omega) = \sum_{n=1}^N \tilde{k}_n(k_1, \omega) \quad [4.42]$$

o qual traduz a impedância ou rigidez equivalente do maciço, determinada para uma dada largura da via, definida por  $2b$ , e admitindo uma discretização da mesma em  $N$  elementos.

Como se compreende, o esforço de cálculo inerente a este modelo de interacção via-maciço é consideravelmente superior ao necessário para a resolução do problema de interacção através de uma das duas metodologias anteriormente expostas. Note-se que o modelo com interacção no ponto médio não é mais do que um caso particular do agora apresentado, correspondendo a uma discretização unitária ( $N=1$ ).

Ao contrário dos métodos de interacção baseados no conceito de interface flexível, o modelo agora apresentado exige a discretização parcial do domínio. Tal como nos restantes métodos baseados em conceitos de discretização, a solução obtida é sempre uma solução aproximada que tende para a solução exacta à medida que aumenta o refinamento da discretização. Como tal, é de todo conveniente o estabelecimento de algumas regras práticas para a definição da dimensão a adoptar para cada elemento da interface via-maciço. Para avaliar esta questão considere-se o pequeno exemplo ilustrado na Figura 4.12a, sendo que a relação de dispersão do maciço, já anteriormente representada para análise de outros exemplos, é ilustrada na Figura 4.12b. A justificação para ser aqui novamente chamada a relação de dispersão prende-se com o facto de se entender que qualquer regra de discretização tem de obedecer a um critério dependente da frequência de análise e do respectivo comprimento de onda inerente ao modo dominante.

Por uma questão de simplicidade de exposição, e também pelo facto de a discretização ocorrer apenas na direcção transversal ao desenvolvimento da via, o estudo aqui apresentado é desenvolvido em condições correspondentes a estado plano de deformação, ou seja, para  $k_1=0$ . Contudo, as conclusões seguidamente apresentadas são em tudo genéricas, tanto para problemas tridimensionais como para problemas bidimensionais.

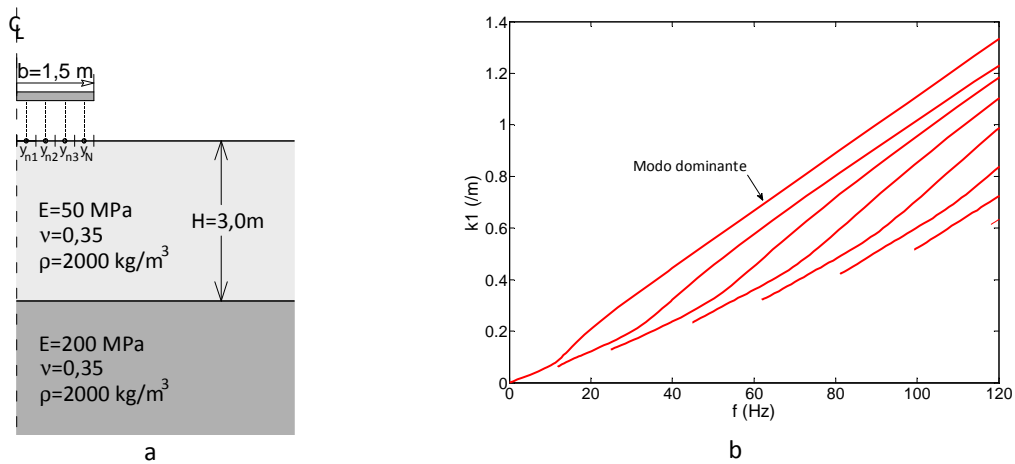


Figura 4.12 – Estudo da convergência da rigidez equivalente: a) representação esquemática do modelo; b) relação de dispersão do maciço de fundação.

De acordo com o pressuposto do método proposto, o campo de tensões da direcção transversal via-macço é aproximado considerando uma distribuição uniforme de tensões no interior de cada elemento. Na Figura 4.13 mostra-se, para diferentes graus de discretização, a distribuição de tensões verticais correspondentes ao deslocamento vertical da interface via-macço com amplitude unitária e frequência de 10 Hz.

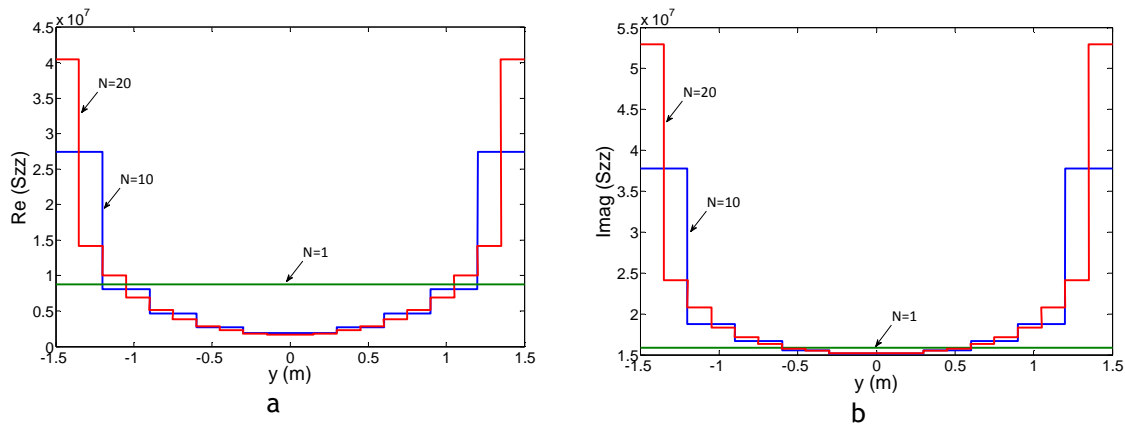


Figura 4.13 – Distribuição de tensões ao longo da interface para  $f=10\text{Hz}$ : a) parte real; b) parte imaginária.

Uma vez que a amplitude do deslocamento é unitária, a rigidez equivalente corresponde à área definida por cada um dos diagramas. Comparando os resultados relativos à parte real do diagrama de tensões, é perfeitamente notório que a solução obtida com um ponto de interacção ( $N=1$ ) é claramente distinta das outras duas soluções. Por sua vez, adoptando uma discretização em 10 intervalos ou 20 intervalos, os resultados obtidos são relativamente próximos na zona interior da interface, afastando-se progressivamente à medida que o ponto em análise se aproxima dos bordos da interface. Este resultado é bem perceptível tanto na parte real como na parte imaginária do digrama de tensões, sendo expectável já que o gradiente de tensão aumenta na proximidade do bordo.

Outro aspecto curioso que é revelado pela Figura 4.13 prende-se com o facto de existir uma grande disparidade da parte imaginária da resposta quando  $N=1$  ou  $N=10$  ou  $N=20$ . Esta diferença, mais notória na parte imaginária do que na parte real do diagrama de tensões, mostra que os fenómenos inerentes ao amortecimento são mais afectados pela discretização da interface via-macício.

A Figura 4.14 mostra a evolução do módulo da rigidez equivalente com o aumento do grau de discretização da interface, em condições de estado plano de deformação e para três frequências de análise distintas. Os resultados encontram-se adimensionalizados face ao valor da rigidez equivalente para  $N=1$ .

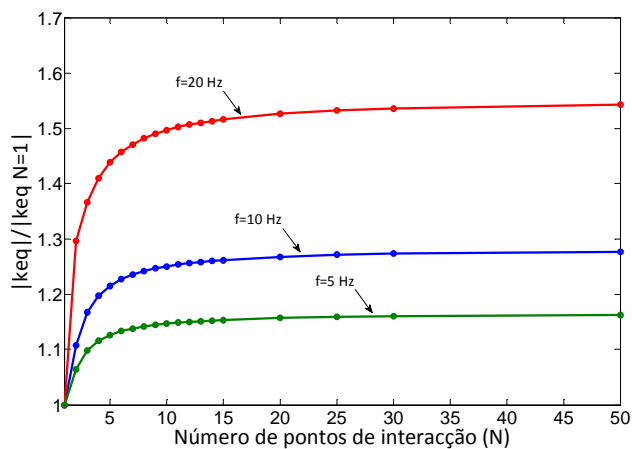


Figura 4.14 – Convergência da rigidez equivalente do maciço para frequências de excitação baixas.

A análise da figura permite observar que o modelo de interface rígida conduz a valores de rigidez equivalente mais elevados independentemente da frequência de análise. Esta diferença entre a rigidez obtida pelo modelo de interface flexível ( $N=1$ ) e a homóloga obtida pelo modelo de interface rígida é tanto mais pronunciada quanto mais elevada for a frequência de análise, ou, de uma forma mais exacta, quanto menor for o comprimento de onda excitado. Para além desse facto, é também perceptível que à medida que a frequência de excitação aumenta, maior é o número de pontos de interação necessários para a convergência da solução, diga-se para obter uma rigidez equivalente com um erro de aproximação inferior a 5%.

Contudo, analisando a relação de dispersão do maciço (ver Figura 4.12b), facilmente se percebe que os valores adoptados para a frequência de análise no exemplo anterior conduzem sempre à propagação de ondas com comprimento de onda consideravelmente superior à largura da interface via-macício. De modo a averiguar a influência da discretização quando o comprimento da onda excitada é inferior à largura da via, considerem-se agora os resultados expressos na Figura

**4.15**, relativos à evolução da rigidez equivalente versus discretização e para as frequências de análise de 80 Hz e 120 Hz.

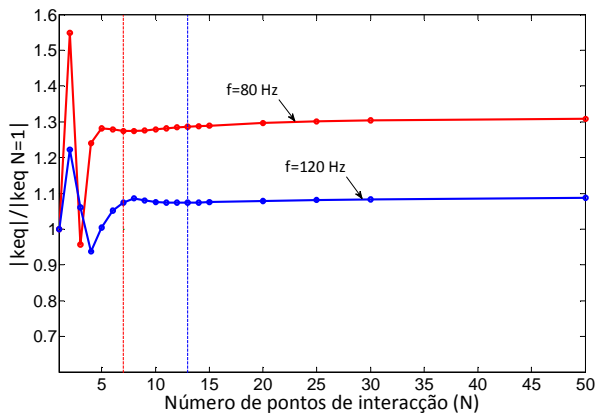


Figura 4.15 – Convergência da rigidez equivalente para frequências de excitação elevadas.

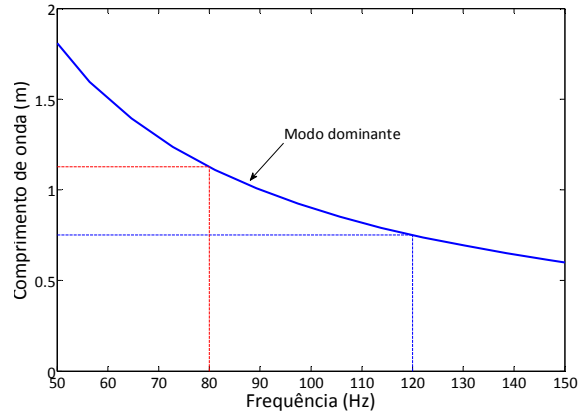


Figura 4.16 – Relação de dispersão  $\lambda$ - $f$  do modo dominante do maciço.

Comparando os resultados apresentados nas Figuras 4.14 e 4.15 conclui-se de imediato que para frequências elevadas, isto é, frequências que conduzam a comprimentos de onda inferiores à largura da via, existe um limite inferior para o número de pontos de interação, abaixo do qual se assiste a instabilidade da solução. Este efeito de instabilidade prende-se com o facto de, para as frequências consideradas, se gerarem ondas com comprimento inferior à largura da interface via-macício (ver Figura 4.16), exigindo assim um número mínimo de pontos de interação para representar a resposta neste domínio. Considerando que é possível descrever um comprimento de onda harmónica através de 3 pontos, pode-se apontar a seguinte regra para o valor mínimo de discretização:

$$N_{\min}(f) = \frac{6bf}{C_{R,\min}(f)} \quad [4.43]$$

em que  $C_{R,\min}$  representa a velocidade de propagação das ondas P-SV associadas ao modo dominante.

Este valor mínimo de intervalos de discretização, função da frequência de excitação, encontra-se indicado na Figura 4.15 através de rectas verticais. Como se pode verificar, a partir do valor de  $N_{\min}$  assiste-se à convergência da rigidez equivalente, ou seja, ao seu aumento progressivo e tendente para um valor constante à medida que o grau de refinamento da discretização aumenta, seguindo assim uma tendência em tudo semelhante à identificada na Figura 4.14.

## **4.5 Estudo paramétrico da resposta dinâmica da via férrea**

### **4.5.1 Considerações iniciais**

Na presente secção apresenta-se um pequeno estudo paramétrico com base no qual se discute a influência de algumas propriedades do sistema via-macizo de fundação na resposta dinâmica do mesmo.

De modo a tratar este assunto de uma forma sistemática e abrangente, os estudos aqui apresentados são conduzidos tendo como base a modelação do ensaio de receptância da via. A receptância da via é um parâmetro muito utilizado na avaliação comparativa do comportamento dinâmico de vias férreas, podendo mesmo ser determinada por via experimental, como aliás se expõe num capítulo subsequente da presente dissertação.

Do ponto de vista numérico a receptância da via não é mais do que a flexibilidade dinâmica da mesma, calculada no ponto de aplicação de uma acção sinusoidal (a razão entre o deslocamento do carril no ponto de solicitação e a acção aplicada). O mesmo conceito poderá ser expandido para a receptância das travessas, em que agora o deslocamento considerado é o experimentado pela travessa ao invés do verificado no carril. Outra adaptação do conceito de receptância consiste na introdução da receptância cruzada, em que o deslocamento considerado não corresponde ao alinhamento de aplicação da acção, mas sim ao verificado a uma dada distância longitudinal ou transversal do mesmo.

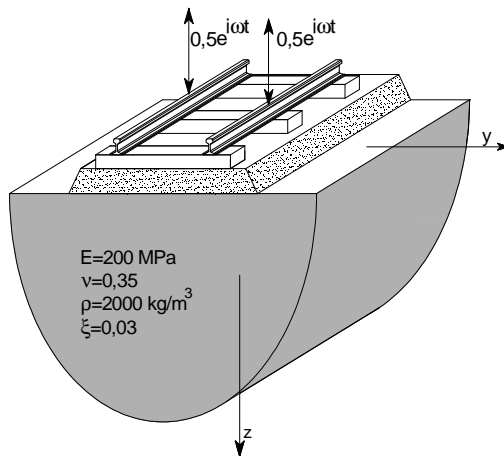
Numa fase posterior do estudo discute-se ainda a influência das características da via férrea na velocidade crítica do sistema acoplado via-macizo. Relativamente à resposta dinâmica do sistema face às excitações dinâmicas provenientes do tráfego ferroviário, a sua discussão será efectuada num capítulo posterior e após a introdução de metodologias que permitam atender à interacção dinâmica comboio-via férrea.

### **4.5.2 Receptância da via férrea**

#### **4.5.2.1 Explicitação do conceito**

Nos estudos seguidamente apresentados considera-se um cenário base correspondente a uma via balastrada assente à superfície de um macizo semi-indefinido, tal como se ilustra na Figura 4.17. O cálculo da receptância é efectuada considerando a aplicação de uma carga sinusoidal com amplitude unitária na cabeça do carril e registando os valores da amplitude dos deslocamentos

obtidos no carril, travessa e interface via-macizo. O acoplamento via-macizo é estabelecido através do modelo de interface baseado na média dos deslocamentos experimentados pela superfície de contacto ao longo da direcção transversal. Embora reconhecendo que esta forma de modelação da interacção dinâmica das duas sub-estruturas não é a mais exacta, a experiência comparativa dos diferentes métodos demonstra que os resultados obtidos por esta formulação se aproximam bastante dos homólogos obtidos através de modelos de interface rígida, exigindo contudo um esforço computacional consideravelmente menor [144].



Carris : UIC60 -  $EI_r=1,26 \times 10^7 \text{ Nm}^2$  (2 carris)  
 $m_r=120 \text{ kg/m}$  (2 carris)

Travessas :  $m_s=490 \text{ kg/m}$

Palmilhas:  $k_p=5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$  (2 carris )  
 $c_p=2,5 \times 10^5 \text{ Ns/m}^2$  (2 carris)

Balastro:  $h=0,35 \text{ m}$   
 $E_b=130 \times 10^6 \text{ Pa}$   
 $\rho_b= 1700 \text{ kg/m}^3$

Largura da via:  $2b=3,0 \text{ m}$

Figura 4.17 – Via-macizo de fundação utilizado como estudo base.

Atendendo ao facto de o conjunto via férrea-macizo corresponder a um sistema com vários graus de liberdade é expectável a existência de várias frequências naturais do sistema, correspondendo a situações de ressonância. Refira-se também o facto de o amortecimento material e geométrico conferido pelo macizo de fundação levar a que algumas dessas ressonâncias sejam fortemente amortecidas tornando difícil a sua identificação.

A Figura 4.18a ilustra as funções de receptância do carril e da travessa para o cenário base considerado e abrangendo uma gama de frequências dos 1Hz aos 400 Hz. Como se pode verificar, existem vários picos na função de receptância aos quais correspondem ressonâncias do sistema. O primeiro pico identificado encontra-se em correspondência com a frequência de cerca de 115 Hz e corresponde ao modo de vibração total da via. Esta ressonância está associada ao movimento vertical conjunto do armamento da via (carris e travessas) e de parte da massa de balastro sobre o sistema balastro-fundação. A configuração típica deste modo de vibração encontra-se esquematizada na Figura 4.18b.

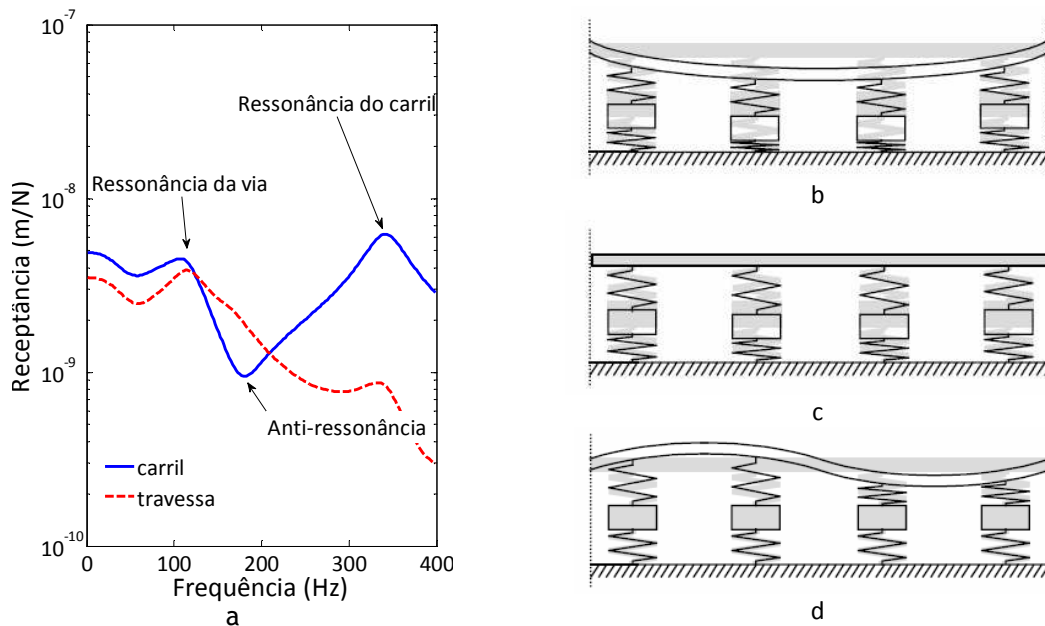


Figura 4.18 – Receptância do carril e travessa para o cenário base: a) função de receptância; b) configuração esquemática do modo de vibração do armamento; c) configuração esquemática do modo de vibração correspondente à anti-ressonância do carril; d) configuração esquemática do modo de vibração do carril sobre os apoios.

Um aspecto interessante prende-se com o facto de entre duas ressonâncias do sistema surgir um fenómeno de anti-ressonância. Na Figura 4.18a está bem patente a existência de uma anti-ressonância do carril para a frequência de aproximadamente 190 Hz. Como se pode verificar, para essa frequência, a resposta dinâmica do carril é menos pronunciada do que a das travessas, significando que a massa das travessas é excitada entre dois sistemas de mola, sendo o sistema superior conferido pela palmilha e o inferior pela rigidez elástica do sistema balastro-macício de fundação. A configuração esquemática deste modo de vibração pode ser visualizada na Figura 4.18c.

Ainda abaixo dos 400 Hz é possível identificar uma outra ressonância ao nível do carril. De facto, a Figura 4.18 permite constatar que para  $f=360$  Hz existe um pronunciado pico na função de receptância do carril, diferindo a resposta deste em cerca de uma ordem de grandeza quando comparado com a amplitude da resposta da travessa. Este tipo de ressonância corresponde à vibração do carril sobre o apoio conferido pelas palmilhas, tal como se ilustra na Figura 4.18d. Convém aqui esclarecer que, para frequências inferiores a cerca de 500 Hz e para carris do tipo UIC60, este tipo de movimento está associado principalmente à deformação dos carris por flexão; porém, quando o modo de vibração descrito está associado a uma frequência superior ao referido limite, a deformação por corte começa a tomar uma importância não negligenciável para a resposta do carril, sendo que nesse caso os carris deverão ser simulados através de vigas formuladas com base na teoria de Timoshenko [175].

Embora a análise efectuada esteja limitada aos 400 Hz, é de todo conveniente referir a existência de ressonâncias do sistema para frequências superiores ao limite indicado. Uma dessas ressonâncias deve-se ao carácter discreto do apoio dos carris que permite um modo de vibração caracterizado pela deformação dos carris sem que os seus pontos de apoio se movimentem. Este tipo de ressonância é designado na terminologia inglesa por “pinned-pinned” e para vias balastradas é identificada para frequências na ordem dos 1100 Hz. A simulação da resposta dinâmica do sistema nessa gama de frequências não é passível de ser analisada através de modelos linearizados como os apresentados ao longo deste capítulo já que o modo de vibração exige a existência de apoios discretos do carril.

Os resultados e observações apresentados ao longo dos últimos parágrafos têm uma abrangência generalista procurando assim tipificar a forma de resposta dinâmica da via férrea em função da frequência de excitação. Como se compreende, aparte das observações de carácter geral, a resposta dinâmica da via férrea é dependente das propriedades mecânicas dos diferentes componentes, quer da via, quer do maciço de fundação. De modo a investigar a influência dos diversos componentes na resposta dinâmica do sistema apresenta-se de seguida um conjunto de estudos de sensibilidade desenvolvidos com o intuito de discutir a importância relativa dos diferentes componentes em função da gama de frequências de interesse.

#### **4.5.2.2 Influência das propriedades do maciço de fundação**

Na Engenharia Ferroviária clássica a importância das condições geotécnicas do maciço de fundação na resposta dinâmica da via é muitas vezes menosprezada. Sem embargo, alguns estudos mais recentes mostram que a correcta consideração das principais propriedades do maciço de fundação tem uma importância muito significativa, senão mesmo decisiva, na avaliação da resposta dinâmica da via, principalmente na gama de frequências abaixo dos 200 Hz [66, 143].

Considere-se então, para além do cenário base aqui designado por Maciço 1, a possibilidade de a via férrea anteriormente descrita repousar sobre maciços de fundação com características distintas, designados por Maciço 2 e Maciço 3. A geometria e propriedades mecânicas dos diferentes maciços de fundação encontram-se indicadas na Figura 4.19.



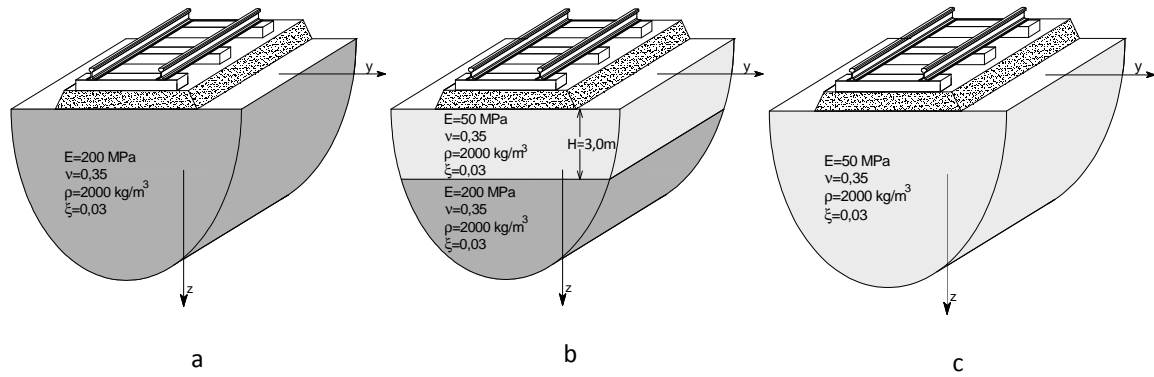


Figura 4.19 – Propriedades geométricas e mecânicas dos diferentes maciços de fundação: a) Maciço 1; b) Maciço 2; c) Maciço 3.

A Figura 4.20 mostra a curva de receptância do carril, travessa e interface de contacto via-macício, para os três cenários geotécnicos indicados. Iniciando pela receptância do carril, verifica-se uma clara diferença na tendência de resposta para frequências abaixo de cerca de 250 Hz consoante as condições geotécnicas do maciço. Com efeito, quando a via assenta em maciços mais deformáveis (Maciços 2 e 3) a ressonância da via torna-se muito amortecida, sendo praticamente imperceptível, sendo que a anti-ressonância do carril também se torna menos pronunciada. Porém, para frequências de excitação acima dos 250 Hz, a amplitude dos deslocamentos do carril parece ser praticamente insensível às condições mecânicas do maciço de fundação.

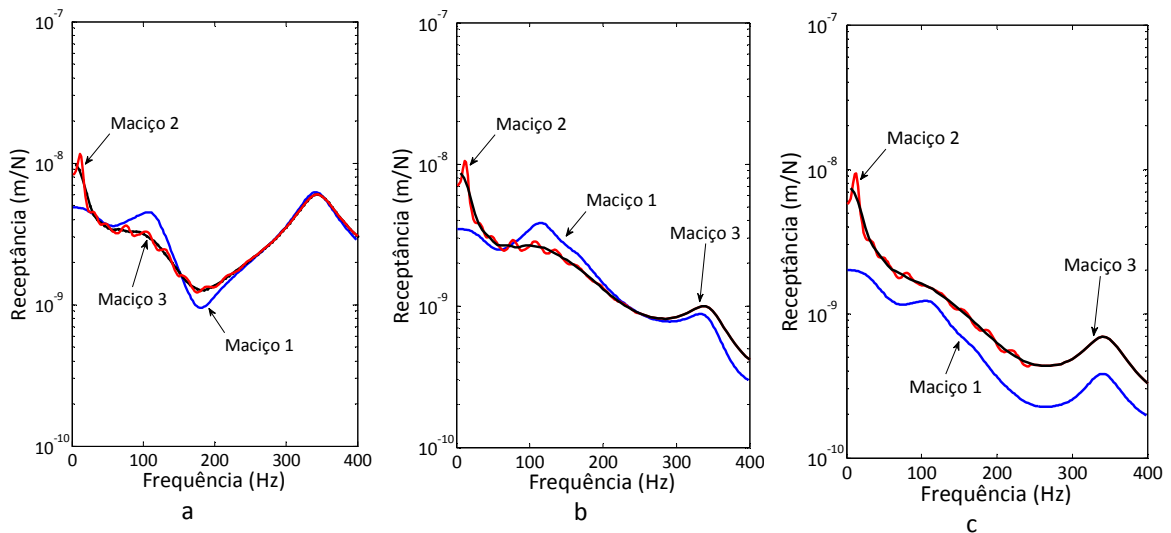


Figura 4.20 – Influência das propriedades do maciço de fundação na receptância de: a) carril; b) travessa; c) interface inferior via-macício de fundação.

Passando à análise da receptância ao nível das travessas e da interface via-macício verifica-se que os resultados obtidos considerando o Maciço 2 ou o Maciço 3 são praticamente idênticos à excepção da gama de frequências abaixo dos 20 Hz, sendo contudo consideravelmente distintos dos resultados referentes à análise relativa ao Maciço 1. Esta conclusão é mais notória ao nível da

receptância na interface via-macijo, na qual se assiste a uma translação da curva de receptância em função da rigidez do horizonte mais superficial do macijo de fundação.

Um aspecto interessante prende-se com o facto de as curvas de receptância dos cenários correspondentes aos Maciços 2 e 3 serem praticamente coincidentes, com excepção da gama de frequências abaixo dos 20 Hz. Tal permite concluir que, para o caso em estudo e para frequências acima dos 20 Hz, o contributo do macijo de fundação para a dinâmica do sistema é condicionado pelas camadas superiores do mesmo, já que o Maciço 3 corresponde a um meio semi-indefinido com as propriedades mecânicas do estrato superficial do Maciço 2. Porém, no cenário correspondente ao Maciço 2, verifica-se a existência de uma ressonância aos 11 Hz, situação que não é identificada em nenhum dos outros cenários aqui estudados. Esta ressonância corresponde aproximadamente à primeira frequência de corte do Maciço 2, ou seja, a frequência para a qual surge o segundo modo de propagação de ondas de P-SV (ver Figura 4.12b). Assim sendo, o pico de resposta aqui identificado nas curvas de receptância corresponde à ressonância do estrato superficial do macijo, resultante da estratificação do mesmo. Como se compreende, a localização desta ressonância em termos de frequência encontra-se intimamente ligada às características geométricas e mecânicas da estratificação do macijo de fundação.

De acordo com as considerações expostas nos Capítulos 2 e 3, as propriedades mecânicas do macijo de fundação têm uma influência muito significativa nos mecanismos de propagação de ondas através do mesmo. De modo a avaliar esse efeito, considere-se a receptância cruzada estabelecida através da amplitude do deslocamento vertical em pontos localizados à superfície do macijo, ao longo do alinhamento definido por  $x=0$  m, e a acção sinusoidal aplicada na cabeça dos carris. Na Figura 4.21 apresenta-se a receptância cruzada para pontos à superfície do macijo e localizados à distância transversal de 6 m, 12 m e 18 m, relativamente ao centro da via férrea. A análise da figura permite retirar as seguintes ilações:

- i) a resposta dinâmica na vizinhança da via face a uma acção aplicada na cabeça do carril é fortemente influenciada pela propriedades mecânicas do macijo de fundação;
- ii) a evolução da amplitude dos deslocamentos verticais em função da frequência apresenta uma modelação caracterizada por frequências para as quais a propagação de ondas é inibida ou minimizada. Este aspecto deve-se à largura da via e ao facto de se assumir uma distribuição uniforme de tensões na direcção transversal do contacto via macijo. Matematicamente, esta inibição da propagação de ondas P-SV na direcção transversal à via traduz-se quando  $k_2b=n\pi$ , ou, de um outro modo, quando  $f=nC_R(f)/(2b)$ , sendo  $C_R(f)$  a velocidade de propagação do primeiro modo P-SV, a qual é dependente da frequência no

caso de maciços dispersivos (Maciço 2). Este efeito é atenuado caso o contacto via-macício seja estabelecido considerando uma interface rígida, já que nesse caso a distribuição de tensões na direcção transversal do contacto se afasta consideravelmente da distribuição uniforme admitida nas simulações apresentadas;

- iii) a atenuação da amplitude dos deslocamentos verticais com o aumento da frequência é tanto mais pronunciada quanto menor for a velocidade de propagação das ondas associadas ao primeiro modo P-SV (quanto mais deformável for o maciço, considerando constância de massa);
- iv) a correcta consideração da estratificação do maciço é um aspecto fundamental para a simulação da resposta dinâmica do sistema na gama das baixas frequências, diminuindo a sua importância relativa à medida que a gama de frequências de interesse aumenta. Para a gama de frequências mais elevada, diga-se acima dos 40 Hz, a resposta do sistema é condicionada pelas propriedades da zona mais superficial do maciço, perdendo relevância a influência das formações mais profundas que o constituem.

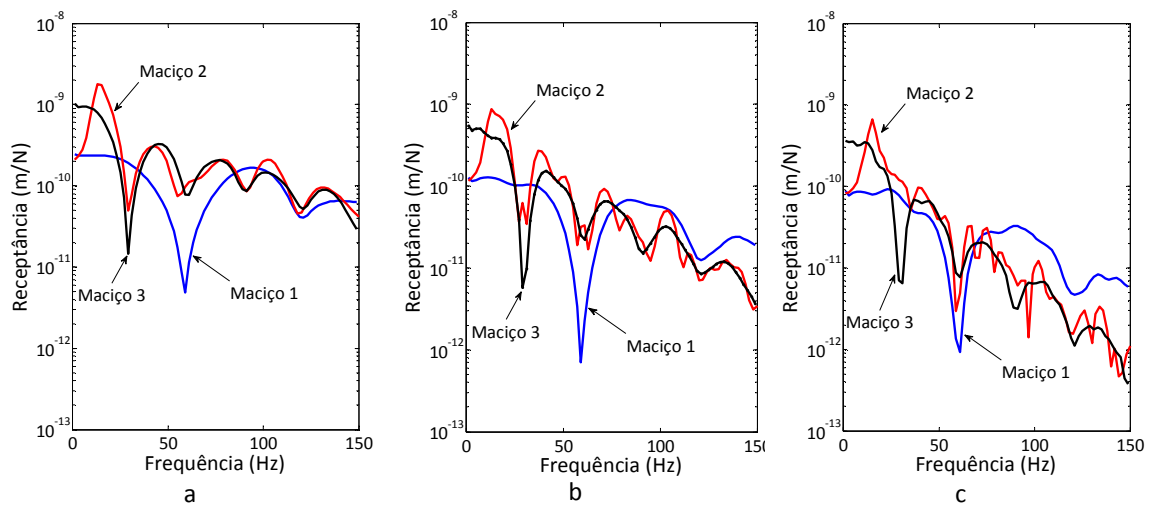


Figura 4.21 – Influência das propriedades do maciço de fundação na receptância na vizinhança da via:  
a)  $x=0$  m,  $y=6$  m; b)  $x=0$  m,  $y=12$  m; c)  $x=0$  m,  $y=18$  m.

#### 4.5.2.3 Influência das características do balastro

##### *Deformabilidade do balastro*

No que toca à deformabilidade do balastro, compete desde já referir que este parâmetro é de muito difícil quantificação determinística, pois depende não só das características básicas do agregado que constitui a camada de balastro (propriedades mineralógicas, granulometria,

angulosidade das partículas, etc.) como também de aspectos construtivos (compactação), ciclos de carga experimentados e da regularidade das operações de manutenção realizadas [179]. Com base em resultados publicados na bibliografia pode apontar-se uma gama de variação do módulo de deformabilidade deste material entre os 100 MPa e os 200 MPa [141, 155, 177, 179, 180].

Tendo como objectivo a avaliação da sensibilidade da resposta dinâmica do sistema via-macício face às propriedades deformacionais do balastro apresentam-se, na Figura 4.22, os resultados relativos à receptância da via considerando, para além do cenário base ( $E_b=130$  MPa), a possibilidade do balastro apresentar um módulo de deformabilidade de 100 MPa ou 200 MPa.

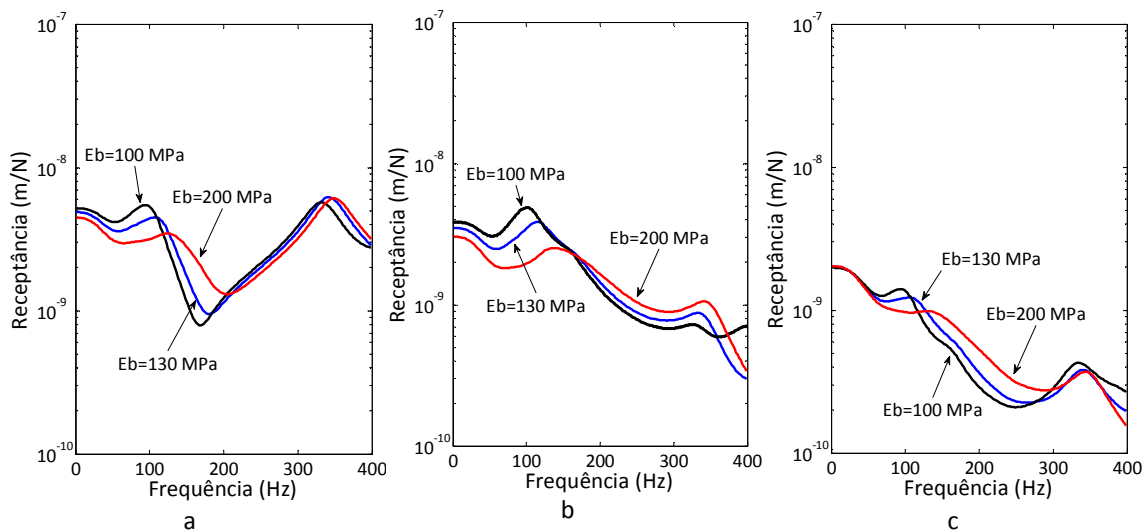


Figura 4.22 – Influência do módulo de deformabilidade do balastro na receptância de: a) carril; b) travessa; c) interface inferior via-macício de fundação.

Comparando as curvas de receptância do carril, travessa e base do balastro, constata-se que ao nível da interface via-macício, e para frequências de excitação inferiores a cerca de 60 Hz, a resposta é praticamente insensível à deformabilidade do balastro. Tal coincidência de valores permite concluir que as diferenças encontradas nos valores de receptância do carril e travessa abaixo dos 60 Hz devem-se exclusivamente à diferença de rigidez global do sistema acima da superfície do maciço. Porém, acima dos 60 Hz, algumas diferenças na resposta dinâmica propriamente dita começam a ser notórias, nomeadamente:

- i) o aumento da rigidez do balastro implica um aumento significativo das frequências associadas à ressonância da via e à anti-ressonância das travessas (ver Figura 4.22a);
- ii) os picos da resposta associados à ressonância da via e anti-ressonância da travessas são tanto mais atenuados quanto mais elevado é o módulo de deformabilidade do balastro;

- iii) para frequências de excitação entre os 60 Hz e os 125 Hz a amplitude da resposta ao nível da base do balastro é tanto menor quanto maior for a rigidez do balastro. Essa tendência é invertida para frequências de excitação na gama dos 125 Hz aos 300 Hz.

No que concerne à propagação de vibrações na vizinhança da via considerem-se os resultados ilustrados na Figura 4.23, relativos à receptância em pontos localizados à superfície do maciço e a diferentes distâncias na direcção ortogonal ao desenvolvimento da via. Como seria previsível, atendendo aos resultados expressos na Figura 4.22 c, para frequências inferiores a cerca de 60 Hz, a resposta do meio parece ser pouco afectada pela deformabilidade do balastro independentemente da distância entre o receptor e a fonte de excitação. Contudo, na gama dos 60 Hz aos 125 Hz, a influência das propriedades deformacionais do balastro não é negligenciável, sendo que, nesta gama de frequências, a amplitude da resposta é tanto mais pronunciada quanto menor for o módulo de deformabilidade atribuído a essa camada. Para frequências acima dos 125 Hz assiste-se a uma diferença comportamental dos resultados tomando  $E_b=200$  MPa face aos restantes cenários em estudo.

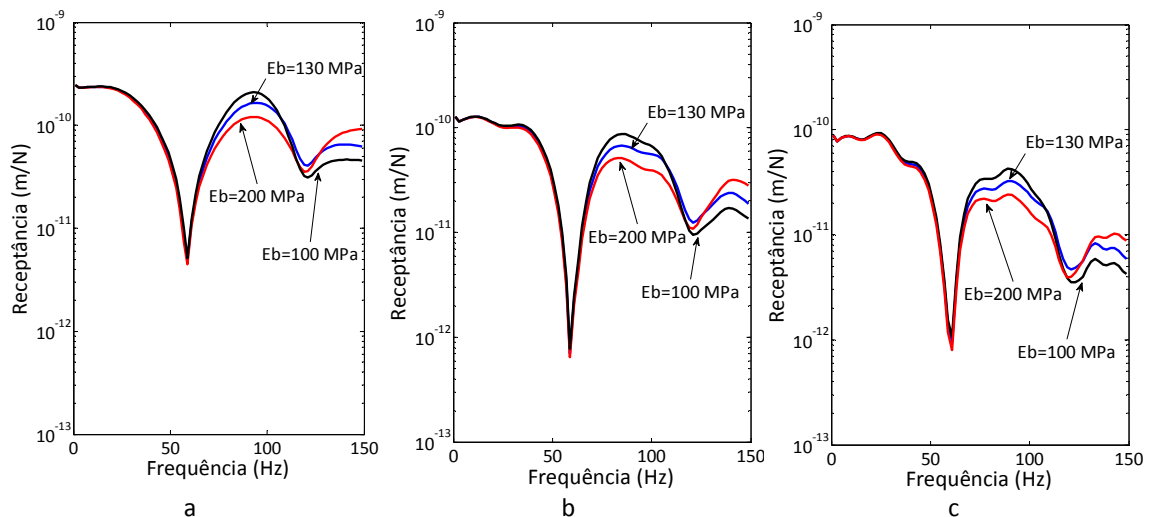


Figura 4.23 – Influência do módulo de deformabilidade na receptância na vizinhança da via: a) 6 m; b) 12 m; c) 18 m.

### **Amortecimento do balastro**

Na Figura 4.24 apresenta-se a evolução da receptância da via para diferentes valores do coeficiente de amortecimento histerético do balastro. Os estudos foram desenvolvidos considerando o estudo base ( $\xi=0,04$ ), uma análise em que o coeficiente de amortecimento do balastro foi reduzido a metade ( $\xi=0,02$ ) e uma outra em que se admitiu o dobro do valor para este parâmetro ( $\xi=0,08$ ) face ao cenário inicial.

Os resultados apresentados seguem a tendência esperada, ou seja, o sistema apenas se mostra sensível face ao valor do coeficiente de amortecimento do balastro nas gamas de frequência próximas das frequências naturais do sistema da via férrea. Nessas gamas de frequência assiste-se a uma atenuação da amplificação dinâmica tanto maior quanto mais elevado for o coeficiente de amortecimento do balastro. Como é evidente, nas zonas correspondentes a anti-ressonâncias do sistema, o efeito do amortecimento é inverso, ou seja, o pico “descendente” é tanto mais pronunciado quanto menor for o coeficiente de amortecimento.

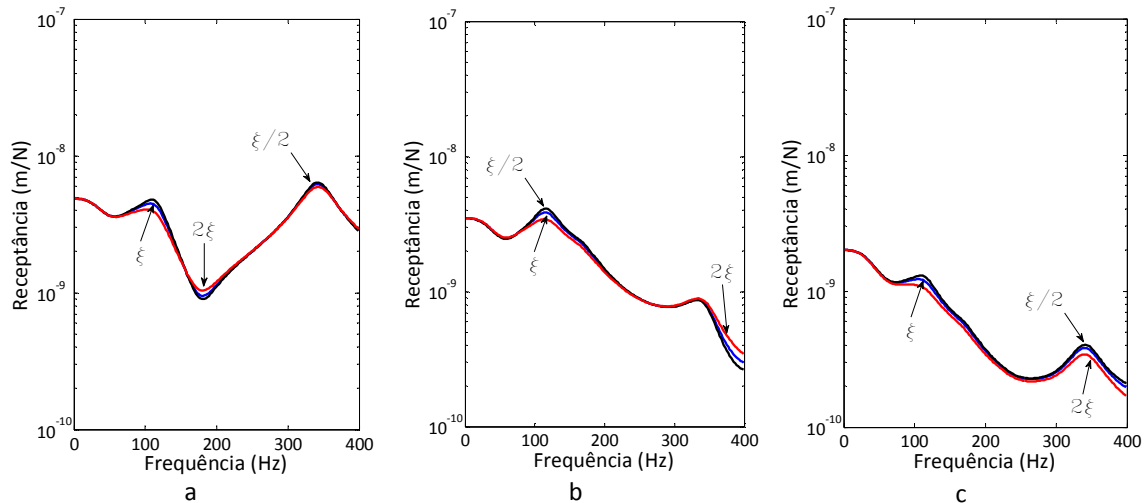


Figura 4.24 – Influência do coeficiente de amortecimento hysterético do balastro na receptância de: a) carril; b) travessa; c) interface inferior via-macizo de fundação.

Embora não sejam aqui apresentados resultados referentes à receptância na vizinhança da via, a análise da Figura 4.24c permite desde já concluir que, para a gama de frequências de interesse para problemas de propagação de vibrações (0 Hz – 150 Hz) este parâmetro não deverá mostrar-se como muito influente, pois, mesmo na interface de contacto via-macizo, a influência do amortecimento do balastro apenas se faz notar numa gama de frequências muito restrita em torno dos 100 Hz.

### ***Espessura do balastro***

A espessura da camada de balastro é um dos parâmetros que pode apresentar variação em diferentes troços de uma via férrea. Muito embora a bibliografia da especialidade aponte a espessura de 35 cm como a mais usual, não são raras as situações em que a espessura desta camada ascende a valores superiores a 50 cm [180, 181]. Como é natural, a dinâmica da via férrea é afectada por este parâmetro, já que o mesmo influi nos parâmetros dinâmicos fundamentais: massa e rigidez.

De modo a avaliar a influência da espessura da camada de balastro na resposta dinâmica do sistema apresenta-se um estudo paramétrico em que, para além do cenário base, são considerados dois outros cenários sendo que no primeiro se admite uma altura de balastro de 50 cm ao passo que no segundo esta dimensão é incrementada para 70 cm.

Fazendo um pequeno aparte, convém desde já esclarecer que, na opinião do autor, os modelos até então apresentados não são especialmente aptos para a consideração de camadas granulares com espessuras muito acentuadas, pois a rigidez de corte dos materiais não é atendida no modelo proposto, inibindo assim a possibilidade da propagação de ondas ao longo da direcção longitudinal dessas camadas. De modo a colmatar essa limitação, num capítulo posterior da presente dissertação é apresentado outro tipo de técnicas de modelação que, embora consideravelmente mais complexas e exigentes do ponto de vista computacional, permitem a consideração de alturas de aterro ilimitadas.

Os resultados de receptância da via para os três cenários encontram-se representados na Figura 4.25. Uma análise global das Figuras 4.25a e 4.25b permite logo identificar que o aumento da espessura de balastro implica uma translação da ressonância da via e respectiva anti-ressonância do carril para frequências mais baixas. Este resultado não apresenta novidade já que quanto maior é a espessura de balastro menor é a rigidez deste elemento e maior é a sua massa. Para além deste aspecto, a variação da espessura da camada de balastro implica também o surgimento, na gama de frequências em estudo, de novas frequências naturais do sistema. Essas frequências, correspondentes aos novos picos que surgem nas curvas de ressonância quando  $h=0,50$  m e  $h=0,70$  m prendem-se com a ressonância da própria camada de balastro sendo justificadas à luz da teoria da propagação de ondas unidireccionais em meios contínuos. No cenário correspondente a  $h=0,50$  m assiste-se mesmo a uma perturbação da curva de receptância do carril na gama de frequências associada à ressonância do carril sobre os seus apoios, na ordem dos 350 Hz.

Relativamente à receptância ao nível da interface via-maciço (Figura 4.25c), os resultados expostos permitem constatar que, para a gama de frequências em estudo, a espessura do balastro é um parâmetro condicionante da resposta para toda a gama de frequências à excepção do intervalo dos 0 Hz aos 50 Hz, onde as diferenças na resposta dinâmica são menos perceptíveis.

Passando à análise da receptância na vizinhança da via, os resultados expostos na Figura 4.26 permitem concluir que, para frequências acima dos 50 Hz, assiste-se a uma influência muito significativa da espessura de balastro na resposta do meio. A sensibilidade da resposta dinâmica face ao parâmetro em estudo tende a agravar-se à medida que a frequência de excitação

aumenta podendo atingir diferenças de cerca de metade da ordem de grandeza para frequências de interesse entre os 125Hz e os 150 Hz, independentemente da distância do ponto de observação à via férrea.

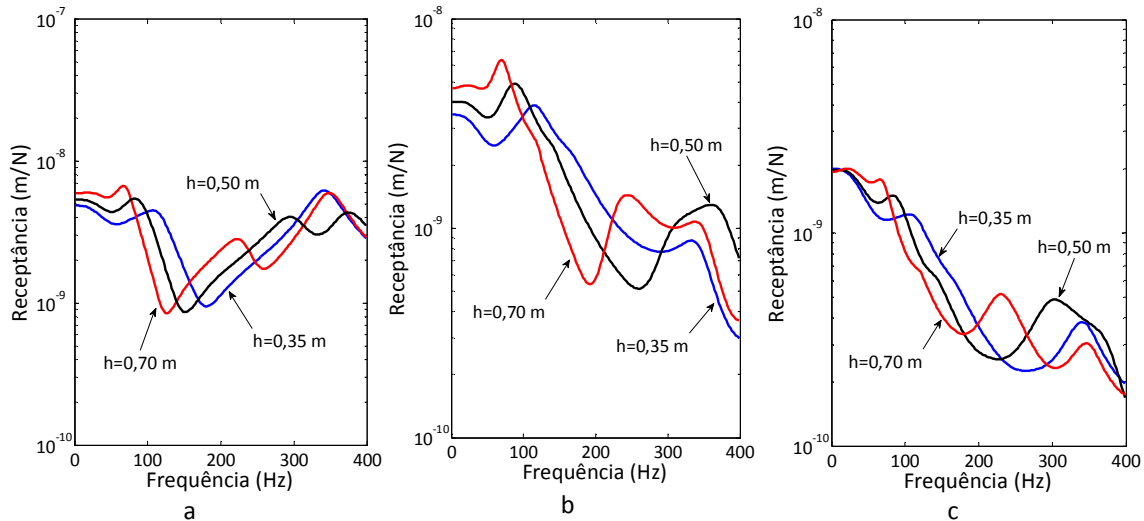


Figura 4.25 – Influência da espessura de balastro na receptância de: a) carril; b) travessa; c) interface inferior via-macizo de fundação.

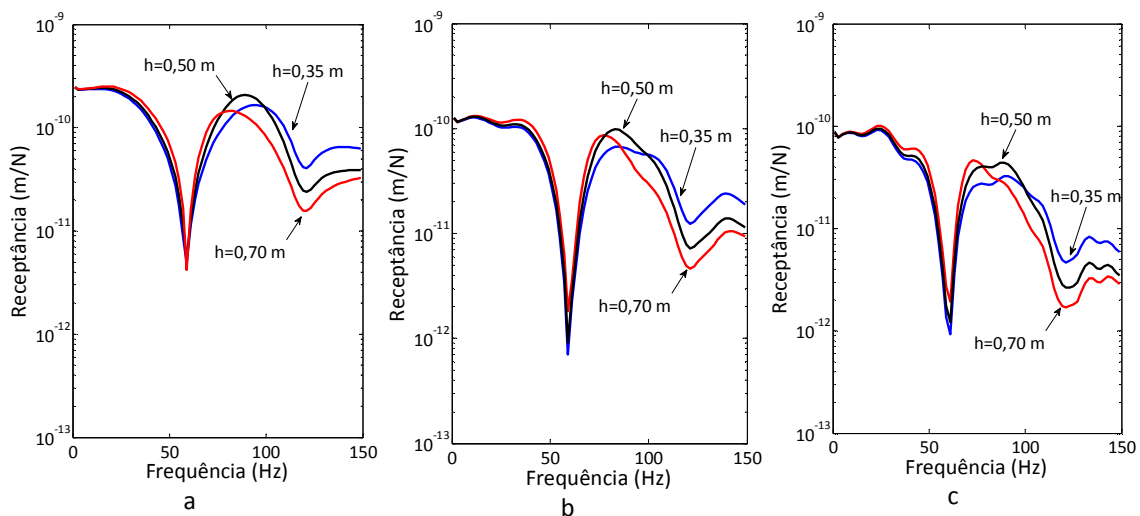


Figura 4.26 – Influência da espessura da camada de balastro na receptância na vizinhança da via: a) 6 m; b) 12 m; c) 18 m.

Por último, e face aos resultados e observações anteriormente expostos, é pois lícito afirmar que a correcta caracterização geométrica da camada de balastro constitui um aspecto condicionante para a avaliação da resposta dinâmica do sistema via-macizo, podendo exigir um refinamento dos modelos de cálculo apresentados até aos momento.



#### 4.5.2.4 Influência das características das palmilhas

##### *Rigidez das palmilhas*

Numa fase preliminar do presente capítulo foi já discutida, de uma forma qualitativa, a importância das propriedades mecânicas das palmilhas sobre a resposta dinâmica da via férrea. Pelo facto de se tratar de um componente da via férrea que apresenta uma variabilidade muito significativa, justifica-se a realização de um estudo paramétrico para avaliar qual a influência da sua rigidez na resposta dinâmica da via e também ao nível da propagação de vibrações através do maciço de fundação. Segundo o estado de arte realizado por Maynar [155], a rigidez das palmilhas utilizadas em vias balastradas modernas apresenta uma gama de variação entre 100 kN/mm e 200 kN/mm, sendo que para vias não balastradas é usual a utilização de palmilhas bastante mais flexíveis de modo a compensar o excesso de rigidez que lhe é conferida pela substituição do balastro por uma laje de betão.

Com o objectivo de avaliar a influência deste parâmetro na resposta do sistema apresentam-se seguidamente duas análises adicionais nas quais foi considerada o dobro (300 kN/mm/palmilha) ou metade (75 kN/mm/palmilha) da rigidez das palmilhas adoptada no estudo base (150 kN/mm/palmilha). Os resultados do estudo de sensibilidade efectuado ao nível da receptância da via encontram-se sintetizados na Figura 4.27.

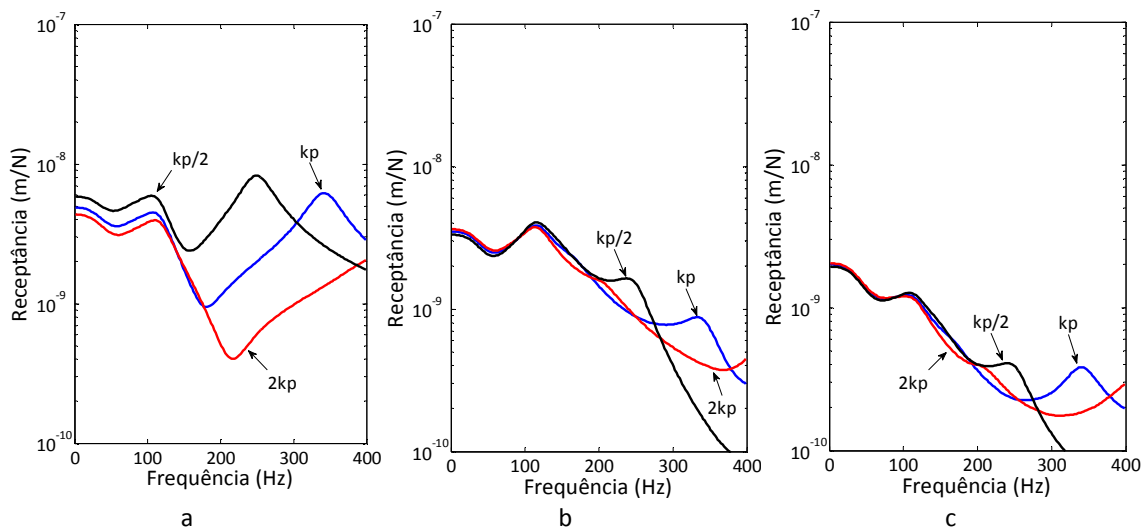


Figura 4.27 – Influência da rigidez da palmilha na receptância de: a) carril; b) travessa; c) interface inferior via-macício de fundação.

Comparando a receptância ao nível do carril, travessa e fronteira inferior do balastro conclui-se de imediato que é ao nível dos deslocamentos do carril que a rigidez da palmilha toma maior importância. A esse nível compete referir que, para frequências muito baixas, a diferença verificada entre as três curvas de receptância deve-se às diferenças de rigidez estática das

palmilhas consideradas nos diferentes cálculos, o que aliás seria expectável. Note-se que, nessa gama de frequências, as diferenças na receptância ao nível do carril e base do balastro são de todo insignificantes.

Do ponto de vista dinâmico, a rigidez da palmilha tem uma clara influência na anti-ressonância do carril, a qual, para além de atenuada para menores valores de rigidez da palmilha, passa a identificar-se para frequências tanto menores quanto mais deformável for o referido elemento. Da mesma forma, o aumento da rigidez da palmilha leva a que a ressonância do carril ocorra para valores de frequência mais elevadas. Note-se que quando se considera a rigidez de 300 kN/mm (2kp) a ressonância do carril verifica-se acima dos 400 Hz.

Passando para a receptância das travessas e base do balastro, a análise das Figuras 4.27b e 4.27c sugere que a influência do parâmetro em estudo é diminuta quando considerada a gama de frequências abaixo dos 150 Hz. Deste modo pode então concluir-se que, para a análise de vibrações induzidas no maciço, a rigidez da palmilha não é de todo um parâmetro muito relevante. Esta conclusão é corroborada pela Figura 4.28, onde se ilustra a influência da rigidez da palmilha na receptância identificada em pontos adjacentes à via. Como se pode verificar, a influência da rigidez da palmilha é negligenciável para o estudo das vibrações induzidas com frequências inferiores a 75 Hz e muito pouco significativa na gama dos 75 Hz aos 150 Hz.

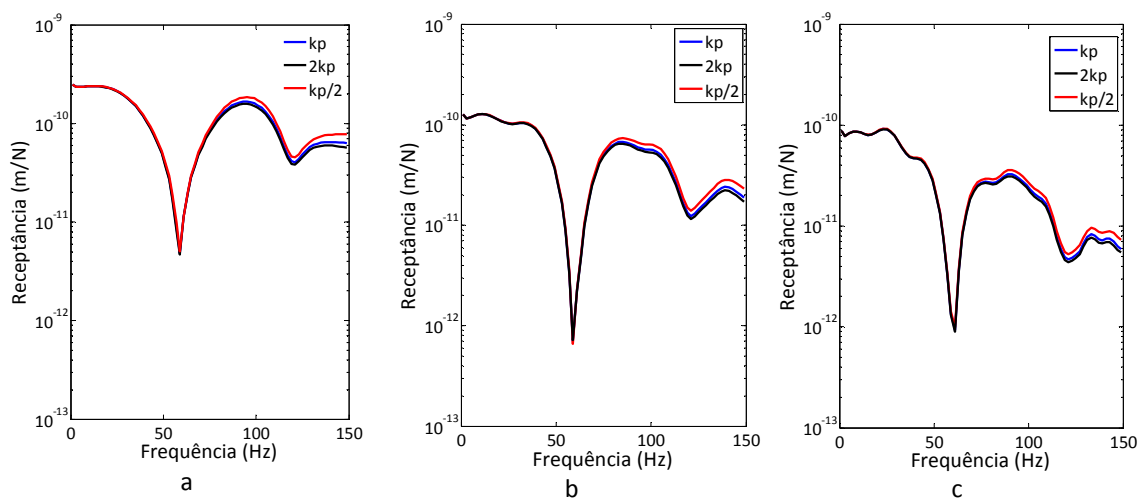


Figura 4.28 – Influência da rigidez da palmilha na receptância identificada na vizinhança da via: a)  $y=6m$ ; b)  $y=12m$ ; c)  $y=18m$ .

### **Amortecimento das palmilhas**

Como já anteriormente referido, um dos aspectos principais a considerar na selecção das palmilhas a adoptar para uma dada linha férrea consiste no amortecimento que este elemento possa conferir ao sistema de modo a atenuar as acções dinâmicas que são transmitidas do carril

às travessas. Para analisar a influência da rigidez das palmilhas na resposta dinâmica da via férrea considere-se o estudo paramétrico sumariado na Figura 4.29 no qual, partindo do cenário base, se considera a variação do amortecimento da palmilha para o dobro ou metade do valor inicial.

Como era expectável, o amortecimento das palmilhas é um parâmetro que influi essencialmente na gama de frequências em torno das zonas de ressonância que sejam controladas total, ou parcialmente pela rigidez destes elementos. A observação dos resultados de receptância tanto ao nível do carril como das travessas e base do balastro denuncia uma notória influência do amortecimento da palmilha na amplitude da resposta na gama de frequências dos 300 Hz aos 400 Hz. Contudo, para frequências de excitação abaixo dos 300 Hz, o efeito sobre a amplitude da resposta do sistema é insignificante, fazendo apenas notar-se, ainda que ligeiramente, na resposta do carril e para as frequências de análise na região da anti-ressonância deste elemento.

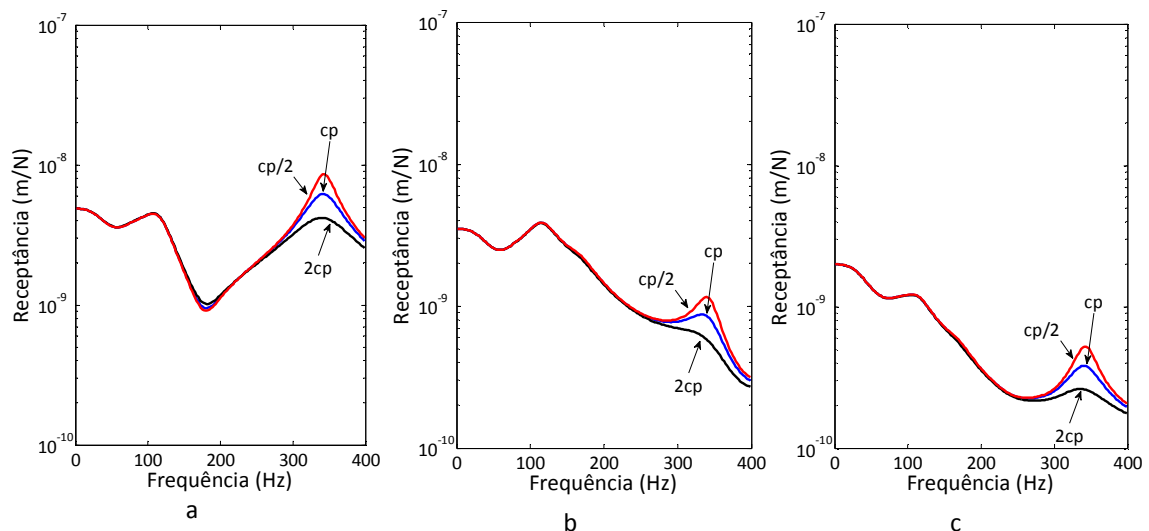


Figura 4.29 – Influência do amortecimento viscoso da palmilha na receptância de: a) carril; b) travessa; c) interface inferior via-macizo de fundação.

Embora não sejam aqui apresentados resultados referentes à receptância na vizinhança da via, a observação da Figura 4.29c permite avançar que, para o estudo de problemas relacionados com a propagação de vibrações na vizinhança da via (gama de frequências dos 0-150 Hz), o amortecimento da palmilha não é um parâmetro relevante, pois, para a gama de frequências de interesse, mesmo na zona de contacto via-macizo de fundação não se observam diferenças consideráveis da resposta mediante o valor do coeficiente de amortecimento adoptado.

### **4.5.3 Estudo de velocidades críticas**

#### **4.5.3.1 Apresentação do estudo**

No capítulo anterior da dissertação foi já discutida a existência de pelo menos uma velocidade crítica em maciços geotécnicos. Essa velocidade foi definida como a velocidade de circulação de uma acção vertical à superfície do maciço para a qual ocorre a amplificação máxima dos deslocamentos verticais induzidos nessa mesma superfície. Porém, aquando da explanação desse fenómeno, apenas se considerou a possibilidade de a solicitação se deslocar à superfície do maciço, sem que fosse atendida a existência da via férrea. Como se compreende, a instalação da via férrea implica uma alteração das características dinâmicas do sistema, passando agora a ser constituído não só pelo maciço de fundação mas pelo conjunto via-maciço.

O recente desenvolvimento tecnológico dos comboios de alta velocidade tem suscitado um crescente interesse sobre as questões relacionadas com os efeitos causados pela circulação de comboios com velocidades próximas ou mesmo superiores à velocidade crítica do sistema. Embora as situações práticas em que a comunidade técnica se viu confrontada com esta problemática sejam ainda em número reduzido, o novo recorde de velocidade de teste com o comboio TGV, o qual atingiu a velocidade de 574,8 km/h, sugere que esta problemática assumirá uma relevância muito significativa nas próximas décadas.

Uma das questões que tem vindo a ser discutida pela comunidade científica prende-se com as medidas de mitigação a adoptar caso a velocidade de circulação do comboio ascenda a valores muito próximos da velocidade de propagação das ondas no maciço de fundação. Uma das soluções que tem sido apontada com relativa frequência passa pela adopção de vias com muito elevada rigidez e pouca massa de modo a aumentar o valor da velocidade crítica do sistema [167, 182-184]. Porém, estudos teóricos elaborados por Sheng et al. [185] mostram que a eficácia desta medida é discutível e que depende muito do cenário geotécnico em presença.

A discussão seguidamente apresentada baseia-se num estudo paramétrico em que são consideradas três configurações distintas da via férrea e três cenários geotécnicos distintos. As propriedades adoptadas para as vias férreas estão sintetizadas no Quadro 4.2, ao passo que a informação referente aos cenários geotécnicos se encontra ilustrada na Figura 4.30.

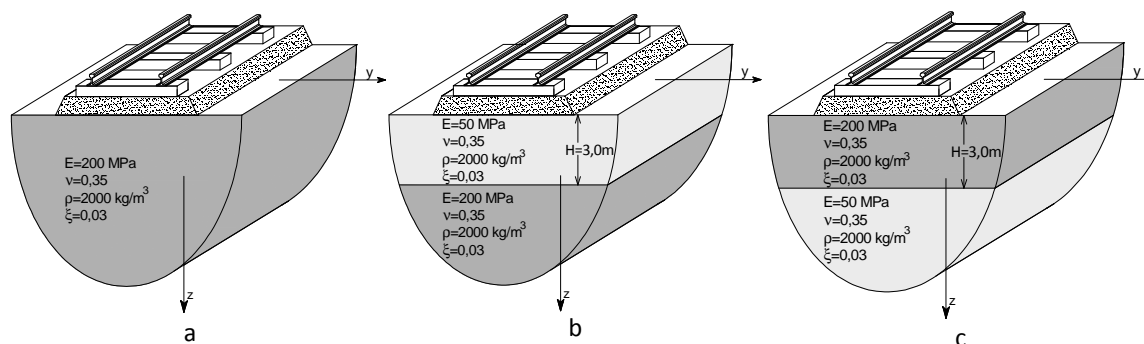


Figura 4.30 – Características gerais dos maciços considerados no estudo paramétrico: a) Maciço 1; b) Maciço 2; c) Maciço 3.

Quadro 4.2 – Propriedades mecânicas e geométricas das vias férreas adoptadas no estudo da velocidade crítica do sistema via-macício.

		V1	V2	V3
		(balastrada)	(não balastrada)	(não balastrada)
Carris (2)	$EI_r$ (Nm <sup>2</sup> )	1,26x10 <sup>7</sup>		
	$m_r$ (kg/m)	120		
Palmilhas (2)	$k_p$ (N/m)	5x10 <sup>8</sup>		
	$c_p$ (Ns/m)	2,5x10 <sup>5</sup>		
Travessas	$m_s$ (kg/m)	490		
Balastro ou laje	$h_{\text{balastro/laje}}$ (m)	0,35	0,44	
	$E_{\text{balastro/laje}}$ (Pa)	130x10 <sup>6</sup>	30x10 <sup>9</sup>	
	$2b$ (m)	2,5		
	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1700	2500	1990

Nota: A rigidez de flexão da laje do caso V3 é o dobro da do caso V2 mas as respectivas massas são iguais.

#### 4.5.3.2 Maciço homogéneo semi-indefinido (Maciço 1)

Na Figura 4.31 apresenta-se a evolução do coeficiente de amplificação dinâmica do deslocamento vertical do carril (razão entre o deslocamento máximo identificado para uma dada velocidade e o homólogo em condições quasi-estáticas) em função da velocidade de circulação (adimensionalizada face à velocidade de propagação das ondas S no maciço) de uma carga

unitária, com direcção vertical e aplicada na cabeça dos carris. A observação geral da figura permite desde logo concluir que apesar da amplitude dos deslocamentos verticais diminuir na razão do aumento da rigidez da via, a velocidade crítica do sistema via-macijo mantém-se praticamente inalterada, independentemente da rigidez da via, correspondendo, em qualquer um dos cenários, à velocidade de propagação das ondas R no macijo de fundação ou a um valor muito ligeiramente inferior, no caso da via balastrada (via V1).

O facto de a velocidade crítica ser obrigatoriamente igual ou inferior à velocidade de propagação das ondas R no macijo homogéneo e semi-indefinido que serve de fundação à via foi já identificado por Dieterman e Metrikine [7, 131], muito embora a justificação teórica para este facto se deva a Sheng et al. [185]. Segundo este autor, nos casos em que o macijo de fundação possa ser assemelhado a um meio homogéneo e semi-indefinido, a velocidade crítica do sistema ou é igual à velocidade de propagação das ondas R no macijo ou é ligeiramente inferior. Este facto é esclarecido com relativa facilidade considerando as relações de dispersão do macijo e da via-férrea, as quais se encontram representadas na Figura 4.32. Uma vez que a determinação da relação de dispersão do meio conjunto via-macijo é complexa, pode ser seguida uma via mais simples que consiste em determinar a relação de dispersão da via sem considerar o contributo oriundo da rigidez dinâmica conferida pela fundação (ver Anexo 4.1). Atendendo ao facto de o macijo em questão ser homogéneo e semi-indefinido, a sua relação de dispersão apresenta apenas um modo de vibração em correspondência com a propagação de ondas R. Segundo Sheng et al. [185], nos casos em que a curva de dispersão da via intersecte a curva de dispersão do macijo (significa que as ondas que se propagam na via “livre” têm o mesmo comprimento de onda que as que se propagam no macijo), a velocidade crítica é definida pelo inverso da inclinação da recta que une a origem do referencial de dispersão ao ponto de intersecção das duas linhas, ou seja:

$$C_{\text{crit}} = \frac{f_0}{k_0} \quad [4.44]$$

em que  $f_0$  e  $k_0$  correspondem, respectivamente, à ordenada e abcissa do ponto de intersecção das duas curvas de dispersão.

No caso em estudo, a intersecção da curva de dispersão da via com a homóloga referente ao macijo ocorre quando se admite a existência de via em laje, tanto para a via V2 como para a V3. Embora a via V3 apresente o dobro da rigidez à flexão da via V2 e a massa de ambas seja igual, esse facto em nada altera o valor da velocidade crítica do sistema, pois como o macijo é não

dispersivo, a equação [4.44] conduz sempre ao valor crítico correspondente à velocidade de propagação das ondas R.

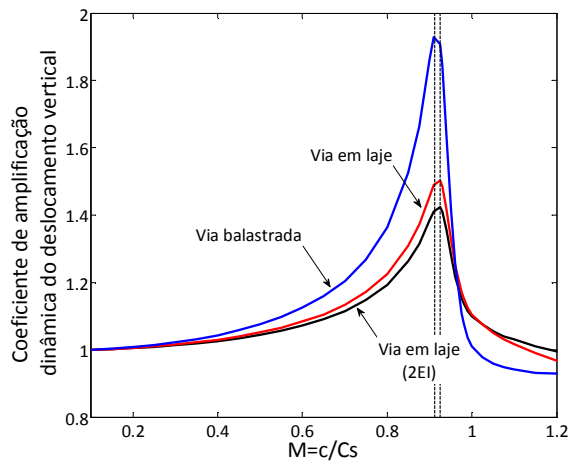


Figura 4.31 – Evolução do coeficiente de amplificação dinâmica do deslocamento vertical do carril (Maciço 1).

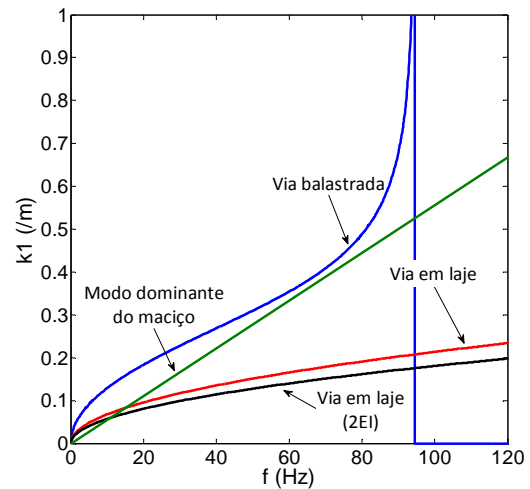


Figura 4.32 – Relação de dispersão do meio semi-indefinido e das diferentes vias sem restrições de apoio.

Já no que se refere à via balastrada, via V1, a análise pormenorizada da Figura 4.31 permite verificar que a velocidade crítica é ligeiramente inferior à velocidade de propagação das ondas R no maciço subjacente à via. Tal é devido ao facto de as duas relações de dispersão, do maciço e a homóloga referente à via férrea, não se intersectarem. Neste caso, a velocidade crítica é definida não através do ponto de intersecção das duas curvas mas sim por um ponto que se encontre entre ambas na zona em que estas são mais próximas.

Face à análise exposta pode pois concluir-se que, quando o cenário geotécnico apresenta características próximas de um meio não dispersivo, a velocidade crítica toma sempre valores iguais ou próximos à velocidade de propagação das ondas R no maciço e que esse limite superior não é ultrapassado por maior que seja a rigidez conferida à via.

#### 4.5.3.3 Maciço estratificado normalmente dispersivo (Maciço 2)

Considere-se agora um cenário de estudo em que o maciço de fundação corresponde ao representado na Figura 4.30b, ou seja, é estratificado e normalmente dispersivo. Da mesma forma que no caso anteriormente analisado, a evolução do coeficiente de amplificação dinâmica, considerando as três vias indicadas no Quadro 4.2, encontra-se representada na Figura 4.33, sendo que neste caso a velocidade de circulação se encontra adimensionalizada face à velocidade de propagação das ondas S no estrato mais superficial.

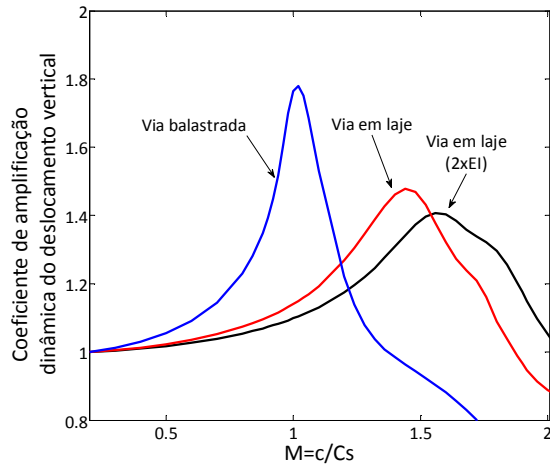


Figura 4.33 – Evolução do coeficiente de amplificação dinâmica do deslocamento vertical do carril (Maciço 2).

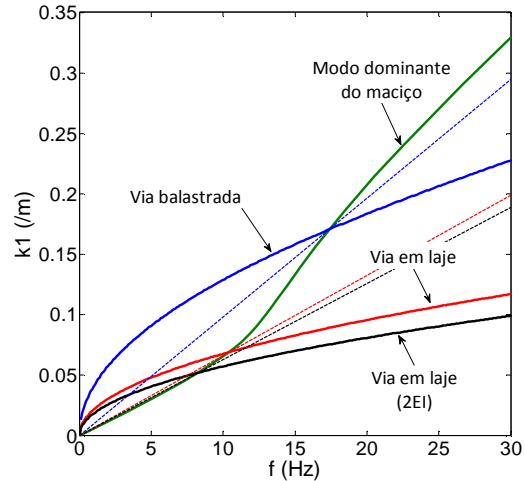


Figura 4.34 – Relação de dispersão do maciço normalmente dispersivo e das diferentes vias sem restrições de apoio.

Analisando os resultados apresentados na Figura 4.33, facilmente se conclui que a tendência agora seguida é bastante diferente da observada no caso anteriormente apresentado. De facto, caso o maciço seja estratificado e normalmente dispersivo, o aumento da rigidez da via pode acarretar um incremento substancial da velocidade crítica do sistema via-macriço. A explicação para este facto está bem patente na Figura 4.34, na qual se ilustra a relação de dispersão do modo dominante do macriço (primeiro modo P-SV) e as curvas de dispersão da via, admitindo nula a restrição de movimento no contacto via-macriço. Como já foi abordado nos capítulos anteriores da presente dissertação, quando o macriço de fundação apresenta estratificação as relações de dispersão deixam de ser representadas por rectas, mas sim por uma curva que tende para a velocidade de propagação das ondas R no estrato superficial com o aumento da frequência de excitação. Assim sendo, e atendendo ao estipulado na equação [4.44], quanto maior for a rigidez da via (considerando a mesma massa) maior será a velocidade crítica do sistema, pois menor será a frequência para a qual ocorre a intersecção entre as curva de dispersão do modo dominante do macriço e a homóloga referente à via, logo, conseqüentemente, mais elevada será a velocidade crítica. Para facilitar a análise deste facto, na Figura 4.34 encontram-se representadas rectas a traço interrompido que representam a velocidade crítica de cada um dos sistemas em estudo e que estão em total correspondência com os resultados expostos na Figura 4.33. Significa isto que, abstraindo o valor da amplificação dinâmica, a velocidade crítica pode ser definida através da análise das relações de dispersão do macriço e da via. Este aspecto pode ser relevante em vários casos práticos pois o esforço computacional para a definição das relações de dispersão é nulo quando comparado com o exigido para a representação dos coeficientes de amplificação dinâmica.



Uma regra prática que poderá ser apontada para o aumento da velocidade crítica através do incremento da rigidez da via pode ser definida impondo que a intersecção entre as duas curvas de dispersão (do maciço e da via) ocorra para frequências inferiores à correspondente ao segundo ponto de inflexão da curva de dispersão do primeiro modo P-SV do maciço. Como é evidente, caso o estrato superficial do maciço apresente uma possança muito significativa, a curva do primeiro modo P-SV tende a ser dominada pelas propriedades do estrato superficial do maciço a partir de frequências relativamente baixas e, deste modo, o incremento da velocidade crítica através do aumento de rigidez da via exigiria vias extremamente rígidas.

#### **4.5.3.4 Maciço estratificado inversamente dispersivo (Maciço 3)**

Por último, considere-se agora a possibilidade do maciço geotécnico corresponder a um cenário inversamente dispersivo, tal como o representado pelo Maciço 3 da Figura 4.30c.

A evolução do coeficiente de amplificação dinâmica do deslocamento vertical face à velocidade de circulação da carga encontra-se representada na Figura 4.35. A adimensionalização da velocidade de circulação é agora efectuada atendendo à velocidade de propagação das ondas S no estrato superficial.

Um aspecto curioso que pode ser apontado à Figura 4.35 prende-se com o facto de, ao contrário do verificado nos casos anteriormente apresentados, a amplificação dinâmica máxima da via V1, a via balastrada, ser inferior à verificada nas vias V2 e V3, mesmo sendo estas mais rígidas. Embora não sejam aqui apresentados resultados relativos a deslocamentos absolutos, os deslocamentos identificados no cenário correspondente à via V1 são significativamente superiores aos identificados quando consideradas as vias V2 e V3. O facto de o coeficiente de amplificação dinâmica ser inferior na via V1 é justificado pelo facto de os deslocamentos estáticos desta via serem muito superiores aos identificados quando consideradas as vias V2 e V3.

Passando à análise das velocidades críticas, os resultados expostos na Figura 4.35 sugerem que, independentemente das características dinâmicas da via, a velocidade crítica do sistema via-macriço encontra-se entre a velocidade de propagação das ondas R e S na formação geotécnica inferior. Este facto é concordante com as conclusões alcançadas no Capítulo anterior aquando do estudo da resposta de macriços inversamente dispersivos face a acções com carácter móvel. Porém, um aspecto que não pode deixar de ser referido prende-se com o facto de a presença da via inibir o desenvolvimento da segunda velocidade crítica do macriço, a qual apenas é notada no caso da via V1 e de uma forma muito atenuada.

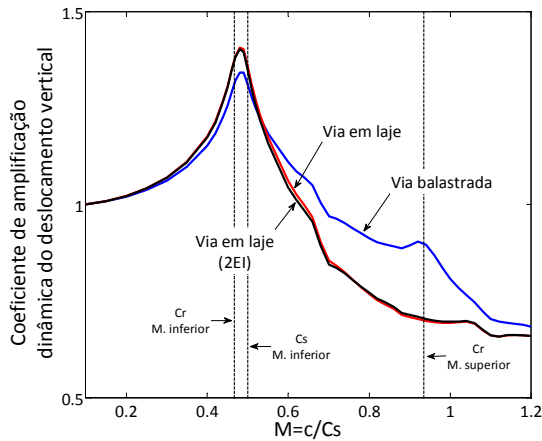


Figura 4.35 – Evolução do coeficiente de amplificação dinâmica do deslocamento vertical do carril (Maciço 3).

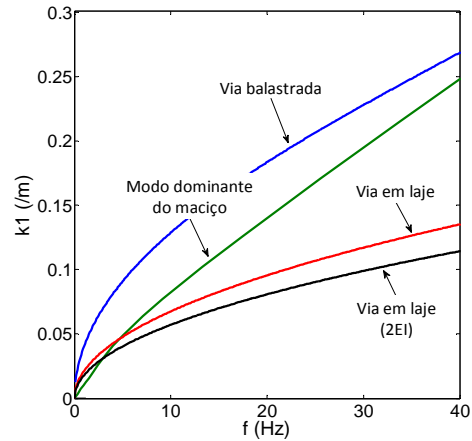


Figura 4.36 – Relação de dispersão do maciço inversamente dispersivo e das diferentes vias sem restrições de apoio.

A justificação para a velocidade crítica encontrada segue a mesma linha de raciocínio que para os restantes casos, bastando para isso analisar os resultados expostos na Figura 4.36. Uma vez que a curva de dispersão do primeiro modo do maciço segue uma tendência de aumento da velocidade de propagação das ondas P-SV com o aumento da frequência de excitação, o fenómeno passa a ser totalmente controlado pelas propriedades do maciço, sendo a primeira velocidade crítica praticamente insensível às propriedades dinâmicas da via. Convém contudo ressaltar que o caso analisado é relativamente simples e que em cenários geotécnicos de maior complexidade, nos quais haja um maior número de estratos, as conclusões aqui apresentadas poderão não ser mais válidas.

#### 4.6 Considerações finais e conclusões

O Capítulo que agora culmina pode ser dividido em três partes principais, dando assim cumprimento aos objectivos gerais apresentados na sua introdução.

Numa primeira parte procede-se a uma descrição genérica dos sistemas estruturais mais comumente adoptados em vias férreas modernas. Para além da descrição dos elementos constituintes da via férrea, procede-se ainda a uma apresentação generalista dos mecanismos de excitação dinâmica da via advindos da solicitação de tráfego, sendo dada maior ênfase aos mecanismos que são atendidos nos modelos numéricos desenvolvidos na presente dissertação.

Após a descrição acima sintetizada, o estudo foca-se no desenvolvimento de metodologias de modelação de vias férreas através de técnicas semi-analíticas. Os modelos desenvolvidos atendem à tipologia estrutural da via férrea, podendo ser balastradas ou não balastradas, e à

interacção entre a estrutura ferroviária e o maciço de fundação subjacente. Estes modelos, embora relativamente simples, permitem atender à interacção dinâmica via-macício de fundação, o que se revela crucial não só para a interpretação da resposta dinâmica da via férrea mas também para o estudo das vibrações que daí são emanadas e se propagam pelo maciço de fundação. Relativamente a este último aspecto, a interacção dinâmica entre a via férrea e o maciço de fundação pode ser conduzida através de esquemas formais distintos, os quais foram também implementados no modelo de cálculo desenvolvido. Contudo, o recurso a técnicas semi-analíticas impõe sérias restrições ao nível das características geométricas do problema a ser analisado, razão pela qual os modelos aqui propostos podem ser encarados como soluções de compromisso entre a generalidade do método e a facilidade de aplicação do mesmo. Não pode porém deixar de se referir que a facilidade de aplicação dos modelos associada à economia computacional a estes inerente torna esta classe de modelos ferramentas extremamente úteis para uma análise fenomenológica do comportamento dinâmico de vias férreas e para a condução de estudos de sensibilidade e paramétricos.

Dando seguimento ao acima apresentado, a terceira parte do capítulo reflecte um conjunto de estudos de sensibilidade efectuados por recurso aos modelos desenvolvidos e dirigidos com o intuito de esclarecer a influência de diversos parâmetros na resposta dinâmica da via férrea e do maciço geotécnico subjacente. Por sua vez, este conjunto de estudos encontra-se dividido em duas partes principais. Na primeira parte é apresentado um vasto conjunto de estudos de sensibilidade com o intuito de avaliar a influência, na resposta dinâmica do meio, das propriedades dos elementos estruturais da via férrea balastrada e do maciço de fundação. Esse estudo, desenvolvido com base no conceito de receptância, permitiu discernir a influência de diversos parâmetros na resposta dinâmica da via para uma gama de frequências compreendida entre 1 Hz e 400 Hz. De entre os vários aspectos analisados, a influência das propriedades das camadas granulares da via férrea (balastro e subbalastro) toma especial destaque na resposta dinâmica da via férrea na gama de frequências mais baixas. Nessa mesma gama de frequências, uma influência notória é também atribuída às propriedades mecânicas e características de estratificação do maciço de fundação. Por sua vez, no que toca à propagação de vibrações através do maciço de fundação, identifica-se, para além das características mecânicas do maciço, a espessura das camadas granulares da via férrea como um parâmetro claramente influente. Outros parâmetros analisados, tais como as propriedades mecânicas das palmilhas, permitiram ainda concluir que a sua influência na resposta dinâmica de pontos afastados da via férrea é diminuta, tendo contudo uma influência apreciável na resposta dinâmica da via, principalmente quando a

excitação ocorre em frequências próximas das frequências de ressonância ditadas pelas características desses elementos.

A segunda parte do estudo de sensibilidade focou-se na avaliação da influência das propriedades dinâmicas da via férrea e do maciço de fundação na velocidade crítica do sistema via-macício. Com base nesse estudo foi possível identificar que, caso o maciço de fundação possa ser assemelhado a um meio homogêneo semi-indefinido, a velocidade crítica do sistema via-macício é praticamente independente das propriedades dinâmicas da via férrea. Contudo, a estratificação do maciço altera tal premissa, verificando-se que em cenários normalmente dispersivos é possível incrementar a velocidade crítica do sistema através da escolha criteriosa das propriedades dinâmicas da via férrea. Por outro lado, caso o maciço apresente uma diminuição de rigidez em profundidade (meio inversamente dispersivo), o estudo desenvolvido aponta no sentido de a velocidade crítica do sistema via-macício ser pouco sensível às propriedades dinâmicas da via férrea. Os estudos apresentados foram acompanhados de uma interpretação teórica através da representação no espaço transformado ( $f-k$ ) das curvas de dispersão do maciço (P-SV) e da via férrea, bem como das linhas velocidade-carga. Esse esforço de interpretação teórica, conjugado com a análise das curvas de amplificação dinâmica mediante a velocidade de circulação, permitiu concluir que uma análise prévia da velocidade crítica do sistema via-macício pode ser efectuada no espaço  $f-k$ , permitindo assim uma redução muito significativa do esforço computacional.

Apesar da indiscutível pertinência dos modelos semi-analíticos para a análise fenomenológica da resposta dinâmica do sistema via-macício de um modo eficaz, as limitações advindas do recurso a técnicas (semi-)analíticas restringem o campo de aplicação desses modelos. Assim sendo, no Capítulo subsequente apresenta-se uma classe de modelos mais generalista, baseados no conceito do método dos elementos finitos 2.5D, a qual permite ultrapassar algumas das limitações apresentadas pelos modelos semi-analíticos, embora, e como seria expectável, com claro sacrifício da economia computacional e conseqüente aumento do tempo de cálculo.

# 5. Modelação 2.5D da resposta dinâmica do sistema via-macijo

---

## 5.1 Considerações gerais

A análise tridimensional de problemas, envolvendo questões de interacção dinâmica entre uma estrutura e o respectivo macijo de fundação, é sempre um assunto complexo, não sendo displicente para essa complexidade o contributo apresentado pelo carácter infinito do último. Do ponto de vista teórico e conceptual estão actualmente estabelecidas todas as bases para a utilização de diversos tipos de métodos e modelos, indo desde os semi-analíticos, como os apresentados nos capítulos anteriores, até a poderosas ferramentas numéricas baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF), no Método dos Elementos de Contorno (MEC) ou mesmo no Método dos Elementos Discretos (MED).

Os modelos numéricos, como o MEF ou o MEC, constituem hoje em dia ferramentas poderosas para a análise de diversos problemas de Engenharia Civil, podendo atender às condicionantes geométricas dos problemas bem como às complexas leis constitutivas dos materiais envolvidos. Se, por um lado, esta versatilidade torna estes métodos ferramentas preferenciais de análise, o custo computacional inerente a modelos com milhares, senão milhões, de graus de liberdade torna a sua utilização pouco viável. Recorde-se que a inviabilidade da utilização destes métodos em domínios tridimensionais de grande dimensão não advém de deficiências teóricas dos métodos em si, ou de qualquer outra incapacidade cognitiva, mas sim da falta de capacidade dos computadores actualmente disponíveis [8]. Claro que a utilização de supercomputadores permite contornar esta questão, porém, na ausência dessas infraestruturas computacionais, os estudos conduzidos têm ficado limitados a frequências de análise muito baixas, para as quais são admissíveis discretizações mais largas, ou seja, reduzindo-se conseqüentemente o número de graus de liberdade [42, 186-188].

Face ao exposto no parágrafo anterior, o analista fica defrontado com uma questão de difícil opção, ou recorre a modelos semi-analíticos, tais como os apresentados nos capítulos anteriores, com limitações consideráveis em termos de modelação da geometria do problema e de generalização do mesmo, ou recorre a métodos numéricos, como o MEF ou o MEC, e nesse caso vê-se defrontado com a limitação da dimensão do modelo e da frequência de análise. Uma alternativa viável passa por uma solução de compromisso entre os dois métodos, ou seja, utilizar

um modelo numérico que admita algumas simplificações ou restrições relativamente à geometria mas que seja mais versátil do que os modelos semi-analíticos, sem nunca sacrificar o carácter tridimensional do problema.

No caso de infraestruturas de transporte ferroviário, à excepção de zonas particulares como zonas de transição aterro-ponte (ou outras, como por exemplo entrada de túneis, transições entre tipologias distintas de via, etc.), curvas de pequeno raio e outras, o meio pode ser encarado como infinito e rectilíneo na direcção de desenvolvimento da estrutura, ou, de um modo mais claro, o início e o término do meio ocorre a grande distância da zona de interesse. Este aspecto pseudo-infinito está bem patente na Figura 5.1a, na qual se apresenta uma fotografia da via-férrea na zona do Campo Experimental do Carregado (analisado no Capítulo 8). Para além do carácter infinito da estrutura, caso as propriedades mecânicas e geométricas do meio se mantenham constantes ao longo da direcção de desenvolvimento da via, então é também lícito afirmar que a estrutura é infinita e periódica, já que a mesma se repete na direcção longitudinal em função da distância entre travessas.

Uma abordagem consistente para estruturas infinitas e periódicas é a que resulta da aplicação de transformadas de Floquet às equações gerais do problema. Este tipo de abordagem permite a consideração de todo o meio tridimensional através da análise de uma célula representativa, tal como a ilustrada na Figura 5.1b [181, 189]. Esta metodologia tem vindo a ser aplicada com sucesso em modelos numéricos tridimensionais híbridos do tipo MEF-MEC, ou seja tirando partido do MEF e do MEC, sendo exemplos dessas aplicações os recentes trabalhos apresentados por diversos autores [174, 181, 190, 191]. Apesar da muito significativa redução do esforço computacional através da aplicação deste método, a exigência em termos de memória computacional e capacidade de armazenamento de dados continua a ser considerável, tornando ainda assim o método pouco apelativo para aplicações práticas.

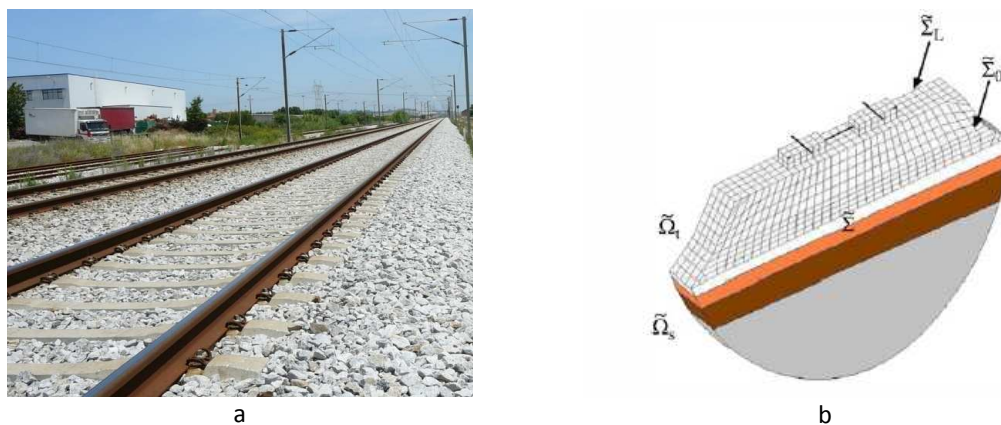


Figura 5.1 – Vias férreas com desenvolvimento infinito e periódico: a) Campo experimental do Carregado; b) célula fundamental [181].

Como já discutido anteriormente, e devidamente comprovado pelos estudos elaborados por Takemiya e Bian [65] e por Vostroukhov e Metrikine [171], entre outros, a influência da consideração do apoio discreto dos carris é praticamente negligenciável quando comparados os resultados obtidos por um modelo de apoio discreto com os homólogos traduzidos por modelo contínuo equivalente. Deste modo, caso a descontinuidade induzida pelo carácter periódico das travessas seja desprezada, então, tendo em atenção os pressupostos anteriormente apresentados, o sistema via férrea-macizo de fundação pode ser encarado como infinito e invariante ao longo da direcção longitudinal. Nos casos em que esta aproximação seja válida, pode então ser adoptado um esquema computacional extremamente eficiente designado por 2.5D, no qual apenas a secção transversal do problema necessita de ser discretizada, visto que se tira partido da transformação de Fourier da variável espacial na direcção de desenvolvimento da via. Esta formulação pode ser aplicada tanto a modelos baseados no MEF [170, 192-195] como no MEC, como ainda a modelos híbridos que tiram vantagem dos dois métodos [88, 110, 112, 196, 197]. Esclareça-se contudo que, apesar de apenas a secção transversal do problema necessitar de ser discretizada (Figura 5.2), o método permite obter a resposta dinâmica do meio tridimensional. Embora o desenvolvimento da metodologia 2.5D no contexto do método dos elementos finitos conheça quase três décadas de existência, devendo-se em boa parte aos estudos desenvolvidos por Hwang e Lysmer [198] e posteriormente por Gravic [199], a sua aplicação a problemas implicando carregamentos móveis fica a dever-se aos estudos apresentados por Yang e Hung [200].

A única diferença entre um modelo 2.5D e um modelo totalmente tridimensional reside nas restrições geométricas inerentes ao conceito 2.5D: i) a estrutura tem de ser infinita; ii) a estrutura tem de ser invariante em pelo menos uma direcção.

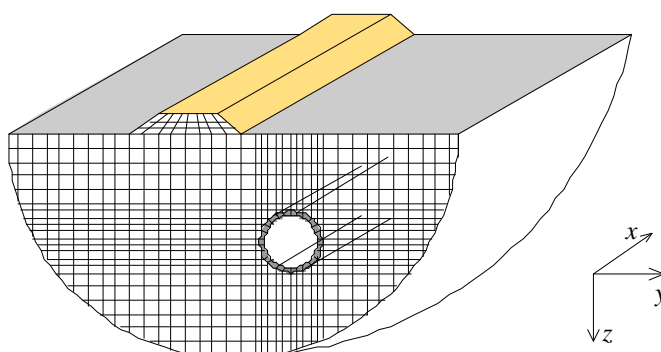


Figura 5.2 – Modelação numérica através de técnicas 2.5D.

No presente capítulo apresenta-se um modelo 2.5D baseado no MEF, o qual foi desenvolvido de raiz pelo autor e implementado na plataforma Matlab 2009, tirando vantagem das possibilidades desta plataforma para o desenvolvimento de esquemas de computação paralela.

Relativamente à organização do capítulo, inicia-se com a exposição do método dos elementos finitos 2.5D, com especial enfoque para os aspectos particulares a que é necessário atender para a simulação do sistema via férrea-macijo de fundação.

Seguidamente, e uma vez que o MEF é na sua génese um método apropriado para o tratamento de meios circunscritos, é abordada a questão do tratamento das fronteiras artificiais provenientes da necessidade de limitação geométrica do meio discretizado, sendo apresentadas duas metodologias locais que foram devidamente implementadas no modelo de cálculo desenvolvido.

De modo a tornar o processo de análise computacional mais eficiente, apresenta-se por último uma metodologia híbrida MEF-MEC formulada no domínio 2.5D. Esta metodologia permite que as zonas do domínio com geometria complexa sejam descritas pelo MEF 2.5D ao passo que o macijo geotécnico subjacente à via férrea, tido como estratificado em planos horizontais, é analisado através do MEC 2.5D.

À semelhança da estratégia adoptada nos capítulos anteriores, a apresentação do formalismo teórico inerente aos métodos aqui tratados é alternada com a apresentação de alguns exemplos de validação, utilizados também por vezes para ilustrar alguns dos fenómenos envolvidos.

## **5.2 Modelos quasi-tridimensionais baseados no método dos elementos finitos**

### **5.2.1 Considerações finais**

Na formulação do método dos elementos finitos 2.5D o problema mecânico tridimensional é resolvido tirando partido da aplicação de uma transformada de Fourier relativa à direcção longitudinal do meio em estudo (direcção  $x$ ). Para que esta operação transformada possa ser aplicada é então necessário que a estrutura seja invariante na direcção longitudinal e que a resposta dinâmica do meio possa ser assumida como linear. Os passos fundamentais da aplicação do método encontram-se sumariados no fluxograma representado na Figura 5.3.

Nos parágrafos seguintes da presente secção apresenta-se o formalismo matemático necessário à aplicação do método. A explanação incide essencialmente nos aspectos em que a formulação 2.5D seja distinta da tradicional formulação 3D, como tal alguns aspectos gerais ao desenvolvimento do método dos elementos finitos são aqui omitidos, os quais são facilmente identificados em obras de referência (tais como [33, 108, 109, 115], entre outros).



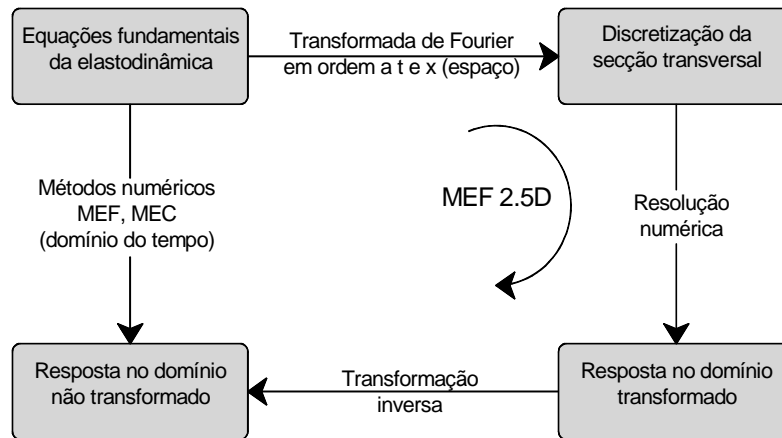


Figura 5.3 – Representação esquemática dos principais passos da aplicação do método dos elementos finitos 2.5D.

### 5.2.2 Equações gerais de equilíbrio do método dos elementos finitos 2.5D

Para a formulação matemática de um problema elastodinâmico através do método dos elementos finitos é geralmente útil recorrer à aplicação do princípio dos trabalhos virtuais sobre as equações fundamentais da elastodinâmica. Como já referido no Capítulo 3, a combinação de uma lei cinemática com o princípio d’Alembert resulta no princípio de Hamilton, o qual serve de base para a formulação matemática do método aqui exposto. O princípio de Hamilton postula que, para sistemas não conservativos (que apresentam amortecimento), o trabalho realizado pelas forças externas e inerciais sobre um campo de deslocamentos virtuais admissível é igual ao trabalho realizado pelas forças internas, sobre esse campo de deslocamentos virtuais, adicionado da energia dissipada [37].

