



UNIVERSIDADE DO PORTO
Faculdade de Ciências
Faculdade de Engenharia

Esquemas de Elementos Finitos para Ondas Dispersivas

Sandra Marta Nobre Plecha

Licenciada pela Universidade de Aveiro

Dissertação realizada sob a supervisão do Doutor
Paulo Alexandre de Avilez Rodrigues de Almeida Valente
Professor Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Dissertação submetida para satisfação parcial
dos requisitos do grau de mestre em
Métodos Computacionais em Ciências e Engenharia

Novembro de 2005

Resumo

Neste trabalho foi desenvolvido um método de elementos finitos com uma formulação de Petrov-Galerkin, para a discretização de modelos do tipo Boussinesq a uma e duas direcções horizontais, por forma a ser garantida a estabilidade e precisão de terceira ordem do esquema numérico, necessária para a modelação de ondas dispersivas.

A formulação de Petrov-Galerkin aplicada neste trabalho é uma extensão aos modelos do tipo Boussinesq da formulação proposta por Avilez-Valente e Seabra-Santos para a equação RLW, e baseado num primeiro esquema desenvolvido por aqueles autores para modelos de ondas dispersivas.

O método de elementos finitos desenvolvido recorre a elementos finitos no espaço e no tempo, com condições de continuidade C^0 , dando origem a um esquema de integração no tempo do tipo predictor-corrector, tendo sido aplicado a modelos que regem a propagação de ondas de superfície com espectro de banda estreita, em águas de pequena a grande profundidade: modelo de Boussinesq a 1DH, de Seabra-Santos a 1DH, de Beji-Nadaoka 1DH a 1-termo e ao modelo de Boussinesq 2DH. A formulação de Petrov-Galerkin tem uma precisão de terceira ordem e é condicionalmente estável.

São efectuados alguns casos de estudo por forma a avaliar o desempenho dos modelos e da formulação de elementos finitos desenvolvida. Para o caso unidimensional, são analisados casos de propagação de agitação regular e irregular sobre um quebra-mar submerso, sendo os resultados numéricos comparados com resultados laboratoriais disponíveis na literatura e com resultados numéricos obtidos pelo programa FUNWAVE. Para o caso bidimensional são estudados casos de propagação de uma onda solitária ao longo de um canal rectangular contornando um cilindro vertical, sendo os resultados numéricos obtidos comparados com resultados laboratoriais disponíveis na literatura.

Conclui-se que o esquema numérico proposto é estável e preciso, mas que os modelos na forma proposta apresentam deficiências na propagação de ondas de