Considerando que as fontes de excitação apresentam carácter harmónico ao longo do tempo com frequência  $\omega$  (análise no domínio da frequência), que não existem forças externas de massa e que o amortecimento é atendido através da adopção de constantes elásticas complexas, o princípio de Hamilton aplicado a um sólido tridimensional genérico, de volume  $V$  e com superfície exterior  $S=S_1 \cup S_2$ , é traduzido pela seguinte equação:

$$\int_V \delta \epsilon^T \sigma dV - \omega^2 \int_V \delta u^T \rho u dV = \int_{S_1} \delta u^T p dS \quad [5.1]$$

em que  $\delta \epsilon$  representa o campo de extensões virtuais,  $\sigma$  representa o campo de tensões,  $\delta u$  é o campo de deslocamentos virtuais,  $\rho$  é a massa volúmica do meio,  $u$  é o campo de deslocamentos e  $p$  é o campo de tensões externas aplicadas na superfície  $S_1$ .

A formulação do método considerando os deslocamentos como variáveis base exige o estabelecimento de relações deslocamento-deformação e deformação-tensão.

O campo de deformações é facilmente derivado do campo de deslocamentos através da introdução do operador [L],

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{Bmatrix} = [L]\{u\} \quad [5.2]$$

em que L é o operador:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [5.3]$$

Visto que apenas a secção transversal do meio é discretizada (plano ortogonal à direcção x), torna-se vantajoso que o operador diferencial [L] seja reescrito da seguinte forma:

$$[L] = [L_1] + \frac{\partial}{\partial x} [L_2] \quad [5.4]$$

em que

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [L_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.5]$$

Para além das relações de deformação-deslocamento é ainda necessário introduzir uma lei de comportamento material de modo a estabelecer uma relação entre tensões e deslocamentos. Como já esclarecido no Capítulo 3, para materiais elásticos lineares a lei tensão-deformação é definida através da introdução da matriz [D] e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][L]\{u\} \quad [5.6]$$

em  $\sigma$  que é o vector das tensões, já anteriormente apresentado.

A configuração da matriz [D] para materiais com comportamento elástico, linear isotrópico ou transverso-isotrópico pode ser consultada no Capítulo 3. Refira-se que ambos os modelos de comportamento elástico foram implementados no presente modelo numérico.

Introduzindo as equações [5.6] e [5.2] em [5.1], estabelece-se a seguinte equação de equilíbrio em que as incógnitas são os deslocamentos:

$$\int_V \delta u^T L^T D L u dV - \omega^2 \int_V \delta u^T \rho u dV = \int_{S_1} \delta u^T p dS \quad [5.7]$$

O passo seguinte passa pela discretização do meio em elementos de dimensões limitadas, sendo então aplicada a relação de equilíbrio definida por [5.7] a cada elemento individual e, posteriormente, estabelecido um conjunto de equações globais através da assemblagem dos diversos elementos.

### 5.2.3 Formulação de elementos de volume 2.5 D

Considere-se agora um elemento finito, tendo presente que, uma vez que a estrutura é longitudinalmente invariante, apenas a sua secção transversal necessita de ser discretizada. Deste modo, o campo de deslocamentos pode ser aproximado da seguinte forma:

$$\{u\} \cong [N]\{u_n\} \tag{5.8}$$

em que  $\{u_n\}$  representa o vector que colige os deslocamentos correspondentes aos três graus de liberdade dos nós da secção transversal do elemento e  $[N]$  é a matriz das funções de forma, as quais são apenas definidas no plano da secção transversal. A configuração desta matriz é em tudo semelhante à adoptada numa formulação tridimensional por elementos finitos, ou seja:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_{ne} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_{ne} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_{ne} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

em que o índice  $i$  se refere à função de forma associada ao nó  $i$  e  $ne$  corresponde ao número total de nós do elemento.

Adoptando elementos isoparamétricos e fazendo uso do procedimento de Galerkin, as coordenadas de qualquer ponto do domínio, bem como o campo de deslocamentos virtuais, podem ser aproximados seguindo o mesmo raciocínio que conduz à equação [5.8].

No modelo numérico foram implementados dois tipos de elementos finitos isoparamétricos, de 8 nós e de 7 nós, ambos com quatro pontos de integração, tal como ilustrado na Figura 5.4. Os elementos de 7 nós somente são utilizados num contexto específico que é explanado numa secção subsequente do presente capítulo.

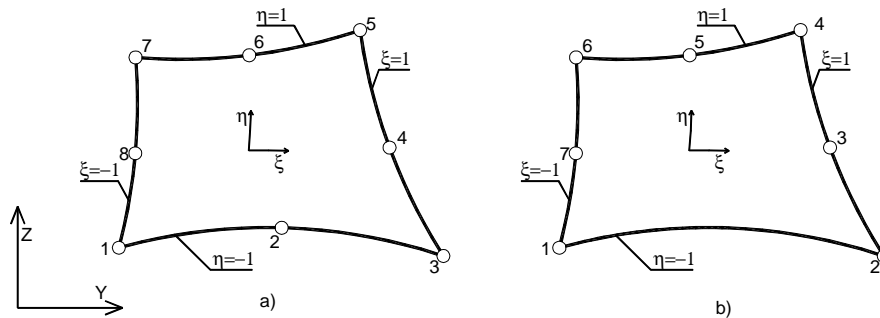


Figura 5.4 – Elementos finitos 2.5D: a) elemento de 8 nós; b) elemento de 7 nós.

Como em qualquer outro modelo baseado no método dos elementos finitos, há todo o interesse em explicitar as variáveis no interior de cada elemento através de coordenadas locais e, posteriormente, proceder à transformação do referencial local para o referencial global. Nos Quadros 5.1 e Quadro 5.2 apresentam-se as funções de forma, definidas no referencial local, para os elementos de 8 nós e de 7 nós, respectivamente.

Quadro 5.1 – Funções de forma dos elementos de 8 nós.

Função de forma	Nó i
$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)$	i=4 e 8
$N_i = \frac{1}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2)$	i=2 e 6
$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1)$	i=1,3,5 e 7

Quadro 5.2 – Funções de forma dos elementos de 7 nós.

Função de forma	Nó i
$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(\eta^2 - \eta)$	i=1 e 2
$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)$	i=3 e 7
$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1)$	i=4 e 6
$N_i = \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 - \xi^2)$	i=5

Substituindo [5.8] em [5.2] e atendendo ao expresso por [5.4], é então estabelecida a relação directa entre deformações e deslocamentos nodais,

$$\{\epsilon\} = [L]\{u\} = \left( [L_1] + \frac{\partial}{\partial x} [L_2] \right) [N]\{u_n\} = [B]\{u_n\} = \left( [B_1] + \frac{\partial}{\partial x} [B_2] \right) u_n \quad [5.10]$$

em que B é a matriz de deformação do elemento determinada através das matrizes B<sub>1</sub> e B<sub>2</sub>, as quais tomam a seguinte configuração:

$$[B_j] = [B_{j1} \quad B_{j2} \dots \dots \quad B_{jne}] \quad [5.11]$$

em que as matrizes B<sub>1i</sub> e B<sub>2i</sub> são dadas por:

$$[B_{1i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } [B_{2i}] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad [5.12]$$

Uma vez que as derivadas presentes na matriz  $[B_1]$  se referem ao referencial global ao passo que as funções de forma estão estabelecidas no referencial local, é ainda necessário estabelecer uma relação que permita a passagem das derivadas de um referencial para o outro. Essa relação é estabelecida pela matriz Jacobiana do elemento, tal como indicado na equação

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad [5.13]$$

em que,

$$[J] = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \end{bmatrix} \quad [5.14]$$

Para definir o sistema de equações que rege o equilíbrio dinâmico do elemento finito é necessário substituir as equações [5.8] e [5.10] na equação dos trabalhos virtuais (equação [5.7]), o que resulta em:

$$\int_V \delta u_n^T \left( B_1 + \frac{\partial}{\partial x} B_2 \right)^T D \left( B_1 + \frac{\partial}{\partial x} B_2 \right) u_n dV - \omega^2 \int_V \delta u_n^T N^T \rho N u_n dV = \int_{S_1} \delta u_n^T N^T p dS \quad [5.15]$$

Procedendo à expansão dos integrais de volume, tendo em atenção o carácter infinito da estrutura na direcção  $x$  e introduzindo uma coordenada  $s$  paralela ao lado do elemento onde é imposta a acção, a equação [5.15] passa a tomar o seguinte formato:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_y \int_z \left( \delta u_n^T \left( B_1 + \frac{\partial}{\partial x} B_2 \right)^T D \left( B_1 + \frac{\partial}{\partial x} B_2 \right) u_n \right) dz dy dx \\
 & - \omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_y \int_z \delta u_n^T (N^T \rho N u_n) u_n dz dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_s \delta u_n^T N^T p ds dx
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

A equação dos trabalhos virtuais pode também ser escrita no domínio transformado, considerando uma transformada de Fourier aplicada em relação à coordenada espacial  $x$ , definindo-se a sua imagem de Fourier por  $k_1$ . Atendendo à transformação do espaço, ao teorema de Parseval [24, 110, 111] e às propriedades de derivação da transformada de Fourier, a equação dos trabalhos virtuais pode agora ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \delta u_n^T(-k_1) \int_y \int_z \left( (B_1 - ik_1 B_2)^T D (B_1 + ik_1 B_2) \right) dz dy \tilde{u}_n dk_1 \\
 & - \omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta u_n^T(-k_1) \int_y \int_z (N^T \rho N u_n) dz dy \tilde{u}_n dk_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta u_n^T(-k_1) \tilde{p}_n dk_1
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

em que o vector  $p_n(k_1)$  colige as forças nodais equivalentes resultantes da tensão  $p$  aplicada ao longo do lado do elemento finito.

Uma vez que a equação [5.17] é válida para um qualquer deslocamento virtual,  $\delta u_n(-k_1)$ , então todos os integrais relativos a  $k_1$  podem ser removidos, pelo que, reagrupando a equação [5.17], facilmente se chega ao seguinte resultado:

$$\left( [K_1] + ik_1 [K_2] + k_1^2 [K_3] - \omega^2 [M] \right) \{ \tilde{u}_n \} = \{ \tilde{p}_n \} \tag{5.18}$$

em que as três matrizes de rigidez são dadas por:

$$[K_1] = \int_z \int_y [B_1]^T [D] [B_1] dy dz \tag{5.19}$$

$$[K_2] = \int_z \int_y [B_1]^T [D] [B_2] dy dz - \int_z \int_y [B_2]^T [D] [B_1] dy dz \tag{5.20}$$

$$[K_3] = \int_z \int_y [B_2]^T [D] [B_2] dy dz \tag{5.21}$$

ao passo que a matriz de massa é determinada de acordo com,

$$[M] = \int_z \int_y [N]^T \rho [N] dy dz \tag{5.22}$$

Os integrais presentes nas equações [5.19] a [5.22] são calculados no referencial local, usando o procedimento clássico de integração bidimensional pelo método de Gauss. Exactamente da mesma forma que num modelo bidimensional por elementos finitos, a integração é efectuada atendendo à seguinte relação entre os referenciais local e global:

$$dx dy = |J| d\xi d\eta \quad [5.23]$$

em que  $|J|$  representa o determinante da matriz Jacobiana (equação [5.14]).

Tal como numa formulação clássica baseada no método dos elementos finitos, as matrizes de rigidez e massa de cada elemento são assembladas de modo a constituir o sistema de equações global (equação [5.24]), o qual é resolvido após a imposição das condições de fronteira do problema.

$$\left( [K_1]^{global} + ik_1 [K_2]^{global} + k_1^2 [K_3]^{global} - \omega^2 [M]^{global} \right) \{ \tilde{u}_n \} = \{ \tilde{p}_n \} \quad [5.24]$$

Existem diversos esquemas computacionais para proceder à assemblagem do sistema de equações e respectiva resolução. Visto que o modelo numérico em causa foi implementado na plataforma MatLab 2009, seguiu-se de perto a procedimento proposto por Alberty et al. [113].

Ainda a respeito do sistema de equações globais explícito em [5.18], saliente-se que a divisão proposta para a matriz de rigidez em três sub-matrizes se revela extremamente vantajosa do ponto de vista da eficiência computacional. Seguindo este procedimento, as matrizes de rigidez e de massa tornam-se independentes tanto da frequência como do número de onda, permitindo assim que sejam assembladas uma única vez durante o procedimento de cálculo.

Outro aspecto interessante do ponto de vista conceptual reside no facto da matriz de rigidez  $[K_1]^{global}$  e a matriz de massa,  $[M]^{global}$ , corresponderem à combinação dos problemas clássicos bidimensionais de movimento no plano (P-SV) e fora do plano (SH), nos quais os deslocamentos  $u_y$  e  $u_z$  se encontram totalmente desacoplados do homólogo na direcção  $x$ . Por sua vez, as matrizes de rigidez  $[K_2]^{global}$  e  $[K_3]^{global}$  atendem à propagação de ondas tridimensionais no meio, garantido o acoplamento entre os graus de liberdade do plano com os fora do plano. Note-se que uma análise bidimensional em estado plano de deformação é também possível através do modelo proposto, bastando para isso impor  $k_1=0$ .

Uma vez que o sistema de equações [5.24] está formulado no domínio transformado, a obtenção dos deslocamentos no domínio tridimensional não transformado requer a aplicação de uma transformada de Fourier inversa em ordem a  $k_1$ . Tal como nos métodos expostos no Capítulo 3, a



introdução de carregamentos móveis, com magnitude constante ou harmónica, é facilitada pela propriedade de translação da transformada de Fourier, não exigindo a adopção de qualquer esquema computacional complexo nem incrementando o esforço de cálculo necessário.

Como se depreende do exposto, a metodologia 2.5D pode ser estendida a outro tipo de elementos, que não elementos de volume, como por exemplo a elementos de viga ou de casca (a formulação dos últimos pode ser consultada em Gravic [201]).

#### **5.2.4 Modelação das travessas**

Um dos aspectos talvez mais controversos da aplicação do método 2.5D no contexto dos estudos desenvolvidos na presente dissertação, ou seja a avaliação do comportamento dinâmico de vias balastradas face a acções de tráfego, tem a ver com as travessas, que conferem um carácter periódico à estrutura, ao invés do carácter invariante requerido pela formulação conceptual do método. Muito embora se reconheça que o carácter discreto das travessas na direcção longitudinal da via pode ter alguma influência na resposta dinâmica do sistema na gama de frequências mais elevada, na gama de frequências de interesse, usualmente abaixo dos 150 Hz, o efeito em apreço tende a ser pouco relevante. Esta questão foi já devidamente discutida por diversos autores, sendo que, dos estudos efectuados, surgiu a conclusão praticamente unânime de que o ganho em acuidade, através da consideração das travessas como elementos discretos, é diminuto quando comparado com os esforço computacional necessário para a realização deste tipo de análise [65, 171, 174], tal como já foi devidamente salientado no capítulo anterior da presente dissertação.

Atendendo ao expresso no parágrafo anterior, no modelo em consideração as travessas são simuladas através de uma formulação contínua equivalente, constituindo assim uma solução de compromisso entre o esforço computacional/complexidade de formulação e o rigor dos resultados obtidos. Esta solução de compromisso tem vindo a ser seguida por diversos autores, mostrando-se como adequada quando a gama de frequências de interesse se encontra abaixo dos 500 Hz. Convém contudo evidenciar, uma vez mais, que a adopção de uma formulação contínua equivalente, de modo a possibilitar a análise da estrutura como se de invariante se tratasse, não permite a quantificação da excitação paramétrica induzida pelo tráfego ferroviário, tal como referido num capítulo anterior.

Justificada a opção por uma formulação contínua equivalente para a simulação das travessas, salienta-se que o modelo adoptado apresenta melhorias significativas face à generalidade dos

modelos existentes, nos quais a inércia das travessas é devidamente atendida mas a sua rigidez no plano transversal é negligenciada. O modelo de via balastrada apresentado no capítulo anterior constitui um exemplo dessa classe de modelos, bem como os apresentados nas referências bibliográficas [5, 66, 83, 142, 157, 168], entre outros. Cabe aqui uma referência ao trabalho desenvolvido por Karlstrom e Bostrom [169, 202] onde a rigidez transversal das travessas é adequadamente considerada através de uma formulação semi-analítica baseada na teoria das placas de Kirshoff com comportamento anisotrópico.

O modelo agora proposto tem como ponto de partida a metodologia apresentada por Karlstrom e Bostrom [169]. Todavia, em vez do recurso a elementos de casca, como sugerido pelos referidos autores, o actual modelo recorre a elementos finitos de volume no contexto 2.5D. Do ponto de vista conceptual a única diferença entre os elementos adoptados para a simulação das travessas relativamente aos adoptados para a simulação do restante meio reside na lei constitutiva. Para as travessas considera-se um comportamento elástico transverso isotrópico, em que o plano de isotropia é normal à direcção de desenvolvimento da via (direcção x). As propriedades mecânicas das travessas são utilizadas para definir os parâmetros do modelo no plano transversal, ao passo que na direcção longitudinal a rigidez do meio é reduzida para o valor do módulo de Young do balastro, já que as travessas estão, regra geral, embebidas neste material (ver Figura 5.1a). Atendendo à idealização apresentada, a relação tensão-deformação para os elementos que simulam o comportamento das travessas é estabelecida através da seguinte matriz de elasticidade:

$$[D]_{\text{travessas}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xk}}{E_k} & -\frac{\nu_{xk}}{E_k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xk}}{E_x} & \frac{1}{E_k} & -\frac{\nu_{kk}}{E_k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xk}}{E_x} & -\frac{\nu_{kk}}{E_k} & \frac{1}{E_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xk}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{kk}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xk}} \end{bmatrix} \quad [5.25]$$

Portanto a relação constitutiva no plano yoz (plano de isotropia) é definida pelo módulo de Young  $E_k$  e pelo coeficiente de Poisson  $\nu_{kk}$ , sendo a letra k adoptada para definir qualquer direcção inscrita no plano de isotropia. Por sua vez, na direcção normal ao referido plano (direcção x), a lei

constitutiva é definida através do módulo de Young  $E_k$ , pelo coeficiente de Poisson  $\nu_{kk}$  e pelo módulo de distorção  $G_{kk}$ . Note-se que o módulo de distorção no plano de isotropia não necessita de ser definido de forma explícita já que obedece à seguinte relação entre parâmetros elásticos:

$$G_{kk} = \frac{E_k}{2(1 + \nu_{kk})} \quad [5.26]$$

### 5.2.5 Modelação de palmilhas e carris

No que concerne à simulação dos carris, o presente modelo recorre a uma formulação semi-analítica baseada na teoria dos elementos de viga de Bernoulli-Euler. Tal como referido no capítulo anterior, para a gama de frequências abaixo dos 500 Hz o contributo da deformação por corte para a resposta é diminuto, não se justificando assim o recurso a vigas de Timoshenko [175], muito embora se reconheça que esta última formulação é mais completa que a anterior.

A ligação entre os carris e o restante domínio é estabelecida através de um conjunto mola-amortecedor, com o qual se pretende representar o comportamento mecânico das palmilhas, tal como se ilustra na Figura 5.5. Sem sacrificar os aspectos essenciais do comportamento mecânico dos elementos em causa, admitem-se contudo algumas simplificações, nomeadamente: i) a ligação carril-travessa é suposta contínua; ii) apenas se considera o grau de liberdade correspondente ao deslocamento vertical do carril.

Uma vez que o alinhamento dos carris define a direcção de desenvolvimento da via, a formulação e resolução do sistema de equações que rege o comportamento mecânico destes elementos é efectuada analiticamente no domínio transformado, sem que para tal seja necessário recorrer a qualquer procedimento numérico de discretização e integração. Admitindo a direcção  $x$  como direcção de desenvolvimento longitudinal do carril, o equilíbrio dinâmico do conjunto carril-palmilha no domínio não transformado é dado pelo seguinte par de equações diferenciais:

$$EI_r \frac{\partial^4 u_{z,carril}}{\partial x^4} + c_p \left( \frac{\partial u_{z,carril}}{\partial t} - \frac{\partial u_{z,travessa}}{\partial t} \right) + k_p (u_{z,carril} - u_{z,travessa}) + m_r \frac{\partial^2 u_{z,carril}}{\partial t^2} = P_z(x, t) \quad [5.27]$$

$$c_p \left( \frac{\partial u_{z,travessa}}{\partial t} - \frac{\partial u_{z,carril}}{\partial t} \right) + k_p (u_{z,travessa} - u_{z,carril}) = -F_z(x, t) \quad [5.28]$$

em que  $EI_r$  é a rigidez de flexão do carril,  $m_r$  é a massa do carril por unidade de desenvolvimento longitudinal,  $c_p$  é o amortecimento viscoso da palmilha por unidade de desenvolvimento longitudinal da via,  $k_p$  é a rigidez da palmilha por unidade de desenvolvimento longitudinal da via,

$P_z(x,t)$  é a força vertical aplicada na cabeça do carril,  $F_z(x,t)$  é a força de reacção aplicada na extremidade inferior da palmilha,  $u_{z, \text{carril}}$  e  $u_{z, \text{travessa}}$  são, respectivamente, os deslocamentos verticais do carril e do nó da travessa que estabelece a ligação com o carril/palmilha.

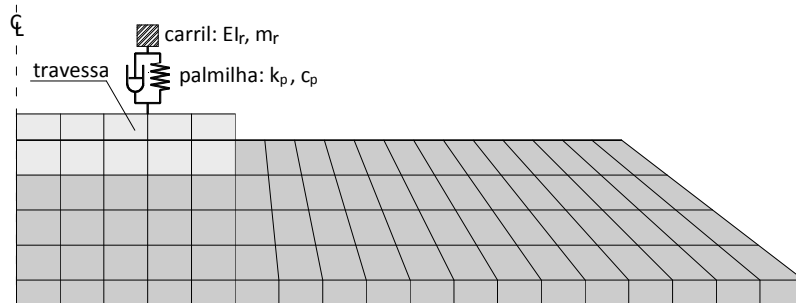


Figura 5.5 – Ligação carril travessa.

Passando do domínio não transformado para o domínio transformado, o equilíbrio do conjunto carril/palmilha é traduzido pelo seguinte sistema de equações lineares:

$$\left( [K_1^{\text{carril}}] + k_1^4 [K_2^{\text{carril}}] - \omega^2 [M^{\text{carril}}] \right) \{ \tilde{u}_n \} = \{ \tilde{p}_n \} \quad [5.29]$$

em que  $\{u(k_1, \omega)\}$  e  $\{p(k_1, \omega)\}$  representam os vectores que coligem os deslocamentos e forças nodais do sistema, respectivamente.

Relativamente às matrizes  $[K_1^{\text{carril}}]$ ,  $[K_2^{\text{carril}}]$  e  $[M^{\text{carril}}]$ , os seus termos são definidos da seguinte forma:

$$[K_1^{\text{carril}}] = \begin{bmatrix} k_p^* & -k_p^* \\ -k_p^* & k_p^* \end{bmatrix} \quad [5.30]$$

$$[K_2^{\text{carril}}] = \begin{bmatrix} EI_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [5.31]$$

$$[M^{\text{carril}}] = \begin{bmatrix} m_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [5.32]$$

em que o símbolo \* significa rigidez complexa.

A divisão da matriz de rigidez em duas sub-matrizes tem como objectivo tornar todos os termos matriciais independentes, quer do número de onda,  $k_1$ , quer da frequência angular,  $\omega$  (caso se adopte um modelo de amortecimento histerético para a palmilha), de modo a que as matrizes globais possam ser assembladas uma única vez, tornando assim o procedimento computacional mais eficiente. Tendo em consideração o sistema de equações global definido em [5.24], referir-se-á que os termos da matriz  $[K_1^{\text{carril}}]$  são assemblados na matriz  $[K_1]^{\text{global}}$ , ocorrendo o mesmo à matriz  $[M^{\text{carril}}]$  que é assemblada à matriz de massa global,  $[M]^{\text{global}}$ . Contudo, os termos da matriz

$[K_2^{\text{carril}}]$  não podem ser adicionados a nenhuma das matrizes globais presentes em [5.24], como tal torna-se vantajoso definir o sistema de equações globais da seguinte forma:

$$\left( [K_1]^{\text{global}} + ik_1 [K_2]^{\text{global}} + k_1^2 [K_3]^{\text{global}} + k_1^4 [K_4]^{\text{global}} - \omega^2 [M]^{\text{global}} \right) \{\tilde{u}_n\} = \{\tilde{p}_n\} \quad [5.33]$$

em que os termos da matriz  $[K_4]^{\text{global}}$  são todos nulos à excepção do grau de liberdade referente ao deslocamento vertical do carril.

Note-se que a divisão de matrizes aqui apresentada é apenas válida caso o amortecimento da palmilha seja definido através de um modelo hysterético. Na presença de amortecimento viscoso, a rigidez complexa da palmilha passa a ser dependente da frequência angular visto que:

$$k_p^* = k_p + i\omega c_p \quad [5.34]$$

Nesse caso propõe-se que a parte real da matriz  $[K_1^{\text{carril}}]$  seja incorporada na matriz global  $[K_1]^{\text{global}}$  e que a parte imaginária seja coligida de modo a formar uma matriz de amortecimento, aqui definida por  $[C]^{\text{global}}$ . O sistema de equações que rege o equilíbrio dinâmico do sistema passa então a ser definido através de um conjunto de matrizes totalmente independentes de  $\omega$ , tomando a seguinte configuração:

$$\left( \begin{array}{c} [K_1]^{\text{global}} + ik_1 [K_2]^{\text{global}} + k_1^2 [K_3]^{\text{global}} + k_1^4 [K_4]^{\text{global}} + i\omega [C]^{\text{global}} \\ -\omega^2 [M]^{\text{global}} \end{array} \right) \{\tilde{u}_n(k_1, \omega)\} = \{\tilde{p}_n(k_1, \omega)\} \quad [5.35]$$

### 5.3 Inclusão do amortecimento por radiação através de metodologias locais

#### 5.3.1 Problemática e metodologias de tratamento

A utilização de métodos numéricos discretizados, como o método dos elementos finitos ou o método das diferenças finitas, na análise de problemas de interacção macizo de fundação-estrutura defronta-se sempre com a problemática do carácter infinito da realidade geométrica do macizo de fundação face à dimensão do modelo discretizado. De facto, os métodos numéricos referidos são especialmente vocacionados para a análise de meios confinados nos quais as condições de fronteira se encontrem totalmente definidas [78]. Esta condição conceptual exige portanto a limitação do domínio geométrico de análise a uma dimensão que seja resolúvel através dos meios computacionais disponíveis.

Em problemas estáticos, esta limitação dos métodos numéricos é facilmente contornável, bastando para isso proceder à limitação do domínio discretizado a uma distância suficientemente afastada da zona de interesse, introduzindo assim uma fronteira artificial ao problema, na qual são impostas as condições de fronteira de Dirichlet ou de Neuman [203], sendo estas condições usualmente designadas como condições de fronteira elementares. Embora este procedimento simples de truncatura do domínio se revele eficaz e eficiente, a dimensão do meio discretizado pode ser reduzida utilizando elementos especiais, designados por elementos infinitos estáticos, os quais permitem uma melhor simulação do meio para um menor esforço computacional [204].

Porém, os procedimentos simples indicados no parágrafo anterior não são, regra geral, aplicáveis a análises dinâmicas, pois não respeitam os pressupostos de base da condição de radiação de Sommerfeld [205], a qual postula, para um meio homogéneo isotrópico e (semi-)indefinido, a impossibilidade de a energia radiada regressar ao domínio de análise, ou seja, o campo infinito absorve energia mas não constitui uma fonte energética. Para melhor discernir este facto considere-se o exemplo apresentado na Figura 5.6 onde é ilustrada uma barra com comprimento indefinido, sendo o domínio de interesse definido entre A e B, e à qual é aplicada uma solicitação transiente no ponto A. Devido à solicitação aplicada, gera-se uma onda que se propaga a partir do ponto A em direcção ao ponto B (Figura 5.6b). Como já escrutinado no Capítulo 2, caso não haja alteração da impedância da barra, a onda gerada passa pelo ponto B e propaga-se indefinidamente no meio indefinido, não havendo possibilidade da energia por ela transportada regressar ao domínio de interesse (Figura 5.6c).

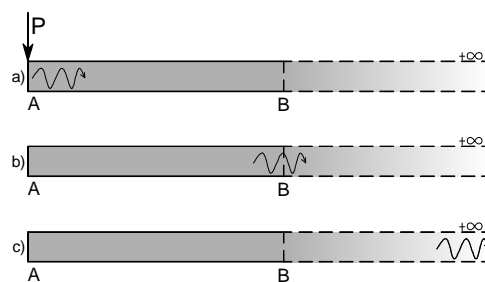


Figura 5.6 – Propagação de ondas unidimensionais num meio semi-indefinido.

Considere-se agora que o domínio de interesse é truncado, impondo deslocamentos nulos no ponto B (condição de fronteira de Dirichlet), tal como representado esquematicamente na Figura 5.7a. Do mesmo modo que no caso anterior, a onda gerada propaga-se a partir da fonte (ponto A) em direcção ao ponto B. Quando a onda atinge a fronteira imposta no ponto B (Figura 5.7b) é reflectida e passa a propagar-se na direcção de B para A (Figura 5.7c), sendo posteriormente reflectida em A e sucessivamente em B, não ocorrendo assim saída de energia do domínio de interesse, a menos da dissipada devido ao amortecimento material. Embora o exemplo aqui

apresentado seja simples e não mais do que um caso particular da discussão efectuada no Capítulo 2 sobre reflexão e refacção de ondas, permite ilustrar de uma forma simples a problemática e importância do tratamento das fronteiras artificiais oriundas da limitação geométrica do domínio de interesse quando se utiliza o método dos elementos finitos.

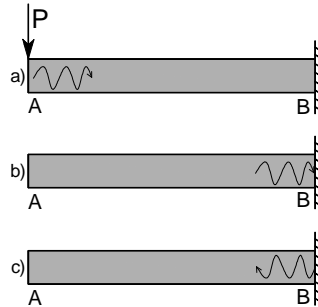


Figura 5.7 – Propagação de ondas unidimensionais num meio geometricamente delimitado.

A modelação de meios semi-indefinidos através de procedimentos baseados no método dos elementos finitos não é recente, tem mais de quatro décadas de existência. Ao longo desse período de tempo foram sendo propostos diferentes metodologias e métodos para o tratamento das fronteiras artificiais, podendo ser agrupados de uma forma abrangente em procedimentos locais e procedimentos globais.

Os procedimentos locais referem-se a soluções aproximadas, baseadas na teoria da propagação de ondas e que procuram evitar a reflexão da onda na fronteira artificial. Tratando-se de uma aproximação ao problema real, na qual apenas a fronteira artificial propriamente dita é tratada, a sua eficiência é muito dependente da dimensão do domínio discretizado face ao comprimento de onda gerado. Apesar destas limitações, a facilidade de implementação de alguns destes procedimentos, associada à boa compatibilidade com o formalismo do método dos elementos finitos, tornam estas metodologias atractivas para aplicações práticas.

De entre os vários procedimentos locais, destacam-se pela sua importância as fronteiras absorventes, o método dos elementos infinitos e as camadas absorventes. Diferentes formulações para fronteiras absorventes têm vindo a ser propostas ao longo das últimas quatro décadas, com diferentes graus de complexidade e acuidade [78, 115, 206-211]. Porém, apesar de actualmente existirem propostas consideravelmente mais refinadas e eficazes [211, 212], a simplicidade do formalismo matemático e a facilidade de implementação das condições de fronteira absorventes propostas por Lysmer e Kuhlemeyer [207], em 1969, e sua consequente generalização introduzida por White e Valliappan [208], em 1977, têm levado a que estes procedimentos sejam os mais comumente usados [213].

Outro procedimento local consiste na introdução de elementos infinitos acoplados ao longo da fronteira artificial. A introdução destes elementos, que seguem o formalismo matemático do MEF, tem como objectivo representar a resposta do meio para além do domínio discretizado [214-218]. Constituem exemplos de sucesso da aplicação deste método no contexto 2.5D os estudos desenvolvidos por Yang e Hung [200], a cujos autores se deve a autoria do método, e mais recentemente as aplicações desenvolvidas por Alves Costa et al. [170, 192] e por Yang et al. [194].

Por último, ainda no âmbito dos procedimentos locais, refira-se o método dos estratos absorventes no qual a fronteira artificial é tratada através da substituição do domínio “infinito” por um estrato de dimensão finita e com capacidade de absorver as ondas que nele incidam [219]. Dentro desta classe de procedimentos, a metodologia baseada nas camadas de correspondência perfeita (*Perfect Matched Layers – PML’s*), proposta inicialmente por Berenger [220] para a análise de problemas envolvendo ondas electromagnéticas, e posteriormente expandida para problemas elastodinâmicos por Chew e Liu [221], é tida como uma das técnicas mais promissoras na absorção de ondas que atinjam a fronteira com ângulo de incidência arbitrário [221-224].

Do ponto de vista conceptual, os procedimentos globais são mais consistentes do que os anteriormente indicados, embora consideravelmente mais complexos e menos versáteis. Nesta nova classe de procedimentos englobam-se os métodos que atendem às equações de propagação de ondas e à condição de radiação de Sommerfeld de uma forma exacta no contexto do MEF [209]. Assim sendo, a acuidade do resultado passa a ser independente da dimensão do domínio discretizado face ao comprimento da onda em estudo, ou seja a adopção de um procedimento global é em tudo equivalente à consideração de um domínio infinito para além da zona de interesse. Constituem exemplos destes procedimentos, o método dos elementos de contorno, os métodos baseados na funções de Green e, mais recentemente, o método dos elementos finitos de contorno escalados [114, 219]. Este último procedimento, apesar de consideravelmente recente, tem-se mostrado muito promissor já que tira vantagem das propriedades conceptuais do MEF e do MEC, eliminando algumas das desvantagens de cada um dos métodos isolados [114].

Após esta sucinta síntese da problemática inerente à simulação de problemas dinâmicos envolvendo interacção maciço de fundação-estrutura, cabe referir que no modelo numérico desenvolvido foram implementadas metodologias para o tratamento das fronteiras artificiais baseadas tanto em procedimentos locais como em procedimentos globais. A melhor adequabilidade de uma ou outra metodologia é dependente do problema em estudo,



construindo-se assim uma ferramenta numérica versátil. A presente secção apenas trata a aplicação de metodologias locais no contexto 2.5D. Os procedimentos globais adoptados são apresentados numa secção subsequente já que nesse caso o domínio de análise (secção transversal no contexto 2.5D) não necessita de ser totalmente discretizado por elementos finitos.

### 5.3.2 Métodos das fronteiras absorventes

#### 5.3.2.1 Formulação de Lysmer-Kuhlemeyer

A condição de fronteira absorvente de Lysmer-Kuhlemeyer, também por vezes designada por condição de fronteira viscosa, corresponde à proposta mais antiga para o tratamento das fronteiras artificiais na análise elastodinâmica através do método dos elementos finitos. Apesar de existirem actualmente propostas consideravelmente mais elaboradas, esta continua a ser a condição de fronteira absorvente mais popular, contribuindo para isso vários factores: i) a simplicidade de implementação num código baseado no método dos elementos finitos; ii) a compatibilidade com geometrias menos regulares; iii) a possibilidade de aplicação tanto para solicitações harmónicas como transientes.

A formulação matemática deste tipo de fronteira absorvente é bastante simples podendo ser deduzida através da equação de onda unidireccional. Considere-se uma barra semi-infinita, cujo domínio de interesse se encontra delimitado entre o ponto A e o ponto B, isto é a região a discretizar por elementos finitos (Figura 5.8a). Considere-se ainda a propagação de uma onda longitudinal e unidireccional de A para B, tal como ilustrado na Figura 5.8b. O objectivo da introdução de uma fronteira absorvente consiste em eliminar a reflexão espúria da onda quando esta atingir o limite do domínio de interesse.

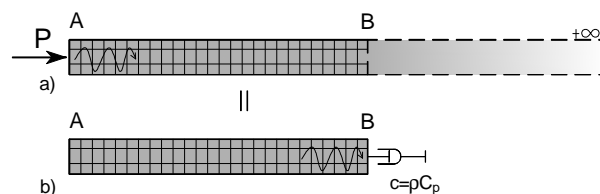


Figura 5.8 – Introdução de condição de fronteira absorvente para simulação de uma barra semi-indefinida através da qual se propaga uma onda longitudinal.

Dado o carácter unidimensional do problema, as equações de Navier apresentadas no Capítulo 2 reduzem-se à seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{C_p} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad [5.36]$$

Pela definição de onda harmónica é possível estabelecer a seguinte relação:

$$\partial x = C_p \partial t \quad [5.37]$$

Introduzindo a expressão [5.37] na equação [5.36] e atendendo à lei constitutiva elástica e linear do material, facilmente se chega à seguinte relação de dependência entre a tensão normal induzida num qualquer ponto da barra e a velocidade desse mesmo ponto:

$$\sigma_{xx} = \rho C_p \dot{u}_x \quad [5.38]$$

Caso se admita a propagação de uma onda de corte, a relação estabelecida seria de todo idêntica mas agora considerando a velocidade de propagação das ondas S.

A equação [5.38] permite concluir que o meio indefinido existente para além do ponto B da Figura 5.8a pode ser simulado através da prescrição de uma condição de fronteira nesse ponto compatível com esta equação (Figura 5.8b).

A generalização da expressão [5.38] para estados tridimensionais é relativamente simples atendendo ao facto de a propagação de ondas volúmicas do tipo P e do tipo S ocorrer de forma desacoplada em meios homogêneos e isotrópicos. Além disso, tirando partido do conceito de ondas planas (ver Capítulo 2), facilmente se chega à conclusão que num meio tridimensional invariante, como o representado na Figura 5.9, a condição de absorção é garantida desde que ao longo da fronteira artificial (cujas normal é dada pela direcção y na Figura 5.9) se imponham as tensões coligadas no vector {q} e determinadas do seguinte modo matricial:

$$\{q\} = -[C]\{\dot{u}\} \quad [5.39]$$

na qual a matriz de amortecimento [C] é definida por,

$$[C] = \begin{bmatrix} \rho C_s & 0 & 0 \\ 0 & \rho C_p & 0 \\ 0 & 0 & \rho C_s \end{bmatrix} \quad [5.40]$$

e

$$\{q\} = \{\sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \sigma_{zy}\}^T ; \{\dot{u}\} = \{\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z\}^T \quad [5.41]$$

No contexto inerente à discretização do método dos elementos finitos 2.5D, impondo que o referencial global esteja orientado de modo a que a direcção invariante seja a direcção x e a fronteira artificial seja paralela ao plano oxz (tal como indicado na Figura 5.9), a condição [5.39] é alcançada colocando amortecedores distribuídos ao longo da fronteira artificial e com coeficientes de viscosidade definidos de acordo com a expressão [5.40] (ver Figura 5.9).

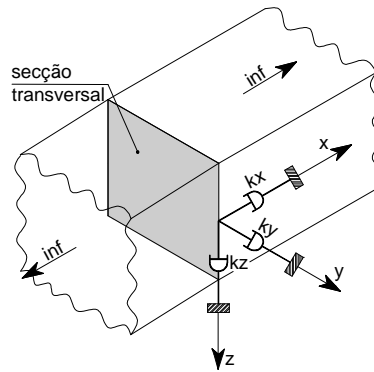


Figura 5.9 – Condição de absorção perfeita na fronteira artificial de um modelo 2.5D invariante na direcção x.

Uma vez que o modelo de elementos finitos desenvolvido está formulado no domínio da frequência/número de onda é de todo conveniente transformar a equação [5.39] para esse mesmo domínio, o que dá origem a:

$$\{\tilde{q}\} = -i\omega[C]\{\tilde{u}\} \quad [5.42]$$

Seguindo os passos habituais do formalismo matricial inerente ao método dos elementos finitos e atendendo ao facto de, no contexto 2.5D, apenas a secção transversal do problema ser discretizada, a matriz elementar de amortecimento que estipula a relação entre as forças nodais equivalentes às tensões,  $\{q\}$ , e os respectivos deslocamentos nodais é definida por:

$$[C_e] = \int_S [N]^T [C] [N] ds \quad [5.43]$$

em que S representa a dimensão do lado do elemento ao longo do qual é imposta a condição de absorção.

A equação de equilíbrio dinâmico de cada elemento finito com um lado definidor da fronteira artificial pode então ser obtida através da introdução do termo correspondente às forças impostas na fronteira absorvente. Assim, partindo do resultado expresso em [5.18], facilmente se chega a:

$$\left( [K_1] + ik_1 [K_2] + k_1^2 [K_3] - \omega^2 [M] \right) \{ \tilde{u}_n(k_1, \omega) \} = \{ \tilde{p}_n(k_1, \omega) \} - i\omega [C_e] \{ \tilde{u}_n(k_1, \omega) \} \quad [5.44]$$

a qual dá origem a:

$$\left( [K_1] + ik_1 [K_2] + k_1^2 [K_3] + i\omega [C_e] - \omega^2 [M] \right) \{ \tilde{u}_n \} = \{ \tilde{p}_n \} \quad [5.45]$$

Por sua vez o equilíbrio dinâmico global do sistema é obtido pelo agrupamento das contribuições oriundas de todos os elementos finitos, construindo-se assim o seguinte sistema de equações global:

$$\left( [K_1]^{global} + ik_1 [K_2]^{global} + k_1^2 [K_3]^{global} + i\omega [C_e]^{global} - \omega^2 [M]^{global} \right) \{ \tilde{u}_n \} = \{ \tilde{p}_n \} \quad [5.46]$$

Como se compreende, à excepção do caso identificado anteriormente relativo ao amortecimento viscoso das palmilhas, os termos da matriz  $[C_e]^{global}$  são todos nulos à excepção dos correspondentes aos graus de liberdade dos nós que definem a fronteira artificial. Caso seja contemplada na modelação a presença de palmilhas com amortecimento viscoso, então a matriz  $[C_e]^{global}$  resulta do agrupamento das contribuições oriundas dos nós da fronteira artificial com as contribuições resultantes do modelo viscoso de amortecimento atribuído às palmilhas.

Muito embora a formulação agora apresentada tenha vindo a ser utilizada com relativo sucesso ao longo das mais de quatro décadas da sua existência, existem várias limitações que não podem deixar de ser referidas:

- i) a formulação das condições de fronteira baseia-se nas equações de Navier para um meio homogéneo isotrópico e indefinido. Como tal, apenas a absorção de ondas volúmicas é garantida, não existindo qualquer termo relativo à propagação de ondas superficiais. Na verdade, os autores proponentes do método referem esta questão no seu trabalho original [207], sugerindo mesmo uma formulação adicional para atender à absorção de ondas superficiais genéricas. Porém, a metodologia proposta exige um esforço computacional considerável, torna as propriedades dos amortecedores fictícios dependentes do comprimento da onda a absorver e não oferece garantia de absorção das ondas volúmicas. Face a estas dificuldades, esse procedimento não tem sido atendido na grande maioria das aplicações práticas;
- ii) a aplicação do método a problemas estáticos ou quasi-estáticos redundam na condição de fronteira elementar de Neumann já que os amortecedores não apresentam rigidez estática;
- iii) a absorção perfeita é apenas garantida no caso de ondas planas que atinjam a fronteira artificial com ângulo de incidência normal, pois, como já mostrado no Capítulo 2, a

incidência não perpendicular de uma onda P ou SV numa interface dá origem ao acoplamento dos dois tipos de onda. Ora a condição de perpendicularidade é facilmente alcançável no caso de problemas unidireccionais, mais dificilmente em bidimensionais e muito dificilmente garantida em problemas tridimensionais como os estudados na presente dissertação [225]. Caso o ângulo de incidência não seja normal à fronteira então existe sempre alguma reflexão da energia transportada pela onda para o interior do domínio de interesse.

Embora estudos paramétricos bidimensionais efectuados por Kausel e Tassoulas [226] atestem a viabilidade da aplicação do presente método em problemas bidimensionais e o mesmo tenha sido utilizado em estudos tridimensionais envolvendo cargas móveis, nomeadamente nas referências bibliográficas [42, 77, 227], a aplicação do método no contexto 2.5D ainda não conhece um grau de amadurecimento que permita discernir a sua eficiência. Reconhece-se contudo que o carácter tridimensional do modelo 2.5D aqui apresentado pode condicionar, mediante as condições de solicitação dinâmica induzidas, o pressuposto de o ângulo de incidência da onda ser normal à fronteira absorvente. Na subsecção seguinte apresenta-se uma proposta que pretende colmatar este aspecto, a qual foi também implementada no modelo numérico 2.5D desenvolvido no âmbito da presente dissertação.

### 5.3.2.2 Formulação de White

Com o intuito de melhorar alguns dos aspectos perniciosos das fronteiras viscosas, White et al. [208] propõem uma formulação alternativa à fronteira viscosa, a qual designaram por fronteira absorvente unificada. O principal propósito desta formulação consiste em melhorar as propriedades absorventes da fronteira artificial quando a onda que lhe incide apresenta um ângulo arbitrário. Como se compreende, dado o carácter tridimensional do modelo 2.5D, esta formulação pode revelar-se vantajosa já que, para acções tridimensionais aplicadas à superfície do terreno, muito dificilmente a orientação da frente de onda é normal à fronteira artificial em todos os pontos do seu domínio.

Neste enquadramento, os autores acima referidos deduzem uma condição de absorção de ondas volúmicas em meios isotrópicos e homogéneos através da introdução de uma matriz constitutiva de amortecimento dependente do ângulo de incidência da onda face à normal ao plano definido pela fronteira artificial. Como se compreende, esta formulação é pouco apelativa do ponto de vista prático, pois a orientação da frente de onda não é, regra geral, um dado conhecido *a priori*.

Tendo em vista a aplicação prática do método, no mesmo trabalho [208] é introduzida uma matriz de amortecimento ponderada,  $[C_{pon}]$ , a qual tende, em termos médios do ângulo de incidência, a aproximar uma solução de absorção perfeita. A dedução dessa matriz não é aqui apresentada, sendo o leitor remetido para o trabalho original [208] ou, em língua portuguesa, para Faria [32].

Em termos práticos a única diferença entre os modelos de fronteira absorvente viscosa e de fronteira absorvente unificada reside na matriz constitutiva de amortecimento, a qual, atendendo ao referencial expresso na Figura 5.9 e à organização matricial da expressão [5.39], passa a ser definida por:

$$[C_{pon}] = \frac{8\rho V_s}{15\pi} \begin{bmatrix} 4+s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{s} - 2s + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4+s \end{bmatrix} \quad [5.47]$$

em que a variável  $s$  representa a razão entre as velocidades de propagação das ondas S e das ondas P.

Deste modo, no âmbito do equilíbrio dinâmico de um elemento finito, tal como definido pela equação [5.45], a matriz de amortecimento  $[C_e]$  passa agora a ser dada por:

$$[C_e] = \int_S [N]^T [C_{pon}] [N] ds \quad [5.48]$$

Aparte desta particularidade na definição da relação constitutiva de amortecimento, não existe qualquer outra diferença conceptual entre os métodos propostos por [207] e [208]. Note-se que, à excepção da melhoria de eficiência relativa à absorção de ondas com ângulos de incidência arbitrários, as limitações anteriormente referidas em relação às fronteiras viscosas são igualmente válidas para a presente formulação.

### 5.3.3 Método dos elementos infinitos

#### 5.3.3.1 Considerações gerais

Uma alternativa à utilização de fronteiras absorventes passa pela utilização de elementos infinitos, acoplados à fronteira artificial que delimita a região do domínio discretizado em elementos finitos. O método dos elementos infinitos tem a sua génese no MEF, sendo a sua concepção em tudo semelhante, com a particularidade de ser necessário usar funções de forma mais elaboradas e complexas de modo a aproximar de uma forma razoável a tendência seguida

pelas variáveis no campo infinito, não discretizado [215]. Este método tem sido empregue com sucesso em diversos problemas, tanto estáticos como dinâmicos, existindo actualmente diferentes tipos de elementos infinitos, com graus de complexidade distintos e capacidades cada vez mais elaboradas [228]. Uma revisão das diferentes potencialidades e limitações do método, para diferentes tipos de problemas envolvendo a propagação de ondas, pode ser encontrada nas referências bibliográficas [215, 216] ou, mais recentemente, na síntese realizada por Yun e Kim [218].

Muito embora se reconheça a existência de formulações baseadas no método dos elementos infinitos muito elaboradas, na presente dissertação recorre-se a uma bastante simples, em tudo semelhante à metodologia proposta por Chow e Smith [229], a qual constitui uma solução de compromisso entre a acuidade do método e a simplicidade de formulação/implementação [218]. Para além disso, o uso deste tipo de elementos infinitos no contexto 2.5D, previamente realizada por Yang e Hung [200], mostra ser adequado, eficiente e compatível com o formalismo matemático inerente ao MEF 2.5D.

### **5.3.3.2 Formulação geral de elementos infinitos 2.5D**

Como já referido em pontos anteriores, no MEF o campo de deslocamentos é aproximado através de funções polinomiais relativamente simples. Apesar da simplicidade das funções de forma, o campo de deslocamentos real pode ser bem descrito dependendo do refinamento da malha. Porém, este princípio não é aplicável aos elementos infinitos já que a malha discretizada não pode ser refinada em direcção ao infinito. Surge assim a necessidade de adopção de funções de forma mais elaboradas para representar a evolução da variável de campo em direcção ao infinito. Em geral, as funções de forma são deduzidas através das equações de Navier, procurando-se assim traduzir a evolução do campo de deslocamentos à medida que a onda se desloca em direcção ao infinito, ou seja, respeitando a condição de radiação de Sommerfeld [230]. As funções de forma mais usuais de elementos infinitos periódicos, isto é, elementos aptos para lidar com campos de deslocamentos harmónicos (no caso de problemas elastodinâmicos), resultam do produto de três funções, cada qual representando um dos aspectos da aproximação do campo de deslocamentos [215, 231]:

- i) uma parcela, correspondente às funções de forma polinomiais, descreve a interpolação da variável de campo na direcção finita;

- ii) uma função de decaimento, que traduz a diminuição da amplitude da onda à medida que a distância tende para infinito;
- iii) uma função harmónica ou oscilatória que descreve o comportamento da onda.

Considerando a representação esquemática de um elemento infinito 2.5D de 5 nós, indicada na Figura 5.10, o campo de deslocamentos no interior do elemento é aproximado a partir dos deslocamentos nodais e através das seguintes funções de forma:

$$N_1 = \frac{1}{2}\eta(\eta-1)e^{-\alpha L\xi}e^{ik'L\xi} \quad [5.49]$$

$$N_2 = -(\eta-1)(\eta+1)e^{-\alpha L\xi}e^{ik'L\xi} \quad [5.50]$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\eta(\eta+1)e^{-\alpha L\xi}e^{ik'L\xi} \quad [5.51]$$

em que o termo  $e^{-\alpha L\xi}$  reflecte o decaimento da amplitude da onda, sendo  $\alpha$  o factor de decaimento, enquanto o carácter harmónico da onda que se propaga em direcção ao infinito é reflectido pelo termo  $e^{ik'L\xi}$ , onde  $k'$  representa o número de onda relativo à propagação no plano discretizado. A variável  $L$  estabelece a relação entre os referenciais global e local; este termo tem obrigatoriamente de ser introduzido nas funções de forma de deslocamentos, pois as características fundamentais da onda, isto é, o seu decaimento e número de onda, referem-se ao referencial original e não a um referencial local [215-217].

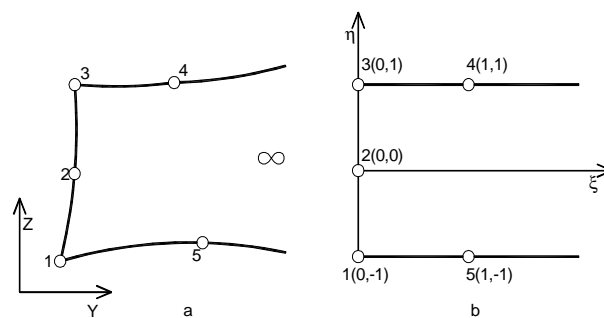


Figura 5.10 – Elemento infinito de 5 nós: a) referencial global; b) referencial local.

Estabelecidas as funções de forma, o campo de deslocamentos tridimensional num ponto arbitrário da secção transversal de um elemento infinito 2.5D é dado através da interpolação dos deslocamentos nodais, ou seja:

$$\{u\} \cong [N_{inf}] \{u_n\} \quad [5.52]$$



em que  $N_{inf}$  é a matriz das funções de forma do elemento infinito, a qual tem uma configuração semelhante à matriz apresentada em [5.8] e cujos termos são avaliados de acordo com as expressões [5.49] a [5.51].

Para além da interpolação do campo de deslocamentos é também necessário proceder à aproximação geométrica no interior do elemento. Uma vez que a formulação adoptada não é isoparamétrica, as funções de aproximação da geometria e do campo de deslocamentos são diferentes, sendo as primeiras definidas do seguinte modo:

$$N'_1 = -\frac{(\xi-1)(\eta-1)\eta}{2} \quad [5.53]$$

$$N'_2 = (\xi-1)(\eta-1)(\eta+1) \quad [5.54]$$

$$N'_3 = -\frac{(\xi-1)(\eta+1)\eta}{2} \quad [5.55]$$

$$N'_4 = \frac{\xi(\eta+1)}{2} \quad [5.56]$$

$$N'_5 = -\frac{\xi(\eta-1)}{2} \quad [5.57]$$

Aparte as particularidades relativas às funções de aproximação da geometria e do campo de deslocamentos, não existem mais diferenças formais entre os métodos dos elementos finitos e dos elementos infinitos. Assim sendo, as etapas seguintes do desenvolvimento do método passam pela definição do equilíbrio dinâmico do elemento infinito através de uma formulação matricial em tudo idêntica à anteriormente definida para os elementos finitos. Como se mostra de seguida, os parâmetros de decaimento e oscilação intervenientes nas funções de forma são dependentes do número de onda,  $k_1$ , e/ou da frequência angular,  $\omega$ , razão pela qual não é vantajoso proceder à divisão da matriz de rigidez dos elementos infinitos em diferentes submatrizes como sugerido para os elementos finitos 2.5D. Tendo em atenção esta particularidade, o equilíbrio dinâmico do elemento infinito, após a transformação da coordenada  $x$  para o domínio transformado, é dado por:

$$[\tilde{K}_{din}(k_1, \omega)]\{\tilde{u}_n\} = \{\tilde{p}_n\} \quad [5.58]$$

No qual  $[K_{din}]$  representa a matriz de rigidez dinâmica, a qual resulta das matrizes de rigidez e massa do elemento infinito, ou seja:

$$[\tilde{K}_{\text{din}}(k_1, \omega)] = [K_1] + ik_1[K_2] + k_1^2[K_3] - \omega^2[M] \quad [5.59]$$

em que a matriz de massa,  $[M]$ , e as matrizes de rigidez  $[K_1]$ ,  $[K_2]$  e  $[K_3]$  são determinadas seguindo o formalismo adoptado na apresentação do método dos elementos finitos 2.5D (ver equações [5.19] a [5.22]). Tal como no método dos elementos finitos, as operações de integração que conduzem à obtenção das matrizes de rigidez e massa são efectuadas no referencial local, embora no presente caso se recorra a um esquema de integração numérica distinto consoante a direcção de integração. Atendendo ao referencial local indicado na Figura 5.10b, tanto as matrizes de rigidez como as matriz de massa intervenientes em [5.59] são obtidas através de uma operação de integração do tipo:

$$\int_{-10}^{+10} \int f(\xi, \eta) e^{-(\varphi-i\beta)\xi} d\xi d\eta \quad [5.60]$$

em que as constantes  $\varphi$  e  $\beta$  dependem do decaimento,  $\alpha$ , e do número de onda,  $k'$ , respectivamente.

Na direcção finita, ou seja  $\eta$ , a integração numérica é efectuada através de quadratura de Gauss-Legendre clássica, considerando dois pontos de integração, já que as funções de forma apresentam evolução quadrática em função da variável de integração. Na direcção com desenvolvimento infinito, a integração é realizada considerando o esquema de Newton-Cotes, com quatro pontos de integração, tal como sugerido por Chow e Smith [215, 229]. No Anexo 5.1 é explicado todo o procedimento de integração numérica de funções do tipo da indicada em [5.60].

O sistema de equações que rege o equilíbrio dinâmico global do sistema é então obtido considerando o contributo tanto dos elementos finitos como dos elementos infinitos. Deste modo, partindo da relação expressa em [5.18] e atendendo ao contributo dos elementos infinitos indicado em [5.58], facilmente se obtém a seguinte relação matricial:

$$\left( [K_1]^{\text{global}} + ik_1[K_2]^{\text{global}} + k_1^2[K_3]^{\text{global}} - \omega^2[M]^{\text{global}} + [\tilde{K}_{\text{din}}(k_1, \omega)]^{\text{global}} \right) \{\tilde{u}_n\} = \{\tilde{p}_n\} \quad [5.61]$$

em que a matriz  $[K_{\text{din}}]^{\text{global}}$  é construída através da contribuição individual de cada elemento infinito. Como se compreende, a introdução de funções de forma complexas (ver expressão [5.49] a [5.51]) leva a que a matriz  $[K_{\text{din}}]^{\text{global}}$  seja uma entidade complexa e dependente do número de onda,  $k_1$ , e/ou da frequência,  $\omega$ , tornando assim a resolução do problema mais exigente do ponto de vista computacional, visto que, para cada alteração destes parâmetros, é necessário proceder ao novo cálculo das matrizes individuais de cada elemento infinito e, conseqüentemente, à assemblagem das matrizes globais.

### 5.3.3.3 Selecção dos parâmetros de decaimento e oscilação

No ponto anterior é explanada a formulação de elementos infinitos 2.5D, referindo-se a necessidade de utilização de funções de forma complexas com as quais se pretende simular a configuração e decaimento da amplitude da onda que se propaga em direcção ao infinito. A definição destes dois parâmetros, reflectidos pelas constantes  $\alpha$  (decaimento) e  $k'$  (número de onda) presentes nas funções de forma de deslocamentos (ver expressões [5.49] a [5.51]), é das questões mais controversas no âmbito da utilização de elementos infinitos em aplicações elastodinâmicas.

No Capítulo 2 foi salientado que existem pelo menos três tipos de ondas (ondas P, S e R) passíveis de se propagarem num macizo geotécnico, às quais correspondem velocidades de propagação e características de atenuação (amortecimento geométrico) bastante distintas. Logo, a selecção das constantes  $\alpha$  e  $k'$ , em que a primeira é função das características de atenuação e a segunda da velocidade de propagação, torna-se uma questão complexa dada a necessidade de atender a pelo menos três tipos de ondas, caso o macizo seja semi-indefinido, homogéneo e isotrópico. Do ponto de vista puramente teórico, a existência de ondas múltiplas coloca em crise a utilização directa de elementos infinitos com a configuração indicada, exigindo-se elementos mais complexos, com capacidade de representação da propagação de diferentes tipos de ondas, tal como sugerido por Medina e Penzian [231] e corroborado pelos recentes estudos levados a cabo por Yun e Kim [218] e Park et al. [232].

Apesar da possível inconsistência teórica, estudos realizados por Yang e Hung [200] mostram que, procedendo a um certo julgamento de engenharia, os elementos infinitos podem ser aplicados em problemas elastodinâmicos tridimensionais, envolvendo maciços homogéneos semi-indefinidos, e solucionados aplicando técnicas 2.5D, desde que se proceda a uma escolha criteriosa dos parâmetros  $\alpha$  e  $k'$  consoante a localização do elemento infinito face à fonte de excitação. Estudos mais recentes, executados pelo autor da presente dissertação, mostram que a utilização deste tipo de elementos é também viável em maciços com características dispersivas (meios não homogéneos) [170, 192].

O critério de selecção dos valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $k'$  proposto por Yang e Hung [200] para um problema tridimensional, analisado pela técnica 2.5D e podendo envolver carregamentos móveis, baseia-se na proposta anteriormente efectuada por Chow e Smith [229] para problemas bidimensionais, envolvendo solicitações verticais aplicadas à superfície do macizo, e tem como

pressuposto a definição dos parâmetros  $\alpha$  e  $k'$  atendendo ao tipo de onda preponderante consoante a localização geométrica do elemento infinito.

Considere-se a representação esquemática ilustrada na Figura 5.11, onde o meio com desenvolvimento infinito se encontra dividido em três regiões distintas. Como referido em capítulos anteriores, as ondas R são preponderantes nas zonas próximas da superfície livre, decaindo bruscamente a sua amplitude em profundidade, razão pela qual, é razoável que, na fronteira lateral do problema e nas proximidades da superfície, se adoptem parâmetros definidos através das propriedades dessas ondas (região I). Relativamente ao restante meio, Yang e Hung [200] sugerem a adopção de parâmetros definidos através das propriedades de propagação e atenuação das ondas S na zona mais profunda da fronteira lateral (região II), e das ondas P na fronteira inferior (região III).

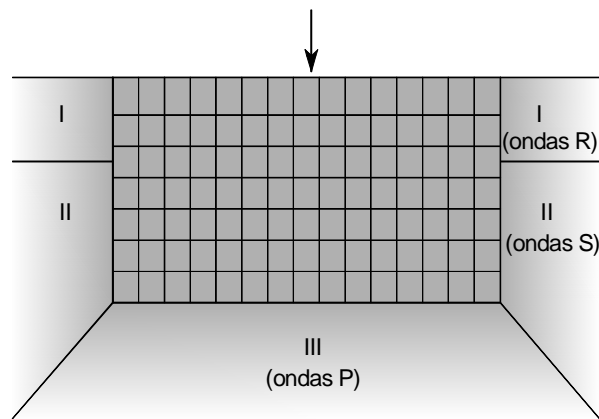


Figura 5.11 – Selecção dos números de onda e parâmetros de decaimento.

Admitindo a divisão do maciço nas três regiões indicadas, o número de onda,  $k'$ , a adoptar para a região I é dado por:

$$k' = \sqrt{\left(\frac{\omega}{C_R}\right)^2 - k_1^2} \quad [5.62]$$

enquanto o parâmetro de decaimento é definido por:

$$\alpha = \frac{1}{2R} \frac{k_1^2}{k_1^2 + \left(\frac{\omega}{C_R}\right)^2} \quad [5.63]$$

Recorde-se que de acordo com a simbologia utilizada  $k_1$  representa a imagem de Fourier da coordenada longitudinal do problema,  $x$ ,  $C_R$  a velocidade de propagação das ondas de Rayleigh, e  $R$  a distância radial entre a fonte de excitação e a fronteira artificial do domínio discretizado (ver Figura 5.12).

Por sua vez, na zona II, os parâmetros  $k'$  e  $\alpha$  são dados por:

$$k' = \sqrt{\left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2 - k_1^2} \quad [5.64]$$

$$\alpha = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \frac{k_1^2}{k_1^2 + \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2} \quad [5.65]$$

Por último, para a zona III, tem-se

$$k' = \sqrt{\left(\frac{\omega}{C_p}\right)^2 - k_1^2} \quad [5.66]$$

$$\alpha = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \frac{k_1^2}{k_1^2 + \left(\frac{\omega}{C_p}\right)^2} \quad [5.67]$$

Analisando as expressões relativas aos factores de decaimento facilmente se constata o seguinte:

i) no caso de uma solicitação harmónica pontual aplicada à superfície do terreno, o problema reduz-se em condições de axissimetria e o parâmetro  $\alpha$  tende para  $1/2R$  na zona I e para  $1/R$  nas restantes zonas, o que vai ao encontro dos parâmetros de decaimento apresentados no Quadro 2.3 do Capítulo 2; ii) caso o maciço esteja submetido a uma solicitação linearmente distribuída (carga de faca), o problema reduz-se em condições de estado plano de deformação e o parâmetro  $\alpha$  tende para 0 na zona I e para  $1/2R$  nas restantes zonas, tal como seria expectável através da análise do problema de Lamb (ver Quadro 2.2 do Capítulo 2). Face a estas observações pode então concluir-se que, num problema envolvendo cargas móveis, o factor de decaimento se encontra balizado pelas duas situações extremas referidas, o que aliás vai ao encontro da evidência experimental apresentada por Kim e Lee [30].

Um outro aspecto interessante, agora relativamente ao parâmetro  $k'$ , prende-se com o facto de as ondas evanescentes serem também representadas pelo actual modelo de elementos infinitos. De facto, quando o radical das expressões [5.62], [5.64] ou [5.66] resulta num número negativo significa que não há propagação de ondas no plano discretizado, ou seja, a configuração de deslocamentos nesse mesmo plano toma carácter evanescente.

Cabe aqui referir que as experiências realizadas pelo autor da presente dissertação permitiram constatar que, para acções verticais aplicadas à superfície do maciço com frequências baixas a

moderadas (quando os comprimentos de onda excitados são de dimensão superior à área carregada) são obtidos resultados mais precisos caso se admita para a zona III parâmetros de decaimento e número de onda definidos através das propriedades das ondas S (em vez das ondas P). Esta evidência é corroborada por alguns raciocínios teóricos, pois, como já tratado no Capítulo 2, quando a área solicitada é consideravelmente inferior aos comprimentos de onda excitados, apenas cerca de 7% da energia transmitida ao sistema é transportada pelas ondas P, enquanto às ondas S está associada aproximadamente 26% da energia. Como tal, nas referidas condições, as ondas S deverão ser preponderantes mesmo na zona III, deixando de o ser caso a frequência seja elevada ao ponto de se excitarem ondas com comprimentos próximos ou mesmo inferiores à dimensão da área solicitada.

#### **5.4 Exigências de discretização: dimensões da malha e dos elementos finitos**

A utilização de métodos numéricos discretizados, tais como o MEF, implica sempre a definição de uma malha de pontos para os quais são estabelecidas as equações de equilíbrio. Na grande maioria dos problemas estruturais, a dimensão da malha é condicionada pela geometria da estrutura em estudo, ficando ao critério do analista a definição do grau de discretização a adoptar mediante as características do problema. Esta condição não se verifica contudo em muitos problemas de carácter geotécnico dada a dimensão supostamente infinita atribuída aos maciços. No caso de estruturas infinitas e invariantes numa dada direcção, para as quais é admissível adoptar técnicas de modelação 2.5D, a indefinição geométrica da secção transversal do problema persiste, pelo menos na direcção horizontal, já que em profundidade é muitas vezes identificado um elevado contraste de rigidez entre as formações mais superficiais e uma formação mais profunda, o que permite, simplificada, admitir a última como indeformável e, assim, impor condições de fronteira de Dirichelet na malha de elementos finitos.

Por uma questão de economia computacional, a qual toma uma importância muito significativa em problemas elastodinâmicos tridimensionais, é de todo o interesse que a resolução do problema possa ser efectuada considerando o menor número de graus de liberdade compatível com um elevado grau de precisão da solução obtida. Este requisito é alcançado delimitando ao mínimo o domínio discretizado e adoptando elementos finitos com a maior dimensão possível, dimensões essas que terão de ser obrigatoriamente compatíveis com os requisitos de acuidade do modelo. Deste modo, para que a solução numérica apresente um elevado grau de precisão, é necessário ter em atenção os seguintes requisitos:

- i) Os elementos finitos deverão ter dimensão máxima compatível com o menor comprimento de onda que se pretende simular. Este aspecto é condicionado pela utilização de elementos finitos com funções de forma polinomiais quadráticas, sendo que a regra actualmente consolidada aponta para necessidade de a dimensão dos elementos finitos ser cerca de 1/6 do comprimento de onda da onda que se pretende simular [8], existindo contudo autores que apontam para a necessidade de um maior nível de refinamento [233]. A utilização de elementos finitos com funções de forma mais evoluídas, como por exemplo os elementos finitos espectrais, permite a consideração de elementos com dimensões significativamente mais elevadas sem que ocorra perda de acuidade da solução numérica [70, 233, 234].
- ii) O tratamento das fronteiras artificiais através de metodologias locais exige que a malha de elementos finitos tenha dimensão suficiente para que o comprimento de onda associado à menor frequência de excitação em estudo se possa desenvolver. Análises bidimensionais baseadas no método dos elementos finitos/infinitos levadas a cabo por Yang et al. [217] apontam no sentido de que o domínio discretizado apresente no mínimo metade da dimensão do maior comprimento de onda em estudo.

Em jeito de síntese, para um problema bidimensional em que a solicitação apresente posição geométrica fixa, como ilustrado na Figura 5.12, as dimensões da malha e elementos finitos a adoptar devem obedecer aos seguintes requisitos:

$$L \leq \frac{\lambda_{\min}}{6} \Leftrightarrow L \leq \frac{2\pi}{6k_{R,\max}} \Leftrightarrow L \leq \frac{\pi C_R}{3\omega_{\max}} \quad [5.68]$$

$$R \geq \alpha \lambda_{\max} \Leftrightarrow R \geq \frac{\alpha 2\pi}{k_{R,\min}} \Leftrightarrow R \geq \frac{\alpha 2\pi C_R}{\omega_{\min}} \quad [5.69]$$

em que  $\alpha$  corresponde a um parâmetro que reflecte a qualidade do procedimento utilizado para o tratamento das fronteiras artificiais. Caso as fronteiras sejam tratadas por procedimentos globais, então  $\alpha=0$ , caso se adoptem procedimentos locais então  $\alpha$  pode variar entre 0 e 1.

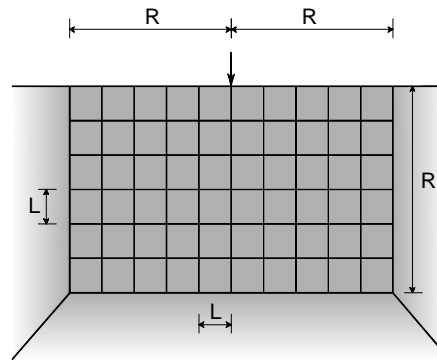


Figura 5.12 – Malha de elementos finitos bidimensional.

Como se pode verificar, caso a gama de frequências de excitação seja muito ampla, os critérios de discretização apontados em [5.68] e [5.69] podem conduzir a malhas de elementos finitos de grande dimensão e com um elevado grau de refinamento. Convém contudo esclarecer que caso o maciço seja composto por um estrato superficial, sobrejacente a uma formação rochosa que possa ser admitida como indeformável, só há propagação de ondas caso a frequência de excitação obedeça ao seguinte requisito:

$$\omega \geq \frac{\pi C_p}{2h} \quad [5.70]$$

sendo h a espessura do estrato.

Uma vez que a dimensão da malha não é um parâmetro condicionante na análise de ondas evanescentes, podendo aplicar-se as regras de discretização usuais em análises estáticas, a combinação da condição [5.70] com o requisito imposto em [5.69] permite, em alguns casos, uma redução significativa da dimensão do domínio discretizado.

As regras acima apontadas são válidas para um cenário bidimensional. No caso de uma análise tridimensional pelo método dos elementos finitos 2.5D, a definição dos requisitos de discretização é um pouco mais complexa, pois no plano discretizado propagam-se ondas com diferentes comprimentos de onda, embora os conceitos base presentes nas condições expressas em [5.68] e [5.69] se mantenham inalterados. A passagem do domínio bidimensional para a análise tridimensional implica a substituição do parâmetro  $k_R$  das expressões [5.68] e [5.69] por:

$$k_R = \sqrt{\left(\frac{\omega}{C_R}\right)^2 - k_1^2} \quad [5.71]$$

Atendendo ao comprimento de onda passível de se propagar no plano discretizado, ditado pela expressão [5.71], facilmente se compreende que o menor comprimento de onda corresponde a  $k_1=0$ , sendo esse o valor a adoptar na equação [5.68]. Relativamente ao requisito da dimensão da



malha, a menos que se opte por uma estratégia de dimensão adaptativa em função de  $k_1$  (e mesmo nesse caso quando o radicando da expressão [5.71] se aproxima de valor nulo a dimensão da malha tenderia para infinito), não se consegue o seu cumprimento integral. Contudo, a experiência do autor aponta no sentido de se obterem resultados muito precisos desde que se adoptem, para a expressão [5.69], valores de  $\alpha=0,6$ , caso se recorra ao método dos elementos infinitos, e  $\alpha>0,8$ , no caso de se adoptarem fronteiras absorventes, e se considere para  $k_R$  dessa mesma expressão o valor correspondente a uma análise bidimensional.

Sem embargo, deve ter-se presente que para os problemas estudados na presente dissertação, a complexidade da definição da dimensão da malha e dos seus elementos é ainda acrescida devido ao efeito de Doppler que ocorre na presença de cargas móveis.

Deste modo, por questão de simplicidade de exposição, e sem qualquer perda de generalidade, considere-se um cenário geotécnico correspondente a um maciço semi-indefinido, homogéneo e isotrópico, submetido a uma acção vertical móvel, com magnitude harmónica (definida pela frequência angular  $\omega_0$ ), a qual se desloca à superfície do maciço, na direcção  $x$ , com velocidade  $c$ . Tendo em atenção o carácter móvel da sollicitação na direcção  $x$ , à qual corresponde a imagem de Fourier  $k_1$ , a expressão [5.71] pode ser manipulada de modo a dar origem a:

$$k_R = \sqrt{\left(\frac{\omega}{C_R}\right)^2 - \left(\frac{\omega_0 - \omega}{c}\right)^2} \quad [5.72]$$

Substituindo [5.72] em [5.68] e [5.69], conclui-se que o critério de definição da malha tem de depender obrigatoriamente da velocidade de circulação,  $c$ , e da frequência de oscilação,  $\omega_0$ .

Caso a magnitude do carregamento permaneça constante ao longo do tempo, então a expressão [5.72] simplifica-se, dando origem a:

$$k_R = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(\frac{c}{C_R}\right)^2 - 1} \quad [5.73]$$

Analisando a expressão [5.73] identificam-se duas situações possíveis:

- i) Caso a velocidade de circulação,  $c$ , seja inferior a  $C_R$ , a expressão [5.73] dá origem a um número imaginário, o que significa que não há propagação de ondas. Nesse caso a imposição da dimensão mínima da malha e da dimensão dos elementos deve seguir regras semelhantes às utilizadas em análises estáticas;

- ii) Caso a velocidade de circulação,  $c$ , seja superior a  $C_R$ , a solicitação dá origem à propagação de ondas, formando-se o cone de Mach. Nesse caso a condição [5.68] deve ser respeitada considerando o valor mais elevado da frequência de análise. A satisfação integral da condição [5.69] é impossível, pois a dimensão  $R$  tende para infinito quanto  $\omega$  tende para zero.

Considere-se agora a possibilidade de a carga oscilar em simultâneo com o seu movimento espacial, ou seja,  $\omega_0 \neq 0$ . Nesse cenário, só ocorre propagação de ondas não evanescentes caso a seguinte condição seja verificada:

$$\left(\frac{\omega}{C_R}\right)^2 - \left(\frac{\omega_0 - \omega}{c}\right)^2 > 0 \quad [5.74]$$

Supondo o meio não dispersivo, a resolução da inequação [5.74] dá origem ao seguinte resultado (admitindo  $c < C_R$ ):

$$\frac{\omega_0}{1 + \frac{c}{C_R}} < \omega < \frac{\omega_0}{1 - \frac{c}{C_R}} \quad [5.75]$$

Caso o maciço tenha características dispersivas a resolução da condição [5.74] pode ser efectuada graficamente através de uma construção semelhante à representada na Figura 5.13.

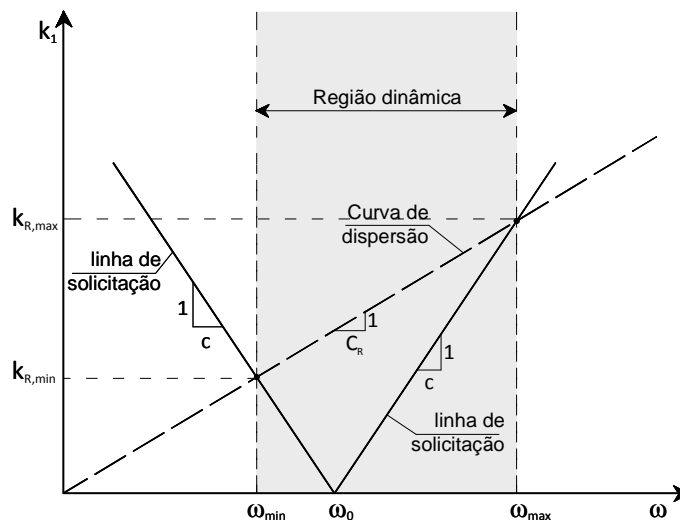


Figura 5.13 – Identificação da “região dinâmica” no espaço  $k-\omega$  para solicitações móveis.

Uma vez que a excitação com frequências exteriores ao intervalo acima definido apenas dá origem a ondas evanescentes, os limites aqui apontados podem ser tomados para a definição da dimensão da malha e dos seus elementos.

No contexto das temáticas abordadas na presente dissertação, a variação temporal da acção é geralmente mais complexa do que a descrita por uma função harmónica simples, podendo, contudo, ser decomposta num conjunto de funções harmónicas (através de uma expansão de Fourier ou de uma transformada de Fourier). Deste modo, numa aplicação prática, em que se admita uma dada velocidade de circulação e se pretenda utilizar uma malha de elementos finitos que seja eficiente para diferentes valores da frequência  $\omega_0$ , o dimensionamento desta deve ser realizado de acordo com o procedimento preconizado, mas considerando o limite inferior de  $\omega_0$ , para a definição de  $R$ , e o limite superior de  $\omega_0$ , para a definição da dimensão dos elementos finitos,  $L$ . Como se compreende, caso a gama de variação de  $\omega_0$  seja muito larga, indo desde frequências muito baixas até frequências muito altas, a definição de uma malha constante pode conduzir a problemas com muitos graus de liberdade, eventualmente incomportável do ponto de vista computacional. Esta limitação pode ser ultrapassada utilizando malhas distintas para diferentes valores de  $\omega_0$ .

## **5.5 Análise comparativa da eficiência das metodologias locais incluídas no MEF 2.5D**

### **5.5.1 Objectivos e descrição do exemplo de estudo**

A presente secção tem como objectivo apresentar alguns exemplos de validação do modelo numérico 2.5D baseado no método dos elementos finitos. Nos exemplos que seguidamente se apresentam é dada especial ênfase às potencialidades e limitações apresentadas pelo referido modelo na simulação de maciços geotécnicos quando submetidos a acções dinâmicas com carácter móvel ou fixo. Uma vez que foram implementados dois tipos de procedimentos locais para o tratamento das fronteiras artificiais, o método das fronteiras absorventes e o método dos elementos infinitos, a acuidade dos resultados obtidos pela aplicação das referidas metodologias é avaliada mediante a comparação dos respectivos resultados numéricos com os homólogos obtidos através do modelo semi-analítico baseado no método de Haskell-Thomson, apresentado no Capítulo 3.

Com o intuito de alcançar os objectivos expostos, seleccionou-se o caso de estudo previamente apresentado por Takemiya [64]. Na Figura 5.14 mostra-se a geometria do problema e respectivas propriedades mecânicas. A solicitação, uniformemente distribuída por uma área quadrada com 2 m de lado, tem resultante unitária com direcção vertical e assume, adicionalmente, uma das seguintes configurações: i) solicitação harmónica não móvel; ii) solicitação móvel, deslocando-se

na direcção  $x$  com velocidade constante,  $c$ , e magnitude constante; iii) solicitação móvel com magnitude harmónica. Nos cenários de solicitação móvel, considera-se que, no instante  $t=0$  s, a acção está centrada no ponto com coordenadas  $x=y=z=0$  m.

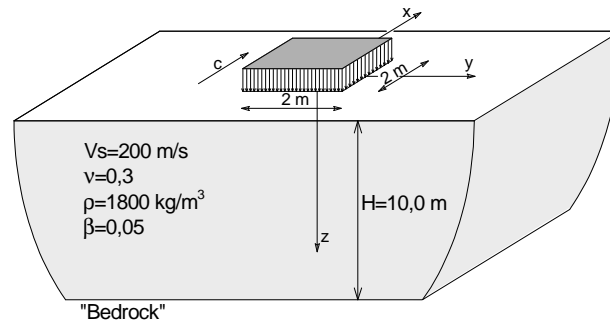


Figura 5.14 – Características gerais do exemplo de avaliação da acuidade dos procedimentos locais de tratamento das fronteiras artificiais.

Dadas as condições de simetria geométrica e de solicitação do problema, apenas se torna necessária a simulação numérica de metade do domínio. A malha de elementos finitos adoptada foi dimensionada de acordo com as regras anteriormente explicitadas, em função da gama de frequências de interesse. Assim, a dimensão vertical da malha é condicionada pelos limites físicos do problema, enquanto a dimensão horizontal é definida em função do limite inferior da frequência de análise, regra que permitiu estabelecer a dimensão de 20 m como adequada aos problemas em estudo. Na fronteira artificial, ou seja, na fronteira lateral do lado oposto ao plano de simetria, são então aplicados os métodos de tratamento anteriormente apresentados de modo a evitar a reflexão espúria das ondas que aí incidam.

### 5.5.2 Solicitações dinâmicas não móveis

Para avaliar a acuidade do modelo numérico na simulação de problemas dinâmicos envolvendo solicitações com posição geométrica fixa, são considerados dois casos de estudo. No primeiro caso considera-se a uma frequência de excitação de 10 Hz, sendo ligeiramente superior à primeira frequência de corte do maciço, enquanto no segundo caso se admite uma solicitação harmónica com frequência de 40 Hz.

Começando pela frequência menor, na Figura 5.15 ilustra-se o campo de deslocamentos verticais do maciço, no instante  $t=0$  s. Os resultados agora apresentados, determinados através do modelo semi-analítico (ver Capítulo 3), são utilizados como solução de referência na avaliação da acuidade dos procedimentos numéricos propostos. Note-se que a magnitude dos resultados se

encontra adimensionalizada, sendo  $D^* = \mu u_z a$  ( $\mu$  corresponde ao módulo de distorção do solo e  $a$  é metade da largura da área solicitada).

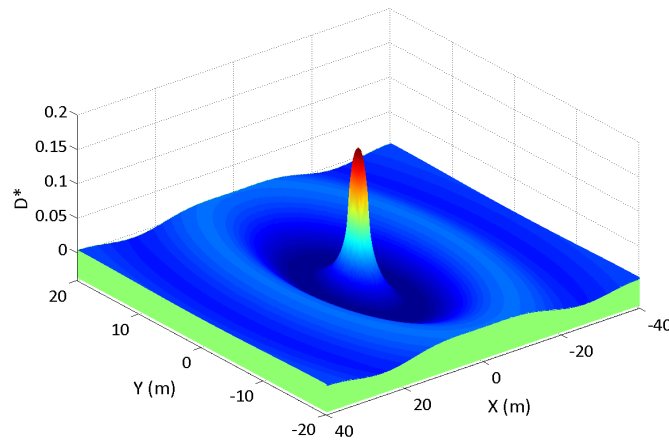


Figura 5.15 – Deslocamentos verticais da superfície do macizo no instante  $t=0$  s e para  $f=10$  Hz.

Na Figura 5.16 apresenta-se o mapa de erros relativos da amplitude dos deslocamentos verticais determinados pelos diferentes métodos numéricos, face à solução de referência, quando a solicitação apresenta uma frequência de 10 Hz. Essa figura permite tirar diversas conclusões: i) a utilização de elementos infinitos revela-se o procedimento mais preciso na simulação do meio indefinido, conduzindo a erros relativos inferiores a 5%; ii) o método das fronteiras absorventes de White, apesar de permitir obter resultados de qualidade superior aos verificados recorrendo à formulação de Lysmer, tem uma acuidade muito inferior ao método dos elementos infinitos, verificando-se a existência de zonas consideráveis do domínio de interesse em que o erro relativo ultrapassa os 10%; iii) como seria expectável, a tridimensionalidade do problema impõe sérias limitações à aplicação do método de Lysmer, já que os resultados obtidos por esta formulação estão eivados de erro relativo que pode ascender a mais de 15% em zonas não desprezáveis do domínio de interesse.

Uma vez que o erro relativo da amplitude dos deslocamentos pode não dar uma ideia correcta da relevância associada a esse mesmo erro, na Figura 5.17 apresentam-se os deslocamentos verticais da superfície do macizo ao longo do alinhamento definido por  $y=18$  m, para o instante  $t=0$ s. A análise da referida figura permite concluir, uma vez mais, que a conjugação do método dos elementos finitos-método dos elementos infinitos faculta soluções com elevado grau de precisão, mesmo quando o domínio de interesse se expande até à proximidade dos limites da malha discretizada.

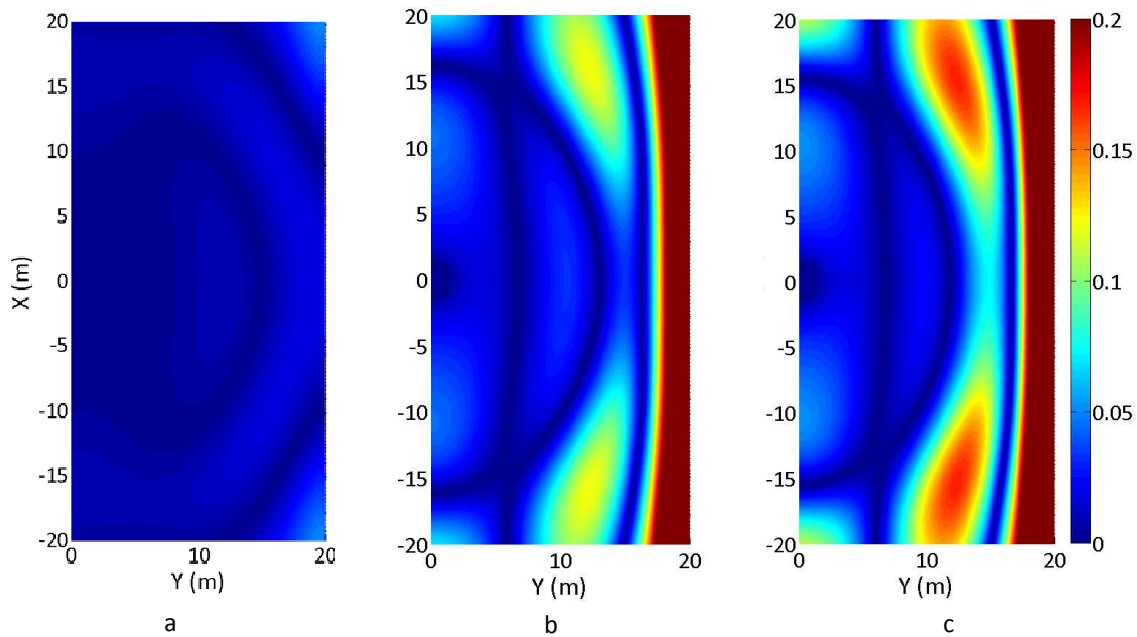


Figura 5.16 – Erro relativo da amplitude dos deslocamentos verticais da superfície do maciço para  $f=10$  Hz: a) elementos infinitos; b) fronteira absorvente de White; c) fronteira absorvente de Lysmer.

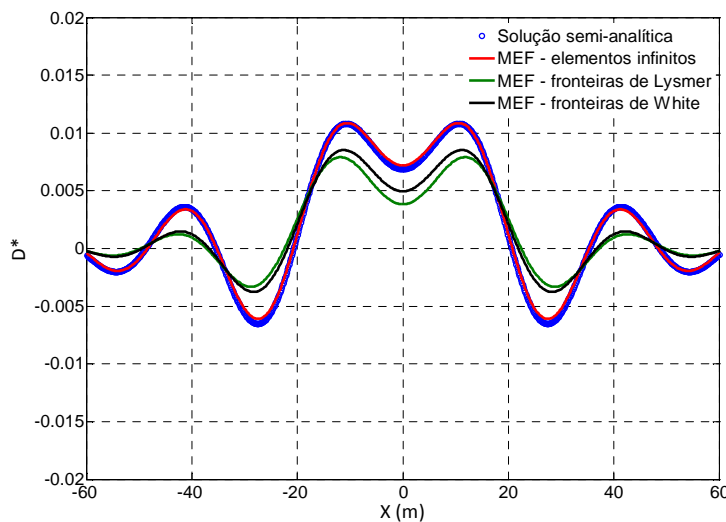


Figura 5.17 – Deslocamentos verticais ao longo do alinhamento  $y=18$  m, no instante  $t=0$  s e para  $f=10$  Hz.

Prosseguindo agora para o estudo em que se toma a acção com uma frequência de oscilação de 40 Hz, na Figura 5.18 apresenta-se o mapa de erro relativo da amplitude dos deslocamentos verticais da superfície do maciço. Tal como no caso anterior, o erro relativo é determinado face à solução de referência obtida através do modelo semi-analítico descrito no Capítulo 3. O facto de o comprimento de onda dominante associado à frequência em estudo ter dimensão consideravelmente inferior à dimensão transversal da malha conduz a um aumento do grau de precisão das soluções numéricas envolvendo fronteiras absorventes. Apesar deste facto, a análise comparativa dos resultados obtidos pelos três métodos permite concluir que, novamente, o método dos elementos infinitos tem um desempenho claramente mais elevado do que os métodos baseados em fronteiras absorventes. Outro resultado curioso que pode ser retirado da

comparação entre as Figuras 5.16 e 5.18 tem a ver com o facto da acuidade da solução envolvendo elementos infinitos não ser muito dependente do comprimento da onda dominante, desde que o mesmo não seja superior a cerca do dobro da largura da malha de elementos finitos. Situação contrária verifica-se nos modelos que usam fronteiras absorventes, nos quais se assiste a um aumento da exactidão quando o comprimento da onda dominante é substancialmente inferior à largura do domínio discretizado.

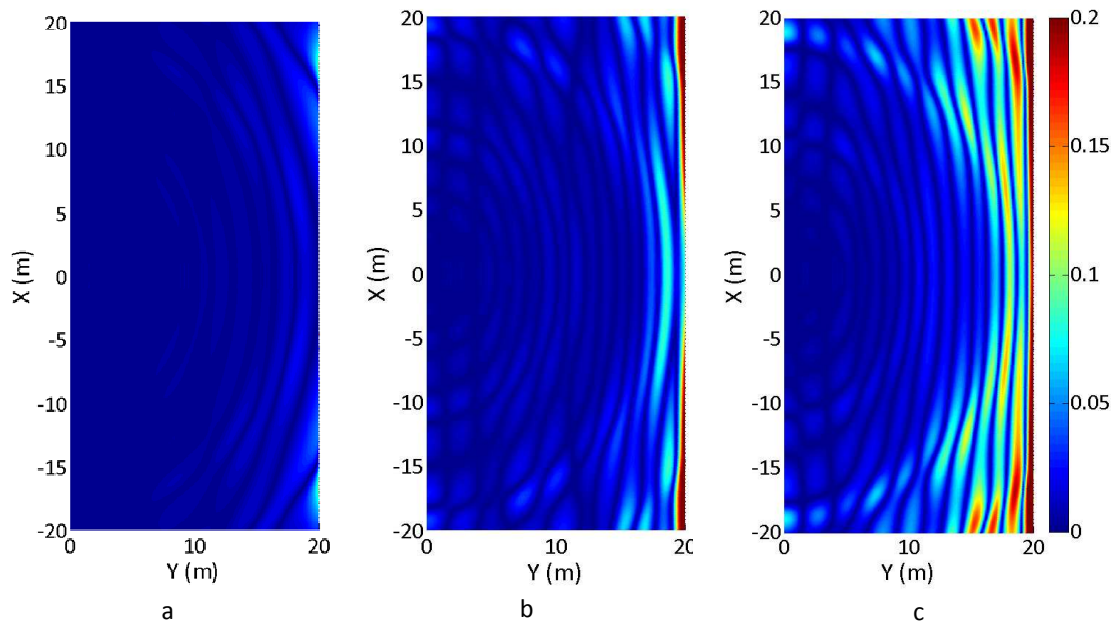


Figura 5.18 – Erro relativo da amplitude dos deslocamentos verticais da superfície do maciço para  $f=40$  Hz: a) elementos infinitos; b) fronteira absorvente de White; c) fronteira absorvente de Lysmer.

### 5.5.3 Solicitações móveis

Como já elucidado em capítulos anteriores, caso a velocidade de circulação da acção aplicada ao maciço seja inferior à velocidade de propagação das ondas associadas ao primeiro modo P-SV, o problema dinâmico fica reduzido à existência de ondas evanescentes, às quais corresponde um campo de deformação semelhante ao induzido por uma acção estática. Assim sendo, no caso de estudo aqui tratado apenas se consideram velocidades de circulação,  $c$ , elevadas, correspondendo ao número de Mach,  $M=c/C_s$ , de 0,927 e de 1,5.

Na Figura 5.19 apresenta-se, sob a forma adimensional, o campo de deslocamentos verticais da superfície do maciço determinado através da formulação semi-analítica e através do modelo numérico, tendo-se considerado o tratamento da fronteira artificial através do método dos elementos infinitos ou através das fronteiras absorventes de White. Embora a análise das isocurvas representadas nas figuras permita identificar algum distanciamento entre a solução semi-analítica e as soluções numéricas, constata-se que a adopção de elementos infinitos permite

alcançar resultados mais exactos. Uma melhor percepção do grau de exactidão atingido através das duas formulações numéricas obtém-se através da análise da Figura 5.20, a qual ilustra o registo temporal de deslocamentos verticais no ponto com coordenadas (0,18,0) durante a passagem da acção.

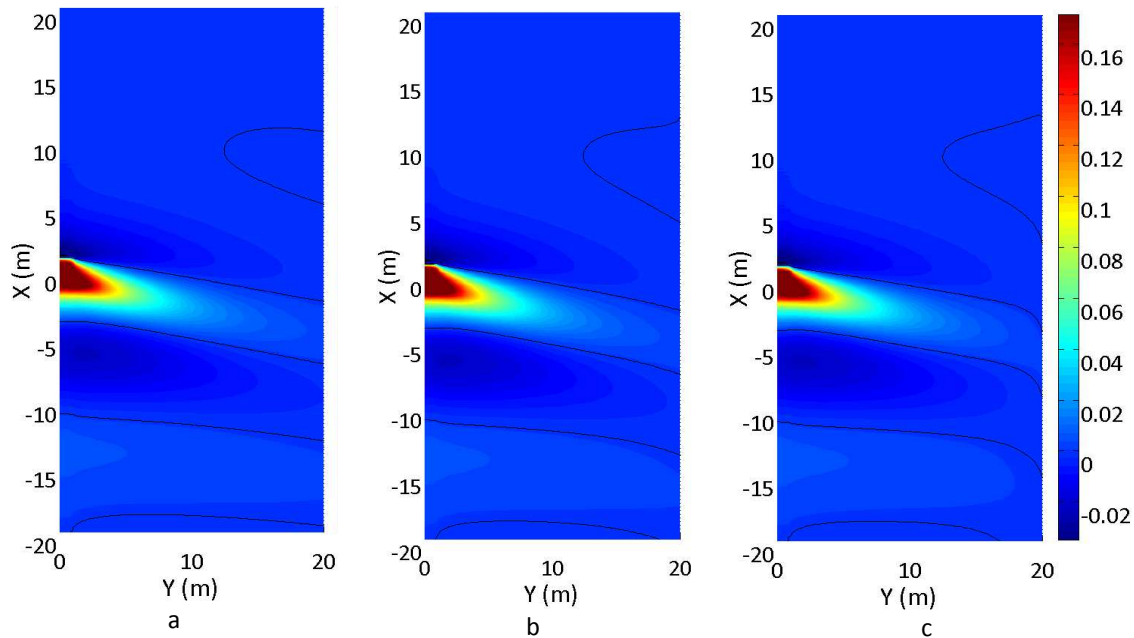


Figura 5.19 – Campo de deslocamentos verticais da superfície do maciço para  $M=0,927$  sob a forma adimensional: a) modelo semi-analítico; b) elementos infinitos; c) fronteira absorvente de White.

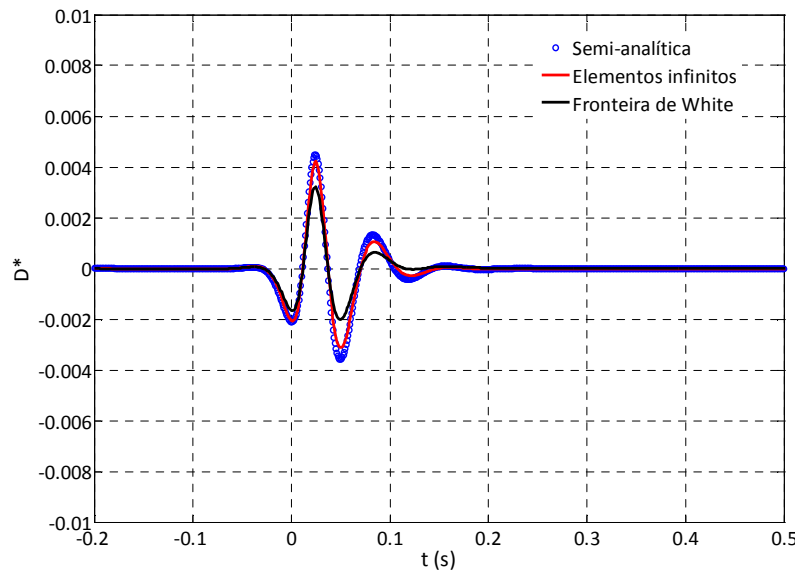


Figura 5.20 – Registo temporal do deslocamento vertical do ponto com coordenadas (0,18,0) para  $M=0,927$ .

Relativamente aos resultados concernentes ao caso em que a velocidade de circulação corresponde a  $M=1,5$ , retiram-se conclusões em tudo idênticas às referidas nos parágrafos anteriores. Uma vez mais, o tratamento das fronteiras artificiais através do método dos elementos infinitos revela-se uma solução mais promissora do que os restantes procedimentos



locais analisados. Esta constatação é confirmada pela Figura 5.21, onde se apresenta o registo temporal dos deslocamentos verticais adimensionalizados no ponto com coordenadas (0,18,0). Como se pode verificar, o modelo numérico baseado no acoplamento entre elementos finitos e elementos infinitos permite obter uma solução muito próxima da solução teórica, sendo que o mesmo não se pode afirmar quando se recorre ao método das fronteiras absorventes. De facto, procedendo ao tratamento das fronteiras artificiais através da formulação de White assiste-se a uma diminuição da qualidade da solução à medida que o ponto de observação se aproxima do limite do domínio discretizado. Note-se que a adopção da formulação de Lysmer conduz a soluções ainda de menor qualidade, o que aliás já seria expectável atendendo aos resultados expostos nas Figuras 5.16 e 5.18.

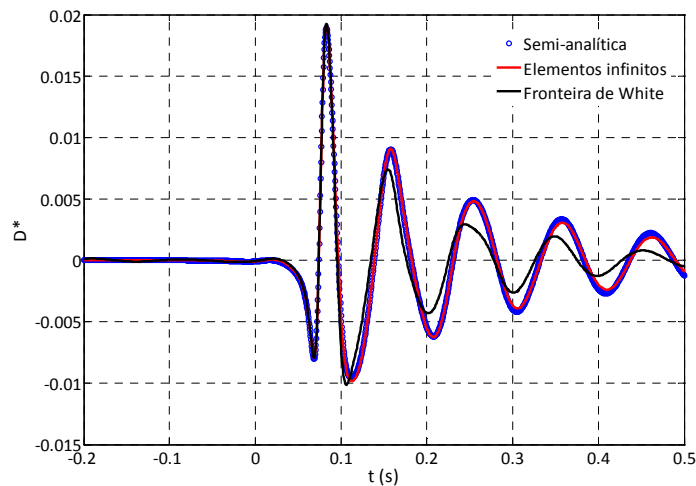


Figura 5.21 – Registo temporal do deslocamento vertical do ponto com coordenadas (0,18,0) para  $M=1,5$ .

#### 5.5.4 *Solicitações harmónicas com carácter móvel*

Com o intuito de generalizar a avaliação da adequabilidade dos diferentes procedimentos numéricos em estudo interessa analisar o caso de a acção se deslocar e oscilar em simultâneo. Para uma velocidade de circulação em correspondência com  $M=0,5$  ( $c=100$  m/s), são consideradas duas situações distintas: frequências de oscilação,  $f_0$ , de 10 Hz e de 40 Hz. Esclareça-se desde já que o problema agora em estudo é consideravelmente mais complexo que os anteriores, pois, devido ao efeito de Doppler, são excitados, em frequências distintas, diversos modos P-SV.

A Figura 5.22 ilustra o campo de erros relativos referentes à amplitude dos deslocamentos verticais da superfície do maciço para  $f_0=10$  Hz. Uma vez que a formulação de fronteiras absorventes de Lysmer conduz a uma menor grau de precisão dos resultados, apenas os campos de erros relativos inerentes aos outros dois procedimentos são mostrados na Figura 5.22. Ao contrário dos exemplos anteriores, em que se apresentam os resultados no referencial absoluto

definido por  $xoy$ , no caso presente considera-se um referencial móvel, definido através da coordenada  $s$ , em que  $s=x-ct$ . Esta alteração de referencial tem em vista a generalização dos resultados face a uma solitação com magnitude e posição geométrica variáveis no tempo.

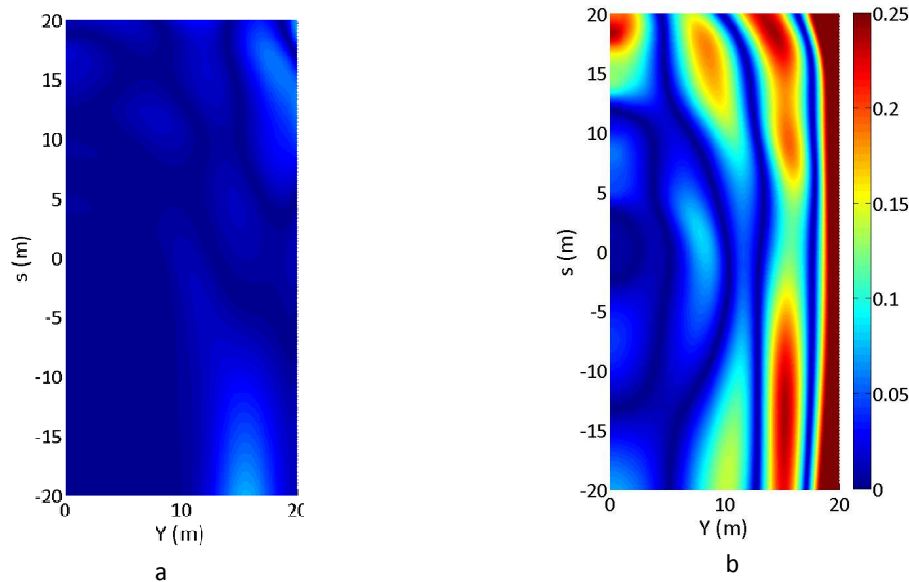


Figura 5.22 – Campo de erros relativos da amplitude do deslocamento vertical observado na superfície do maciço para  $M=0,5$  e  $f_0=10$  Hz: a) elementos infinitos; b) fronteira absorvente de White.

Da análise comparativa dos resultados expostos na Figura 5.22 retira-se de imediato a conclusão de que, na presente situação, a metodologia adoptada no tratamento das fronteiras artificiais tem um reflexo muito significativo na qualidade dos resultados numéricos. Com efeito, o tratamento através de fronteiras absorventes revela-se pouco preciso, ao passo que o método dos elementos infinitos se mostra muito eficiente, conduzindo a erros relativos máximos inferiores a cerca de 10%. Esta diferença de acuidade entre os dois métodos sob escrutínio é ainda mais evidente nos resultados apresentados na Figura 5.23, na qual são ilustrados os deslocamentos da superfície do terreno, ao longo do alinhamento definido por  $y=18$  m e para o instante  $t=0$  s.

Relativamente ao cenário em que  $M=0,5$  e  $f_0=40$  Hz, os campos de erros relativos da amplitude dos deslocamentos verticais observados na superfície do maciço encontram-se ilustrados na Figura 5.24. A análise comparativa das Figura 5.22 e Figura 5.24 permite concluir que o aumento da frequência de oscilação da acção leva a um aumento da acuidade dos resultados obtidos por ambos os métodos em estudo. Esta constatação é em parte justificada pela presença de amortecimento material e pelo facto de se ter adoptado uma malha de elementos finitos com dimensão transversal constante, independentemente da frequência de excitação. Contudo, apesar do erro relativo da amplitude dos deslocamentos ter diminuído substancialmente no modelo com fronteiras absorventes face aos resultados homólogos para  $f_0=10$ Hz, não pode deixar

de se referir que o modelo numérico baseado no acoplamento entre elementos finitos e infinitos permite obter resultados de maior confiança.

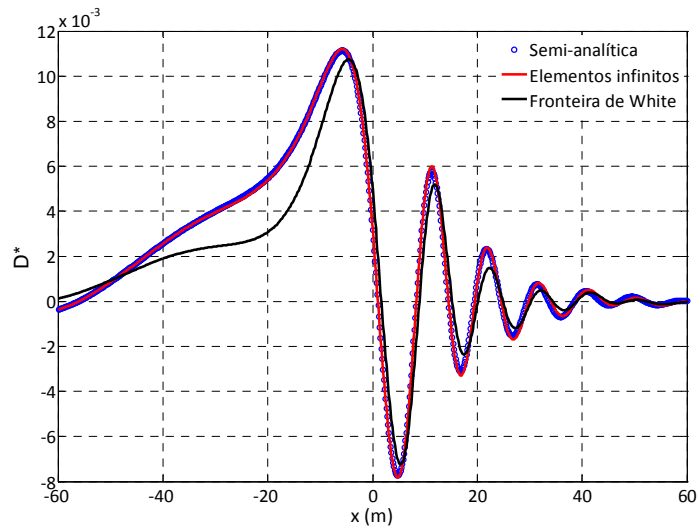


Figura 5.23 – Deslocamentos verticais da superfície do maciço ao longo do alinhamento  $y=18\text{m}$  para  $t=0$  s e para  $f_0=10\text{Hz}$  e  $M=0,5$ .

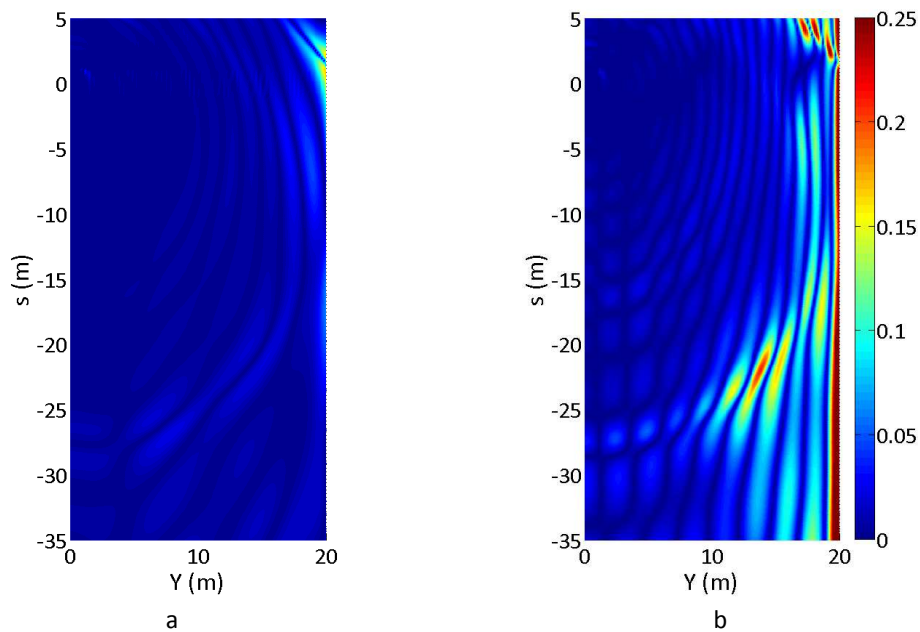


Figura 5.24 – Campo de erros relativos da amplitude do deslocamento vertical observado na superfície do maciço para  $M=0,5$  e  $f_0=40$  Hz: a) elementos infinitos; b) fronteira absorvente de White.

### 5.5.5 Considerações finais

Face ao exposto ao longo do estudo comparativo apresentado pode pois concluir-se que, para um esforço de cálculo idêntico, isto é, mantendo inalterada a dimensão da malha de elementos finitos e respectivo número de graus de liberdade, o método dos elementos infinitos revela-se consideravelmente superior em termos de acuidade face aos métodos baseados em fronteiras

absorventes. A superioridade comparativa do método dos elementos infinitos é tanto mais significativa quanto menor for a frequência de excitação, tendo-se revelado um método hábil para lidar com problemas de propagação de vibrações mesmo quando a dimensão do comprimento de onda dominante é superior à dimensão transversal do domínio discretizado em elementos finitos 2.5D.

No que toca às fronteiras absorventes, embora ambas as formulações estudadas se revelem menos precisas que o método dos elementos infinitos, a proposta de White et al. [208] demonstrou ter maior potencialidade do que a formulação tradicional das fronteiras viscosas. Esta conclusão era à partida expectável, já que o carácter tridimensional dos problemas analisados impõe sérias dificuldades à capacidade absorvente das fronteiras viscosas, pois muito dificilmente se pode garantir que a incidência da onda na fronteira artificial ocorra segundo a direcção normal a esta.

## **5.6 Acoplamento 2.5D MEF-MEC**

### **5.6.1 Considerações gerais**

Muito embora o recurso a métodos transformados, como é exemplo o método dos elementos finitos 2.5D, permita uma redução muito substancial do esforço de cálculo, a exigência de discretização de uma boa parte do domínio pode, em certos casos, revelar-se proibitiva, principalmente quando seja condição obrigatória o conhecimento da resposta do meio em pontos do domínio muito afastados da fonte de excitação e quando a última é caracterizada por um conteúdo em frequência relativamente elevado.

Como já referido anteriormente, existem métodos numéricos que são na sua génese mais indicados para a análise de meios indefinidos do que o método dos elementos finitos. Talvez o mais popular desses métodos seja o método dos elementos de contorno (MEC) [76, 235, 236]. Contudo, este método apresenta também alguns inconvenientes, nomeadamente no que toca à simulação de geometrias complexas, principalmente no contexto 2.5D [196, 197]. Nestas circunstâncias, uma alternativa viável passa pelo recurso a modelos numéricos híbridos, nos quais a estrutura e o domínio próximo são simulados por recurso ao método dos elementos finitos, ao passo que o meio indefinido, correspondente ao maciço geotécnico de fundação, é modelado por recurso ao MEC [78, 197, 237, 238]. Como é evidente, as duas partes do problema global estão ligadas e como tal, ao longo da fronteira de delimitação dos dois domínios, os requisitos de

equilíbrio de tensões e continuidade de deslocamentos têm obrigatoriamente de ser respeitados, tal como se ilustra esquematicamente na Figura 5.25.

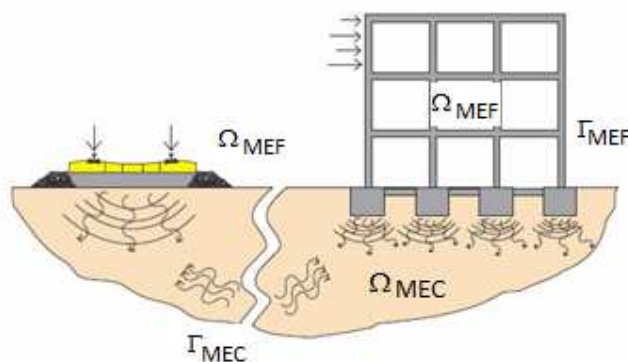


Figura 5.25 – Representação esquemática de uma formulação híbrida.

A utilização de métodos híbridos MEF-MEC na simulação de vibrações induzidas por tráfego tem conhecido avanços significativos nos últimos anos, no que toca a modelos baseados em formulações quer no domínio do tempo quer no domínio da frequência.

No campo dos modelos tridimensionais formulados no domínio do tempo, destacam-se os modelos apresentados por O'Brien e Rizos [235] e Van den Broeck [239], para a simulação de vias férreas superficiais, bem como os esquemas computacionais baseados no acoplamento MEF-MIT (o método dos integrais transformados não é mais do que uma simplificação do MEC) propostos por Bode et al. [240]. Ainda neste domínio, especial referência deve ser feita às formulações tridimensionais apresentadas por Galvín [41], sendo que os mais recentes desenvolvimentos deste tipo de modelos, que contemplam a interacção dinâmica entre o material circulante e a via férrea, podem ser consultados nas referências bibliográficas [182, 241, 242].

Por outro lado, o desenvolvimento de modelos híbridos formulados no domínio da frequência para a análise de estruturas invariantes ou periódicas tem também tido significativos avanços nos anos mais recentes. No campo dos modelos periódicos, uma referência deve ser prestada aos trabalhos pioneiros desenvolvidos por Chelebi et al. [181, 189, 243], nos quais o maciço geotécnico é simulado através do método dos elementos de contorno, enquanto o meio com geometria complexa, ou seja, o aterro, a via férrea e o túnel, no caso de vias subterrâneas, é simulado através de uma formulação de elementos finitos tridimensionais. Seguindo também esta corrente de modelação, um vasto conjunto de estudos relacionados com a geração de vibrações por tráfego ferroviário em túneis foi recentemente apresentado por Gupta et al. [190, 244, 245]. Tal como no caso anterior, é também na última meia dúzia de anos que se assiste ao desenvolvimento de modelos 2.5D (invariantes) recorrendo a técnicas híbridas baseadas no acoplamento MEF-MEC ou MEF-MIT [110, 197, 246]. Alguns desses modelos têm sido aplicados

no estudo de vibrações induzidas pelo tráfego subterrâneo, sendo a via férrea e o túnel simulados através do MEF ao passo que o maciço circundante é modelado recorrendo a uma formulação baseada no MIT [110, 247]. Embora haja registo de aplicações de modelos híbridos 2.5D no estudo de vibrações induzidas por tráfego ferroviário de alta velocidade anteriores a 2010 [88, 197, 246], uma formulação generalista, na qual é possível, de modo eficiente, a inclusão de domínios discretizados através do MEF no interior do meio simulado pelo MEC, apenas muito recentemente foi apresentada por François et al. [112, 248].

No contexto da presente dissertação é seguidamente apresentada uma formulação híbrida com carácter 2.5D, na qual o aterro e via férrea são simulados por recurso ao MEF ao passo que o maciço geotécnico é simulado através de uma formulação baseada no MEC. O acoplamento entre os dois modelos é efectuado com base em conceitos de subestruturação, sendo condição obrigatória que a interacção entre os domínios correspondentes seja efectuada ao longo de um plano horizontal inscrito na superfície livre do maciço geotécnico. Uma representação esquemática do método pode ser visualizada na Figura 5.26.

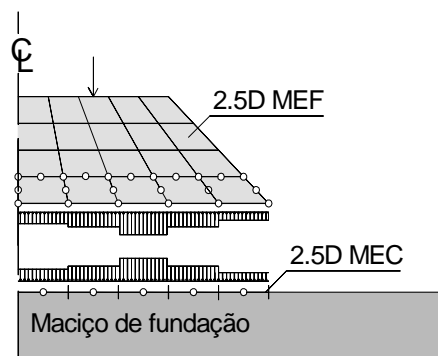


Figura 5.26 – Representação esquemática de subestruturação em modelos 2.5D.

O método desenvolvido e implementado recorre às soluções fundamentais (funções de Green) apresentadas no Capítulo 3 para a descrição da resposta dinâmica do maciço geotécnico. Este procedimento apresenta algumas vantagens relativamente à adopção de soluções fundamentais 2.5D para meios homogéneos e indefinidos [249, 250] ou semi-indefinidos [251], ainda que, para estas, exista uma solução totalmente analítica. De facto, a utilização das soluções analíticas fundamentais 2.5D apresenta a desvantagem de exigir a discretização de toda a superfície livre do maciço, caso se opte por solução analíticas relativas ao meio indefinido, bem como das interfaces entres estratos do maciço com propriedades distintas. Para além deste aspecto, a discretização de toda a fronteira, e conseqüente truncatura, pode dar origem a reflexões espúrias das ondas aí incidentes, não sendo assim respeitada a condição de Sommerfeld. Tendo em atenção estes aspectos, no presente estudo adopta-se uma formulação alternativa baseada nas soluções fundamentais de um meio semi-indefinido homogéneo ou estratificado, sendo que estas soluções

são obtidas através dos procedimentos semi-analíticos descritos no Capítulo 3. Esta formulação permite uma redução muito significativa da malha de elementos de contorno, já que apenas a interface que estabelece a ligação com o domínio discretizado em elementos finitos necessita de ser explicitada.

O método aqui proposto pode ser encarado como uma alternativa à utilização do MEF 2.5D na descrição de todo o problema dinâmico, apresentando claras vantagens quando se torna necessário o conhecimento da resposta dinâmica em pontos do macizo significativamente afastados da fonte de excitação, já que não é necessária a discretização do macizo geotécnico para além da interface com o meio descrito através do MEF.

## **5.6.2 *Formulação do MEC 2.5D para simulação de meios semi-indefinidos***

### **5.6.2.1 Preâmbulo**

Os conceitos fundamentais da simulação de meios elásticos semi-indefinidos sob a acção de cargas dinâmicas com posição geométrica fixa ou móvel foram já devidamente apresentados nos capítulos anteriores. Como tal, nesta secção apenas se discutem os aspectos gerais do formalismo inerente à incorporação das soluções fundamentais num procedimento numérico para a integração das equações de contorno. O procedimento seguido é muito próximo ao método dos elementos de contorno, não sendo contudo totalmente genérico, já que foi adaptado às particularidades dos problemas interessados pela presente dissertação. Uma discussão profunda e generalista sobre a aplicação do MEC a problemas elastodinâmicos pode ser consultada em diversas obras de referência, como por exemplo em Dominguez [252].

### **5.6.2.2 Equações integrais de contorno**

A base fundamental para a definição de todas e quaisquer equações integrais de contorno num problema elastodinâmico é o teorema da reciprocidade dinâmica [9, 23, 114, 253]. Este teorema especifica uma relação entre deslocamentos e tensões em dois estados elastodinâmicos, sendo por isso não mais do que uma extensão do teorema de Betti.

Considere-se então um sólido elástico com volume  $\Omega$ , o qual é delimitado pela fronteira  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , tal como se ilustra na Figura 5.27. De acordo com a Figura 5.27, admita-se ainda a existência de dois estados elastodinâmicos caracterizados pelas forças volúmicas  $p_{b1}$  e  $p_{b2}$  e pelas tensões aplicadas na fronteira  $p_1$  e  $p_2$ , dando origem aos campos de deslocamento  $u_1$  e  $u_2$ .

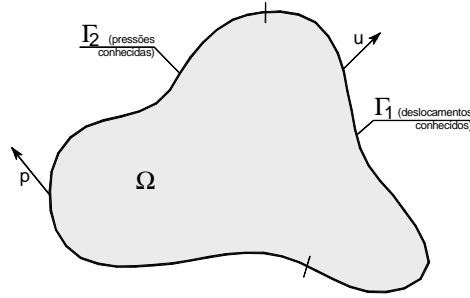


Figura 5.27 – Sólido genérico de volume  $\Omega$  delimitado pela fronteira  $\Gamma$ .

No domínio da frequência e aplicando a notação tensorial, a aplicação do teorema da reciprocidade dinâmica aos dois estados elastodinâmicos especificados resulta em [135]:

$$\int_{\Gamma} p_{1j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \omega) u_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \omega) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_{1j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \omega) u_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \omega) d\Omega = \int_{\Gamma} p_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \omega) u_{1j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \omega) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \omega) u_{1j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z, \omega) d\Omega \quad [5.76]$$

A dedução completa do teorema nos domínios do tempo e da frequência pode ser consultada em Andersen [9] e Dominguez [252], entre outros.

As equações integrais de fronteiras são então definidas a partir da equação [5.76], sendo que o objectivo consiste em estabelecer uma relação entre dois estados elastodinâmicos, dos quais um é previamente conhecido e correspondente a uma solução fundamental. O estado elastodinâmico conhecido é definido pela solução fundamental correspondente à aplicação de um impulso concentrado  $\rho b_j(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ij}$  no ponto  $\mathbf{y}$  do domínio  $\Omega$ . Seguindo este princípio, os estados elastodinâmicos são então definidos no domínio da frequência da seguinte forma:

Estado 1 (desconhecido):  $u_{1j}(\mathbf{x}, \omega) = u_{1j}(\mathbf{x}, \omega)$ ;  $p_{1j}(\mathbf{x}, \omega) = p_{1j}(\mathbf{x}, \omega)$  e  $\rho b_{1j}(\mathbf{x}, \omega) = \rho b_{1j}(\mathbf{x}, \omega)$

Estado 2 (conhecido):  $u_{2j}(\mathbf{x}, \omega) = u_{2ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ ;  $p_{2j}(\mathbf{x}, \omega) = p_{2ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  e  $\rho b_{2ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ji}$

Como é evidente, os deslocamentos e as tensões do estado elastodinâmico conhecido são definidos pelas funções de Green de deslocamento e de tensão (variáveis com índice sobrescrito G) no ponto  $\mathbf{x}$  quando é aplicado um impulso no ponto  $\mathbf{y}$ .

Prosseguindo com a notação tensorial e aplicando o teorema da reciprocidade (equação [5.76]) aos estados elastodinâmicos agora definidos, facilmente se chega à seguinte equação:

$$\int_{\Gamma} p_{1j}(\mathbf{x}, \omega) u_{2ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_{1j}(\mathbf{x}, \omega) u_{2ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\Omega = \int_{\Gamma} p_{2ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_{1j}(\mathbf{x}, \omega) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_{2ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_{1j}(\mathbf{x}, \omega) d\Omega \quad [5.77]$$



Segundo Andersen [9] a dedução das equações integrais fica facilitada caso se proceda a alguma manipulação matemática da equação [5.77]. Tomando o primeiro termo integral como exemplo, é possível estabelecer o seguinte conjunto de relações:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_{1j}(\mathbf{x}, \omega) u_{2ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\Gamma &= \int_{\Gamma} p_{1j}(\mathbf{y}, \omega) u_{2ji}^G(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega) d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma} p_{1i}(\mathbf{y}, \omega) u_{2ij}^G(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \omega) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{2ij}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_{1i}(\mathbf{y}, \omega) \end{aligned} \quad [5.78]$$

O rearranjo matemático apresentado em [5.78] é feito aplicados os seguintes passos: i) a designação das variáveis espaciais é alternada; ii) os índices  $i$  e  $j$  são alternados de modo a que o índice  $j$  passe a ser o índice livre; iii) as propriedades de reciprocidade espacial das funções de Green são usadas.

Aplicando agora a mesma manipulação matemática aos remanescentes termos integrais da equação [5.77] e atendendo à presença de uma função de Dirac na definição das forças volúmicas do estado elastodinâmico conhecido, a equação [5.77] pode então ser manipulada de modo a dar origem à seguinte identidade integral, também designada por identidade de Somigliana:

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{x}, \omega) &= \int_{\Gamma} u_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_i(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_i(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} u_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \rho b_i(\mathbf{y}, \omega) d\Omega \end{aligned} \quad [5.79]$$

Admitindo que as forças volúmicas do estado elastodinâmico 1 são nulas, a anterior equação dá origem à seguinte forma simplificada:

$$u_j(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Gamma} u_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_i(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_i(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma \quad [5.80]$$

a qual permite determinar o campo de deslocamentos ( $u_j$ ) num ponto genérico  $x$  através das funções de Green de tensão ( $p_{ji}^G$ ) e deslocamento ( $u_{ji}^G$ ) e das tensões ( $p_i$ ) e deslocamentos ( $u_i$ ) identificados ao longo do contorno  $\Gamma$ .

De modo a tornar a aplicação do método mais perceptível face aos problemas em discussão na presente dissertação, considere-se a geometria representada na Figura 5.28. A fronteira do problema é agora definida por  $\Gamma = \Sigma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_R$ , sendo apenas aplicadas pressões na fronteira  $\Sigma$ .

Aplicando a equação [5.80] às condições definidas na Figura 5.28, o campo de deslocamentos num ponto arbitrário com coordenadas  $\mathbf{x}$  induzido pela aplicação de pressões na superfície  $\Sigma$  é então determinado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 u_j(\mathbf{x}, \omega) = & \int_{\Sigma} u_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_i^{\Sigma}(\mathbf{y}, \omega) d\Sigma - \int_{\Sigma} p_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_i^{\Sigma}(\mathbf{y}, \omega) d\Sigma + \\
 & + \int_{\Gamma_1} u_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_i^{\Gamma_1}(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma_1 - \int_{\Sigma} p_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_i^{\Gamma_1}(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma_1 + \\
 & + \int_{\Gamma_R} u_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_i^{\Gamma_1}(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma_R - \int_{\Sigma} p_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_i^{\Gamma_R}(\mathbf{y}, \omega) d\Gamma_R
 \end{aligned} \tag{5.81}$$

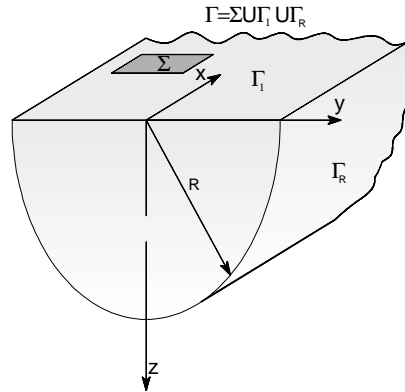


Figura 5.28 – Maciço semi-indefinido submetida a acção de uma pressão aplicada numa área inscrita na sua superfície livre.

A formulação anterior pode ser simplificada atendendo a que as pressões aplicadas na superfície do maciço, com excepção da fronteira  $\Sigma$ , são nulas bem como ao facto de a integração ao longo da fronteira  $\Gamma_R$  tender para valores nulos quando  $R$  tende para infinito, pois caso contrário a condição de Sommerfeld não seria respeitada. Tendo em linha de conta estes dois aspectos, a formulação integral representada na equação [5.81] reduz-se na seguinte forma simplificada:

$$u_j(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Sigma} u_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_i^{\Sigma}(\mathbf{y}, \omega) d\Sigma - \int_{\Sigma} p_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) u_i^{\Sigma}(\mathbf{y}, \omega) d\Sigma \tag{5.82}$$

Esta equação integral de fronteira é aplicável tanto a situações em que a superfície onde é exercida a acção esteja embebida no maciço como nos casos em que aquela se localize à superfície do mesmo. Contudo, os modelos desenvolvidos no contexto da presente dissertação apenas contemplam a possibilidade de as pressões se localizarem à superfície do maciço, razão pela qual as funções de Green de tensão ( $p_{ji}^G$ ) tomam valores nulos, permitindo a redução da equação [5.82] à seguinte forma simplificada:

$$u_j(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Sigma} u_{ji}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) p_i(\mathbf{y}, \omega) d\Sigma \tag{5.83}$$

A análise da equação [5.83] reporta de imediato ao seu significado físico, ou seja, permite determinar o vector de deslocamentos num ponto qualquer do domínio sob análise face à aplicação de acções distribuídas na área  $\Sigma$  através do conhecimento do tensor de Green de deslocamentos. As incógnitas do problema podem ser então determinadas aplicando o procedimento do método dos elementos de contorno, no qual se procede à discretização das

variáveis de campo ao longo da fronteira  $\Sigma$  [78, 236, 254, 255]. Como se verá de seguida, no presente modelo foi desenvolvido um esquema de cálculo dos termos matriciais do método através de um procedimento semi-analítico. Contudo, apesar das diferenças ao nível do formalismo matemático, o esquema computacional adoptado redonda numa formulação idêntica à habitualmente utilizada no contexto do MEC 2.5D, evitando contudo o cálculo de integrais singulares. A demonstração desta particularidade pode ser consultada em [135, 256].

### 5.6.2.3 Construção da matriz de flexibilidade 2.5D

#### *Equações integrais de fronteira no domínio 2.5D*

Na secção anterior são desenvolvidas as equações integrais de fronteira no contexto tridimensional. Porém, o acoplamento MEF-MEC é efectuado no domínio 2.5D, isto é, considerando a direcção de desenvolvimento da via no domínio transformado. Após a descrição da metodologia adoptada, a formulação é então estendida ao método dos elementos de contorno.

Para a aplicação das equações integrais no método transformado, considere-se a representação esquemática ilustrada na Figura 5.29, onde uma faixa de largura  $\Delta y$  e desenvolvimento infinito segundo  $x$ , localizada à superfície do maciço, é solicitada por uma pressão  $p_i(x, y, z=0, \omega)$  ( $i=x, y, z$ ), a qual toma valor constante na direcção transversal (direcção  $y$ ) e variável na direcção longitudinal (direcção  $x$ ). Considere-se ainda que se pretende conhecer o vector de deslocamentos dinâmicos estacionários num ponto genérico  $\mathbf{x}(x_1, y_1, z_1)$ .

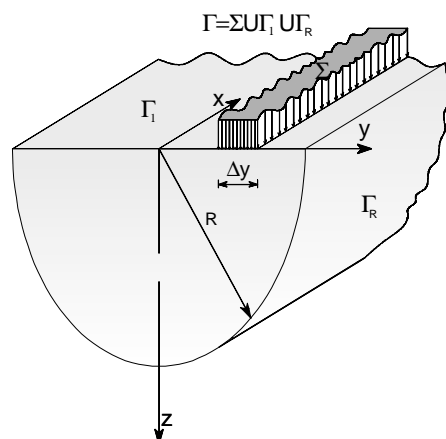


Figura 5.29 – Maciço semi-indefinido submetido a uma carga distribuída ao longo de uma faixa da sua superfície.

Aplicando a identidade de Somigliana (equação [5.83]) ao problema, o campo de deslocamentos no ponto genérico  $\mathbf{x}$  é então dado por:

$$u_j(x_1, y_1, z_1, \omega) = \int_{\Sigma} u_{ji}^G(x_1, y_1, z_1, x, y, z=0, \omega) p_i(x, y, z=0, \omega) d\Sigma \quad [5.84]$$

Uma vez que as funções de Green são independentes do referencial  $xoy$ , ou de outro modo, o parâmetro influente é a distância entre a fonte e o receptor e não o valor absoluto das coordenadas, a equação [5.84] pode então ser reescrita da seguinte forma:

$$u_j(x_1, y_1, z_1, \omega) = \int_{\Sigma} u_{ji}^G(x_1 - x, y_1 - y, z_1, \omega) p_i(x, y, z=0, \omega) d\Sigma \quad [5.85]$$

Por sua vez, o integral de superfície presente na equação anterior pode ser decomposto através da integração na direcção  $x$  e  $y$ , dando origem a:

$$u_j(x_1, y_1, z_1, \omega) = \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2} - \infty}^{y_n + \frac{\Delta y}{2} + \infty} \int u_{ji}^G(x_1 - x, y_1 - y, z_1, \omega) p_i(x, y, z=0, \omega) dx dy \quad [5.86]$$

em que  $y_n$  define o eixo médio da área solicitada  $\Sigma$ .

Procedendo agora à transformação da coordenada  $x_1$  para o domínio do número de onda (através da aplicação de uma transformada de Fourier) a equação [5.86] resulta em:

$$\tilde{u}_j(k_1, y_1, z_1, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2} - \infty}^{y_n + \frac{\Delta y}{2} + \infty} \int u_{ji}^G(x_1 - x, y_1 - y, z_1, \omega) p_i(x, y, 0, \omega) e^{-ik_1 x_1} dx dy dx_1 \quad [5.87]$$

Tirando partido da propriedade de translação da transformada de Fourier, a última equação pode ser desenvolvida, levando a:

$$\tilde{u}_j(k_1, y_1, z_1, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2} - \infty}^{y_n + \frac{\Delta y}{2} + \infty} \tilde{u}_{ji}^G(k_1, y_1 - y, z_1, \omega) p_i(x, y, 0, \omega) e^{-ik_1 x} dx dy \quad [5.88]$$

que não é mais do que,

$$\tilde{u}_j(k_1, y_1, z_1, \omega) = \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2} - \infty}^{y_n + \frac{\Delta y}{2} + \infty} \tilde{u}_{ji}^G(k_1, y_1 - y, z_1, \omega) \tilde{p}_i(k_1, y, 0, \omega) dy \quad [5.89]$$

A equação [5.89] traduz a identidade de Somigliana no domínio 2.5D. Contudo, remetendo para o Capítulo 3, as funções de Green são avaliadas no espaço transformado em que apenas a coordenada  $z$  permanece no domínio não transformado. Como tal, é de todo o interesse que as

operações intermédias sejam efectuadas no domínio transformado em que  $x \rightarrow k_1$  e  $y \rightarrow k_2$ . Para além de facilitar a realização de operações matemáticas intermédias, a resolução da equação [5.89] considerando a transformação da coordenada  $y$  evita a integração no domínio do espaço aí presente, a qual exige a adopção de esquemas de integração complexos dado o carácter singular das funções de Green quando o receptor e a fonte têm posição geométrica coincidente [112, 135].

Face ao exposto, a transformação da variável  $y_1$  para o domínio do número de onda ( $k_2$ ) permite que a identidade de Somigliana seja escrita da seguinte forma:

$$\tilde{u}_j(k_1, k_2, z_1, \omega) = \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2}}^{y_n + \frac{\Delta y}{2}} \tilde{u}_{ji}^G(k_1, k_2, z_1, \omega) \tilde{p}_i(k_1, y, 0, \omega) e^{-ik_2 y} dy \quad [5.90]$$

ou,

$$\tilde{u}_j(k_1, k_2, z_1, \omega) = \tilde{u}_{ji}^G(k_1, k_2, z_1, \omega) \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2}}^{y_n + \frac{\Delta y}{2}} \tilde{p}_i(k_1, y, 0, \omega) e^{-ik_2 y} dy \quad [5.91]$$

Atendendo ao facto de as pressões aplicadas na superfície do maciço serem nulas em todo o domínio com excepção da faixa definida pelo intervalo  $[y_n - \Delta y/2, y_n + \Delta y/2]$ , o integral presente na equação [5.91] não é mais do que a operação de transformação de Fourier da função  $p_i$  para o domínio do número de onda  $k_2$ . Por outro lado, não pode ser negligenciado que um dos pressupostos consiste na constância do valor das tensões aplicadas na área  $\Sigma$  segundo a direcção  $y$  (ver Figura 5.29). Tendo em consideração estes dois aspectos, a equação [5.91] é manipulada matematicamente de modo a permitir a sua integração analítica:

$$\tilde{u}_j(k_1, k_2, z_1, \omega) = \tilde{u}_{ji}^G(k_1, k_2, z_1, \omega) \tilde{p}_i(k_1, \omega) \int_{y_n - \frac{\Delta y}{2}}^{y_n + \frac{\Delta y}{2}} e^{-ik_2 y} dy \quad [5.92]$$

$$\tilde{u}_j(k_1, k_2, z_1, \omega) = \tilde{u}_{ji}^G(k_1, k_2, z_1, \omega) \frac{\tilde{p}_i(k_1, \omega)}{ik_2} e^{-ik_2 y_n} \left( e^{ik_2 \frac{\Delta y}{2}} - e^{-ik_2 \frac{\Delta y}{2}} \right) \quad [5.93]$$

Tirando vantagem do cálculo em notação complexa, esta equação pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\tilde{u}_j(k_1, k_2, z_1, \omega) = 2 \tilde{u}_{ji}^G(k_1, k_2, z_1, \omega) \tilde{p}_i(k_1, \omega) e^{-ik_2 y_n} \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y}{2}\right)}{k_2} \quad [5.94]$$

Através desta formulação é então possível determinar o campo de deslocamentos no domínio transformado. A passagem para o domínio 2.5D resulta então da transformada inversa da expressão [5.94] em ordem à imagem de Fourier  $k_2$ , ou seja:

$$\tilde{u}_j(k_1, y_1, z_1, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \tilde{u}_{ji}^G(k_1, k_2, z_1, \omega) \tilde{p}_i(k_1, \omega) \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y}{2}\right)}{k_2} e^{ik_2(y_1 - y_n)} dk_2 \quad [5.95]$$

Como se pode verificar, as equações [5.95] e [5.88] conduzem exactamente ao mesmo resultado final. Sem embargo, a utilização da formulação expressa em [5.95] permite evitar o recurso a técnicas de integração especiais, necessárias face ao carácter singular do integrando da expressão [5.88] quando  $y=y_1$  [93, 135]. O integrando da equação [5.95] apresenta apenas uma aparente singularidade quando  $k_2$  tende para zero, a qual é facilmente resolvida atendendo ao seu limite definido:

$$\lim_{k_2 \rightarrow 0} \left\{ 2 \tilde{u}_{ji}^G(k_1, k_2, z_1, \omega) \tilde{p}_i(k_1, \omega) \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y}{2}\right)}{k_2} e^{ik_2(y_1 - y_n)} \right\} = \tilde{u}_{ji}^G(k_1, 0, z_1, \omega) \tilde{p}_i(k_1, \omega) \Delta y \quad [5.96]$$

### **Construção da matriz de flexibilidade 2.5D**

A matriz de flexibilidade 2.5D do maciço geotécnico é construída com base nos pressupostos indicados na secção anterior. Considere-se a representação esquemática ilustrada na Figura 5.30 onde a porção da superfície do maciço que é submetida à acção de pressões exteriores é discretizada em elementos de contorno  $\Delta y_i$  com dimensão transversal  $\Delta y_i$ . No interior de cada elemento é admitido um campo de tensões constante segundo a direcção de discretização, correspondendo assim a um ponto de colocação por elemento, o qual se encontra centrado transversalmente. Do ponto de vista matemático, as pressões aplicadas em cada elemento de contorno são descritas da seguinte forma:

$$\tilde{p}(k_1, y, 0, \omega) = \tilde{p}(k_1, \omega) H\left(\frac{\Delta y_i}{2} - |y - y_i|\right) \quad [5.97]$$

em que H representa a função de Heaviside.

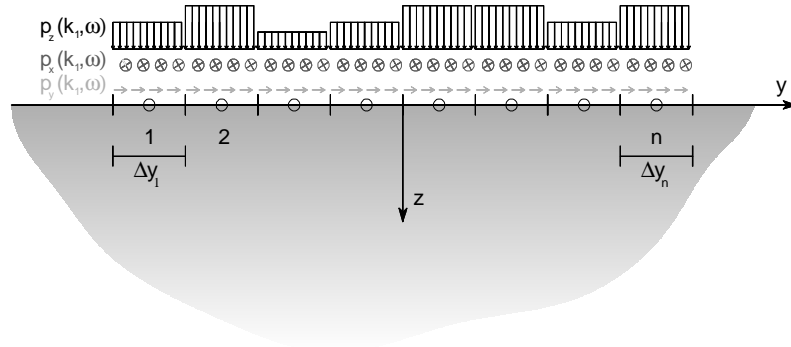


Figura 5.30 – Discretização da superfície de um maciço em elementos de contorno 2.5 D.

As incógnitas do problema correspondem aos deslocamentos experimentados pelos pontos de colocação face às acções externas aplicadas. Considerando um ponto de colocação genérico  $j$ , os deslocamentos correspondentes resultam da sobreposição dos efeitos induzidos pelas pressões aplicadas em cada um dos elementos de contorno, ou seja:

$$\tilde{u}_j(k_1, y_j, 0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} 2u_{ji}^G(k_1, k_2, z_1, \omega) \tilde{p}_i(k_1, \omega) \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y_i}{2}\right)}{k_2} e^{ik_2(y_j - y_i)} dk_2 \quad [5.98]$$

em que  $n$  é o número total de elementos de contorno.

Generalizando para atender a todos os graus de liberdade do problema, a relação entre tensões externas aplicadas aos elementos de contorno e deslocamentos nos pontos de colocação pode então ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\{\tilde{u}_n(k_1, y_j, 0, \omega)\} = [G(k_1, y_j - y_i, z_1, \omega)] \{\tilde{p}(k_1, \omega)\} \quad [5.99]$$

em que o vector  $u_n$  colige os deslocamentos dos pontos de colocação,  $p$  é o vector das solicitações aplicadas nos elementos de contorno, e  $G$  é a matriz de flexibilidade, cujos termos são dados por:

$$G_{mn}(k_1, y_j - y_i, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2u_{ji}^G(k_1, k_2, z_1, \omega) \frac{\sin\left(k_2 \frac{\Delta y_n}{2}\right)}{k_2} e^{ik_2(y_m - y_n)} dk_2 \quad [5.100]$$

Uma vez que  $u_{ji}^G$  é um tensor com dimensão  $3 \times 3$ , a matriz  $G$  tem dimensão  $3n \times 3n$ , em que  $n$  representa o número de elementos de contorno.

Para o cálculo da matriz de flexibilidade,  $G$ , é vantajoso tirar partido das relações de reciprocidade dinâmica das funções de Green, permitindo assim uma redução substancial do esforço computacional, tanto mais justificado pelo facto da matriz  $G$  ser uma matriz cheia.

### **5.6.3 Acoplamento através de formulação de elementos finitos**

#### **5.6.3.1 Generalidades**

Nesta secção é descrita a estratégia de acoplamento entre o meio delimitado, descrito pelo MEF 2.5D, e o meio semi-indefinido (maciço geotécnico), o qual é simulado por recurso ao MEC 2.5D. O objectivo final consiste no estabelecimento de um sistema de equações que permita obter a resposta dinâmica em qualquer ponto do domínio de análise, independentemente da forma como este é simulado.

Em qualquer processo de acoplamento entre modelos numéricos distintos, existem duas premissas fundamentais que têm de obrigatoriamente ser respeitadas ao longo da interface geométrica que delimita o domínio de ambos os métodos: i) continuidade de deslocamentos; ii) equilíbrio de forças. No que toca ao acoplamento entre MEF e MEC, a principal dificuldade reside no facto de o MEF e o MEC partirem de princípios basilares distintos. Enquanto no MEC as forças aplicadas na interface são prescritas em termos de pressões distribuídas, no MEF a aplicação das mesmas tem de ser efectuada com base no conceito de forças nodais [41, 114, 237, 252]. Esta diferença formal entre os dois métodos dá origem a três tipos de estratégia distintos para o acoplamento MEF-MEC:

- i) Acoplamento sob a forma de elementos finitos;
- ii) Acoplamento sob a forma de elementos de contorno;
- iii) Acoplamento iterativo.

No primeiro método o acoplamento é efectuado seguindo o formalismo do método dos elementos finitos, ou seja, o meio simulado pelos elementos de fronteira é introduzido matematicamente no sistema de equações do MEF como se de um “macro elemento finito” se tratasse, resultante da transformação da matriz de flexibilidade que rege o MEC em matriz de rigidez. Alternativamente, o segundo método resulta da transformação da matriz de rigidez dinâmica do MEF numa formulação em termos de tensões ao invés da formulação em termos de forças nodais. Por último, no terceiro método, as formulações de base de ambos os métodos mantêm-se inalteradas, seguindo-se um processo iterativo de modo a que as condições de equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos ao longo da interface delimitante dos dois domínios sejam alcançadas.

A formulação adoptada no presente trabalho segue a filosofia de acoplamento sob a forma de elementos finitos. Como tal, a superfície do maciço geotécnico em contacto com o domínio simulado pelo MEF é discretizada em elementos de contorno constantes, isto é, com um ponto de



colocação e com igual dimensão ao lado confrontante dos elementos finitos. Este pressuposto obriga a que a distribuição de tensões no interior de cada elemento, formulado de acordo com os pressupostos do domínio 2.5D, seja constante. O formalismo teórico seguido para a resolução do problema de acoplamento 2.5D é semelhante ao seguido por outros autores na resolução de problemas de acoplamento MEF-MEC em contexto tridimensional [90, 240, 257].

O tipo de elementos de contorno adoptados merece um comentário mais alargado, principalmente no que se refere à compatibilidade de deslocamentos entre os nós dos elementos finitos e os pontos de colocação dos elementos de fronteira, bem como à evolução das tensões no interior dos dois tipos de elementos. Tal como já mencionado, elementos de contorno com um ponto de colocação conduzem a estados de tensão uniformes no interior do elemento. Por outro lado, para que o estado de tensão ao longo do lado de um elemento finito seja constante é necessário que o elemento finito tenha dois nós ao longo do referido lado, conduzindo assim a funções de forma lineares. Logo, existe uma certa incoerência entre os dois métodos: se, por um lado, ao longo da interface MEF-MEC o número de nós e de pontos de colocação for coincidente, pode ocorrer incompatibilidade do campo de tensões; por outro lado, caso o campo de tensões seja compatível então o número de nós é distinto e a continuidade de deslocamentos não é totalmente assegurada, tendendo para a convergência à medida que a dimensão dos elementos diminui.

Embora se reconheça que existem formulações mais elaboradas, como por exemplo a muito recente proposta de François et al. [112], no presente trabalho recorre-se a elementos de contorno constantes, com apenas um nó de colocação. Por sua vez, os elementos finitos vizinhos ao domínio discretizado pelo MEC têm 7 nós, sendo que o lado definidor da interface MEF-MEC tem apenas dois nós, como se ilustra na Figura 5.31. Note-se que uma vez que não existe coincidência entre nós dos elementos finitos e os pontos de colocação dos elementos de contorno, a continuidade de deslocamentos ao nível dos nós não é totalmente garantida, isto é, pode existir algum erro de aproximação, tendendo para a solução exacta à medida que a dimensão dos elementos diminui. Contudo, esta aproximação parece perfeitamente aceitável no contexto da aplicação de métodos numéricos discretizados, tendo sido já adoptada por diversos autores [240, 257], embora não haja conhecimento da sua aplicação no contexto 2.5D.

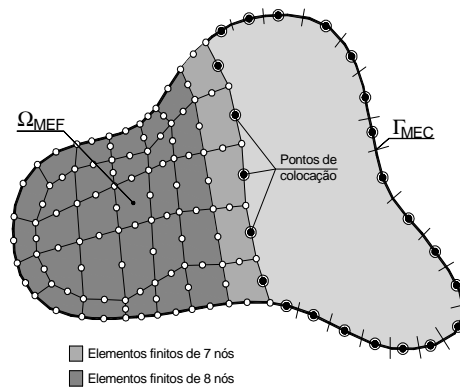


Figura 5.31 – Conexão MEF-MEC.

### 5.6.3.2 Matriz de rigidez do meio semi-indefinido

Considere-se a representação esquemática anteriormente ilustrada na Figura 5.26. A parcela irregular da estrutura, constituída por todo o domínio acima da superfície livre do maciço geotécnico, é discretizada através de elementos finitos 2.5D, ao passo que o meio subjacente à interface de acoplamento é simulado por recurso ao MEC 2.5D. Assuma-se ainda que a discretização do MEC é condicionada pela dimensão do lado dos elementos finitos que definem a interface entre os dois métodos e que cada elemento MEC tem um ponto de colocação, ao passo que os lados dos elementos finitos confrontantes são definidos através de dois nós.

Começando pela resposta do maciço geotécnico, como visto na secção anterior, os deslocamentos nos pontos de interacção, aqui designados por  $\{w\}$ , são relacionáveis com as tensões aplicadas à superfície do maciço, definidas por  $\{p\}$ , através da matriz de flexibilidade,  $[G]$ . Esta relação é então descrita matematicamente do seguinte modo:

$$\{\tilde{w}(k_1, y, z=0, \omega)\} = [G(k_1, y, \omega)]\{\tilde{p}(k_1, \omega)\} \quad [5.101]$$

Por sua vez, os deslocamentos dos pontos do domínio descrito pelo MEF e com posição geométrica igual à dos pontos de colocação (aqui definidos pelo vector  $\{u\}$ ) podem ser avaliados através da interpolação a partir dos deslocamentos nodais ( $\{u_n\}$ ), ou seja:

$$\{\tilde{u}(k_1, y, 0, \omega)\} = [T]\{\tilde{u}_n(k_1, \omega)\} \quad [5.102]$$

Sendo a matriz  $[T]$  definida através das funções de forma dos elementos de 7 nós (ver Figura 5.4). A matriz em causa toma a seguinte configuração:

$$[T] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_1 & N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & N_1 & N_2 \end{bmatrix} \quad [5.103]$$

Atendendo ao requisito de continuidade de deslocamentos, o vector de deslocamentos  $\{u\}$  tem de ser obrigatoriamente igual ao vector de deslocamentos  $\{w\}$ , logo, substituindo a equação [5.102] na equação [5.101], chega-se a:

$$[G(k_1, \gamma, \omega)]\{\tilde{p}(k_1, \omega)\} = [T]\{\tilde{u}_n(k_1, \omega)\} \quad [5.104]$$

Regressando agora aos conceitos base do MEF, as forças nodais equivalentes,  $\{f_n\}$ , resultam da integração das pressões aplicadas ao longo do lado dos elementos finitos (no contexto 2.5D), ou seja:

$$\{\tilde{f}_n(k_1, \omega)\} = \int_{le} [N]^T \{\tilde{p}(k_1, \omega)\} dl \quad [5.105]$$

Dado que, de acordo com a formulação proposta, as pressões  $\{p\}$  tomam valor constante no interior de cada elemento de contorno, então, conseqüentemente, a relação [5.105] simplifica-se da seguinte forma:

$$\{\tilde{f}_n(k_1, \omega)\} = \int_{le} [N]^T dl \{\tilde{p}(k_1, \omega)\} = [T_q]\{p(k_1, \omega)\} \quad [5.106]$$

A matriz  $[T_q]$  resulta da integração das funções de forma do lado que define a interface dos elementos finitos confrontantes com os elementos de contorno.

Substituindo a equação [5.106] na equação [5.104], estabelece-se uma relação entre forças e deslocamentos nodais no domínio 2.5D, ou seja:

$$[T_q][G(k_1, \gamma, \omega)]^{-1}[T]\{\tilde{u}_n\} = \{\tilde{f}_n\} \quad [5.107]$$

Por outro prisma, a matriz de rigidez dinâmica de um “macro elemento finito” 2.5D representativo do meio descrito pelo MEC é então dada por:

$$[K_{dyn}] = [T_q][G(k_1, \gamma, \omega)]^{-1}[T] \quad [5.108]$$

Estando agora o meio descrito pelo MEC transformado numa formulação compatível com o MEF, a matriz  $[K_{dyn}]$  é então espalhada e adicionada às restantes matrizes que definem a resposta dinâmica do sistema discretizado por elementos finitos. Adicionando este novo termo à equação [5.33], o sistema de equações global passa a ser dado por:

$$\left( [K_1]^{glob.} + ik_1 [K_2]^{glob.} + k_1^2 [K_3]^{glob.} + k_1^4 [K_4]^{glob.} - \omega^2 [M]^{glob.} + [K_5]^{glob.} \right) \{\tilde{u}_n\} = \{\tilde{p}_n\} \quad [5.109]$$

em que  $[K_5]^{glob.}$  corresponde à matriz resultante do espalhamento dos termos da matriz definida em [5.108].

Infelizmente, os termos da matriz  $[K_5]^{glob.}$  são dependentes do número de onda  $k_1$  e da frequência  $\omega$ , limitando um pouco a eficiência computacional do método.

Após a introdução das condições de fronteira de Neumann, o sistema de equações global indicado em [5.109] está pronto a ser resolvido, conduzindo à determinação dos deslocamentos nodais do meio descrito pelo MEF (no domínio transformado). Na secção seguinte é apresentado um procedimento para a obtenção da resposta dinâmica em qualquer ponto do meio descrito pelo MEC, independentemente de o ponto em análise pertencer ou não à interface MEF-MEC.

### 5.6.3.3 Resposta do meio semi-indefinido

O procedimento de acoplamento MEF-MEC adoptado no presente estudo implica a transformação do meio simulado pelo MEC numa formulação compatível com o MEF. Como tal, os resultados directos da resolução do sistema de equações que rege a resposta dinâmica do sistema são apenas os deslocamentos nodais do meio discretizado por elementos finitos. Recorde-se que o meio simulado pelo MEF corresponde ao aterro e estrutura ferroviária, ao passo que o maciço geotécnico é incluído através do MEC. Contudo, em várias situações, para além da indiscutível importância da avaliação da resposta da via férrea, é de igual modo importante o conhecimento da resposta dinâmica do maciço geotécnico, principalmente em casos envolvendo o estudo do impacto das vibrações originadas pelo tráfego.

Para o cálculo da resposta do maciço geotécnico, isto é, do meio simulado pelo MEC, é aconselhável tirar partido das técnicas de sub-estruturação. De acordo com o apresentado na secção anterior, a resolução do sistema de equações que rege a resposta do meio simulado pelo MEF permite determinar os deslocamentos nodais ao longo da interface MEF-MEC. Dando cumprimento ao requisito de continuidade do campo de deslocamentos, os deslocamentos dos pontos de colocação da malha de elementos de contorno ( $\{w\}$ ) são exactamente iguais (do ponto de vista numérico) aos deslocamentos experimentados pelos pontos descritos pelo MEF e com igual posição geométrica  $\{u\}$ , ou seja, no domínio semi-transformado:

$$\{\tilde{w}\} = [T] \{\tilde{u}_n\} \quad [5.110]$$

Por sua vez, a manipulação matemática da equação [5.104] permite o conhecimento das pressões aplicadas aos elementos de contorno com base nos deslocamentos nodais identificados ao longo da interface definida pela malha de elementos finitos, ou seja:

$$\{\tilde{p}\} = [G(k_1, y, \omega)]^{-1} [T] \{\tilde{u}_n\} \quad [5.111]$$

Existindo compatibilidade de deslocamentos ao longo da interface MEF-MEC e conhecidas as tensões aí aplicadas, os dois modelos estruturais, ou seja, o meio discretizado pelo MEF e o meio simulado pelo MEC, podem então ser desacoplados e tratados independentemente, tal como se ilustra na Figura 5.32.

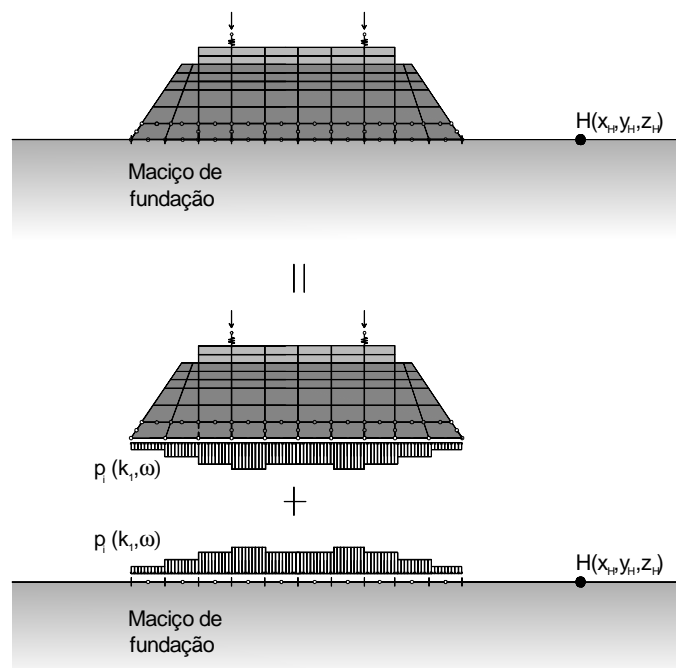


Figura 5.32 – Desacoplamento dos meios estruturais simulados através do MEC e do MEC.

Após o processo de desacoplamento dos meios, a resposta de qualquer ponto do domínio correspondente ao maciço geotécnico pode ser determinada atendendo apenas à formulação do MEC. Assim sendo, o campo de deslocamentos no domínio semi-transformado de qualquer ponto pertencente ao maciço geotécnico é dado pela aplicação da equação [5.98]. Como é evidente, outras grandezas, como tensões ou extensões, podem ser obtidas através de um procedimento similar, bastando para isso considerar na equação [5.98] o tensor das funções de Green correspondente à grandeza em estudo.

O resultado obtido pela aplicação da equação [5.98] refere-se ao domínio semi-transformado, como tal a obtenção de resultados no domínio espaço-tempo implica a aplicação de operações de transformação de Fourier inversas relativas às variáveis  $k_1$  e/ou  $\omega$ .

### 5.6.4 Análise de estruturas com simetria geométrica e mecânica

Existem vários problemas relativos à propagação de vibrações originadas por tráfego em que o domínio sob análise apresenta pelo menos um plano de simetria geométrica e mecânica. Um caso emblemático desta situação são as vias férreas, as quais são, regra geral, encaradas como estruturas simétricas (ver Figura 5.33). Em problemas elásticos lineares, sempre que as condições de simetria geométrica e mecânica se verificarem, é então possível considerar o domínio completo através da simulação de apenas uma das suas duas partes. Seguindo este procedimento clássico, a resposta em qualquer ponto do meio resulta da sobreposição de efeitos oriundos da resolução dos dois problemas seguintes:

- i) Problema com solicitação simétrica em relação ao plano de simetria geométrica e mecânica;
- ii) Problema com solicitação anti-simétrica face ao plano de simetria geométrica e mecânica.

Em situações como a ilustrada na Figura 5.33a, as condições de simetria aplicam-se tanto à geometria como à solicitação. Contudo, em várias outras situações, como por exemplo a ilustrada na Figura 5.33b, a simetria é apenas geométrica, exigindo assim a decomposição da solicitação numa componente simétrica e em outra antissimétrica e a resolução de dois problemas mecânicos. Porém, dado que tirando vantagem das condições de simetria o número de graus de liberdade é reduzido a metade, em termos computacionais é geralmente vantajoso seguir esse procedimento, muito embora seja necessária a resolução de dois problemas.

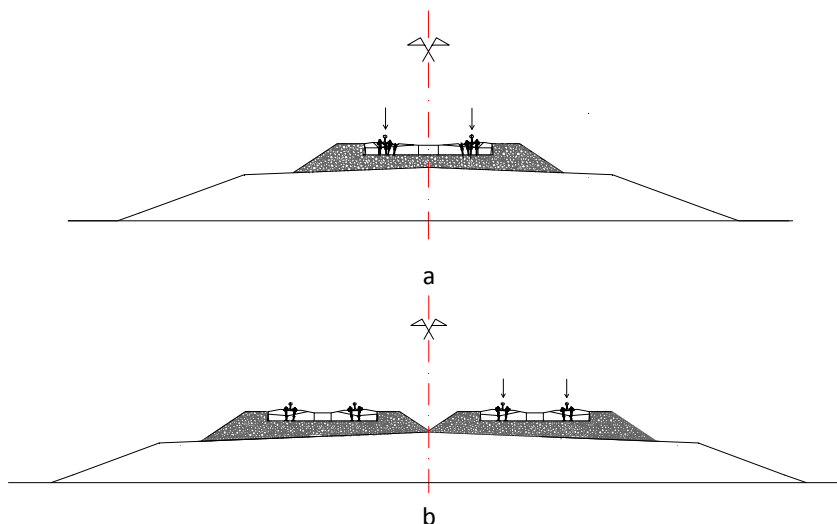


Figura 5.33 – Seções transversais típicas de linhas férreas: a) via simples com simetria geométrica, mecânica e de solicitação; b) via dupla com simetria geométrica e mecânica e solicitação assimétrica.

A consideração de condições de simetria (ou antissimetria) numa modelação por elementos finitos é trivial, bastando para isso impor as condições de fronteira adequadas ao longo do plano

de simetria do problema. A mesma conclusão não é extensível ao domínio simulado pelo método dos elementos de contorno, principalmente nos casos em que esse domínio corresponda a um espaço com dimensão indefinida em profundidade. Nesse cenário, a introdução de uma fronteira ao longo do plano de simetria, para além de implicar sempre a truncatura da mesma, elimina a vantagem do método na redução do número de graus de liberdade do problema, podendo mesmo conduzir a um aumento muito significativo da dimensão das matrizes que regem o comportamento dinâmico do sistema. Uma percepção fácil desta problemática é conseguida através da análise da Figura 5.34.

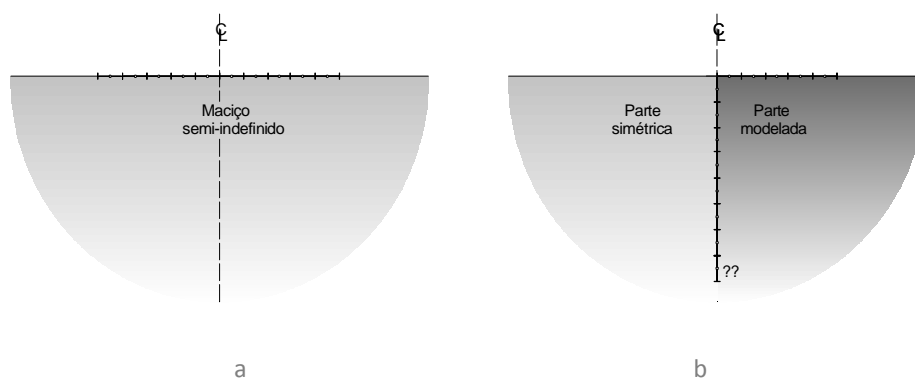


Figura 5.34 – Introdução de condições de simetria num modelo baseado no MEC: a) domínio original; b) modelo com simetria.

No modelo desenvolvido, as condições de simetria geométrica de um meio descrito pelo MEF-MEC são tidas em consideração da conjugação de dois procedimentos, devidamente concebidos para atender às particularidades de cada um dos métodos numéricos: i) introdução de uma fronteira artificial coincidente com o plano de simetria ao longo do domínio discretizado em elementos finitos; ii) adaptação da matriz de flexibilidade do MEC (matriz  $[G]$ ) de forma a atender a solicitações simétricas e antissimétricas.

Relativamente ao domínio descrito pelo MEF, a introdução das condições de simetria e/ou antissimetria resulta em procedimentos triviais, razão pela qual não se elaboram considerações especiais. Por seu lado, o procedimento a adoptar no domínio descrito pelo MEC pressupõe a adaptação das matrizes de flexibilidade, impondo a construção de novas matrizes para solicitações simétricas e antissimétricas.

Por uma questão de simplicidade de exposição, e também facilidade de implementação numérica, impõe-se que o plano de simetria geométrica do meio estrutural seja normal ao eixo das coordenadas transversais e intersectado por este na sua origem. Suponha-se ainda a existência de uma solicitação simétrica face ao referido plano, tal como ilustrado na Figura 5.35. Relativamente

à nomenclatura, as variáveis referentes ao lado simulado ( $y > 0$ ) identificam-se pelo sobrescrito (+), ao passo que as homólogas do lado simétrico estão associadas ao sobrescrito (-).

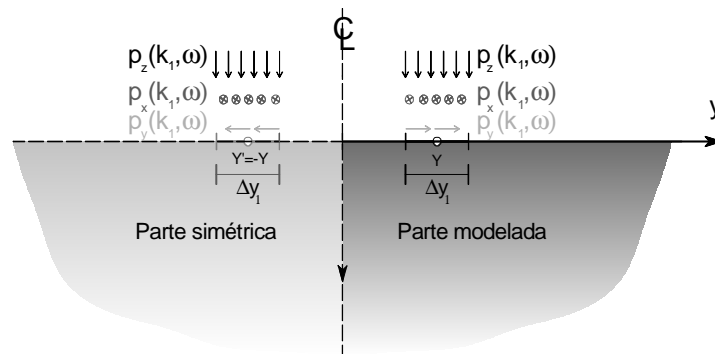


Figura 5.35 – Estrutura com condições geométricas e mecânicas simétricas submetida a solicitação simétrica.

Caso as condições de simetria mecânica não sejam atendidas, ou seja, construindo um modelo com discretização por elementos de contorno 2.5D em ambos os lados do plano de simetria, o equilíbrio do meio é regido pelo seguinte sistema de equações formuladas no domínio 2.5D:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{++} & G^{+-} \\ G^{-+} & G^{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}^+ \\ \tilde{p}^- \end{bmatrix} \quad [5.112]$$

Verificando-se condições de simetria de solicitação, e conseqüentemente de resposta, os deslocamentos e tensões de ambos os lados do plano de simetria apresentam a seguinte inter-relação:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(k_1, -\gamma, 0, \omega) &= \tilde{u}_x(k_1, \gamma, 0, \omega) \\ \tilde{u}_y(k_1, -\gamma, 0, \omega) &= -\tilde{u}_y(k_1, \gamma, 0, \omega) \\ \tilde{u}_z(k_1, -\gamma, 0, \omega) &= \tilde{u}_z(k_1, \gamma, 0, \omega) \\ \tilde{p}_x(k_1, -\gamma, 0, \omega) &= \tilde{p}_x(k_1, \gamma, 0, \omega) \\ \tilde{p}_y(k_1, -\gamma, 0, \omega) &= -\tilde{p}_y(k_1, \gamma, 0, \omega) \\ \tilde{p}_z(k_1, -\gamma, 0, \omega) &= \tilde{p}_z(k_1, \gamma, 0, \omega) \end{aligned} \quad [5.113]$$

Deste modo, reordenando as linhas e colunas das matrizes e vectores intervenientes no sistema de equações [5.112] de modo a que os graus de liberdade referentes à direcção x surjam como as primeiras equações e os graus de liberdade referentes à direcção z como as últimas, a relação [5.113] pode ser expressa em termos matriciais para o conjunto de graus de liberdade:

$$\begin{aligned} \{\tilde{u}^-\} &= [R_{sim}] \{\tilde{u}^+\} \\ \{\tilde{p}^-\} &= [R_{sim}] \{\tilde{p}^+\} \end{aligned} \quad [5.114]$$



A matriz  $R_{sim}$  é uma matriz diagonal dada por:

$$[R_{sim}] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad [5.115]$$

Em que  $I$  é a matriz de identidade com dimensão  $N/6 \times N/6$ , sendo  $N$  o número de graus de liberdade do modelo global, isto é, considerando ambos os lados do plano de simetria.

Atendendo à renumeração dos graus de liberdade proposta e à relação indicada em [5.114], o sistema de equações [5.112] pode ser reduzido a metade, considerando apenas a discretização de um dos lados do plano de simetria. Assim sendo, o equilíbrio estrutural atendendo à simetria de sollicitação é então definido por:

$$\{\tilde{u}^+\} = ([G^{++}] + [R_{sim}][G^{+-}])\{\tilde{p}^+\} \quad [5.116]$$

Como se pode verificar, as condições de simetria são introduzidas no problema através da manipulação da matriz de flexibilidade,  $[G]$ , a qual passa a ser composta pelos termos correspondentes ao meio discretizado adicionados do contributo proveniente do lado oposto ao plano de simetria. Como é evidente, o cálculo dos termos tanto da matriz  $[G^{++}]$  como da matriz  $[G^{+-}]$  segue o formalismo matemático indicado anteriormente (ver equação [5.101]). Para se proceder ao acoplamento MEF-MEC é aconselhável que, após a construção da matriz de flexibilidade do meio estrutural simétrico, as colunas e linhas da respectiva matriz sejam novamente renumeradas de modo a que os graus de liberdade de cada um dos pontos de colocação sejam agrupados.

Um procedimento idêntico ao apresentado pode também ser formulado para situações de simetria geométrica e mecânica mas com sollicitação antissimétrica. Neste caso, a única diferença reside na inter-relação entre os graus de liberdade dos pontos de colocação de ambos os lados do plano de simetria, a qual passa a ser estabelecida através da substituição da matriz  $[R_{sim}]$  na equação [5.114] pela seguinte matriz:

$$[R_{asim}] = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} = -[R_{sim}] \quad [5.117]$$

Introduzindo a relação agora proposta no sistema de equações global, facilmente se conclui que o equilíbrio do meio face a uma sollicitação antissimétrica é dado por:

$$\{\tilde{u}^+\} = \left( [G^{++}] - [R_{sim}] [G^{+-}] \right) \{\tilde{p}^+\} \quad [5.118]$$

Tirando partido da formulação agora proposta, a resolução de problemas com configuração idêntica à ilustrada na Figura 5.33b pode então ser efectuada através da sobreposição dos efeitos resultantes da decomposição da acção numa parte simétrica e numa parte antissimétrica. No modelo de cálculo implementado esta consideração é realizada internamente, no próprio programa de cálculo automático, traduzindo-se numa considerável redução do esforço de cálculo.

Refira-se, por último, que o esquema de interacção MEF-MEC aqui proposto, no qual nenhum ponto de colocação do meio discretizado por elementos de contorno tem posição geométrica coincidente com o plano de simetria, permite evitar o surgimento de matrizes de flexibilidade mal condicionadas, não sendo por isso necessário o recurso a esquemas computacionais complexos para permitir a sua inversão, como anteriormente proposto por Hisatake et al. [258].

## 5.7 Considerações finais e conclusões

O capítulo que agora culmina versa sobre a apresentação de um conjunto de modelos numéricos, relativamente avançados face às propostas anteriores, desenvolvidos com o intuito de simular o comportamento dinâmico global de sistemas ferroviários, incluindo a resposta dinâmica do maciço de fundação. Como denominador comum a toda a metodologia apresentada refere-se o conceito 2.5D, o qual permite uma redução drástica do esforço computacional sem que a tridimensionalidade do problema seja posta em causa.

O objectivo principal do capítulo, ou seja, o desenvolvimento de metodologias e modelos mais versáteis do que as formulações semi-analíticas apresentadas em capítulos anteriores, é alcançado através do desenvolvimento de um modelo baseado no MEF 2.5D. Dadas as particularidades intrínsecas ao MEF é dedicada especial atenção aos procedimentos adicionais que visam permitir a sua aplicação em meios não circunscritos. Com esse intuito apresentam-se três metodologias locais de tratamento das fronteiras oriundas da truncatura do domínio, sendo a acuidade das mesmas devidamente avaliada através de um estudo numérico, donde se conclui que o tratamento das fronteiras artificiais por recurso a elementos infinitos 2.5D é uma técnica muito promissora, permitindo atingir níveis de acuidade muito superiores aos verificados por recurso a fronteiras absorventes.

Muito embora o MEF 2.5D seja uma técnica muito eficiente, versátil e compacta, a qual permite analisar a resposta tridimensional do sistema via-macizo com um esforço computacional muito reduzido face ao requerido por uma modelação 3D, as exigências de discretização da malha de elementos finitos associadas à simulação de domínios de grande dimensão transversal podem, em muitos casos, condicionar a aplicabilidade do método, pelo menos face a recursos computacionais usuais. De modo a contornar essa limitação apresenta-se, por último, um modelo numérico híbrido no qual a via férrea é simulada através do MEF 2.5D ao passo que a resposta do macizo de fundação é avaliada por recurso ao MEC 2.5D. Este modelo, embora não tão versátil como o anterior do ponto de vista da consideração de geometrias transversais complexas, mostra-se como eficiente, tendo sido generalizado para atender a meios estruturais com condições de simetria transversal.

Os modelos agora apresentados e implementados na plataforma Matlab 2009, sob a forma de um programa de cálculo integrado, são utilizados nos estudos desenvolvidos nos Capítulos 7 e 8, dedicados à análise de casos de estudo e, conseqüentemente, à validação experimental dos próprios modelos numéricos.



## 6. Modelação da interacção comboio-via

---

### 6.1 Considerações gerais

Um modelo completo e geral para a previsão da resposta dinâmica induzida por tráfego ferroviário tem obrigatoriamente de atender à existência de três subestruturas principais: o material circulante, a via férrea e o maciço de fundação [259]. Nos Capítulos 4 e 5 são apresentados diferentes modelos que permitem atender à interacção dinâmica entre a via férrea e o maciço de fundação, havendo agora que tratar do desenvolvimento de um modelo que contemple a interacção dinâmica entre o material circulante e a via férrea.

Recorde-se que (ver Capítulo 4) a acção exercida pela passagem do material circulante resulta da sobreposição de dois mecanismos de excitação principais: i) a excitação quasi-estática; ii) a excitação dinâmica. A excitação quasi-estática não compreende a geração de forças de inércia no veículo, sendo originada apenas pelo conjunto de forças móveis de magnitude constante, em correspondência com a geometria do comboio e respectiva distribuição de peso pelos diferentes eixos. Por outro lado, a excitação dinâmica resulta da geração de forças de inércia ao nível das massas que constituem o veículo, constituindo assim um problema de interacção via-veículo. Pese embora a componente quasi-estática da acção exercida pelo comboio seja, regra geral, de magnitude bastante superior à componente dinâmica, o contributo da última para a geração de vibrações que se propagam pelo maciço de fundação é muito relevante, sobrepondo-se à primeira em diversas situações.

O mecanismo de interacção dinâmica roda-carril pode ser atribuído a diversos factores, sendo os mais relevantes os que envolvem as irregularidades geométricas da via férrea na direcção vertical (defeitos de nivelamento longitudinal) e as imperfeições das próprias rodas do veículo. Embora se reconheça a pertinência da inclusão das irregularidades das rodas do veículo num modelo de cálculo dinâmico, no presente capítulo apenas são tratados os mecanismos de interacção via-veículo resultantes das irregularidades geométricas da via. Ainda que o actual modelo não esteja apto a lidar com irregularidades geométricas das rodas do veículo, a introdução destas é relativamente simples, podendo ser substituídas por imperfeições geométricas equivalentes da superfície de rolamento do carril [158, 260, 261].

O modelo de interacção seguidamente apresentado, implementado na plataforma MATLAB 2009, apresenta a particularidade de funcionar como um módulo de cálculo que pode ser conjugado com qualquer um dos modelos numéricos ou semi-analíticos desenvolvidos, já que o mesmo tem por finalidade apenas a determinação das forças de interacção dinâmica veículo-via. Tratando-se de um modelo formulado com base em conceitos de subestruturação, após determinadas as forças de interacção veículo-via(-maciço de fundação) os dois meios estruturais podem ser totalmente desacoplados e analisados individualmente. Este funcionamento modular do algoritmo é extremamente vantajoso para a realização de estudos de sensibilidade já que, em certos casos, permite que apenas partes do problema tenham de ser reanalisadas e não o problema na sua totalidade. No fluxograma representado na Figura 6.1 ilustra-se esquematicamente o modo de articulação entre o modelo de interacção veículo-via e o restante meio estrutural descrito por qualquer um dos modelos previamente apresentados nos Capítulos 4 e 5.

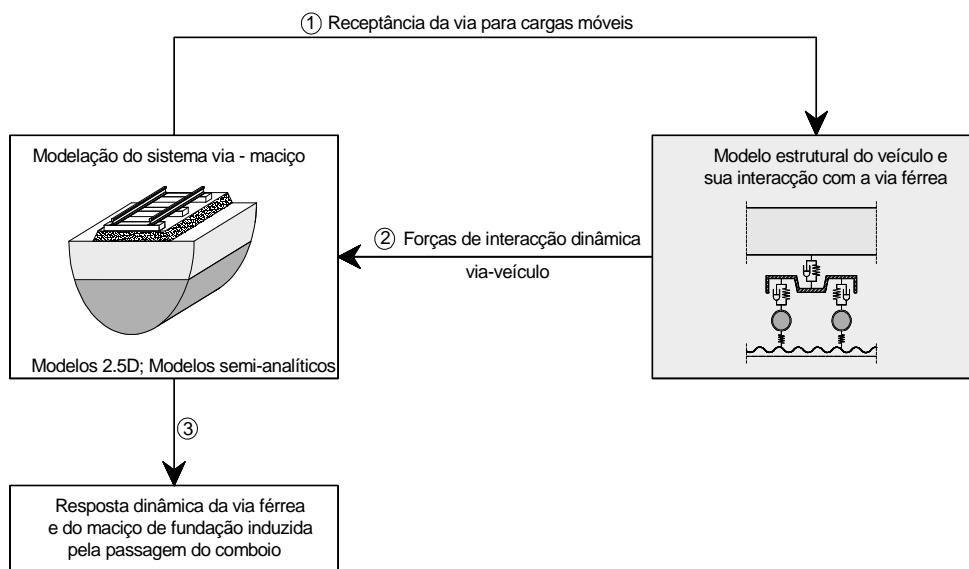


Figura 6.1 – Fluxograma representativo da interacção entre os vários módulos do modelo de cálculo proposto.

Centrando agora a atenção no modelo desenvolvido e implementado, cabe referir que tanto o modelo estrutural do veículo como o modelo que reflecte a sua interacção com a via férrea apresentam um conjunto de simplificações que a seguir se enumeram e comentam.

Começando pelos aspectos gerais, compete clarificar que se assume que o problema é linear, não havendo lugar à consideração de perdas de contacto entre a roda e o carril ou de elementos com comportamento não linear. Esta simplificação é comumente aceite na generalidade dos estudos sobre esta temática já que permite a resolução do problema de interacção veículo-via no domínio da frequência [5, 66, 87, 145, 190, 262-265]. Refira-se, contudo, a existência de modelos de

interacção que permitem a inclusão de comportamento não linear dos elementos que constituem o veículo, tal como sugerido por Grundmann e Lenz [134] ou mais recentemente por Muller et al. [247]. No entanto, o acréscimo de complexidade que advém da introdução do comportamento não linear ao nível do veículo tem desencorajado a utilização desses modelos, adoptando-se, em alternativa, estratégias de linearização equivalente de modo a permitir a análise no domínio da frequência.

Como já referido no Capítulo 4, o mecanismo de excitação dinâmica envolve o desenvolvimento de forças de interacção veículo-via com direcção vertical, longitudinal e transversal face ao desenvolvimento da via férrea. Contudo, no presente modelo apenas se atende à dinâmica vertical do veículo, sendo assim negligenciadas as forças dinâmicas referentes às restantes direcções.

Relativamente à organização do capítulo, inicia-se com a exposição da problemática de interacção veículo-via através de um exemplo didáctico correspondente a um oscilador com um grau de liberdade que se movimenta ao longo da via férrea. Seguidamente é apresentada a formulação matemática generalista de modo a compreender um comboio constituído por diversos veículos. Após a apresentação de metodologias de geração de perfis de irregularidades artificiais, a discussão da influência de diversos factores, como a qualidade da via, a velocidade de circulação e o grau de sofisticação do modelo de veículo, é sustentada num estudo paramétrico.

## **6.2 Modelo de interacção entre um oscilador com um grau de liberdade e a via**

### **6.2.1 *Formulação matemática***

Para a introdução da problemática inerente à interacção veículo-via considere-se um sistema simples, constituído por um oscilador com um grau de liberdade que se movimenta com velocidade  $c$  ao longo de uma via férrea que apresenta imperfeição geométrica definida por  $\Delta u(x)$ , tal como se ilustra na Figura 6.2. Admita-se ainda que o oscilador percorre toda a extensão da via, com desenvolvimento infinito, ocupando a posição geométrica  $x=a$  no instante  $t=0s$ .

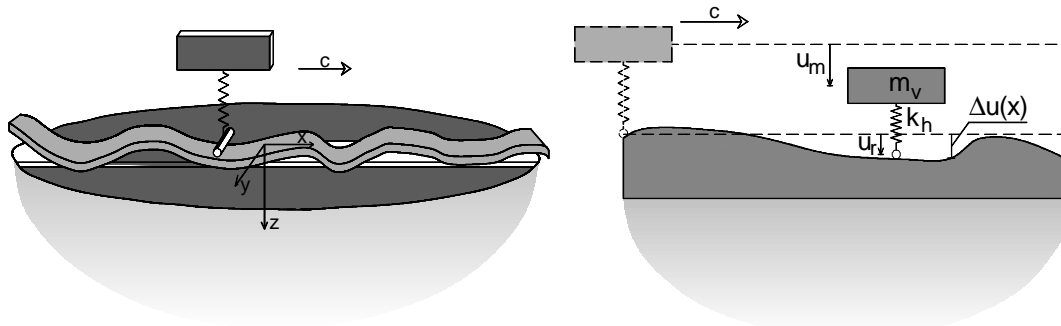


Figura 6.2 – Oscilador com um grau de liberdade deslocando-se ao longo da via férrea com irregularidade geométrica.

Por uma questão de simplicidade de exposição, e sem qualquer perda de generalidade, considere-se que a irregularidade geométrica é descrita por uma função harmónica simples, sendo definida, em notação complexa, pela parte real da seguinte expressão:

$$\Delta u(x) = \delta u e^{i \frac{2\pi}{\lambda} x} \quad [6.1]$$

em que  $\delta u$  representa a amplitude da irregularidade (podendo ser uma entidade complexa) e  $\lambda$  o respectivo comprimento de onda.

Uma outra forma de representar a irregularidade geométrica, porventura mais interessante no presente contexto, passa pela descrição de  $\Delta u$  experimentado pelo ponto de contacto veículo-via ao longo do tempo, ou seja:

$$\Delta u(t) = \delta u e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (a+ct)} = \delta u e^{i \frac{2\pi}{\lambda} a} e^{i 2\pi \frac{c}{\lambda} t} \quad [6.2]$$

A qual pode ser manipulada de forma a dar origem a:

$$\Delta u(t) = \Delta u(\Omega) e^{i\Omega t} \quad [6.3]$$

em que,

$$\Delta u(\Omega) = \delta u e^{i \frac{2\pi}{\lambda} a} \quad [6.4]$$

e

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} c \quad [6.5]$$

Após a definição da irregularidade geométrica da via, cabe agora o desenvolvimento do conjunto de equações matemáticas que regem o equilíbrio e o movimento do sistema. Seguindo os princípios da subestruturação, as equações de equilíbrio do material circulante e do restante meio



são formuladas separadamente, determinando-se posteriormente as forças de interacção entre os dois sistemas estruturais de forma a respeitar as condições de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamentos nos pontos de conexão.

Relativamente ao material circulante, o sistema estrutural representado na Figura 6.2 compreende uma massa, designada por  $m_v$ , sobrejacente a uma mola com rigidez  $k_h$ . Atendendo à segunda lei de Newton, facilmente se deduz o seguinte par de equações diferenciais que rege a dinâmica do sistema:

$$m_v \ddot{u}_m(t) + k_h(u_m(t) - u_r(t)) = 0 \quad [6.6]$$

$$k_h(u_r(t) - u_m(t)) = -N(t) \quad [6.7]$$

em que  $u_r$  representa o deslocamento vertical do ponto de conexão oscilador-via,  $u_m$  corresponde ao deslocamento vertical da massa e  $N(t)$  é a força de interacção oscilador-via.

Tendo em atenção o facto de se considerar que a irregularidade da via é descrita apenas por um harmónico com comprimento de onda  $\lambda$  e atendendo à relação expressa em [6.5], facilmente se depreende que as equações [6.6] e [6.7] podem ser expressas do seguinte modo no domínio da frequência:

$$-\Omega^2 m_v u_m(\Omega) + k_h(u_m(\Omega) - u_r(\Omega)) = 0 \quad [6.8]$$

$$k_h(u_r(\Omega) - u_m(\Omega)) = -N(\Omega) \quad [6.9]$$

cujas resoluções permitem estabelecer uma relação directa entre o deslocamento do ponto em contacto com a via e a respectiva força de interacção,

$$u_r(\Omega) = -F(\Omega)N(\Omega) \quad [6.10]$$

em que  $F(\Omega)$  é o termo de flexibilidade dado por:

$$F(\Omega) = K(\Omega)^{-1} = \left( \frac{k_h \Omega^2 m_v}{\Omega^2 m_v - k_h} \right)^{-1} \quad [6.11]$$

Considerando agora a compatibilidade de deslocamentos entre os pontos que estabelecem a conexão veículo-via, facilmente se conclui que a seguinte relação tem obrigatoriamente de ser respeitada em qualquer instante temporal:

$$u_r(t) = u_c(x = ct + a, t) + \Delta u(x = ct + a, t) \quad [6.12]$$

Ou seja, o deslocamento vertical do ponto de contacto do veículo ( $u_r$ ) é igual ao deslocamento vertical do ponto de contacto da via ( $u_c$ ) adicionado da irregularidade geométrica. No domínio da frequência a anterior relação escreve-se do seguinte modo:

$$u_r(\Omega) = u_c(x = ct + a, \Omega) + \Delta u(\Omega) \quad [6.13]$$

O deslocamento da via no ponto de contacto veículo-via pode ser determinado por qualquer um dos métodos descritos nos capítulos anteriores. A forma mais eficaz de resolução passa pela determinação da função de Green de deslocamento da via no domínio transformado, a qual é multiplicada por uma função de carga dependente da força de interacção  $N(\Omega)$ . O cálculo da função de Green de deslocamento vertical do carril no domínio do número de onda-frequência pode ser efectuado por qualquer um dos métodos descritos nos Capítulos 4 e 5, bastando para tal considerar uma força vertical de magnitude unitária actuando no carril, deslocando-se à velocidade  $c$  e oscilando com uma frequência  $\Omega$ . Atendendo às propriedades de translação das transformadas de Fourier, a amplitude do deslocamento experimentado pelo ponto da via que estabelece o contacto com o oscilador é dada por:

$$u_c(x = ct + a, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_c^G(k_1, \omega = \Omega - k_1 c) \tilde{P}(k_1, \Omega) e^{ik_1 a} dk_1 \quad [6.14]$$

em que  $k_1$  é a imagem de Fourier da coordenada  $x$ ,  $u_c^G$  é a função de Green do deslocamento vertical do carril no domínio transformado e  $P$  é a função de carga, dada por:

$$\tilde{P}(k_1, \Omega) = e^{-iak_1} N(\Omega) \quad [6.15]$$

Introduzindo [6.15] em [6.14], a equação que define a resposta da via toma a seguinte configuração:

$$u_c(x = ct + a, \Omega) = A(\Omega) N(\Omega) \quad [6.16]$$

Em que  $A(\Omega)$  é dada por:

$$A(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_c^G(k_1, \omega = \Omega - k_1 c) dk_1 \quad [6.17]$$

Procedendo à substituição das equações [6.10] e [6.16] na condição de compatibilidade dada por [6.14], é então possível determinar a força de interacção veículo-via:

$$N(\Omega) = -[F(\Omega) + A(\Omega)]^{-1} \Delta u(\Omega) \quad [6.18]$$

Conhecidas as forças de interacção veículo-via, os dois sistemas estruturais são tratados de forma desacoplada, o que se traduz numa grande vantagem em termos computacionais.

Como é evidente, numa aplicação mais complexa, a resposta do meio em termos de deslocamentos ou de qualquer outra grandeza resulta da sobreposição de efeitos das acções dinâmicas, induzidas pelos diferentes harmónicos necessários para a representação do perfil de irregularidades, adicionados à excitação quasi-estática, cujas forças de interacção são conhecidas a priori. Esta sobreposição de efeitos é realizada de uma forma particularmente interessante tendo em linha de conta a linearidade do sistema e o conceito de função de Green, podendo ser traduzida da seguinte forma:

$$u(x-ct, y, z, t) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_j^G(k_1, y, z, \Omega_j - k_1 c) \tilde{P}_j(k_1, \Omega_j) e^{ik_1(x-ct)} dk_1 e^{i\Omega_j t} \quad [6.19]$$

em que  $u(x, y, z, t)$  representa o deslocamento numa direcção genérica de um qualquer ponto do domínio,  $u_j^G$  é a função de Green no domínio semi-transformado do deslocamento na direcção considerada face à solitação vertical unitária que se movimenta com velocidade  $c$  ao longo do carril e com frequência de oscilação  $\Omega_j$ . Como se compreende, a excitação quasi-estática corresponde à consideração de  $\Omega=0$ , sendo a função de carga  $P(k_1, \Omega=0)$  definida através do conhecimento prévio da acção correspondente, no presente caso, ao peso próprio do oscilador, ou, numa situação mais realista, à distribuição do peso do veículo pelos diferentes eixos.

### 6.2.2 Validação do modelo de interacção

A validação do modelo de interacção semi-analítico é feita através da confrontação entre resultados obtidos pela metodologia descrita e os homólogos obtidos pela aplicação do programa de cálculo automático comercial ANSYS. Note-se que o processo de interacção efectuado por ambas as metodologias é totalmente distinto, permitindo assim despistar a existência de algum erro metodológico ou fundamental no procedimento anteriormente descrito.

Os aspectos gerais do exemplo de validação seleccionado apresentam-se na Figura 6.3. Trata-se de um exemplo simples, no qual a via é simulada como uma viga em apoio elástico (fundação de Kelvin) e o material circulante por um oscilador com as características indicadas na figura. A acção exercida pelo oscilador sobre a via resulta da sobreposição da carga quasi-estática (195 kN) com a força de interacção dinâmica. A última deve-se à irregularidade geométrica da via, com configuração harmónica de amplitude e comprimento de onda iguais a  $A=0,001$  m e  $\lambda=2,4$  m,

respectivamente. O oscilador percorre a via com velocidade  $c=80$  m/s, ocupando a posição  $x=0$  m no instante  $t=0$  s.

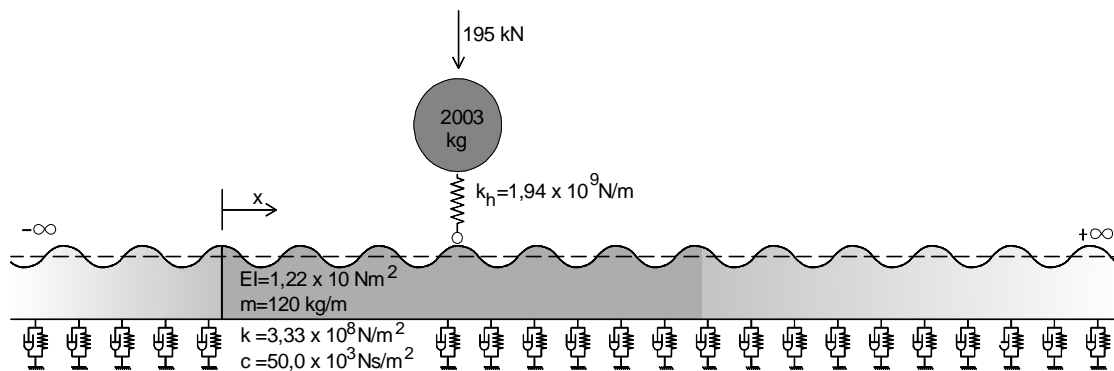


Figura 6.3 – Características gerais do exemplo de validação.

A simulação do exemplo de estudo no programa ANSYS depara-se com a necessidade de limitar a dimensão do modelo uma vez que a metodologia de análise é baseada no método dos elementos finitos. Por isso, considera-se um modelo de via com 150 m de desenvolvimento longitudinal e, de modo a obviar tanto aos efeitos transitórios devido ao início do movimento do oscilador, como aos efeitos de fronteira, as secções de controlo seleccionadas ocupam a posição geométrica definida por  $x=119,4$  m,  $x=120,0$  m e  $x=120,6$  m.

Relativamente à força transmitida pelo oscilador à via, a Figura 6.4 ilustra o seu registo temporal no intervalo de  $t=1,45$  s a  $t=1,55$  s. A análise da figura permite constatar que existe uma concordância quase perfeita entre os resultados de ambos os modelos, assistindo-se ao desenvolvimento de uma força sinusoidal em torno da carga quasi-estática. As diferenças que se observam devem-se essencialmente a perturbações numéricas causadas pela necessidade de discretização da via e respectiva fundação, aquando da aplicação do programa ANSYS. Porém, uma vez que as perturbações numéricas têm amplitude reduzida e estão associadas a frequências elevadas, o seu efeito não é perceptível no registo temporal dos deslocamentos verticais da via nas secções de controlo seleccionadas, como aliás se observa na Figura 6.5, onde se constata a uma concordância muito boa entre os resultados oriundos de ambos os modelos.

Pese embora o elevado grau de sofisticação do programa de cálculo automático ANSYS, a grande vantagem do método semi-analítico anteriormente descrito reside na facilidade de resolução do problema de interação veículo-via, tanto em termos de preparação do modelo como, e principalmente, ao nível do esforço computacional. Refira-se que, através do modelo semi-analítico, a análise do exemplo ilustrado é efectuada em menos de 3 segundos, sendo necessário cerca de 2 horas para resolver o mesmo problema pelo programa de cálculo ANSYS. De modo a não induzir o leitor em erro, deve salientar-se que, caso o perfil de irregularidades seja mais

complexo, exigindo uma quantidade apreciável de harmónicos para a sua descrição, o tempo de cálculo necessário à resolução do problema através do modelo semi-analítico aumenta significativamente, muito embora o modelo implementado recorra a técnicas de cálculo paralelo de modo a minimizar os tempos computacionais.

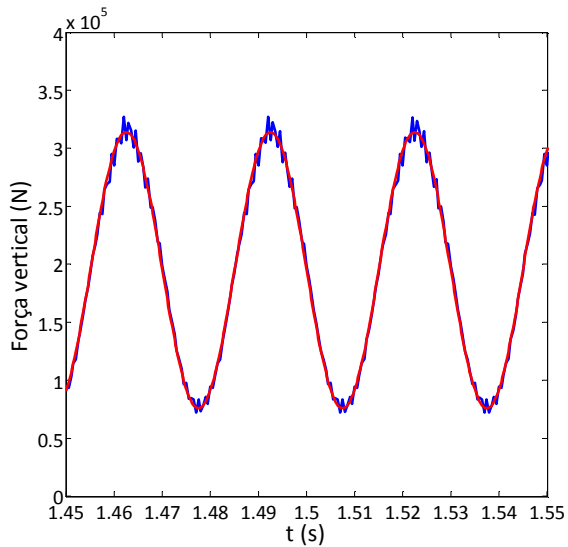


Figura 6.4 – Registo temporal da força aplicada à via (linha vermelha – modelo proposto; linha azul – modelo ANSYS).

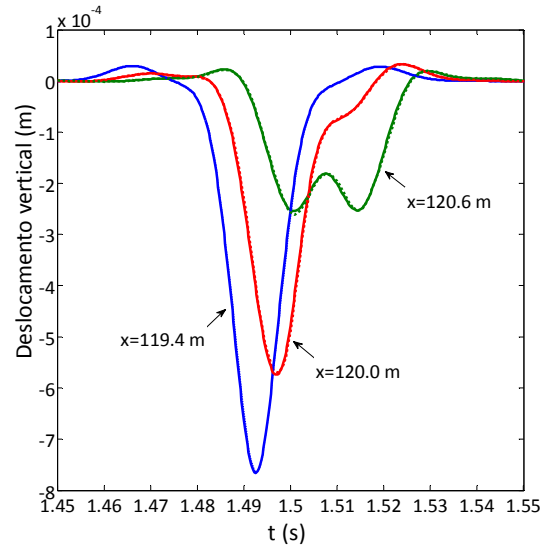


Figura 6.5 – Registo temporal do deslocamento vertical da via nas secções de controlo (linha contínua – modelo proposto; linha interrompida – modelo ANSYS).

### 6.3 Interacção comboio-via: generalização do modelo

#### 6.3.1 Aspectos gerais

O modelo de interacção oscilador-via anteriormente descrito é agora generalizado para atender à interacção dinâmica entre o comboio e a via férrea. Em geral, o comboio tem  $n$  pontos de contacto com a via (correspondentes a cada eixo), sendo as forças de interacção dinâmica no domínio da frequência definidas por  $N_1(\Omega), N_2(\Omega), \dots, N_n(\Omega)$ , seguindo a ordem do primeiro para o último eixo do comboio atendendo ao sentido do seu movimento. No instante  $t=0$  s, admite-se que os pontos de contacto, numerados segundo a referida ordem, tomam as posições geométrica longitudinal definidas por  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . O comboio inicia o seu movimento no instante  $t=-\infty$  na posição geométrica  $x=-\infty$  e finaliza em  $t=+\infty$ , circulando a velocidade constante,  $c$ .

A generalização da metodologia de interacção descrita na secção anterior implica que as restrições de contacto roda-carril tenham de ser verificadas em todos os pontos de contacto. Nestas condições, a equação [6.12] é generalizada para os vários pontos de contacto, traduzindo-se matematicamente pelo seguinte sistema de equações:

$$u_{r,i}(t) = u_c(x = ct + a_i, t) + \Delta u\left(t + \frac{a_i}{c}\right) + \Delta y_i(t) \quad \forall i=1 \dots n \quad [6.20]$$

O termo  $\Delta y$  refere-se ao incremento de deslocamento, devido à deformação de contacto roda-carril, induzido pela acção dinâmica.

Nas secções seguintes apresenta-se a formulação adoptada para a determinação dos deslocamentos das rodas do comboio e do carril nos pontos de contacto, bem como a metodologia para atender à problemática da deformação de contacto.

### **6.3.2 Equações de equilíbrio dinâmico do comboio**

O objectivo da presente secção é o estabelecimento das equações de equilíbrio dinâmico do comboio. Considera-se que um comboio é composto pelo agrupamento de vários veículos (carruagens), podendo a ligação entre os últimos assumir diferentes configurações. Segundo o Eurocódigo 1 [266], os comboios de passageiros podem agrupar-se, de acordo com a sua configuração, nos seguintes tipos:

- i) Convencionais, em que cada veículo tem dois bogies, cada qual possuindo dois eixos (Figura 6.6a).
- ii) Articulados, em que veículos consecutivos partilham o mesmo bogie de dois eixos, o qual se encontra centrado com a articulação entre veículos (Figura 6.6b).
- iii) Regulares, nos quais também existe uma articulação entre veículos, mas em que o apoio da articulação é garantido por um único eixo (Figura 6.6c).

A formulação de um modelo generalista que permita contemplar todos os tipos de comboios cai fora do âmbito da presente dissertação. Apesar do modelo de interacção comboio-via implementado estar apto a analisar qualquer tipo de comboio, na presente secção apenas se deduzem as equações de equilíbrio dinâmico de comboios convencionais, os quais, de um modo simplificado, podem ser assemelhados a um conjunto de veículos independentes e sem qualquer tipo de ligação estrutural a menos, obviamente, da estabelecida através dos carris da via férrea. No caso de comboios regulares e articulados, as matrizes de rigidez e massa do comboio poderão ser avaliadas por recurso a um qualquer programa de cálculo automático comercial, sendo posteriormente incorporadas no modelo semi-analítico implementado (o qual já se encontra devidamente preparado para tal operação).

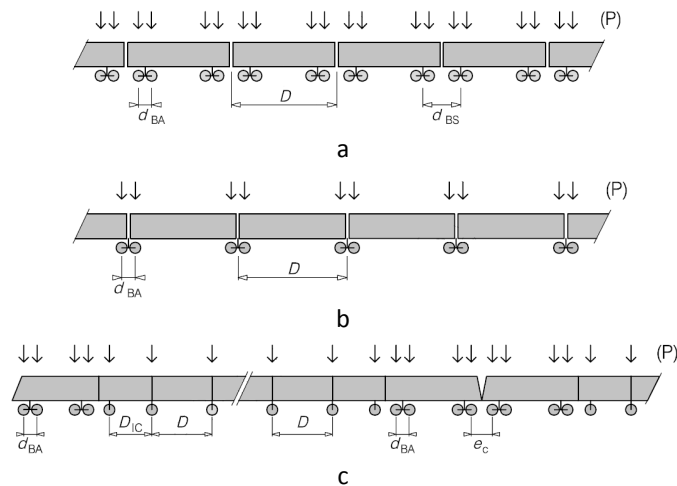


Figura 6.6 – Tipos de comboios reais na rede europeia de alta velocidade: a) convencional; b) articulado; c) regular [266].

Vários modelos de veículos têm sido desenvolvidos nos últimos anos. Alguns deles são muito complexos permitindo analisar em profundidade a resposta dinâmica do veículo, sendo principalmente utilizados quando o objectivo do estudo se centra em questões relacionadas com a segurança da circulação, a resposta em curva ou a análise do conforto dos passageiros. No entanto, para os objectivos do presente trabalho, o recurso a modelos simplificados através de massas discretas, molas e amortecedores é tido como suficiente pois tem revelado desempenho adequado às finalidades do trabalho [67, 262, 267].

De forma generalista, cada corpo rígido possui seis graus de liberdade (3 de movimentos de translação do centro de gravidade da massa e 3 rotações). Todavia, atendendo às simplificações já enumeradas e ao facto de se adoptar um modelo plano (no plano xoz), subsistem apenas dois graus de liberdade por corpo rígido, ou seja, o deslocamento vertical do seu centro de gravidade e a sua rotação em torno do eixo normal ao plano. Pese embora a simplicidade do modelo adoptado seja evidente, a adopção de modelos mais complexos no presente âmbito é, regra geral, desencorajada dada a carência de informação sobre as propriedades dos veículos, sendo que a formulação matemática de tais modelos pode ser consultada em várias referências bibliográficas [265, 268, 269].

A Figura 6.7 apresenta o modelo de veículo adoptado no presente estudo. Trata-se de um modelo 2D em que o veículo é descrito por um conjunto de corpos rígidos (a caixa do veículo, os bogies e as massas não suspensas, rodas e eixos), interligados através de conjuntos mola-amortecedor (em paralelo), com os quais se pretende simular o comportamento mecânico das suspensões. A suspensão primária estabelece a ligação entre as massas não suspensas e os bogies (massa semi-suspensa), ao passo que a suspensão secundária materializa a ligação da caixa do veículo (massa suspensa) aos bogies.

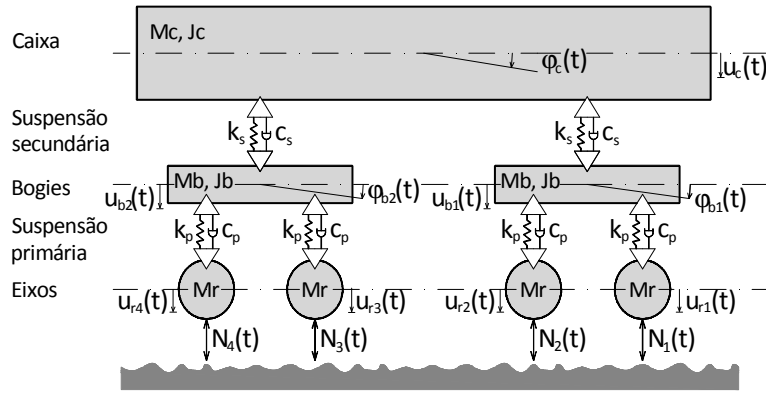


Figura 6.7 – Modelo de veículo plano proposto por Zhai e Cai [270] e adoptado no presente estudo.

Enquanto a caixa do veículo e os bogies apresentam dois graus de liberdade, o deslocamento vertical e a rotação em torno do eixo normal ao plano do veículo, apenas o grau de liberdade de translação é admitido para as massas não suspensas. A representação esquemática do modelo do veículo ilustrada na Figura 6.7 permite verificar que dos 10 graus de liberdade considerados para o veículo apenas 4 estabelecem o contacto veículo-carril.

Numa formulação matricial, o equilíbrio e movimento do veículo são descritos por:

$$[M^v]_{10 \times 10} \{\ddot{u}(t)\} + [C^v]_{10 \times 10} \{\dot{u}(t)\} + [K^v]_{10 \times 10} \{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{0\}_{10-4} \\ -\{N(t)\}_4 \end{Bmatrix} \quad [6.21]$$

Sendo  $[M^v]$ ,  $[C^v]$  e  $[K^v]$  as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do veículo, respectivamente. O vector  $\{u\}$  colige os movimentos associados a cada grau de liberdade, enquanto o vector  $\{N\}$  representa as forças de interacção veículo-via.

A condição de equilíbrio e movimento do veículo pode também ser escrita no domínio da frequência, ou seja:

$$([K^v] - \Omega^2 [M^v]) \{u(\Omega)\} = \begin{Bmatrix} \{0\}_6 \\ -\{N(\Omega)\}_4 \end{Bmatrix} \quad [6.22]$$

Comparando as equações [6.22] e [6.21], verifica-se que na formulação no domínio da frequência a matriz de amortecimento foi suprimida. Tal facto deve-se à utilização de parâmetros de rigidez complexa para a caracterização do comportamento das suspensões primária e secundária.

No presente caso a matriz de rigidez,  $[K^v]$  tem a seguinte configuração:



$$[K^V] = \begin{bmatrix} 2k_s & 0 & -k_s & 0 & -k_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2k_s l_b^2 & -k_s l_b & 0 & k_s l_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & k_s + 2k_p & 0 & 0 & 0 & -k_p & -k_p & 0 & 0 \\ & & & 2k_p l_w^2 & 0 & 0 & -k_p l_r & k_p l_r & 0 & 0 \\ & & & & k_s + 2k_p & 0 & 0 & 0 & -k_p & -k_p \\ & & & & & 2k_p l_r^2 & 0 & 0 & -k_p l_r & k_p l_r \\ & \text{simétrico} & & & & & k_p & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_p & 0 & 0 \\ & & & & & & & & k_p & 0 \\ & & & & & & & & & k_p \end{bmatrix} \quad [6.23]$$

Em que  $k_p$  é a rigidez complexa da suspensão primária,  $k_s$  é a rigidez complexa da suspensão secundária,  $l_b$  é metade da distância entre centros de gravidade dos bogies e  $l_r$  é metade da distância entre eixos que partilham o mesmo bogie. Os conjuntos mola-amortecedor utilizados na simulação das suspensões são representados através de um modelo de amortecimento viscoso, sendo a rigidez complexa das suspensões primária e secundária dadas, respectivamente, por:

$$k_p = k_p + i\Omega c_p \quad [6.24]$$

$$k_s = k_s + i\Omega c_s \quad [6.25]$$

Em que  $k_p$  e  $k_s$  correspondem às rigidezes das molas constituintes da suspensões, enquanto  $c_p$  e  $c_s$  representam o amortecimento viscoso conferido pelos amortecedores associados em paralelo às molas de suspensão.

Face à selecção adoptada para os graus de liberdade do sistema (associados ao movimento do centro de gravidade de cada um dos corpos rígidos), a matriz  $[M^V]$  toma uma configuração diagonal, sendo dada por:

$$[M^V] = \begin{bmatrix} M_c & & & & & & & & & & \\ & J_c & & & & & & & & & \\ & & M_b & & & & & & & & \\ & & & J_b & & & & & & & \\ & & & & M_b & & & & & & \\ & & & & & J_b & & & & & \\ & & & & & & M_r & & & & \\ & & & & & & & M_r & & & \\ & & & & & & & & M_r & & \\ & & & & & & & & & M_r & \\ & & & & & & & & & & M_r \end{bmatrix} \quad [6.26]$$

em que  $M_c$ ,  $M_b$  e  $M_r$  correspondem às massas da caixa, do bogie e do sistema roda-eixo, respectivamente. Visto que a caixa e os bogies apresentam graus de liberdade de rotação, os parâmetros  $J_c$  e  $J_b$  reflectem a inércia polar de massa dos mesmos.

Por sua vez, o vector que colige os movimentos dos graus de liberdade corresponde a:

$$\{u(\Omega)\} = \{u_c, \varphi_c, u_{b1}, \varphi_{b1}, u_{b2}, \varphi_{b2}, u_{r1}, u_{r2}, u_{r3}, u_{r4}\}^T \quad [6.27]$$

A nomenclatura adoptada na referenciação dos graus de liberdade é coerente com a representação esquemática mostrada na Figura 6.7, razão pela qual se dispensa qualquer esclarecimento adicional.

Uma vez que o contacto veículo-via é traduzido apenas por alguns graus de liberdade, é de todo o interesse que a dinâmica do veículo seja formulada numa versão condensada que permita o estabelecimento de uma relação directa entre os deslocamentos dos pontos de contacto e as respectivas forças de interacção. Do ponto de vista matemático, atendendo à organização do vector  $\{u(\Omega)\}$ , tal relação é alcançada começando-se por definir:

$$\{u_r(\Omega)\}_{J_4} = [Z]\{u(\Omega)\}_{J_{10}} \quad [6.28]$$

em que,

$$\{u_r(\Omega)\} = \{u_{r1}, u_{r2}, u_{r3}, u_{r4}\}^T \quad [6.29]$$

e  $[Z]$  é uma matriz constante com a seguinte configuração:

$$[Z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [6.30]$$

Aplicando um raciocínio análogo ao vector de forças externas e introduzindo tais relações no sistema de equações definido em [6.22], facilmente se conclui que:

$$\{u_r(\Omega)\}_{J_4} = -[F(\Omega)]_{J_4 \times J_4} \{N(\Omega)\}_{J_4} \quad [6.31]$$

Em que  $[F(\Omega)]$  representa a matriz de receptância do veículo, também designada por matriz de flexibilidade condensada, a qual é dada por:

$$[F(\Omega)] = [Z] \left( [K^v] - \Omega^2 [M^v] \right)^{-1} [Z]^T \quad [6.32]$$

A equação [6.31] constitui uma relação condensada do equilíbrio dinâmico do veículo, envolvendo os deslocamentos dos eixos e as respectivas forças de interacção.

Tendo em mente o facto de o comboio convencional resultar de uma sequência de veículos independentes, a relação [6.31] facilmente pode ser generalizada de um único veículo para um conjunto de  $k$  veículos, ou seja:

$$\{u_r(\Omega)\}^{\text{global}} = -[F(\Omega)]^{\text{global}}\{N(\Omega)\}^{\text{global}} \quad [6.33]$$

em que o vector  $\{u_r(\Omega)\}^{\text{global}}$  colige os deslocamentos verticais de todos os eixos do comboio, enquanto o vector  $\{N(\Omega)\}^{\text{global}}$  compreende as forças de interacção comboio-via.

A matriz  $[F(\Omega)]^{\text{global}}$  resulta da assemblagem das matrizes de receptância de cada veículo. Uma vez que não existe ligação estrutural entre veículos, toma a seguinte configuração em banda:

$$[F(\Omega)]_{4k \times 4k}^{\text{global}} = \begin{bmatrix} [F(\Omega)]_{4 \times 4}^{\text{veículo1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & [F(\Omega)]_{4 \times 4}^{\text{veículo}k} \end{bmatrix} \quad [6.34]$$

### 6.3.3 Equações de movimento da via

Para que a relação de compatibilidade comboio-via seja satisfeita é necessário o conhecimento do deslocamento vertical do carril, nos pontos de contacto roda-carril, devido às forças de interacção comboio-via. Como se compreende, a existência de vários pontos de contacto comboio-carril implica a necessidade de atender ao contributo das diferentes forças de interacção para o deslocamento de um qualquer ponto de contacto roda-carril.

Generalizando a equação [6.16] para um comboio com  $n$  eixos ( $n=4xk$ , sendo  $k$  o número de veículos), é então possível estabelecer a seguinte relação entre deslocamentos da via nos pontos de contacto e forças de interacção dinâmica:

$$\{u_c(x = ct + a, \Omega)\} = [A(\Omega)]\{N(\Omega)\} \quad [6.35]$$

Sendo os termos da matriz  $[A(\Omega)]$  dados por:

$$A_{ij}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_c^G(k_1, \omega = \Omega - k_1 c) \cdot e^{i(a_i - a_j)k_1} dk_1 \quad [6.36]$$

Refira-se, a título de curiosidade, que o cálculo da matriz  $[A(\Omega)]$  é algo exigente do ponto de vista computacional, já que o efeito de Doppler devido ao movimento do comboio implica a perda de simetria da matriz.

#### 6.3.4 Deformação de contacto roda-carril

Um aspecto que ainda não foi abordado refere-se à problemática da rigidez do contacto roda-carril. Num cenário teórico, admitindo rigidez de contacto infinita, o deslocamento vertical do centro de gravidade da roda (a roda é simulada como um corpo rígido), em qualquer instante temporal, é igualado pelo deslocamento da via (no ponto sob a acção da roda) adicionado da irregularidade geométrica. Porém, não sendo o contacto infinitamente rígido, existe uma parcela de deformação do sistema que tem de ser atendida nas equações de compatibilidade de deslocamentos comboio-via.

Existem diversas formulações para a rigidez de contacto, referindo-se desde já que se trata de um problema complexo e claramente não linear. Uma das abordagens mais comuns à problemática da interacção roda-carril consiste na aplicação da teoria não linear de Hertz, a qual admite que a interacção entre os dois corpos em contacto é estabelecida apenas através de tensões normais [147, 270, 271]. Segundo esta abordagem, a relação entre a força vertical transmitida pela roda ao carril, aqui designada por  $P$ , e a deformação da zona de contacto roda-carril,  $\delta y$ , é dada por:

$$P = \left( \frac{\delta y}{G} \right)^{3/2} \quad [6.37]$$

em que  $G$  é a constante de contacto, dependente do raio e geometria da superfície de rolamento da roda e do carril. Para rodas com superfície de rolamento cónica, a constante de contacto pode ser aproximada por:

$$G = 4,57R^{-0,149} \times 10^{-8} \text{ (m/N}^{2/3}\text{)} \quad [6.38]$$

Por sua vez, caso a superfície de rolamento seja plana, a constante de contacto é dada por:

$$G = 3,86R^{-0,115} \times 10^{-8} \text{ (m/N}^{2/3}\text{)} \quad [6.39]$$

sendo  $R$  o raio da roda.

A rigidez hertziana de contacto,  $k_h$ , é então dada pela tangente à curva definida pela equação [6.37], ou seja:

$$kh = \frac{dP}{d(\delta y)} = \frac{3}{2G} P^{1/3} \quad [6.40]$$

Como se pode verificar a rigidez de contacto é claramente não linear, seguindo uma tendência de incremento com o aumento da carga transmitida pela roda ao carril. Tratando-se de um problema não linear, a aplicabilidade do método da sobreposição de efeitos perde validade e, conseqüentemente, a análise no domínio da frequência também a perde. Porém, dado que a parcela dinâmica da força de contacto é, regra geral, substancialmente inferior à acção estática (peso do comboio por roda), a rigidez de contacto pode ser linearizada considerando apenas a parcela da força  $P$  correspondente à distribuição do peso do comboio por roda [262, 272]. Deste modo define-se a rigidez de contacto linearizada, dada por:

$$kh = \frac{dP}{d(\delta y)} = \frac{3}{2G} P_0^{1/3} \quad [6.41]$$

em que  $P_0$  é a força vertical correspondente à distribuição do peso do comboio por roda.

Como se compreende, a linearização do problema não linear de contacto implica sempre algum erro, tanto mais significativo quanto mais elevada for a força dinâmica de interacção roda-carril. Segundo o trabalho experimental desenvolvido por Katou et al. [162], no qual foram medidas as forças verticais transmitidas pelas rodas do comboio Shinkansen ao carril, a parcela dinâmica da acção corresponde a cerca de 15% da acção estática ( $P_0=47,5$  kN). Na Figura 6.8 apresenta-se a evolução da rigidez de contacto em função da carga transmitida pela roda ao carril (de acordo com [162],  $R=0,43$  m). Na mesma figura encontram-se indicados os valores da rigidez hertziana considerando apenas a carga estática ( $P_0$ ) e a carga total, a qual corresponde a uma flutuação de 15% em torno do valor estático. Como se pode constatar pela análise da figura, para acções dinâmicas correspondentes a cerca de 15% da acção estática, os valores extremos da rigidez hertziana não diferem mais de 5,5% face ao valor determinado considerando  $P=P_0$ , demonstrando-se assim a validade da simplificação admitida (Note-se que para valores superiores da carga estática, premissa geralmente verificada para a grande maioria dos comboios, menor é a taxa de flutuação da rigidez hertziana com a variação da parcela dinâmica).

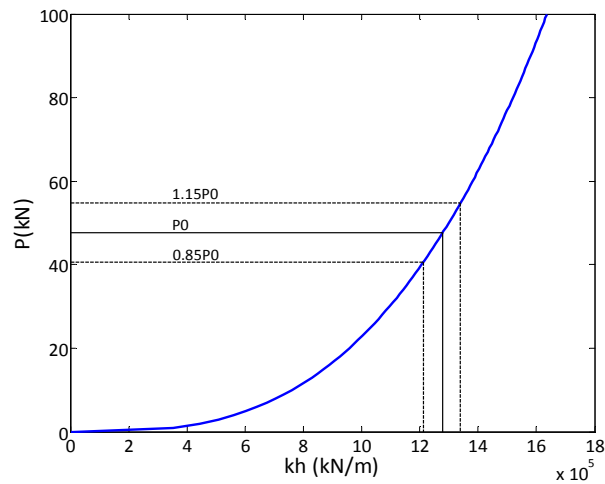


Figura 6.8 – Rigidez hertziana de contacto para a roda do comboio Shinkansen.

Conhecida a rigidez de contacto é então possível definir o incremento de deformação no contacto devido à acção dinâmica aplicada pelo comboio à via, ou seja:

$$\{\Delta y(\Omega)\} = [F^H] \{N(\Omega)\} \quad [6.42]$$

em que  $\{\Delta y(\Omega)\}$  é o vector que reúne a deformação de contacto em correspondência com cada eixo do comboio e  $[F^H]$  é a matriz de flexibilidade de contacto.

A matriz de flexibilidade de contacto é uma matriz diagonal cujos termos dependem da rigidez de contacto por eixo do comboio (equivale ao dobro da rigidez definida pela expressão [6.41]), ou seja:

$$F_{ij}^H = \frac{1}{2kh_i} \delta_{ij} \quad [6.43]$$

### 6.3.5 Equações gerais de interacção

A compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio de forças entre o comboio e a via é estabelecida no domínio da frequência através da decomposição do perfil de irregularidades através num conjunto de funções harmónicas. Deste modo, introduzindo as equações [6.33], [6.36] e [6.43] na equação de condição de compatibilidade [6.20] gera-se um sistema de equações lineares cujas incógnitas são definidas pelo vector  $\{N(\Omega)\}$ , ou seja:

$$\{N(\Omega)\} = -([F] + [F^H] + [A])^{-1} \{\Delta u(\Omega)\} \quad [6.44]$$

De modo a atender à posição relativa dos vários eixos do comboio face ao perfil de irregularidades é de todo vantajoso traduzir o vector de irregularidades  $\{\Delta u(\Omega)\}$  do seguinte modo:

$$\{\Delta u(\Omega)\} = \delta u\{b(\Omega)\} \quad [6.45]$$

sendo os termos do vector  $\{b(\Omega)\}$  dados por:

$$b(\Omega)_i = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a_i} = e^{i\frac{\Omega}{c}a_i} \quad [6.46]$$

Conhecidas as forças de interacção dinâmica comboio-via, a resposta em qualquer ponto do domínio é obtida através da sobreposição de efeitos, tal como indicado na [6.19]. Para carregamentos de múltiplas cargas a função de carga,  $P(k_1, \Omega)$ , é dada por:

$$\tilde{P}_j(k_1, \Omega_j) = \sum_{i=1}^n N_i(\Omega_j) e^{-ia_i k_1} \quad [6.47]$$

Uma das grandes vantagens do método agora proposto reside no seu carácter modular, como aliás se pode observar pela interpretação física da equação [6.44]. Caso se pretenda analisar a resposta dinâmica para uma dada velocidade de circulação e diferentes perfis de irregularidades, desde que os últimos mantenham os comprimentos de onda característicos, não é necessário calcular novamente a receptância da via e do veículo, bastando aplicar a equação [6.44] para determinar as novas acções dinâmicas de interacção via-veículo.

## 6.4 Irregularidades geométricas da via férrea

### 6.4.1 Generalidades

Diferentes tipos de irregularidades geométricas são habitualmente identificadas em vias férreas. Excluindo aspectos específicos, tais como defeitos geométricos em zonas de desvio, cruzamentos, transições de rigidez e de via, as irregularidades geométricas da via férrea são comumente classificadas em irregularidades distribuídas ou em defeitos pontuais. Pese embora o indiscutível interesse que as irregularidades pontuais possam apresentar nos mecanismos de interacção dinâmica comboio-via, na presente dissertação essa questão não é abordada, remetendo-se o leitor para os recentes trabalhos de Sun e Dhanasekar [265], Remennikov e Kaewunruen [158] e de Vale [273], onde esta questão é devidamente tratada. Posto este esclarecimento, nas secções

seguintes apresenta-se uma metodologia para a geração de perfis de irregularidades distribuídas, com carácter aleatório, os quais são necessários à definição do modelo de interacção veículo-via desenvolvido.

#### 6.4.2 Geração de perfis de irregularidades artificiais

Os perfis de irregularidades distribuídas longitudinais da via são, por excelência, determinados por via experimental através do recurso a equipamentos específicos para a sua medição. Porém, a experiência acumulada pelas administrações ferroviárias na medição e tratamento estatístico de um elevado número de perfis de irregularidades possibilitou a definição de funções de densidade espectral de potência de irregularidades, as quais, por sua vez, são utilizadas na geração de perfis artificiais. Inerente a este procedimento está a assunção de que um perfil de irregularidades da via é simulado como um processo gaussiano, estacionário e aleatório (estocástico) [274].

Atendendo ao teorema da representação espectral [275] e conhecida a função de densidade espectral de potência de irregularidades ( $S_{rzz}$ ), pode então ser gerado um perfil através da sobreposição de funções sinusoidais:

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^N \delta u_j e^{i \frac{2\pi}{\lambda_j} x} \quad [6.48]$$

em que  $\lambda_j$  é o comprimento de onda dentro do intervalo de interesse,  $N$  é o número total de harmónicos considerado e  $\delta u_j$  é a entidade complexa que reflecte a amplitude do harmónico correspondente, sendo dada por:

$$\delta u_j = A_j e^{-i\theta_j} \quad [6.49]$$

na qual as variáveis tomam o seguinte significado:  $A_j$  é a amplitude do harmónico correspondente;  $\theta_j$  é o ângulo de fase, tido como variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $]0, 2\pi[$ .

Atendendo ao exposto, verifica-se que o perfil de irregularidades  $\Delta u(x)$  satisfaz a condição de um processo estocástico estacionário e ergódico, sendo a contribuição do número de onda  $k_{1j}$  ( $k_{1j} = 2\pi/\lambda_j$ ) para a respectiva variância igual a  $A_j^2/2$ , pelo que as amplitudes dos diversos harmónicos assumem o valor,



$$A_j = \sqrt{2S_{rzz}(k_{1j})} \Delta k_1 \quad [6.50]$$

em que  $\Delta k_1$  é o incremento de número de onda.

Na secção seguinte apresentam-se algumas funções de densidade espectral utilizadas por diferentes administrações ferroviárias.

### 6.4.3 Funções de densidade espectral de potência de irregularidades

Diversas administrações ferroviárias têm coligido os resultados da medição do nivelamento longitudinal da via com o intuito de estabelecer funções de densidade espectral de potência de irregularidades. Uma vez que existem linhas férreas com diferentes tipos de utilização e finalidade, é de todo o interesse que as funções de densidade espectral de potência das irregularidades reflectam, de alguma forma, a qualidade da via férrea, de modo a permitir a comparação entre diferentes perfis de irregularidades. Embora existam na bibliografia várias propostas para a definição de tais espectros, na presente dissertação apenas são analisadas as que incorporam diferentes classes de qualidade de via, sob pena de existir uma grande perturbação de resultados face à grande diferença existente entre vias de boa e má qualidade.

Segundo os estudos desenvolvidos pela SNCF (administração ferroviária francesa), a função  $S_{rzz}(k_1)$  definida por

$$S_{rzz}(k_1) = \frac{10^{-6} A}{\left(1 + \frac{k_1}{k_0}\right)^3} \quad [6.51]$$

constitui uma boa aproximação aos resultados medidos para comprimentos de onda compreendidos entre 2 m e 40 m . Relativamente aos parâmetros intervenientes, A reflecte a qualidade da via, tomando o valor 160 para vias de boa qualidade e 550 em caso contrário, e  $k_0$  é igual a 0,307 rad/m.

Uma proposta mais detalhada é apresentada pela autoridade ferroviária norte-americana (FRA), que considera seis classes de classificação de vias férreas. Na proposta da FRA, a função de densidade espectral de potência do perfil de irregularidades é dada por:

$$S_{rzz}(k_1) = \frac{10^{-7} A k_3^2 (k_1^2 + k_2^2)}{k_1^4 (k_1^2 + k_3^2)} \quad [6.52]$$

em que  $k_2$  e  $k_3$  são constantes que tomam, respectivamente, os seguintes valores: 0,1464 rad/m e 0,8168 rad/m. Por sua vez, o parâmetro A é função da classe de qualidade geométrica da via férrea, indicando-se no Quadro 6.1 os valores propostos para as 6 classes preconizadas pela FRA.

Quadro 6.1 – Valores de A propostos pela FRA [239].

Classe	1	2	3	4	5	6
A (m <sup>3</sup> /rad)	660,079	376,229	208,841	116,856	65,929	37,505

Em alternativa, estudos elaborados por Braun e Hellenbroich [276] (citado por [239]) sugerem a utilização da expressão analítica preconizada pela norma ISO 8608 [277] para a definição da função de densidade espectral de potência dos perfis de irregularidades de pavimentos rodoviários, devidamente adaptada para atender às condições ferroviárias. A expressão proposta pelos referidos autores tem a seguinte configuração:

$$S_{rzz}(k_1) = A \left( \frac{k_1}{k_0} \right)^{-w} \quad [6.53]$$

em que  $k_0$  toma o valor de 1 rad/m e o expoente w assume valores no intervalo de 3 a 4. Quanto ao parâmetro A, os estudos reportados apontam para uma variabilidade entre  $5 \times 10^{-7}$  m<sup>3</sup>/rad, no caso de vias de qualidade deficiente, a  $1 \times 10^{-9}$  m<sup>3</sup>/rad, para vias de muito boa qualidade.

Como se pode verificar, existe uma grande panóplia de expressões analíticas para a definição das funções de densidade espectral de potência das irregularidades verticais de vias férreas, podendo conduzir a resultados bastante distintos. Um reparo que não pode deixar de ser feito prende-se com a ausência de informação relativa ao campo de validade das expressões indicadas por vários autores. Com efeito, uma vez que as funções propostas procuram representar um bom ajuste aos resultados de diversas medições, a definição do campo de validade dessas mesmas funções revela-se fundamental.

Para que as diferentes propostas possam ser facilmente comparadas, na Figura 6.9 procede-se à sua representação gráfica. Pela análise da figura comprova-se que existe uma grande dispersão nas propostas das várias entidades para a função de densidade espectral de potência das irregularidades da via. Note-se contudo que, para números de onda superiores a 1 rad/m, existe uma certa concordância entre as propostas da SNCF e da FRA.

Um outro aspecto que é digno de reparo prende-se com a ausência de uma classificação das funções de densidade espectral de potência em função da tipologia e do tipo de utilização da via

férrea. A título de exemplo refira-se que tanto na proposta da SNCF como na da FRA não existe qualquer referência a vias férreas de alta velocidade, o que, na opinião do autor, é uma lacuna grave já que as linhas de alta velocidade, para além de serem, regra geral, exclusivamente dedicadas a tráfego de passageiros, são objecto de programas de manutenção cuidados, apresentando por isso um melhor índice de qualidade face à restante rede ferroviária. Esta observação é corroborada pela análise do perfil de irregularidades da linha de alta velocidade entre Bruxelas e Colónia levada a cabo por Lombaert et al [5]. Com efeito, os autores desse estudo verificaram que os resultados experimentais podem ser razoavelmente ajustados através da função definida na equação [6.53] considerando  $A=1,36 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{rad}$  e  $w=3,5$ . Remetendo novamente para a Figura 6.9, verifica-se que os resultados experimentais analisados pelos referidos autores correspondem a valores da função de densidade espectral de potência das irregularidades consideravelmente inferiores aos definidos pelas propostas da SNCF e da FRA para vias de boa qualidade.

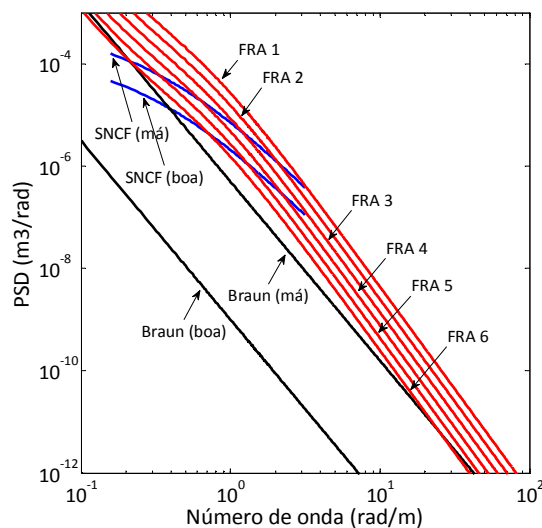


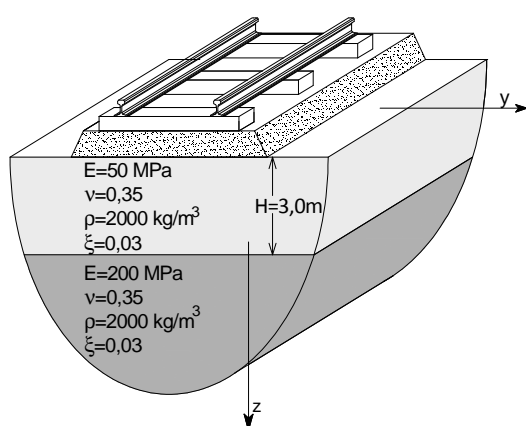
Figura 6.9 – Funções de densidade espectral de potência irregularidades geométricas verticais de carris.

## 6.5 Estudo paramétrico da interacção comboio-infraestrutura

### 6.5.1 Objectivos e descrição geral do exemplo

À semelhança do efectuado nos capítulos anteriores, a presente secção tem como objectivo apresentar um estudo paramétrico desenvolvido com o intuito de ilustrar as potencialidades do modelo de cálculo, bem como a influência dos parâmetros relativos à interacção via-veículo, ou seja: i) a influência do perfil de irregularidades; ii) a influência da velocidade de circulação do comboio; iii) a influência da metodologia de modelação do comboio.

Como já indicado, a interacção comboio-via é atendida através de um módulo computacional independente, podendo ser acoplado a qualquer um dos modelos anteriormente apresentados para a simulação da resposta dinâmica do sistema via férrea-macijo de fundação. Assim sendo, e sem qualquer perda de generalidade, na aplicação seguidamente ilustrada opta-se por um modelo relativamente simples para a simulação do sistema via-macijo, semelhante o apresentado na secção 4.5.2: a resposta do maciço geotécnico é simulada pelos modelos introduzidos no Capítulo 3, os quais, após o devido acoplamento ao modelo de via descrito no Capítulo 4, permitem obter a resposta dinâmica do sistema via-macijo. Por uma questão de facilidade de leitura, na Figura 4.17 resumem-se as propriedades geométricas e mecânicas do sistema via-macijo adoptado no presente estudo.



Carris : UIC60 -  $EI_r=1,26 \times 10^7 \text{ Nm}^2$  (2 carris)  
 $m_r=120 \text{ kg/m}$  (2 carris)

Travessas :  $m_s=490 \text{ kg/m}$

Palmilhas:  $k_p=5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$  (2 palmilhas)  
 $c_p=2,5 \times 10^5 \text{ Ns/m}^2$  (2 palmilhas)

Balastro:  $h=0,35 \text{ m}$   
 $E_b=130 \times 10^6 \text{ Pa}$   
 $\rho_b=1700 \text{ kg/m}^3$

Largura da via:  $2b=3,0 \text{ m}$

Figura 6.10 – Via-macijo de fundação utilizado no estudo da interacção via-veículo.

Relativamente ao material circulante, por uma questão de compatibilidade em relação aos estudos apresentados no Capítulo 7, considere-se a circulação do comboio X2000, comboio de velocidade elevada que opera na rede ferroviária sueca. Trata-se de um comboio convencional que apresenta uma configuração composta por um veículo posterior e um veículo anterior com características distintas das carruagens intermédias. Apenas o veículo posterior tem capacidade motriz e o número de veículos intermédios é variável entre 3 e 5. Na Figura 6.11 é representada a geometria e distribuição do peso por eixo da configuração do comboio X2000 adoptada no presente estudo.

Um outro factor de peso para a escolha do comboio X2000, em detrimento de outros comboios, porventura mais populares, prende-se com o facto de o autor do presente estudo ter tido acesso a informação relativa às propriedades mecânicas das suspensões e das massas do referido comboio. No Quadro 6.2 sintetizam-se essas propriedades mecânicas.

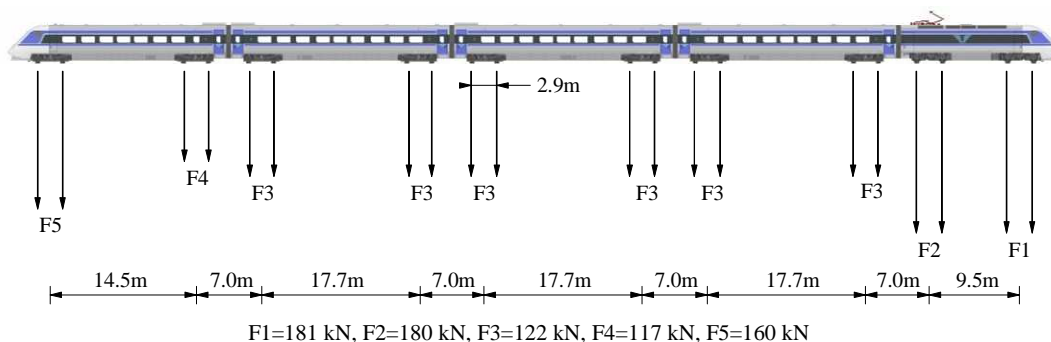


Figura 6.11 – Geometria e distribuição do peso por eixos do comboio X2000.

Quadro 6.2 – Propriedades mecânicas e geométricas do comboio X2000.

		Veículo posterior	Veículos intermédios	Veículo anterior
Caixa	$M_c$ (kg)	48000	31000	35000
	$J_c$ ( $\text{kgm}^2$ )	760000	1450000	1100000
Suspensão secundária	$k_s$ (kN/m)	1000	800	900
	$c_s$ (kNs/m)	70	60	60
Bogie	$M_b$ (kg)	8400	5400	7200
	$J_b$ ( $\text{kgm}^2$ )	12000	5700	7600
	$2 \times l_b$ (m)	9,5	17,7	14,5
Suspensão primária	$k_p$ (kN/m)	2400	1800	2000
	$c_p$ (kNs/m)	80	60	60
Massas não suspensas	$M_r$ (kg)	2050	1300	1300
	$2 \times l_r$ (m)	2,9	2,9	2,9

Os estudos efectuados contemplam duas velocidades de circulação do comboio X2000: 200 km/h e 250 km/h. A discussão da influência da qualidade geométrica da via é efectuada com base na consideração de dois perfis de irregularidades, ambos definidos por recurso à função de densidade espectral de potência dada pela equação [6.53]. Na Figura 6.12 apresentam-se, no intervalo de desenvolvimento longitudinal da via compreendido entre -150 m e 150 m, os perfis de irregularidades adoptados. Ambos os perfis foram gerados aleatoriamente, admitindo-se, para o parâmetro  $w$  da função [6.53], o valor 3,5 e considerando-se valores distintos para o parâmetro  $A$ , em função da qualidade geométrica assumida para a via férrea: para o perfil representado na

Figura 6.12a tomou-se  $A=1,36 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{rad}$ , enquanto para o perfil da Figura 6.12b considerou-se  $A=2,72 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{rad}$ . No que toca à amostragem da função de densidade espectral de potência, ambos os perfis resultam da consideração de 75 amostras discretas, igualmente espaçadas, e compreendendo comprimentos de onda entre os 0,5 m e os 43 m.

Nas secções seguintes discute-se a influência dos diferentes parâmetros na resposta da via e em pontos da superfície livre do terreno localizados ao longo da secção transversal definida por  $x=0$  m. O perfil de irregularidades representado na Figura 6.12a é seguidamente designado por perfil P1, enquanto o perfil da Figura 6.12b é referido como perfil P2. Refira-se ainda que a posição relativa do comboio face ao perfil de irregularidades é definida de modo a que o último eixo do comboio ocupe a posição geométrica definida por  $x=0$  m no instante  $t=0$  s.

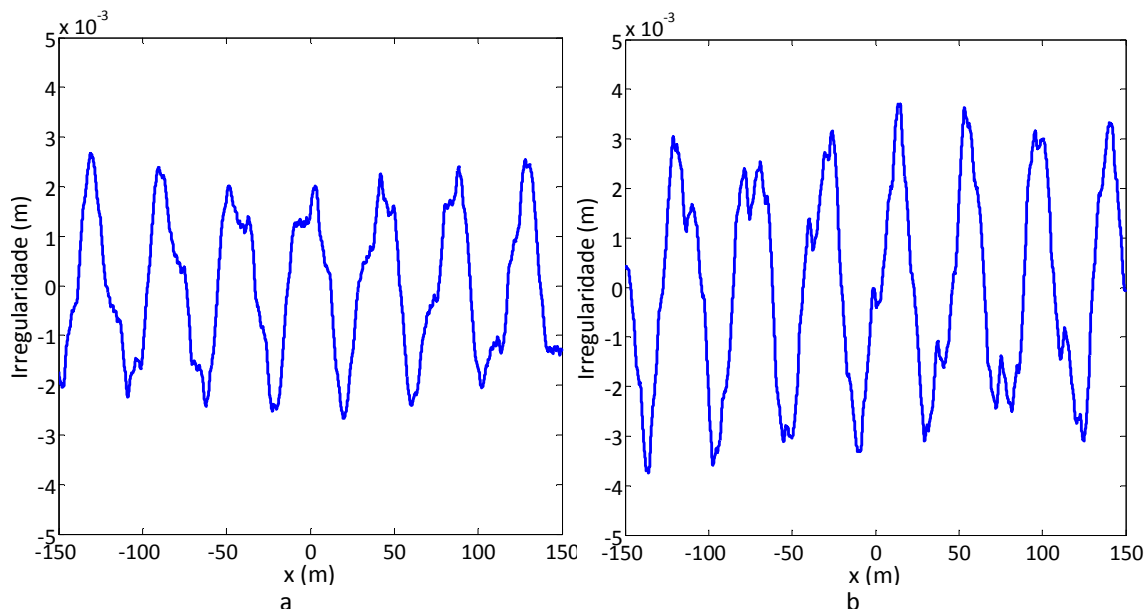


Figura 6.12 – Perfil de irregularidades geométricas da via: a) via de melhor qualidade – Perfil P1; b) via de qualidade média – Perfil P2.

## 6.5.2 A influência da velocidade de circulação e da qualidade da via

### 6.5.2.1 Comportamento dinâmico do sistema acoplado comboio-via

A resposta dinâmica do sistema acoplado comboio-via é descrita pela equação [6.44], a qual reflecte, através de termos independentes, a influência da via (matriz [A]), do veículo (matriz [F]), do contacto roda carril (matriz  $[F^H]$ ), e, como não poderia deixar de ser, a influência do conteúdo em frequência do perfil de irregularidades considerado. Com o intuito de proceder a uma análise profunda do comportamento dinâmico acoplado discute-se, em seguida, alguns dos aspectos principais dos termos das matrizes anteriormente referidas.

O contributo da via-maciço para a resposta dinâmica do sistema acoplado comboio-via é definido através da matriz  $[A]$ , cujos termos são dados pela expressão [6.36]. Analisando essa expressão e recordando o conceito de receptância introduzido no Capítulo 4, facilmente se conclui que os termos da diagonal da referida matriz não são mais do que a receptância da via avaliada num referencial móvel. Na Figura 6.13 apresenta-se a evolução dos termos  $A_{ii}$  em função da frequência de oscilação do eixo para as velocidades  $c=0$  km/h,  $c=200$  km/h e  $c=250$  km/h. Um aspecto interessante salientado pela figura prende-se com o facto do pico ressonante associado à existência de um estrato mais deformável sobre o semi-espaço mais rígido sofrer uma translação para frequências mais reduzidas à medida que a velocidade de circulação aumenta. Este fenómeno deve-se ao efeito de Doppler induzido pelo carácter móvel da solitação, tal como já discutido em capítulos anteriores da presente dissertação. Outro reflexo importante da velocidade de circulação prende-se com o incremento do valor da receptância, na gama das frequências reduzidas, com o aumento da velocidade de circulação. Este efeito era expectável, uma vez que para velocidades inferiores à “velocidade crítica” assiste-se à amplificação dinâmica da resposta com o incremento da velocidade de circulação.

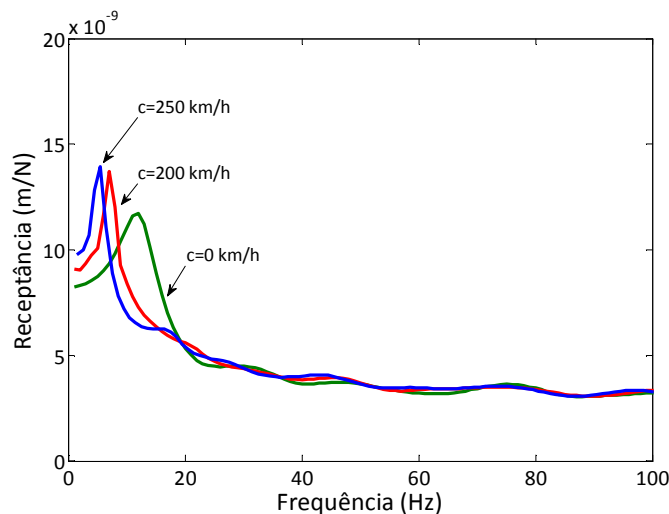


Figura 6.13 – Módulo da receptância directa da via para diferentes velocidades de circulação.

Passando agora à análise da resposta dinâmica do sistema acoplado veículo-via-maciço, a Figura 6.14 apresenta a evolução do primeiro e quinto termos da diagonal da matriz  $([F]+[F^H]+[A])^{-1}$  em função da frequência de excitação. Recorde-se que o primeiro termo da diagonal relaciona a força de interacção dinâmica desenvolvida pelo primeiro eixo da locomotiva do comboio com a irregularidade da via por este experimentada. Como é evidente, o significado físico do quinto termo da diagonal da referida matriz é em tudo idêntico ao do primeiro, sendo que nesse caso se refere ao primeiro eixo do primeiro veículo intermédio do comboio.

A observação da Figura 6.14 sugere desde logo o seguinte comentário: a velocidade de circulação não influencia de uma forma significativa a rigidez dinâmica do sistema acoplado veículo-via. Esta conclusão é corroborada pelo facto da influência da velocidade de circulação na receptância da via ser pouco significativa para frequências superiores a 20 Hz, como aliás ilustra a Figura 6.13. Contudo, realce-se que esta conclusão não pode ser estendida a situações em que a velocidade de circulação se aproxime da velocidade crítica do sistema via-macizo, tal como já constatado por Lombaert e Degrande [66].

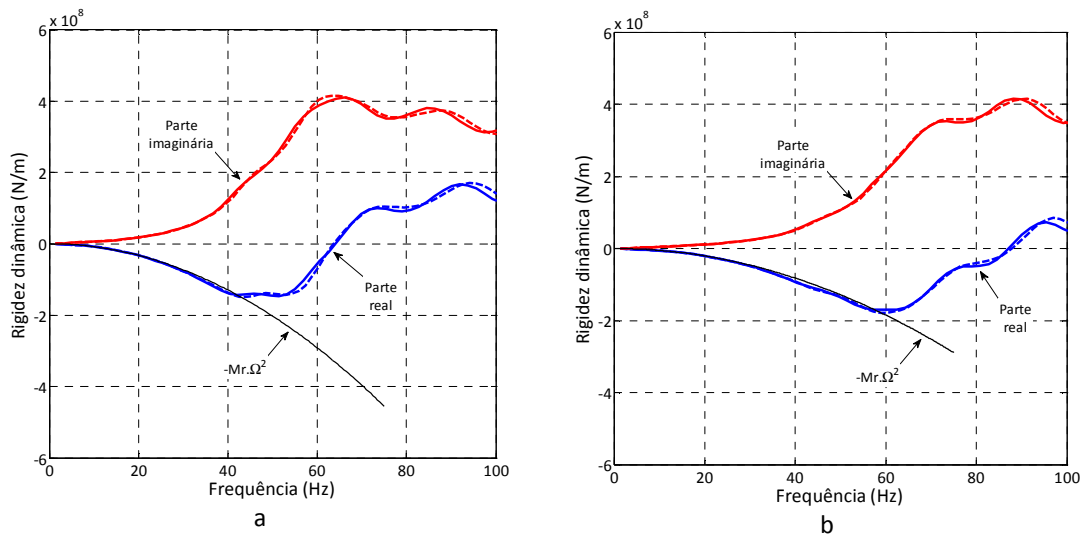


Figura 6.14 – Parte real e imaginária de termos da diagonal da rigidez dinâmica do sistema acoplado veículo-via (linha contínua –  $c=250$  km/h; linha interrompida –  $c=200$  km/h): a) primeiro eixo do comboio; b) quinto eixo do comboio.

Um outro aspecto importante evidenciado pelos resultados expostos nas Figuras 6.14a e 6.14b prende-se com o facto de a rigidez dinâmica do sistema acoplado comboio-via ser dominada, na gama de frequências mais baixa, pela inércia da massa não suspensa. Como se pode observar nas figuras, na referida gama de frequências existe uma concordância quase perfeita entre a parte real dos termos representados e a curva definida por  $-Mr.\Omega^2$ . Embora este aspecto seja discutido numa secção posterior do presente capítulo, pode desde já adiantar-se que, devido à presença das suspensões, tanto primária como secundária, a partir de poucos Hertz assiste-se ao isolamento das massas semi-suspensas (bogies) e das massas suspensas (caixas). Na Figura 6.14a observa-se ainda que para frequências próximas de 64 Hz a parte real da rigidez dinâmica anula-se e a parte imaginária atinge o valor máximo, o que corresponde à ressonância da massa não suspensa do primeiro eixo da locomotiva sobre a via. Comportamento similar pode também ser verificado na Figura 6.14b em torno dos 87 Hz. A diferença na frequência de ressonância do primeiro para o quinto eixo é justificada, principalmente, pelo facto da massa dos eixos da locomotiva ser substancialmente superior à dos eixos dos veículos intermédios.



### 6.5.2.2 Forças de interacção dinâmica comboio-via

As forças de interacção dinâmica comboio-via são determinadas atendendo ao comportamento dinâmico do sistema constituído por estas duas estruturas e ao perfil de irregularidades percebido por cada um dos eixos do comboio (ver equação [6.44]). A velocidade de circulação, a par das propriedades mecânicas do material circulante, é talvez o parâmetro mais influente na geração de forças de interacção dinâmica entre o comboio e a via férrea. A importância deste parâmetro advém, não tanto da interferência que o mesmo possa apresentar no comportamento dinâmico do sistema acoplado comboio-via, como já discutido na subsecção anterior, mas, principalmente, devido ao facto de o aumento da velocidade implicar um incremento da amplitude das irregularidades associadas a uma dada frequência. A tradução matemática deste efeito é ilustrada pelas equações [6.4] a [6.8].

Passando ao estudo paramétrico, na Figura 6.15 apresenta-se a evolução do valor absoluto da força de interacção dinâmica, desenvolvida no primeiro e quinto eixos do comboio, em função da frequência associada às irregularidades geométricas da via.

Duas conclusões principais, embora algo triviais, podem ser de imediato retiradas da análise da Figura 6.15: i) quanto mais elevada a velocidade de circulação maior a amplitude das forças de interacção dinâmica; ii) a amplitude das forças de interacção dinâmica é tanto mais elevada quanto pior for a qualidade de alinhamento geométrico da via.

Passando agora a uma análise mais pormenorizada dos resultados, é interessante notar que para frequências muito baixas, próximas de 1 Hz, a amplitude das forças de interacção atinge valores muito elevados. Este facto, patente para ambos os eixos e todas as velocidades de circulação e perfis de irregularidades, está relacionado com a proximidade desta gama de frequências da frequência de ressonância da caixa dos veículos sobre a suspensão secundária. Um outro pico na resposta é também observado próximo dos 4 Hz, correspondendo à ressonância dos bogies. Relativamente ao primeiro eixo, o maior conteúdo em frequência encontra-se compreendido entre os 40 Hz e os 70 Hz, sendo tanto mais próximo do limite inferior quanto maior é a velocidade de circulação. Por seu lado, no que toca ao quinto eixo, embora a amplitude das forças de interacção dinâmica seja consideravelmente inferior à verificada no primeiro eixo do comboio, o maior conteúdo em frequência estende-se para frequências mais elevadas, o que já seria expectável tendo em consideração os resultados expostos na Figura 6.14.

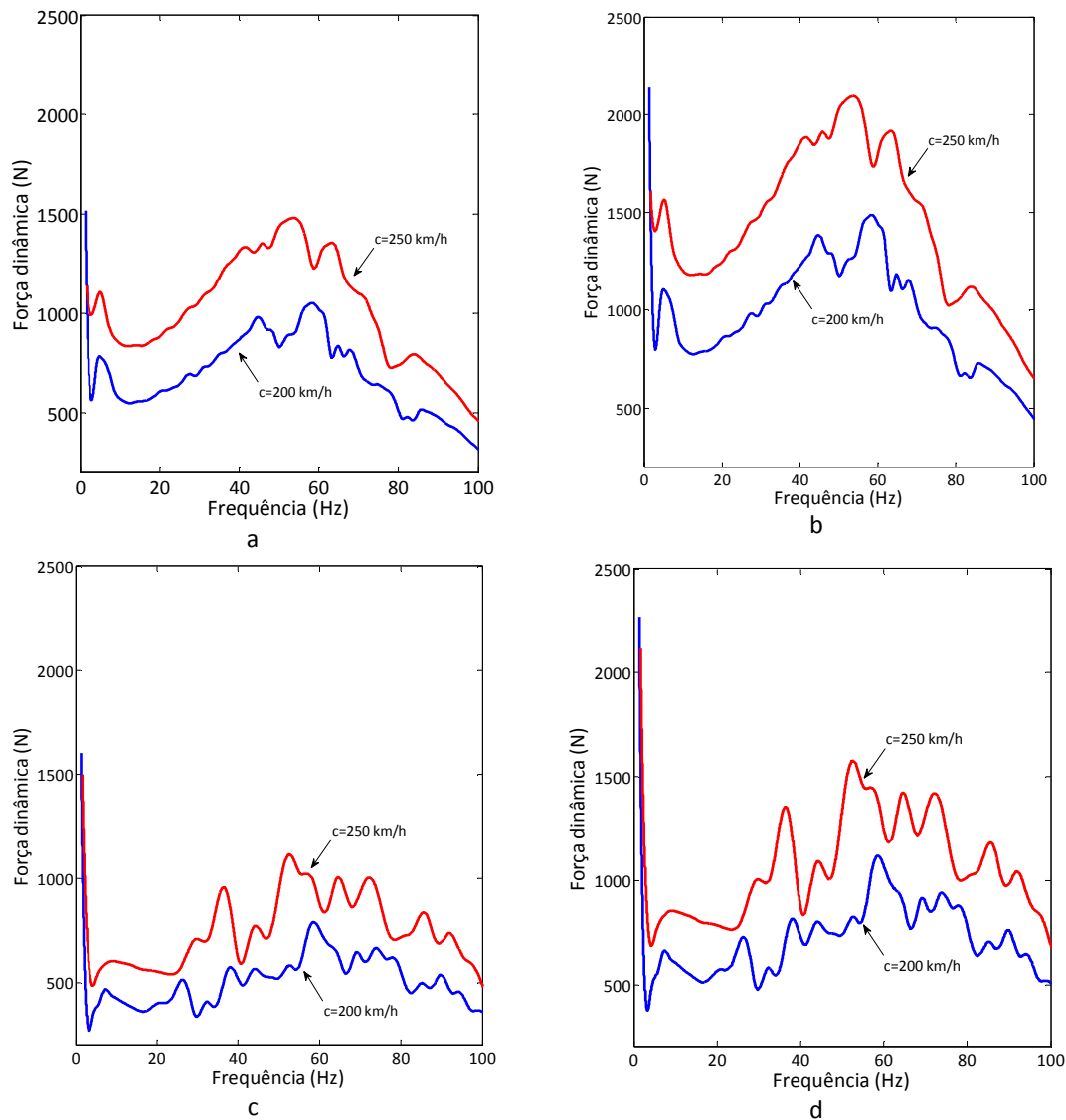


Figura 6.15 – Força de interação dinâmica comboio-via: a) primeiro eixo, via com perfil P1; b) primeiro eixo, via com perfil P2; c) quinto eixo, via com perfil P1; d) quinto eixo, perfil P2.

### 6.5.2.3 Resposta dinâmica da via férrea

A Figura 6.16 apresenta a velocidade vertical de vibração do carril, no ponto  $x=0$  m, devido à passagem do comboio X2000 à velocidade de 200 km/h sobre a via férrea com o perfil de irregularidades P2. Tanto no registo temporal como na representação no domínio da frequência, encontram-se sobrepostos aos resultados provenientes do cálculo considerando a excitação total (mecanismos quasi-estático e dinâmico) os resultados enunciados de um cálculo em que apenas a excitação quasi-estática é atendida.

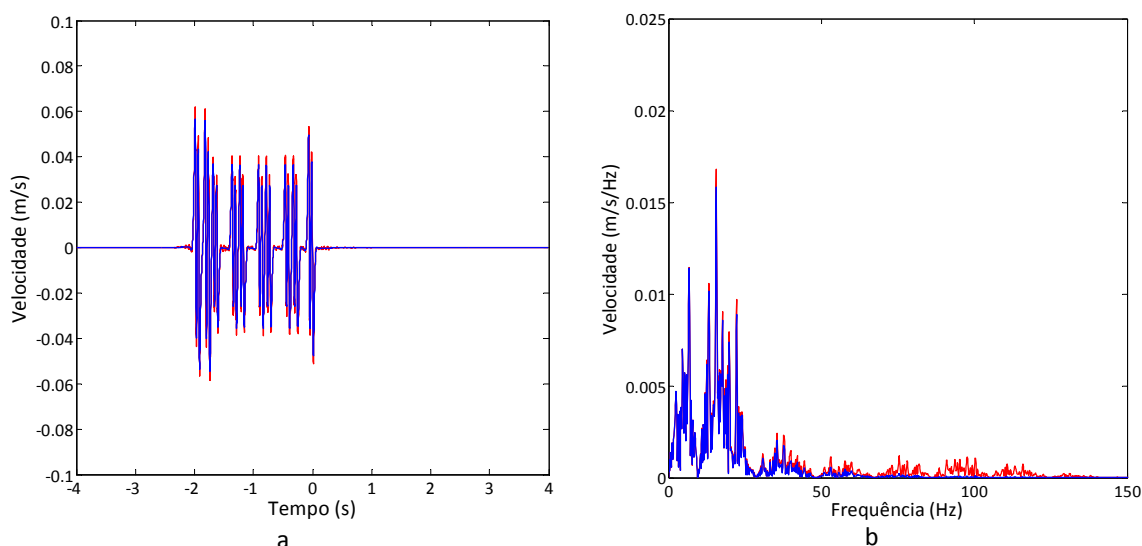


Figura 6.16 – Velocidade vertical do carril devido à passagem do comboio X2000 à velocidade de 200 km/h na via férrea com perfil P2: a) registo temporal; b) conteúdo em frequência (linha vermelha – mecanismo quasi-estático + dinâmico; linha azul – mecanismo quasi-estático).

Como se pode verificar, a passagem de cada um dos eixos do comboio é perfeitamente perceptível no registo temporal (Figura 6.16a). Para além desse facto, a consideração apenas da excitação quasi-estática conduz a valores de pico da velocidade vertical muito semelhantes aos obtidos considerando a excitação total. Este efeito também se encontra bem patente no registo no domínio da frequência (Figura 6.16b), onde se pode constatar que o maior conteúdo em frequência da resposta ocorre no intervalo 0 - 50 Hz, gama de frequências dominada pelo mecanismo de excitação quasi-estático. Para frequências superiores a 50 Hz, o mecanismo de excitação dinâmica tem preponderância sobre o quasi-estático, embora a energia associada a esta gama de frequências seja diminuta face à verificada na gama de frequências mais baixa. Dado o facto de o comboio X2000 não apresentar distância entre bogies constante para todos os veículos, a identificação das frequências associadas à passagem de cada um dos eixos do comboio pela secção de referência torna-se complexa, não sendo facilmente escrutinada na Figura 6.16b.

O efeito da velocidade de circulação sobre a resposta dinâmica do carril na secção de referência pode ser analisado comparando os resultados expostos na Figura 6.16 com os homólogos ilustrados na Figura 6.17, sendo que os últimos se referem à velocidade de circulação de 250 km/h. Como se pode verificar, o incremento da velocidade de circulação dá origem a maiores valores de pico da velocidade de vibração no carril. A comparação da resposta no domínio da frequência permite ainda constatar que o aumento da velocidade de circulação leva ao espalhamento do espectro de resposta para frequências mais elevadas. Relativamente à participação do mecanismo de excitação quasi-estático para a resposta do carril, os resultados agora representados na Figura 6.17 sugerem uma conclusão idêntica à anteriormente

apresentada, ou seja, a existência de preponderância do mecanismo de excitação quasi-estático face ao mecanismo de excitação dinâmica.

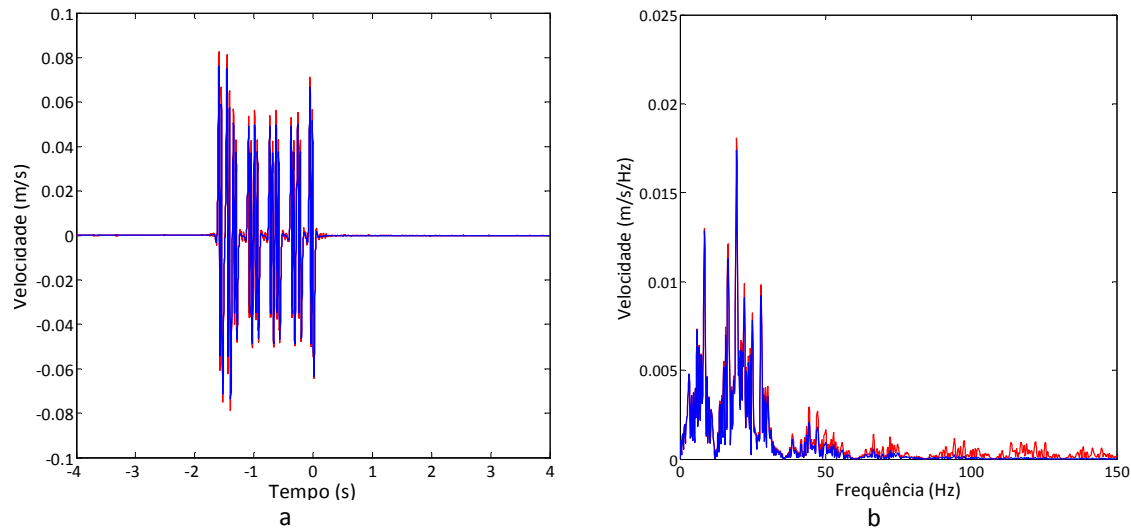


Figura 6.17 – Velocidade vertical do carril devido à passagem do comboio X2000 à velocidade de 250 km/h na via férrea com perfil P2: a) registo temporal; b) conteúdo em frequência (linha vermelha – mecanismo quasi-estático + dinâmico; linha azul – mecanismo quasi-estático).

Relativamente à resposta dinâmica da travessa, a Figuras 6.18 e 6.19 apresentam o registo de velocidade vertical da travessa na secção de referência ( $x=0$  m), devido à passagem do comboio às velocidades de 200 km/h e 250 km/h, respectivamente.

A generalidade das observações acima apresentadas é extensível para a resposta da travessa. A comparação entre os registos da velocidade vertical da travessa com os homólogos referentes ao carril permite comprovar que, tal como expectável, a presença das palmilhas se traduz por uma atenuação dos níveis de vibração. Esta conclusão é alcançada tanto comparando o registo no domínio do tempo como o no domínio da frequência, sendo contudo de referir que é nas frequências mais elevadas que a presença das palmilhas é mais eficiente na redução da vibração transmitida do carril para a travessa.

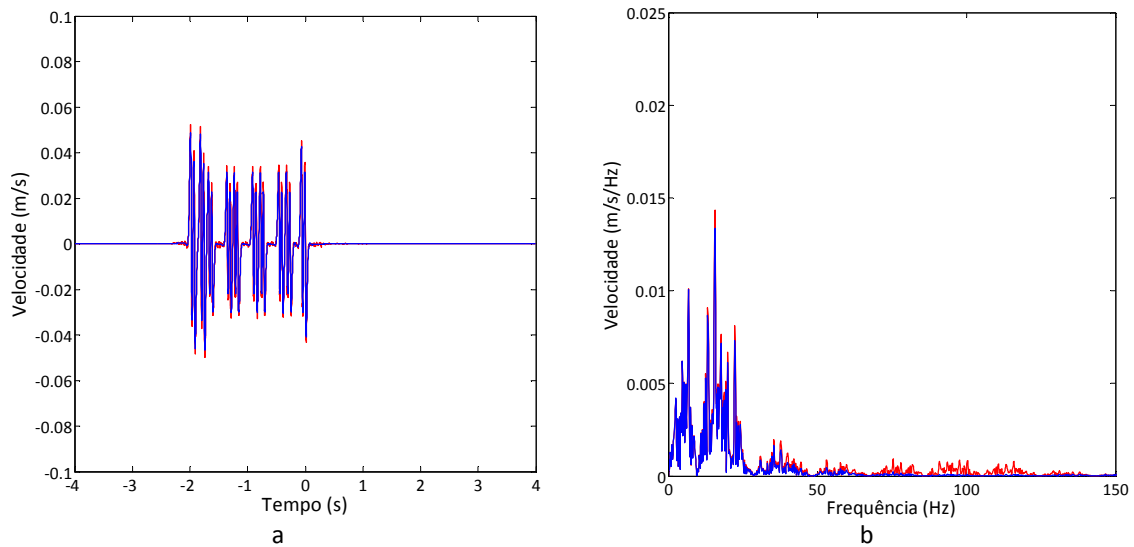


Figura 6.18 – Velocidade vertical da travessa devido à passagem do comboio X2000 à velocidade de 200 km/h na via férrea com perfil P2: a) registo temporal; b) conteúdo em frequência (linha vermelha – mecanismo quasi-estático + dinâmico; linha azul – mecanismo quasi-estático).

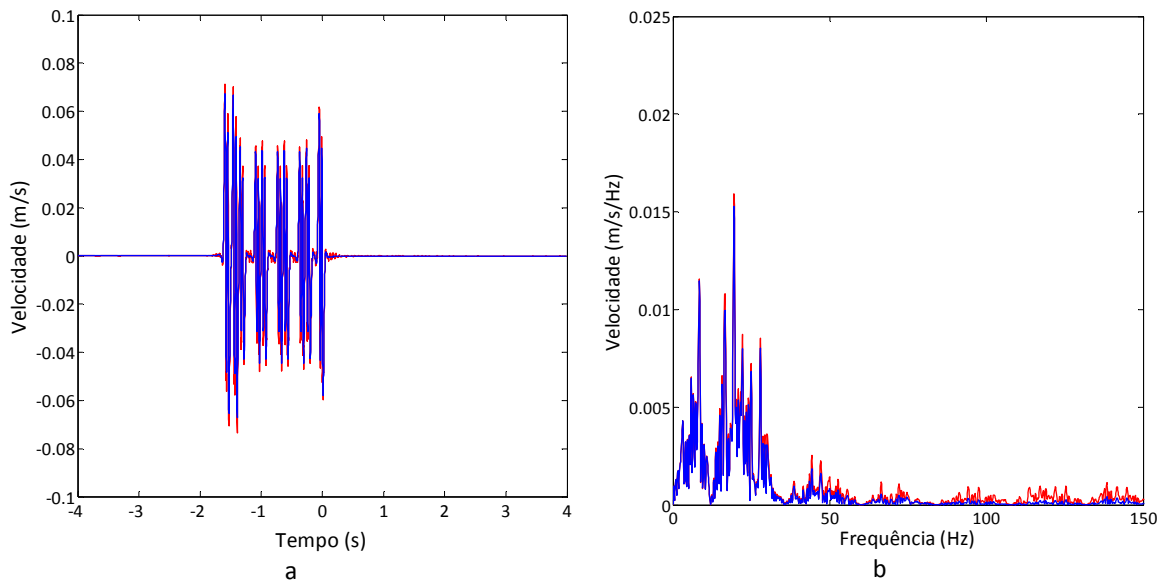


Figura 6.19 – Velocidade vertical da travessa devido à passagem do comboio X2000 à velocidade de 250 km/h na via férrea com perfil P2: a) registo temporal; b) conteúdo em frequência (linha vermelha – mecanismo quasi-estático + dinâmico; linha azul – mecanismo quasi-estático).

#### 6.5.2.4 Resposta dinâmica na vizinhança da via férrea

Se o conhecimento do comportamento dinâmico da via férrea para a passagem do comboio é um factor importante no contexto da Engenharia Ferroviária, igualmente significativa é a avaliação das vibrações que se propagam pelo maciço de fundação. Muito embora os níveis de vibração induzidos pelo tráfego ferroviário não sejam, regra geral, susceptíveis de causar danos estruturais em edificações, podem contudo provocar desconforto nos residentes ou inibir a utilização de equipamentos sensíveis no interior desses mesmos edifícios. Nesta secção discutem-se alguns dos aspectos das vibrações induzidas pelo tráfego ferroviário nas imediações da via férrea. Com tal

objectivo consideram-se três pontos de observação localizados à superfície do terreno, pertencentes à secção transversal definida por  $x=0$  m, e distantes de 6 m, 12 m e 24 m do eixo da via, sendo estes últimos, de ora em diante designados por ponto A, ponto B e ponto C, respectivamente. Seguindo uma linha de coerência face aos resultados já apresentados, admite-se que a via férrea tem um perfil de irregularidades geométricas correspondente ao acima designado por perfil P2.

A Figura 6.20 mostra o registo temporal das velocidades verticais experimentadas nos três pontos de observação para as duas velocidades de circulação do comboio anteriormente mencionadas. Por forma a permitir a fácil interpretação da participação de cada um dos mecanismos de excitação, o registo temporal da resposta dinâmica induzida pelo mecanismo de excitação quasi-estático encontra-se sobreposto à história temporal de velocidade vertical experimentada pelo respectivo ponto de observação.

Uma primeira leitura da globalidade dos resultados expressos na Figura 6.20 sugere desde logo o seguinte comentário: ao contrário do que se verifica na via férrea, a resposta dinâmica nos pontos de observação localizados à superfície do terreno é condicionada, principalmente, pelo mecanismo de excitação dinâmica, sendo o contributo do mecanismo de excitação quasi-estático diminuto e confinado à gama de frequências mais baixa, indo ao encontro da recente interpretação teórica efectuada por Xia et al. [267]. Este aspecto é também corroborado pela análise dos resultados apresentados na Figura 6.21, onde a velocidade vertical experimentada nos pontos de observação é representada no domínio da frequência. Neste domínio é possível constatar que o contributo do mecanismo de excitação quasi-estático está confinado a uma gama de frequências até cerca de 15 Hz, com tendência para diminuir com o aumento da distância entre o ponto de observação e a fonte de excitação. Como se compreende, nos casos em que a velocidade de circulação se aproxime ou ultrapasse a velocidade crítica do sistema, a preponderância da excitação dinâmica sobre a excitação quasi-estática poderá não ser verificada, pois a velocidade de circulação induz ela própria um fenómeno de ressonância no sistema viamaciço. Esta conclusão justifica a falta de acuidade dos modelos de previsão baseados na metodologia proposta por Krylov [278, 279], tais como os sugeridos nas referências bibliográficas [41, 70, 193] entre outras; com efeito o método proposto por Krylov apenas contempla o mecanismo de excitação quasi-estático, o que se traduz como claramente insuficiente quando o domínio de interesse se afasta da proximidade da via férrea.

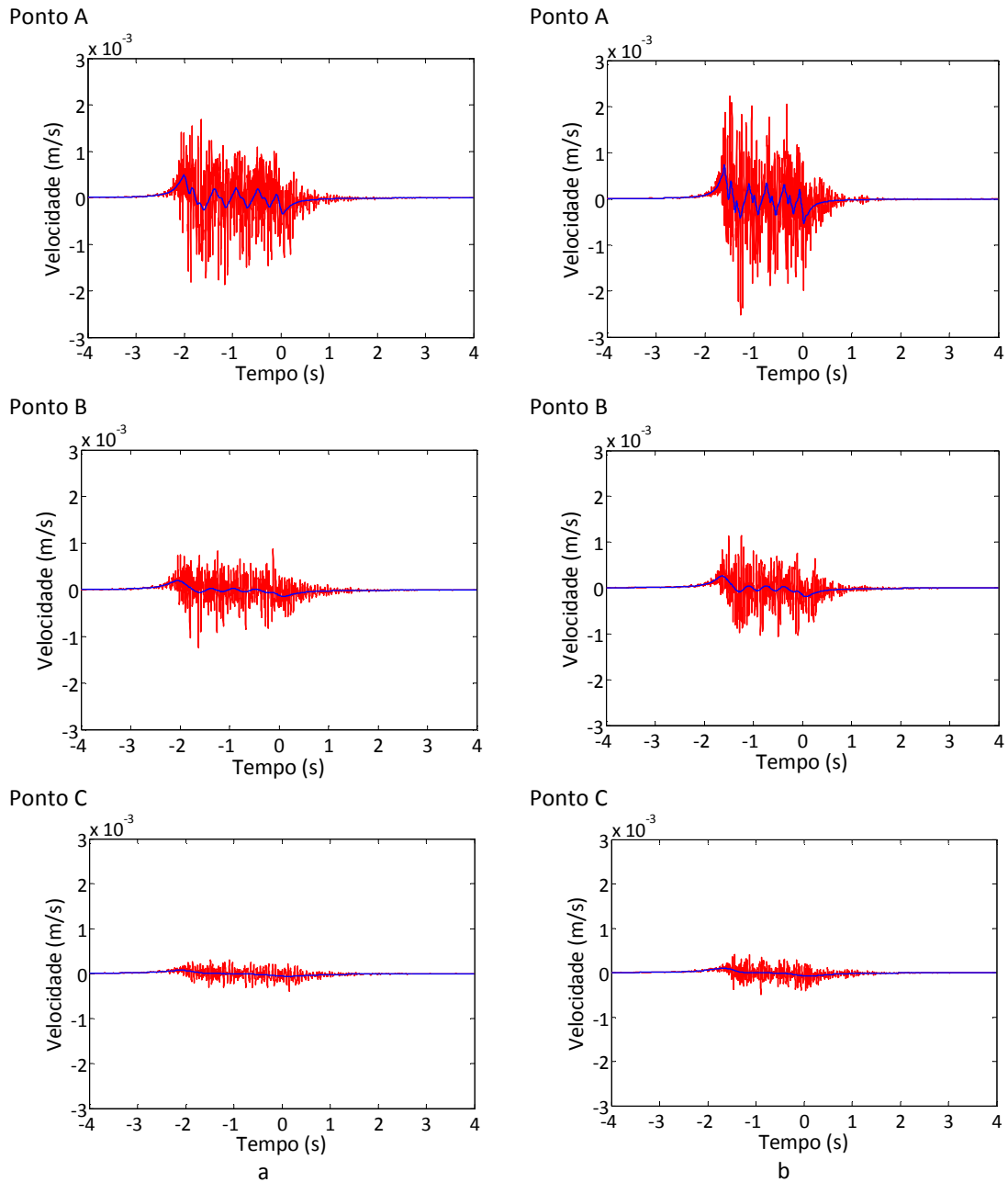


Figura 6.20 – Registo temporal da velocidade vertical experimentada nos pontos de observação localizados à superfície do maciço de fundação durante a passagem do comboio X2000 à velocidade de: a)  $c=200$  km/h; b)  $c=250$  km/h (linha vermelha – mecanismo quasi-estático + dinâmico; linha azul – mecanismo quasi-estático).

Como era expectável, a amplitude da velocidade vertical segue uma tendência de diminuição com o acréscimo da distância entre o ponto de observação e a via férrea. Esta atenuação deve-se tanto ao amortecimento geométrico como ao amortecimento material. A diferença do efeito dos dois mecanismos de atenuação pode ser analisada comparando os registos ilustrados na Figura 6.21. Como se pode verificar, existe uma maior atenuação das frequências mais elevadas em detrimento das mais baixas. Tal facto deve-se ao amortecimento material já que a componente geométrica do amortecimento é independente da frequência de excitação.

Comparando a configuração dos registos temporais representados na Figura 6.20 com os registos respectivos a pontos de observação localizados na via, existem dois aspectos que merecem um comentário especial: i) nos pontos localizados na vizinhança da via a passagem dos eixos do comboio deixa de ser identificada; este efeito deve-se essencialmente à inversão de predominância dos mecanismos; ii) os registos temporais em pontos adjacentes à via são mais longos, fazendo-se sentir a vibração livre do maciço após a passagem do último eixo do comboio pela secção de referência.

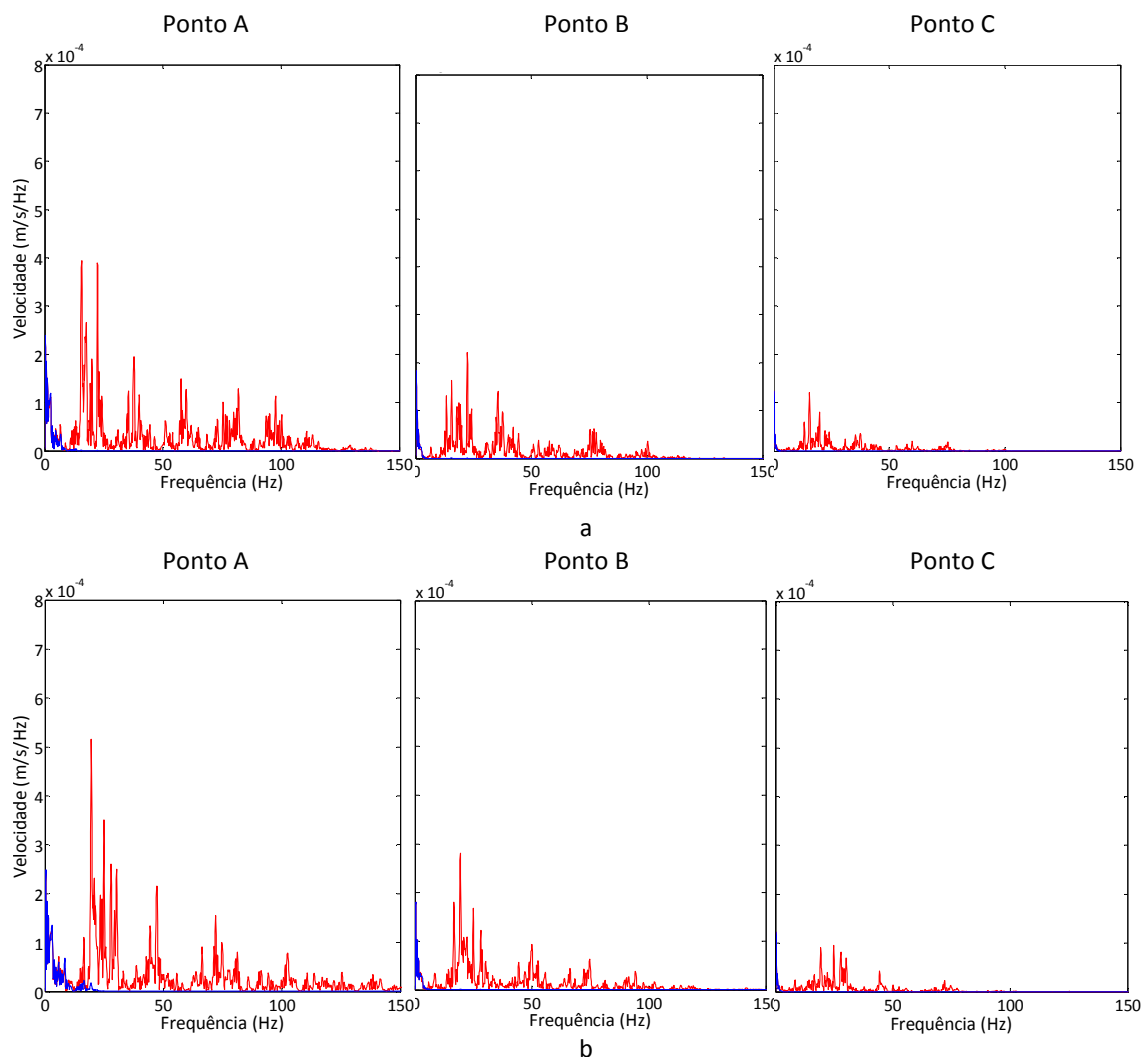


Figura 6.21 – Conteúdo em frequência da velocidade vertical experimentada nos pontos de observação localizados à superfície do maciço de fundação durante a passagem do comboio X2000 à velocidade de: a)  $c=200$  km/h; b)  $c=250$  km/h (linha vermelha – mecanismo quasi-estático + dinâmico; linha azul – mecanismo quasi-estático).

Comparando agora os resultados homólogos respeitantes a diferentes velocidades de circulação é possível identificar, tanto no registo temporal (Figura 6.20) como na representação no domínio da frequência (Figura 6.21), que o aumento da velocidade de circulação implica um acréscimo da



resposta dinâmica nos pontos mais próximos da via. Este efeito tende a evanescer-se à medida que a distância entre o ponto de observação e a via aumenta.

Na Figura 6.22 mostram-se os espectros de banda de terço de oitava respeitantes à velocidade vertical experimentada pelos pontos de observação. Este tipo de representação possui algumas vantagens face às representações anteriormente ilustradas, nomeadamente pela facilidade de leitura comparativa dos resultados que os mesmos permitem. Para além dessa notória vantagem, este tipo de representação tem vindo a ser adoptada por uma boa parte da regulamentação internacional, justificando-se assim a sua aplicação no presente contexto.

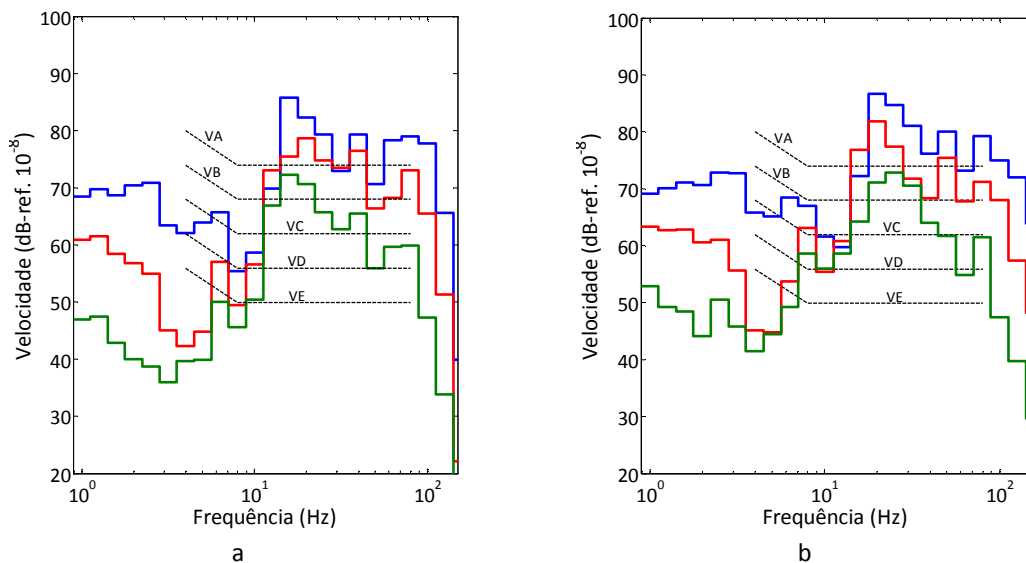


Figura 6.22 – Representação em banda de terço de oitava da velocidade vertical experimentada nos pontos de observação devido à passagem do comboio X2000 à velocidade de: a)  $c=200$  km/h; b)  $c=250$  km/h ( linha azul – ponto A; linha vermelha – ponto B; linha verde – ponto C).

Sobrepostas aos espectros de banda de terço de oitava encontram-se as curvas de limite admissível de vibração para equipamentos sensíveis, tal como propostas por Gordon [280]. Esclareça-se que a introdução dos referidos limites na Figura 6.22 tem um carácter meramente indicativo, pois, como se compreende, os hipotéticos equipamentos são instalados no interior de edificações, cujas propriedades mecânicas podem amplificar ou não as vibrações que lhes são transmitidas ao nível da fundação.

A comparação entre os resultados expostos na Figura 6.22a e os homólogos representados na Figura 6.22b permite constatar que o incremento da velocidade de circulação acarreta um aumento das velocidades verticais experimentadas pelos pontos de observação.

### **6.5.3 *Influência da estratégia de modelação do material circulante***

#### **6.5.3.1 Estratégias de modelação alternativas**

O estudo comparativo apresentado na secção anterior permite concluir que a resposta dinâmica na vizinhança da via é controlada, essencialmente, pelo mecanismo de excitação dinâmico. Sendo as forças dinâmicas resultantes da interacção comboio-via, é relevante discutir e analisar a influência das propriedades mecânicas do comboio na resposta global do sistema. Apesar do modelo proposto para a simulação dos veículos que constituem o comboio ser relativamente simples, não são raras as situações em que o analista se vê confrontado com a carência de informação necessária à definição do modelo, sendo por isso útil avaliar a acuidade de propostas de modelação do comboio mais simples do que a anteriormente apresentada.

Como é bem sabido, os comboios de passageiros e, especialmente, os dedicados a tráfego de alta velocidade, apresentam requisitos de conforto muito elevados. Esta exigência leva a que os sistemas de suspensão do veículo isolem a massa suspensa (caixa) e as massas semi-suspensas (bogies) a partir de frequências relativamente baixas. Atendendo a este facto, Lombaert et al. [5, 66] sugere que, para o estudo da geração de vibrações pelo tráfego ferroviário, a modelação do comboio seja simplificada, considerando apenas as massas não suspensas. A mesma estratégia de modelação do comboio é também seguida por Gupta et al. [190, 245] no estudo de vibrações induzidas por tráfego ferroviário em túneis. Apesar da consistência teórica implícita à justificação da estratégia de modelação adoptada pelos referidos autores ser indiscutível, estes não apresentam qualquer evidência numérica que permita melhor justificar os pressupostos admitidos na concepção dos seus modelos. Na presente secção discute-se a influência das massas suspensas e semi-suspensas do comboio no mecanismo de geração de forças de interacção comboio-via. Com tal intuito consideram-se as três possibilidades de modelação dos veículos do comboio X2000 indicadas na Figura 6.23: i) o modelo de veículo representado na Figura 6.23a compreende todas as massas principais, servindo de referência já que é o mais completo; ii) na Figura 6.23b encontra-se representado um modelo no qual a participação da massa suspensa no movimento dinâmico do sistema é negligenciada; lii) por último, no modelo representado na Figura 6.23c apenas as massas não suspensas são simuladas, admitindo-se que as restantes massas não têm uma participação relevante.

Seguidamente apresentam-se alguns resultados relativos à influência da estratégia de modelação do veículo nas forças dinâmicas de interacção veículo-via e, conseqüentemente, ao nível da resposta dinâmica nos pontos de observação adjacentes à via férrea. De modo a tornar a exposição mais sintética, e sem qualquer perda de generalidade das conclusões gerais, considera-

se apenas o cenário correspondente à circulação do comboio X2000 com velocidade de 250 km/h, sendo as irregularidades da via férrea caracterizadas pelo perfil P2 (ver Figura 6.12b).

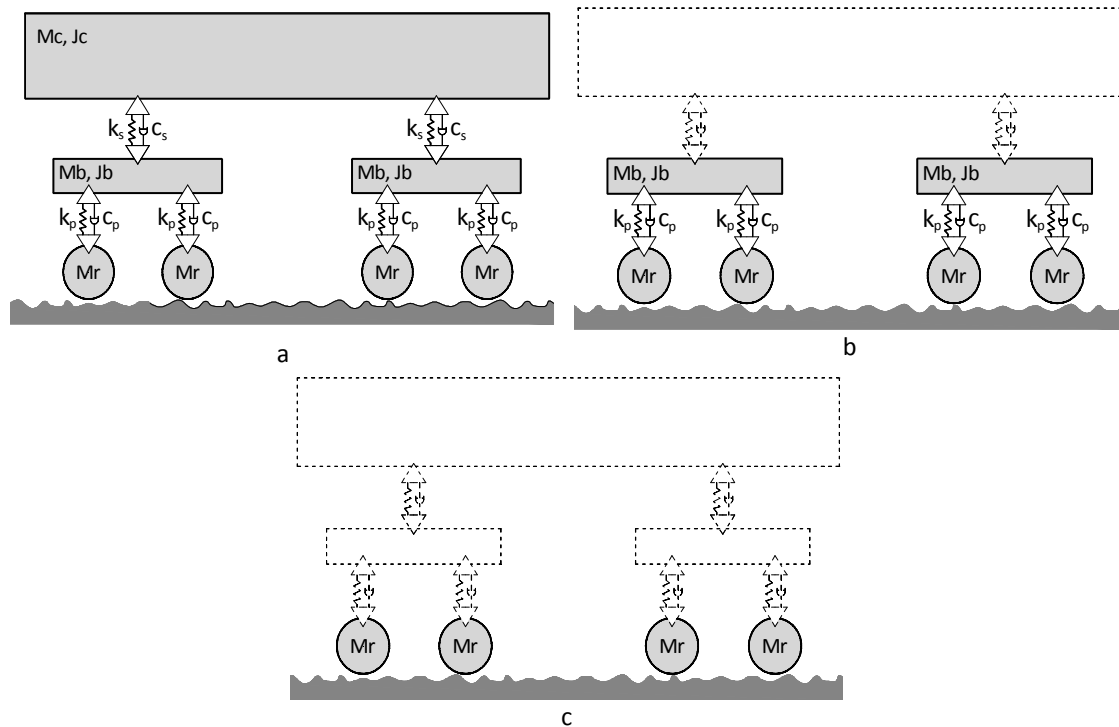


Figura 6.23 – Diferentes estratégias de modelação dos veículos ferroviários por recurso a modelos planos: a) modelo completo; b) modelo de massas semi-suspensas e não suspensas; c) modelo de massas não suspensas.

### 6.5.3.2 Forças de interacção dinâmica comboio-via

A Figura 6.24 apresenta a evolução das forças de interacção dinâmica, desenvolvidas no primeiro (Figura 6.24a) e quinto (Figura 6.24b) eixos do comboio X2000, em função da frequência de excitação percebida nos contactos comboio-via. Para ambos os eixos apresentam-se os resultados obtidos recorrendo às três estratégias de modelação indicadas na Figura 6.23.

Como era expectável, tendo em conta a gama de frequências de interesse, a participação da massa suspensa dos veículos para as forças de interacção dinâmica comboio-via é desprezável. Com efeito, a frequência de ressonância da massa suspensa dos veículos sobre a suspensão secundária corresponde a valores próximos ou mesmo inferiores a 1 Hz, razão pela qual esta massa fica isolada do restante sistema a partir de frequências muito baixas. Este facto está bem patente tanto na Figura 6.24a como na Figura 6.24b, sendo denunciado através da perfeita concordância, para frequências superiores a 10 Hz, entre os resultados obtidos considerando o veículo completo ou apenas os bogies e respectivos eixos. Note-se, contudo, que para frequências inferiores a esse limite, a concordância deixa de se verificar, sendo de realçar o facto de a

suspensão secundária implicar um forte amortecimento da amplitude da resposta associada à ressonância dos bogies, a qual é perfeitamente perceptível, nos resultados oriundos do modelo bogie+eixo, em torno dos 3,8 Hz para o primeiro eixo (Figura 6.24a), e para uma frequência de cerca de 2,9 Hz, no caso do quinto eixo do comboio (Figura 6.24b).

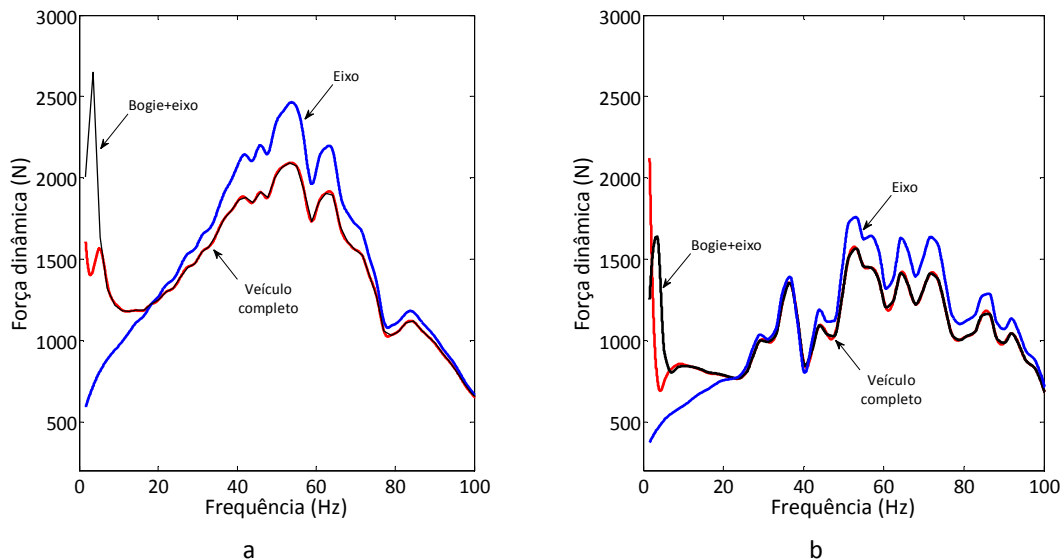


Figura 6.24 – Forças de interação dinâmica avaliadas por diferentes estratégias de modelação do veículo: a) primeiro eixo do comboio; b) quinto eixo do comboio (quinto eixo do comboio).

Seguindo a mesma linha de raciocínio, e visto que a frequência de ressonância dos bogies sobre a suspensão primária é inferior a 5 Hz, seria expectável que, a partir dos 10 Hz a 15 Hz, os resultados referentes ao modelo que apenas atende às massas não suspensas convergissem para os obtidos recorrendo aos outros dois modelos. Porém, tal não se verifica, sendo de notar as seguintes discrepâncias: i) para frequências inferiores a 20 Hz o modelo que apenas atende às massas não suspensas subestima a força de interação; ii) para frequências entre 20 Hz e 85 Hz, no caso do primeiro eixo, e entre 20 Hz e 100 Hz, no caso do quinto eixo, o modelo de massas não suspensas sobrestima a força de interação dinâmica. A última constatação, aparentemente menos conjecturável, é justificada pela ausência da parcela de amortecimento conferida pela suspensão primária no modelo que apenas atende às massas não suspensas. Com efeito, a suspensão primária permite não só o isolamento da massa dos bogies para frequências superiores a 10 Hz, como confere também alguma dissipação energética através do seu amortecedor, minimizando assim a força de interação que o veículo transmite à via.

### 6.5.3.3 Resposta dinâmica nas imediações da via

Na Figura 6.25 apresentam-se os espectros de banda de terço de oitava relativos à velocidade vertical experimentada pelos pontos de observação A e C (com coordenadas (0,6,0) e (0,24,0) respectivamente). Os resultados agora apresentados mostram-se coerentes com as forças de interacção comboio-via anteriormente analisadas. Com efeito, as diferenças entre a velocidade vertical induzida pela passagem do modelo de veículo completo e as homólogas considerando o modelo bogie+eixos são apenas perceptíveis na gama de frequências inferior a 10 Hz.

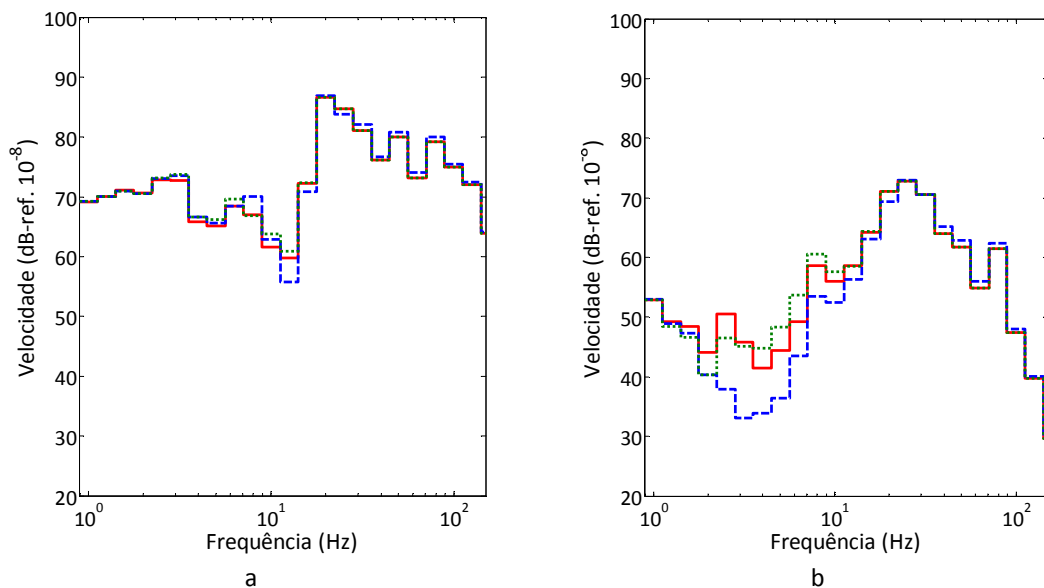


Figura 6.25 – Influência da estratégia de modelação do veículo na velocidade vertical experimentada em pontos de observação à superfície do terreno: a) ponto A; b) ponto C (linha azul – modelo de eixo; linha vermelha – modelo completo; linha verde – modelo de eixo+bogie).

Focalizando a atenção nos resultados relativos ao modelo que apenas atende às massas não suspensas verifica-se que, tanto no ponto A como no ponto C, este modelo sobrestima, ainda que ligeiramente, a resposta na gama de frequências superiores a 20 Hz. Mais evidente é a diferença, no ponto C, entre os resultados oriundos do modelo sob análise e os provenientes do modelo de veículo completo para a gama de frequências inferiores a 10 Hz. Como se pode constatar, o modelo que apenas atende às massas não suspensas conduz a resultados claramente subestimados na gama de frequências referida.

De modo a facilitar a comparação entre os resultados oriundos dos diferentes modelos, na Figura 6.26 representa-se, sob a forma de espectro de banda de terço de oitava, o erro relativo da velocidade vertical verificado nos pontos A, B e C. O erro relativo é determinado tomando como solução de referência o resultado obtido através da consideração do modelo de veículo completo. A Figura 6.26a remete para a comparação entre o modelo bogie+eixo e a solução de referência,

enquanto os resultados apresentados na Figura 6.26b referem-se à comparação entre o modelo de massas não suspensas e a solução de referência.

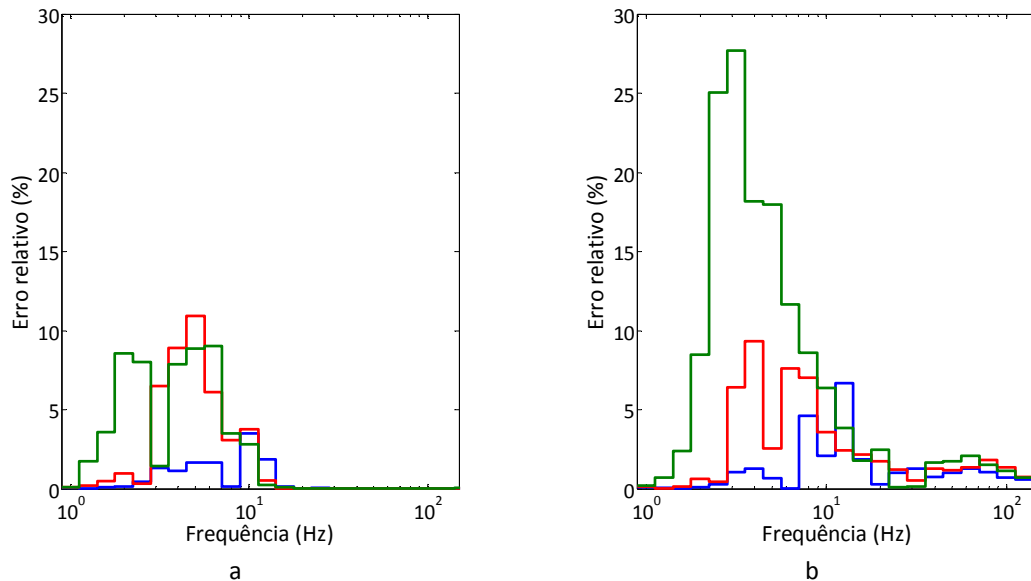


Figura 6.26 – Erro relativo: a) modelo bogie+eixo; b) modelo eixo (azul – ponto A; vermelho – ponto B; verde – ponto C).

Como se encontra bem patente na Figura 6.26a, o modelo bogie+eixos conduz a resultados satisfatórios, sendo de salientar o excelente desempenho do modelo, face à solução de referência, na gama de frequências superior a 15 Hz. Por seu lado, o modelo de massas não suspensas (Figura 6.26b) mostra um desempenho de muito menor qualidade, com tendência a agravar-se à medida que a distância entre o ponto de observação e a via aumenta. É de realçar que na gama de frequências inferior a 10 Hz, a não modelação estrutural das massas semi-suspensas e suspensas do comboio resulta num erro relativo que não pode ser considerado dispiciente. Curiosamente, acima dos 20 Hz o erro relativo induzido pela omissão das massas superiores do veículo não ultrapassa os 3% (em dB), sendo inferior ao presumível tendo em conta a diferença observada nas forças de interacção comboio-via determinadas pelos diferentes modelos (ver Figura 6.24).

Em jeito de conclusão, pode pois afirmar-se que a consideração de modelos estruturais do veículo que atendam à presença das suas massas não suspensas e semi-suspensas é um aspecto importante a ter em conta na simulação de vibrações induzidas pelo tráfego ferroviário. Sem embargo, na gama das baixas frequências, isto é, frequências inferiores a 15 Hz, a participação das massas suspensas do veículo pode tomar relevância, justificando-se, nos casos em que o foco de interesse se centra na referida gama de frequências, a simulação completa do veículo.

## 6.6 Considerações finais e conclusões

No presente capítulo introduz-se a problemática da interacção via-veículo decorrente da existência de imperfeições de nivelamento longitudinal da via férrea. A abordagem a esta temática é realizada por via mecanicista, tendo-se desenvolvido um módulo de cálculo automático, compatível com os modelos anteriormente apresentados, e que permite atender, ainda que de um modo simplificado, às especificidades estruturais do material circulante e sua interacção com a via férrea. Tratando-se de um modelo subestruturado, o resultado de tal análise, correspondendo às forças de interacção dinâmica via-veículo, é então utilizado, em conjunto com o mecanismo de excitação quasi-estático, no estudo da resposta dinâmica da via férrea face à acção de tráfego e das vibrações daí emanadas e que se propagam pelo maciço de fundação.

Seguindo uma linha de coerência face a capítulos anteriores, após a explanação da teoria e hipóteses admitidas na construção do modelo de cálculo, o mesmo é validado através de um pequeno exemplo cujos resultados são confrontados com os enunciados por um programa de cálculo automático comercial. Apesar da simplicidade do exemplo de validação seleccionado é possível aferir a boa acuidade do modelo proposto bem como da sua eficiência computacional.

Após a explanação da formulação adoptada na modelação do comboio e sua interacção com a via férrea é introduzido um exemplo de aplicação em redor do qual se procede a um estudo paramétrico. O estudo efectuado procura não só ilustrar as potencialidades do modelo, agora de uma forma integrada e interagindo com os módulos relativos à simulação da via férrea e maciço de fundação apresentados em capítulos precedentes, mas também avaliar a influência da qualidade geométrica da via férrea, da velocidade de circulação e da estratégia de modelação do comboio na resposta dinâmica da via férrea e nos mecanismos de geração e propagação de vibrações pelo maciço de fundação. Este estudo, de carácter amplo e vocacionado para a compreensão fundamental dos fenómenos, permite retirar diversas ilações, sendo aqui sumariadas as mais significativas:

- i) A resposta dinâmica da via férrea, na gama de frequências de interesse, é praticamente dominada pelo mecanismo de excitação quasi-estático;
- ii) A resposta dinâmica em pontos da superfície do maciço é condicionada, na generalidade dos casos, pelo mecanismo de excitação dinâmica. Deve contudo ressaltar-se os casos em que a velocidade de circulação se aproxime da velocidade crítica do sistema via-maciço,

situação essa não abordada no presente estudo, em que se presume que o mecanismo de excitação dinâmica seja preterido face ao mecanismo quasi-estático;

- iii) O acréscimo da velocidade de circulação implica um acréscimo considerável da magnitude das forças de interacção via-veículo. Contudo, esse acréscimo prende-se, principalmente, com o facto da amplitude da irregularidade percebida num dado ponto de contacto roda-carril e associada a uma dada frequência de excitação ser tanto mais elevada quando maior for a velocidade de circulação;
- iv) Quanto menor for a qualidade de nivelamento longitudinal da via férrea, mais elevada é a magnitude das forças de interacção via-veículo e, conseqüentemente, também o é o nível de vibração percebido em pontos da superfície do maciço adjacentes à via férrea;
- v) As massas não suspensas do comboio são os elementos, desse sistema estrutural, que maior reflexo apresentam na geração de forças dinâmicas via-comboio;
- vi) A comparação entre resultados enunciados por diferentes estratégias de simulação do comboio permite concluir que é admissível a adopção de modelos mais simples do que o modelo completo, nos quais o contributo das massas suspensas para a dinâmica do sistema possa ser negligenciado, a menos que o domínio de interesse esteja focalizada na gama de frequências muito baixa. Contudo, é de todo conveniente, sob pena de se comprometer de alguma forma a acuidade dos resultados, que o modelo estrutural do comboio compreenda as massas não suspensas e semi-suspensas.

Por último, seguindo uma linha de coerência na exposição dos assuntos, cabe aqui referir que as principais conclusões retiradas do estudo aqui apresentado são atendidas nas opções de modelação adoptadas para os estudos decorrentes apresentados nos Capítulos 7 e 8, nos quais se procede à aplicação integrada dos modelos até agora apresentados a dois casos de estudo correspondendo a cenários reais, sendo os resultados vaticinados pelos modelos confrontados com os homólogos avaliados por via experimental.



# 7. Caso de estudo de Ledsgard

---

## 7.1 Preâmbulo

A utilização de modelos numéricos avançados, tais como os apresentados nos capítulos precedentes, constitui uma ferramenta imprescindível para a compreensão teórica dos fenómenos associados à circulação dos comboios, facultando uma interpretação qualitativa da influência dos diversos parâmetros intervenientes e, também quantitativa, se os valores dos parâmetros tiverem a qualidade adequada. Pese embora o interesse de tais análises seja indiscutível, o desenvolvimento de ferramentas numéricas para a previsão da resposta dinâmica da via férrea sob a acção do tráfego carece sempre de validação experimental através da confrontação entre os resultados enunciados por tais modelos e a realidade física observada. Caso tal etapa do desenvolvimento de metodologias de previsão não seja alcançada, fica instalada a dúvida de se a realidade física que se pretende reproduzir é de facto atendida na metodologia em questão, independentemente da garantia da sua acuidade teórica [8].

Dado o carácter dos estudos desenvolvidos na presente dissertação, podem apontar-se duas problemáticas associadas à excitação dinâmica devido ao tráfego ferroviário que, embora complementares, apresentam uma certa individualidade própria. A primeira, talvez mais habitual e perceptível, refere-se à irradiação de vibrações causadas pela passagem do comboio, as quais se propagam pelo maciço de fundação e podem afectar a utilização e/ou habitabilidade de edificações e infraestruturas existentes nas imediações da via (a validação experimental deste fenómeno é devidamente abordada no capítulo subsequente da presente dissertação). A segunda, apenas associada ao tráfego a alta velocidade, reflecte os fenómenos de amplificação dinâmica da resposta da via férrea quando a velocidade de circulação se aproxima da velocidade crítica do sistema via-maciço. O presente capítulo versa justamente sobre a modelação numérica deste segundo aspecto, cuja relevância, já notória à presente data, seguirá, possivelmente, uma tendência de crescimento no futuro próximo face aos desenvolvimentos tecnológicos ao nível do material circulante, os quais permitem já a circulação de comboios de teste a velocidades muito próximas dos 600 km/h; por outro lado, o uso mais corrente de maciços naturais com fracas características mecânicas vai também no sentido de aprofundamento dessa tendência.

Como se compreende, o fenómeno que se aborda no presente capítulo não é passível de ser avaliado experimentalmente através do desenvolvimento de um campo experimental num

ambiente académico, seja pela dificuldade em identificar um cenário geotécnico compatível com a velocidade máxima atingida pelos comboios usuais, seja pelo facto de, caso tal cenário fosse identificado, se submeter a via férrea a condições de tráfego extremamente adversas, não sendo tal aceitável por parte das administrações ferroviárias. Como tal, no presente capítulo, revisita-se o caso de estudo de Ledsgard localizado na linha da costa ocidental (Gotemburgo – Malmo) da rede ferroviária sueca.

O caso de estudo de Ledsgard tem sido recorrentemente utilizado na validação de diferentes formulações teóricas que têm vindo a ser propostas, desde modelos semi-analíticos simples até modelos numéricos tridimensionais complexos [54, 65, 68, 69, 77, 81, 133, 146, 167-170, 202, 227, 235, 262, 281, 282]. Para tal concorrem vários aspectos essenciais, nomeadamente: i) é um dos poucos casos de estudo onde se verifica uma grande proximidade entre velocidade de circulação e velocidade crítica; ii) a existência de informação geotécnica detalhada; iii) o facto de terem sido realizados diversos testes com velocidades de circulação distintas.

O presente capítulo dedica-se ao estudo do caso acima referido, perseguindo dois objectivos principais que se passam a enunciar: i) validação experimental de um dos modelos numéricos propostos; ii) apresentação de uma metodologia inovadora que incorpora os efeitos do comportamento mecânico não linear do solo em função do nível de deformação experimentado, consequência directa da velocidade de circulação.

O capítulo divide-se em duas partes fundamentais. Na primeira parte procede-se à descrição do local e das actividades experimentais levadas a cabo, ao passo que a segunda se refere à modelação numérica deste complexo caso de estudo. Note-se que o autor do presente estudo não teve uma participação directa nas actividades experimentais, até porque estas decorreram durante o ano de 1998.

## **7.2 Descrição do campo experimental de Ledsgard**

### **7.2.1 Localização e enquadramento geral**

Os estudos sobre o local de Ledsgard surgiram devido à necessidade de resolução de um problema concreto verificado logo após a abertura, em 1997, do serviço de comboios X2000 na linha da costa ocidental sueca. A construção da referida infraestrutura ferroviária remonta ao final do século XIX, tendo sofrido obras de adaptação e renovação ao longo da década de 90 do

século passado com vista a dotá-la das condições necessárias à circulação do comboio X2000, à velocidade de 200 km/h.

O aumento da velocidade de circulação, após as obras de renovação, foi perseguido por um conjunto de fenómenos dinâmicos que não se haviam verificado para velocidades inferiores. Em mais de um local verificaram-se vibrações excessivas tanto da via férrea como do solo circundante, afectando inclusivamente os postes da catenária e condicionando a alimentação eléctrica do próprio veículo [283]. Os vários locais onde tal efeito foi identificado tinham como denominador comum o facto de o maciço de fundação ser constituído por formações argilosas muito moles, sendo o caso mais evidente e problemático localizado junto ao local de Ledsgard, poucos quilómetros a norte de Kungsbacka. A Figura 6.2 apresenta a localização geográfica do local. Como se pode verificar, a linha férrea tem um traçado próximo do alinhamento recto, desenvolvendo-se ao longo de um vale, o qual, do ponto de vista geológico-geotécnico, corresponde a um enchimento aluvionar de grande possança (~50 m).

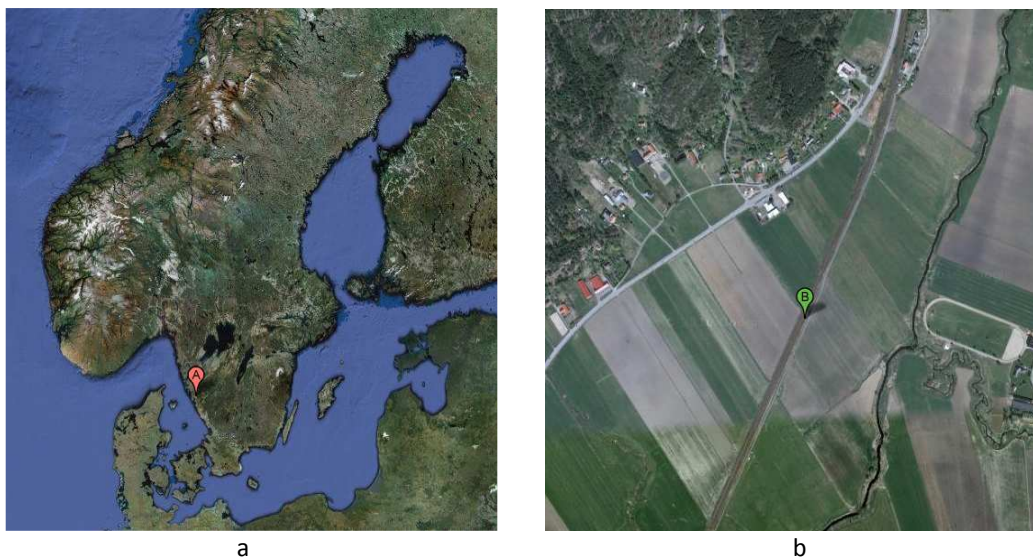


Figura 7.1 – Localização geográfica do local de Ledsgard: a) no contexto da península escandinava; b) pormenor de localização.

Imediatamente após a constatação dos elevados níveis de vibração, a autoridade ferroviária sueca (Banverket) procedeu à restrição da velocidade de circulação para o limite de 160 km/h e, posteriormente, para 130 km/h. Simultaneamente foi constituído um grupo de estudo, liderado pela Banverket e com participação do SGI (Swedish Geotechnical Institute), do NGI (Norwegian Geotechnical Institute), do KTH (Royal Institute of Technology) e da J&W (empresa de consultoria privada), com vista à análise, interpretação e proposta de soluções de mitigação do problema. Os estudos desenvolvidos por esta equipa envolveram a caracterização geotécnica e dinâmica do

maciço de fundação, bem como o desenvolvimento de um campo experimental com vista à quantificação da resposta dinâmica da via e sua dependência da velocidade de circulação.

Nas secções seguintes apresentam-se os principais aspectos dos estudos experimentais desenvolvidos no local de Ledsagard. A informação aqui apresentada resulta da compilação das descrições feitas na seguinte bibliografia: [284], [227], [285], [286].

### 7.2.2 Características da via férrea

A linha da Costa Ocidental Sueca caracteriza-se, na zona de Ledsagard, pela existência de três vias férreas balastradas, paralelas e de bitola europeia. Como se observa no perfil transversal tipo ilustrado na Figura 7.2, o aterro é inexistente, assentando as camadas granulares da via directamente no maciço de fundação sem qualquer tratamento deste, a menos do saneamento de uma camada muito superficial, que se pressupõe rondar os 0,3 m a 0,4 m.

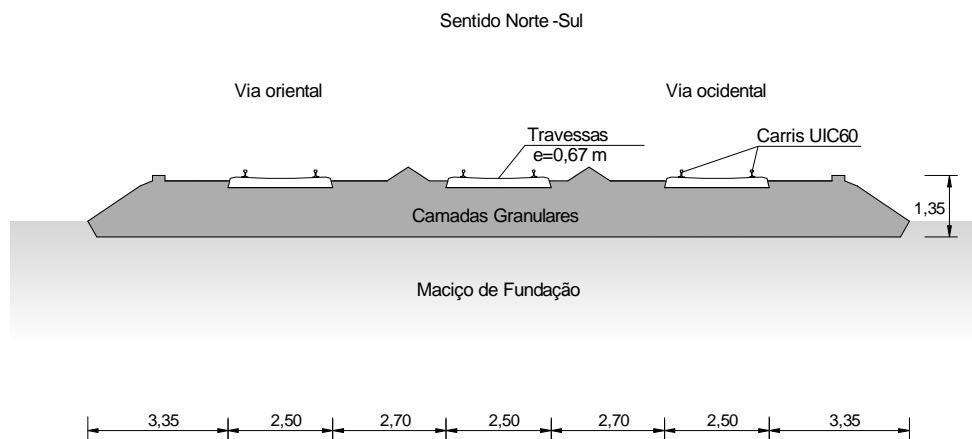


Figura 7.2 – Perfil transversal tipo da via férrea no local de Ledsagard.

Os carris são do tipo UIC60, assentando em travessas de betão pré-esforçado espaçadas de 0,67 m na direcção longitudinal. Subjacente às travessas encontra-se uma camada de balastro com 0,50 m de espessura, a qual assenta numa camada de subbalastro com cerca de 0,4 m de espessura.

Ensaio SASW realizados no local permitiram estimar a velocidade de propagação das ondas S nas camadas granulares que constituem a via férrea em cerca de 200-230 m/s [287]. Segundo os autores do estudo de caracterização mecânica da via férrea, a massa volúmica das camadas granulares deve rondar os 1800 kg/m<sup>3</sup>, sem que seja perceptível uma distinção clara entre camada de balastro e de subbalastro.

Por último, refira-se que a circulação do comboio X2000 ocorre exclusivamente na via ocidental de acordo com o representado na Figura 7.2.

### 7.2.3 Prospecção geotécnica relevante

No âmbito do projecto de investigação liderado pela Banverket foi desenvolvida uma vasta campanha de caracterização geotécnica, envolvendo diversos tipos de ensaios, tanto laboratoriais como de campo [227, 286]. Nesse contexto, para além de ensaios mais correntes da geotecnia clássica, tais como ensaios CPTU e ensaios de laboratório realizados sobre amostras intactas, foram também realizados ensaios de caracterização dinâmica do maciço, os quais se revelaram essenciais para uma boa compreensão do problema em causa. Atendendo a esse facto, na seguinte exposição é feita uma distinção entre os ensaios ditos clássicos, ou usuais na caracterização geotécnica de maciços argilosos moles, e os ensaios de caracterização dinâmica.

#### Ensaio clássico de caracterização geotécnica

A campanha de prospecção geotécnica, liderada pela empresa J&W, englobou a realização de diversos ensaios CPTU para a caracterização dos 20 m mais superficiais do maciço. Foram ainda executados furos de sondagem com o objectivo de recolher amostras intactas a diferentes profundidades tendo em vista a realização de ensaios laboratoriais. O conjunto dos ensaios efectuados permitiu identificar a estratificação do maciço ilustrada na Figura 7.3, a qual é complementada pela informação constante no Quadro 7.1. Foi identificada a presença do nível freático a cerca de 2,0 m de profundidade.

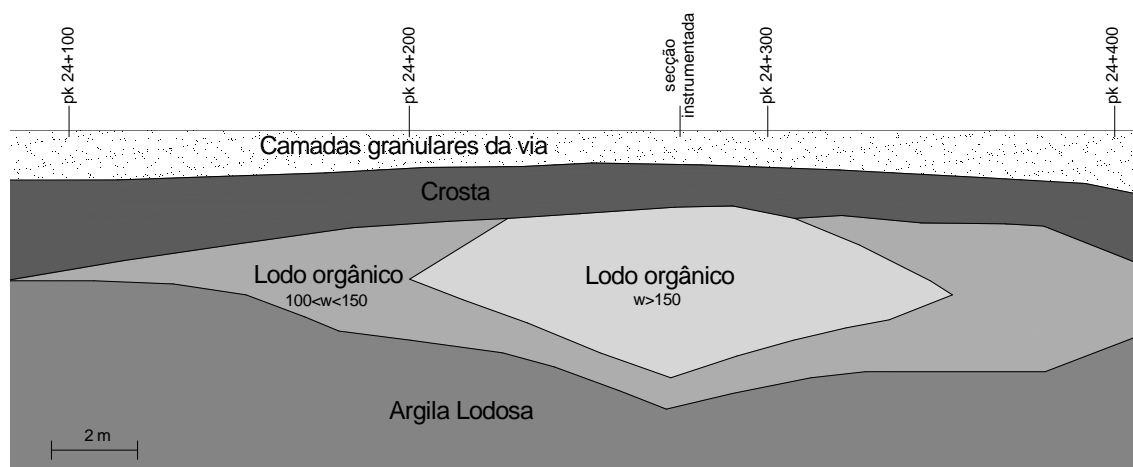


Figura 7.3 – Perfil geotécnico do local de Ledsgard (adaptado de [283]).

Quadro 7.1 – Síntese dos resultados dos estudos laboratoriais efectuados no solo proveniente de Ledsgard (adaptado de [286]).

Profundidade (m)	Formação	Massa volúmica kg/m <sup>3</sup>	Teor em água w (%)	Limite de liquidez w <sub>L</sub> (%)	Sensibilidade	Resistência não drenada c <sub>u</sub> (kPa)
0,0 – 0,3	Crosta siltosa	-	20			
0,3 – 1,0	Crosta siltosa	-	41			
1,0 – 1,7	Lodo	-	171			
2,0	Lodo	1220	191	258	7	20
3,0	Lodo	1260	193	254	7	22
4,0	Lodo/ Arg. lod.	1460	117	118	12	19
5,0	Arg. lodosa	1410	101	97	12	13
6,0	Arg. lodosa	1490	97	94	13	16
7,0	Arg. lodosa	1450	100	108	9	17
8,0	Arg. lodosa	1500	88	83	18	19
10,0	Argila	1460	98	96	16	21
12,0	Argila	1444	98	102	12	22
15,0	Argila	1540	86	112	9	31

Do ponto de vista geotécnico, o local em estudo assume um carácter claramente particular, onde se constata a existência de uma camada de solo argiloso orgânico, muito mole e com uma possança de cerca de 3,0 m, subjacente a uma crosta superficial sobreconsolidada com cerca de 1,0 m de espessura. A camada de solo orgânico estende-se ao longo de cerca de 300 m na direcção longitudinal da via férrea, apresentando um teor em água muito elevado, atingindo mesmo valores na ordem dos 200%. Subjacente à camada de solo orgânico, identifica-se a presença de uma formação argilosa mole, a qual se estende até à profundidade de cerca de 50,0 m onde se presume a existência de uma formação rochosa.

Ensaio complementares sobre amostras do lodo permitiram ainda avaliar o seu índice de plasticidade compreendido entre 115 % e 150 %.

### Ensaio de caracterização dinâmica

A caracterização das propriedades dinâmicas do maciço, aspecto crucial para uma boa interpretação do problema, foi realizada em duas vertentes complementares: ensaios *in situ* e ensaios laboratoriais.

Quanto aos ensaios de campo, foram efectuadas vários cross-hole com vista à caracterização das propriedades de rigidez e amortecimento para níveis de muito pequenas deformações. Uma descrição detalhada desses ensaios pode ser encontrada em Hall e Bodare [288], razão pela qual apenas aqui se apresentam os principais resultados. A Figura 7.4 apresenta o perfil de velocidades de propagação de ondas de corte, bem como uma estimativa da velocidade de propagação das ondas P, proposta num documento elaborado pelo NGI [284], já que os ensaios Cross-hole desenvolvidos no local de Ledsgard não foram programados para a avaliação da velocidade de propagação deste tipo de ondas.

Não pode deixar de se referir o facto do maciço de fundação apresentar velocidades de propagação de ondas S extremamente reduzidas, com especial destaque para a camada de lodo, onde os valores de  $C_s$  são maioritariamente inferiores a 50 m/s, valores excepcionalmente reduzidos.

No que concerne ao amortecimento material, os ensaios cross-hole permitiram apenas estimar que o amortecimento hysterético para pequenos níveis de deformação deve rondar valores próximos de 0,02-0,03 no caso da formação lodosa, sendo ligeiramente superior nas formações adjacentes ( $\xi=0,04-0,05$ ).

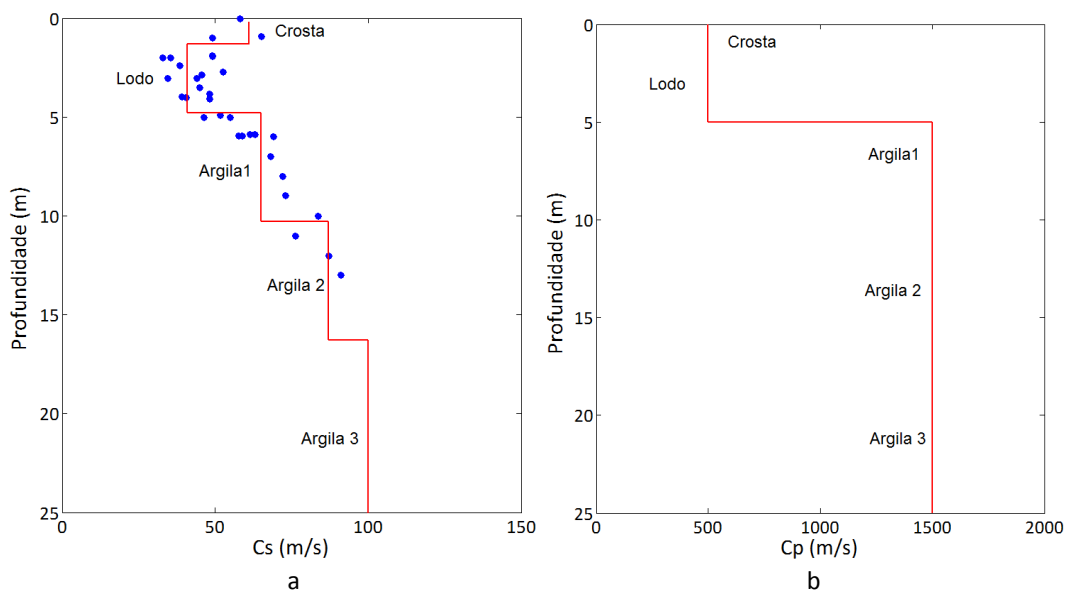


Figura 7.4 – Perfil de velocidade de propagação de ondas sísmicas: a) ondas S; b) ondas P (pontos – valores medidos; linhas – valores adoptados na modelação numérica).

Os ensaios laboratoriais tiveram como principal finalidade a avaliação do comportamento constitutivo da camada lodosa, já que se trata de um material não muito habitual no âmbito da geotecnia. Foram realizados ensaios triaxiais cíclicos, acompanhados de ensaios de ondas em laboratório (*bender elements tests*), os quais permitiram avaliar da degradação de rigidez e o aumento do amortecimento do solo em função do nível de distorção. Na Figura 7.5a apresenta-se a síntese dos resultados laboratoriais referentes à degradação de rigidez em função do nível de distorção, devidamente normalizada face ao módulo de distorção inicial. Por sua vez, a Figura 7.5b ilustra os resultados referentes à evolução do amortecimento. Note-se que os ensaios triaxiais cíclicos foram executados para uma gama de distorção da amostra compreendida entre 0,1% e 2%, logo o tramo inicial das curvas de degradação ficou deficientemente caracterizado.

Lamentavelmente, foram realizados ensaios triaxiais apenas para a camada lodosa, ficando em falta a caracterização mecânica dos restantes materiais. Contudo, tendo presente os índices físicos dos materiais envolvidos, existem na bibliografia diversas propostas para curvas de degradação de rigidez e aumento do amortecimento, as quais podem ser adoptadas para as restantes formações geotécnicas. Esta questão é devidamente abordada na secção do presente capítulo respeitante à modelação numérica.

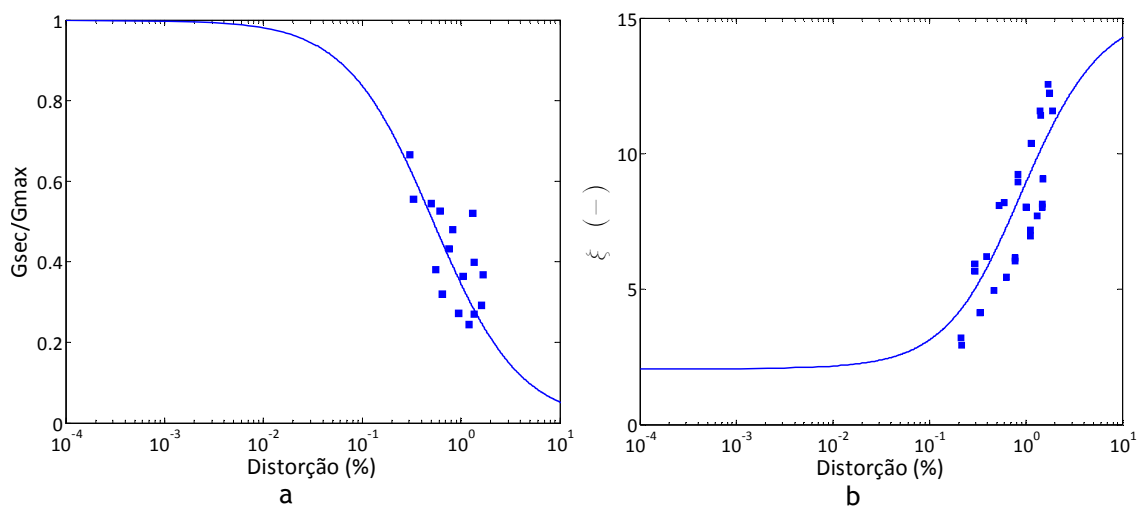


Figura 7.5 – Evolução das propriedades dinâmicas do solo da formação lodosa mediante o nível de distorção: a) curva de degradação da rigidez; b) curva de aumento do amortecimento. (pontos – resultados experimentais; linha – aproximação aos resultados experimentais).

#### 7.2.4 Monitorização da resposta da via durante a passagem do comboio X2000

O campo experimental de Ledsgard foi desenvolvido com o especial intuito de avaliar a influência da velocidade de circulação na resposta dinâmica da via férrea. Assim sendo, os testes foram efectuados em condições excepcionalmente controladas, estando a via interrompida ao tráfego



comercial e utilizando sempre o mesmo comboio com velocidades de circulação distintas compreendidas entre 10 km/h e 204 km/h.

O comboio empregue nos testes, correspondente a uma composição X2000, é constituído por um veículo motor, sucedido por três veículos de passageiros e por um veículo de traseiro. Embora esta composição tenha já sido apresentada no Capítulo 6, é aqui revisitada, ilustrando-se, na Figura 7.6, a sua geometria e distribuição de cargas por eixo.

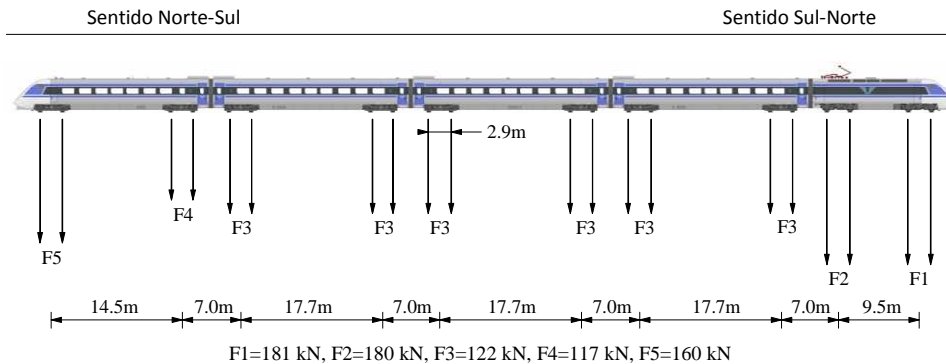


Figura 7.6 – Geometria e distribuição de cargas por eixo do comboio X-2000 utilizado em Ledsgard.

Pelo facto de o comboio não apresentar uma configuração de simetria longitudinal, os testes efectuados contemplaram a circulação em ambos os sentidos, sendo designados por sentido Norte-Sul e sentido Sul-Norte, tal como sugerido na Figura 7.6. Refira-se ainda que o programa de testes foi desenvolvido considerando, exclusivamente, a circulação do comboio na linha ocidental (ver Figura 7.2).

No que concerne à instrumentação da via férrea, foram adoptados diferentes dispositivos consoante a grandeza a medir e, em alguns casos, utilizaram-se técnicas redundantes como forma de eliminação de algumas incertezas. De entre as várias grandezas avaliadas, destaca-se, pela sua relevância para o assunto em discussão, a medição de deslocamentos da via através de barras extensométricas e por sistema de vídeo, sendo que a primeira técnica se mostrou muito mais fiável do que a segunda. Para além disso, foram instalados piezómetros a diferentes profundidades do maciço subjacente ao plano de simetria da via ocidental com o objectivo de avaliar uma possível acumulação de excessos de pressão intersticial devido à passagem do comboio, a qual, a verificar-se, acarretaria uma diminuição progressiva da resistência ao corte do solo.

Para além da instrumentação da via férrea, foi também avaliada a resposta do maciço de fundação através da medição da velocidade das partículas por recurso a um conjunto de geofones instalados à superfície do maciço. Cabe aqui referir que os geofones utilizados apresentam uma

frequência natural de 4,5 Hz, não sendo por isso adequados para a avaliação de vibrações associadas a baixas frequências. Porém, a informação correspondente não foi disponibilizada ao autor do presente estudo, razão pela qual não será aqui utilizada (alguns resultados dessa medição podem ser consultados em Hall [77]).

Tendo em conta a informação disponibilizada, bem como a fiabilidade da mesma, no presente estudo toma-se como referência principal o resultado da medição de deslocamentos verticais da via através de barras extensométricas. O dispositivo utilizado, designado por ASAT e desenvolvido pelo SGI, tem como princípio a medição do deslocamento entre dois pontos, em que o ponto inferior está fixo ao terreno a uma dada profundidade e o superior está solidário com as duas travessas adjacentes ao furo de instalação do equipamento. A Figura 7.7 mostra uma representação esquemática deste dispositivo.

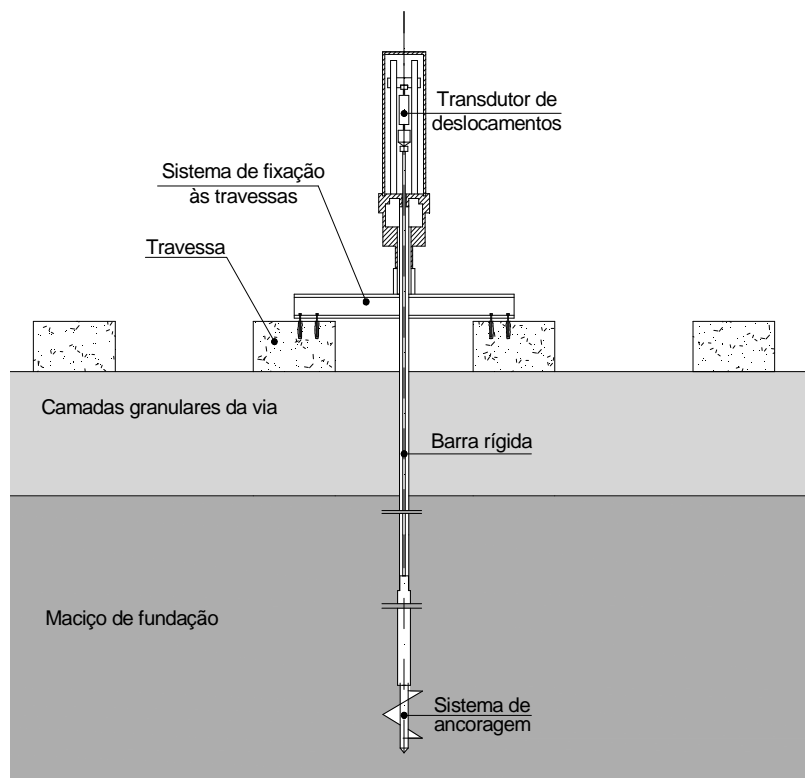


Figura 7.7 – Sistema de medição de deslocamentos verticais ASAT (adaptado de Hall [227]) (nota: representação esquemática sem correspondência de escala).

Os dispositivos ASAT foram instalados com diferentes profundidades de ancoragem, sendo a mais profunda de 12,0 m face à cota do plano superior das travessas (a secção instrumentada está representada na Figura 7.3). Uma vez que este dispositivo mede deslocamentos relativos, o resultado da medição é tanto mais próximo do deslocamento absoluto da travessa quanto mais profundo for o ponto de ancoragem.

A Figura 7.8 mostra o registo temporal do deslocamento vertical da travessa durante a passagem do comboio no sentido Sul-Norte, para os limites inferior (10 km/h) e superior (185 km/h) da velocidade de circulação testados no referido sentido. Os resultados da medição foram adquiridos com uma frequência de amostragem de 500 Hz.

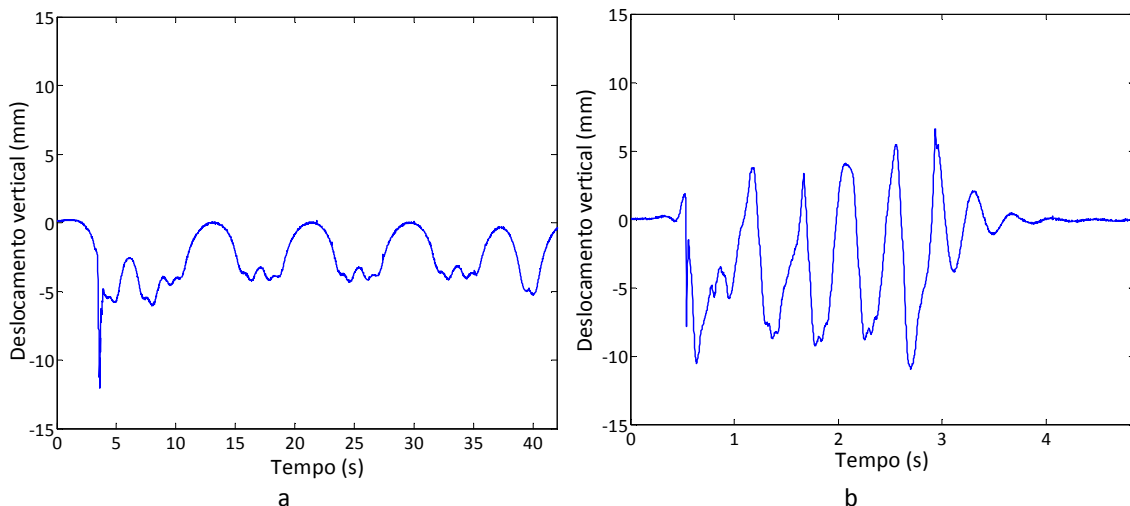


Figura 7.8 – Registo temporal dos deslocamentos verticais da via férrea medidos durante a passagem do comboio X2000 no sentido Sul-Norte à velocidade de: a) 10 km/h; b) 185 km/h.

Os resultados experimentais permitem desde logo observar uma grande dependência da resposta da via face à velocidade de circulação do comboio. Com efeito, para a velocidade de 10 km/h, a resposta é praticamente estática, sendo possível identificar com clareza a passagem dos vários bogies pela secção instrumentada e não sendo evidente qualquer deslocamento ascendente da via. Porém, para a velocidade de 185 km/h, assiste-se a uma muito significativa amplificação dinâmica dos deslocamentos verticais, verificando-se uma forte interacção entre a resposta resultante da passagem dos vários eixos, não sendo mais possível a identificação clara da passagem de cada um dos bogies pela secção instrumentada. Além disso a resposta da via é caracterizada por deslocamentos verticais tanto descendentes como ascendentes, sendo de notar que os últimos atingem valores superiores a 5 mm, denunciando assim a propagação de ondas originadas pela elevada velocidade de circulação face às propriedades dinâmicas do sistema via-macizo.

Um outro aspecto interessante e bem notório na Figura 7.8b prende-se com o facto de, após a passagem do comboio na secção instrumentada, se verificar a vibração livre da via, mostrando assim que existem ondas que se propagam “atrás” do comboio, o que é um indício de que a velocidade de circulação é próxima da velocidade crítica do sistema.

Ainda relativamente aos resultados expostos na Figura 7.8a, não pode deixar de se notar que os deslocamentos descendentes são muito significativos, atingindo valores superiores a 5 mm. Tal

facto denuncia bem as fracas propriedades deformacionais do maciço de fundação, já que, regra geral, vias férreas com boas características de fundação apresentam deslocamentos na ordem de 1 mm para solicitações idênticas à considerada.

Na Figura 7.9 apresenta-se a evolução do valor de pico dos deslocamentos ascendentes e descendentes em função da velocidade de circulação do comboio X2000, em ambos os sentidos. Facilmente se depreende que, independentemente do sentido de circulação, existe uma forte dependência entre os deslocamentos de pico e a velocidade de circulação do comboio. Para velocidades inferiores a 120 km/h a taxa de acréscimo do deslocamento de pico com a velocidade de circulação é relativamente modesta, verificando-se contudo o surgimento de algum deslocamento ascensional da via, embora de pequena magnitude. Para velocidades de circulação superiores a 120 km/h, a taxa de crescimento do deslocamento de pico com a velocidade sofre um brusco incremento. É também justamente a partir desta velocidade que se constata uma maior dependência dos valores de pico com o sentido de circulação. De facto, não se tratando de um comboio simétrico, a sobreposição dos efeitos oriundos da passagem de cada um dos eixos individuais determina que a resposta total seja dependente do sentido de circulação, efeito este mais evidente quando a passagem de um eixo individual ou bogie implica deslocamentos ascensionais da via não negligenciáveis.

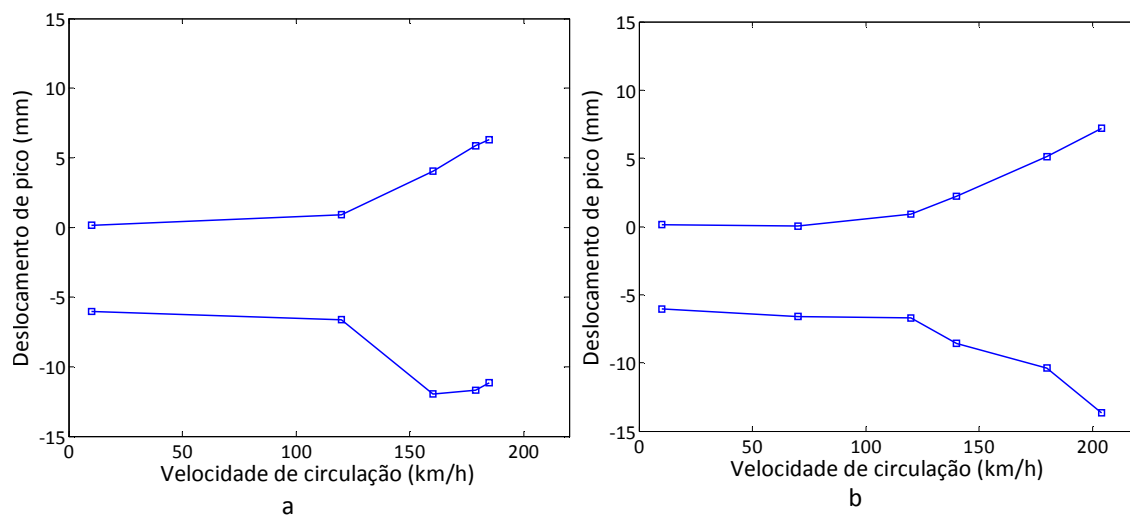


Figura 7.9 – Deslocamentos de pico medidos para diferentes velocidades e sentidos de circulação do comboio X2000: a) Sul-Norte; b) Norte-Sul.

Atendendo às análises paramétricas apresentadas em capítulos precedentes, pode pois concluir-se que, apesar de se verificarem amplificações dinâmicas muito consideráveis para as velocidades mais elevadas de circulação (mais do dobro do valor estático), a velocidade crítica do sistema não foi ultrapassada no presente programa de testes. A verificar-se tal facto, seria expectável que, após a ocorrência do valor máximo da resposta, os valores de pico seguissem uma tendência

inversa, ou seja, diminuíssem com o aumento da velocidade de circulação. Uma análise menos cuidada dos resultados expostos na Figura 7.9a poderia induzir em erro, pois de facto ocorre uma inversão da referida tendência no que concerne aos deslocamentos descendentes da via, notando-se que para a velocidade de 185 km/h o valor de pico dos deslocamentos descendentes é inferior ao verificado para 160 km/h. Contudo, não se verifica tal inversão de comportamento dos valores de pico relativos aos deslocamentos ascendentes, denunciando assim que tal facto se deve exclusivamente a fenómenos de interacção entre as componentes estática e dinâmica do deslocamento, os quais são fortemente condicionados pelo comprimento das ondas geradas pela passagem do comboio e pela sua geometria, e não a qualquer fenómeno de circulação com velocidade superior à velocidade crítica.

Por último, não pode deixar de se referir que, apesar da velocidade crítica não ter sido atingida no programa de testes, a velocidade de circulação máxima alcançada foi relativamente próxima desse valor, dado que se mediram deslocamentos ascendentes e descendentes de cerca de 8 mm e 14 mm, respectivamente, o que corresponde a um factor de amplificação dinâmica superior a 2. Essa ocorrência inusual torna o caso de estudo de Ledsgard único, pois, a menos de um ou outro casos identificados em Inglaterra e na Holanda [289, 290], não há registo de outros exemplos bem documentados em que a velocidade de circulação se tenha aproximado tanto da velocidade crítica do sistema via-macijo. Nas seguintes secções apresentam-se mais resultados experimentais, os quais são confrontados com os homólogos advindos do modelo numérico aplicado.

## **7.3 Modelação numérica**

### **7.3.1 Descrição geral do modelo**

Atendendo às metodologias apresentadas nos capítulos precedentes, diversas possibilidades de simulação do presente caso de estudo podem ser adoptadas. De facto, após a realização de algumas análises preliminares, as quais podem ser consultadas em Alves Costa et al. [81], conclui-se que o procedimento ideal, no actual contexto, passa pela construção de um modelo de elementos finitos 2.5D através do qual é simulada a resposta dinâmica não só da via como também do macijo subjacente. Esta estratégia de modelação numérica, aparentemente menos exacta e mais dispendiosa do que o recurso a um modelo com elementos de contorno para a simulação da resposta do macijo de fundação, é justificada pelo facto de permitir a consideração de cenários não homogéneos no que se refere às propriedades mecânicas dos materiais

geotécnicos envolvidos. Como está implícito ao método 2.5D, a heterogeneidade de propriedades apenas poderá ser admitida no plano transversal, já que na direcção que lhe é ortogonal tem de ser assegurada a invariabilidade do meio.

Assim sendo, o plano transversal do sistema via-macizo é discretizado através de elementos finitos 2.5D de acordo com a malha representada na Figura 7.10. Como se pode verificar, são admitidas algumas simplificações, principalmente no que toca às condições de simetria do problema. Comparando a malha de elementos finitos (Figura 7.10) com a secção transversal da via representada na Figura 7.2, verifica-se que, ao contrário do admitido no modelo numérico, não existe uma simetria geométrica global concordante com o plano de simetria das travessas da via ocidental. Porém, a introdução desse falso plano de simetria permite uma redução muito considerável do esforço computacional, sem que contudo a acuidade dos resultados seja muito afectada dada a reduzida dimensão do aterro (entenda-se, no presente caso, por camadas granulares da via férrea).

As dimensões da malha e respectivos elementos finitos são estabelecidas atendendo às regras enunciadas no Capítulo 5, bem como aos limites físicos do problema. O macizo de fundação é discretizado por elementos finitos 2.5D até uma profundidade de aproximadamente 50 m, sendo o macizo rochoso subjacente à formação argilosa considerado, de forma simplificada, através da imposição de deslocamentos nulos na base da malha. Relativamente à dimensão transversal, dado o facto de ao problema em estudo estarem associadas baixas frequências e, conseqüentemente, elevados comprimentos de onda, é necessária a discretização por elementos finitos de uma região relativamente alargada do meio. Por isso, o meio é descrito por elementos finitos 2.5D até à distância de 60 m face ao plano de simetria, sendo acoplados elementos infinitos 2.5D ao longo da fronteira oriunda da truncatura do meio discretizado. Como já discutido, este procedimento de tratamento das fronteiras artificiais permite atingir elevados níveis de acuidade mesmo quando o comprimento da onda que se pretende simular é superior à dimensão do meio discretizado por elementos finitos 2.5D.

As propriedades mecânicas consideradas no modelo numérico estão em consonância com a informação advinda das campanhas experimentais e devidamente coligida na secção precedente. O Quadro 7.2 sintetiza essas propriedades mecânicas. Note-se que as propriedades dinâmicas estão associadas a muito pequenos níveis de deformação, daí serem representadas pela velocidade de propagação de ondas S e P. Em geral, a informação constante no Quadro 7.2 é suficiente para a definição do modelo numérico; sem embargo, quando se procede a análises lineares equivalentes é também imperativa a definição de leis de degradação de rigidez e

aumento de amortecimento em função do nível de deformação experimentalada pelo maciço. Por uma questão de facilidade de exposição dos assuntos, a informação em falta é devidamente apresentada aquando da introdução do modelo linear equivalente.

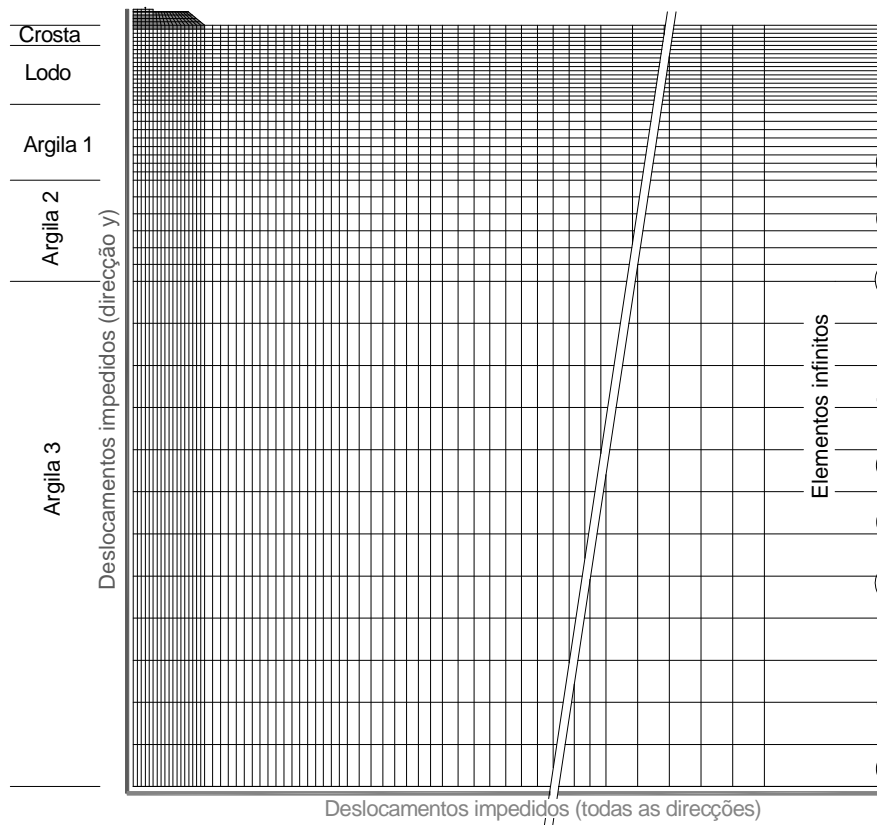


Figura 7.10 – Malha de elementos finitos 2.5D adoptada para o estudo do caso de Ledsgard.

Quadro 7.2 – Propriedades mecânicas associadas aos diferentes materiais e para muito pequenos níveis de deformação (adaptado de [167]).

Formação	Espessura (m)	Massa volúmica (kg/m <sup>3</sup> )	C <sub>s</sub> (m/s)	C <sub>p</sub> (m/s)	ξ <sub>0</sub> (-)
Camadas granulares da via	1,2	1800	210	340	0,04
Crosta	1,1	1500	63	500	0,04
Lodo	3,5	1260	41	500	0,02
Argila 1	4,5	1475	60	1500	0,05
Argila 2	6,0	1475	87	1500	0,05
Argila 3	30,0	1475	100	1500	0,05

No que concerne à modelação dos elementos da superestrutura ferroviária com carácter discreto na direcção longitudinal, ou seja as travessas e palmilhas, refira-se que esses são devidamente atendidos no modelo através das suas propriedades linearizadas, isto é, atendendo ao seu espaçamento na referida direcção. Em particular as travessas são atendidas através de elementos finitos 2.5D associados a um modelo transverso-isotrópico, tal como explanado no Capítulo 5. Por sua vez, as palmilhas são simuladas por um elemento mola-amortecedor que estabelece a ligação entre o carril e a travessa. Na ausência de informação mais detalhada relativamente às propriedades das palmilhas, adoptam-se os seguintes valores linearizados:  $c_p=22,5 \times 10^3 \text{ Ns/m}^2$ ,  $k_p=255 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ .

Por último, os carris são simulados através de vigas de Bernoulli-Euler, sendo as suas propriedades consonantes com as do perfil UIC60.

A simulação do material circulante é efectuada com base num modelo simplificado onde apenas o mecanismo de excitação quasi-estática é atendido. Admitindo esse pressuposto, o que implica não haver lugar ao desenvolvimento de forças de interacção dinâmica via-veículo, o sistema estrutural correspondente ao comboio pode ser substituído pelo conjunto de cargas móveis coerente com a distribuição do peso pelos eixos e com a sua geometria (ver Figura 7.6). Saliente-se que a simplificação agora admitida é perfeitamente satisfatória quando, como é o caso, o objecto da análise se concentra na resposta da via férrea, não podendo ser generalizado, como aliás já aflorado nos estudos teóricos apresentados no Capítulo 6, para situações em que seja relevante a resposta dinâmica de zonas afastadas da via férrea. Acresce que, para além do facto de o presente estudo focar apenas a resposta dinâmica da via, a ausência de informação relativa ao perfil de irregularidades geométricas da via inviabiliza, por si só, a realização de uma análise com interacção dinâmica veículo-via.

### **7.3.2 *Análise elástica***

A consideração de modelos elásticos lineares para a representação do comportamento mecânico dos materiais constituintes de vias férreas e maciços de fundação submetidos à acção do tráfego é uma simplificação comumente aceite e, regra geral, justificável. A consideração desta simplificação não se deve tanto à falta de compreensão do comportamento constitutivo dos materiais envolvidos (é bem sabido que este muito dificilmente corresponde ao enunciado por um modelo elástico linear e isotrópico), mas sim, em primeiro lugar, ao facto de a adopção de modelos constitutivos avançados estar, regra geral, associada à necessidade de ensaios



complexos para a caracterização dos parâmetros necessários à definição do modelo e, em segundo lugar, ao facto de exigirem, na generalidade dos casos, recursos computacionais bastante avultados. Do equilíbrio entre estes dois aspectos opostos resulta, em muitos casos, a adopção de soluções de compromisso, onde vários factores envolvidos de subjectividade tomam um peso não displicente.

Todavia, mais do que as razões instrumentais invocadas no parágrafo anterior, o que justifica a adopção da modelação linear é o facto de, regra geral, as deformações experimentadas pelos maciços serem pequenas a muito pequenas. Antecipa-se que, no presente caso, essa regra geral possa não ser suficientemente confirmada.

Assim, em consonância com o adoptado na generalidade dos estudos afins, na actual secção apresenta-se o resultado da análise elástica do caso de estudo de Ledsgard. As propriedades elásticas dos materiais envolvidos são definidas de acordo com o indicado no Quadro 7.2, ou seja, admitindo-se que os níveis de deformação a que o solo está submetido não implicam uma não linearidade assinalável.

Na Figura 7.11 confrontam-se, para diferentes velocidades de circulação no sentido Norte-Sul, os registos temporais do deslocamento vertical da travessa provenientes do modelo numérico com os homólogos avaliados por via experimental. Por sua vez, os resultados respeitantes à circulação no sentido inverso, isto é Sul-Norte, encontram-se ilustrados na Figura 7.12.

Cabe aqui fazer uma breve nota, em jeito de esclarecimento, relativamente ao acentuado pico verificado em todas as medições experimentais e na proximidade do registo da passagem do primeiro eixo pela secção instrumentada. Como se compreende, esse pico não tem significado físico directo com a grandeza que se pretende avaliar, resultando sim de uma interferência electromagnética induzida pela “entrada” do comboio na secção de referência.

Passando à análise global dos resultados, é possível constatar que, independentemente do sentido de circulação, existe uma diferença notória entre os registos temporais resultantes do modelo numérico e os homólogos avaliados por via experimental. Essa diferença segue uma tendência de crescimento com o aumento da velocidade de circulação. Para velocidades mais reduzidas, diga-se até aos 120 km/h a 140 km/h (Figura 7.11a e b; Figura 7.12a), apesar de quantitativamente existir uma diferença não displicente entre resultados numéricos e experimentais, o modelo numérico é capaz de reproduzir razoavelmente a tendência geral da evolução dos deslocamentos da travessa durante a passagem do comboio. Contudo, para velocidades de circulação superiores, para as quais os efeitos de amplificação dinâmica assumem

maior relevância, a capacidade do modelo numérico para reproduzir os efeitos em causa vai claramente diminuindo com o aumento da velocidade, tanto em termos quantitativos como em termos qualitativos.

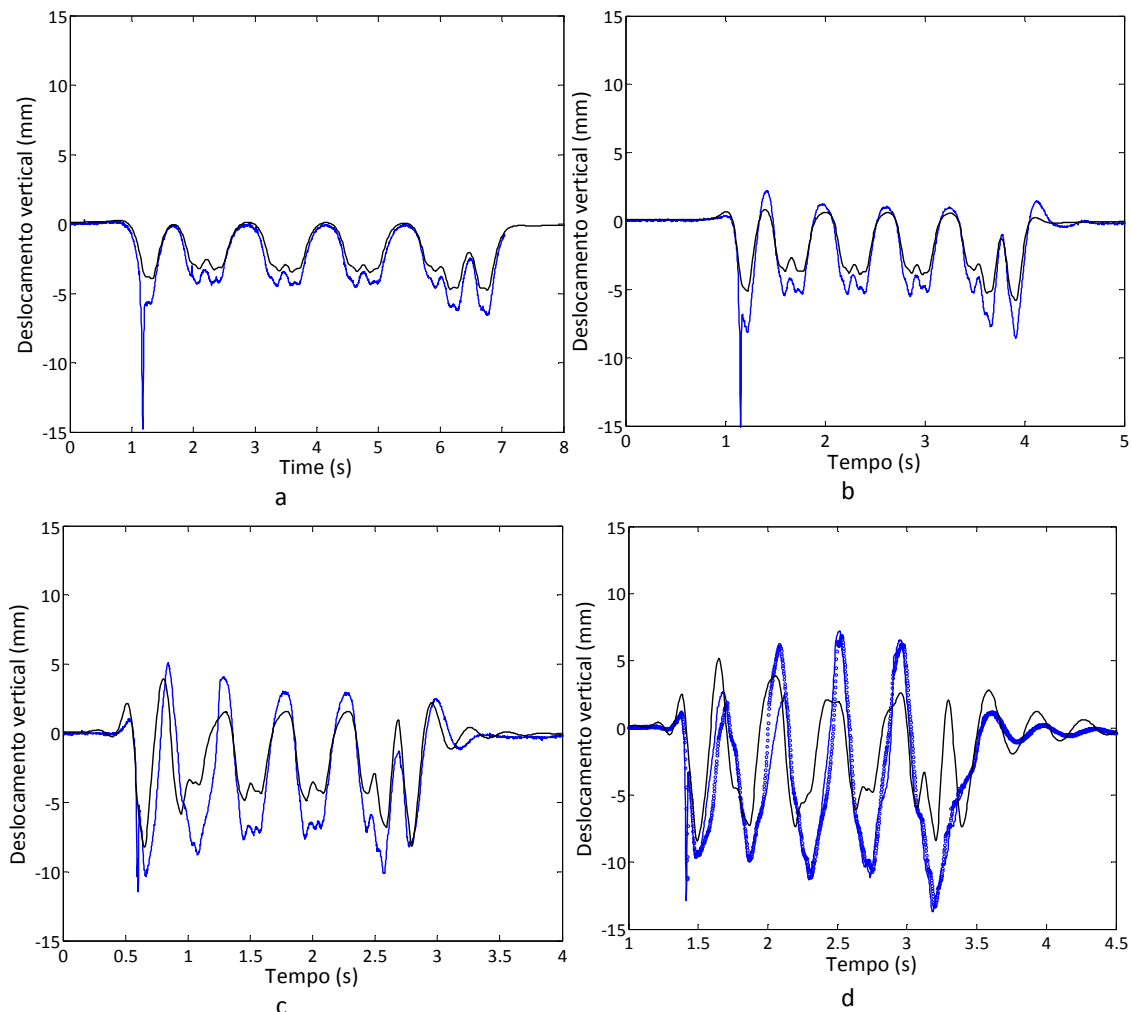


Figura 7.11 – Registo temporal do deslocamento vertical da travessa resultante da análise elástica para diferentes velocidades de circulação do comboio X2000 no sentido Norte-Sul: a)  $c=70$  km/h; b)  $c=140$  km/h; c)  $c=180$  km/h; d)  $c=204$  km/h (linha preta – resultado numérico; linha/pontos azul – resultados experimentais).

A diferença observada torna-se ainda mais evidente através da representação da evolução dos valores de pico em função da velocidade de circulação, tal como se ilustra na Figura 7.13. Note-se que a análise numérica foi alargada para velocidades de circulação até 260 km/h com o intuito de avaliar o que presumivelmente ocorreria para velocidades de circulação superiores às atendidas no programa de testes.

Através desta representação é claramente visível que até aos 120 km/h existe uma correspondência entre as tendências de evolução avaliadas por via numérica ou experimental. Porém, quando esse limite é ultrapassado, os resultados experimentais denunciam um acréscimo

muito significativo da relevância da componente dinâmica do deslocamento, efeito esse que não é devidamente reproduzido pelo modelo numérico.

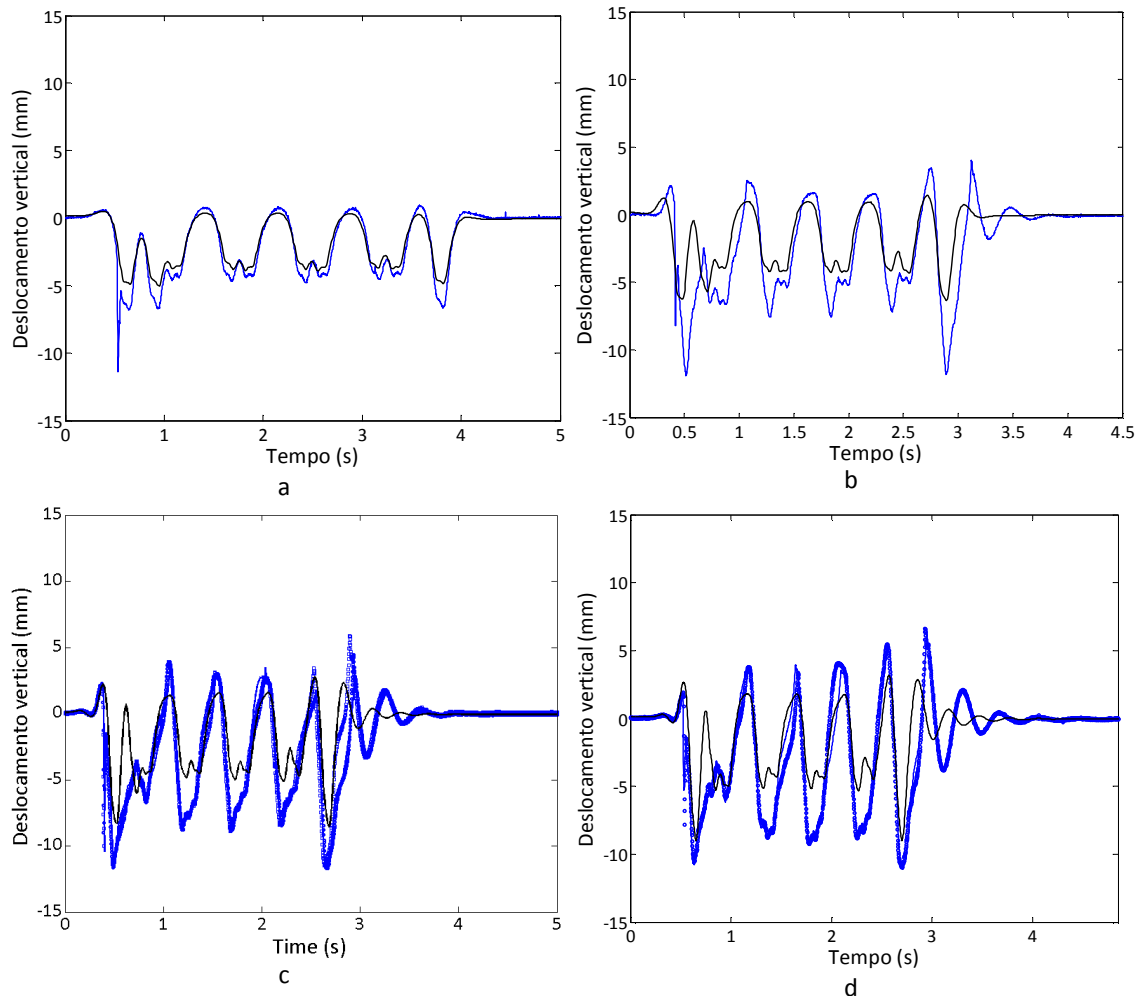


Figura 7.12 – Registo temporal do deslocamento vertical da travessa resultante da análise elástica para diferentes velocidades de circulação do comboio X2000 no sentido Sul-Norte: a)  $c=120$  km/h; b)  $c=160$  km/h; c)  $c=179$  km/h; d)  $c=185$  km/h . (linha preta – resultado numérico; linha/pontos azul – resultados experimentais).

Este comportamento era expectável tendo em atenção alguns estudos realizados previamente por outros autores [167, 284], os quais apontam no sentido de que o nível de deformação induzido no maciço durante a passagem do comboio não é compatível com a assunção de pequenas deformações e, conseqüentemente, o evento caracteriza-se por incursões no regime elástico não linear. Essa possibilidade é corroborada pelos resultados expostos na Figura 7.14, correspondente aos mapas de colorações da distorção octaédrica máxima experimentada no ponto central de cada elemento finito 2.5D durante a passagem do comboio no sentido Norte-Sul à velocidade de 70 km/h, 142 km/h e 204 km/h. Recorde-se que, na ausência do mecanismo de excitação dinâmica, todos os pontos definidos por um dado alinhamento longitudinal são submetidos à mesma história de deformações durante a passagem do comboio, existindo apenas

um desfasamento temporal decorrente da sua posição geométrica ao longo da direcção de desenvolvimento da via.

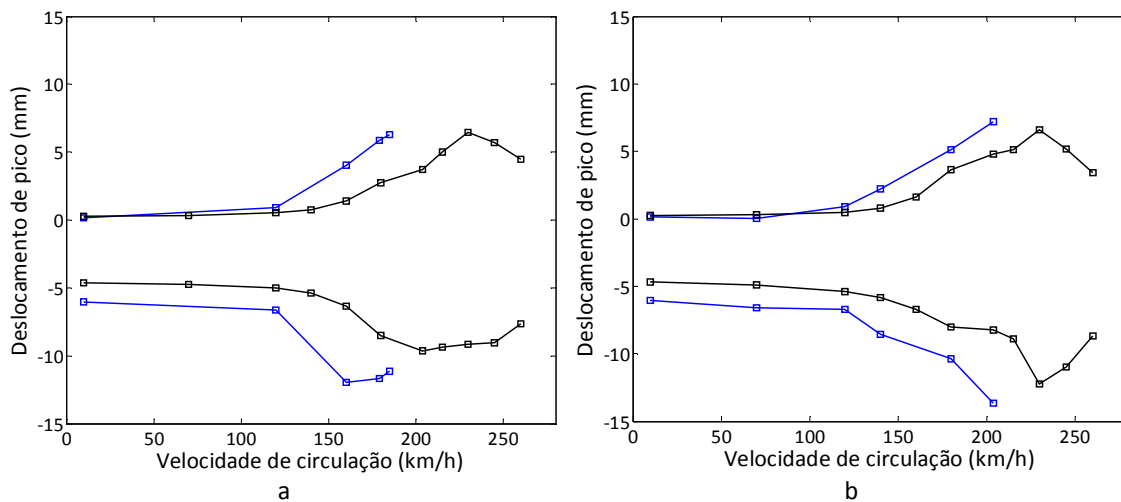


Figura 7.13 – Deslocamentos de pico para diferentes velocidades e sentidos de circulação: a) Sul-Norte; b) Norte-Sul (linha azul – resultados experimentais; linha preta – análise elástica linear).

Considerando os resultados das Figuras 7.14a e 7.14b, pode concluir-se que, mesmo para velocidades de circulação reduzidas a moderadas, existem zonas expressivas do maciço onde os níveis de distorção ultrapassam  $10^{-4}$ , confirmando assim as suposições de incursão no regime não linear previamente apontadas por Kaynia et al. [167] e Hall [288]. À medida que a velocidade de circulação aumenta os fenómenos de amplificação dinâmica tomam maior significado e, conseqüentemente, implicam uma incursão mais expressiva no regime não linear. Este efeito está bem patente na Figura 7.14c, onde se identifica uma região muito significativa na qual a distorção octaédrica máxima é superior a  $5 \times 10^{-4}$ , implicando, para os materiais geotécnicos em questão, que o campo de validade do modelo elástico linear seja claramente violado, como discutido no Capítulo 2.

A não linearidade do sistema, consequência directa da velocidade de circulação, foi já objecto de alguma reflexão por parte de outros autores, sendo de referir os estudos desenvolvidos por Kaynia et al. [167]. Nesses estudos, através de um procedimento de tentativa-erro com o objectivo de minimizar a diferença entre a resposta numérica e experimental referente ao deslocamento da travessa para a velocidade de circulação de 204 km/h (Figura 7.11d), é sugerido um conjunto de novas propriedades mecânicas para os materiais envolvidos, ou seja, propriedades degradadas, as quais permitem, por recurso a uma análise elástica linear obter uma concordância razoável entre resultados numéricos e experimentais [81, 167]. Todavia, o procedimento adoptado pelos referidos autores não pode ser considerado como uma metodologia de previsão pois, apesar do indiscutível interesse para a compreensão dos

fenómenos envolvidos, a condução do método exige o conhecimento prévio da resposta experimental.

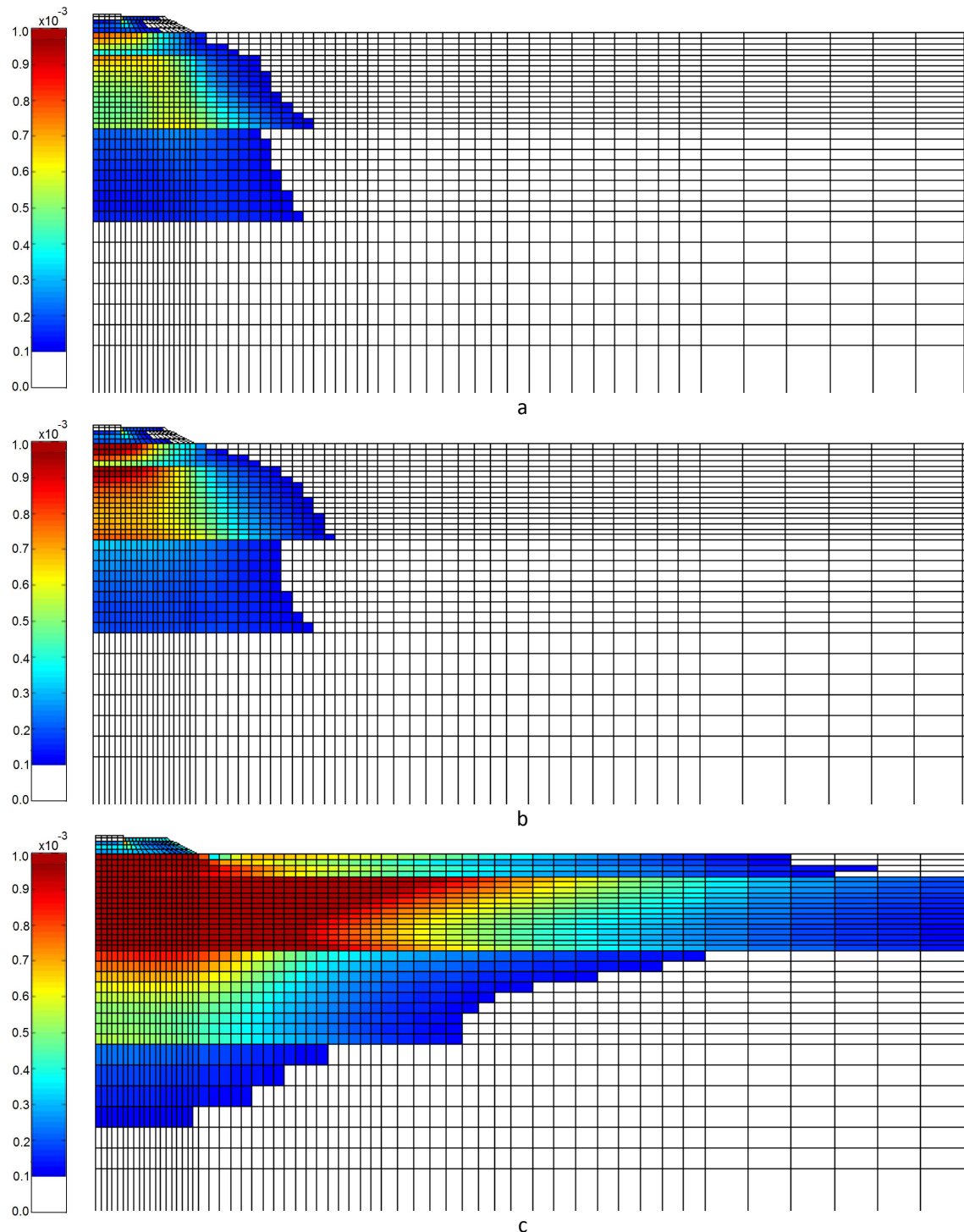


Figura 7.14 – Distorção octaédrica máxima para diferentes de circulação no sentido Norte-Sul: a)  $c=70$  km/h; b)  $c=142$  km/h; c)  $c=204$  km/h.

Com o intuito de colmatar a evidente incapacidade da análise elástica linear no actual contexto, na secção subsequente é apresentada uma metodologia de previsão, isto é, totalmente independente do conhecimento prévio da resposta do meio, capaz de incluir os efeitos da não

linearidade material do solo em função da distorção experimentada durante a passagem do comboio.

### **7.3.3 *Análise linear equivalente***

#### **7.3.3.1 Considerações gerais**

Visto que, no contexto do presente estudo, a análise elástica linear é incapaz de reproduzir de forma fiável os fenómenos envolvidos, nomeadamente a tendência de evolução da resposta mediante a velocidade de circulação do comboio, apresenta-se agora uma metodologia de previsão, dotada de capacidade de inclusão dos efeitos da não linearidade material do solo em função da distorção por este experimentada durante a passagem do comboio.

Esse objectivo é alcançado através da adaptação do modelo numérico (baseado no método dos elementos finitos 2.5D), dotando-o da capacidade de efectuar internamente a correcção das propriedades de rigidez e de amortecimento do meio de modo a alcançar uma compatibilidade razoável entre estas e as deformações envolvidas. Esta metodologia, usualmente designada por análise linear equivalente, teve origem na engenharia sísmica, sendo aqui adaptada ao contexto da resposta dinâmica do sistema via-macício sob a acção do tráfego ferroviário.

Do ponto de vista organizacional, na secção seguinte apresentam-se, de modo sintético, os principais fundamentos teóricos do método e respectiva implementação no programa de cálculo automático, seguindo-se a sua aplicação ao presente caso de estudo.

#### **7.3.3.2 Metodologia**

No Capítulo 2 são salientados os campos de validade das diferentes tipologias de modelos constitutivos que, mediante o nível de deformação induzida, se afiguram como adequados para a representação do comportamento mecânico do solo. Nesse âmbito é então referido que, na gama de deformações expectável na ordem de  $10^{-4}$  a  $10^{-3}$ , o comportamento mecânico da generalidade dos solos pode ser aproximado por uma formulação elástica equivalente. De facto, na referida gama, assiste-se a um decréscimo da rigidez e a um aumento da dissipação energética à medida que o nível de distorção aumenta, sem que no entanto ocorra um acréscimo da degradação de rigidez em função do número de ciclos. Este comportamento está bem patente na representação

esquemática ilustrada na Figura 7.15, referente à resposta do solo para duas situações de solicitação cíclica simétrica com amplitude distinta [11, 38, 291].

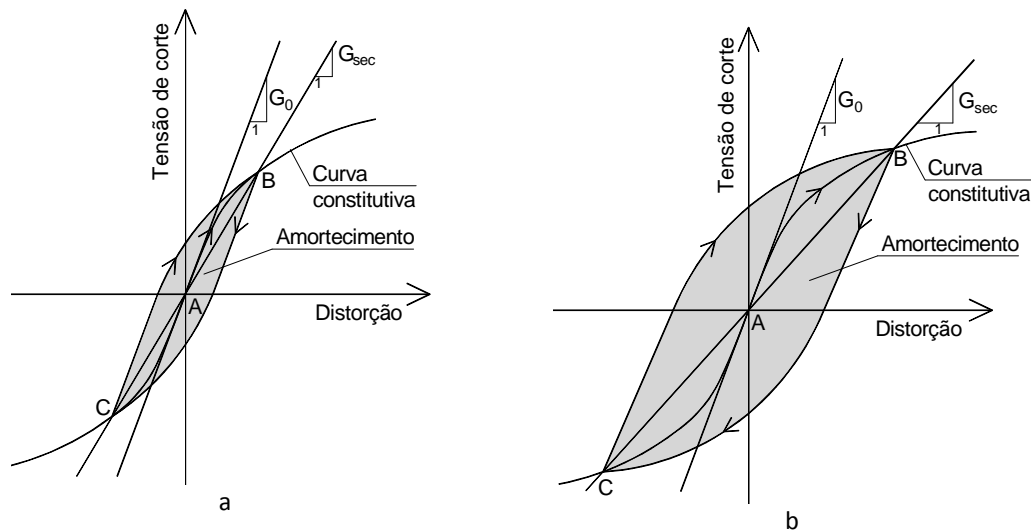


Figura 7.15 – Trajectória de tensão deformação para solicitação cíclica simétrica: a) ciclo de pequena amplitude; b) ciclo de grande amplitude.

A representação exacta das trajectórias tensão-deformação ilustradas na Figura 7.15, bem como a sua evolução mediante o nível de distorção induzida, só é conseguida na plenitude através do recurso a modelos constitutivos não lineares cíclicos [14, 292]. Embora o desenvolvimento teórico desses modelos se encontre já num estágio avançado, a sua utilização não é compatível com as formulações até agora apresentadas no domínio do número de onda-frequência. Alternativamente, o comportamento constitutivo do solo pode ser razoavelmente aproximado, para a gama de deformação referida, através de uma análise linear equivalente, tendo em consideração dois parâmetros dependentes do nível de distorção e caracterizadores da trajectória tensão-deformação seguida em cada ciclo: i) a sua inclinação, ou seja, a rigidez secante; ii) a área interior ao ciclo, ou seja, o amortecimento.

Para o desenvolvimento da metodologia é então necessário o conhecimento de dois tipos de informação: i) as propriedades do solo para muito pequenas deformações; ii) as leis de evolução da degradação de rigidez e aumento de amortecimento mediante o nível de distorção experimentado. Idealmente, essas leis devem ser obtidas através da realização de ensaios de laboratório ou, na sua ausência, através de correlações com alguns dos parâmetros físicos do solo, tal como tem vindo a ser advogado por diversos autores [293, 294]. De entre várias propostas existentes na bibliografia, destaca-se a apresentada por Ishibashi e Zhang [294], também designada por proposta unificada, já que é válida tanto para solos plásticos como não plásticos. Segundo estes autores, o índice de plasticidade (IP) e a tensão de confinamento ( $\sigma'_m$ ) são os

parâmetros que apresentam maior influência no processo de degradação de rigidez (e aumento de amortecimento) com o incremento do nível de distorção (Figura 7.16).

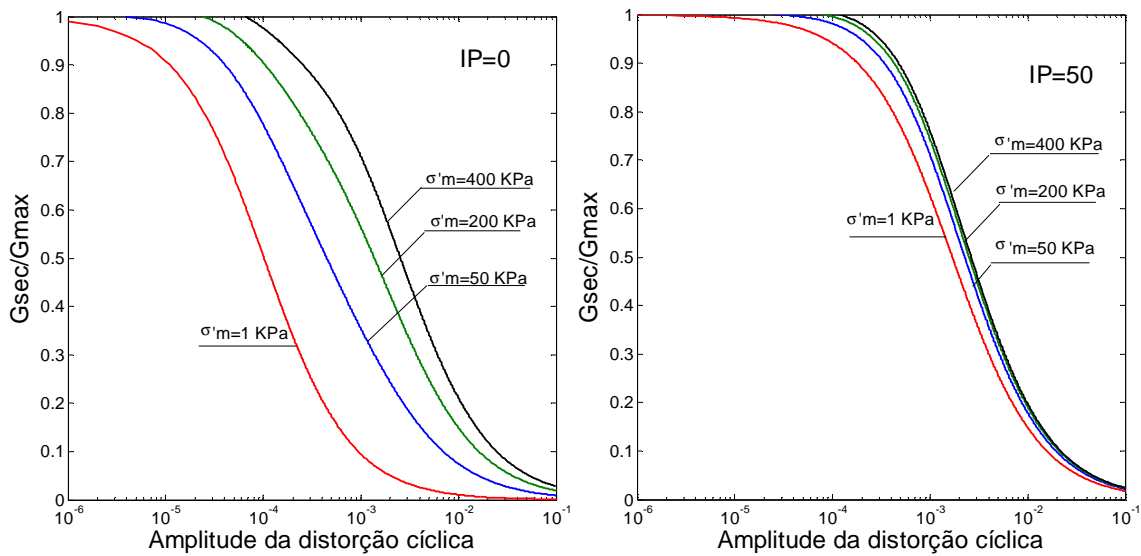


Figura 7.16 – Influência do índice de plasticidade e tensão de confinamento na lei de degradação de rigidez do solo mediante a distorção experimentalada.

A expressão matemática das referidas leis de degradação de rigidez e aumento de amortecimento é dada, respectivamente, por:

$$\frac{G_{sec}}{G_0} = K(\gamma, PI) \sigma'_m{}^{m(\gamma, PI) - m_0} \quad [7.1]$$

$$\xi = \frac{1}{6} \frac{1 + e^{-0,0145IP^{1,3}}}{2} \left[ 0,586 \left( \frac{G_{sec}}{G_0} \right)^2 - 1,547 \frac{G_{sec}}{G_0} + 1 \right] \quad [7.2]$$

em que,

$$K(\gamma, PI) = 0,5 \left\{ 1 + \tanh \left[ \ln \left( \frac{0,000102 + n(IP)}{\gamma} \right) \right] \right\} \quad [7.3]$$

$$m(\gamma, PI) - m_0 = 0,272 \left\{ 1 - \tanh \left[ \ln \left( \frac{0,000556}{\gamma} \right)^{0,4} \right] \right\} e^{-0,0145IP^{1,3}} \quad [7.4]$$

$$n(IP) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow IP = 0 \\ 3,37 \times 10^{-6} IP^{1,401} & \Leftarrow 0 < IP \leq 15 \\ 7,0 \times 10^{-7} IP^{1,976} & \Leftarrow 15 < IP \leq 70 \\ 2,7 \times 10^{-5} IP^{1,115} & \Leftarrow IP > 70 \end{cases} \quad [7.5]$$

Conhecidas as leis de degradação e as propriedades mecânicas para muito pequenas deformações, basta o conhecimento (*a priori*) do nível de distorção induzido para que a análise



seja passível de ser realizada tendo por base os princípios da linearidade, mas considerando propriedades mecânicas compatíveis com a deformação induzida no solo. Como se compreende, com excepção de problemas muito simples, o nível de distorção não é um dado do problema mas sim uma incógnita, razão pela qual é necessário um algoritmo iterativo para a execução de uma análise linear equivalente.

Um outro aspecto que deve ser referido prende-se com a definição objectiva de nível de distorção. A grande maioria de ensaios laboratoriais é efectuada atendendo a trajectórias de tensão/deformação relativamente simples e nem sempre representativas das trajectórias efectivamente verificadas em problemas reais. Desse modo, seguindo em linha com o que vem sendo praticado na Engenharia Sísmica [295, 296], o nível de distorção de referência para um estado tridimensional é aqui definido pela distorção octaédrica efectiva, a qual é dada por:

$$(\gamma_{\text{oct}})_{\text{eff}} = \alpha \frac{1}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)} \quad [7.6]$$

em que  $\varepsilon_i$  e  $\gamma_{ij}$  representam as componentes do tensor das deformações e  $\alpha$  corresponde a uma parâmetro de ponderação situado entre 0,5 e 0,7. A introdução do parâmetro  $\alpha$  tem como finalidade introduzir uma ponderação do nível de distorção tendo em atenção o facto de, na generalidade dos eventos, a solicitação não ser cíclica e simétrica, o que implica que a história temporal de distorção não se apresente com configuração harmónica [14]. No presente estudo adoptou-se, por uma questão de semelhança com o que habitualmente é considerado na Engenharia Sísmica, o valor de 0,65 para o referido factor.

Avançando para o procedimento numérico adoptado, o modelo de elementos finitos 2.5D é devidamente adaptado de modo a acomodar a realização de análises lineares equivalentes. Assim, através de um processo iterativo, os níveis de distorção em cada elemento são avaliados e as respectivas propriedades mecânicas (módulo de distorção ou o módulo de Young e amortecimento) são actualizadas em cada iteração até que se obtenha uma concordância aceitável entre essas propriedades e o nível de distorção induzido em cada elemento finito 2.5D. No esquema computacional adoptado considera-se que o nível de distorção no ponto central de cada elemento é representativo das deformações experimentadas na totalidade da secção transversal desse mesmo elemento.

O processo iterativo, esquematizado na Figura 7.17, pode ser sumariado da seguinte forma:

- i) Admitir as propriedades correspondentes a muito pequenas deformações para todo o domínio;

- ii) Efectuar uma análise linear, com base em tais propriedades, e calcular as deformações de cada elemento e o respectivo valor máximo de  $\gamma_{\text{eff}}^j$ .
- iii) Através das curvas de degradação, seleccionar valores de  $G_{\text{sec}}^{i+1}$  e  $\xi^{i+1}$  compatíveis com o valor máximo de  $\gamma_{\text{eff}}^j$  calculado em cada elemento.
- iv) Repetição do cálculo linear considerando as propriedades mecânicas corrigidas.
- v) Repetição dos passos ii) a iv) até que a diferença entre os valores das propriedades mecânicas em duas iterações sucessivas seja inferior, para todos os elementos finitos, à tolerância de convergência admitida.

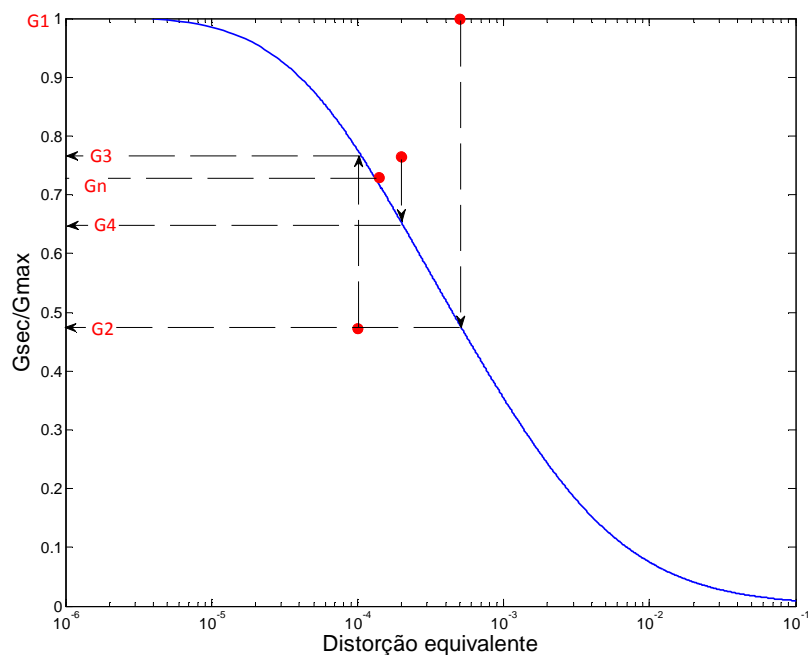


Figura 7.17 – Processo iterativo adoptado na execução de uma análise elástica equivalente.

O número de iterações necessárias à convergência do problema depende, como é evidente, da tolerância admitida. Na opinião do autor não se justifica a imposição de níveis de tolerância muito exigentes, sugerindo-se o valor de 3% como aceitável, visto que o próprio método em si não é mais do que uma aproximação ao problema físico.

É importante não deixar de referir que, apesar da metodologia em discussão permitir uma aproximação dos efeitos da não linearidade mecânica do solo, a análise é sempre desenvolvida com base nos pressupostos de linearidade do sistema. Significa isto que o modelo é incapaz de reproduzir uma alteração das propriedades do solo nos instantes intermédios do evento (passagem do comboio), ou seja, as propriedades mecânicas do meio permanecem inalteráveis

durante todo e qualquer evento [14], sendo apenas corrigidas com base na história temporal de deformação.

Cabe ainda referir que o método proposto é apenas válido nos casos em que o mecanismo de excitação dinâmica induzido pela passagem do comboio possa ser negligenciado. Esta limitação tem o seu fundamento nos princípios intrínsecos à formulação do método dos elementos finitos 2.5D, o qual não permite a existência de heterogeneidades mecânicas do meio na direcção de desenvolvimento da via. Logo, se para o caso da excitação quasi-estática todos os pontos de um dado alinhamento longitudinal estão submetidos ao mesmo nível de deformação (ocorrendo apenas um desfasamento temporal resultante da sua localização face à posição geométrica do comboio em cada instante temporal) e, conseqüentemente, o nível de degradação das propriedades é independente da posição longitudinal, o mesmo não se verifica quando o mecanismo de excitação dinâmica é atendido. Nesse caso, os níveis de distorção são dependentes da posição longitudinal do ponto em análise, não sendo contudo permitida a consideração de diferentes níveis de degradação das propriedades mecânicas ao longo desse mesmo alinhamento. Este aspecto constitui uma clara limitação do método 2.5D quando comparado com a formulação tridimensional convencional.

### **7.3.3.3 Informação geotécnica complementar**

O desenvolvimento de uma análise linear equivalente carece de informação relativa não só às propriedades elásticas para muito pequenas deformações, sumariada no Quadro 7.2, mas também do conhecimento das leis da sua degradação mediante o nível de distorção. Infelizmente, o programa de ensaios laboratoriais anteriormente descrito apenas contemplou a avaliação de tais leis referentes à camada lodosa (Figura 7.5), existindo assim uma lacuna de informação relativamente às restantes formações geotécnicas, a qual, em alternativa, tem de ser colmatada por recurso a correlações existentes na bibliografia. Assim, com base nos resultados da campanha de caracterização geotécnica do local, complementada com informação advinda de alguns dos participantes nos estudos experimentais [167, 284, 286], considerem-se as curvas de degradação de rigidez e aumento de amortecimento indicadas na Figura 7.18 como representativas das diferentes formações geotécnicas envolvidas. Uma vez que o aumento do índice de plasticidade é acompanhado pela diminuição da influência da tensão de confinamento, como é aliás bem patente na Figura 7.16, nos actuais estudos admite-se, simplificadamente, a mesma lei de degradação de rigidez (e aumento de amortecimento) para cada uma das formações geotécnicas do maciço de fundação, independentemente da evolução da tensão de confinamento em

profundidade. Note-se que para a formação geotécnica mais profunda, referenciada por Argila 3, não se apresentam curvas de degradação visto que, para os cenários em estudo, o nível de distorção induzido nessa formação é compatível com o campo de validade do modelo elástico linear.

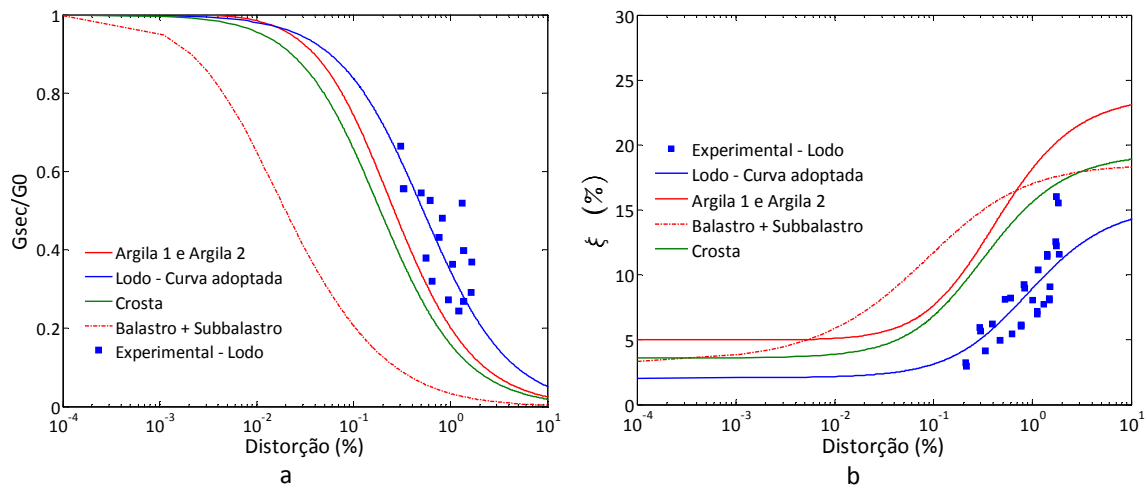


Figura 7.18 – Curvas de degradação de propriedades mecânicas admitidas no presente estudo: a) degradação de rigidez; b) aumento de amortecimento.

Relativamente às curvas de degradação adoptadas para as camadas granulares da via, compete referir que, na ausência de propostas na bibliografia referentes a materiais como o balastro e subbalastro, se opta pela adaptação das curvas propostas por Rollins et al. [297] e Hardin and Kalinski [298] para cascalho e cascalho arenoso. Como se pode verificar existe um contraste muito evidente entre a tendência de degradação de rigidez seguida pelos materiais granulares (balastro e subbalastro) e a seguida pelos materiais plásticos, sendo de notar que, para materiais não plásticos, os efeitos da não linearidade se manifestam para níveis de distorção muito reduzidos, restringindo assim o campo de validade do modelo elástico.

### 7.3.3.4 Análise de resultados

#### *Resposta dinâmica da via férrea*

Desenvolvida e implementada a metodologia anteriormente descrita, com a qual se pretende incluir na análise alguns dos efeitos da não linearidade material das formações geotécnicas, resta então proceder à avaliação experimental do desempenho da mesma. Na Figura 7.19 confrontam-se, para diferentes velocidades de circulação no sentido Norte-Sul, os registos temporais do deslocamento vertical da travessa vaticinados pelo modelo numérico com os homólogos avaliados por via experimental. Por sua vez, a Figura 7.20 ilustra os resultados respeitantes à circulação no sentido inverso, isto é Sul-Norte.

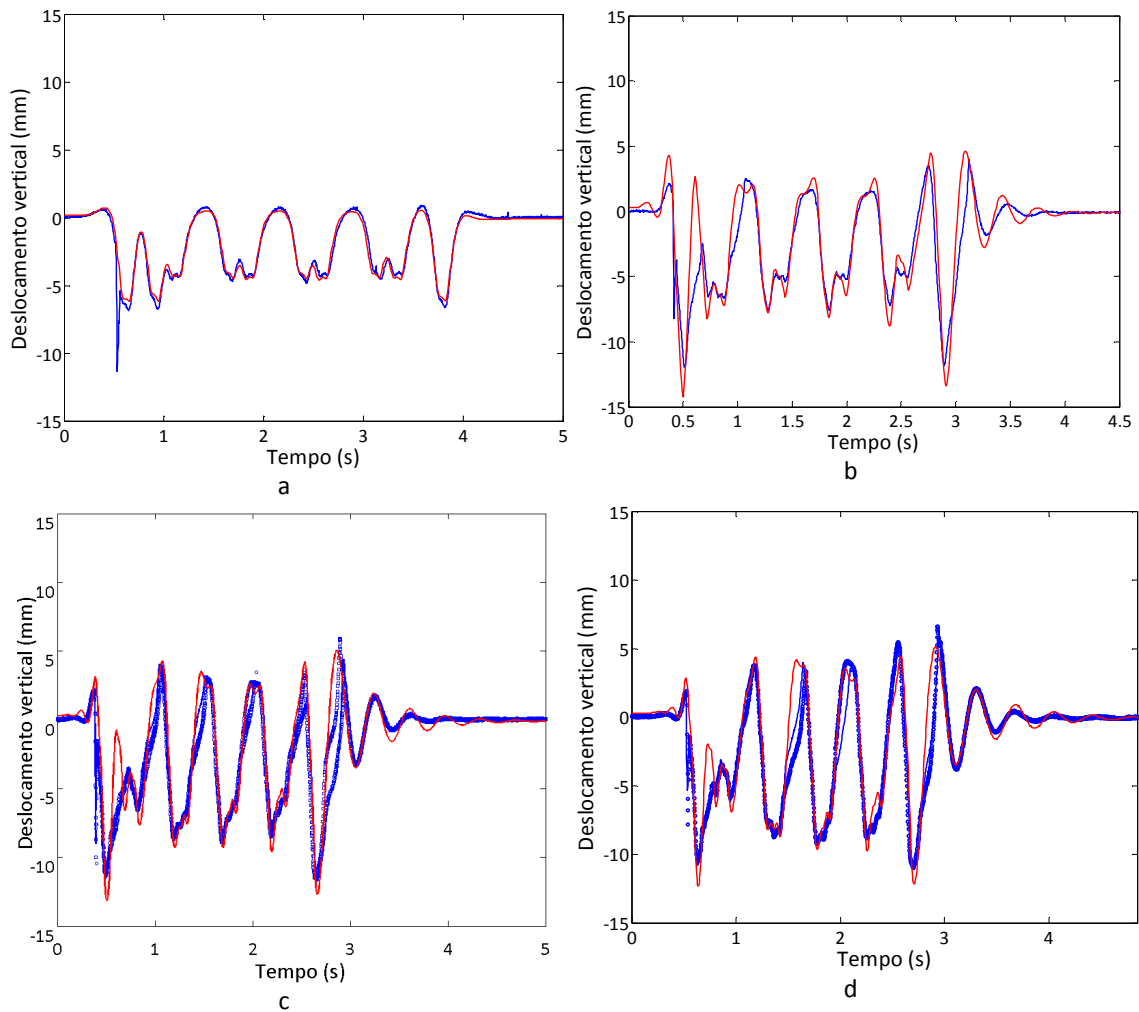


Figura 7.19 – Registo temporal do deslocamento vertical da travessa enunciado pela análise linear equivalente para diferentes velocidades de circulação do comboio X2000 no sentido Sul-Norte: a)  $c=120$  km/h; b)  $c=160$  km/h; c)  $c=179$  km/h; d)  $c=185$  km/h (linha azul – resultado numérico; linha/pontos azul – resultados experimentais).

A observação das figuras permite reconhecer uma concordância muito boa, senão mesmo excelente, entre resultados numéricos e experimentais. Um aspecto interessante e revelador da robustez do modelo prende-se com o facto de a elevada qualidade dos resultados numéricos obtidos pela análise linear equivalente ser independente tanto do sentido como da velocidade de circulação do comboio.

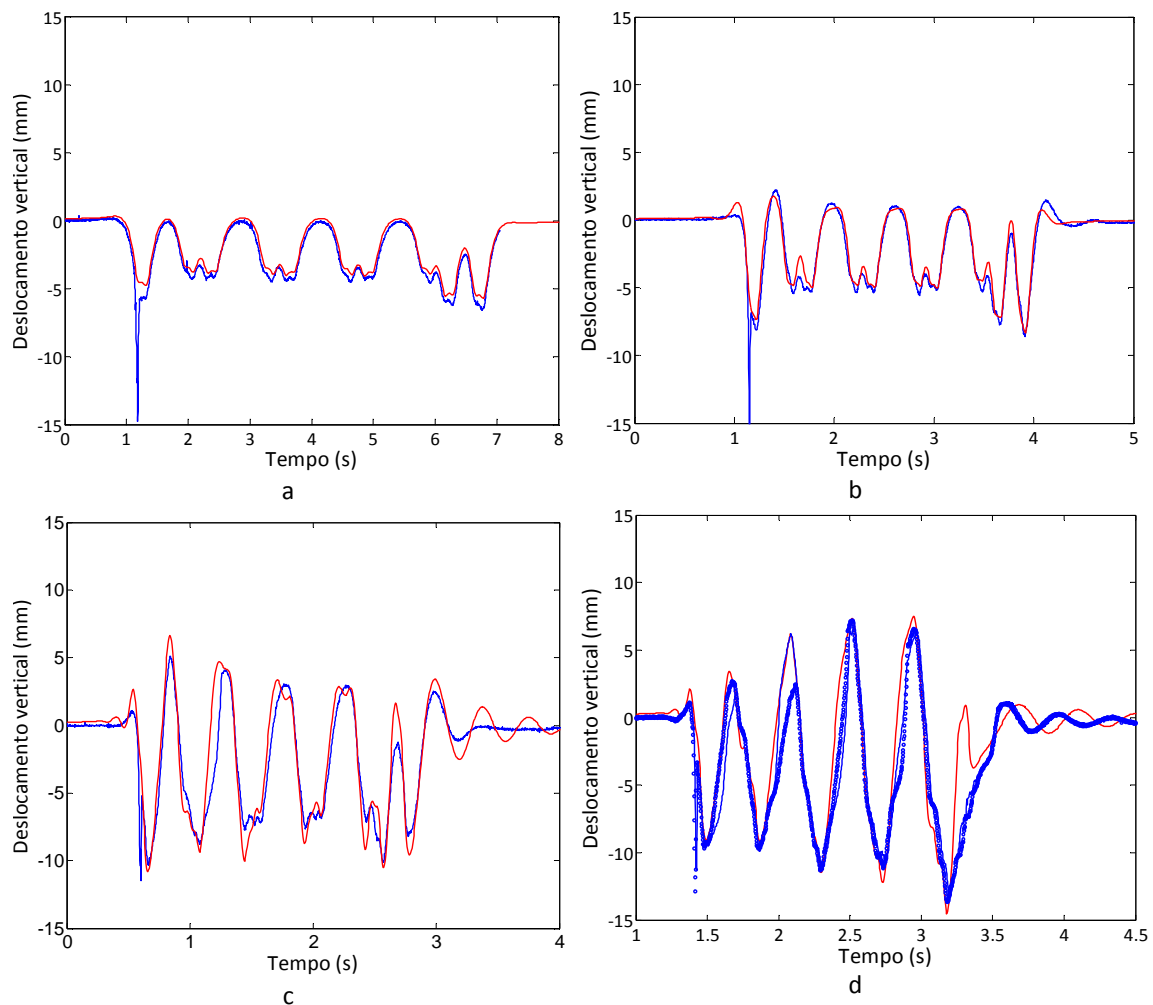


Figura 7.20 – Registo temporal do deslocamento vertical da travessa enunciado pela análise linear equivalente para diferentes velocidades de circulação do comboio X2000 no sentido Norte-Sul: a)  $c=70$  km/h; b)  $c=140$  km/h; c)  $c=180$  km/h; d)  $c=204$  km/h (linha azul – resultado numérico; linha/pontos azul – resultados experimentais).

Relativamente à dependência da resposta dinâmica da travessa em função da velocidade de circulação, a Figura 7.21 apresenta a evolução dos valores de pico (ascendentes e descendentes) do deslocamento avaliado por via experimental e numérica. Uma primeira observação da figura permite constatar que a análise linear equivalente conduz a resultados muito próximos dos medidos, tanto do ponto de vista qualitativo como quantitativo.

Com o intuito de estimar o valor da velocidade crítica do sistema via-macijo quando solicitado pelo comboio X2000, a análise é estendida até à velocidade de circulação, em ambos os sentidos, de 260 km/h. Os resultados agora obtidos permitem estimar o valor da velocidade crítica entre os 215 km/h e os 230 km/h. Refira-se ainda que, na presente situação, a velocidade crítica é dependente da solicitação, pois, como agora se ilustra, na gama de velocidades de circulação próxima da velocidade crítica a resposta do sistema é caracterizada pela incursão no regime não linear material.

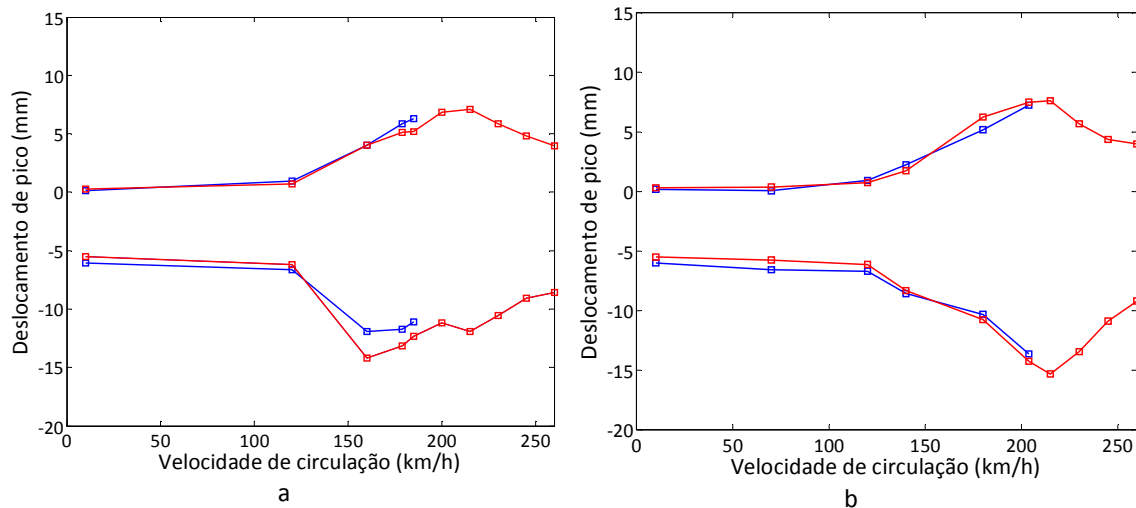
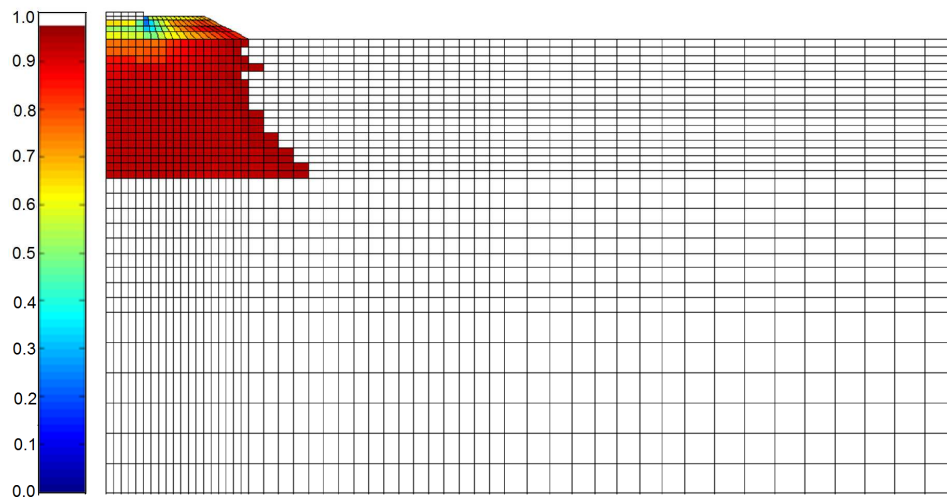


Figura 7.21 – Comparação entre os valores de pico de deslocamento da travessa avaliados experimentalmente e enunciados pela análise linear equivalente: a) circulação do comboio X2000 no sentido Sul-Norte; b) circulação do comboio X2000 no sentido Norte-Sul.

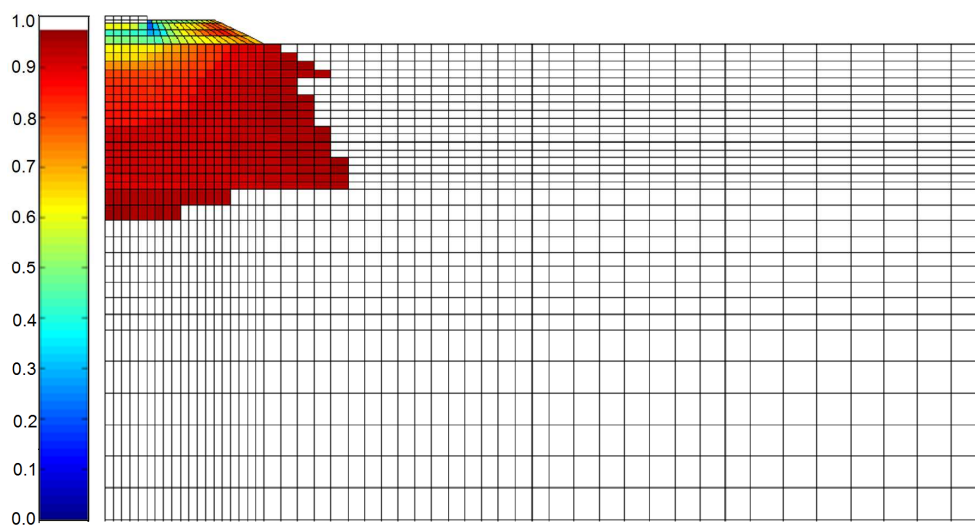
### ***Degradação das propriedades elásticas***

Como está bem patente nos resultados anteriormente indicados, o modelo linear equivalente conduz a uma estimativa muito precisa da resposta dinâmica da via férrea. Essa boa precisão deve-se ao facto da resposta numérica resultar da aplicação de um modelo iterativo até que seja alcançada uma boa correspondência entre os níveis de deformação induzidos e as propriedades elásticas equivalentes. Como é evidente, a dependência dos níveis de degradação relativamente aos níveis de deformação implica, conseqüentemente, uma relação intrínseca entre velocidade de circulação do comboio e níveis de degradação. Esta dependência entre a velocidade de circulação e a degradação de rigidez é bem ilustrada na Figura 7.22, onde se apresenta a distribuição espacial dos níveis de degradação de rigidez ( $G_{sec}/G_0$ ) para três velocidades de circulação distintas.

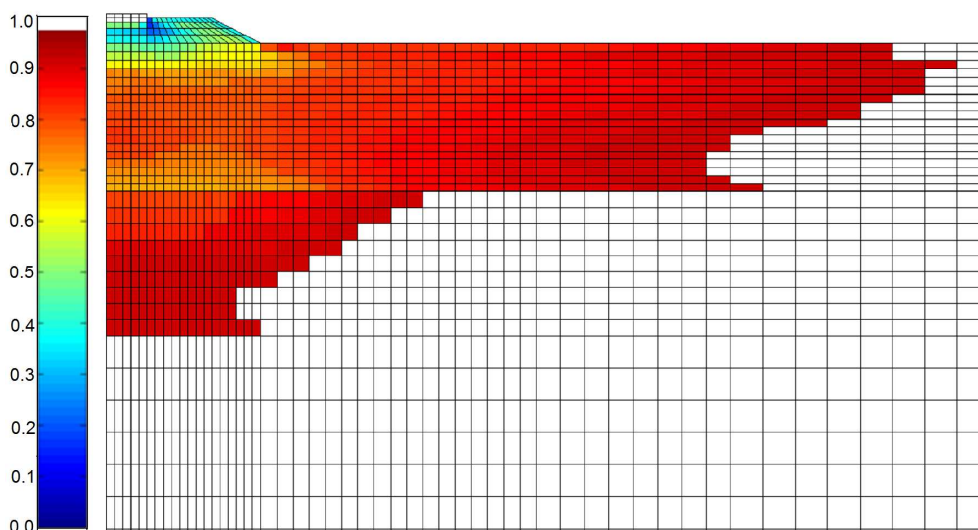
Indo de encontro ao expectável, a distribuição espacial dos níveis de degradação de rigidez (e aumento de amortecimento) mostra-se muito dependente da velocidade de circulação do comboio. Quando a velocidade é baixa, os efeitos de amplificação dinâmica são insignificantes e a degradação da rigidez não é quantitativamente importante, ocorrendo apenas numa região limitada, correspondente às camadas granulares da via (a não linearidade destes materiais manifesta-se mesmo para níveis de distorção muito reduzidos) e à zona superficial do maciço subjacente. No entanto, ao aumento da velocidade de circulação está associada a mobilização de níveis de deformação mais elevados, assistindo-se assim à expansão da região onde ocorre degradação para uma área mais global, sendo acompanhada por aumento drástico da sua magnitude, como está aliás bem evidenciado na Figura 7.22c.



a



b



c

Figura 7.22 – Mapas de degradação de rigidez ( $G_{sec}/G_{max}$ ) associados a diferentes velocidades de circulação do comboio X2000 no sentido Norte-Sul a)  $c=70$  km/h; b)  $c=140$  km/h; c)  $c=204$  km/h.



O comportamento acima identificado deve-se, obviamente, à amplificação de tensões e deformações devido a fenómenos dinâmicos induzidos pelo aumento da velocidade de circulação do comboio. O estudo aprofundado das trajectórias de tensão induzidas no maciço durante a passagem do comboio é um assunto complexo, encontrando-se fora do âmbito do presente estudo. Contudo, mais a título ilustrativo da complexidade do problema do que propriamente com o objectivo de proceder a uma interpretação profunda do mesmo, apresentam-se, na Figura 7.23, as trajectórias de tensão avaliadas no ponto pertencente ao plano de simetria e à profundidade de 4,3 m (ponto médio do estrato de lodo) tendo em consideração velocidades de circulação de 70 km/h e 204 km/h do comboio X-2000 no sentido Norte-Sul. A trajectória de tensão encontra-se definida em termos de incremento da tensão média ( $dp$ ) versus incremento da tensão de corte ( $dq$ ), as quais são dadas por:

$$dp = \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3}{3} \quad [7.7]$$

$$dq = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2 + (\Delta\sigma_3 - \Delta\sigma_1)^2 \right]} \quad [7.8]$$

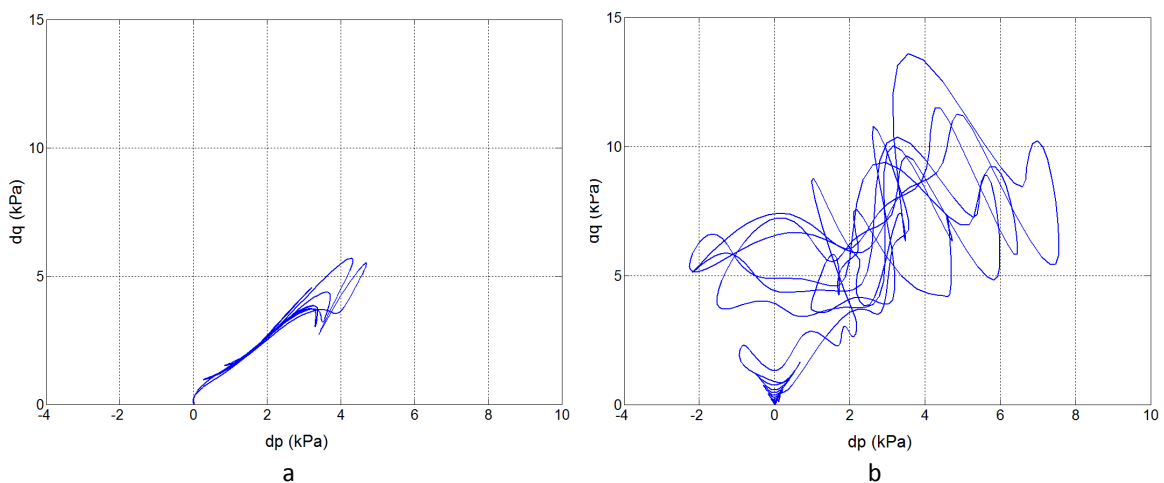


Figura 7.23 – Trajectória de tensão induzida no ponto (0;0;-4,3) devido à passagem do comboio X2000 no sentido Norte –Sul à velocidade de: a)  $c=70$  km/h; b)  $c=204$  km/h.

Da análise da trajectória de tensão representada na Figura 7.23a constata-se que, para a velocidade de circulação de 70 km/h, os efeitos de amplificação dinâmica são displicentes, ou seja, o carácter dinâmico do problema deve-se apenas à variação temporal do estado de tensão induzida pela alteração da posição geométrica do carregamento. Comparando essa mesma trajectória de tensão com a homóloga ilustrada na Figura 7.23b, referente à velocidade de circulação de 204 km/h, é possível observar diferenças muito assinaláveis: i) as alterações do estado de tensão são tanto mais pronunciadas quanto maior é a velocidade de circulação; ii) o incremento da velocidade de circulação acarreta uma alteração da configuração da trajectória de

tensão de um cenário, onde é facilmente identificável a ocorrência de ciclos de carga-descarga, para um cenário muito complexo, onde não é mais possível identificar ciclos advindos da passagem dos eixos pela secção de referência (secção transversal que inclui o ponto de observação); iii) os efeitos dinâmicos associados ao acréscimo da velocidade de circulação implicam um aumento muito significativo tanto da tensão média como da tensão de corte.

Ainda relativamente às trajectórias de tensão, convém referir que conclusões idênticas às acima expostas foram também obtidas em estudos recentes apresentados por Yang et al. [299], embora os últimos tenham sido desenvolvidos com base num modelo plano de elementos finitos. Muito embora o desenvolvimento de uma análise linear equivalente permita alcançar uma aproximação razoável da resposta do meio em estudo, como aliás se encontra bem patente na secção anterior, deve ser evidenciado que trajectórias de tensão complexas como a ilustrada na Figura 7.23b podem não ser fidedignamente reproduzidas por modelos desse tipo, já que os mesmos se baseiam na teoria da elasticidade. Na opinião do autor, uma análise profunda da dependência da trajectória de tensão induzida no solo com a velocidade de circulação carece e justifica a adopção de modelos constitutivos efectivamente não lineares, possivelmente incorporando o efeito da geração de pressões intersticiais, os quais permitem uma avaliação mais realista do estado de tensão originado. Contudo, apesar das limitações inerentes ao método adoptado, as trajectórias de tensão avaliadas através de uma análise linear equivalente fornecem informação muito pertinente, ainda que de um ponto de vista mais qualitativo do que quantitativo, na medida em que as grandes tendências de evolução do estado de tensão com a velocidade de circulação podem aí ser escrutinadas.

## 7.4 Conclusões

O objectivo principal do capítulo que agora finaliza consistiu na validação experimental da fiabilidade do modelo de elementos finitos/infinitos 2.5D na reprodução dos fenómenos dinâmicos associados ao mecanismo de excitação quasi-estática. Dada a carência de casos experimentais bem documentados e que cumprissem os requisitos pretendidos para o presente estudo, revisitou-se o famoso caso de estudo de Ledsgard, o qual é descrito nas secções iniciais do presente capítulo.

A persecução do objectivo principal, ou seja a validação experimental do modelo numérico proposto, conduziu ao desenvolvimento e implementação de uma metodologia que permite atender aos efeitos da não linearidade mecânica dos materiais geotécnicos. Esta metodologia, de

carácter inovador no contexto reflectido na presente dissertação, permite alcançar resultados numéricos de muito elevada precisão, mostrando tratar-se de uma metodologia apropriada e robusta para a análise da resposta dinâmica de vias férreas em ambientes geotécnicos que permitam uma proximidade entre velocidades de circulação e crítica.

Os dois tipos de análises numéricas efectuadas, recorrendo inicialmente a um modelo elástico linear e, posteriormente, a um procedimento iterativo que compatibiliza as propriedades elásticas equivalentes com os níveis de distorção experimentados, permitem concluir que, em cenários geotécnicos caracterizados por solos muito moles, a resposta do meio face à acção do tráfego pode ser claramente condicionada por incursões no regime não linear. Esse efeito, claramente amplificado pelo incremento da velocidade de circulação, origina uma discrepância não displicente entre os resultados vaticinados pelo modelo elástico linear e a realidade física observada. Por seu turno, a análise linear equivalente permite uma boa, senão mesmo excelente, reprodução da realidade observada, independentemente da velocidade e sentido de circulação do comboio, o que aliás realça a robustez da metodologia proposta e implementada.

Por último, refira-se que a principal vantagem do procedimento numérico desenvolvido reside na sua simplicidade, sendo apenas necessário o conhecimento das propriedades mecânicas para muito pequenas deformações e das leis de degradação para a condução da análise. Além disso, o recurso à formulação 2.5D permite o desenvolvimento de simulações com carácter tridimensional com um esforço computacional reduzido. A combinação destes dois factores reveste a metodologia proposta de um carácter muito atractivo para a condução de análises dinâmicas da resposta da via férrea face a acções de tráfego, mesmo em cenários extremos nos quais a não linearidade material do meio toma proporções não displicentes.



## 8. Campo experimental do Carregado

---

### 8.1 Preâmbulo

Face aos estudos efectuados até ao momento é lícito afirmar que a dinâmica de vias férreas de alta velocidade se reveste de duas problemáticas fundamentais, ambas de elevada relevância: i) o problema da “velocidade crítica”, indiscutivelmente relevante do ponto de vista da estabilidade estrutural da via férrea; ii) as implicações da geração e propagação de vibrações causadas pela passagem de comboios, as quais têm uma pertinência e actualidade cada vez mais acentuadas dada a crescente circulação ferroviária em ambiente urbano. Refira-se que, se no caso de vias férreas convencionais o primeiro problema perde importância, dado que a velocidade de circulação dos comboios é reduzida face à velocidade de propagação de ondas no sistema via-macizo, o mesmo não se verifica quanto ao segundo, reconhecendo-se ainda que o incremento da velocidade de circulação agrava consideravelmente a problemática em questão, como aliás já discutido em alguns dos estudos previamente apresentados.

Em capítulos antecedentes são apresentados diversos modelos teóricos, acompanhados de pequenos estudos de experimentação numérica, os quais proporcionam uma melhor compreensão da dinâmica das vias férreas, atendendo ao comportamento complexo do sistema acoplado veículo-via-macizo.

Todavia, as ferramentas teóricas de previsão, tenham elas carácter numérico, analítico ou empírico, carecem sempre de validação experimental dos seus resultados, ou seja, da confrontação entre resultados experimentais e previsionais, de forma a avaliar a fiabilidade dessas formulações na representação da realidade física. Tendo em vista esse objectivo, foi apresentada no Capítulo 7 a validação experimental de um modelo especialmente concebido para a análise da resposta de via férreas sob condições extremas de circulação, isto é, próximo da velocidade crítica do sistema. Dado tratar-se de uma questão complexa, sendo os casos documentados de circunstâncias semelhantes extremamente escassos, optou-se então pela reanálise do caso de estudo de Ledsgaard. Assim, se a fiabilidade dos modelos desenvolvidos para o estudo da problemática associada à “velocidade crítica” se encontra bem patente nos estudos apresentados no Capítulo 7, a outra vertente, ou seja, a previsão de vibrações induzidas pelo tráfego ferroviário nas imediações da via férrea, carece ainda de validação experimental, lacuna essa que se pretende colmatar com o presente capítulo.

Atendendo à necessidade de validação dos modelos numéricos desenvolvidos, o autor da presente dissertação deparou-se então com o desafio de conceber, montar e explorar um campo experimental em território nacional. O desenvolvimento e implementação de um campo experimental foi então estabelecido tendo em mente duas valências principais e complementares: i) desenvolver competências no âmbito da experimentação sobre a resposta dinâmica de vias férreas, competências essas ainda escassas no seio do grupo de investigação no qual o autor se insere; ii) recolher informação experimental que permita a validação dos modelos numéricos apresentados. Saliente-se que a validação das ferramentas numéricas poderia ter sido efectuada por recurso a informação experimental dos poucos casos de estudo reportados na bibliografia, merecendo especial destaque os casos reportados por: Degrande e Shillemans [40], Auersh [6], Lombaert et al. [5] e Galvín e Dominguez [75]. Embora essa via tenha sido ponderada, a ausência de informação precisa sobre alguns aspectos, nomeadamente no que se refere às propriedades geométricas da via férrea, bem como a carência nacional de competências experimentais no âmbito da dinâmica ferroviária, impeliram o autor para o desenvolvimento do campo experimental que agora se apresenta.

Definido o âmbito e objectivo do presente capítulo, cabe uma pequena nota sobre a sua organização. Inicialmente procede-se à descrição geral do campo experimental implementado, seguindo-se a apresentação detalhada de algumas das actividades aí desenvolvidas. Posteriormente analisa-se o processo de calibração dos modelos numéricos desenvolvidos, seguindo-se a confrontação dos resultados daí advindos com os coligidos por via experimental.

## **8.2 Localização e descrição geral**

Considerando o âmbito da presente dissertação, idealmente o local de implementação de um campo experimental deveria ser seleccionado atendendo à existência de uma via-férrea de alta velocidade. Todavia, à data de realização dos presentes estudos, tal é impossível dada a ausência desse tipo de infraestruturas em território nacional. Ainda assim, o primeiro critério ponderado na definição da localização do referido campo prende-se com a velocidade de circulação, impondo-se que a velocidade mínima de circulação do comboio mais veloz em operação em Portugal superasse os 200 km/h na zona interessada pelo estudo. Assim, a localização admissível é desde logo limitada aos troços renovados da linha do Norte, que estabelece a ligação ferroviária entre Porto e Lisboa.

Para além do critério de selecção referido, foram também ponderados outros factores, tanto de cariz geotécnico como de ordem logística. De entre os diversos factores considerados refiram-se os seguintes: i) a homogeneidade do cenário geotécnico interessado pela via férrea, sob pena de, caso contrário, a heterogeneidade e complexidade geológica, em associação com uma campanha de prospecção de recursos limitados, tornar o caso de estudo extremamente complexo e de difícil interpretação; ii) a acessibilidade ao local, tanto no que se refere à via férrea como aos terrenos nas suas imediações; iii) a existência de terreno livre na envolvente à linha de modo a permitir a instalação de sensores; iv) o traçado da via em alinhamento recto; v) a simplicidade da topografia nas imediações da via de modo a não introduzir complexidade adicional ao procedimento de modelação numérica do local.

Atendendo aos critérios indicados e após a consulta da administração ferroviária nacional (REFER) e visita a diversos locais tidos como admissíveis, optou-se por implantar o campo experimental ao km 41+600 da linha do Norte, entre os apeadeiros de Vila Nova da Rainha e do Espadanal da Azambuja. A fotografia da Figura 8.1 faculta uma identificação genérica da localização geográfica do campo experimental, sendo uma visão pormenorizada remetida para a Figura 8.2.

A zona interessada pelo estudo insere-se no troço renovado da Linha do Norte designado por Alhandra-Setil, cuja construção data de meados da década passada. Relativamente ao enquadramento geológico, a área enquadra-se numa grande unidade geotectónica constituída pela Bacia do Baixo Tejo e Sado. Do ponto de vista estrutural a bacia em causa não apresenta grande complexidade uma vez que o seu enchimento, constituído fundamentalmente por séries detríticas continentais de idade paleogénica-neogénica, apresenta atitude sub-horizontal [300]. Analisando a Figura 8.1b verifica-se que o traçado da Linha do Norte na zona interessada é, grosso modo, coincidente com o limite Noroeste da bacia do Tejo, onde se encontram as formações geológicas mais antigas, datando do plio-miocénico.

A análise preliminar dos resultados dos estudos geotécnicos realizados aquando da elaboração do projecto de renovação da infra-estrutura ferroviária permite identificar a existência de um aterro superficial de possança variável em torno dos 2,0 m. Essa formação recente está sobrejacente a formações quaternárias siltoso-argilosas moles de possança variável, encontrando-se, em algumas sondagens, formações mais carbonatadas, dada a proximidade do bordo entre a bacia do Tejo e as formações miocénicas do substrato.

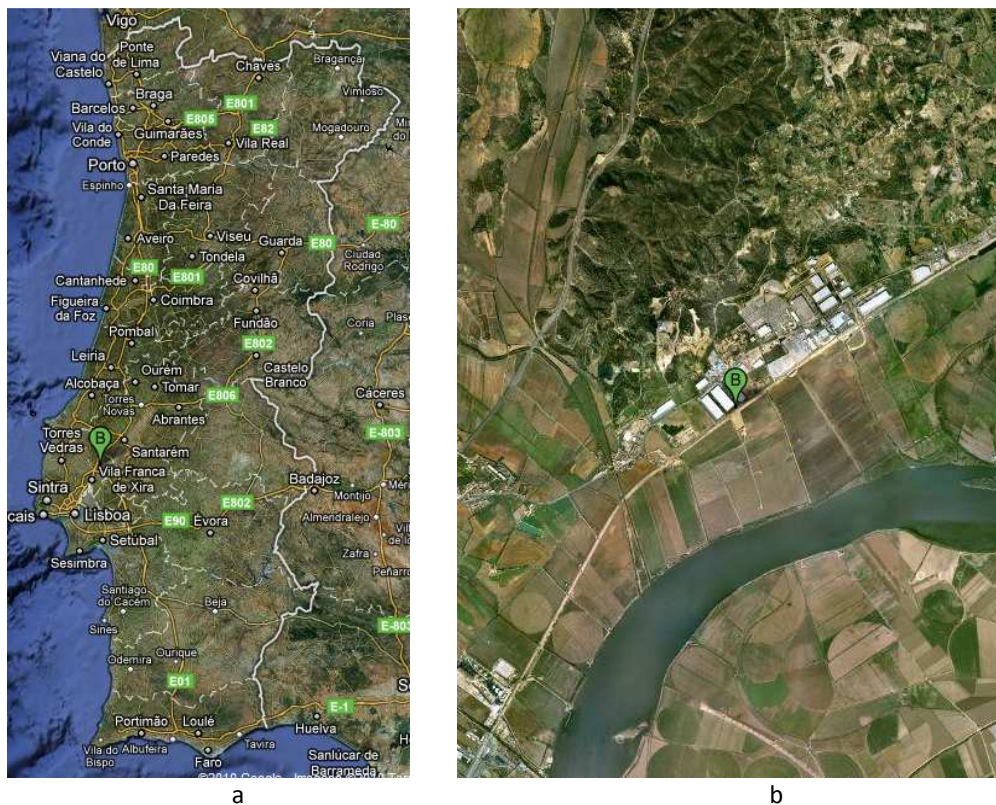


Figura 8.1 – Localização geográfica do campo experimental: a) no contexto nacional; b) fotografia satélite de pormenor.

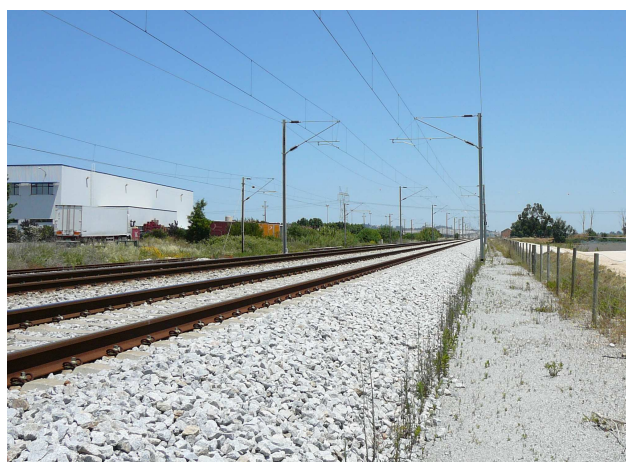


Figura 8.2 – Fotografia da via férrea.

O traçado da infra-estrutura ferroviária segue um alinhamento recto ao longo de várias centenas de metros, sendo o aterro para criação da plataforma ferroviária inexistente ou de dimensão reduzida. A linha, de via dupla e bitola ibérica, é constituída por carris de barra soldada do tipo UIC60, os quais se apoiam em travessas de betão pré-esforçado espaçadas longitudinalmente cerca de 0,60 m. Relativamente às camadas granulares, a análise das peças desenhadas do projecto de renovação, bem como a inspecção visual do local em estudo, permitem identificar a presença de camadas de balastro e de subbalastro com espessuras de 0,35 m e 0,30 m, respectivamente. Acresce ainda a possibilidade de existência de uma camada de material granular



subjacente ao subbalastro, com cerca de 0,25 m de espessura, a qual desempenha a função de leito de via nas zonas em que não existe aterro.

A envolvente à linha férrea é caracterizada pela presença de terrenos de exploração agrícola, encontrando-se mais ou menos aplanados pela cota da base das camadas granulares da via férrea, tal como se ilustra esquematicamente na secção transversal representada na Figura 8.3.

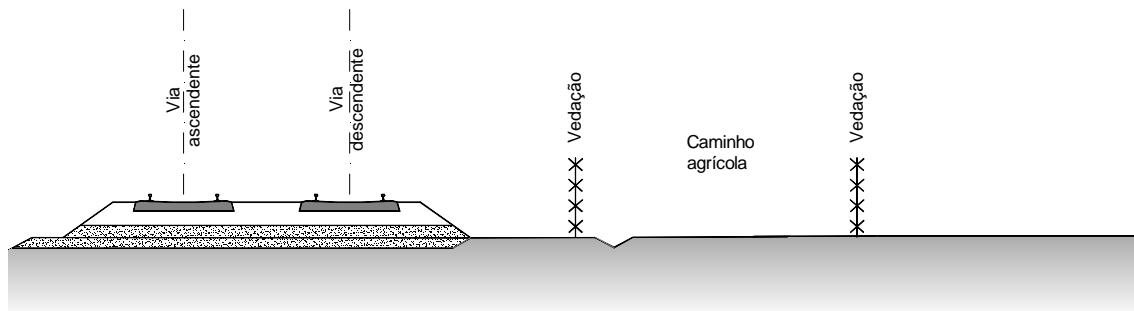


Figura 8.3 – Secção transversal da via férrea.

Relativamente ao tráfego ferroviário, o troço em causa caracteriza-se por uma exploração mista, de carácter intensivo, compreendendo tipologias de tráfego tão distintas como: comboios urbanos e sub-urbanos, comboios regionais, comboios inter-regionais (Intercidades e Alfa-pendular) e comboios de mercadorias. Por último, refira-se que o comboio mais veloz a operar na rede ferroviária nacional, o comboio Alfa-pendular, alcança, no troço em causa, velocidade de circulação superior a 200 km/h.

## 8.3 Caracterização geomecânica do maciço de fundação

### 8.3.1 Considerações gerais

Decerto que uma boa caracterização geomecânica do maciço de fundação constitui um dos aspectos fundamentais para uma correcta interpretação dos mecanismos de geração e, principalmente, de propagação de vibrações induzidas por tráfego ferroviário. Contudo, a avaliação das propriedades mecânicas dos maciços está sempre associada a diferentes fontes de incerteza que contribuem para a complexidade do problema. De entre os factores que podem ser referidos como contribuindo para essa incerteza, o carácter pontual dos ensaios disponíveis quando comparado com a vastidão do volume de solo interessado pelo problema, bem como a realização de campanhas de prospecção com recursos limitados, constituem dos aspectos mais importantes.

Visando aumentar a qualidade da informação recolhida, o procedimento ideal implica a realização de uma campanha de prospecção englobando um adequado número de ensaios e recorrendo, preferencialmente, a técnicas experimentais distintas, de modo a coligir informação redundante que permita reduzir a incerteza associada às propriedades mecânicas sob estudo. Contudo, tal como é usual na generalidade das situações práticas, a limitação dos recursos alocados à implementação do presente campo experimental não permitiu a realização da quantidade de ensaios ideal nem o uso de certas metodologias aconselháveis, ficando assim limitada à quantidade e tipologia de ensaios tidos como imprescindíveis para uma interpretação minimamente adequada das condições geomecânicas do maciço de fundação. Nas subsecções seguintes descrevem-se os ensaios realizados e resume-se a informação daí advinda.

### **8.3.2 Avaliação das propriedades deformacionais através de ensaios “in situ”**

A campanha de caracterização geotécnica contemplou os seguintes ensaios “in situ”:

- i) 2 ensaios CPT;
- ii) 1 furo de sondagem com ensaios SPT espaçados de 1,5 m em profundidade;
- iii) 2 ensaios sísmicos entre furos (Cross-hole), com espaçamento em profundidade de cerca de 1,0 m.

Para a análise do problema em estudo, os dois primeiros tipos de ensaios têm interesse mais qualitativo do que propriamente quantitativo. De facto, por se tratar de ensaios penetrométricos, envolvem níveis de deformação no solo elevados, muito superiores aos induzidos pelo tráfego ferroviário. Contudo, trata-se de ensaios geotécnicos clássicos que facultam uma definição das unidades litológicas atravessadas, fornecendo assim informação útil como complemento aos resultados dos ensaios sísmicos. Assim, as propriedades de rigidez dinâmica do maciço, traduzidas através de velocidades de propagação de ondas longitudinais ( $C_p$ ) e de corte ( $C_s$ ), são avaliadas através de ensaios Cross-hole, enquanto a informação recolhida através dos restantes ensaios é encarada como um complemento informativo.

A Figura 8.4 mostra a localização em planta dos diferentes ensaios realizados. Dado o facto de a linha férrea se encontrar em operação, a prospecção do maciço subjacente à mesma não é de todo compatível com as exigências relativas à segurança de circulação, pese embora o elevado interesse que tal prospecção teria no âmbito do presente estudo.

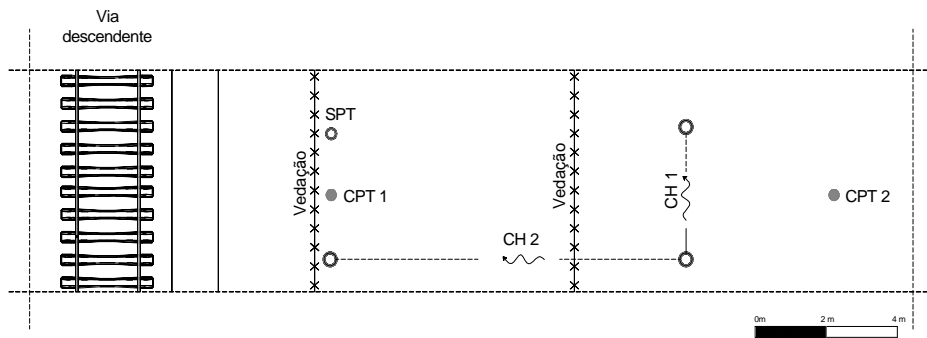


Figura 8.4 – Localização em planta dos ensaios in situ realizados.

### Ensaio CPT

No que toca aos ensaios CPT, cabe referir que foi atingida a profundidade de aproximadamente 13,50 m em ambos os ensaios. A finalização do ensaio foi ditada por questões de ordem logística, pois, alcançado o valor de profundidade indicado, a continuação da cravação da ponteira mostrou-se inviável pelo facto de a força requerida se aproximar da força máxima de reacção disponível (peso estático do camião). Na Figura 8.5 apresentam-se fotografias do equipamento e sistema de reacção.

Como já referido, os ensaios CPT foram realizados com o objectivo de recolher informação complementar aos ensaios Cross-hole, nomeadamente para um melhor escrutínio da estratificação do maciço interessado pela via vérrea. Os resultados directos do ensaio, isto é, a resistência de ponta,  $q_c$ , e a resistência lateral atrítica,  $f_s$ , encontram-se ilustrados na Figura 8.6. Como se pode verificar, a menos de algumas de algumas diferenças de carácter pontual, pautadas principalmente pela heterogeneidade do maciço nos horizontes mais superficiais, existe razoável proximidade global entre o resultado dos dois ensaios. Sem embargo, não passa despercebido o facto de o ensaio CPT1 permitir discernir a existência de uma camada de areia, denunciada pela elevada resistência de ponta à profundidade de cerca de 6,5 m, a qual não é identificada de forma tão vincada no resultado do ensaio CPT2.



Figura 8.5 – Ensaio CPTU: a) Pormenor da ponteira; b) Sistema de reacção.

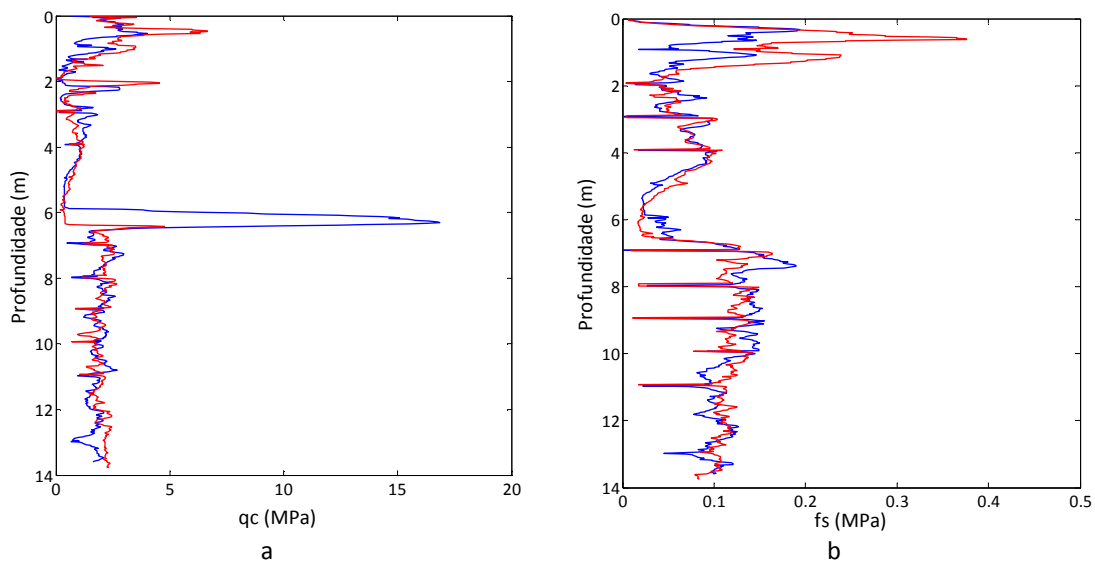


Figura 8.6 – Resultados dos ensaios CPT: a) resistência de ponta; b) resistência lateral atrítica (azul – ensaio CPT1; vermelho – ensaio CPT2).

Visto que o ensaio CPT é claramente um ensaio *in situ*, no qual não há lugar a colheita de amostras para posterior análise laboratorial, existem diversas correlações empíricas, sob a forma de diagramas, que permitem a classificação dos terrenos atravessados através da razão atrítica (rácio entre a resistência lateral atrítica e a resistência de ponta) e da resistência de ponta normalizada. Na Figura 8.7 apresenta-se a sobreposição do resultado de ambos os ensaios em diagramas de classificação propostos por Robertson [301, 302], admitindo-se a divisão do maciço em quatro zonas, sendo a primeira correspondente aos 1,80 m superficiais, a segunda à profundidade compreendida entre os 1,80 m e os 5,40 m, a terceira à profundidade entre os 5,40 m e os 7,20 m, e por último, a zona correspondente a profundidade superior a 7,20 m.

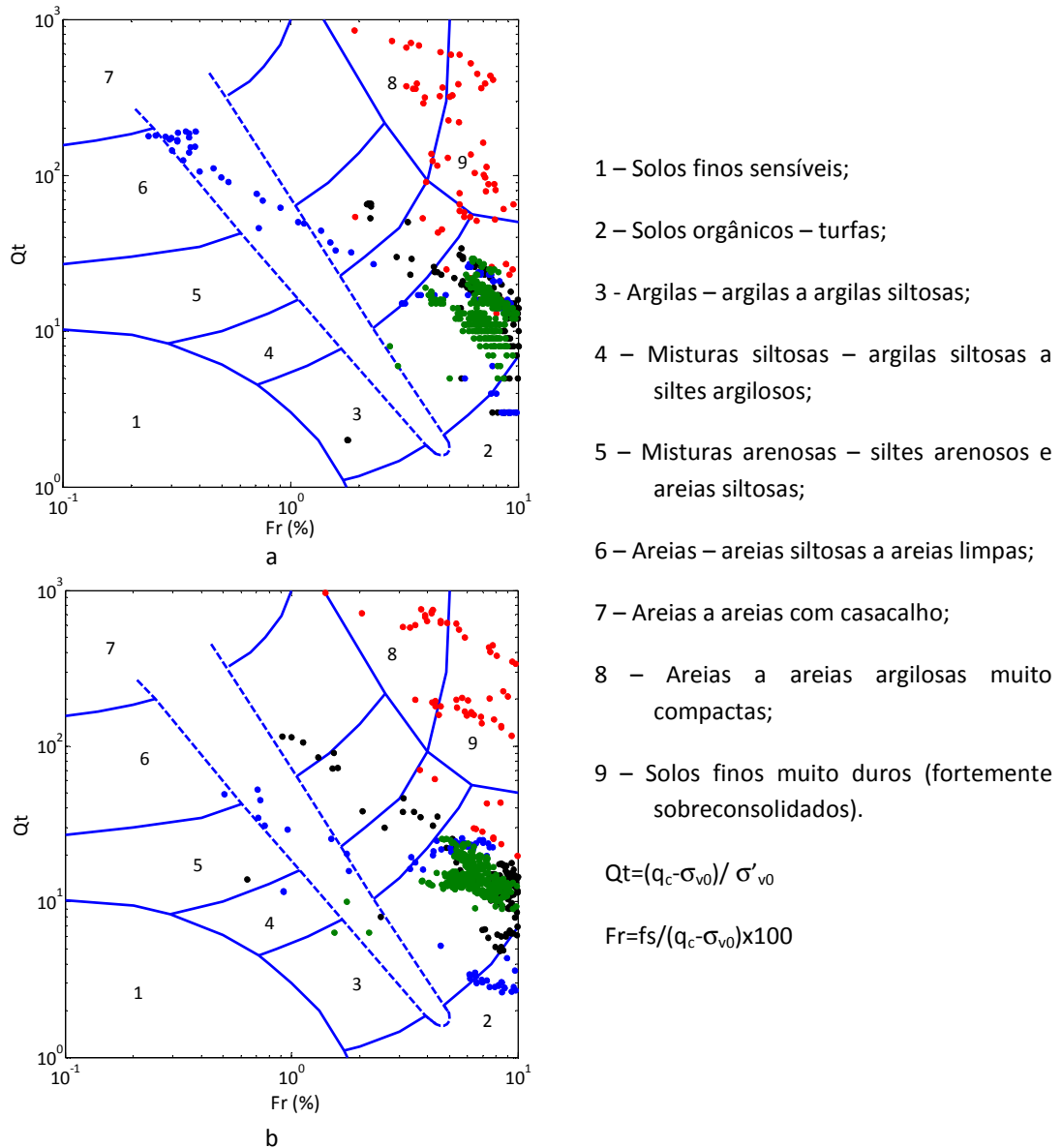


Figura 8.7 – Carta de classificação dos solos a partir do ensaio CPT: a) ensaio CPT1; b) ensaio CPT2. (vermelho – 0 m < z < 1,80 m; preto 1,80 m < z < 5,40 m; azul – 5,4 m < z < 7,20 m; verde – z > 7,20 m).

Analisando as cartas de classificação conclui-se que o horizonte mais superficial corresponde a solos sobreconsolidados (zona 8 e 9), maioritariamente constituídos por solos finos muito duros (zona 9), embora com possível presença de areias a areias argilosas muito compactas. Subjacente, encontra-se um estrato formado essencialmente por solos argilosos a argilo-siltosos, com intercalações de solos mais arenosos, sendo esta situação mais evidente no ensaio CPT2 do que no CPT1.

O ambiente geotécnico mais complexo surge à profundidade compreendida entre os 5,40 m e os 7,20 m. De facto, o ensaio CPT1 sugere a presença de um fino estrato de solo arenoso, o qual não se encontra evidenciado no ensaio CPT2. Contudo, em ambos os ensaios é também possível identificar a intercalação desse estrato por uma formação argilosa, com elevado teor de matéria

orgânica, à qual corresponde a classificação de solo tipo 2 de acordo com as cartas de classificação acima representadas.

Para profundidades superiores a cerca de 7,20 m, o maciço apresenta elevada homogeneidade, sendo caracterizado por solos do tipo 3, ou seja, argilas a argilas siltosas.

O ensaio CPT é um ensaio penetrométrico que envolve níveis de deformação do solo consideráveis, não sendo por isso especialmente adequado para a estimativa de parâmetros deformacionais, pelo menos na gama das muito pequenas deformações. Sem embargo, não pode deixar de se referir a existência de diversas correlações empíricas, principalmente para solos argilosos, entre a resistência de ponta e a velocidade de propagação das ondas S [303, 304]. Apesar das devidas ressalvas, a utilização de correlações empíricas é uma via a considerar, na ausência de informação mais detalhada, para a estimativa das propriedades deformacionais do maciço para muito pequenas deformações.

### **Ensaio SPT**

Ao longo do furo de sondagem executado, com 15,0 m de profundidade, foram realizados ensaios SPT, espaçados de 1,50 m em profundidade, tendo-se ainda recolhido amostras intactas a diferentes profundidades com vista à realização de ensaios laboratoriais. Na Figura 8.8 apresenta-se a estratigrafia do maciço, bem como os resultados dos ensaios SPT. Comparando os resultados ilustrados na Figura 8.8 com a classificação dos solos avaliada pelos ensaios CPT (Figura 8.7), observa-se uma concordância muito razoável, apesar do carácter mais discreto do ensaio SPT.

A posição do nível freático foi identificada aos 3,0 m de profundidade.

A recolha de amostras teve como finalidade permitir a realização de alguns ensaios laboratoriais com vista à caracterização e identificação das formações geotécnicas atravessadas durante a execução do furo de sondagem. No Quadro 8.1 apresenta-se a síntese dos resultados dos ensaios laboratoriais. Uma vez mais, é possível constatar uma concordância razoável entre a classificação apontada pelos ensaios CPT e a verificada por análise laboratorial.

z (m)	Descrição	N (SPT)
1,5	Solo areno-argiloso, material de aterro	4
3,0	Solo argilo-arenoso, com atéria orgânica	13
4,5	Solo argiloso de cor cinzenta com intercalações de solo arenoso	0
6,0		21
7,5	Solo argiloso de cor castanha com fragmentos de calcário	14
9,0		20
10,5		16
12,0		15
13,5		14

Figura 8.8 – Registo do ensaio SPT

Quadro 8.1 – Síntese dos resultados dos ensaios laboratoriais para a caracterização e identificação dos solos.

z (m)	Granulometria (%)			Limites de Attemberg (%)		w (%)	Ip	Ic	Classificação
	areia	silte	argila	w <sub>L</sub>	w <sub>p</sub>				
5,50	20	38	42	68	29	44,7	39	0,59	Argila siltosa média
5,85	80	8	12	-	-	-	-	-	Areia
7,60	5	55	40	59	26	35,5	33	0,72	Argila média a dura
7,95	0	55	45	59	25	30,4	34	0,85	Argila dura
10,25	5	57	38	56	24	35,5	32	0,64	Argila média a dura
12,70	5	50	45	53	23	34,5	30	0,61	Argila média a dura

Nota: w é o teor em água, w<sub>L</sub> é o limite de liquidez; w<sub>p</sub> é o limite de plasticidade; Ip é o índice de plasticidade e Ic é o índice de consistência.

### Ensaio Cross-hole

O ensaio sísmico entre furos, vulgo Cross-hole, constitui, de entre os realizados, o ensaio *in situ* fundamental para a determinação das propriedades dinâmicas do maciço de fundação, razão pela qual se procede a uma descrição mais detalhada dos trabalhos efectuados.

O fundamento teórico do ensaio Cross-hole é relativamente simples: consiste somente na determinação do tempo necessário para que uma onda percorra a distância compreendida entre o emissor e o receptor, situados ambos à mesma profundidade no interior de furos previamente abertos no maciço. Conhecidas a distância entre furos e o tempo que medeia entre a emissão da onda e a sua chegada ao receptor, é então determinada a velocidade de propagação.

Com vista à execução dos ensaios Cross-hole, tal como mostra a Figura 8.4, realizaram-se 3 furos de sondagem à rotação e ao abrigo tubos metálicos de revestimento recuperáveis. Após a furação, foi introduzido um tubo de PVC no interior do furo, solidarizado ao terreno envolvente através da injeção de calda de cimento no espaço compreendido entre o revestimento de PVC e as paredes do furo propriamente dito. As fotografias apresentadas na Figura 8.9 permitem uma melhor percepção da sequência de operações.



Figura 8.9 – Preparação dos furos para realização do ensaio Cross-hole: a) furação do terreno; b) introdução do revestimento em PVC e do tubo de injeção; c) equipamento de fabrico e injeção de calda; d) injeção de calda de cimento e retirada do revestimento provisório.

Finalizada a preparação dos furos, e após um período de espera de alguns dias para que se desse a presa da calda de cimento, pôde então dar-se início à realização dos ensaios Cross-hole. O equipamento utilizado recorre a uma fonte electromagnética para geração da onda, a qual é recebida num geofone triaxial. Este equipamento, com a designação comercial Geotomografie, apresenta elevada complexidade, permitindo a geração e registo de ondas de corte polarizadas.



Na Figura 8.10 apresenta-se o princípio geral de funcionamento do ensaio, bem como fotografias da fonte de geração sísmica e do geofone receptor.

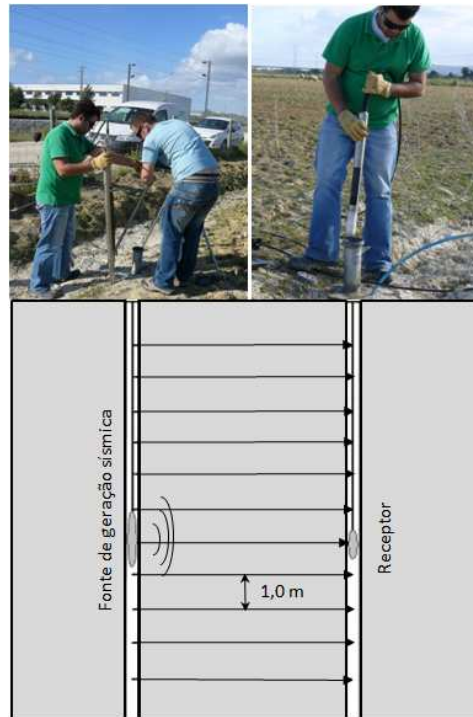


Figura 8.10 – Equipamento Cross-hole.

Os resultados dos ensaios Cross-hole, expressos em termos de velocidade de propagação de ondas S ( $C_s$ ) e de ondas P ( $C_p$ ), encontram-se coligidos na Figura 8.11. O planeamento inicial estipulava a realização de ensaios Cross-hole até uma profundidade máxima de 15 m. Porém, aquando da realização dos trabalhos, verificou-se que os tubos de PVC se encontravam parcialmente preenchidos por calda de cimento: infelizmente, apesar de todos os cuidados tidos na garantia de estanquidade do revestimento, as medidas adoptadas mostraram-se ineficientes, o que permitiu que parte da calda de injeção entrasse para o interior do revestimento. De qualquer modo, a informação coligida permitiu a definição do perfil geotécnico nos horizontes mais superficiais (até à profundidade de aproximadamente 9,0 m), tidos como os mais relevantes para o problema em estudo, sendo contudo de notar que a ausência de caracterização geofísica dos horizontes mais profundos pode justificar alguma perturbação na interpretação dos resultados relativos à gama de frequências de excitação mais baixas.

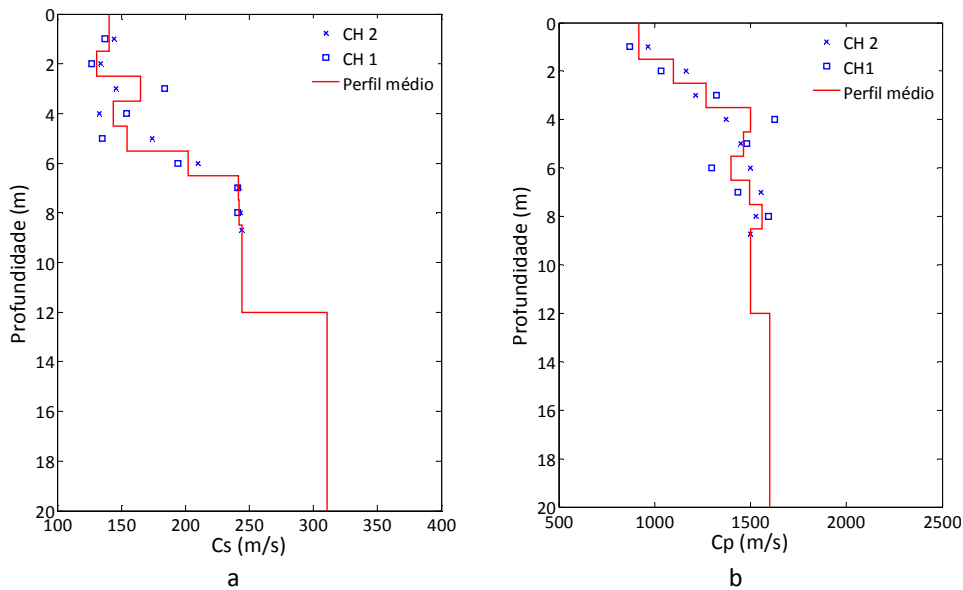


Figura 8.11 – Resultados dos ensaios Cross-hole: a) Velocidade de propagação das ondas S; b) Velocidade de propagação das ondas P.

Analisando os resultados expressos na Figura 8.11a observa-se que a rigidez do maciço segue uma tendência de crescimento em profundidade, embora com alguns desvios pontuais pautados pela estratificação do maciço. Como era expectável, não existe uma concordância perfeita entre os resultados obtidos nos dois ensaios Cross-hole, sendo curioso notar que é entre os 2,5 m e os 6,0 m que ocorre uma maior dispersão de resultados.

Relativamente à velocidade de propagação das ondas P, cujos resultados se apresentam na Figura 8.11b, verifica-se uma tendência de crescimento da velocidade em profundidade até cerca dos 3,0 m, sendo, para profundidades superiores, praticamente constante em torno dos 1500 m/s. Com efeito, o nível freático encontra-se a profundidade próxima dos 3,0 m, razão pela qual, para profundidades superiores, a velocidade de propagação das ondas P se manifesta pouco sensível às propriedades deformacionais do esqueleto sólido que constitui a formação geotécnica, indo assim ao encontro da formulação teórica já explanada no Capítulo 2.

Um outro aspecto que não pode deixar de ser alvo de reparo prende-se com os valores aparentemente elevados da velocidade de propagação das ondas P acima dos 3,0 m de profundidade. Este facto é justificado, possivelmente, por fenómenos de sucção, que fazem com que as formações subjacentes à posição do nível freático se encontrem em estado parcialmente saturado (o grau de saturação, próximo de 100 % logo acima do nível freático, vai diminuindo sucessivamente com a proximidade da superfície do maciço), conduzindo assim a velocidades de propagação das ondas P relativamente elevadas.

A problemática em estudo é fortemente condicionada pela relação de dispersão P-SV. Como tal, e visto que essa relação constitui uma entidade caracterizadora da dinâmica do maciço de fundação, apresentam-se na Figura 8.12 as curvas de dispersão P-SV determinadas através do perfil médio de velocidade de propagação de ondas volúmicas (Figura 8.11).

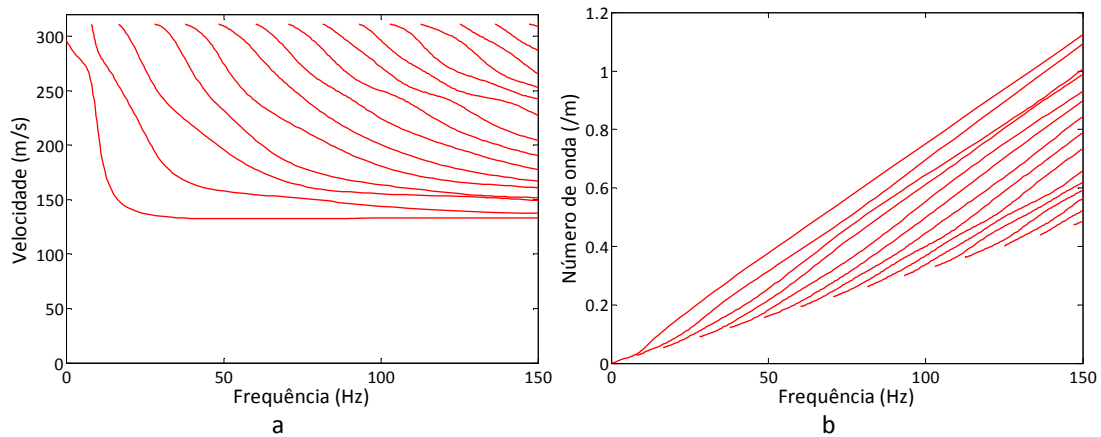


Figura 8.12 – Relação de dispersão P-SV do maciço geotécnico: a) representação f-c; b) representação f-k.

Convém desde já esclarecer que as formações subjacentes à posição do nível freático são aqui simuladas através de um meio monofásico equivalente cujas propriedades elásticas são deduzidas através dos resultados indicados na Figura 8.11, tal como sugerido por Schevenels et al. [57] e devidamente justificado no Capítulo 2.

### 8.3.3 Avaliação do amortecimento através de ensaios

Avaliadas as propriedades deformacionais do maciço, fica em aberto a questão da estimativa do amortecimento material associado aos diferentes estratos que constituem o maciço geotécnico. A avaliação *in situ* do amortecimento é uma questão complexa para a qual não existe ainda uma resposta totalmente satisfatória, pese embora se trate de um parâmetro de elevada importância na análise da resposta dinâmica de maciços geotécnicos.

Recentemente, a melhoria das técnicas de inversão, associada à evolução da tecnologia dos sensores, tem potenciado o surgimento de novas metodologias para a estimativa do amortecimento [305, 306]. Uma dessas metodologias, que aparenta ser especialmente promissora, baseia-se na inversão das curvas de atenuação coligidas durante a realização de ensaios de análise espectral de ondas de superfície (SASW) [306-308]. Embora o autor do presente estudo tenha desenvolvido algumas competências teóricas nesse domínio, tendo mesmo realizado um estágio de curta duração na Universidade de Leuven com essa finalidade,

não foi possível reunir, atempadamente, as condições logísticas e materiais para a realização desses ensaios no campo experimental agora descrito. Como tal, optou-se por um procedimento alternativo através da retro-análise da resposta de alguns pontos da superfície do maciço quando este é solicitado através de um excitador electro-magnético de frequência controlada.

O ensaio proposto é relativamente simples, sendo na sua essência baseado na estimativa da função de transferência definida através da força transmitida pelo excitador ao maciço e o nível de vibração vertical experimentado em diferentes pontos da superfície do mesmo. Após a avaliação experimental da referida função de transferência, o amortecimento material dos diferentes estratos do maciço é ajustado no modelo teórico (as propriedades deformacionais estão já estabelecidas de acordo com os resultados experimentais apresentados na subsecção anterior) até que se obtenha uma concordância razoável entre os resultados enunciados pelo modelo teórico e os homólogos obtidos por via experimental.

Na Figura 8.13 apresenta-se o esquema geral do ensaio e uma imagem fotográfica do excitador utilizado. O excitador é composto por um oscilador, capaz de gerar forças até cerca de 500 N, instalado sobre um sistema de suspensão por molas que permite que o corpo do equipamento seja utilizado como uma massa inercial de cerca de 63,5 kg. Ensaio realizados em laboratório, nos quais se mediu a aceleração da massa inercial e da força transmitida pelo equipamento, permitiram validar o valor de massa indicado pelo fabricante. Refira-se ainda que este equipamento está munido de uma unidade de controlo, a qual permite definir a frequência de excitação na gama entre 5 Hz e 600 Hz.

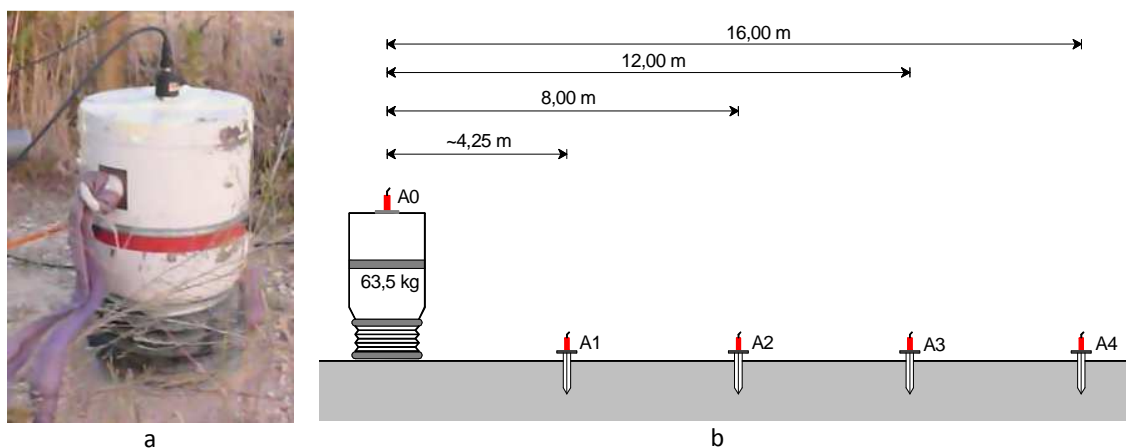


Figura 8.13 – Ensaio de excitação controlada: a) fotografia do excitador; b) esquema de ensaio.

Como se ilustra na Figura 8.13b, durante a actuação do equipamento, numa gama de frequências entre os 5 Hz e os 150 Hz, mediou-se a aceleração vertical, por recurso a acelerómetros piezoelétricos (PCB® modelo 393A03), de vários pontos da superfície do terreno localizados a diferentes distâncias. O acoplamento dos acelerómetros ao terreno é garantido através de uma

pequena estaca em aço, de secção cruciforme, que é cravada no terreno e na qual é posteriormente montado o acelerómetro, na sua extremidade superior. Este tipo de montagem revela-se adequado para a medição de acelerações verticais no maciço; sem embargo, note-se que se devem utilizar estacas de alumínio (ou outro material de reduzida massa volúmica) quando o interesse do estudo abranja a componente horizontal da resposta [309].

No que respeita ao sistema de aquisição, este é composto por um módulo NI CDAQ-9172 equipado com módulos IEPE e controlado por um computador portátil.

A força dinâmica exercida pelo excitador é avaliada de forma indirecta através do conhecimento da massa inercial e da sua aceleração (tendo para isso sido instalado um acelerómetro no topo do oscilador, tal como é perceptível na Figura 8.13).

Para além do registo de acelerações ao longo do alinhamento representado na Figura 8.13, esta grandeza foi também medida em pontos com distanciamento igual ao representado, mas ao longo de um alinhamento radial com direcção ortogonal à indicada na figura. A medição da resposta em dois alinhamentos permite avaliar o grau de homogeneidade do maciço geotécnico, pois, caso tal se verifique, a resposta é apenas dependente da distância entre fonte e receptor e não da orientação radial. Para melhor discernir esta questão, nas Figuras 8.14 e 8.15 ilustra-se, para as frequências de excitação de 20 Hz e 50 Hz, respectivamente, o registo temporal e conteúdo em frequência da aceleração verificada nos dois pontos distantes de 4,25 m do excitador (ponto A1 e ponto A1R, sendo o último correspondente ao alinhamento ortogonal ao representado na Figura 8.13b).

Analisando os resultados apresentados, verifica-se que não existe uma coincidência perfeita da aceleração medida nos dois pontos indicados. Como era expectável, o maciço não apresenta um comportamento homogéneo perfeito, razão pela qual se assiste a alguma diferença, tanto na amplitude como na fase da aceleração vertical de pontos igualmente afastados do excitador. É também possível concluir, através da comparação entre resultados homólogos para diferentes frequências de excitação, que o efeito da heterogeneidade do maciço é mais pronunciado para as frequências mais altas do que para as frequências baixas. A dependência do efeito da heterogeneidade com a frequência de excitação é justificada pela relação existente entre frequência de excitação e comprimento de onda. Com efeito, quanto menor for a frequência de excitação maior é o comprimento da onda gerada, implicando assim uma menor sensibilidade da resposta face às pequenas heterogeneidades associadas, principalmente, aos horizontes geotécnicos mais superficiais. Frequências mais elevadas estão associadas a ondas com menor

grau de penetração, afectando menor volume de solo e sendo, por isso, a resposta do meio muito susceptível a perturbações resultantes de heterogeneidades mecânicas locais.

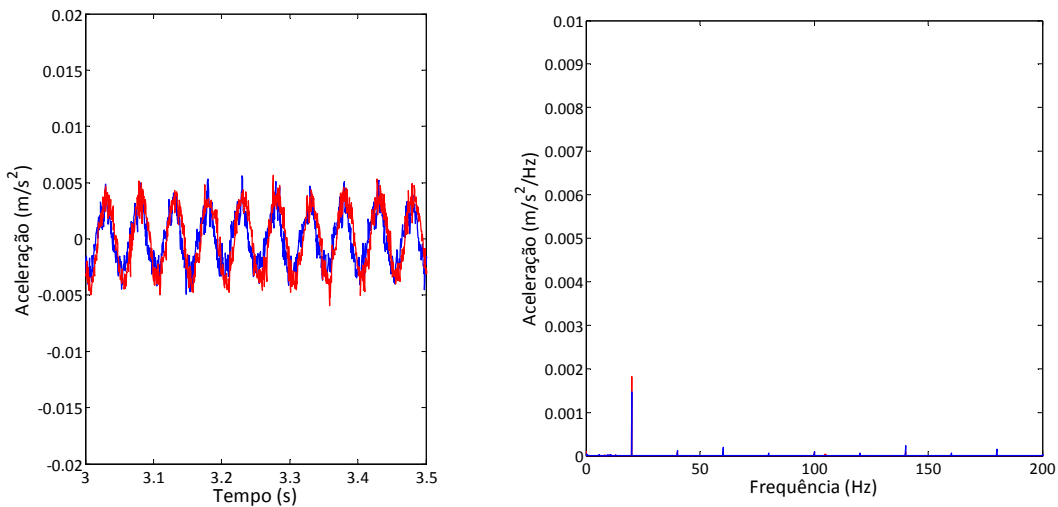


Figura 8.14 – Aceleração vertical medida em pontos distantes de 4,25 m do excitador para uma frequência de excitação de 20 Hz: a) registo temporal; b) conteúdo em frequência (linha azul - A1; linha vermelha - A1R).

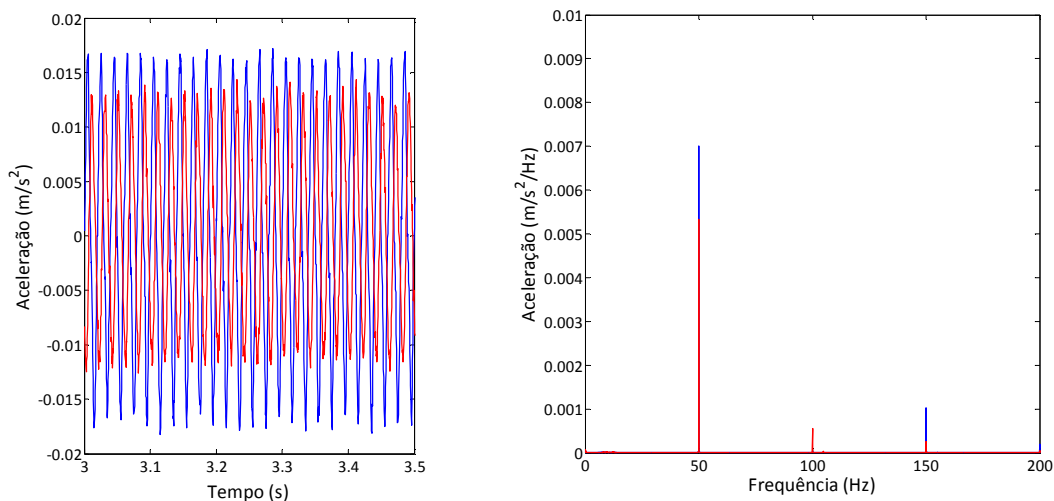


Figura 8.15 – Aceleração vertical medida em pontos distantes de 4,25 m do excitador para uma frequência de excitação de 50 Hz: a) registo temporal; b) conteúdo em frequência (linha azul - A1; linha vermelha - A1R).

Após a aquisição e tratamento dos sinais passa-se à segunda fase do processo, ou seja, à construção de um modelo teórico cujas propriedades de amortecimento são calibradas de modo a que se obtenha uma concordância razoável entre resultados teóricos e experimentais.

Admitindo a linearidade do sistema, a função de transferência experimental pode ser definida através do rácio entre uma qualquer grandeza que caracterize a resposta (acelerações, velocidades ou deslocamentos) e a força de excitação. No presente caso, opta-se pela descrição da resposta em termos de velocidades, sendo assim a função de transferência designada de mobilidade.

A Figura 8.16 apresenta a mobilidade, determinada por via experimental e numérica, associada aos pontos de observação anteriormente indicados. Os resultados experimentais resultam da média dos valores registados em dois ensaios com localização em planta distinta.

Relativamente ao modelo teórico, saliente-se que o mesmo foi construído através das metodologias descritas no Capítulo 3, simulando um meio estratificado semi-indefinido, cujas propriedades mecânicas estão de acordo com os resultados experimentais ilustrados na Figura 8.11. No que concerne à massa volúmica do solo, na ausência de informação mais precisa, admitiu-se o valor de  $1900 \text{ kg/m}^3$  independentemente da estratificação.

O modelo teórico apresenta condições de axissimetria, sendo a acção definida por uma pressão uniformemente distribuída de resultante unitária e aplicada a uma área circular com raio  $0,17 \text{ m}$ . A definição da acção como uma força uniformemente distribuída constitui uma simplificação do problema, já que a base do excitador é suficientemente rígida para impedir o desenvolvimento de uma distribuição uniforme de tensões ao longo do seu contacto com o maciço de fundação. Contudo, estudos prévios desenvolvidos por Kattis et al. [310] demonstram que tal simplificação não introduz diferenças assinaláveis na resposta do maciço de fundação [310, 311], desde que a distância à fonte seja razoável (Princípio de Saint-Venant).

Os resultados teóricos representados na Figura 8.16 pela linha a traço interrompido correspondem ao cálculo inicial, no qual se admite um coeficiente de amortecimento de  $0,03$ , independentemente da estratificação e do tipo de deformação (volumétrica ou distorcional) experimentada pelo maciço (Figura 8.17a). Como se pode verificar, a discrepância entre esses resultados teóricos e os observados no local é acentuada, sendo tanto mais notória quanto menor é a distância entre o receptor e a fonte de excitação. Este tipo de tendência, traduzida por uma melhoria da representação da realidade física quanto maior é a distância entre a fonte e o receptor, foi também já identificada por outros autores através da realização experiências similares à agora descrita [5, 99], e é justificada pelo facto de o aumento da distância fonte-receptor estar associado à predominância do amortecimento geométrico.

Seguindo um procedimento de tentativa-erro, é então possível identificar um perfil de amortecimento que conduz a uma aproximação razoável entre resultados experimentais e teóricos. A melhor aproximação encontrada, em correspondência com os resultados representados pela linha azul a cheio na Figura 8.16, refere-se ao perfil de amortecimento ilustrado na Figura 8.17b.

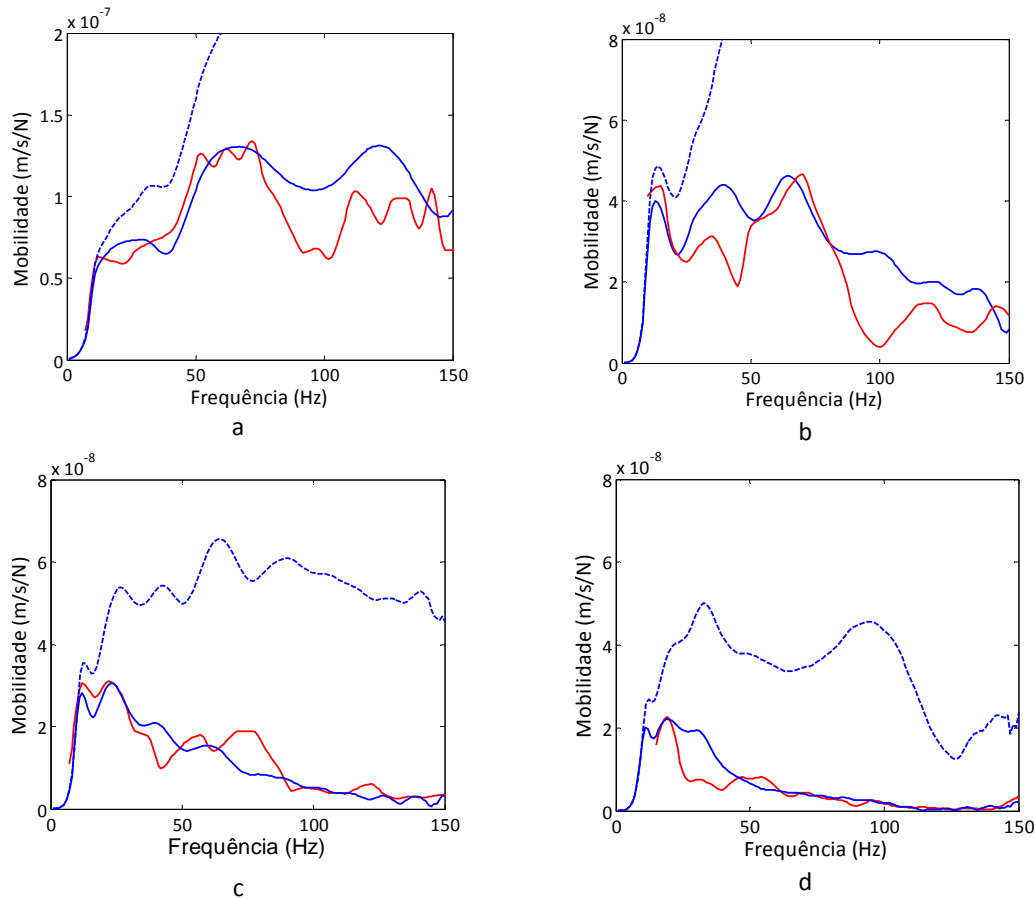


Figura 8.16 – Mobilidade determinada por via experimental (linha vermelha) e por via numérica (linha azul): a) Ponto A1; b) Ponto A2; c) Ponto A3; d) Ponto A4.

Relativamente ao grau de aproximação entre resultados experimentais e teóricos, obtido após a calibração do perfil de amortecimento material, compete referir que, embora não seja possível identificar uma correspondência totalmente satisfatória, os resultados apresentados na Figura 8.16, na sua globalidade e independentemente do ponto de observação considerado, traduzem uma aproximação muito razoável tanto em termos de valor absoluto da mobilidade como em termos da tendência geral de evolução desta grandeza em função da frequência de excitação. Importa aqui referir, em termos de enquadramento dos resultados agora apresentados face a estudos realizados por outros autores, que a qualidade dos resultados alcançada é deveras superior à apresentada em estudos similares reportados na bibliografia [5, 99].

No que concerne ao perfil de amortecimento encontrado, entende-se pertinente fazer ainda algumas observações adicionais. Antes de mais chama-se a atenção para o facto de os valores de amortecimento (ilustrados na Figura 8.17b) serem consideravelmente mais elevados, principalmente nos horizontes mais superficiais do maciço, do que os geralmente reportados na bibliografia (muito embora técnicas mais actuais de determinação de amortecimento material *in situ* apontem para valores de amortecimento mais elevados do que os considerados até então).



Com efeito, o perfil de amortecimento em causa resulta de um processo de inversão (ou calibração), sendo por isso sensível à multiplicidade de soluções teóricas tidas como admissíveis. Pese embora o julgamento do autor tenha relevância na análise, convém esclarecer que o perfil de amortecimento pode não corresponder com exactidão à realidade física deste parâmetro, mas sim ao valor que o mesmo tem de assumir no modelo teórico para que este represente de forma razoável a realidade física experimentada pelos pontos de observação considerados.

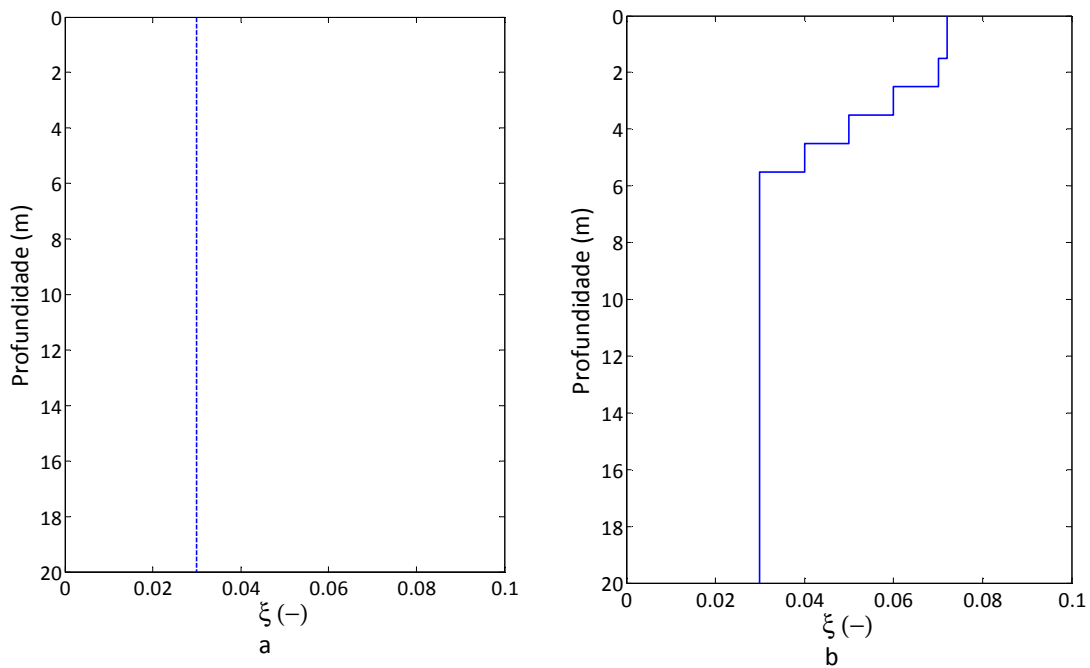


Figura 8.17 – Perfil de amortecimento material adoptado: a) perfil inicial; b) perfil calibrado.

## 8.4 Caracterização mecânica e geométrica da via férrea

### 8.4.1 Considerações gerais

Os trabalhos experimentais de caracterização da via férrea foram conduzidos em duas vertentes principais: i) caracterização mecânica dos principais componentes da via que condicionam a sua resposta dinâmica vertical; ii) avaliação experimental do perfil de irregularidades no troço em estudo. Face aos estudos apresentados nos capítulos anteriores, a caracterização experimental dos dois aspectos referidos, distintos mas complementares, constitui um ponto fulcral para uma boa interpretação do mecanismo de geração de vibrações induzidas pelo tráfego ferroviário.

As actividades experimentais relativas à caracterização mecânica da via foram desenvolvidas com participação integral do autor do presente estudo. Em contrapartida, como não poderia deixar de

ser, as actividades respeitantes à caracterização das irregularidades verticais da via férrea foram conduzidas por técnicos da REFER, sendo, contudo, acompanhadas de perto pelo autor.

#### **8.4.2 Caracterização do perfil de irregularidades da via**

A avaliação do estado e da evolução das propriedades geométricas das vias férreas constitui um aspecto importante para a generalidade das administrações ferroviárias, na perspectiva da exploração mais eficiente da via, do planeamento da sua manutenção e da aferição das condições necessária à segurança de circulação. Essa necessidade específica tem estimulado um crescente desenvolvimento e divulgação de equipamentos e técnicas para a auscultação da geometria da via férrea [141].

A REFER, à semelhança de outras administrações ferroviárias, é detentora de alguns equipamentos para a inspecção da via férrea. De entre esses equipamentos, o mais relevante é o Veículo de Inspeção da Via (VIV) com designação comercial EM-120 (Figura 8.18), podendo uma descrição detalhada do equipamento ser encontrada em Fortunato [141]. Este veículo permite a inspecção da via férrea em contínuo através da medição de diferentes grandezas. Embora na sua génese tenha sido desenvolvido para a medição da geometria da via (nivelamento longitudinal, nivelamento transversal e bitola), as mais recentes necessidades e desenvolvimentos têm levado ao acoplamento de diversos tipos de equipamentos aos VIV's para a medição de outras grandezas, tais como: georadar; sistema laser para medição da distância de obstáculos existentes na imediação da via; excitadores e sistemas de medição de rigidez dinâmica [312-314], etc.



Figura 8.18 – Veículo de Inspeção da Via – EM 120.

Relativamente à auscultação das irregularidades verticais da via, o VIV EM-120 permite a medição do perfil de nivelamento longitudinal da superfície de rolamento de ambos os carris para

comprimentos de onda de irregularidade compreendidos entre 1 m e 25 m. A medição das irregularidades é efectuada com base num sistema inercial incorporando três acelerómetros e três giroscópios, permitindo assim a estimativa dos deslocamentos experimentados através da dupla integração dos sinais. A posição geográfica do veículo é aferida através de um sistema GPS.

Apesar da importância significativa, para a problemática em estudo na presente dissertação, dos resultados advindos do VIV, é ainda necessário o conhecimento das imperfeições geométricas do nivelamento longitudinal da via para comprimentos de onda inferiores a 1 m. Caso essas imperfeições de pequeno comprimento de onda, também designadas por corrugação do carril, não sejam atendidas é apenas possível descrever a dinâmica do sistema acoplado veículo-via até umas poucas dezenas de hertz, não abrangendo uma componente importante das vibrações associadas a frequências mais elevadas. Essa lacuna é colmatada por recurso a um equipamento de medição da corrugação do carril, o qual se ilustra na Figura 8.19. Esse equipamento, recentemente adquirido pela REFER, permite a medição das irregularidades geométricas com comprimentos de onda definidos entre 0,005 m e 1 m, cobrindo-se assim, em complemento aos resultados obtidos pelo VIV, a gama de comprimentos de onda necessária a uma boa descrição do mecanismo de interacção dinâmica veículo-via.



Figura 8.19 – Equipamento de medição de corrugação: a) vista geral; b) pormenor do sensor.

Na Figura 8.20 apresenta-se o registo espacial das irregularidades geométricas verticais do carril direito da via descendente no troço compreendido entre os quilómetros 41+725 e 41+525 (a secção de referência para o ensaio de medição de vibrações induzidas por tráfego corresponde ao quilómetro 41+625). Como se compreende, as irregularidades verificadas em ambos os carris da via férrea não são exactamente iguais fruto de alguma assimetria tanto da solitação como das propriedades mecânicas do meio subjacente aos carris. Contudo, dado que os modelos numéricos desenvolvidos no âmbito da presente dissertação não contemplam ainda a dinâmica

tridimensional do veículo, toma-se como representativo do perfil de irregularidades da via o identificado para o carril direito, razão pela qual apenas esse é representado na Figura 8.20.

Atendendo à velocidade de circulação do comboio Alfa-Pendular no troço em causa (velocidade superior a 200 km/h) e à gama de frequências tidas como importantes para o presente estudo (0 Hz-150 Hz), o perfil de irregularidades a adoptar deve acatar comprimentos de onda compreendidos entre o limite superior mensurável com os equipamentos disponíveis (25 m) e o limite inferior de cerca de 0,40 m. Na Figura 8.21 apresenta-se, para a gama de comprimentos de onda referida, a função de densidade espectral de potência do perfil de irregularidades representado na Figura 8.20. A título comparativo representa-se ainda na mesma figura a proposta de Braun e Hellenbroich [276] para as funções de densidade espectral de potência das irregularidades verticais de vias férreas em condições de boa e mediana qualidade.

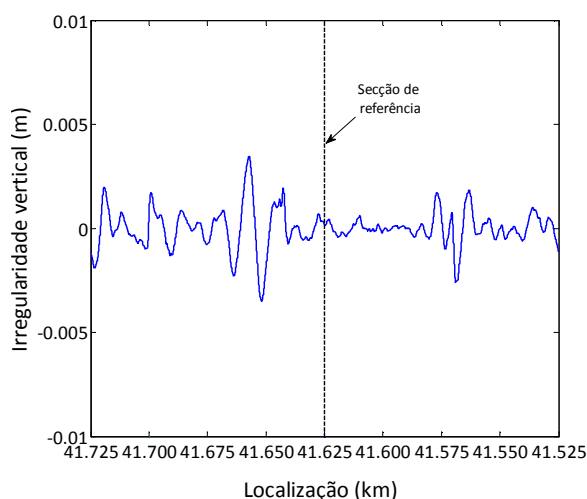


Figura 8.20 – Registo espacial do perfil de irregularidades verticais do carril direito da via descendente.

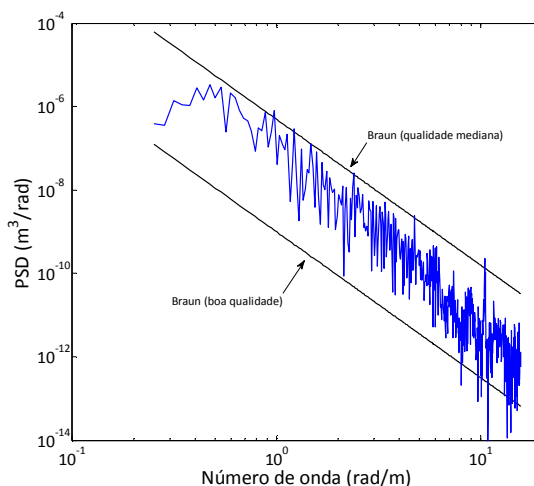


Figura 8.21 – Estimativa da função de densidade espectral de potência do perfil de irregularidades do carril direito da via descendente.

A análise dos resultados agora expostos sugere os seguintes comentários: i) a função de densidade espectral de potência avaliada com base nos resultados experimentais apresenta um carácter muito mais irregular do que as propostas por Braun; tal facto já era expectável pois as funções de densidade espectral de potência utilizadas na geração de perfis de irregularidades artificiais resultam da medianização de um vasto conjunto de dados experimentais; ii) os resultados experimentais estão compreendidos, na sua globalidade, entre as propostas de Braun para vias de boa qualidade e de qualidade mediana; ressalva-se, contudo, que tal classificação deve ser efectuada com base num conjunto mais alargado de dados experimentais de modo a minimizar a influência de alguns defeitos pontuais que possam desvirtuar a análise global.

### **8.4.3 Caracterização mecânica da via**

A via férrea balastrada é, tal como já evidenciado no Capítulo 4, um sistema estrutural cuja modelação e interpretação teórica é complexa. Para essa complexidade muito contribuem as camadas granulares da via, as quais apresentam uma grande dependência de factores que não são facilmente quantificáveis, tais como o grau de compactação e o teor em água (no caso do subbalastro), e que são muitas vezes evolutivos ao longo do tempo. Porém, apesar da reconhecida complexidade, o discernimento do comportamento dinâmico da via, ainda que de uma forma parcial, é imprescindível para a compreensão e modelação dos mecanismos de geração de vibrações induzidas por tráfego ferroviário.

Tratando-se de um problema complexo, as propriedades mecânicas da via não são, regra geral, avaliadas de forma directa, mas sim através da estimação dos parâmetros mecânicos de um dado modelo teórico de forma a que se obtenha uma concordância razoável entre os resultados por este enunciados e os coligidos por via experimental [175, 315, 316]. Como tal, este tipo de estudos compreendem duas componentes: i) a primeira, experimental, concerne à observação da resposta dinâmica face a uma dada excitação; ii) a segunda engloba a construção de um modelo teórico e a calibração das propriedades mecânicas dos seus elementos de modo a obter-se uma resposta teórica concordante com a realidade física observada. Tal como na generalidade das formulações baseadas em métodos de inversão, os parâmetros mecânicos resultantes da resolução do problema são dependentes do grau de sofisticação do modelo teórico assumido como representativo do problema em estudo, podendo não traduzir na íntegra os valores das propriedades físicas do meio que se pretende analisar (eventualmente heterogéneo), mas sim os que conduzem a uma melhor aproximação entre resultados teóricos e experimentais.

#### **Aquisição, condicionamento e análise dos resultados experimentais**

No que concerne à parte experimental do estudo, compete referir que este pode ser conduzido através de formulações *input-output*, nas quais é necessário o conhecimento tanto da resposta como da solicitação, ou através de formulações que prescindem do conhecimento da acção, designadas por isso de *output-only*. Em aplicações ligadas à dinâmica da via férrea é mais usual a adopção de métodos *input-output*, sendo exemplo significativo o ensaio de receptância [175]. Embora o ensaio de receptância possa apresentar diversas variantes, o seu princípio basilar consiste na determinação da flexibilidade dinâmica da via através do conhecimento da excitação e da resposta do meio.

Nos ensaios de receptância desenvolvidos no âmbito do presente estudo recorreu-se a uma excitação impulsiva, originada por um martelo instrumentado, com designação comercial PCB-Modelo 086D50 (Figura 8.22a), sendo a resposta da via avaliada através de um conjunto de acelerómetros. Como já referido, o ensaio de receptância pode apresentar diversas variantes, nomeadamente no que se refere aos pontos de aplicação da excitação e de leitura da resposta. A tipologia mais corrente consiste na aplicação da excitação na cabeça do carril, sendo a resposta avaliada no próprio carril e na travessa subjacente. Contudo, outras variantes são também possíveis, como por exemplo a aplicação da acção a meio da travessa e leitura da resposta nos seus extremos e nos carris sobrejacentes. No presente estudo, ambas as tipologias foram aplicadas, pese embora, devido a algumas dificuldades na interpretação do ensaio com a primeira tipologia, apenas os resultados do segundo ensaio sejam aqui utilizados.

Na Figura 8.23 apresenta-se o esquema geral do ensaio com excitação no meio vão da travessa (ver também Figura 8.22b). O sinal proveniente tanto do martelo como dos acelerómetros é adquirido e condicionado através de um sistema composto por um módulo NI CDAQ-9172 equipado com placas IEPE e controlado por um computador portátil.



Figura 8.22 – Vista geral do ensaio de receptância.

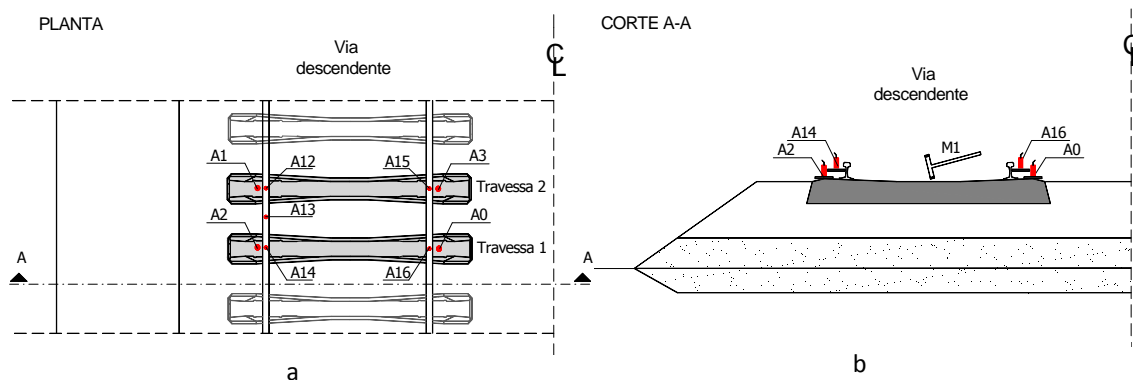


Figura 8.23 – Posicionamento dos sensores no ensaio de receptância com excitação a meio vão da travessa: a) planta; b) corte.

A título ilustrativo, apresenta-se na Figura 8.24 o registo temporal e conteúdo em frequência da força de excitação para um impacto na Travessa 1. Como se pode verificar pela análise da figura, a grande maioria da energia de excitação está associada a frequências inferiores a cerca de 300 Hz,

referindo-se que tal conteúdo pode ser alterado mediante a adoção de outro tipo de ponteira para o martelo (mais rígida ou mais flexível).

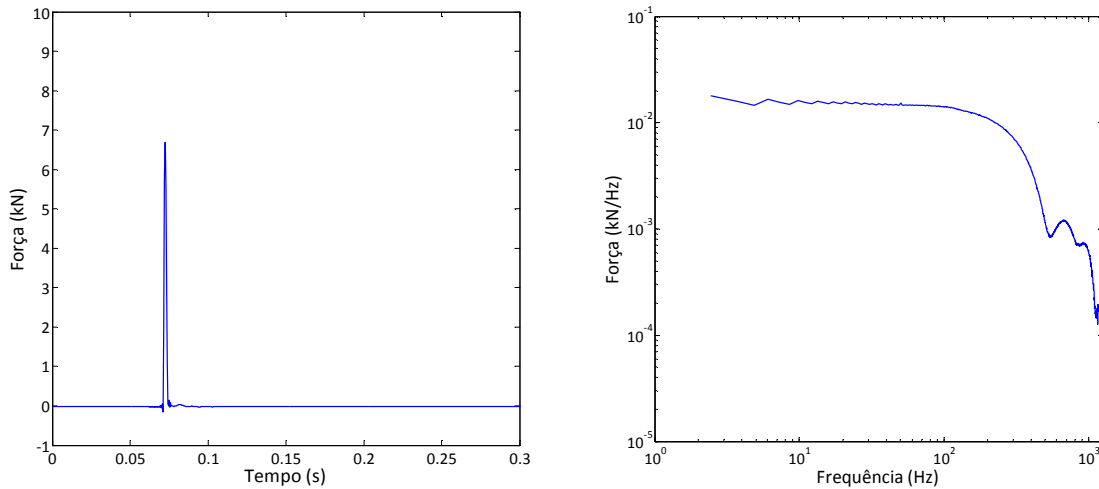


Figura 8.24 – Força de excitação num dado evento: a) registo temporal; b) conteúdo em frequência.

Adquiridos e condicionados os sinais, a função de transferência entre o impulso aplicado e o deslocamento experimentado pelos pontos de observação é determinada considerando um número significativo de eventos, no presente caso cerca de 150. Este procedimento permite não só minimizar o efeito do ruído, como também avaliar a coerência dos sinais adquiridos. Assim sendo, a função de receptância experimental,  $H_{exp}$ , é dada por:

$$H_{exp}(\omega) = \frac{x_i^m(\omega)}{\omega^2 x_m^m(\omega)} \quad [8.1]$$

em que  $x_i^m(\omega)$  e  $x_m^m(\omega)$  correspondem, respectivamente, à média da aceleração no ponto de observação e à média da força de impacto (no domínio da frequência), sendo dados por:

$$x_i^m(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i^k(\omega) \quad [8.2]$$

$$x_m^m(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_m^k(\omega) \quad [8.3]$$

em que N corresponde ao número de eventos.

Considerando múltiplos eventos no cálculo da receptância é então possível determinar a coerência entre a excitação (input) e a resposta (output), avaliando-se assim a qualidade dos sinais coligidos em função da frequência de excitação. A função de coerência,  $\gamma(\omega)$ , apresenta uma gama de variação entre 0 e 1, e é determinada atendendo à seguinte relação:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{S_{mi}^m(\omega)\overline{S_{mi}^m(\omega)}}{S_{mm}^m(\omega)\overline{S_{ii}^m(\omega)}} \quad [8.4]$$

em que  $S_{ij}$  representa o espectro de potência (o traço sobrejacente representa o conjugado da variável).

Valores elevados da função de coerência correspondem a sinais de elevada qualidade. Como é evidente, existe sempre algum ruído no sinal, razão pela qual a função de coerência dificilmente toma o valor unitário, podendo considerar-se valores de coerência superiores a cerca de 0,95 como correspondentes a sinais de boa qualidade.

Na Figura 8.25 apresenta-se a função de receptância da Travessa 1 quando a solicitação é aplicada no seu meio vão, estando a função de coerência correspondente ilustrada na Figura 8.26.

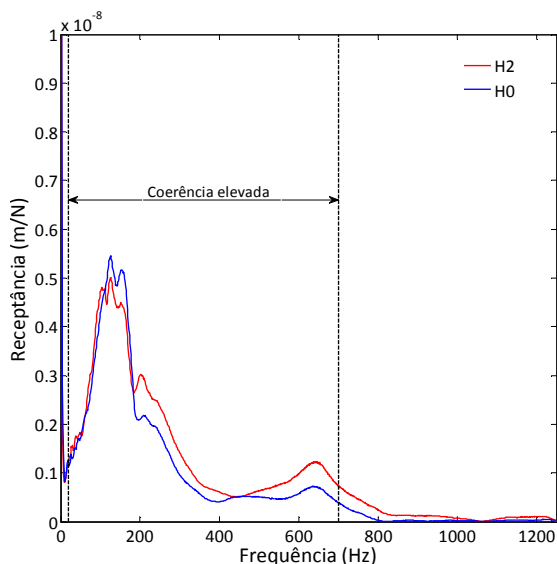


Figura 8.25 – Receptância da Travessa 1 quando solicitada a meio vão.

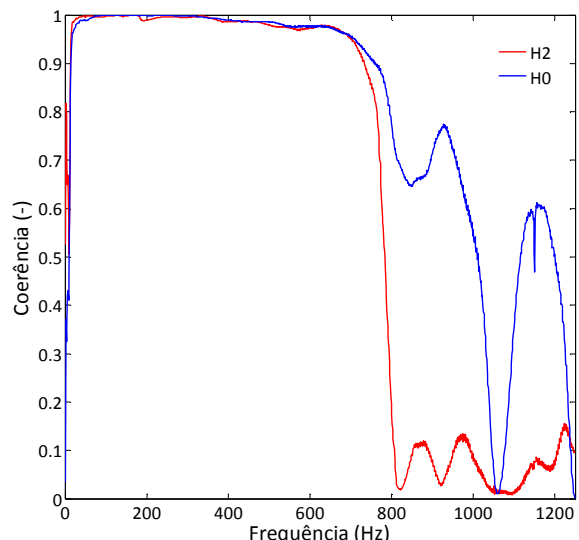


Figura 8.26 – Coerência dos sinais correspondentes à Travessa 1 quando solicitada a meio vão.

Como se constata pela observação da Figura 8.25, existe alguma diferença entre a receptância determinada através dos sinais provenientes dos acelerómetros A0 e A2. Esta diferença pode ser atribuída a diversas causas, sendo a mais plausível relacionada com a heterogeneidade do meio subjacente à travessa. Outra causa que pode ser apontada prende-se com o facto de o meio estrutural não ser simétrico em relação ao plano que intersecta o ponto médio da travessa; com efeito, como se pode verificar na secção transversal representada na Figura 8.3, a linha apresenta via dupla, o que condiciona a simetria do problema. Porém, estudos de experimentação numérica efectuados pelo autor revelam que o mais provável é a diferença entre os valores de receptância se dever a heterogeneidades do meio e, possivelmente, a algumas pequenas folgas pontuais que possam existir entre a travessa e o balastro. Este último aspecto pode tomar proporções



significativas, razão pela qual, num cenário ideal, se recomenda a condução dos ensaios em condições de via carregada.

Um outro aspecto interessante refere-se ao pico da função de receptância para valores da frequência de excitação na ordem dos 650 Hz, o qual reflecte a ressonância do carril sobre as palmilhas. Este efeito é perfeitamente escrutinado analisando os resultados referentes à receptância dos carris, mostrados na Figura 8.27.

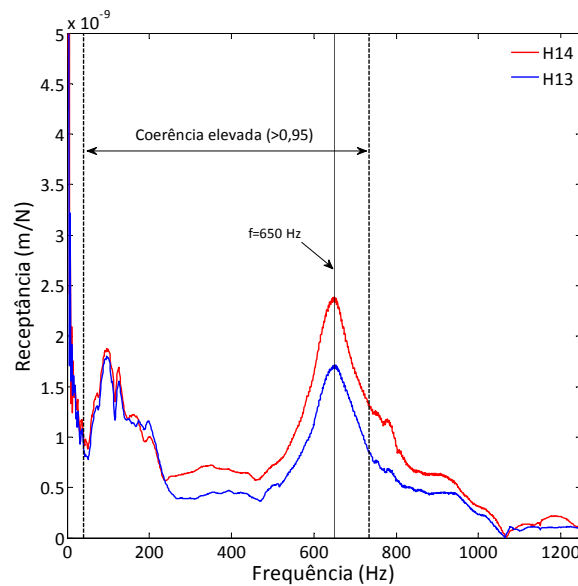


Figura 8.27 – Receptância do carril quando a solicitação é aplicada a meio vão da Travessa 1.

Como se constata, a resposta do carril é claramente amplificada para frequências de excitação em torno dos 650 Hz. Procedendo a uma análise simplificada, a frequência de ressonância do carril sobre as palmilhas pode ser estimada por:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_p}{m_r}} \quad [8.5]$$

em que  $k_p$  é a rigidez da palmilha dividida pelo espaçamento entre travessas e  $m_r$  a massa do carril por metro de comprimento.

Considerando a frequência de ressonância estimada na Figura 8.27, a massa do carril UIC60 e o espaçamento entre travessas, facilmente se obtém o valor de aproximadamente 600 kN/mm para a rigidez da palmilha. Este valor, aparentemente elevado, está em total concordância com a gama de variação apresentada pelo fabricante das palmilhas Vossloh Zw 687a (palmilhas utilizadas no troço da linha do Norte em estudo). Segundo o fabricante, a rigidez estática da palmilha está compreendida entre 600 kN/mm e 700 kN/mm, podendo este valor duplicar em caso de solicitação dinâmica. Uma vez que o comportamento mecânico das palmilhas é claramente não

linear, dependendo não só da frequência mas também do estado de tensão, o valor determinado por via experimental deve ser encarado como um limite inferior já que o ensaio foi realizado em condições de via não solicitada (muito embora o aperto dado pelo grampo de fixação carril-travessa minimize os efeitos não lineares).

Como já ilustrado nos estudos paramétricos apresentados no Capítulo 4, a influência dos parâmetros mecânicos da palmilha na resposta global da via é apenas notória na gama de frequências circundante à frequência de ressonância do carril sobre as travessas. No presente caso, essa frequência é muito elevada, afastando-se consideravelmente da gama interessante para o estudo (0 Hz a 150 Hz). Assim sendo, não se mostrou pertinente a realização de um estudo mais elaborado para a estimativa das propriedades mecânicas das palmilhas do que o acima apresentado. De facto, alguma experimentação numérica realizada mostrou que um erro de 10% a 20% associado à rigidez das palmilhas não se traduz em diferenças assinaláveis da resposta da via na gama de frequências até aos 150 Hz.

### **Inversão do problema**

Ultrapassado o processo de aquisição e tratamento dos resultados de campo, há que tratar da segunda componente do ensaio, ou seja, a inversão do problema. Com tal objectivo em mente, construiu-se um modelo teórico baseado no acoplamento MEF-MEC 2.5D, tal como desenvolvido no Capítulo 5 da presente dissertação. Os elementos da infra-estrutura ferroviária (subbalastro, balastro, travessas, palmilhas e carris) são simulados através do MEF, enquanto o maciço de fundação é descrito através do MEC. Cabe aqui referir a introdução de algumas simplificações, nomeadamente no que toca à sua geometria, admitindo-se um falso plano de simetria da via descendente (Figura 8.28). A consideração deste artifício de modelação foi precedida de alguns estudos de sensibilidade que demonstraram que tal procedimento não induz uma perturbação significativa nos resultados, conduzindo, no entanto, a uma redução muito considerável do esforço computacional.

A Figura 8.29 apresenta a malha de elementos finitos 2.5D adoptada na construção do modelo. As propriedades geométricas indicadas na figura são consideradas constantes do problema e estão em consonância com os dados previstos no projecto da via férrea. Relativamente às propriedades mecânicas, algumas são dados do problema, ao passo que outras são incógnitas, ou seja, resultam do processo de inversão. Estando as propriedades do maciço geotécnico definidas e calibradas através dos ensaios anteriormente descritos, e assumindo como constantes os parâmetros

relativos às travessas e carris, restam as propriedades mecânicas do balastro e subbalastro como incógnitas do problema de inversão (ver Quadro 8.2).

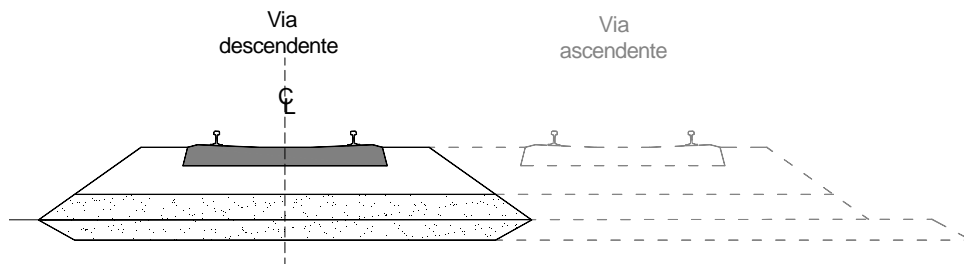


Figura 8.28 – Introdução do plano de simetria artificial.

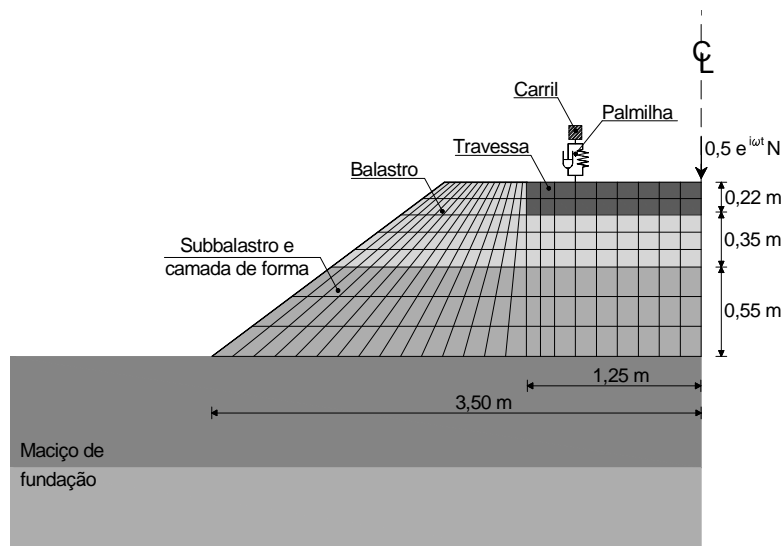


Figura 8.29 – Malha de elementos finitos 2.5D.

Admitindo o valor de 0,30 para o coeficiente de Poisson do subbalastro, valor tido como razoável através de consulta bibliográfica, remanescem sete incógnitas, tal como se depreende da consulta do Quadro 8.2. Como se compreende, dado o número relativamente elevado de incógnitas, o seguimento de um procedimento de tentativa-erro de modo a minimizar a diferença entre as curvas de receptância teórica e experimental revela-se extremamente complexo e, muito provavelmente, infrutífero. A alternativa a esse procedimento passa pela adaptação e implementação dos códigos computacionais anteriormente apresentados de modo a criar uma nova ferramenta computacional especialmente concebida para proceder à inversão do problema. A dificuldade e complexidade associadas a essa tarefa ficam minimizadas usando o conjunto de algoritmos existentes na plataforma de cálculo MATLAB para a resolução de problemas de otimização [317].

A descrição pormenorizada de procedimentos de otimização foge ao âmbito do presente estudo, sendo essa técnica aqui encarada como uma mera ferramenta para a resolução do problema de

inversão em análise, e não como um objecto de estudo. Deste modo, apenas se apresentam os princípios gerais do método implementado e utilizado, remetendo-se uma análise mais profunda para trabalhos científicos e pedagógicos específicos dessa temática.

Quadro 8.2 – Propriedades mecânicas do modelo teórico.

	Rigidez	Massa	Amortecimento	Geometria
Carril UIC60	$EI=6,143 \times 10^6 \text{ N/m}^2$	$m_r=60,4 \text{ kg/m}$	(-)	(-)
Palmilhas	$k_p = 600 \text{ kN/mm}$	(-)	$c_s = 22,5 \text{ kNs/mm}$	(-)
Travessas monobloco em betão pré-esforçado	$E=30 \text{ GPa}$	$m_s=300 \text{ kg/un}$	(-)	$e=0,60 \text{ m}$
Balastro	$E_b=?$ $v_b=?$	$\rho_b=?$	$\xi_b=?$	$h=0,35 \text{ m}$
Subbalastro e camada de forma	$E_{sb}=?$ $v_{sb}=0,30$	$\rho_{sb}=?$	$\xi_{sb}=?$	$h=0,55 \text{ m}$
Maciço de fundação	De acordo com o perfil de $C_p$ e $C_s$ indicado na Figura 8.11.	$\rho=1900 \text{ kg/m}^3$	De acordo com o perfil dado pela Figura 8.17b.	Ver Figura 8.11.

O objectivo do processo de inversão consiste na determinação das propriedades do modelo teórico que conduzem à minimização da diferença entre resultados por este enunciados e os homólogos avaliados por via experimental. Assim sendo, no presente contexto, a função objectivo (função cujo resultado se pretende minimizar) é dada por:

$$f_{obj} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left| |H_{exp}(\omega_i)| - |H_{num}(\omega_i)| \right|^2} \quad [8.6]$$

em que N é o número total de frequências consideradas na optimização,  $H_{exp}(\omega_i)$  e  $H_{num}(\omega_i)$  representam as funções de receptância determinadas por via experimental e numérica, respectivamente.

A minimização da função objectivo é efectuada, no contexto da ferramenta numérica desenvolvida, recorrendo ao algoritmo de Levenberg-Marquardt [317]. Este algoritmo permite estimar, atendendo ao intervalo de variação admissível para as variáveis em estudo, a solução que melhor ajusta os resultados numéricos aos resultados experimentais.

A validação do modelo de inversão desenvolvido foi efectuada com base em diversos exemplos recorrendo a dados sintéticos. Nesses exemplos procurou-se avaliar a sensibilidade do algoritmo ao ponto de partida de pesquisa (valor das incógnitas definido pelo utilizador como ponto de inicialização da pesquisa), bem como à dimensão do intervalo de variação das incógnitas. Os exemplos de validação permitiram concluir que o modelo de inversão desenvolvido é muito robusto, sendo a solução do problema praticamente independente do ponto de partida de pesquisa e do intervalo de variação das incógnitas, desde que, como é evidente, a solução teórica se encaixe dentro do referido intervalo.

No contexto do presente problema, decidiu-se que o ajuste entre resultados teóricos e experimentais fosse ditado pela receptância da travessa na gama de frequências compreendida entre 30 Hz e 250 Hz quando solicitada a meio vão (ver Figura 8.25). O limite inferior do intervalo de frequência considerado é justificado pelo facto de a coerência dos resultados experimentais ser diminuta para frequências de excitação inferiores a 30 Hz. No que concerne ao limite superior, a sua definição foi pautada pelo facto de o âmbito do presente estudo estar limitado até frequências na ordem dos 150 Hz, sendo por isso desnecessário a inversão do problema para frequências muito superiores a esse limite (note-se que, de acordo com as regras de definição das malhas de elementos finitos 2.5D indicadas no Capítulo 5, o esforço computacional aumenta consideravelmente com o incremento do limite superior da gama de frequências).

A Figura 8.30 apresenta a curva de receptância da travessa após o processo de inversão. De modo a facilitar a comparação de resultados apresentam-se na mesma figura os resultados homólogos estimados por via experimental. O procedimento de inversão, levado a cabo na gama de frequência entre os 30 Hz e os 250 Hz com um incremento de 5 Hz, resultou na solução exposta no Quadro 8.3. Note-se que, no cômputo geral, o modelo numérico consegue reproduzir de um modo relativamente razoável a curva de receptância média determinada por via experimental, principalmente na gama de frequências compreendidas entre os 75 Hz e os 175 Hz. Para frequências inferiores a 75 Hz o modelo numérico sobrestima a receptância da via, muito embora a tendência global da resposta seja também aqui captada.

Sendo as propriedades do balastro e subbalastro determinadas por via de inversão dos resultados experimentais e não por medição directa, os resultados indicados no Quadro 8.3 devem ser encarados com algum sentido crítico de modo a avaliar a sua coerência e verosimilhança.

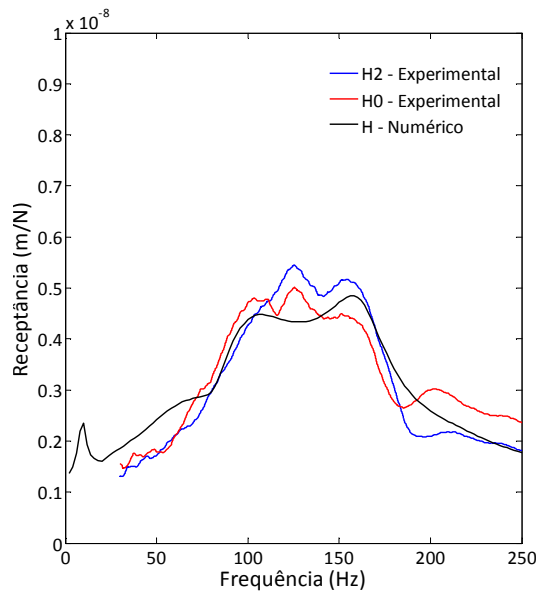


Figura 8.30 – Comparativo entre a receptância experimental e numérica da travessa.

Quadro 8.3 – Resultados do modelo de inversão.

	Rigidez	Massa	Amortecimento
Balastro	$E_b=97$ MPa $\nu_b=0,12$	$\rho_b=1591$ kg/m <sup>3</sup>	$\xi_b=0,061$
Subbalastro	$E_{sb}=212$ MPa	$\rho_{sb}=1913$ kg/m <sup>3</sup>	$\xi_{sb}=0,054$

Relativamente às propriedades mecânicas do balastro, o processo de inversão conduziu aos valores de 97 MPa e 0,12 para o módulo de deformabilidade e para o coeficiente de Poisson, respectivamente. Comparando estes resultados com alguns dados reportados na bibliografia, constata-se que o módulo de deformabilidade obtido é um pouco inferior ao usualmente admitido, o qual costuma rondar os 110 MPa a 150 MPa [155, 177, 318]. Por sua vez, o coeficiente de Poisson é consistente com a gama de variação corrente, sendo geralmente apontados valores compreendidos entre 0,10 e 0,15 [155]. Um outro aspecto interessante prende-se com a coerência entre os valores do módulo de deformabilidade do balastro e a sua massa volúmica. De facto, o algoritmo de inversão conduziu a um valor de massa volúmica relativamente reduzido, o que não deixa de ser consistente com o resultado do  $E_b$ , pois quanto menor é a compacidade do meio maior é a sua deformabilidade.

Relativamente às propriedades do subbalastro (e coroamento) deve desde logo referir-se que os parâmetros de deformabilidade destas camadas são muito sensíveis ao teor em água, existindo por isso uma variabilidade muito grande de valores apontados por diferentes autores [141]. Tanto no que se refere à rigidez como no que se refere à massa, os valores indicados no Quadro 8.3 encontram-se na gama de valores plausíveis, não se tecendo por isso mais comentários a esse respeito.

## 8.5 Medição de vibrações causadas pelo tráfego ferroviário

### 8.5.1 Descrição geral dos ensaios

A observação e análise da resposta dinâmica da via férrea e das vibrações emanadas devido ao tráfego ferroviário constitui o aspecto fundamental do presente capítulo, o qual tem como objectivo comparar os resultados observados com os vaticinados pelos modelos teóricos desenvolvidos. Para além desse objectivo geral, a informação experimental reunida constitui um contributo não displicente para a colectânea geral de casos de estudo devidamente documentados, a qual é ainda bastante escassa.

A campanha de observação levada a efeito focalizou-se, essencialmente, na avaliação da resposta dinâmica vertical da via e de pontos da superfície do terreno através da medição de acelerações verticais durante a passagem de comboios com diferentes tipologias. A Figura 8.31 mostra, em termos gerais e de modo esquemático, a localização dos sensores utilizados. A secção instrumentada corresponde ao km 41+625. Para além da campanha de medição aqui descrita, foi levada a cabo uma outra, encarada como preliminar, na qual a instrumentação foi distribuída ao longo de dois alinhamentos paralelos e transversais à via, distando entre si cerca de 25 m. A instrumentação de duas secções transversais à via teve como finalidade recolher dados redundantes de modo a avaliar a coerência entre resultados homólogos e, assim, de certa forma, validar os procedimentos utilizados na preparação do ensaio.

Passando do geral para o particular, a avaliação da resposta dinâmica da via descendente durante a passagem dos comboios compreendeu a medição das seguintes grandezas: i) aceleração dos carris (acelerómetros A1 e A3 da Figura 8.31); ii) aceleração da travessa (acelerómetros A2 e A4 da Figura 8.31); iii) deslocamento relativo entre o carril e a travessa, através da colocação de um LVDT entre esses elementos; iv) medição do deslocamento vertical do carril por recurso a sistema laser.

As forças de interacção comboio-via podem originar acelerações muito elevadas na infraestrutura ferroviária, principalmente na gama das muito altas frequências. Por essa razão, a medição de acelerações na via tem de ser efectuada com recurso a sensores com gama suficientemente alargada para que não saturem durante o registo do evento. Atendendo aos recursos materiais disponíveis à data da realização do presente estudo experimental, a medição de acelerações tanto na travessa como nos carris foi efectuada através de acelerómetros PCB 603C01, os quais apresentam uma gama de +/- 50 g e uma sensibilidade de 100 mV/g (Figura 8.32a). Apesar dos cuidados dispensados a este detalhe, os resultados da campanha de medição revelaram que,

numa boa parte dos eventos registados, a aceleração do carril ultrapassou o limite de 50 g, ocorrendo saturação do sensor e, conseqüentemente, a inutilização do registo a ele associado. Um aspecto curioso e revelador da importância da velocidade de circulação do comboio é denunciado pelo facto de a saturação dos sensores colocados no carril ocorrer, principalmente, nos casos em que a velocidade de circulação é mais elevada.

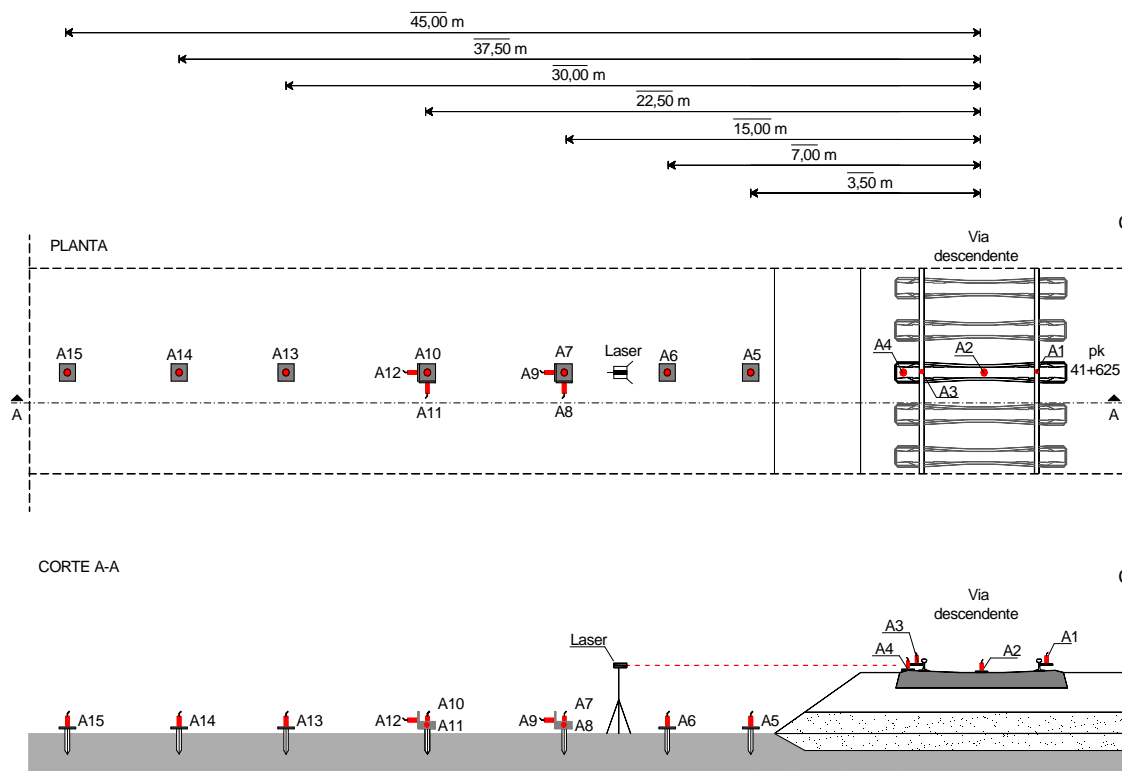


Figura 8.31 – Representação em planta e corte da localização dos sensores.

A informação advinda do registo de acelerações na travessa e no carril sobrejacente é ainda complementada pela medição do deslocamento relativo entre eles. Essa medição é efectuada através de um LVDT que, estando fixo à travessa, procede à medição do deslocamento do patim do carril face ao ponto de fixação do transdutor, tal como se ilustra na Figura 8.32b.



Figura 8.32 – Instrumentação da via férrea: a) acelerómetros colados no carril e travessa; b) posicionamento do LVDT.



Simultaneamente ao registo das grandezas anteriormente mencionadas, procedeu-se à medição do deslocamento do carril direito da via descendente através de um sistema laser (Figura 8.33). Note-se que o sistema de medição de deslocamentos, constituído por um emissor laser e um receptor óptico colado ao carril, permite a medição do deslocamento relativo entre o carril e o ponto de emissão do laser sem qualquer contacto físico entre os dois pontos [319, 320]. Este tipo de técnicas de medição (sem contacto físico) tem conhecido um avanço significativo no âmbito da instrumentação de vias férreas, já que constituem metodologias não invasivas e, como tal, pouco onerosas [321, 322]. Como é evidente, o resultado da medição é tanto mais próximo do deslocamento absoluto do carril quanto maior for a distância entre o ponto de emissão do laser e a via férrea, sendo de salientar que, em contrapartida, o incremento da distância acarreta uma maior perturbação da leitura. Tendo em conta este binómio, após alguns testes preliminares, optou-se por colocar o sistema de emissão laser a uma distância de aproximadamente 9,0 m em relação ao eixo da via descendente.

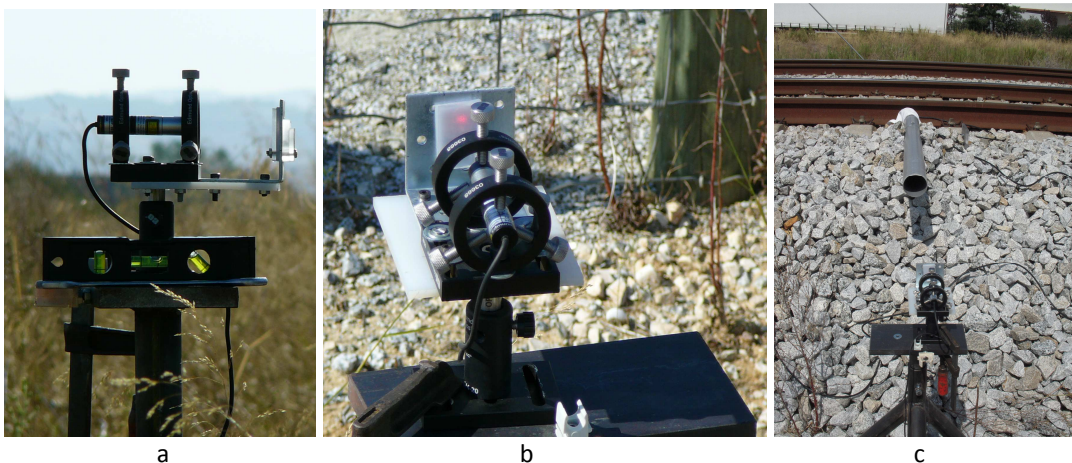


Figura 8.33 – Sistema de medição de deslocamentos por laser: a) e b) pormenor do emissor laser; c) pormenor do sistema de protecção do feixe laser.

No que concerne às particularidades do sistema de medição por laser, compete mencionar que o sistema foi desenvolvido, testado, validado e calibrado no seio do grupo de investigação em que o autor se insere, remetendo-se os esclarecimentos adicionais para Pinto et al. [319].

Como se ilustra na Figura 8.31, para além da observação da resposta dinâmica da via, foram também medidas as vibrações induzidas pelo tráfego na superfície do terreno adjacente à via. O plano de instrumentação contemplou a medição de acelerações à superfície do terreno, sendo medidas por acelerómetros tipo PCB 393A03, com sensibilidade de 1000 mV/g e gama de +/-5g, montados em estacas de aço previamente cravadas no solo. Embora o enfoque principal seja dirigido para a medição de acelerações verticais de pontos da superfície do terreno, realizaram-se alguns esforços com o intuito de avaliar, nos pontos distantes de 15,0 m e 22,5 m do eixo da via

descendente, as componentes da aceleração no plano horizontal. Com essa finalidade adoptou-se o esquema de montagem dos acelerómetros ilustrado na Figura 8.34a, sendo que nos restantes casos o esquema de montagem corresponde ao apresentado na Figura 8.34b.



Figura 8.34 – Medição de acelerações na superfície do terreno adjacente à via: a) medição em três direcções ortogonais; b) medição na direcção vertical.

A medição das componentes horizontais da aceleração da superfície do terreno deve ser encarada com alguma reserva. Tal como já discutido por outros autores, a dinâmica do sistema estrutural composto pela estaca de fixação e pelo acelerómetro pode influenciar de um modo muito significativo o resultado da medição da componente horizontal das vibrações que se propagam no solo [309]. Segundo os estudos efectuados por esses autores, o sistema de fixação entre o sensor e solo para a medição da componente horizontal da aceleração deve ser construído por um material que minimize a massa da estrutura, sugerindo a adopção de estacas de alumínio. Como se pode verificar na Figura 8.34, tal recomendação não foi seguida, tendo-se optado por estacas de aço dada a sua elevada robustez e facilidade de cravação.

Relativamente ao processo de aquisição e condicionamento dos sinais, compete referir que o sinal proveniente de todos os sensores mencionados foi adquirido de modo sincronizado através de um sistema composto por um módulo NI CDAQ-9172 equipado com módulos IEPE e controlado por um computador portátil. A alimentação energética do sistema de aquisição é garantida por baterias de 12V, sendo a corrente eléctrica transformada para 220 V através de um inversor portátil.

Um último aspecto que merece referência prende-se com a avaliação da velocidade de circulação dos comboios. Existem diferentes procedimentos para avaliar a velocidade de circulação, sendo alguns bastante elaborados (ver referências bibliográficas [323, 324]). No caso presente, a velocidade de circulação dos comboios foi estimada através de um radar doppler com referência comercial Bushnell modelo 10-1911, o qual pode ser visualizado na Figura 8.35. Segundo o

fabricante, a gama de medição deste equipamento situa-se, aproximadamente, entre 10 km/h e 300 km/h e apresenta uma acuidade de +/- 2 km/h.



Figura 8.35 – Radar doppler para medição da velocidade de circulação do comboio.

### **8.5.2 Resultados do ensaios**

A linha do Norte, eixo ferroviário onde se localiza o campo experimental, apresenta uma configuração de tráfego misto, com maior ou menor intensidade de exploração consoante a proximidade às principais áreas metropolitanas servidas pelo eixo. No troço Alhandra-Setil, onde se inclui o pk 41+625, o tráfego é muito intenso dada a proximidade à cidade de Lisboa. Logo, durante os dois dias em que decorreu o ensaio, foi possível recolher dados de medição respeitantes à passagem de mais de 40 comboios na via descendente, com tipologias e velocidades de circulação muito distintas, variando desde comboios sub-urbanos a comboios inter-regionais, sem esquecer alguns comboios de mercadorias.

Face à quantidade de eventos registados, na presente secção apenas se apresentam, a título ilustrativo, alguns resultados respeitantes à circulação de três tipos de comboio: i) comboio suburbano (Alstom 3500) à velocidade de 109 km/h; ii) comboio inter-cidades à velocidade de 202 km/h; iii) comboio Alfa-Pendular à velocidade de 212 km/h. Uma vez que o ensaio decorreu em condições de exploração plena da via, isto é sem qualquer constrangimento da velocidade de circulação, a velocidade dos diferentes comboios é distinta, podendo ser encarada como representativa da usual para cada uma das tipologias no troço em causa. Na Figura 8.36 apresenta-se a imagem fotográfica dos três comboios anteriormente referidos.

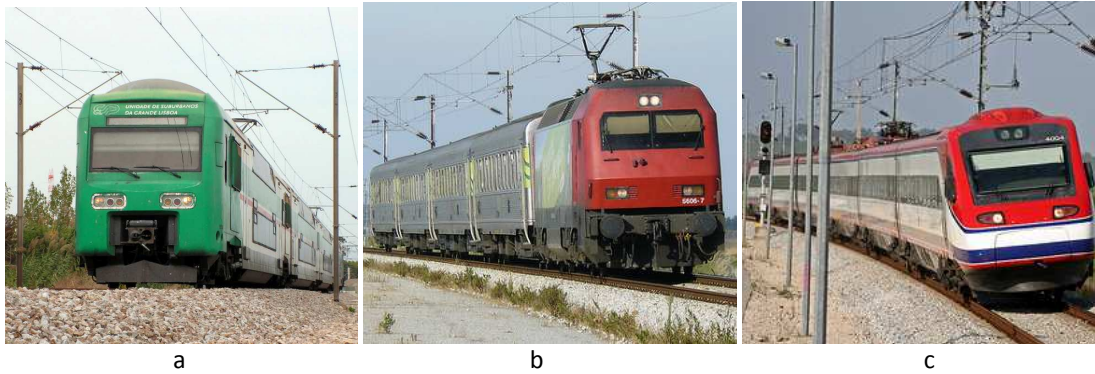


Figura 8.36 – Comboios em circulação na linha do Norte/Azambuja: a) comboio suburbano; b) comboio intercity; c) comboio Alfa-Pendular.

A Figura 8.37 mostra a resposta da travessa, em termos de velocidade vertical, devido à passagem dos três comboios supracitados. Os resultados expressos na figura resultam da integração do sinal proveniente do acelerómetro A4, tendo-se procedido a uma translação temporal do registo de modo a que o instante  $t=0$  s corresponda à passagem do primeiro eixo do comboio na secção de referência. A observação dos registos temporais da velocidade vertical da travessa permite uma clara identificação da passagem de cada um dos eixos constituintes das diferentes composições. No que toca aos níveis de vibração, verifica-se que os valores de pico da velocidade vertical da travessa são muito idênticos no caso da passagem dos comboios Alfa-Pendular e Intercidades, sendo consideravelmente superiores aos experimentados pela travessa durante a passagem do comboio suburbano. Tal facto já seria expectável, pois a resposta da travessa é essencialmente dominada pela contribuição quasi-estática da excitação, logo, a passagem de um comboio com menor peso estático, como é o caso do comboio suburbano, implica obrigatoriamente um menor nível de vibração da travessa do que a passagem de um comboio com maior peso.

A regularidade geométrica e de distribuição de peso pelos diferentes eixos dos comboios aqui considerados é também perceptível nos resultados expostos na Figura 8.37. Comparando os resultados relativos à passagem do comboio Alfa-Pendular e do comboio Intercidades, verifica-se que a resposta da travessa devido ao primeiro segue um padrão mais regular, revelando a constância de distribuição geométrica e de carga dos diferentes eixos, ao contrário do segundo que apresenta uma maior dispersão, quer de distância entre eixos, quer de carga estática. Este facto está também bem patente na representação no domínio da frequência da resposta da travessa, onde se observa a predominância de frequências dominantes e muito bem vincadas, no caso da resposta da travessa induzida pela passagem do comboio Alfa-Pendular, ao contrário do que se verifica no caso do comboio Intercidades.

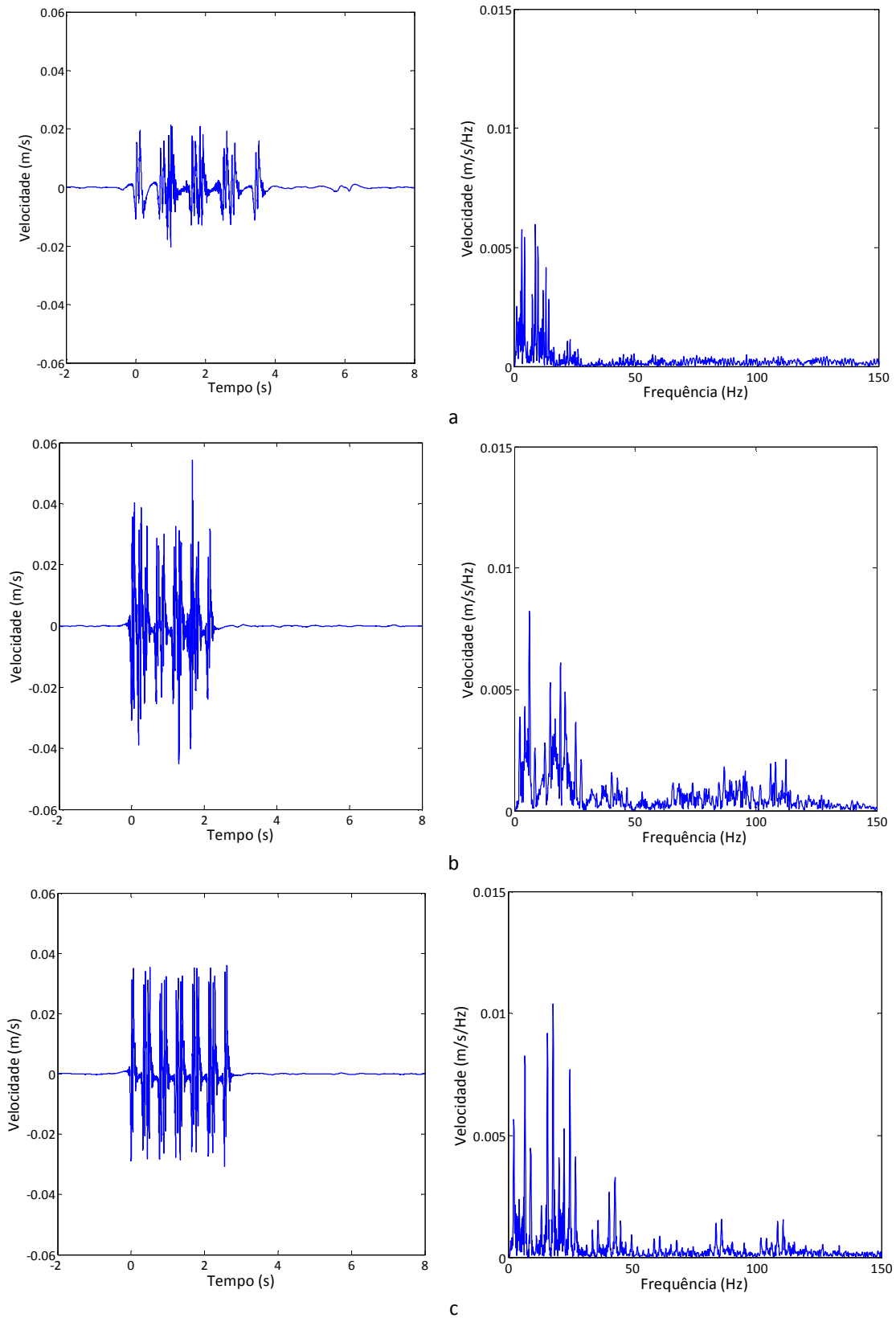


Figura 8.37 – Resposta da travessa devido à passagem do comboio: a) comboio suburbano; b) comboio intercity; c) comboio Alfa-Pendular.

No que concerne à propagação de vibrações no maciço de fundação, nas Figura 8.38 e Figura 8.39 apresenta-se, para os diferentes comboios, a resposta vertical, expressa em termos de velocidade vertical das partículas, dos pontos localizados à distância de 3,5 m e 22,5 m do eixo da via descendente, respectivamente. Da comparação das figuras ressalta, de imediato, o facto da amplitude da velocidade das partículas diminuir consideravelmente mediante o aumento da distância entre a fonte de vibração (a via) e o receptor. Este efeito deve-se tanto ao amortecimento geométrico como ao amortecimento material. Por outro lado, analisando os registos no domínio da frequência, é possível observar que é na gama das frequências mais elevadas que a redução da amplitude com o acréscimo da distância é mais evidente, sendo este aspecto bem revelador da importância do amortecimento material, como aliás já discutido de modo genérico no Capítulo 2.

Comparando entre si os resultados referentes à circulação dos diferentes comboios, facilmente se conclui que à passagem do comboio suburbano estão associados os menores níveis de vibração, tanto na proximidade da via (Figura 8.38) como a uma maior distância (Figura 8.39). A justificação deste efeito está certamente relacionada com o facto da velocidade de circulação deste comboio ser consideravelmente inferior à dos restantes, o que implica uma menor magnitude das forças de interacção dinâmica comboio-via e, conseqüentemente, menor amplitude das vibrações daí emanadas para o maciço de fundação.

Os resultados agora expostos têm apenas carácter indicativo. Na secção seguinte analisa-se em pormenor a resposta do sistema veículo-via-maciço de fundação devido à passagem do comboio Alfa-Pendular à velocidade de 212 km/h.

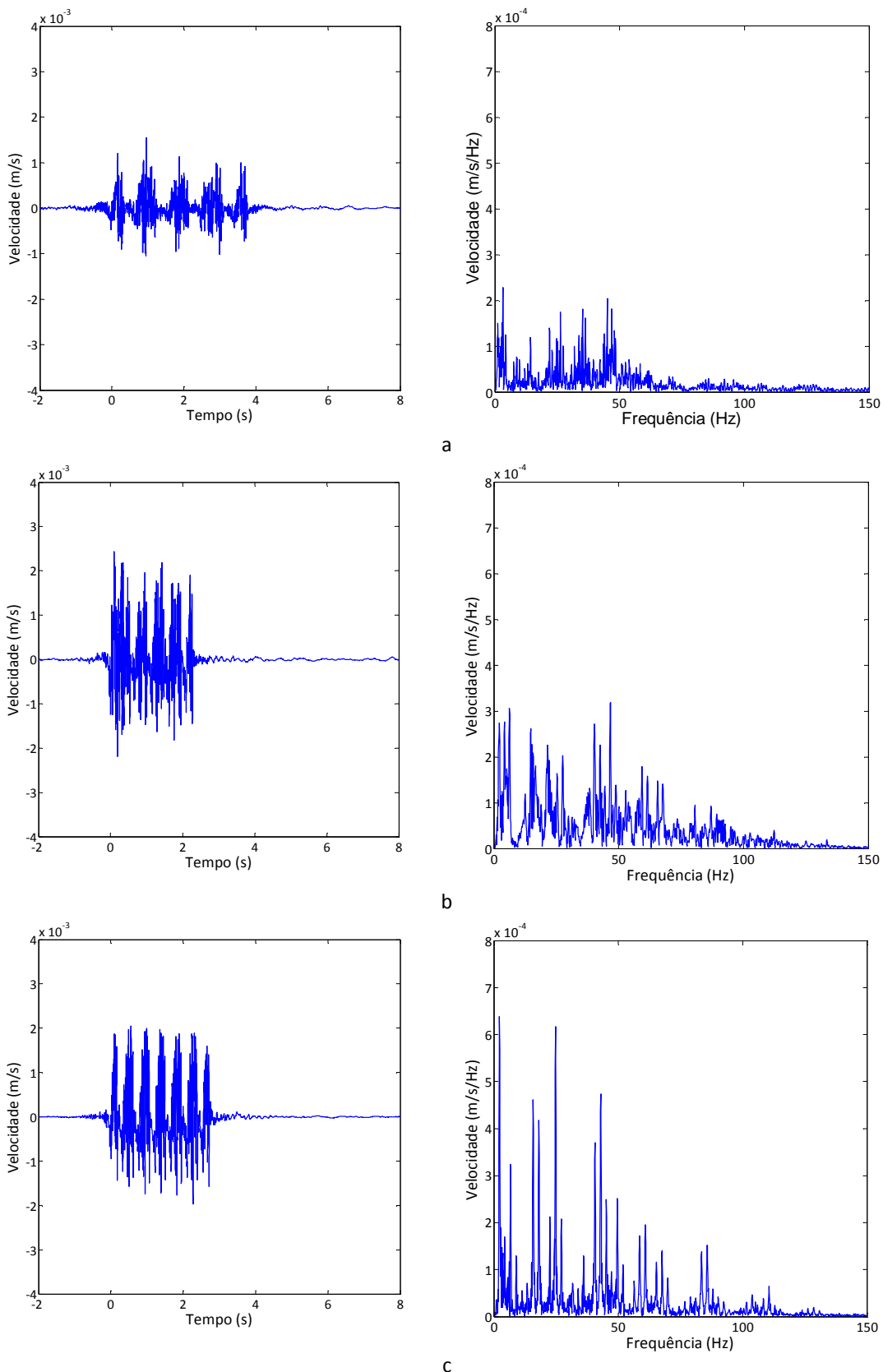


Figura 8.38 – Velocidade vertical do ponto distante de 3,5 m do eixo da via devido à passagem do comboio: a) comboio suburbano; b) comboio intercidades; c) comboio Alfa-Pendular.

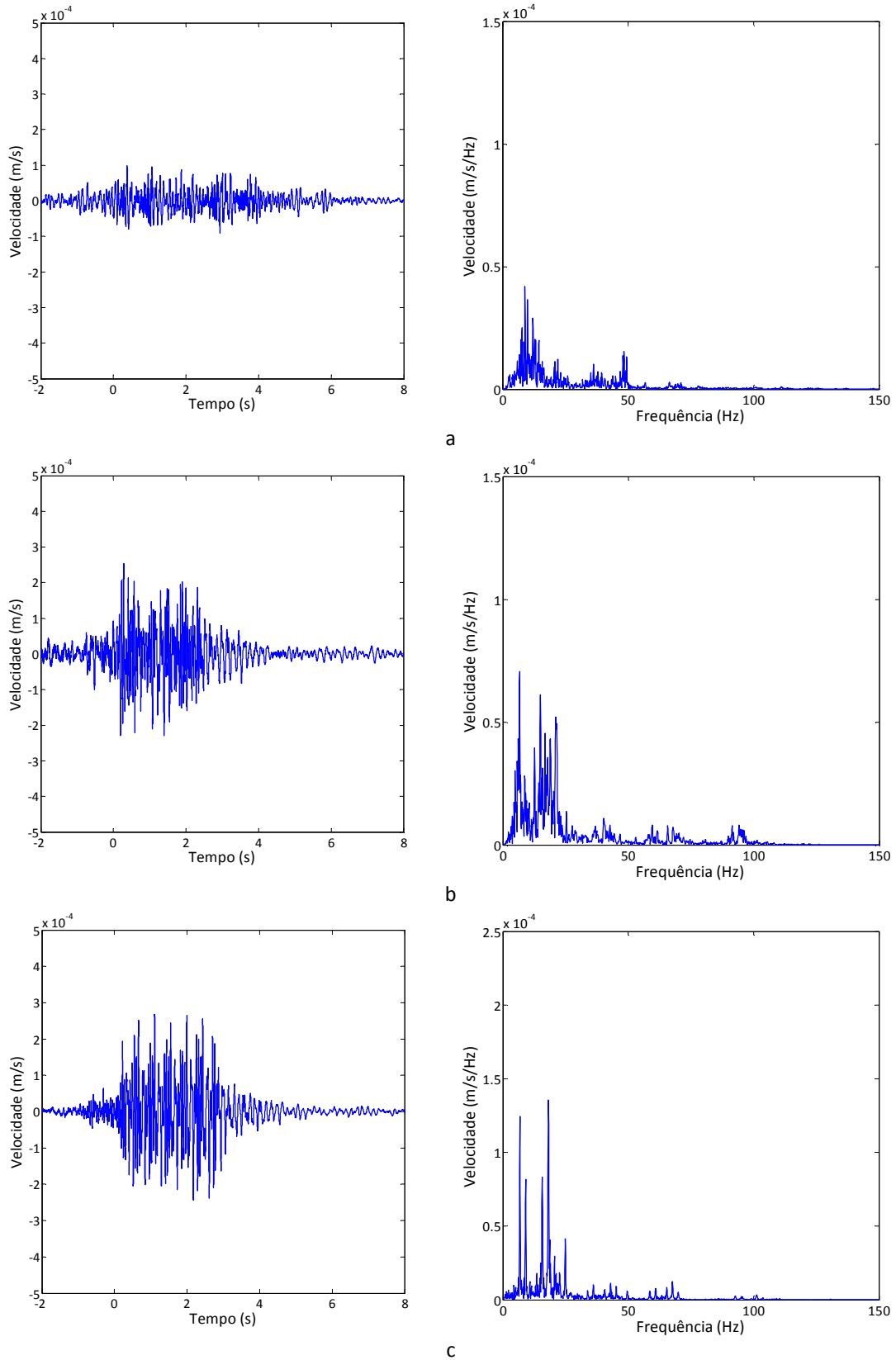


Figura 8.39 – Velocidade vertical do ponto distante de 22,5 m do eixo da via descendente devido à passagem do comboio: a) comboio suburbano; b) comboio intercity; c) comboio Alfa-Pendular.



## 8.6 Modelação numérica da passagem do comboio Alfa-Pendular

### 8.6.1 Considerações gerais

A validação experimental de modelos numéricos para a simulação de sistemas estruturais complexos, como os propostos no âmbito do presente estudo, constitui uma tarefa de indiscutível importância para a avaliação da qualidade das formulações teóricas preconizadas. Não obstante o evidente interesse da confrontação entre resultados experimentais e numéricos, o estudo combinado envolvendo estas duas técnicas (a experimentação e a modelação numérica), permite não só validar os modelos teóricos, mas também escrutinar, por via da experimentação numérica, alguns dos efeitos observados. Como tal, experimentação e modelação numérica deverão ser encaradas como metodologias complementares para um melhor discernimento das problemáticas em estudo.

O sistema que se pretende simular apresenta elevada complexidade, a qual se reflecte tanto na discutível adequabilidade dos procedimentos experimentais adoptados, como nas formulações teóricas propostas, não sendo por isso expectável uma concordância perfeita entre os resultados vaticinados pelos modelos numéricos e os observados por via experimental [325]. Para essa complexidade em muito contribui a grande dimensão do meio a simular, o qual, dificilmente corresponde a um cenário homogéneo e isotrópico. Acresce a esse facto a elevada complexidade da dinâmica do veículo e sua da interacção com a via férrea, isto sem esquecer, como é evidente, o carácter móvel da solicitação. Como tal, atendendo aos pressupostos e simplificações admitidas nas formulações teóricas propostas, as quais são evidenciadas ao longo dos capítulos antecedentes, bem como aos erros inerentes às próprias técnicas de experimentação, a avaliação da capacidade dos modelos teóricos para reproduzirem a realidade física observada deve ser encarada num sentido alargado, não tanto focalizada na reprodução exacta da resposta num dado ponto, o que sem dúvida seria desejável, mas sim na sua aptidão para a simulação da globalidade do problema, tanto nas linhas gerais, como na reprodução das tendências experimentalmente observadas.

Estas reticências e incertezas quanto à capacidade de um modelo teórico reproduzir a realidade física num problema tão complexo como o aqui analisado, são alvo de apreciação pormenorizada num estudo recente levado a cabo por Hunt e Hussein [325]. Esses autores, identificando as várias fontes de incerteza e influência das mesmas no resultado final, deixam em aberto a dúvida se é possível fazer previsões numéricas com acuidade inferior a +/- 10 dB.

Do conjunto alargado de eventos registados durante a campanha experimental, seleccionou-se a passagem do comboio Alfa-Pendular à velocidade de 212 km/h como evento de validação do modelo teórico. Como é notório nas secções anteriores, foi realizado um esforço considerável para uma boa caracterização mecânica das várias componentes do sistema, faltando apenas a caracterização experimental dos veículos. No entanto, contactos estabelecidos com a entidade responsável pelo material circulante (Caminhos de Ferro Portugueses – CP) permitiram recolher a informação mais relevante relativamente à dinâmica do comboio Alfa-Pendular, a qual foi complementada com os resultados enunciados por alguma experimentação realizada nesse âmbito pelo grupo de investigação em que o autor se insere.

Nas secções seguintes apresentam-se alguns esclarecimentos relativamente à modelação numérica, sendo sucedidos pela apresentação dos resultados numéricos e da sua confrontação com os homólogos avaliados por via experimental. Por último, apresentam-se alguns estudos de sensibilidade efectuados com o intuito de melhor escrutinar a influência da velocidade de circulação na resposta dinâmica do sistema.

### 8.6.2 Descrição do modelo numérico

#### 8.6.2.1 Modelação do comboio Alfa-Pendular

O comboio Alfa-pendular é uma composição simétrica formada por seis veículos com capacidade motora, tal como ilustrado na Figura 8.40. Como se depreende da observação da figura, trata-se de um comboio convencional em que cada veículo possui quatro eixos agrupados aos pares nos respectivos bogies.

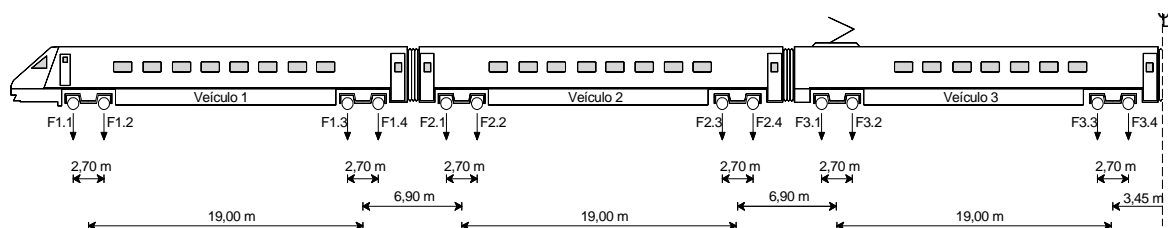


Figura 8.40 – Geometria do comboio Alfa-Pendular.

O estudo aprofundado da resposta dinâmica do comboio constitui um tema de investigação que em muito ultrapassa o âmbito do presente estudo. Como já explanado no Capítulo 6, a solicitação imposta pelo material circulante à via férrea pode ser decomposta em dois grandes mecanismos: i) mecanismo quasi-estático; ii) mecanismo dinâmico. A caracterização do primeiro mecanismo é relativamente simples, bastando para isso o conhecimento da carga estática imposta por cada

eixo à via, das características geométricas do comboio e da respectiva velocidade de circulação. Relativamente ao segundo mecanismo, a excitação resulta da interação dinâmica veículo-via, sendo por isso necessário o conhecimento de algumas características mecânicas do próprio veículo. Segundo diversos autores, o mecanismo de excitação dinâmica é convenientemente reproduzido, no caso de veículos de passageiros, através de um modelo simplificado onde apenas a dinâmica das massas não suspensas é atendida [66, 326]. Contudo, atendendo às conclusões do estudo de sensibilidade apresentado no Capítulo 6, a modelação levada a efeito no presente âmbito tem também em consideração as massas semi-suspensas do comboio.

Assim sendo, nas análises subsequentes, a menos que seja indicado o contrário, o comboio é simulado, simplificada, através do conjunto de sistemas estruturais compostos pelas massas não suspensas (eixos), pelas massas semi-suspensas (bogies) e respectivos elementos de ligação entre ambas (suspensão primária), isto, sem esquecer, a simulação do contacto carril-roda, como aliás se encontra bem patente na Figura 8.41. O espaçamento entre cada um dos módulos estruturais é definido de acordo com a geometria indicada na Figura 8.40.

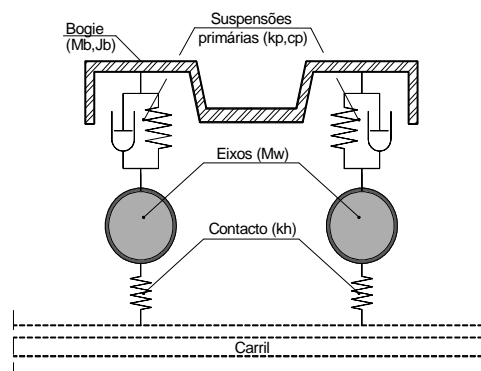


Figura 8.41 – Modelo estrutural adoptado na simulação do comboio (módulo correspondente a um bogie).

Ainda relativamente à modelação do comboio, foram admitidas as simplificações implícitas ao modelo apresentado no Capítulo 6, de entre as quais se destaca o facto de apenas a dinâmica vertical do comboio ser atendida, através do recurso a um modelo plano.

No Quadro 8.4 apresentam-se as características dos diferentes veículos do Alfa-Pendular, as quais, em complemento com a informação ilustrada na Figura 8.40, permitem a definição do modelo numérico. Note-se que, apesar de o comboio ser geometricamente simétrico, existem algumas diferenças na distribuição de cargas por eixo entre os veículos homólogos dos dois lados do plano de simetria.

Quadro 8.4 – Propriedades mecânicas do comboio Alfa-pendular necessárias à definição do modelo numérico.

		Veículo 1	Veículo 2	Veículo 3	Veículo 4	Veículo 5	Veículo 6	
Bogie	B1	Mb (kg)	4932	4823	4712	4712	4823	4823
		Jb (kg.m <sup>2</sup> )	5150	5090	5000	5000	5090	5150
	B2	Mb (kg)	4823	4823	4712	4712	4823	4923
		Jb (kg.m <sup>2</sup> )	5150	5090	5000	5000	5090	5150
Suspensão	kp (kN/m)	3420						
	cp (kNs/m)	36						
Eixos	EIXO 1	Fi.1 (kN)	133,3	135,7	131,5	135,5	135,7	132,7
		Mw (kg)	1538	1538	1538	1538	1538	1538
		kh (kN/m)	2,4x10 <sup>9</sup>					
	EIXO 2	Fi.2 (kN)	136,8	139,2	131,5	135,5	139,23	136,2
		Mw (kg)	1884	1884	1538	1538	1884	1884
		kh (kN/m)	2,4x10 <sup>9</sup>					
	EIXO 3	Fi.3 (kN)	136,20	139,2	131,5	135,5	139,23	136,7
		Mw (kg)	1884	1884	1538	1538	1884	1884
		kh (kN/m)	2,4x10 <sup>9</sup>					
	EIXO 4	Fi.4 (kN)	132,7	135,7	131,5	135,5	135,7	133,3
		Mw (kg)	1538	1538	1538	1538	1538	1538
		kh (kN/m)	2,4x10 <sup>9</sup>					

A numeração dos veículos adoptada no Quadro 8.4 corresponde à ordem de circulação no sentido descendente da linha do Norte, sendo que a designação adoptada para os bogies, B1 e B2, reflecte, respectivamente, a sua posição posterior e anterior relativamente ao sentido de circulação (sentido descendente). Os dados acima enunciados foram obtidos junto da CP, sendo de notar que as cargas por eixo correspondem à distribuição de pesos do comboio em situação de ordem de marcha, podendo, mediante o grau de lotação do comboio, ser incrementadas até cerca de 8%-10%. No que concerne às suspensões primárias, para além dos dados de fabricante facultados pela CP, realizaram-se alguns testes de rigidez desses elementos cujos resultados estão reflectidos no quadro.

Uma última nota justificativa deve ser prestada relativamente à opção pelo modelo estrutural indicado na Figura 8.41 em detrimento de um modelo mais completo, no qual as massas suspensas e as suspensões secundárias seriam contempladas, visto que o mesmo se encontra implementado no modelo de interacção veículo-via (ver Capítulo 6). A justificação para tal simplificação encontra o seu fundamento, não na complexidade analítica do modelo, mas sim no facto de, apesar dos esforços envolvidos, não ter sido possível avaliar atempadamente as

propriedades mecânicas dos elementos sobrejacentes ao bogie, principalmente no que se refere à distribuição de massas no interior da caixa de cada veículo.

### **8.6.2.2 Modelação global do sistema via-maciço**

No que concerne à modelação numérica do sistema via-maciço apenas se tecem aqui algumas considerações de carácter mais específico, visto que os aspectos gerais foram já aflorados na secção 8.4.3 do presente capítulo.

Tal como traduzido na Figura 8.29, o meio estrutural referente à via férrea (subbalastro, balastro, travessas e os carris) é simulado através de elementos finitos 2.5D, enquanto o maciço de fundação é integrado no modelo através da formulação de elementos de contorno. As propriedades mecânicas, tanto da via, como do maciço, estão em concordância com os resultados dos ensaios anteriormente apresentados, podendo ser consultadas nos Quadros 8.2 e 8.3. A localização dos pontos de observação no modelo numérico corresponde à seleccionada para pontos instrumentados no decurso da campanha experimental (Figura 8.31).

Visto que o modelo numérico apresenta condições de simetria, o perfil de irregularidades de ambos os carris toma, obrigatoriamente, a configuração reflectida na Figura 8.20. Note-se que esta simplificação não se deve apenas às condições de simetria do problema, mas também ao tipo de modelo adoptado para a simulação do comboio. De facto, a consideração de perfis de irregularidades distintos para os dois carris implica o recurso a uma modelação tridimensional do próprio comboio, modelo esse que, na presente fase, não se encontra ainda implementado nos códigos computacionais desenvolvidos.

## **8.6.3 Resultados numéricos versus experimentais**

### **8.6.3.1 Resposta da via férrea**

No decurso dos trabalhos experimentais foi avaliada a resposta da via férrea, na secção de referência (pk 41+625), através da monitorização de diferentes grandezas, com especial destaque para o deslocamento vertical do carril e aceleração vertical da travessa. O plano de observação inicial compreendia ainda a avaliação da aceleração vertical dos carris e a medição do deslocamento relativo carril-travessa. Contudo, uma análise pormenorizada destes resultados

permitiu constatar que a qualidade dos sinais era diminuta, razão pela qual não são aqui utilizados para comparação com os resultados numéricos.

Na Figura 8.42 mostram-se os resultados numéricos e experimentais do deslocamento vertical do carril. A sobreposição do registo experimental e numérico é efectuada através de uma translação temporal do primeiro de modo a que o instante  $t=0$  s corresponda à passagem do último eixo do comboio pela secção instrumentada (regra seguida na apresentação de todos os resultados do presente estudo). Relativamente ao processamento dos resultados experimentais, convém referir que o registo representado na Figura 8.42 resulta da medição efectuada com o transdutor laser e após a aplicação de um filtro passa baixo com frequência de corte de 60 Hz. A aplicação deste filtro tem como objectivo eliminar o ruído presente no sinal, resultante, muito provavelmente, da própria vibração do tripé de fixação do transdutor. Por uma questão de coerência comparativa, os resultados numéricos, correspondentes ao deslocamento vertical relativo entre o carril e o ponto de observação na superfície do terreno distante de 9,5 m do eixo da via descendente, são também submetidos a um filtro de iguais características.

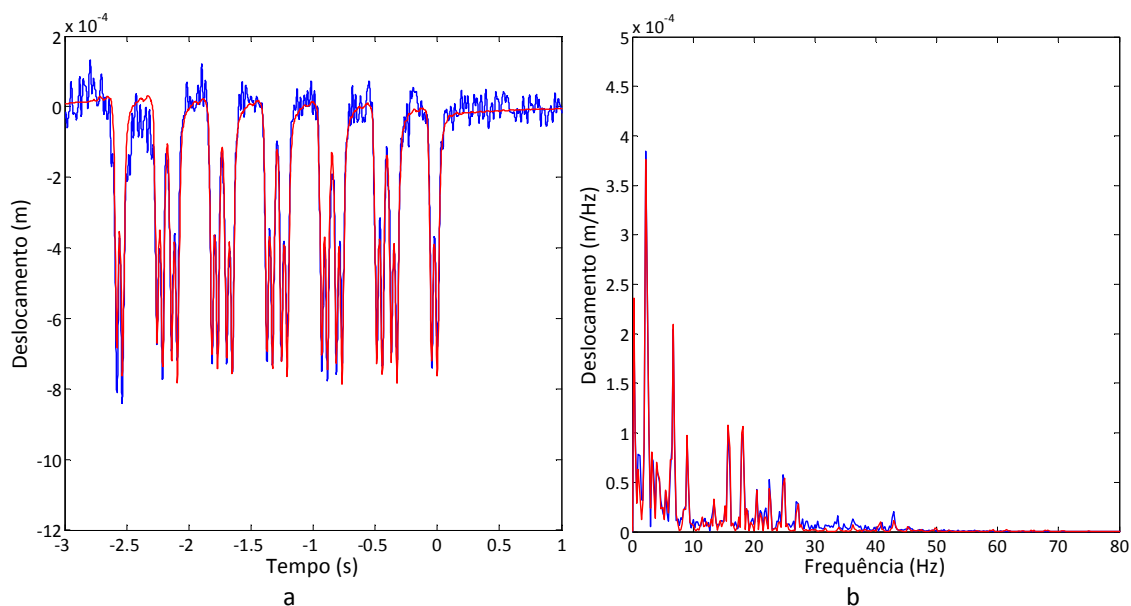


Figura 8.42 – Deslocamento vertical do carril devido à passagem do comboio Alfa-Pendular à velocidade de 212 km/h: a) registo temporal; b) representação no domínio da frequência. (linha azul – resultados experimentais; linha vermelha – resultados numéricos).

Passando agora à análise comparativa entre resultados numéricos e experimentais, a observação da Figura 8.42 permite identificar uma concordância muito boa entre ambos, sendo apenas de notar ligeiras diferenças no deslocamento induzido pela passagem do primeiro bogie do comboio. Dado que a resposta do carril em termos de deslocamentos é condicionada, essencialmente, pela componente quasi-estática da excitação, essa diferença pode dever-se a uma certa subestimação das cargas estáticas consideradas no modelo numérico para o primeiro bogie.

Avançando agora para a análise da resposta da travessa, na Figura 8.43 apresentam-se os resultados referentes à velocidade vertical experimentada por este elemento devido à passagem do comboio em estudo. A análise do registo temporal ilustrado na Figura 8.43a permite verificar que a resposta da travessa é muito bem reproduzida pelo modelo numérico, sendo apenas de notar uma ligeira subestimação dos picos da velocidade positiva e exactamente o oposto no que toca aos valores negativos. Por outro lado, através da análise comparativa do conteúdo em frequência da velocidade vertical da travessa (Figura 8.43b), constata-se que a elevada acuidade do modelo numérico se estende até cerca dos 75 Hz, até onde se verifica uma perfeita concordância, tanto em frequência como em amplitude, entre resultados numéricos e experimentais. Para frequências superiores a 75 Hz, pese embora o conteúdo em frequência da resposta numérica seja ainda bastante próximo do homólogo determinado por via experimental, observa-se a algum desfaseamento entre os picos que caracterizam as respostas experimental e numérica.

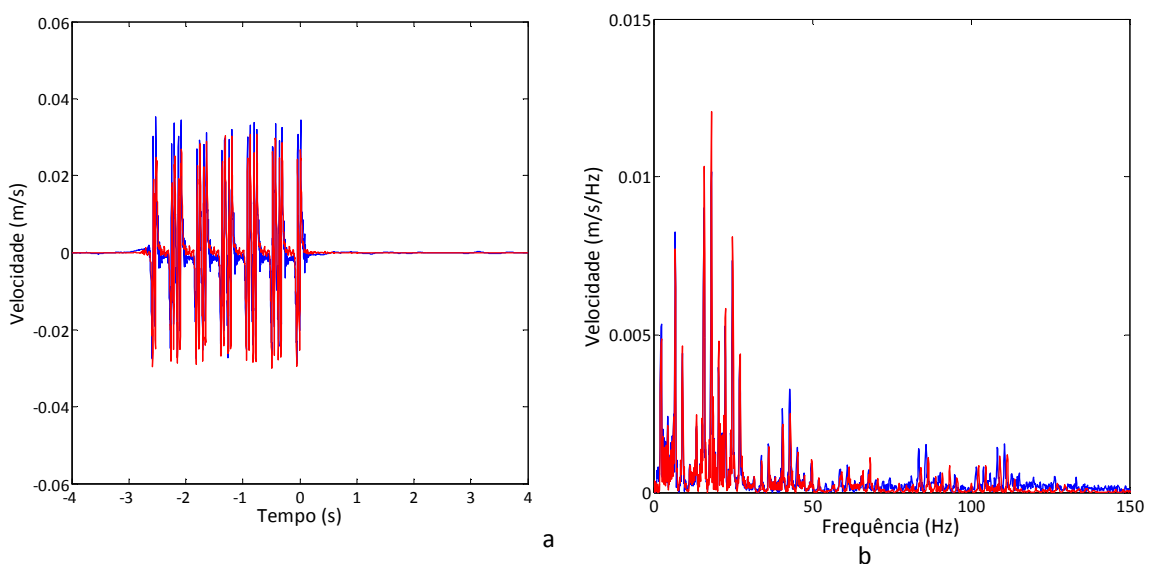


Figura 8.43 – Velocidade vertical da travessa devido à passagem do comboio Alfa-Pendular à velocidade de 212 km/h: a) registo temporal; b) representação no domínio da frequência. (linha azul – resultados experimentais; linha vermelha – resultados numéricos).

Para melhor discernir os efeitos dos mecanismos quasi-estático e dinâmico na resposta da travessa, considere-se a Figura 8.44 onde se ilustra o conteúdo em frequência da resposta avaliada numericamente, considerando a totalidade dos mecanismos atendidos ou apenas a sua componente quasi-estática. Até aos 50 Hz a resposta da travessa é condicionada, praticamente na sua totalidade, pelo mecanismo de excitação quasi-estático. Porém, para frequências superiores, o mecanismo dinâmico toma preponderância, sendo claramente dominante para além dos 75 Hz. Esta conclusão, combinada com o resultado da análise da Figura 8.43b, permite constatar que as diferenças verificadas entre os resultados numéricos e experimentais se devem essencialmente a

alguma dificuldade na reprodução numérica do mecanismo de excitação dinâmica. Tal facto não constitui surpresa, pois o modelo numérico não contempla factores de excitação dinâmica tais como imperfeições das rodas ou excitação paramétrica devida ao espaçamento das travessas. Outro factor que poderá contribuir para a diferença verificada no registo temporal (Figura 8.43a) prende-se, presumivelmente, com algum desfasamento geométrico do posicionamento do perfil de irregularidades medido face à secção de referência. Este aspecto toma uma importância significativa já que as forças de interacção dinâmica roda-carril são dele dependentes e apresentam uma variação significativa de magnitude ao longo do tempo, como aliás está bem patente na Figura 8.45, onde se ilustra o registo temporal da força aplicada pelo último eixo do comboio à via.

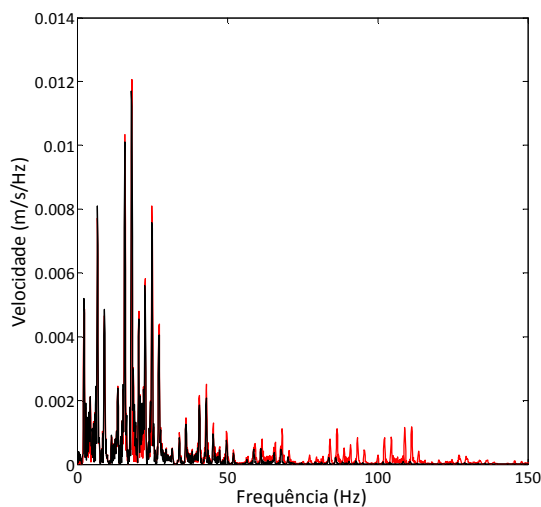


Figura 8.44 – Conteúdo em frequência da resposta da travessa avaliada numericamente. (linha preta – excitação quasi-estática; linha vermelha – excitação quasi-estática + dinâmica).

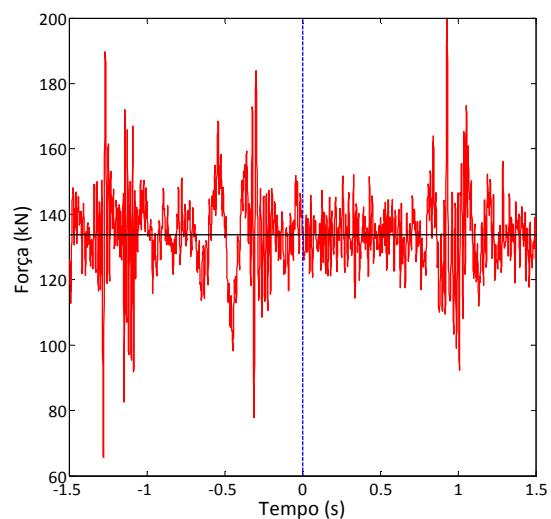


Figura 8.45 – Registo temporal da força de interacção do último eixo do comboio. (linha preta – excitação quasi-estática; linha vermelha – excitação quasi-estática + dinâmica).

Pese embora as diferenças encontradas entre simulado e observado, convém esclarecer que as justificações acima apresentadas se revestem de maior interesse teórico do que prático, pois, como está bem evidente na Figura 8.43, o modelo numérico reproduz a resposta da travessa de modo muito razoável, mesmo para frequências superiores a 75 Hz.

### 8.6.3.2 Resposta à superfície do maciço de fundação

A conjugação dos resultados apresentados na secção anterior com os do estudo levado a efeito no Capítulo 7 permite certificar a elevada fiabilidade dos modelos propostos na simulação da resposta dinâmica de vias férreas, face à solicitação advinda do tráfego. Pese embora a importância significativa dessa conclusão, desafio não menos relevante, e porventura mais



complexo, é o que consiste na avaliação da fiabilidade dos modelos na reprodução dos fenómenos de propagação de vibrações através do maciço de fundação. Esta questão, já aflorada do ponto de vista teórico em capítulos antecedentes, é então escrutinada na presente subsecção através da comparação entre resultados numéricos e experimentais, definidos em termos de velocidade vertical da partícula dos pontos de observação indicados na Figura 8.31.

A Figura 8.46 mostra o registo temporal da velocidade vertical experimentada nos pontos de observação devido à passagem do comboio em estudo, estando sobrepostos os resultados numéricos aos experimentais.

A apreciação da Figura 8.46 sugere desde logo alguns comentários de índole generalista. Em primeiro lugar, e como era previsível, assiste-se a uma clara diminuição da amplitude da velocidade vertical com o incremento da distância entre o ponto de observação e a via férrea. Essa tendência de atenuação da amplitude de vibração é mais acentuada entre os pontos mais próximos da via do que nos mais distantes, sugerindo o seguimento de uma lei aproximadamente geométrica e indo assim ao encontro da formulação teórica do amortecimento por radiação (ver Capítulo 2).

Outro aspecto interessante é denunciado pelo facto de os eventos se tornarem temporalmente mais longos à medida que a distância entre a via e o receptor aumenta. Sem entrar ainda em detalhe, verifica-se que, apesar das diferenças entre os resultados medidos e os enunciados pelo modelo numérico, as duas grandes tendências acima referidas são razoavelmente simuladas pelo último.

Os registos temporais apresentados na Figura 8.46 sugerem a divisão dos resultados em dois grupos, sendo o primeiro definido pelos quatro pontos mais próximos da via férrea e o segundo pelos restantes pontos. No que toca ao primeiro grupo, não obstante algumas diferenças entre os resultados numéricos e experimentais, constata-se que o modelo numérico consegue reproduzir com um nível de acuidade muito aceitável a realidade física medida, existindo uma boa concordância ao nível da tendência geral do registo, bem como dos valores de pico atingidos. Porém, no que toca ao segundo grupo, a subestimação numérica da resposta é claramente evidente.

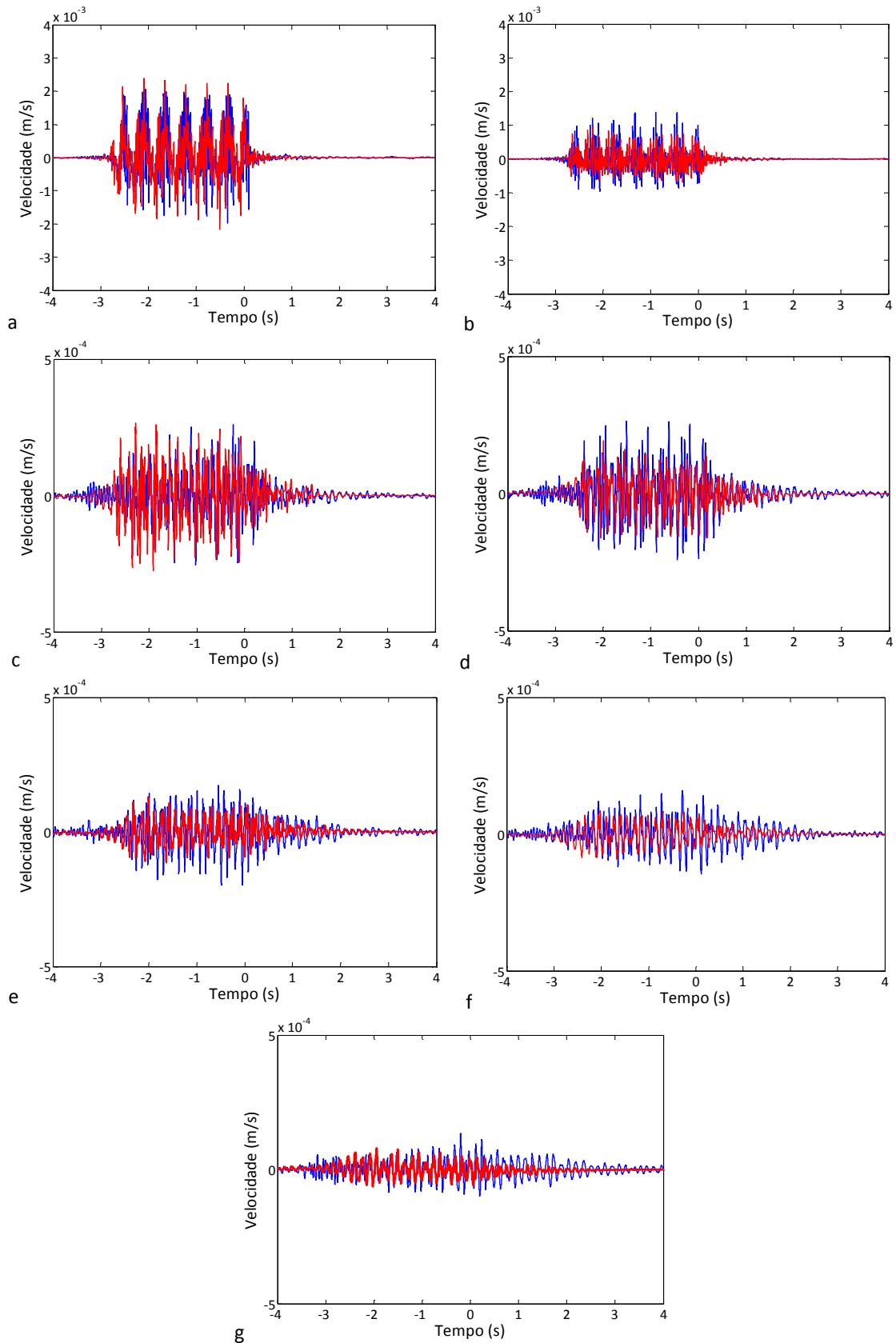


Figura 8.46 – Registo temporal da velocidade vertical nos pontos de observação à distância de: a) 3,5 m; b) 7,0m; c) 15,0 m; d) 22,5 m; e) 30,0 m; f) 37,5 m; g) 45,0 m (linha azul – resultados experimentais; linha vermelha – resultados numéricos).

Os aspectos enunciados no parágrafo anterior são melhor discernidos complementando a informação constante na Figura 8.46 com a análise do conteúdo em frequência da resposta, a qual se ilustra na Figura 8.47. A análise global do conteúdo em frequência permite verificar que, com exceção do ponto distante de 3,5 m da via, a resposta é dominada por frequências inferiores a cerca de 100 Hz, sofrendo uma translação no sentido das frequências mais baixas à medida que a distância à via aumenta. Esta conclusão é extensível tanto aos resultados numéricos como aos resultados experimentais. No que toca à comparação de resultados, verifica-se que nos pontos pertencentes ao primeiro grupo há uma concordância assinalável entre os conteúdos das respostas experimental e numérica, apesar da existência de algumas diferenças pontuais principalmente no ponto distante de 7,0 m da via férrea e em torno da frequência de 75 Hz (Figura 8.47b). Por sua vez, relativamente aos pontos mais distantes da via, constata-se que apesar do modelo numérico conduzir a valores das frequências dominantes da resposta muito próximos dos determinados experimentalmente, existe uma diferença não negligenciável em termos de amplitude, a qual é mais evidente na gama de frequências entre os 8 Hz e os 40 Hz.

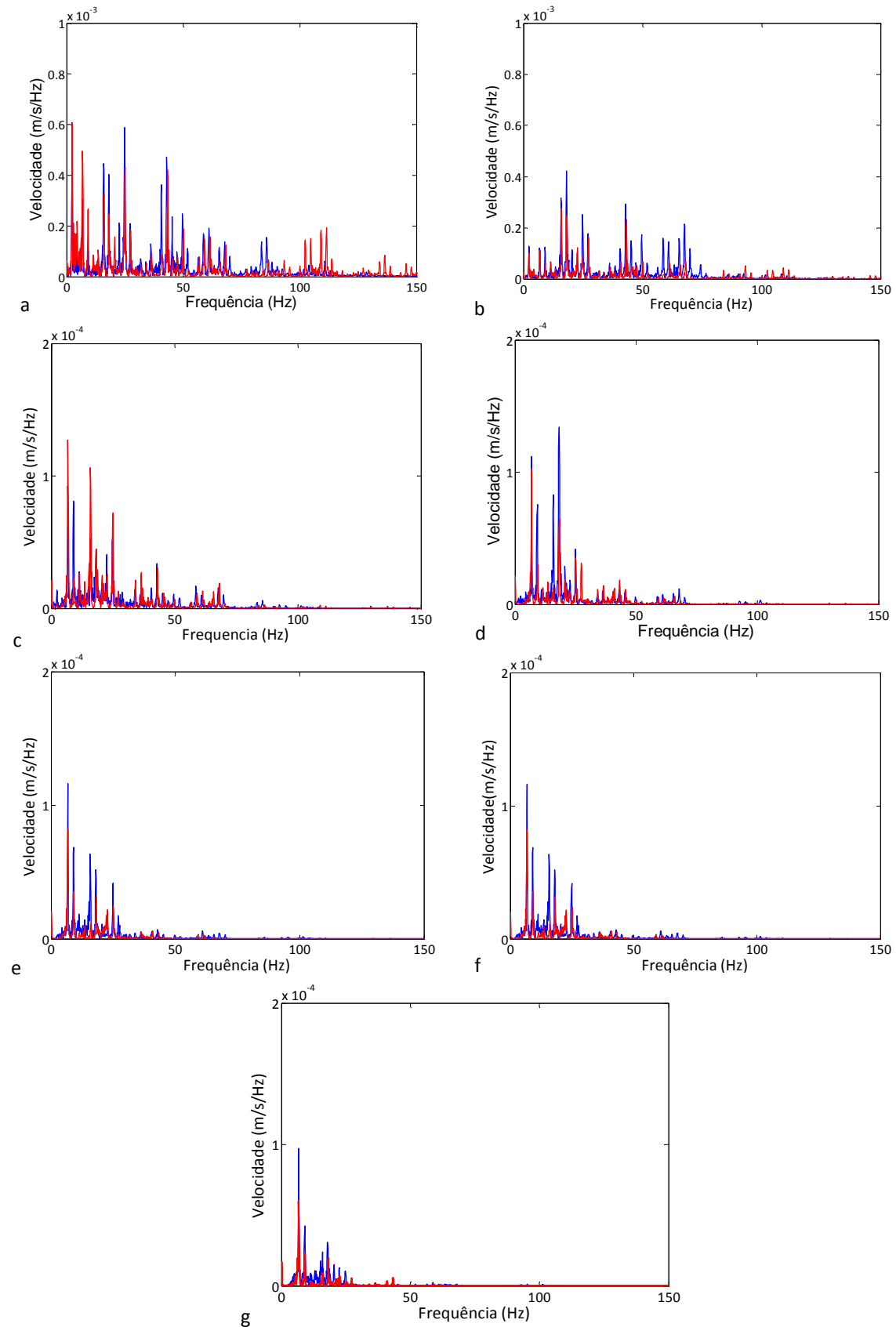


Figura 8.47 – Conteúdo em frequência da velocidade vertical nos pontos de observação à distância de: a) 3,5 m; b) 7,0m; c) 15,0 m; d) 22,5 m; e) 30,0 m; f) 37,5 m; g) 45,0 m (linha azul – resultados experimentais; linha vermelha – resultados numéricos).

Um outro modo de confrontar resultados numéricos e experimentais, porventura mais evidente e interessante do ponto de vista prático, passa pela representação da resposta em termos de bandas de terço de oitava. Na Figura 8.48 apresentam-se os resultados numéricos e experimentais seguindo este tipo de representação, estando também indicadas, como base de referência, as curvas de limite de admissibilidade de vibrações propostas por Gordon [280] para equipamentos sensíveis.

A representação agora adoptada permite realçar o facto de existir uma grande proximidade, para os pontos mais próximos da via, entre a resposta avaliada por via experimental e a traduzida pelo modelo numérico. Contudo, nos pontos mais afastados da via, constata-se o curioso facto de o modelo numérico conseguir captar de modo razoável a evolução da resposta em termos de frequência, pese embora a amplitude associada seja claramente subestimada. Esta diminuição da acuidade dos resultados numéricos com o aumento da distância denuncia que, muito provavelmente, os valores do coeficiente de amortecimento material adoptados na construção do modelo numérico estão sobrestimados. Com efeito, o amortecimento material foi estimado através da inversão da resposta verificada num conjunto de pontos, sendo a distância entre a fonte e o ponto mais afastado inferior a 20 m. Segundo Auerch [99], a aproximação entre resultados numéricos e experimentais para pontos de observação próximos da fonte requer valores de amortecimento material muito elevados, os quais poderão não ter um significado físico evidente dada a complexidade e desconhecimento ainda prevalecente no que toca à simulação numérica de fenómenos de amortecimento. Assim sendo, uma vez que o amortecimento material foi calibrado tendo em vista a concordância entre resposta numérica e experimental em pontos distantes da fonte de excitação menos de 20 m, e de facto há a uma boa concordância entre resultados numéricos e experimentais quando esse limite não é ultrapassado (Figura 8.46a-c, Figura 8.48a-c), presume-se que o amortecimento adoptado na simulação é adequado para a simulação da resposta nos pontos mais próximos da via, sendo que para os pontos mais distantes parece ser demasiado elevado.

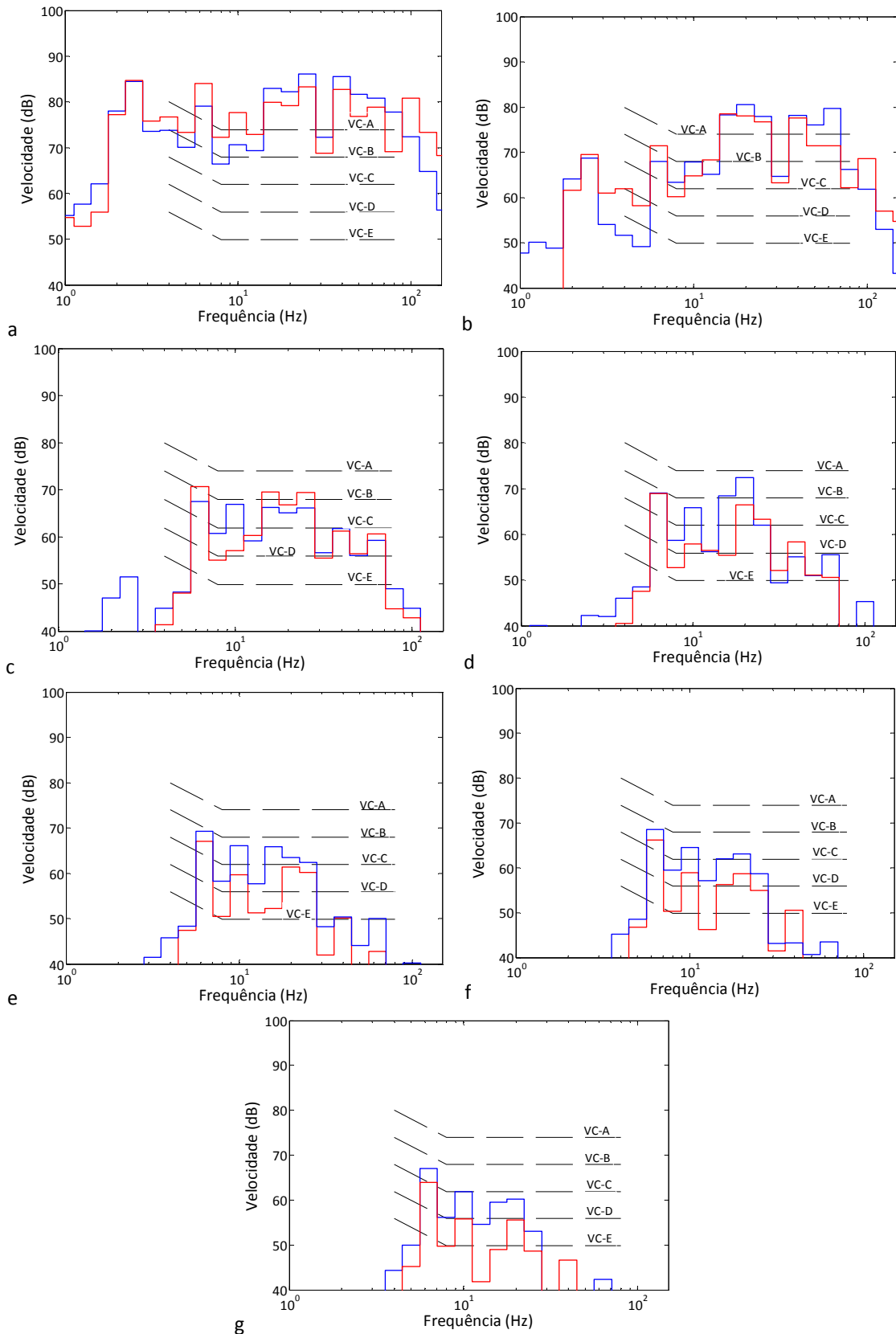


Figura 8.48 – Espectro de bandas de terço de oitava da velocidade vertical nos pontos de observação à distância de: a) 3,5 m; b) 7,0m; c) 15,0 m; d) 22,5 m; e) 30,0 m; f) 37,5 m; g) 45,0 m (linha azul – resultados experimentais; linha vermelha – resultados numéricos; referência dB –  $10^{-8}$  m/s).

De modo a esclarecer esta questão, considere-se um novo modelo numérico diferente do anterior apenas no perfil de amortecimento adoptado para o maciço de fundação. O amortecimento do novo modelo é definido através do perfil indicado na Figura 8.17a, ou seja, toma o valor constante de 0,03, independentemente da profundidade e formação geotécnica interessada. Note-se que na Figura 8.16 foi já ilustrada a mobilidade, no contexto do ensaio de frequência controlada, determinada por via numérica através da consideração deste perfil de amortecimento. A confrontação desses resultados com os homólogos avaliados por via experimental permitiu concluir que, para o conjunto de pontos de observação considerados, o modelo numérico assim definido sobrestima consideravelmente a resposta, pese embora se identifique uma tendência para a diminuição da diferença entre resultados numéricos e experimentais à medida que aumenta a distância entre a fonte e o receptor.

A Figura 8.49 mostra a história temporal da velocidade vertical, calculada através do modelo numérico com amortecimento reduzido, para os cinco pontos de observação mais afastados da via férrea. Sobrepostos a esses resultados encontram-se os resultados experimentais. Uma primeira análise dos registos permite desde logo retirar as seguintes ilações: i) no ponto mais próximo da via, distante de 15,0 m da mesma, o modelo de cálculo agora considerado sobrestima de uma forma muito significativa os níveis de vibração observados *in situ*, sendo esta tendência também seguida para os pontos distantes de 3,5 m e 7,0 m embora esses registos não sejam aqui ilustrados; ii) os resultados numéricos para pontos de observação a distâncias superiores a 20,0 m da via férrea são muito semelhantes aos avaliados experimentalmente, tanto em termos de valores de pico, como em duração do evento e tendência seguida.

As conclusões apresentadas são corroboradas pela análise do conteúdo em frequência da resposta que se apresenta na Figura 8.50. Para distâncias inferiores a 20,0 m, o modelo numérico com amortecimento reduzido sobrestima a resposta em praticamente toda a gama de frequências. Contudo, nos pontos mais distantes da via férrea, verifica-se uma muito boa concordância entre resultados numéricos e experimentais, principalmente na gama de frequências inferiores a cerca de 40 Hz, sendo que é exactamente nessa gama que a resposta é mais rica em conteúdo energético. Apesar da boa concordância identificada, não pode deixar de se referir que, na gama de frequências entre os 40 Hz e os 60 Hz, o modelo agora considerado sobrestima a resposta.

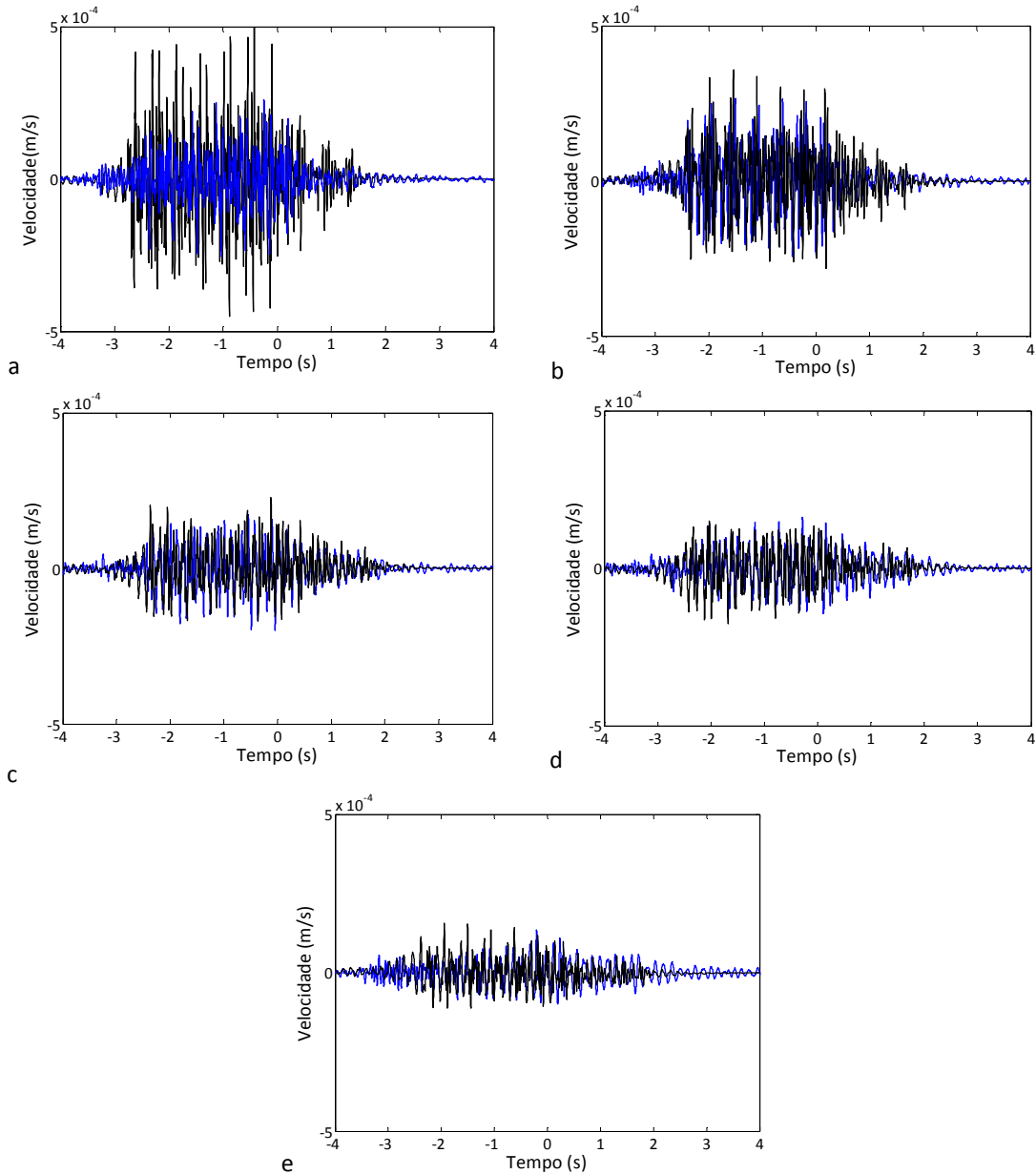


Figura 8.49 – Registo temporal da velocidade vertical nos pontos de observação à distância de: a) 15,0 m; b) 22,5 m; c) 30,0 m; f) 37,5 m; d) 45,0 m (linha azul – resultados experimentais; linha preta – resultados numéricos ( $\xi=0,03$ )).

De modo a facilitar a leitura comparativa entre os resultados experimentais e os homólogos estimados pelos dois modelos numéricos com amortecimentos distintos, na Figura 8.51 apresentam-se os espectros de banda de terço de oitava respeitantes à velocidade vertical experimentada pelos quatro pontos mais distantes da via férrea. Os resultados referentes aos restantes pontos de observação não são apresentados visto que o modelo numérico inicial, correspondente às propriedades de amortecimento do maciço de fundação calibradas experimentalmente, permite uma boa quantificação da resposta do meio (ver Figura 8.48).



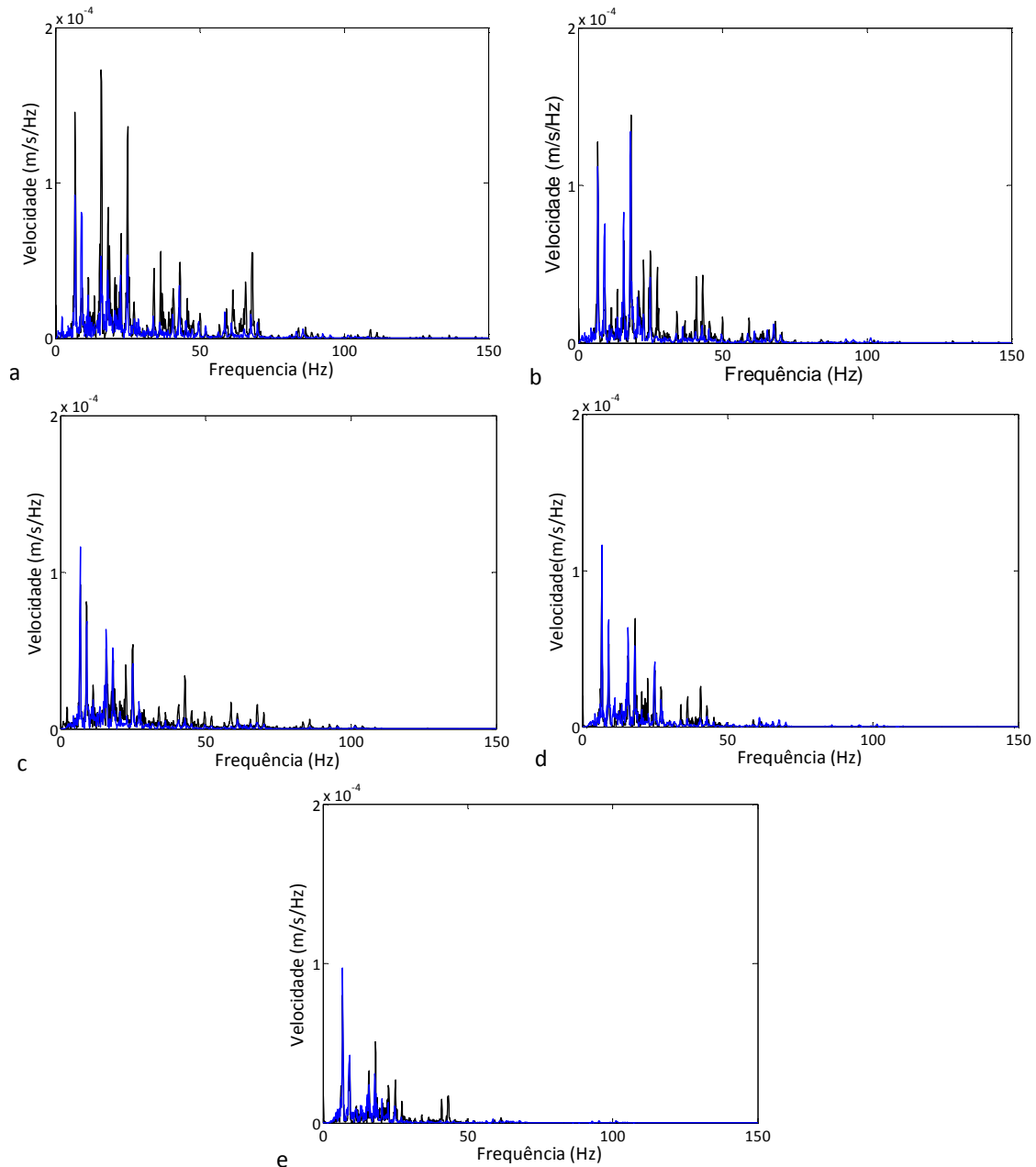


Figura 8.50 – Conteúdo em frequência da velocidade vertical nos pontos de observação à distância de: a) 15,0 m; b) 22,5 m; c) 30,0 m; d) 37,5 m; e) 45,0 m (linha azul – resultados experimentais; linha preta – resultados numéricos ( $\xi_3=0,03$ )).

A análise comparativa dos resultados numéricos permitida pela Figura 8.51 ilustra bem a grande importância que os fenómenos de amortecimento material tomam na problemática em estudo. Com efeito, o amortecimento material avaliado por via do ensaio de excitação controlada mostra-se adequado para a análise de vibrações induzidas por tráfego quando a distância dos pontos de observação à via é semelhante à distância adoptada entre fonte e receptor no desenvolvimento do referido ensaio. Este facto não deixa de ser um tanto ou quanto controverso, pois não se encontra uma justificação teórica que fundamente tal observação prática. Contudo, a confrontação entre resultados experimentais e numéricos levada a efeito por outros autores,

nomeadamente Auerch [99] e Lombaert et al. [5], apontam no sentido agora indicado, ou seja, para a representação da resposta na proximidade da fonte são necessários valores de amortecimento material elevados, ocorrendo o oposto quando a distância fonte-receptor aumenta.

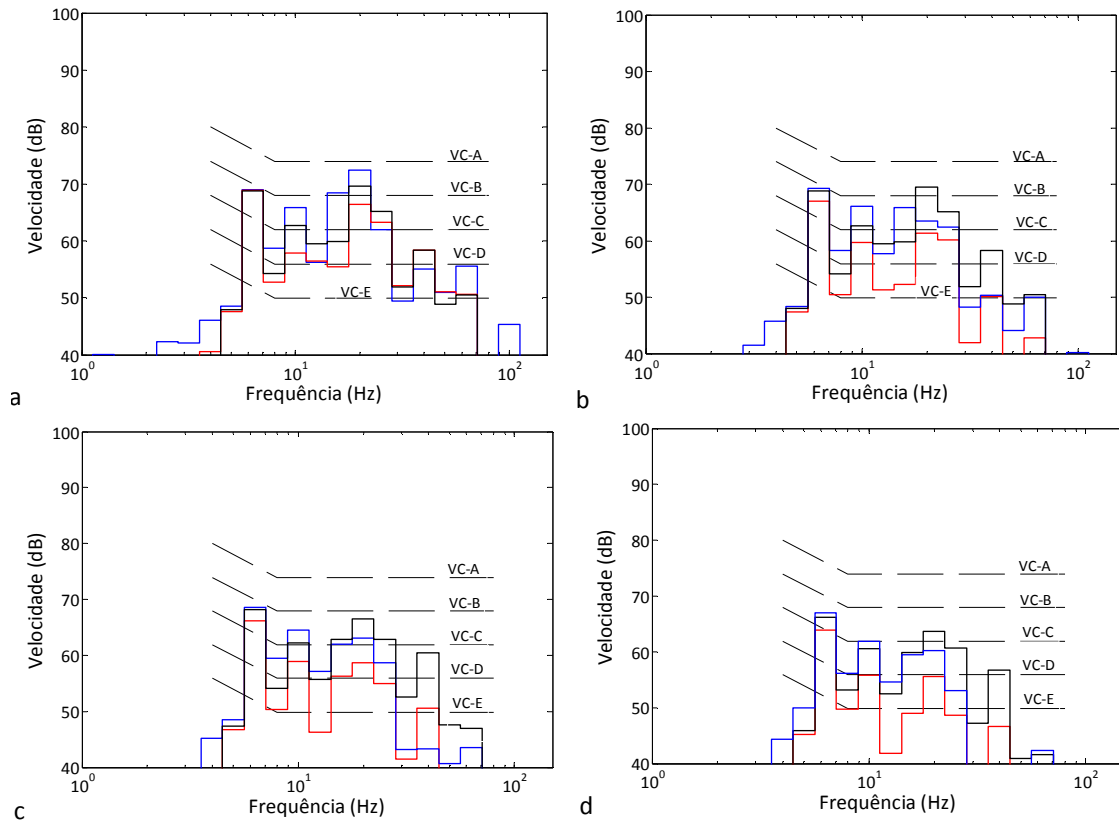


Figura 8.51 – Espectro de banda de terço de oitava da vertical nos pontos de observação à distância de: a) 22,50 m; b) 30,0 m; c) 37,50 m; d) 45,00 m (linha azul – resultados experimentais; linha preta – resultados numéricos ( $\xi=0,03$ ); linha vermelha – resultados numéricos ( $\xi$ =perfil variável); referência dB – 10-8 m/s).

Em jeito de conclusão, pode afirmar-se que, face aos resultados apresentados ao longo desta subsecção e ao nível de incerteza associada à problemática em estudo, o modelo numérico proposto constitui uma ferramenta fiável para a previsão de vibrações induzidas por tráfego ferroviário. Embora tenham sido encontradas diferenças entre os resultados experimentais e os enunciados pelo modelo teórico, as representações ilustradas nas Figuras 8.48 e 8.51 dão boa conta da qualidade global dos últimos.

#### **8.6.4 *Influência da velocidade de circulação***

Os mais recentes desenvolvimentos tecnológicos do material circulante perspectivam, para o futuro próximo, um conseqüente acréscimo da velocidade de circulação dos comboios, principalmente no âmbito das linhas de alta velocidade. Esse facto, conjugado com o desenvolvimento de modelos computacionais cada vez mais potentes e versáteis, tem estimulado o aperfeiçoamento de diversos estudos com vista à compreensão dos fenómenos dinâmicos inerentes ao acréscimo da velocidade de circulação, tendo sido dados alguns contributos para essa discussão ao longo da presente dissertação.

Como é bem sabido, e comprovado pelos estudos apresentados nos capítulos antecedentes, a velocidade de circulação é um parâmetro que apresenta grande relevância na resposta dinâmica do sistema veículo-via-macço, sendo a sua influência extensível tanto ao mecanismo de excitação quasi-estático como ao de excitação dinâmica.

A influência da velocidade de circulação quando a excitação é predominantemente quasi-estática reflecte-se através da relação intrínseca entre velocidade de circulação e amplificação dinâmica do sistema via-macço, relação essa devidamente discutida e validada ao longo do Capítulo 7. Por outro lado, o mecanismo de excitação dinâmica também se revela claramente dependente da velocidade de circulação, o que aliás se mostrou no Capítulo 6 através de um estudo paramétrico em torno de um cenário idealizado.

Apesar dos estudos avançados sobre essa temática ao longo da presente dissertação, e dos estudos similares apresentados por outros autores [5, 66, 182, 248], ainda assim, no entender do autor, justifica-se voltar ao tema, utilizando para tal o modelo numérico devidamente validado e considerando as irregularidades da via efectivamente existentes no local, ao invés da geração de perfis aleatórios como é prática corrente [5, 66, 182, 190, 248].

O estudo que se segue pressupõe a circulação do comboio Alfa-Pendular às velocidades de 250 km/h e 300 km/h, superiores aos 212 km/h atendidos nos estudos de validação do modelo. Note-se que as velocidades de circulação indicadas não pretendem corresponder a um cenário plausível de circulação do comboio Alfa-Pendular, mas apenas a um acréscimo de velocidade de circulação.

Atendendo aos estudos apresentados no Capítulo 7, bem como às conclusões apresentados em capítulos anteriores (Capítulos 3 e 4), facilmente se conclui que os cenários agora considerados não implicam incursões no designado problema de velocidade crítica. Como tal, e visto que a resposta dinâmica da via é condicionada pelo mecanismo de excitação quasi-estático, não é

expectável a ocorrência de diferenças assinaláveis ao nível da resposta da via devido a um incremento de velocidade da ordem do agora considerado.

Porém, no que compete à resposta dinâmica em pontos adjacentes à via férrea, a velocidade de circulação é um parâmetro condicionante na medida em que o mecanismo de excitação dinâmica é dela dependente. Essa relação entre velocidade de circulação e resposta dinâmica em pontos adjacentes à via está bem patente na Figura 8.52, onde se apresentam os espectros de banda de terço de oitava, relativos à velocidade vertical das partículas nos diferentes pontos de observação, para as três velocidades de circulação acima referidas. Convém aqui esclarecer que face às conclusões alcançadas na secção anterior, a resposta dinâmica nos três pontos mais próximos da via resulta de se considerar o perfil de amortecimento calibrado (Figura 8.17a) ao passo que os resultados relativos aos restantes pontos derivam do caso com o perfil de amortecimento ilustrado na Figura 8.17b.

A dependência do mecanismo de excitação dinâmica face à velocidade de circulação faz-se sentir através de dois fenómenos fundamentais: i) a influência da velocidade na amplitude de irregularidade percebida pelo ponto de contacto e associada a uma dada frequência; ii) a influência da velocidade na receptância móvel da via. No caso de perfis gerados aleatoriamente é possível encontrar uma relação matemática entre incremento da velocidade de circulação e incremento da amplitude percebida no ponto de contacto roda-carril. Dado que esse é o aspecto geralmente condicionante, é então plausível avaliar uma relação directa, ainda que de forma simplificada, entre nível de vibração e velocidade de circulação, como aliás é proposto por Lombaert et al. [66].

Considerando um perfil de irregularidades real, em vez de um gerado aleatoriamente (através de uma função de densidade espectral de potência com expressão matemática conhecida) torna a análise consideravelmente mais complexa. Contudo, os resultados expostos na Figura 8.52 permitem concluir que o aumento da velocidade de circulação está associado a um acréscimo muito significativo do nível máximo de vibração na gama de 1 Hz a 150 Hz. Essa conclusão, extensível a todos os pontos considerados, é acompanhada por uma translação da gama de frequências dominante no sentido ascendente.

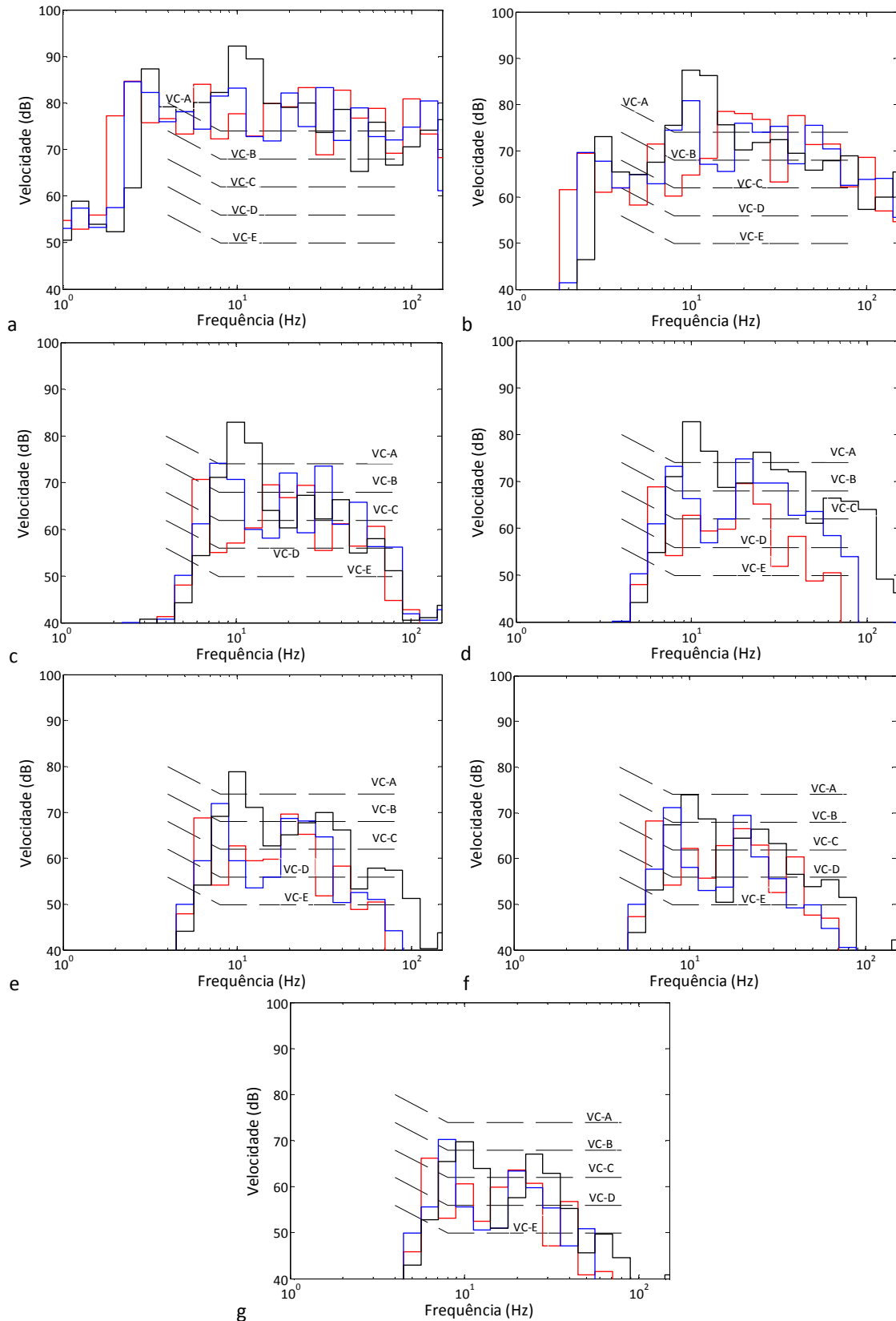


Figura 8.52 – Espectro de bandas de terço de oitava da velocidade vertical nos pontos de observação à distância de: a) 3,5 m; b) 7,0m; c) 15,0 m; d) 22,5 m; e) 30,0 m; f) 37,5 m; g) 45,0 m (linha vermelha –  $c=212$  km/h; linha azul –  $c=250$  km/h experimentais; linha preta –  $c=300$  km/h; referência dB –  $10^{-8}$  m/s).

Um outro aspecto interessante e evidenciado pela figura, pende-se com o facto do efeito da velocidade ser mais notório, em termos de amplitude, nos pontos mais próximos da via do que nos mais afastados. Esse efeito deve-se, muito provavelmente, ao facto de o incremento da velocidade acarretar uma translação da resposta em frequência para a gama mais elevada e, conseqüentemente, os fenómenos de amortecimento material (os quais são mais evidentes nas frequências elevadas) se tornarem mais relevantes.

## 8.7 Conclusões e considerações finais

O presente capítulo apresenta duas vertentes de estudo, a experimental e a numérica, que sendo distintas e complementares fecham o ciclo de investigação ilustrado na Figura 8.53, dando assim resposta aos objectivos previamente definidos. Relativamente ao último aspecto, o cumprimento dos objectivos, é lícito afirmar, face aos resultados mostrados ao longo do capítulo, que os mesmos foram alcançados na plenitude, senão mesmo superados.

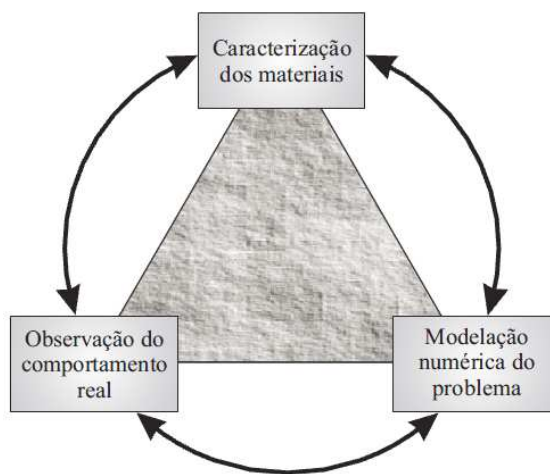


Figura 8.53 – Ciclo de investigação (adaptado de [13]).

Na vertente experimental, o objectivo principal, ou seja, a aquisição de competências experimentais no âmbito da monitorização e interpretação da resposta dinâmica de vias férreas, foi alcançado com sucesso dados os meios materiais e humanos afectos ao estudo. Todavia, a experiência agora adquirida permite identificar alguns aspectos chave que deverão ser melhorados em trabalhos futuros, tanto ao nível da monitorização da resposta dinâmica da via durante a passagem do comboio como ao nível dos ensaios de caracterização dinâmica dos elementos interessados pelo estudo.

No que concerne à componente numérica do estudo, consistindo na validação experimental do modelo numérico proposto, objectivo porventura bastante ambicioso dada a complexidade da problemática em estudo, compete referir que revelou-se num caso de sucesso, verificando-se uma correspondência muito boa entre os resultados vaticinados pelo modelo e os ditados pela experimentação.

Passando ao nível mais particular das conclusões, o sucesso da validação do modelo experimental deve-se a dois aspectos fundamentais: i) a robustez e adequabilidade do modelo numérico desenvolvido; ii) a realização de um conjunto de pequenas experiências de caracterização dinâmica do meio com vista à calibração do modelo e obtenção dos parâmetros necessários à sua definição. Este último aspecto, embora relativamente trabalhoso e complexo, no qual experimentação e modelação numérica são intimamente ligadas, mostra-se fundamental para a atingir níveis elevados de fiabilidade do modelo. Pese embora o esforço alocado a esta parte do estudo, o procedimento de calibração do amortecimento material do solo é algo discutível, mostrando-se necessário aperfeiçoar a técnica ou, porventura, adoptar técnicas mais fiáveis para a estimativa deste parâmetro condicionante para a resposta dinâmica nas zonas mais afastadas da via férrea.

Relativamente ao ensaio sob acção de tráfego, a adopção do sistema de medição de deslocamentos dinâmicos por laser mostra-se como uma técnica promissora, a qual permitiu adquirir registos de elevada qualidade. Por sua vez, o modelo numérico traduziu de forma fidedigna a resposta da dinâmica da via durante a passagem do comboio, tanto ao nível do carril como da travessa.

Estudo mais complexo do ponto de vista numérico refere-se à resposta dinâmica na superfície do maciço adjacente à via férrea. Contudo, dada a complexidade do problema e o nível de incerteza associado, os resultados ilustrados ao longo do capítulo permitem classificar o modelo numérico como uma ferramenta apta para a previsão dos mecanismos de geração e propagação de vibrações induzidas por tráfego.

Por fim, validado o modelo numérico, apresenta-se um pequeno estudo onde se discute a influência da velocidade de circulação na resposta dinâmica em pontos da superfície do terreno adjacentes à via férrea. Desse estudo, corroborando análises prévias, conclui-se que o incremento da velocidade de circulação está associado a um aumento significativo dos níveis de vibração experimentados nas imediações da via férrea.





## 9. Conclusões e propostas para investigação futura

---

### 9.1 Conclusões

Para rematar a exposição dos trabalhos realizados, entende-se ser pertinente sumariar as principais conclusões e desenvolvimentos, tendo presente os objectivos previamente traçados, a saber: i) desenvolvimento, implementação e aplicação de modelos numéricos tridimensionais especialmente concebidos para a análise do comportamento dinâmico de vias férreas, incluindo a propagação de vibrações e a interacção dinâmica veículo-via; ii) desenvolvimento de competências experimentais no âmbito da monitorização dos efeitos dinâmicos induzidos pelo tráfego ferroviário; iii) validação experimental dos modelos numéricos, procurando assegurar a sua qualidade como ferramentas de previsão fiáveis.

O Capítulo 2, precedente aos de desenvolvimento propriamente dito, constitui um capítulo introdutório, generalista, no qual são enunciados os princípios e conceitos basilares da elastodinâmica. Complementarmente, são também apresentadas algumas das opções estratégicas adoptadas, nomeadamente no que concerne à modelação constitutiva dos solos. Sem embargo, dado o seu carácter, o Capítulo 2 pode ser lido num contexto exterior à temática da dissertação propriamente dita.

Ao primeiro dos objectivos acima referidos foi devotado um vincado esforço, bem patente nos Capítulos 3 a 6, dedicados à exposição pormenorizada dos modelos teóricos desenvolvidos, nas suas diversas componentes, objectivos e hipóteses basilares, fundamentação teórica físico-matemática, implementação numérica, aplicação e análise de resultados. A exposição dos assuntos segue uma orientação de crescente complexidade, iniciando-se pelos modelos semi-analíticos relativamente simples, fundamentais para a compreensão teórica dos fenómenos, e culminando nos modelos numéricos tridimensionais baseados nos métodos dos elementos finitos e dos elementos de contorno, ambos formulados no domínio 2.5D. Com vista ao melhor discernimento dos fenómenos dinâmicos em estudo, a introdução dos modelos é sucedida, na generalidade dos casos, pela sua validação teórica e por estudos paramétricos concebidos tendo em vista o esclarecimento da influência dos diferentes parâmetros intervenientes.

Dadas as dificuldades inerentes à modelação numérica tridimensional de problemas dinâmicos envolvendo meios de grande dimensão, no Capítulo 3 apresentam-se duas formulações alternativas que permitem analisar a resposta dinâmica de maciços geotécnicos genéricos, embora com algumas restrições de ordem geométrica, submetidos a acções dinâmicas com posição geométrica fixa ou móvel: i) o método das matrizes de transferência; ii) o método dos “estratos finos”. No caso presente, estas metodologias, implementadas na plataforma Matlab 2009 e recorrendo a técnicas de computação paralela, conduzem a níveis de eficiência computacional consideráveis. Elas foram usadas para a discussão do efeito da velocidade de circulação de cargas verticais aplicadas à superfície na resposta dinâmica dos maciços. O estudo paramétrico efectuado permitiu evidenciar uma acentuada diferença comportamental da resposta consoante a velocidade de circulação é superior ou inferior à velocidade das ondas R, no caso de meios homogéneos semi-indefinidos. No caso de maciços estratificados, essa diferença comportamental é esclarecida pela análise da relação de dispersão P-SV: verificou-se a existência de pelo menos uma velocidade crítica à qual está associado um fenómeno de ressonância, implicando uma forte amplificação da resposta dinâmica dos maciços. Para além disso, apresentou-se uma explicação teórica para a diferença comportamental de maciços normalmente dispersivos e inversamente dispersivos, tendo-se demonstrado a existência de pelo menos duas velocidades críticas no último caso.

A introdução da modelação numérica da via férrea por métodos semi-analíticos é efectuada no Capítulo 4. São desenvolvidas diferentes formulações consoante se trate de vias férreas balastradas ou não balastradas. Os modelos computacionais apresentam elevada eficiência e permitem atender à interacção dinâmica via-macizo de fundação através de concepções distintas, procurando-se uma maior adequabilidade à realidade física concreta.

Desenvolveu-se um estudo paramétrico com duas vertentes: i) escrutínio da influência das propriedades dos constituintes da via férrea balastrada na sua resposta dinâmica e na propagação de vibrações; ii) estudo das velocidades críticas do sistema via-macizo e esclarecimento da influência das propriedades mecânicas da primeira na resposta global.

A primeira parte do estudo paramétrico permitiu clarificar a influência dos diversos elementos nas frequências naturais do sistema compreendidas entre 0 Hz e 400 Hz. Para além disso, verificou-se que as propriedades das camadas granulares (espessura e deformabilidade) que integram a via férrea assumem uma especial importância na gama das frequências mais baixas, tanto no que compreende a resposta da via férrea, como no que se refere às vibrações a alguma distância desta. Um outro aspecto importante diz respeito à influência da estratificação e das propriedades

mecânicas dos maciços de fundação sobre a dinâmica da própria via, demonstrando-se, assim, que, para o estudo desta dinâmica, são necessários modelos que integrem a dinâmica do maciço de fundação, em detrimento dos modelos do tipo “fundação de Winkler”.

Relativamente ao estudo das velocidades críticas, procedeu-se a uma análise combinada em que se discute a influência de cenários geotécnicos distintos (não dispersivos, normalmente dispersivos ou inversamente dispersivos) e de vias com diferente rigidez, tendo sido evidenciada a importância da rigidez de flexão da via férrea, bem como do cenário geotécnico.

Baseada no trabalho original de Sheng et al. [185], é proposta uma metodologia simplificada para a estimativa da velocidade crítica mais baixa do sistema via-macício, que se revela extremamente eficiente e eficaz. Essa metodologia, acompanhada pelo cálculo dos coeficientes de amplificação dinâmica de deslocamentos, permitiu constatar que em maciços não dispersivos apenas há lugar a uma velocidade crítica, próxima da velocidade de propagação das ondas R e praticamente independente das propriedades mecânicas da via férrea. Conclusão semelhante foi também obtida para maciços inversamente dispersivos. Porém, no caso de maciço normalmente dispersivos, verifica-se uma influência significativa das propriedades dinâmicas da via férrea, sendo possível incrementar de forma considerável o valor em causa através de uma acção criteriosa sobre as propriedades dinâmicas da via, nomeadamente por recurso ao aumento da sua rigidez de flexão longitudinal.

Atendendo às conclusões do Capítulo 4, nomeadamente sobre a influência das camadas granulares da via férrea e dos aterros, caso existam, entendeu-se pertinente o desenvolvimento de modelos numéricos que permitissem a sua consideração de forma mais realista. Sem embargo, foi tido como imprescindível garantir uma eficiência computacional aceitável, de modo a não tornar as análises proibitivas. Os correspondentes modelos, desenvolvidos tendo presente os objectivos e condicionalismos enunciados, são apresentados no Capítulo 5. Trata-se de modelos formulados no domínio 2.5D e baseados nos métodos dos elementos finitos (MEF) e dos elementos de contorno (MEC), mais versáteis que os anteriores, não sujeitos às mesmas restrições de ordem geométrica, designadamente no que toca à secção transversal.

Visto que o MEF está vocacionado para a análise de meios circunscritos, foi dedicado algum esforço à implementação de metodologias locais de tratamento das fronteiras artificiais e, conseqüentemente, à exploração das potencialidades do método, assim melhorado, para a simulação de meios infinitos. Concluiu-se que o método dos elementos infinitos apresenta uma acuidade substancialmente superior às das metodologias baseadas no conceito de fronteiras viscosas.

Com o objectivo de, por um lado, melhorar a eficiência computacional na análise da propagação de vibrações e, por outro, eliminar o problema das reflexões espúrias nas fronteiras artificiais, é proposto um modelo baseado no acoplamento MEF-MEC: a parte irregular do meio, ou seja a via e o aterro, é simulada por recurso ao MEF, enquanto o maciço estratificado é simulado através do MEC. Tratando-se de uma metodologia híbrida MEF-MEC, consegue-se uma elevada eficiência computacional através da substruturação do domínio, que é ainda aumentada usando-se o esquema computacional que é proposto para a análise de estruturas com simetria geométrica e mecânica.

Atendendo à especificidade dos problemas analisados, a interacção dinâmica veículo-via assume especial relevância. Esta temática é objecto de estudo no Capítulo 6, onde se apresenta um modelo computacional, concebido como um módulo independente, que permite atender à dinâmica do veículo e sua interacção com a via férrea. Após a descrição da problemática e do formalismo matemático inerente ao modelo, são expostos os resultados de um estudo da influência da velocidade de circulação, da qualidade do nivelamento longitudinal da via férrea e da estratégia de modelação adoptada para o veículo. Com base nesse estudo retiram-se as seguintes conclusões principais: i) a resposta da via férrea é dominada, essencialmente, pelo mecanismo de excitação quasi-estático, podendo por isso o comboio ser substituído, ainda que de forma simplificada, pelo conjunto de forças móveis concordante com a distribuição do peso pelos vários eixos; ii) a resposta dinâmica na vizinhança da via é condicionada pelo mecanismo de excitação dinâmica, sendo imperativo a consideração da interacção veículo-via na análise; iii) ao incremento da velocidade de circulação está associado um aumento significativo das forças de interacção dinâmica veículo-via; iv) como expectável, quanto menor for a qualidade da via férrea mais elevadas são as forças de interacção dinâmica; v) a interacção dinâmica entre os diferentes eixos do comboio toma proporções não desprezáveis; vi) a dinâmica do sistema acoplado veículo-via é muito influenciada pelas massas não suspensas do veículo; sem embargo, a modelação dos veículos deve atender, pelo menos, às massas não suspensas e semi-suspensas, bem como à suspensão primária; vii) a adopção de modelos de veículo considerando apenas às massas não suspensas conduz a perdas de acuidade assinaláveis, principalmente na gama das baixas frequências ( $f < 20$  Hz).

Os Capítulos 7 e 8 são dedicados à validação experimental dos modelos numéricos, cobrindo ambas as vertentes em estudo, ou seja, a problemática da circulação a velocidades próximas da velocidade crítica (Capítulo 7) e a modelação dos campos de vibração induzidos pela passagem dos comboios (Capítulo 8). Nos estudos correspondentes deu-se preferência aos modelos numéricos introduzidos no Capítulo 5, em detrimento dos mais simples apresentados em

capítulos antecedentes, tirando-se, assim, partido das potencialidades oferecidas pela modelação 2.5D (no contexto da presente dissertação os modelos simplificados são relegados para um plano de análise prévia e de interpretação fenomenológica).

No Capítulo 7 revisita-se o famoso caso de estudo de Ledsgard, que constitui um dos poucos cenários documentados em que a velocidade de circulação dos comboios atingiu valores muito próximos da velocidade crítica do sistema via-macijo. O estudo efectuado em torno deste caso permitiu provar que os efeitos da não linearidade material têm uma relevância significativa quando a velocidade de circulação se aproxima da velocidade crítica. Para se poder concretizar esse estudo, desenvolveu-se uma metodologia inovadora, baseada no método dos elementos finitos 2.5D e na linearização equivalente das propriedades dos materiais interessados, a qual permite atender de forma eficaz aos efeitos que a não linearidade material acarreta sobre a resposta do meio. A aderência entre os resultados experimentais e os resultantes da aplicação da metodologia proposta evidenciam a adequabilidade e acuidade desta.

Os estudos experimentais levados a cabo no decurso da dissertação encontram-se sumariados no Capítulo 8, comportando, por um lado, a descrição das tarefas associadas ao desenvolvimento de um campo experimental em território nacional e, por outro lado, a colecção de um largo conjunto de medições visando a validação experimental do modelo numérico baseado no acoplamento 2.5D MEF-MEC. No campo experimental do Carregado, concebido, implementado e explorado no âmbito da presente dissertação, foram desenvolvidas várias actividades experimentais que, em síntese, podem ser agrupada da seguinte forma: i) um conjunto inicial de pequenas experiências com vista à caracterização elastodinâmica do meio, constituído pela via e pelo macijo de fundação, bem como das irregularidades geométricas da via férrea; ii) a medição da resposta da via e superfície do macijo de fundação durante a passagem de comboios de diferentes tipologias.

A experimentação realizada com vista à caracterização do meio revelou-se essencial para uma boa percepção da resposta induzida pelo tráfego ferroviário. Concluiu-se nomeadamente que, apesar do esforço alocado a esta tarefa, é necessário um aprofundamento das técnicas para a avaliação do amortecimento dos macijos geotécnicos e, muito provavelmente, também dos modelos teóricos para a sua descrição. Por outro lado, o algoritmo de inversão desenvolvido para a análise da receptância da via mostrou-se robusto e eficiente, constituindo uma ferramenta útil para a condução de ensaios de receptância.

Por último, a validação experimental do modelo 2.5D MEF-MEC, atendendo à interacção veículo-via, constitui um dos objectivos da presente dissertação alcançados com sucesso. Não só foi possível obter uma concordância muito boa ao nível da resposta da via férrea, tanto em termos

de deslocamentos verticais do carril, como em termos de velocidade da travessa, como também se constatou um nível de proximidade entre a resposta simulada e a medida na superfície do terreno muito apreciável, mesmo em pontos afastados mais de 40 m em relação à via férrea. A este respeito, saliente-se a necessidade de ajuste do perfil de amortecimento do maciço, aspecto ao qual se pretende dedicar uma atenção particular em trabalhos futuros. Para além do bom ajuste encontrado entre os resultados da simulação e a realidade física medida, foi também possível constatar que a evidência experimental vai ao encontro de muitas das observações e conclusões retiradas dos estudos paramétricos apresentados em capítulos precedentes, nomeadamente no que se refere à importância do mecanismo de excitação quasi-estático para a resposta dinâmica da via férrea e à preponderância do mecanismo de excitação dinâmica quando se pretende avaliar a resposta induzida na vizinhança da via.

Sem prejuízo do anteriormente referido, um aspecto que, na opinião do autor, foi crucial para o sucesso alcançado na simulação do caso de estudo do Carregado, prende-se com a boa caracterização geométrica das irregularidades da via, as quais foram medidas e não geradas aleatoriamente, como é comum na generalidade dos trabalhos reportados na bibliografia.

Em jeito de síntese, entende-se que os objectivos principais que o autor se havia proposto foram cumpridos com sucesso, tendo-se obtido um conjunto de competências, tanto numéricas como experimentais, que suportam bem a continuidade da linha de investigação aberta pela presente dissertação. O facto de todos os procedimentos numéricos descritos e aplicados na dissertação terem sido desenvolvidos de raiz potencia os seus posteriores melhoramentos e contínuas adaptações aos desafios vindouros.

## **9.2 Propostas para investigação futura**

Ao longo da realização do presente trabalho foram surgindo diversas perspectivas de investigação que, não tendo sido perseguidas por limitação de tempo ou de recursos, merecem, no entender do autor, uma atenção futura. Note-se que, tratando-se de uma linha de investigação recente, mas dinâmica, alguns dos pontos seguidamente indicados correspondem a investigações já em curso à presente data, nas quais o autor se encontra envolvido.

Em suma, sugere-se que se explorem as seguintes vias de investigação, complementares ao presente estudo:

- O conjunto de modelos desenvolvidos permite atender ao mecanismo de excitação dinâmica devido às irregularidades distribuídas da via férrea. Contudo, não foram efectuadas análises do efeito das irregularidades pontuais da via ou das próprias rodas do veículo. Este aspecto deverá ser tido em atenção em investigações futuras. Além disso, o modelo de veículo deverá ser aperfeiçoado, dotando-o de carácter tridimensional e da possibilidade de consideração do eventual comportamento não linear das suspensões;
- O modelo 2.5D MEF-MEC, adequado, na sua forma actual, aos estudos desenvolvidos na presente dissertação, pode conhecer um aperfeiçoamento significativo de modo a permitir a inclusão de zonas discretizadas por elementos finitos no interior de meios descritos por elementos de contorno. Este aperfeiçoamento, seguindo os avanços recentemente obtidos por François et al. [112], permite alcançar um mais elevado patamar de versatilidade, constituindo-se como uma ferramenta eficiente para o estudo de vibrações induzidas por tráfego ferroviário tanto superficial como subterrâneo;
- Ainda no âmbito dos modelos numéricos, a inclusão de metodologias locais mais eficientes para o tratamento das fronteiras artificiais originadas pela truncatura do domínio discretizado por elementos finitos, constitui um objectivo a perseguir, tendo-se já dado passos significativos no domínio da formulação 2.5D de PML's ("Perfect Matched Layers"), especialmente concebidos para atender a solicitações com carácter móvel;
- Os modelos numéricos desenvolvidos podem ser combinados com modelos de recepção de modo a avaliar os níveis de vibração e de ruído no interior de edifícios. Com esse objectivo, formulações idênticas à apresentada por Pyl [327] podem ser generalizadas para situações de tráfego ferroviário. Alternativamente, formulações híbridas (numéricas e empíricas), em que a geração de vibrações e a sua propagação pelo terreno é avaliada numericamente e em que a interacção com as edificações é efectuada com base em funções de transferência determinadas experimentalmente (à semelhança do proposto por With e Bodare [328]), são possibilidades a explorar;
- No que concerne à eficiência computacional, aspecto importante para a resolução dos problemas abordados na presente dissertação, também se sugerem algumas melhorias. Pese embora a generalidade dos códigos desenvolvidos estejam já aptos para computação paralela, usando os recursos disponibilizados por uma *toolbox* específica do Matlab 2009, crê-se que será possível, no futuro próximo, tirar partido das potencialidades de cálculo permitidas pelo *GPU (Graphic Processing Unit)* na plataforma

Matlab. Este melhoramento computacional, já sugerido por diversos autores embora em âmbitos distintos [329, 330], permitirá diminuir drasticamente os tempos de cálculo e, conseqüentemente, a realização de estudos paramétricos mais alargados;

- No domínio da experimentação, é urgente o desenvolvimento de novas metodologias para uma melhor caracterização do amortecimento material dos solos, visto que este parâmetro toma uma relevância importante na previsão de vibrações induzidas em pontos afastados da via férrea;
- Não obstante os contributos da presente dissertação, a monitorização de vias férreas de alta-velocidade constitui um objectivo que, não sendo viável em território nacional à presente data, se pretende concretizar no futuro próximo;
- Relativamente à caracterização dos veículos, o presente trabalho não contemplou a avaliação experimental das propriedades dinâmicas deste importante constituinte do sistema veículo - via - maciço de fundação. Esta questão deverá ser atendida no futuro, sendo de enfatizar a importância da caracterização experimental não só de comboios de passageiros, como também dos de mercadorias. A propagação de vibrações induzidas pelo tráfego de comboios de mercadorias é um aspecto que se julga importante considerar no futuro;
- A conjugação de modelos empíricos, como o proposto pela Federal Railroad Administration [3], com os resultados provenientes dos modelos numéricos, nomeadamente através da simulação de grandezas que não sejam mensuráveis previamente à implementação de novas vias férreas, constitui uma possibilidade interessante na medida em que se julga ser possível, por essa forma, minimizar algumas das incertezas associadas a aspectos particulares dos locais em estudo. A este respeito, deve ser prestada atenção ao muito recente trabalho apresentado por Verbraken et al. [331];
- Por último, pese embora tenham sido realizados diversos estudos paramétricos no decurso da dissertação, não foi dedicada atenção às questões relacionadas com a mitigação de efeitos perniciosos induzidos pelo tráfego. A este respeito entende-se ser útil a realização de estudos paramétricos direccionados para a análise da eficiência de medidas de mitigação de vibrações, sendo desejável, sempre que possível, a validação experimental desses estudos.



# ANEXO 3.1

## Configuração das matrizes [A], [R], [S]

A configuração das matriz  $[A(k_1=0, k_2=k_3, \omega)]_j^{\text{sup}}$ , função de  $k_3$ ,  $\omega$  e das propriedades do estrato (ver secção 3.3.4) é dada por:

$$[A]_j^{\text{sup}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{ik_3}{k_{p,j}^2} & 0 & 1 & -\frac{ik_3}{k_{p,j}^2} & 0 & 1 \\ -\frac{\beta_{p,j}}{k_{p,j}^2} & 0 & -\frac{ik_3}{\beta_{s,j}} & -\frac{r_{p,j}}{k_{p,j}^2} & 0 & \frac{ik_3}{\beta_{s,j}} \\ 0 & \beta_{s,j}\mu_j & 0 & 0 & -\beta_{s,j}\mu_j & 0 \\ -\frac{2i\mu_j\beta_{p,j}}{k_{p,j}^2} & 0 & \mu_j\left(\frac{k_3^2}{\beta_{s,j}} + \beta_{s,j}\right) & \frac{2i\mu_j\beta_{p,j}}{k_{p,j}^2} & 0 & -\mu_j\left(\frac{k_3^2}{\beta_{s,j}} + \beta_{s,j}\right) \\ -\frac{\mu_j(k_{s,j}^2 + 2\beta_{s,j}^2)}{k_{p,j}^2} & 0 & -2i\mu_j k_3 & -\frac{\mu_j(k_{s,j}^2 + 2\beta_{s,j}^2)}{k_{p,j}^2} & 0 & -2i\mu_j k_3 \end{bmatrix} \quad [\text{A3.1.1}]$$

Note-se que:

$$k_3 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad [\text{A3.1.2}]$$

$$k_p = \frac{\omega}{C_p} \quad [\text{A3.1.3}]$$

$$k_s = \frac{\omega}{C_s} \quad [\text{A3.1.4}]$$

$$\beta_s = \sqrt{k_3^2 - k_s^2} \quad [\text{A3.1.5}]$$

$$\beta_p = \sqrt{k_3^2 - k_p^2} \quad [\text{A3.1.6}]$$

$\mu_j$  e  $\lambda_j$  são as constantes de Lamé (complexas no caso de existência de amortecimento material) do estrato  $j$  e  $h_j$  é a respectiva espessura.

Relativamente às matrizes  $[R(k_1=0, k_2=k_3, \omega)]$  e  $[S(k_1=0, k_2=k_3, \omega)]$ , a sua configuração é a seguinte:

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{ik_3}{k_{p,n+1}^2} & 0 & 1 \\ \frac{\beta_{p,n+1}}{k_{p,n+1}^2} & 0 & \frac{ik_3}{\beta_{s,n+1}} \end{bmatrix} \quad [A3.1.7]$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_{n+1}\beta_{s,n+1} & 0 \\ \frac{2ik_3\mu_{n+1}\beta_{p,n+1}}{k_{p,n+1}^2} & 0 & -\frac{\mu_{n+1}(k_3^2 + \beta_{s,n+1}^2)}{\beta_{s,n+1}} \\ \lambda_{n+1} - 2\mu_{n+1}\frac{\beta_{p,n+1}^2}{k_{p,n+1}^2} & 0 & -2i\mu_{n+1}k_3 \end{bmatrix} \quad [A3.1.8]$$

A simbologia agora utilizada está em correspondência com a indicada para a matriz  $[A]_j^{\text{sup}}$ .

Nos casos em que a frequência seja nula, então as matrizes anteriores tomam a seguinte configuração:

$$[A]_j^{\text{sup}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\lambda_j + 3\mu_j}{2}\beta_{p,j}\mu_j & 0 & -\frac{ik_3}{\beta_{s,j}} & -\frac{\lambda_j + 3\mu_j}{2}\beta_{p,j}\mu_j & 0 & \frac{ik_3}{\beta_{s,j}} \\ 0 & \beta_{s,j}\mu_j & 0 & 0 & -\beta_{s,j}\mu_j & 0 \\ i\frac{\mu_j k_3}{\beta_{p,j}} & 0 & \mu_j \left( \frac{k_3^2}{\beta_{s,j}} + \beta_{s,j} \right) & -i\frac{\mu_j k_3}{\beta_{p,j}} & 0 & -\mu_j \left( \frac{k_3^2}{\beta_{s,j}} + \beta_{s,j} \right) \\ \lambda_j + 2\mu_j & 0 & -2i\mu_j k_3 & \lambda_j + 2\mu_j & 0 & -2i\mu_j k_3 \end{bmatrix} \quad [A3.1.9]$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_{n+1} + 3\mu_{n+1}}{2\beta_{p,n+1}\mu_{n+1}} & 0 & \frac{ik_3}{\beta_{s,n+1}} \end{bmatrix} \quad [A3.1.10]$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_{n+1}\beta_{s,n+1} & 0 \\ -\frac{ik_3\mu_{n+1}}{\beta_{p,n+1}} & 0 & -\frac{\mu_{n+1}(k_3^2 + \beta_{s,n+1}^2)}{\beta_{s,n+1}} \\ \lambda_{n+1} + 2\mu_{n+1} & 0 & -2i\mu_{n+1}k_3 \end{bmatrix} \quad [A3.1.11]$$

## ANEXO 3.2

---

### Determinação de relações de dispersão

À semelhança do comportamento dinâmico estrutural de uma estrutura com dimensão finita, também para o maciço geotécnico podem ser definidas as suas características de vibração livre, ou seja, as frequências naturais e os modos de vibração, que no presente caso se designam por curvas de dispersão e modos de vibração. No presente trabalho a determinação da configuração dos modos de vibração não é essencial, razão pela qual a atenção é focada apenas na determinação das curvas de dispersão.

Num meio elástico, estratificado, isotrópico e semi-indefinido, dois tipos de modos podem ter particular interesse: os modos SH e os modos P-SV. Note-se que a vibração livre do maciço implica que haja uma dependência entre a frequência de vibração e o comprimento da onda propagada (ou o número de onda). Tratando-se de uma vibração livre não há lugar à imposição de acções exteriores, como tal a solução passa pela resolução de um problema de valores próprios. Visto que a propagação de ondas SH e P-SV ocorre de forma desacoplada, ambos os problemas podem ser resolvidos de forma isolada.

Existem actualmente diversas metodologias para o cálculo das relações de dispersão do maciço [9, 21, 46, 332]. No presente trabalho recorre-se à formulação das matrizes de transferência, tal como sugerido por Sheng [185].

Seguindo o formalismo adoptado na dedução da matriz de flexibilidade (ver secção 3.4.3.4), é estabelecida a seguinte relação entre deslocamentos ( $u_0$ ) e pressões ( $p_0$ ) aplicadas à superfície do terreno:

$$([R][S]^{-1}[T_{21}] - [T_{11}])\{\tilde{u}_0\} = ([T_{12}] - [R][S]^{-1}[T_{22}])\{\tilde{p}_0\} \quad [A3.2.1]$$

Uma vez que a vibração livre impõe que as pressões aplicadas ao terreno sejam nulas, então:

$$([R][S]^{-1}[T_{21}] - [T_{11}])\{\tilde{u}_0\} = 0 \quad [A3.2.2]$$

Abstraindo as soluções triviais, para o sistema de equações seja resolúvel é então necessário que:

$$\det([K(k_1, k_2, \omega)]) = 0 \quad [A3.2.3]$$

em que  $[K]$  é a matriz de rigidez dinâmica dada por:

$$[K(k_1, k_2, \omega)] = [R][S]^{-1}[\tau_{21}] - [\tau_{11}] \quad [A3.2.4]$$

No caso tridimensional, a matriz de rigidez dinâmica depende de  $k_1$ , de  $k_2$  e de  $w$ . Contudo, fazendo uso das propriedades de simetria e antissimetria (ver secção 3.4.4), é possível estabelecer a seguinte relação:

$$[K(k_1, k_2, \omega)] = \begin{bmatrix} \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ -\cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [K(0, k_3, \omega)] \begin{bmatrix} \sin\phi & -\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A3.2.5]$$

Em que,

$$k_3 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad \text{e} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right) \quad [A3.2.6]$$

Logo a equação [A3.2.3] reduz-se a:

$$\det([K(0, k_3, \omega)]) = 0 \quad [A3.2.7]$$

em que:

$$K(0, k_3, \omega) = \begin{bmatrix} k_{11}(0, k_3, \omega) & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}(0, k_3, \omega) & k_{23}(0, k_3, \omega) \\ 0 & k_{32}(0, k_3, \omega) & k_{33}(0, k_3, \omega) \end{bmatrix} \quad [A3.2.8]$$

Atendendo ao sistema de equações definido em [A3.2.3], as relações de dispersão são dadas por:

$$k_{11} = 0 \quad [A3.2.9]$$

e

$$k_{22}k_{33} - k_{32}k_{23} = 0 \quad [A3.2.10]$$

A equação [A3.2.9] define a relação de dispersão SH enquanto a [A3.2.10] refere-se à relação de dispersão P-SV.

Como se compreende, a resolução é complexa, implicando a imposição de uma dada frequência e a determinação dos números de onda  $k_3$  correspondentes através da resolução da equação [A3.2.9] ou [A3.2.10], consoante se pretenda a relação de dispersão SH ou P-SV.

# ANEXO 4

## Relação de dispersão da via férrea

À semelhança do apresentado para o maciço, também é possível definir a relação de dispersão da via férrea, ou seja, a relação entre comprimentos de onda propagantes e frequência de excitação. No contexto apresentado no Capítulo 4, é considerada a propagação de ondas numa via sem qualquer constrangimento de deformação no seu plano inferior, isto é, considerando nula a rigidez do terreno subjacente.

Na ausência de forças exteriores aplicadas, a vibração livre da via é dada por:

$$[K]\{u\} = 0 \quad [A4. 1]$$

em que  $[K]$  é a matriz de rigidez da via e  $\{u\}$  é o vector que colige o deslocamento vertical dos graus de liberdade da via.

Abstraindo a solução trivial, a equação [3.52] só é admissível caso:

$$\det([K]) = 0 \quad [A4. 2]$$

A matriz de rigidez da via balastrada é dada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} EIk_1^4 + k_p^* - \omega^2 m_r & -k_p^* & 0 \\ -k_p^* & k_p^* + \frac{2\omega E_b^* b\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{C_p} h\right) C_p} - \omega^2 m_s & -\frac{2\omega E_b^* b\alpha}{\sin\left(\frac{\omega}{C_p} h\right) C_p} \\ 0 & -\frac{2\omega E_b^* b\alpha}{\sin\left(\frac{\omega}{C_p} h\right) C_p} & \frac{2\omega E_b^* b\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{C_p} h\right) C_p} \end{bmatrix} \quad [A4. 3]$$

enquanto para a via não balastrada toma a seguinte configuração:

$$[K] = \begin{bmatrix} EI_r k_1^4 + k_p^* - \omega^2 m_r & -k_p^* \\ -k_p^* & k_p^* + EI_l k_1^4 - \omega^2 m_l \end{bmatrix} \quad [A4. 4]$$

A determinação da relação de dispersão é efectuada através da resolução da equação [A4. 2], impondo um dado valor de  $\omega$ . A resolução desta condição dá origem a oito raízes admissíveis (valores de  $k_1$  compatíveis com [A4. 2]). Caso o amortecimento seja nulo, duas dessas raízes são puramente reais; outras duas são puramente imaginárias, ao passo que as restantes são entidades complexas. No contexto apresentado no Capítulo 4, apenas a raiz real positiva constitui solução interessante.

Na presença de amortecimento, nenhuma raiz é puramente real, contudo a solução interessante para o problema em causa corresponde à raiz com parte real positiva e menor valor absoluto da parte imaginária.

# ANEXO 5

## Esquema de integração em elementos infinitos periódicos

A integração em elementos infinitos periódicos é efectuada seguindo procedimentos numéricos distintos consoante a direcção de integração, isto é, a direcção finita e a direcção infinita. No presente trabalho, a integração na direcção finita é efectuada com base no esquema de integração de Gauss-Legendre, ao passo que na direcção infinita é adoptado o esquema de integração de Newton-Cotes.

Recordando a operação de integração do tipo:

$$\int_{-10}^{+10} \int f(\xi, \eta) e^{-(\varphi-i\beta)\xi} d\xi d\eta \quad [\text{A5.1}]$$

O esquema adoptado recorre a 8 pontos de integração, sendo:

$$\int_{-10}^{+10} \int f(\xi, \eta) e^{-(\varphi-i\beta)\xi} d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 W_{\eta_i} W_{\xi_j} f(\xi_i, \eta_j) \quad [\text{A5.2}]$$

em que os pesos e coordenadas dos pontos de integração são dados por:

	$\eta_1 = -1/3^{0.5}$	$\eta_2 = 1/3^{0.5}$
$\xi_1 = 2$	$W_{\eta_1} = 1; W_{\xi_1} = (96\gamma - 52\gamma^2 + 18\gamma^3 - 3\gamma^4)/24$	$W_{\eta_2} = 1; W_{\xi_1} = (96\gamma - 52\gamma^2 + 18\gamma^3 - 3\gamma^4)/24$
$\xi_2 = 4$	$W_{\eta_1} = 1; W_{\xi_2} = (-48\gamma + 38\gamma^2 - 16\gamma^3 + 3\gamma^4)/8$	$W_{\eta_2} = 1; W_{\xi_2} = (-48\gamma + 38\gamma^2 - 16\gamma^3 + 3\gamma^4)/8$
$\xi_3 = 6$	$W_{\eta_1} = 1; W_{\xi_3} = (32\gamma - 28\gamma^2 + 14\gamma^3 - 3\gamma^4)/8$	$W_{\eta_2} = 1; W_{\xi_3} = (32\gamma - 28\gamma^2 + 14\gamma^3 - 3\gamma^4)/8$
$\xi_4 = 8$	$W_{\eta_1} = 1; W_{\xi_4} = (-24\gamma + 22\gamma^2 - 12\gamma^3 + 3\gamma^4)/24$	$W_{\eta_2} = 1; W_{\xi_4} = (-24\gamma + 22\gamma^2 - 12\gamma^3 + 3\gamma^4)/24$

em que:

$$\gamma = \frac{\varphi + i\beta}{\varphi^2 + \beta^2} \quad [\text{A5.3}]$$





# Bibliografia

---

1. Barron de Angoiti, I., *High speed rail: development around the world*, in *Noise and vibration on high-speed railways*, R. Calçada, et al., Editors. 2008: Porto. p. 1-14.
2. Barron de Angoiti, I., *High speed rail: a global perspective*, in *Tunnels for high-speed railways*, R. Calçada, et al., Editors. 2009: Porto. p. 1-15.
3. Hansen, H.M.M., *High-speed ground transportation. Noise and vibration impact assessment* Report. 2005, Federal Railroad Administration.
4. Standard, I., *Mechanical vibration — Ground-borne noise and vibration arising from rail systems*, in *ISO 14837-1* 2005.
5. Lombaert, G., G. Degrande, J. Kogut, and S. François, *The experimental validation of a numerical model for the prediction of railway induced vibrations*. *Journal of Sound and Vibration*, 2006. **297**: p. 512-535.
6. Auersch, L., *The excitation of ground vibration by rail traffic: theory of vehicle–track–soil interaction and measurements on high-speed lines*. *Journal of Sound and Vibration*, 2005. **284**: p. 103-132.
7. Dieterman, H.A. and A. Metrikine, *The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam. Critical velocities of a moving load along the beam*. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 1996. **15**(1): p. 67-90.
8. Kausel, E., *Commentaries on methods to estimate ground vibrations elicited by fast moving loads*, in *Noise and Vibration on high-speed railways*, R.D. Calçada, R.; Carvalho, A., Degrande, G., Editor. 2008: Porto.
9. Andersen, L., *Linear elastodynamic analysis*. 2007, Aalborg: Aalborg University.
10. Alves Costa, P., R. Calçada, A. Cardoso, and A. Bodare, *Influence of soil non linearity on the dynamic response of high speed railway lines*, in *COMPdyn 2009*. 2009: Rhodes.
11. Ishihara, K., *Soil behavior in earthquake geotechnics*. 1996: Oxford University Press.
12. Hall, J. and F. Richart, *Dissipation of elastic wave energy in granular soils*. *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, 1963. **89**(6): p. 27-56.
13. Santos, J., *Caracterização de solos através de ensaios dinâmicos e cíclicos de torção. Aplicação ao estudo do comportamento sob acções horizontais estáticas e dinâmicas*, Tese de Doutoramento. 1999, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa. Lisboa.
14. Kramer, S., *Geotechnical earthquake engineering*. 1996, New Jersey: Prentice-Hall.
15. Kirkgard, M.M. and P.V. Lade, *Anisotropy of normally consolidated San Francisco Bay mud*. *Geotechnical Testing Journal*, 1991. **14**(3): p. 231-246.
16. Gazetas, G., *Strip foundation on a cross-anisotropic soil layer subjected to dynamic loading* *Géotechnique*, 1981. **31**(2): p. 161-179.
17. Gazetas, G., *Stresses and displacements in cross-anisotropic soils*. *Journal of the Geotechnical Engineering Division* 1982. **108**: p. 532-553.
18. Kausel, E., *Fundamental of Waves Propagation*, in *Advanced Soil Dynamics*. 2008.
19. Miller, G.F. and H. Pursey, *The field and radiation of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid*. *Proceedings of the Royal Society*, 1954. **A223**: p. 521-541.
20. Miller, G.F. and H. Pursey, *On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid*. *Proceedings of the Royal Society*, 1954. **A223**: p. 55-69.
21. Degrande, G., *HCO1 Seismic wave propagation - Course notes*. 2006, Leuven: Katholieke Universiteit Leuven.

22. Achenbach, J.D., *Wave propagation in elastic solids*. Vol. 16. 1973, North-Holland: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics.
23. Schevenels, M., *The impact of uncertain dynamic soil characteristics on the prediction of ground vibrations*, PhD thesis. 2007, Departement Burgerlijke Bouwkunde, Katholieke Universiteit Leuven. Leuven.
24. Kulhánek, O., *Time Series Analysis - Lecture Notes*. 1995, Uppsala: Uppsala University.
25. Chapman, C., *Fundamentals of Seismic Wave Propagation*. 2004, Cambridge: Cambridge University Press.
26. Aki, K. and P. Richards, *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. 1980, San Francisco: W.H. Freeman.
27. Foti, S., *Multistation Methods for Geotechnical Characterization using Surface Waves*, PhD thesis. 2000, Politecnico di Torino. Torino.
28. Lamb, H., *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid*. Philosophical Transaction of the Royal Society, 1904. **203**(Serie A): p. 1-42.
29. Richart, P., R. Woods, and J. Hall, *Vibrations of Soils and Foundations*. 1970, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
30. Kim, D. and J. Lee, *Propagation attenuation characteristics of various ground vibrations*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2000. **19**: p. 115-126.
31. Auersch, L. and S. Said, *Attenuation of ground vibrations due to different technical sources*. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2010. **9**(3): p. 338-344.
32. Faria, R., *Avaliação do Comportamento Sísmico de Barragens de Betão através de um Modelo de Dano Contínuo*, PhD. 1994, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto.
33. Wolf, J.P., *Dynamics soil-structure interaction*. 1985, New Jersey: Prentice Hall.
34. Heelis, M. and A. Gomes Correia, *Transient response of soft soil to loading by high speed trains*, Report. 1998, CEGEO-IST, Instituto Superior Técnico.
35. Hardin, B., *The nature of damping in sands*. Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, 1965. **91**: p. 63-97.
36. Verruijt, A., *Dynamic of soils with hysteretic damping*, in *Geotechnical Engineering for Transportation Infrastructure*, B.e. al., Editor. 1999, Balkema.
37. Kausel, E., *Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media*, Report. 1974, R.R. R74-11, MIT.
38. Hardin, B. and V. Drnevich, *Shear Modulus and Damping in Soils: Measurement and Parameter Effects (Terzaghi Lecture)*. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, 1972. **98**(6): p. 603-624.
39. Barkan, D., *Dynamics of bases and foundations*. 1962, New York: McGraw Hill Co.
40. Degrande, G. and L. Shillemans, *Free fields vibrations during the passage of a Thalys high-speed train at variable speed*. Journal of Sound and Vibration, 2001. **247**(1): p. 131-144.
41. Galvín, P., *Análisis numérico y experimental de las vibraciones ocasionadas por el paso de trenes de alta velocidad en el suelo y en estructuras cercanas a la vía*, Tese de Doutoramento. 2007, Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Universidad de Sevilla. Sevilla.
42. Wang, J., X. Zeng, and D.A. Gasparini, *Dynamic response of high-speed rail foundations using linear hysteretic damping and frequency domain substructuring*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 2008. **24**(4): p. 258-276.
43. Nakamura, N., *Practical causal hysteretic damping*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2008. **36**: p. 597-617.
44. Tsai, H. and T. Lee, *Dynamic analysis of linear and bilinear oscillators with rate-independent damping*. Computers and Structures, 2002. **80**: p. 155-164.
45. Feriani, A. and F. Perotti, *The formation of viscous damping matrices for the dynamic analysis of MDOF system*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1996. **25**: p. 689-709.

46. Sheng, X., *Ground Vibrations Generated from Trains*, PhD thesis. 2001, Faculty of Engineering and Applied Science, University of Southampton. Southampton.
47. Degrande, G., G. Roeck, and P. Broeck, *Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media*. International Journal of Solids and Structures, 1998. **35**(34-35): p. 4753-4778.
48. Schanz, M., *Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods*. Applied Mechanics Reviews, 2009. **62**(3): p. doi:10.1115/1.3090831
49. Biot, M., *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II. Low-frequency range*. Journal of the Acoustical Society of America, 1956. **28**(2): p. 168-178.
50. Biot, M., *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II. High-frequency range*. Journal of the Acoustical Society of America, 1956. **28**(2): p. 179-191.
51. Jin, B., *Dynamic displacements of an infinite beam on a poroelastic half space due to a moving oscillating load*. Archive of Applied Mechanics, 2004. **74**: p. 277-287.
52. Bin, X., L. Jian-Fei, and W. Jian-Hua, *Dynamic response of a layered water-saturated half space to a moving load*. Computers & Geotechnics, 2007.
53. Cai, Y., H. Sun, and C. Xu, *Response of railway track system on poroelastic half-space soil medium subjected to a moving train load*. International Journal of Solids and Structures, 2008.
54. Kettil, P., B. Lenhof, K. Runesson, and N. Wiberg, *Coupled simulation of wave propagation and water flow in soil induced by high-speed trains*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2007.
55. Jin, B. and L. Tham, *Stresses and excess pore pressure induced in saturated poroelastic halfspace by moving line load*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2004. **24**: p. 25-33.
56. Sun, H., Y. Cai, and C. Xu, *Three-dimensional simulation of track on poroelastic half-space vibrations due to a moving point load* Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010. **30**(10): p. 958-967.
57. Schevenels, M., G. Degrande, and G. Lombaert, *The influence of the depth of the ground water table on free field road traffic-induced vibrations*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2004. **28**: p. 395-419.
58. Garg, S., A. Nayeh, and J. Good, *Compressional waves in fluid-saturated elastic porous media*. Journal of Applied Physics, 1974. **45**(5): p. 1968-1974.
59. Berryman, J., *Elastic waves in fluid-saturated porous media* in *Macroscopic Properties of Disordered Media*, R. Burridge, S. Childress, and G. Papanicolaou, Editors. 1982, Springer-Verlag: Berlin.
60. Haskell, N., *The dispersion of surface waves on multilayered medium*. Bulletin of the Seismological Society of America, 1953. **73**: p. 17-43.
61. Thomson, W., *Transmission of elastic waves through a stratified solid medium*. Journal of Applied Physics, 1950. **21**: p. 89-93.
62. Kausel, E. and J. Roesset, *Stiffness matrices for a layered soils*. Bulletin of the Seismological Society of America, 1981. **71**(6): p. 1743-1761.
63. Sheng, X., C. Jones, and M. Petyt, *Ground vibration generated by a load moving along a railway track*. Journal of Sound and Vibration, 1999. **228**: p. 129-156.
64. Takemiya, H., *Ground vibrations alongside tracks induced by high-speed trains: prediction and mitigation*, in *Noise and Vibration from High-Speed Trains*, V. Krylov, Editor. 2001, Thomas Telford Publishing: Brighton.
65. Takemiya, H. and X. Bian, *Substructure simulation of inhomogeneous track and layered ground dynamic interaction under train passage*. Journal of Engineering Mechanics, 2005. **131**(7): p. 699-711.
66. Lombaert, G. and G. Degrande, *Ground-borne vibration due to static and dynamic axle loads of InterCity and high-speed trains*. Journal of Sound and Vibration, 2009. **319**(3-5): p.1036-1066.

67. Lombaert, G., G. Degrande, and D. Clouteau, *Numerical modelling of free field traffic-induced vibrations*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2000. **19**: p. 473-488.
68. Madshus, C. and M. Kaynia, *High-speed railway lines on soft ground: dynamic behaviour at critical train speed*. Journal of Sound and Vibration, 2000. **231**(3): p. 689-701.
69. Paolucci, R., A. Maffei, L. Scandella, M. Stupazzini, and M. Vanini, *Numerical prediction of low-frequency ground vibrations induced by high-speed trains at Ledsgard, Sweden*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003. **23**: p. 425-433.
70. Paolucci, R. and D. Spinelli, *Ground motion induced by train passage*. Journal of Engineering Mechanics, 2006. **132**(2): p. 201-210.
71. Sheng, X., C. Jones, and M. Petyt, *Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track*. Journal of Sound and Vibration, 1999. **225**: p. 3-28.
72. Vostroukhov, A., *Three-dimensional Dynamic Models of a Railway Track for High-speed Trains*, PhD thesis. 2002, Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Delft University of Technology. Delft.
73. Kausel, E., *Early history of soil-structure interaction* Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010. **30**(9): p. 822-832.
74. Ju, S. and H. Lin, *Analysis of train-induced vibrations and vibration reduction schemes above and below critical Rayleigh speeds by finite element method*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2004. **24**: p. 993-1002.
75. Galvín, P. and J. Domínguez, *Experimental and numerical analyses of vibrations induced by high-speed trains on Córdoba-Málaga line*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2009. **29**(4): p. 641-657.
76. Adam, M., G. Pflanz, and G. Schmid, *Two- and three-dimensional modelling of half-space and train-track embankment under dynamic loading*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2000. **19**: p. 559-573.
77. Hall, L., *Simulations and analyses of train-induced ground vibrations in finite element models*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003. **23**: p. 403-413.
78. Andersen, L., S. Nielsen, and S. Krenk, *Numerical methods for analysis of structure and ground vibration from moving loads*. Computers and Structures, 2007. **85**: p. 43-58.
79. Koh, C.G., G.H. Chiew, and C.C. Lim, *A numerical method for moving load on continuum*. Journal of Sound and Vibration, 2007. **300**: p. 126-138.
80. Kouroussis, G., O. Verlinden and C. Conti, *Ground propagation of vibrations from railway vehicles using a finite/infinite-element model of the soil*. Journal of Rail and Rapid Transit, 2009. **223**: p. 405-413.
81. Alves Costa, P., A. Bodare, R. Calçada, and A. Silva Cardoso. *Um modelo de análise dinâmica de maciços sujeitos a acções de tráfego: Validação experimental*. in *11<sup>o</sup> Congresso Nacional de Geotecnia*. 2008. Coimbra.
82. Grundmann, H., M. Lieb, and E. Trommer, *The response of a layered half-space to traffic loads moving along its surface* Archive of Applied Mechanics, 1999. **69**: p. 55-67.
83. Picoux, B. and D. Le Houédec, *Diagnosis and prediction of vibration from railway trains*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2005. **25**: p. 905-921.
84. Alves Costa, P., A. Bodare, R. Calçada, and A. Silva Cardoso. *Um modelo de análise dinâmica de maciços sujeitos a acções de tráfego: Implementação e validação*. in *11<sup>o</sup> Congresso Nacional de Geotecnia*. 2008. Coimbra.
85. Andersen, L. and J. Clausen, *Impedance of surface footings on layered ground*. Computers and Structures, 2008. **86**: p. 72-87.
86. Grundmann, H. and E. Trommer, *Transform methods - what can they contribute to (computational) dynamics?* Computers and Structures, 2001. **79**: p. 2097-2102.
87. Kruse, H. and K. Popp, *A modular algorithm for linear, periodic train-track models*. Archive of Applied Mechanics, 2001. **71**: p. 473-486.
88. Alves Costa, P., *Moving loads on the ground: a 2.5D transformed finite element code for train-track-soil interaction*, Report. 2008, FEUP.

89. Muller, K., *Dreidimensionale dynamische Tunnel-Halbraum-Interaktion*, PhD. 2007, Lehrstuhl für Baumechanik, Technischen Universität München. München.
90. Rastandi, J.I., *Modelization of Dynamic Soil-Structure Interaction Using Integral Transform-Finite Element Coupling*, PhD thesis. 2003, Lehrstuhl für Baumechanik, Technischen Universität München. München.
91. Ekevid, T. and N. Wiberg, *Wave propagation related to moving loads close to critical speed*, in *Wave 2000*, N. Chow and G. Schmid, Editors. 2000, Balkema: Bochum. p. 43-52.
92. Sheng, X., C. Jones, and M. Petyt, *The Fourier Transformed Stationary and Moving Dynamic Flexibility Matrices of a Layered Ground*, Report. 1999, Institute of Sound and Vibration Research.
93. Kausel, E., *Fundamental solutions in elastodynamics: a compendium*. 2006, New York: Cambridge University Press.
94. Apsel, R.J. and J.E. Luco, *On the Green's functions for a layered half space: Part II*. Bulletin of the Seismological Society of America, 1983. **73**: p. 931-951.
95. Luco, J.E. and R.J. Apsel, *On the Green's functions for a layered half space: Part I*. Bulletin of the Seismological Society of America, 1983. **73**: p. 909-929.
96. Kausel, E. and J. Park, *Response of layered half-space obtained directly in the time domain. Part II: SV-P and three-dimensional sources*. Bulletin of the Seismological Society of America, 2006. **96**(5): p. 1810-1826.
97. Park, J. and E. Kausel, *Response of layered half-space obtained directly in the time domain. Part I: SH Sources*. Bulletin of the Seismological Society of America, 2006. **96**(5): p. 1795-1809.
98. Bierer, T. and C. Bode, *A semi-analytical model in time domain for moving loads*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2007. **27**: p. 1073-1081.
99. Auersch, L., *Wave propagation in layered soils: theoretical solution in wavenumber domain and experimental results of hammer and railway traffic excitation*. Journal of Sound and Vibration, 1994. **173**(2): p. 233-264.
100. Balasubramaniam, K., *On a numerical truncation approximation algorithm for transfer matrix method*. Journal of the Acoustical Society of America, 2000. **107**(2): p. 1053-1056.
101. de Barros, F. and J. Lucos, *Response of a layered viscoelastic half-space to a moving point load*. Wave motion, 1994. **19**: p. 189-210.
102. Jones, C., O. Laghrouche, and D. Le Houédec, *Ground vibration in the vicinity of a rectangular load acting on a viscoelastic layer over a rigid foundation*. Journal of Sound and Vibration, 1997. **203**(2): p. 307-319.
103. Jones, C., D. Le Houédec, and M. Petyt, *Ground vibrations due to a rectangular harmonic load*. Journal of Sound and Vibration, 1998. **212**(1): p. 61-74.
104. Wang, R., *A Simple Orthonormalization Method for Stable and Efficient Computation of Green's Functions* Bulletin of the Seismological Society of America, 1999. **89**(3): p. 733-741.
105. Tan, E.L., *A concise and efficient scattering matrix formalism for stable analysis of elastic wave propagation in multilayered anisotropic solids*. Ultrasonics, 2003. **41**: p. 229-236.
106. Kausel, E., *An explicit solution for the green functions for dynamic loads in layered media*, Report. 1981, R.R. R81-13, MIT.
107. Lysmer, J. and G. Waas, *Shear waves in plane infinite structures*. Journal of Engineering Mechanics, 1972. **18**: p. 859-877.
108. Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor, *The Finite Element Method*. Vol. 1. 2000, Oxford: Butterworth-Heinemann.
109. Onate, E., *Structural Analysis with Finite Element Method. Linear Statics*. 2009: Springer.
110. Muller, K., *Dreidimensionale dynamische Tunnel-Halbraum-Interaktion*, PhD thesis. 2007, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München. München.
111. Grundmann, H. and J. Dinkel, *Moving oscillating loads acting on a dam over a layered half space*, in *Wave 2000*, C. Schmid, Editor. 2000, Balkema: Bochum. p. 53-70.

112. François, S., M. Schevenels, P. Galvín, G. Lombaert, and G. Degrande, *A 2.5D coupled FE–BE methodology for the dynamic interaction between longitudinally invariant structures and a layered halfspace*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010. **199**(23-24): p. 1536-1548.
113. Alberty, J., C. Carstensen, and S.A. Funken, *Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation*. *Numerical algorithms*, 1999. **20**: p. 117-137.
114. Wolf, J.P., *The Scaled Boundary Finite Element Method*. 2003: Wiley.
115. Wolf, J.P. and C. Song, *Finite-element modeling of unbounded media*. 1996, New York: Wiley.
116. Seale, S. and E. Kausel, *Point Loads in Cross-Anisotropic Layered Halfspaces*. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989. **115**(3): p. 509-524.
117. Belkeziz, A. and J.P. Magnan, *Analyse numérique de la consolidation bidimensionnelle des sols élastoplastique - Traitement par la méthode des éléments finis et application au remblai expérimental B de Cubzac-les-Ponts*, Report. 1982, LCPC.
118. Matos Fernandes, M., *Mecânica dos Solos 2006*, Porto: FEUP Edições.
119. Graham, J. and G. Houlby, *Anisotropic elasticity of a natural clay*. *Géotechnique*, 1983. **33**(2): p. 165-180.
120. Potts, D. and L. Zdravkovic, *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering*. 1999, London: Thomas Telford.
121. Rahimian, M., M. Eskandari-Ghadi, R. Pak, and A. Khojasteh, *Elastodynamic Potential Method for Transversely Isotropic Solid*. *Journal of Engineering Mechanics*, 2007. **133**(10): p. 1134-1145.
122. Caviglia, G. and A. Morro, *Wave propagation in multilayered anisotropic solids*. *International Journal of Engineering Science*, 2000. **38**: p. 847-863.
123. Jovicic, V. and M. Coop, *The measurement of stiffness anisotropy in clay with bender element test in triaxial apparatus*. *Geotechnical Testing Journal*, 1998. **21**(1): p. 3-10.
124. Pennington, D., D. Nash, and M. Lings, *Horizontally mounted bender elements for measuring anisotropic shear moduli in triaxial clay specimens*. *Geotechnical Testing Journal*, 2001. **24**(2): p. 133-144
125. Hight, D., A. Gasparre, S. Nishimura, N. Minh, R. Jardine, and M. Coop, *Characteristics of the London clay from the Terminal 5 site at Heathrow Airport*. *Géotechnique*, 2007. **57**(1): p. 3-18.
126. Gasparre, A., S. Nishimura, N. Minh, M. Coop, and R. Jardine, *The stiffness of natural London Clay*. *Geotechnique*, 2007. **57**(1): p. 33-47.
127. Lambe, T.W. and R.V. Whitman, *Soil mechanics*. 1969, New York: McGraw-Hill Book Company.
128. Oliveira, P., *Aterros sobre Solos Moles. Modelação Numérica.*, Tese de Doutoramento. 2000, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. Coimbra.
129. Pickering, D.J., *Anisotropic elastic parameters for soil*. *Géotechnique*, 1970. **20**(3): p. 271-276.
130. Eskandari-Ghadi, M., *A complete solutions of the wave equations for transversely isotropic media*. *Journal of Elasticity*, 2005. **81**(1): p. 1-19.
131. Dieterman, H.A. and A. Metrikine, *Steady-state displacements of a beam on an elastic half-space due to a uniformly moving constant load*. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 1997. **16**(2): p. 295-306.
132. Steenbergen, M. and A. Metrikine, *The effect of the interface conditions on the dynamic response of a beam on a half-space to a moving load*. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2007. **26**: p. 33-54.
133. Zhai, W. and E. Song, *Three dimensional FEM of moving coordinates for the analysis of transient vibrations due to moving loads*. *Computers and Geotechnics*, 2010. **37**(164-174).

134. Grundmann, H. and S. Lenz, *Nonlinear interaction between a moving SDOF system and a Timoshenko beam/halfspace support*. Archive of Applied Mechanics, 2003. **72**: p. 830-842.
135. Lombaert, G., *Development and Experimental Validation of a Numerical Model for the Free Field Vibrations Induced by Road Traffic*, PhD thesis. 2001, Departement Burgerlijke Bouwkunde, Katholieke Universiteit Leuven. Leuven.
136. Jones, C., X. Sheng, and D. Thompson, *Ground vibration from dynamic and quasi-static loads moving along a railway track on layered ground*, in *Wave 2000*, C. Schmid, Editor. 2000, Balkema. p. 83-97.
137. Eason, G., *The stresses produced in a semi-infinite solid by a moving surface load*. International Journal Of Engineering Sciences, 1965. **2**: p. 581-609.
138. Selig, E. and J. Waters, *Track Geotechnology and Substructure Management*. 2000, London: Thomas Telford.
139. Brandl, H., *Geotechnical aspects for high-speed railways*, in *International Seminar on Geotechnics in Pavement and Railway Design and Construction*, G.C. Loizos, Editor. 2004, Millpress: Athens. p. 117-132.
140. Burrow, M., G. Ghataora, and D. Bowness, *Analytical track substructure design*, in *International Seminar on Geotechnics in Pavement and Railway Design and Construction*, G.C. Loizos, Editor. 2004, Millpress. p. 209-216.
141. Fortunato, E., *Renovação de Plataformas Ferroviárias. Estudos relativos à capacidade de carga.*, Tese de Doutoramento. 2005, Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia Universidade do Porto. Porto.
142. Steenbergen, M., A. Metrikine, and C. Esveld, *Assessment of design parameters of a slab track railway system from a dynamic viewpoint*. Journal of Sound and Vibration, 2007. **306**: p. 361-371.
143. Knothe, K. and Y. Wu, *Receptance behaviour of railway track and sub-grade*. Archive of Applied Mechanics, 1998. **68**: p. 457-470.
144. Auersch, L., *Dynamic interaction of various beams with the underlying soil - finite and infinite, half-space and Winkler models*. European Journal of Mechanics A/Solids, 2008. **27**(5): p. 933-958.
145. Andersen, L., S. Nielsen, and R. Iwankiewicz, *Vehicle moving along an infinite beam with random surface irregularities on a kelvin foundation*. Journal of Applied Mechanics, 2002. **69**: p. 69-75.
146. Alves Costa, P., R. Calçada, and A. Cardoso, *Analytical models for dynamic analysis of track for high speed trains*, in *Applications of Computational Mechanics in Geotechnical Engineering V*, L. Sousa, et al., Editors. 2007, Taylor & Francis Group: Guimarães. p. 497-508.
147. Esveld, C., *Modern Railway Tracks*. 2001, Delft: MRT-Productions.
148. Paixão, A. and E. Fortunato, *Novas soluções de superestrutura de via para a alta velocidade ferroviária. Comparação com a via balastrada tradicional*. ICT Informação Científica. 2009, Lisboa: LNEC.
149. Oscarsson, J., *Dynamic Train-Track Interaction: Linear and Non-linear Track Models with Property Scatter*, PhD thesis. 2001, Department of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology. Goteborg.
150. Thompson, D., *Railway Noise and Vibration. Mechanisms, Modelling and Means Control* 2010: Elsevier.
151. Maes, J., H. Sol, and P.-. Guillaume, *Measurements of the dynamic railpad properties*. Journal of Sound and Vibration, 2006. **293**: p. 557-565.
152. Fenander, A., *Frequency dependent stiffness and damping of railpads*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 1997. **211**(1): p. 51-62.
153. Zhai, W., K. Wang, and J. Lin, *Modelling and experiment of railway ballast vibrations*. Journal of Sound and Vibration, 2004. **270**: p. 673-683.

154. Johansson, A., J. Nielsen, R. Bolmsvik, and A. Karlstrom, *Under sleeper pads - Influence on dynamic train-track interaction*. *Wear*, 2008. **265**: p. 1479-1487.
155. Maynar, M., *Apuntes de introducción a la Dinámica vertical de la vía y a las Senales digitales en ferrocarriles*. 2008, Madrid.
156. Bilow, D. and G. Randich, *Slab track for the next 100 years*, in AREMA. 2000: Dallas.
157. Auersch, L., *Ground vibration due to railway traffic - The calculation of the effects of moving static loads and their experimental verification*. *Journal of Sound and Vibration*, 2006. **293**: p. 599-610.
158. Remennikov, A. and S. Kaewunruen, *A review of loading conditions for railway track structures due to train and track vertical interaction*. *Structural Control and Health Monitoring*, 2007. **15**: p. 207-234.
159. Jones, C. and J. Block, *Prediction of ground vibration from freight trains*. *Journal of Sound and Vibration*, 1996. **193**(1): p. 205-213.
160. Auersch, L., *The effect of critically moving loads on vibrations of soft soils and isolated railway tracks*. *Journal of Sound and Vibration*, 2008. **310**: p. 587-607.
161. Nielsen, J. and A. Igeland, *Vertical dynamic interaction between train and track - Influence of wheel and track imperfections*. *Journal of Sound and Vibration*, 1995. **187**(5): p. 825-839.
162. Katou, M., T. Matsuoka, O. Yoshioka, Y. Sanada, and T. Miyoshi, *Numerical simulation study of ground vibrations using forces from wheels of a running high-speed train*. *Journal of Sound and Vibration*, 2008. **318**: p. 830-849.
163. Nielsen, J. and J. Oscarsson, *Simulation of dynamic train-track interaction with state-dependent track properties*. *Journal of Sound and Vibration*, 2004. **275**: p. 515-532.
164. Zimmermann, H., *Die Berechnung des Eisenbahnoberbaus*. 1888, Berlin: Ernst & Korn.
165. Kenney, J.T., *Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for a moving load*. *Journal of Applied Mechanics*, 1954. **76**: p. 359-364.
166. Kononov, A. and R. Wolfer, *Load motion along a beam on a viscoelastic half-space*. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2000. **19**: p. 361-371.
167. Kaynia, M., C. Madshus, and P. Zackrisson, *Ground vibrations from high-speed trains: prediction and countermeasure*. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2000. **126**(6): p. 531-537.
168. Takemiya, H., *Simulation of track-ground vibrations due to a high-speed train: the case of X-2000 at Ledsgard*. *Journal of Sound and Vibration*, 2003. **261**: p. 503-526.
169. Karlstrom, A. and B. Bostrom, *An analytical model for train-induced ground vibrations from trains*. *Journal of Sound and Vibration*, 2006. **292**: p. 221-241.
170. Alves Costa, P., R. Calçada, A. Silva Cardoso, and A. Bodare, *Influence of soil non-linearity on the dynamic response of high-speed railway tracks*. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2010. **30**(4): p. 221-235.
171. Vostroukhov, A. and A. Metrikine, *Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track*. *International Journal of Solids and Structures*, 2003. **40**(21): p. 5723-5752.
172. Forrest, J. and H. Hunt, *A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration*. *Journal of Sound and Vibration*, 2006. **294**: p. 678-705.
173. Knothe, K. and S. Grassie, *Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies*. *Vehicle Systems Dynamics*, 1993. **22**: p. 209-262.
174. Sheng, X., C. Jones, and D. Thompson, *Responses of infinite periodic structures to moving or stationary harmonic loads*. *Journal of Sound and Vibration*, 2005. **282**: p. 125-149.
175. Mann, A., *DYNATRACK: A survey of dynamic railway track properties and their quality*, PhD thesis. 2002, Technische Universiteit Delft. Delft.
176. Ricci, L., V. Nguyen, K. Sab, D. Duhamel, and L. Schmitt, *Dynamic behaviour of ballasted railway tracks: A discrete/continuous approach*. *Computers and Structures*, 2005. **83**: p. 2282-2292.



177. Zhai, W., K. Wang, and J. Lin, *Modelling and experiment of railway ballast vibrations*. Journal of Sound and Vibration, 2004. **270**: p. 673-683.
178. Zhang, S., X. Xiao, Z. Wen, and X. Jin, *Effect of unsupported sleepers on wheel/rail normal load*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2008. **28**(8): p. 662-673.
179. Shaer, A., D. Duhamel, K. Sab, G. Foret, and L. Schmitt, *Experimental settlement and dynamic behavior of a portion of ballasted railway track under high speed trains*. Journal of Sound and Vibration, 2008. **316**(5): p. 211-233.
180. Schmitt, L., *Track measurements in Beugnatre*, Report. 2004,
181. Chebli, H., D. Clouteau, and L. Schmitt, *Dynamic response of high-speed ballasted railway tracks: 3D periodic model and in situ measurements*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2008. **28**(2): p. 118-131.
182. Galvín, P., A. Romero, and J. Domínguez, *Vibrations induced by HST passage on ballast and non-ballast tracks*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010. **30**(9): p. 862-873.
183. Marcelino, J., *Vibrações geradas por comboios de alta velocidade. Uma Revisão*. Geotecnia, 2007. **110**: p. 75-99.
184. Heelis, M., A. Collop, A. Dawson, D. Chapman, and V. Krylov, *Transient effects of high speed trains crossing soft soil*, in *Geotechnical Engineering for Transportation Infrastructure*, B.e. al., Editor. 1999, Balkema.
185. Sheng, X., C. Jones, and D. Thompson, *A theoretical study on the influence of the track on train-induced ground vibration*. Journal of Sound and Vibration, 2004. **272**: p. 909-936.
186. Ju, S. and H. Lin, *Experimentally investigating finite element accuracy for ground vibrations induced by high-speed trains*. Engineering Structures, 2008. **30**: p. 733-746.
187. Takemiya, H., *Field vibration mitigation by honeycomb WIB for pile foundations of a high-speed train viaduct*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2004. **24**: p. 69-87.
188. Wanming, Z., H. Zhenxing, and S. Xiaolin, *Prediction of high-speed train induced ground vibration based on train-track-ground system model*. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2010. **9**(4): p. 545-554.
189. Chebli, H., R. Othman, D. Clouteau, M. Arnst, and G. Degrande, *3D periodic BE-FE model for various transportation structures interacting with soil*. Computers and Geotechnics, 2007. **35**: p. 22-32.
190. Gupta, S., H. Berghe, G. Lombaert, and G. Degrande, *Numerical modelling of vibrations from a Thalys high speed train in the Groene Hart tunnel* Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010. **30**(3): p. 82-97.
191. Millan, M.A. and J. Domínguez, *Ground vibration induced by moving trains on ballasted and rigid tracks using a periodic boundary element formulation*, in *COMPdyn2009*, M. Papadrakakis, N. Lagaros, and M. Fragiadakis, Editors. 2009: Rhodes.
192. Alves Costa, P., R. Calçada, J. Couto Marques, and A. Cardoso, *A 2.5D finite element model for simulation of unbounded domains under dynamic loading*, in *7th European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, T. Benz and S. Nordal, Editors. 2010: Trondheim. p. 782-790.
193. Yang, Y., H. Hung, and D. Chang, *Train-induced wave propagation in layered soils using finite/infinite element simulation*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003. **23**: p. 263-278.
194. Yang, Y. and H. Hung, *Soil Vibrations Caused by Underground Moving Trains*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008. **134**(11): p. 1633-1644.
195. Lopes, P., P. Alves Costa, R. Calçada, and A. Silva Cardoso, *Análise numérica de vibrações induzidas por tráfego ferroviário em túneis baseada em modelos 2.5D*, in *12º Congresso Nacional de Geotecnia*. 2010: Guimarães.
196. François, S., M. Schevenels, G. Degrande, J. Borgions, and B. Thyssen, *A 2.5D finite element-boundary element model for vibration isolating screens*, in *ISMA2008*. 2008: Leuven. p. 2765-2776.

197. Sheng, X., C. Jones, and D. Thompson, *Prediction of ground vibration from trains using wavenumber finite and boundary element method*. Journal of Sound and Vibration, 2006. **293**: p. 575-586.
198. Hwang, R. and J. Lysmer, *Response of buried structures to travelling waves*. Journal of Geotechnical Engineering Division, 1981. **107**(2): p. 183-200.
199. Gavric, L., *Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique*. Journal of Sound and Vibration, 1995. **185**(3): p. 531-543.
200. Yang, Y.B. and H.H. Hung, *A 2.5D finite/infinite element approach for modelling visco-elastic body subjected to moving loads*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001. **51**: p. 1317-1336.
201. Gavric, L., *Finite element computation of dispersion properties of thin-walled waveguides*. Journal of Sound and Vibration, 1994. **173**(1): p. 113-124.
202. Karlstrom, A., *An analytical model for ground vibrations from accelerating trains*. Journal of Sound and Vibration, 2006. **293**: p. 587-598.
203. Cook, R., D. Malkus, M. Plesha, and R. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 2002: John Wiley & Sons.
204. Couto Marques, J., P. Alves Costa, and A. Monteiro, *Modelação numérica de maciços semi-indefinidos*, in *8º Congresso Nacional de Geotecnia*. 2002: Lisboa. p. 959-968.
205. Sommerfeld, A., *Partial Differential Equations in Physics*. 1949, New York: Academic Press.
206. Givoli, D., *Non-reflecting boundary conditions: a review*. Journal of Computational Physics, 1991. **94**(1): p. 1-29.
207. Lysmer, J. and R.L. Kuhlemeyer, *Finite dynamic model for infinite media*. Journal of Engineering Mechanics Division, 1969. **95**: p. 859-877.
208. White, W., S. Valliappan, and I. Lee, *Unified boundary for finite dynamic models*. Journal of Engineering Mechanics, 1977. **103**: p. 949-964.
209. Kausel, E., *Local transmitting boundaries*. Journal of Engineering Mechanics, 1988. **114**(6): p. 1011-1027.
210. Givali, D., T. Hagstrom, and I. Patlashenko, *Finite element formulation with high-order absorbing boundary conditions for time-dependent waves*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006. **195**.
211. Krenk, S. and P.H. Kirkegaard, *Local tensor radiation conditions for elastic waves*. Journal of Sound and Vibration, 2001. **247**(5): p. 875-896.
212. Higdon, R.L., *Radiation boundary conditions for elastic wave propagation*. Journal of Numerical Analysis (SIAM), 1990. **27**(4): p. 831-870.
213. Kontoe, S., L. Zdravkovic, and D. Potts, *An assessment of the domain reduction method as an advanced boundary condition and some pitfalls in the use of conventional absorbing boundaries*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009. **33**(3): p. 309-330.
214. Yun, C.B., D.K. Kim, and J.M. Kim, *Analytical frequency-dependent infinite elements for soil-structure interaction analysis in two-dimensional medium*. Engineering structures, 2000. **22**: p. 258-271.
215. Bettess, P., *Infinite Elements*. 1992: Phenshaw Press.
216. Astley, R.J., *Infinite elements for wave problems: a review of current formulations and an assessment of accuracy*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000. **49**: p. 951-976.
217. Yang, Y., S. Kuo, and H. Hung, *Frequency independent infinite elements for analyzing semi-infinite problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996. **39**: p. 3553-3569.
218. Yun, C.B. and J.M. Kim, *Dynamic Infinite Elements for Soil-Structure Interaction Analysis in a Layered Soil Medium*, in *Computational Methods in Engineering and Science*. 2006, Tsinghua University Press & Springer: Sanya, Hainan. p. 153-167.

219. Khani, M., *Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis Using the Scaled Boundary Finite Elements Method*, PhD thesis. 2007, School of Civil and Environmental Engineering, University of New South-Wales. Sidney.
220. Berenger, J., *A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves*. Journal of computational physics, 1994. **114**: p. 185-200.
221. Chew, W. and Q. Liu, *Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition*. Journal of Computational Acoustics, 1996. **4**: p. 341-359.
222. Komatitsch, D. and J. Tromp, *A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation*. Geophysical Journal International, 2003. **154**(1): p. 146-153.
223. Basu, U. and A.K. Chopra, *Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003. **192**: p. 1337-1375.
224. Semblat, J., A. Gandomzadeh, and L. Lenti, *A simple numerical absorbing layer method in elastodynamic*. Comptes Rendus Mecanique, 2010. **338**: p. 24-32.
225. Zdravkovic, L. and S. Kontoe, *Some issues in modeling boundary conditions in dynamic geotechnical analysis*, in *12th International Conference of IACMAG*. 2008: Goa. p. 2918-2925.
226. Kausel, E. and J. Tassoulas, *Transmitting boundaries: a closed-form comparison*. Bulletin of Seismological Society of America, 1981. **71**(1): p. 143-159.
227. Hall, L., *Simulations and Analyses of Train-Induced Ground Vibrations. A comparative study of two- and three-dimensional calculations with actual measurements*, PhD thesis. 2000, Division of Soil and Rock Mechanics, Royal Institute of Technology (KTH). Stockholm.
228. Marques, J.M.M.C. and D.R. Owen, *Infinite elements in quasi-static materially non linear problems*. Computers and Structures, 1983. **18**(4): p. 739-751.
229. Chow, Y.K. and I.M. Smith, *Static and periodic infinite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981. **17**: p. 503-526.
230. Mesquita, E. and R. Pavanello, *Numerical methods for dynamics of unbounded domains*. Computational & Applied Mathematics, 2005. **24**(1): p. 1-26.
231. Medina, F. and J. Penzien, *Infinite elements for elastodynamics*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1982. **10**: p. 699-709.
232. Park, K., E. Watanabe, and T. Utsunomiya, *Development of 3D elastodynamic infinite elements for soil-structure interaction problems*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2004. **4**(3): p. 423-441.
233. Semblat, J. and J. Brioist, *Efficiency of higher order finite elements for the analysis of seismic wave propagation*. Journal of Sound and Vibration, 2000. **231**(2): p. 460-467.
234. Faccioli, E., F. Maggio, R. Paolucci, and A. Quarteroni, *2D and 3D elastic wave propagation by a pseudospectral domain decomposition method*. Journal of Seismology, 1997. **1**: p. 237-251.
235. O'Brien, J. and D.C. Rizos, *A 3D BEM-FEM methodology for simulation of high speed train induced vibrations*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2005. **25**: p. 289-301.
236. Estorff, O.V., A.L. Pais, and E. Kausel, *Some observations on time domain and frequency domain boundary elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990. **29**: p. 785-800.
237. Estorff, O.V. and E. Kausel, *Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1989. **18**: p. 1065-1075.
238. Andersen, L., *Wave propagation in infinite structures and media*, PhD thesis. 2002, Aalborg University.

239. Van den Broeck, P., *A prediction model for ground-borne vibrations due to railway traffic*, PhD thesis. 2001, Departement Burgerlijke Bouwkunde, Katholieke Universiteit Leuven. Leuven.
240. Bode, C., R. Hirschauer, and S. Savidis, *Soil-structure interaction in time domain using half-space Green's functions*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2002. **22**: p. 283-295.
241. Romero, A., P. Galvín, and J. Domínguez, *A numerical model to predict vibrations due to HST*, in *COMPdyn 2009*, P. M., N.D. Lagaros, and M. Fragiadakis, Editors. 2009: Rhodes. p. 1-33.
242. Galvín, P., A. Romero, and J. Domínguez, *Fully three-dimensional analysis of high-speed train-track-soil-structure dynamic interaction*. Journal of Sound and Vibration, 2010. **329**: p. 5147-5163.
243. Chebli, H., R. Othman, and D. Clouteau, *Response of periodic structures due to moving loads*. Comptes Rendu Mecanique, 2006. **334**: p. 347-352.
244. Gupta, S., M. Hussein, G. Degrande, H. Hunt, and D. Clouteau, *A comparison of two numerical models for the prediction of vibrations from underground railway traffic*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2007. **27**(7): p. 608-624.
245. Gupta, S., Y. Stanus, G. Lombaert, and G. Degrande, *Influence of tunnel and soil parameters on vibrations from underground railways*. Journal of Sound and Vibration, 2009. **327**: p. 70-91.
246. Calçada, R., R. Delgado, A. Cardoso, P. Alves Costa, N. Santos, C. Ribeiro, and B. Coelho. *Train-track-ground interaction on high speed lines*. in *Noise and Vibration on High-Speed Railways*. 2008. Porto: FEUP.
247. Muller, K., H. Grundmann, and S. Lenz, *Nonlinear interaction between a moving vehicle and a plate elastically mounted on a tunnel*. Journal of Sound and Vibration, 2008. **310**: p. 558-586.
248. Galvín, P., S. François, M. Schevenels, E. Bongini, G. Degrande, and G. Lombaert, *A 2.5D coupled FE-BE model for the prediction of railway induced vibrations*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2010. **30**(12): p. 1500-1512.
249. Tadeu, A. and E. Kausel, *Green's functions for two-and-a-half-dimensional elastodynamic problems*. Journal of Engineering Mechanics, 2000. **126**(10): p. 1093-1096.
250. Tadeu, A. and J. António, *2.5D Green's functions for elastodynamic problems in layered acoustic and elastic formations*. CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2001. **2**(4): p. 477-495.
251. Tadeu, A., J. Antonio, and L. Godinho, *Green's function for two-and-a-half dimensional elastodynamic problems in a half-space*. Computational Mechanics, 2001. **27**: p. 484-491.
252. Domínguez, J., *Boundary Elements in Dynamics*. 1993: Elsevier Applied Science.
253. Weeler, L. and E. Sternberg, *Some theorems in classical elastodynamics*. Archive of Rational Mechanics and Analysis 1968. **31**: p. 51-90.
254. Andersen, L. and S. Nielsen, *Boundary element analysis of the steady-state response of an elastic half-space to a moving force on its surface*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2003. **27**(1): p. 23-38.
255. Bonnet, M., *Boundary integral equation methods for solids and fluids*. 1995, London: John Wiley and Sons.
256. Lombaert, G., *Personnal Communication*. 2008.
257. Hirschauer, R., *Kopplung von Finiten Elementen mit Rand-Elementen zur Berechnung der dynamischen Baugrund-Bauwerk-Interaktion*, PhD thesis. 2001, des Grundbauinstitutes, Technischen Universität Berlin. Berlin.
258. Hisatake, M., T. Ito, and H. Ueda. *Three dimensional symmetric coupling of boundary and finite element method*. in *Boundary Elements - Proceedings of Fifth International Conference*. 1983.
259. Clouteau, D., G. Degrande, and G. Lombaert, *Numerical modelling of traffic induced vibrations*. Meccanica, 2001. **36**: p. 401-420.

260. Wu, T. and D. Thompson, *On the parametric excitation of the wheel/track system*. Journal of Sound and Vibration, 2004. **278**: p. 725-747.
261. Wu, T. and D. Thompson, *A hybrid model for the noise generation due to railway wheel flats*. Journal of Sound and Vibration, 2002. **251**(1): p. 115-139.
262. Sheng, X., C. Jones, and D. Thompson, *A comparison of a theoretical model for quasi-statically and dynamically induced environmental vibration from trains with measurements*. Journal of Sound and Vibration, 2003. **267**(3): p. 621-635.
263. Bitzenbauer, J. and J. Dinkel, *Dynamic interaction between a moving vehicle and an infinite structure excited by irregularities - Fourier transform solution*. Archive of Applied Mechanics, 2002. **72**: p. 199-211.
264. Metrikine, A., S. Verichev, and J. Blaauwendraad, *Stability of a two-mass oscillator moving on a beam supported by a visco-elastic half-space*. International Journal of Solids and Structures, 2005. **42**: p. 1187-1207.
265. Sun, Y. and M. Dhanasekar, *A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system*. International Journal of Solids and Structures, 2002. **39**: p. 1337-1359.
266. EN1991-2, *Actions on Structures - Part2: General Actions - Traffic loads on bridges* E.C.f. Standardization, Editor. 2003: Brussels.
267. Xia, H., Y. Cao, and G. De Roeck, *Theoretical modeling and characteristic analysis of moving-train induced ground vibrations* Journal of Sound and Vibration, 2010. **329**(7): p. 819-832.
268. Lane, H., T. Ekevid, P. Kettil, C. Ching, and N. Wiberg, *Vehicle-track-underground modeling of rail induced wave propagation*. Computers and Structures, 2007. **85**: p. 1215-1229.
269. Sun, Y., M. Dhanasekar, and D. Roach, *A three-dimensional model for the lateral and vertical dynamics of wagon±track systems*. Journal of Rail and Rapid Transit, 2003. **217**(1): p. 31-45.
270. Zhai, W. and Z. Cai, *Dynamic Interaction between a lumped mass vehicle and a discretely supported continuous rail track*. Computers and Structures, 1997. **63**(5): p. 987-997.
271. Igeland, A. and H. Ilias, *Rail head corrugation growth predictions based on non-linear high frequency vehicle/track interaction*. Wear, 1997. **213**: p. 90-97.
272. Wu, T. and D. Thompson, *Vibration analysis of railway track with multiple wheels on the rail*. Journal of Sound and Vibration, 2001. **239**(1): p. 69-97.
273. Vale, C., *Influência da qualidade dos sistemas ferroviários no comportamento dinâmico e no planeamento da manutenção preventiva de vias de alta velocidade*, Tese de Doutoramento. 2010, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto. Porto.
274. Iyengar, R. and O. Jaiswal, *Random field modeling of railway track irregularities*. Journal of Transportation Engineering (ASCE), 1995. **121**(4): p. 303-308.
275. Shinozuka, M. and G. Deodatis, *Simulation of stochastic processes by spectral representation*. Applied Mechanics Reviews, 1991. **44**(4): p. 191-204.
276. Braun, H. and T. Hellenbroich, *Messergebnisse von strassenunebenheiten*. VDI Berichte, 1991. **877**: p. 47-80.
277. ISO8608, *Mechanical vibration - Road surface profiles - Reporting measured data*, I.O.f. Standardization, Editor. 1995, CEN.
278. Krylov, V., *Generation of ground vibrations by superfast trains*. Applied Acoustics, 1995. **44** p. 149-164.
279. Krylov, V., *On the theory of railway-induced ground vibrations*. Journal de Physique, 1994. **4**((C5)): p. 769-772.
280. Gordon, C., *Generic criteria for vibration-sensitive equipment*, in *Proceedings of international Society for Optical Engineering*. 1991: San Jose. p. 71-85.
281. Bahrekazemi, M., *Lime-cement columns as a countermeasure against train-induced ground vibration*, Licenciante thesis. 2001, Department of Civil Engineering and Building Sciences, Royal Institute of Technology. Stockholm.

282. XueCheng, B., C. YunMin, and H. Ting, *Numerical simulation of high-speed train induced ground vibrations using 2.5D finite element approach*. Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy, 2008. **51**(6): p. 632-650.
283. Holm, G., B. Andréasson, P. Bengtsson, A. Bodare, and H. Eriksson, *Mitigation of track and ground vibrations by high speed trains at Ledsgård, Sweden*, Report. 2002, Swedish Deep Stabilization Research Centre.
284. NGI, *High Speed Lines on Soft Ground - Evaluation and Analysis of Measurements from the West Cost Line*, Report. 1999,
285. Adolfsson, K., B. Andréasson, P. Bengtsson, and P. Zackrisson, *High speed train X2000 on soft organic clay - measurements in Sweden*. 12th Eur. Conf. Soil Mech. Geotech. Engrg, 1999. **3**: p. 1713-1718.
286. Andréasson, B., *Geotechnical investigation in Ledsgard*, Report. 1999, Banverket.
287. Bodare, A., *Drop weight and SASW tests of embankments*, Report. 1998, Royal Institute of Technology.
288. Hall, L. and A. Bodare, *Analyses of the cross-hole method for determining shear wave velocities and damping ratios*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2000. **20**: p. 167-175.
289. Madhus, C., S. Lacasse, A. Kaynia, and L. Harvik, *Geodynamic challenges in high speed railway projects*, in *GeoTrans 2004 - Geotechnical Engineering For Transportation Projects*, ASCE, Editor. 2004: Los Angeles. p. 192-215.
290. Woldringh, R. and B. New, *Embankment design for high speed trains on soft soils*, in *XII ESCMGE - Geotechnical Engineering for Transportation Infrastructures*, F. Barends, et al., Editors. 1999, Balkema: Amsterdam.
291. Hardin, B. and V. Drnevich, *Shear modulus and damping in soils: design equations and curves*. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, 1972. **98**(7): p. 667-692.
292. Suiker, A., *The mechanical behaviour of ballasted railway tracks*, PhD thesis. 2002, Civil Engineering Department, University of Technology. Delft.
293. Vucetic, M. and R. Dobry, *Effect of soil plasticity on cyclic response*. Journal of Geotechnical Engineering Division, 1991. **117**: p. 89-117.
294. Ishibashi, I. and X. Zhang, *Unified dynamic shear moduli and damping ratios of sand and clay*. Soils and Foundations, 1993. **33**(1): p. 182-191.
295. Lysmer, J., T. Udaka, H.B. Seed, and R. Hwang, *FLUSH: a computer program for approximate 3-D analysis of soil-structure interaction problems*, Report. 1974, R.E. 75-30, University of California.
296. Halabian, A. and M. Naggar, *Effect of non-linear soil-structure interaction on seismic response of tall slender structures*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2002. **22**: p. 639-658.
297. Rollins, K., M. Evans, N. Diehl, and W. Daily III, *Shear Modulus and damping Relationships for Gravels*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering 1998. **124**(5): p. 396-405.
298. Hardin, B. and E. Kalinski, *Estimating the shear modulus of gravelly soils*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2005. **131**(7): p. 867-875.
299. Yang, L.A., W. Powrie, and J.A. Prierst, *Dynamic Stress Analysis of a Ballasted Railway Track Bed during the Train Passage*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2009. **135**(5): p. 680-689.
300. Coba, *Modernização da Linha do Norte - Subtroço 1.2 Alhandra-Setil*, Report. 2004, Coba.
301. Robertson, P., *Soil classification using the cone penetration test: Reply*. Canadian Geotechnical Journal, 1991. **28**: p. 176-178.
302. Robertson, P., *Soil classification using the cone penetration test*. Canadian Geotechnical Journal, 1990. **27**: p. 151-158.
303. Mayne, P. and G. Rix, *Correlations between shear wave velocity and cone tip resistance in natural clays*. Soils and Foundations, 1995. **35**(2): p. 107-110.

304. Stuedlein, A., *Shear-wave velocity correlations for Puyallup River alluvium* Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010. **136**(9): p. 1298-1304.
305. Hall, L. and A. Bodare, *Analyses of the cross-hole method for determining shear wave velocities and damping ratios* Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2000. **20**(1-4): p. 167-175.
306. Foti, S., *Using transfer function for estimating dissipative properties of soils from surface-wave data*. Near Surface Geophysics, 2004. **2**(4).
307. Badsar, S., M. Schevenels, and G. Degrande, *THE DETERMINATION OF THE DAMPING PARAMETER OF SOILS WITH THE SASW METHOD*, in *COMPADYN 2009 Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, M. Papadrakakis, N. Lagaros, and M. Fragiadakis, Editors. 2009: Rhodes, Greece.
308. Badsar, S., M. Schevenels, W. Haegeman, and G. Degrande, *Determination of the material damping ratio in the soil from SASW tests using the half-power bandwidth method*. Geophysical Journal International, 2010. **182**: p. 1493-1508.
309. Degrande, G., P. Broeck, and D. Clouteau, *A critical appraisal of in situ vibration measurements*, in *EURODYN'96*, B.S. Augusti, Editor. 1996, Balkema: Florence, Italy. p. 1107-1114.
310. Kattis, S., D. Polyzos, and D. Beskos, *Vibration isolation by a row of piles using a 3D frequency domain BEM*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999. **46**: p. 713-728.
311. Alzawi, A. and M. Naggar, *Full scale experimental study on vibration scattering using open and in-filled (GeoFoam) wave barriers*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2011. **31**(3): p. 306-317.
312. Berggren, E., *Measurements of Track Stiffness and Track Irregularities to Detect Short-waved Support Conditions*, in *RailFound 06*, G. Ghataora and M. Burrow, Editors. 2006, University of Birmingham: Birmingham. p. 74-83.
313. With, C. and A. Bodare, *Evaluation of track stiffness with a vibrator for prediction of train-induced displacement on railway embankments*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2009. **29**(8): p. 1187-1197.
314. Berggren, E., *Dynamic track stiffness measurement—a new tool for condition monitoring of track substructure*, Licentiate. 2005, Royal Institute of Technology. Stockholm.
315. Kaewunruen, S. and A. Remennikov, *Field trials for dynamic characteristics of railway track and its components using impact excitation technique*. NDT&E international - Independent Nondestructive Testing and Evaluation, 2007. **40**: p. 510-519.
316. Kaewunruen, S. and A. Remennikov, *Dynamic properties of railway track and its components: recent findings and future research direction*. Insight - Non-Destructive Testing and Condition Monitoring, 2010. **52**(1): p. 20-22.
317. MathWorks, T., *MATLAB Optimization Toolbox User's Guide*. 2005.
318. Zagyapan, M. and C. Fairfield, *Continuous surface wave and impact methods of measuring the stiffness and density of railway ballast*. NDT&E International - Independent Nondestructive Testing and Evaluation, 2002. **35**: p. 75-81.
319. Pinto, N., C.A. Ribeiro, J. Mendes, and R. Calçada, *Development of an optical system for monitoring the vertical displacements of the track in high speed railways*, in *EVACES'09 - EXPERIMENTAL VIBRATION ANALYSIS FOR CIVIL ENGINEERING STRUCTURES*, J. Bien, Editor. 2009: Wroclaw. p. 153-154.
320. SUPERTRACK, *Instrumentation, monitoring and physical modelling of high-speed line*, Report. 2005, Cedex and ADIF.
321. Bowness, D., A. Lock, W. Powrie, J. Priest, and D. Richards, *Monitoring the dynamic displacements of railway track*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2007. **221**(1): p. 13-22.

322. Picoux, B., R. Rotinatb, J.P. Regoina, and D. Le Houédec, *Prediction and measurements of vibrations from a railway track lying on a peaty ground*. Journal of Sound and Vibration, 2003. **267**: p. 575–589.
323. Bahrekazemi, M., *Train-Induced Ground Vibration and Its Prediction*, PhD thesis. 2004, Department of Civil and Architectural Engineering, Royal Institute of Technology. Stockholm.
324. Martins, J., J. Marcelino, A. Gomes Correia, L. Ramos, and J. Delgado, *Medições das vibrações geradas por comboios de alta velocidade*, in *11º Congresso Nacional de Geotecnia*. 2008: Coimbra. p. 253-260.
325. Hunt, H. and M. Hussein, *Vibration from railways: can we achieve better than +/- 10dB prediction accuracy?*, in *ICSV14 - 14th International Congress on Sound and Vibration*. 2007: Cairns, Australia.
326. Lombaert, G., G. Degrande, B. Vanhauwere, B. Vandeborgh, and S. François, *The control of ground-borne vibrations from railway traffic by means of continuous floating slabs*. Journal of Sound and Vibration, 2006. **297**: p. 946-961.
327. Pyl, L., *Development and experimental validation of a numerical model for traffic induced vibrations in buildings*, PhD thesis. 2004, Departement Bugarlijke Bouwkunde, Katholieke Universiteit Leuven. Leuven.
328. With, C. and A. Bodare, *Prediction of train-induced vibrations inside buildings using transfer functions*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2007. **27**: p. 93-98.
329. Komatitsch, D., G. Erlebacher, D. Goddeke, and D. Michéa, *High-order finite-element seismic wave propagation modeling with MPI on a large GPU cluster*. Journal of Computational Physics, 2010. **229**(20): p. 7692-7714.
330. Michéa, D. and D. Komatitsch, *Accelerating a three-dimensional finite-difference wave propagation code using GPU graphics cards*. Geophysical Journal International, 2010. **182**: p. 389-402.
331. Verbraeken, H., G. Lombaert, and G. Degrande, *Verification of an empirical prediction method for railway induced vibrations by means of numerical simulations*. Journal of Sound and Vibration, 2011. **330**(8): p. 1692-1703.
332. Ferreira, J., *Modelação da excitação dinâmica superficial do subsolo. Aplicação à análise espectral de ondas de superfície.*, Tese de Mestrado. 2005, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa. Lisboa.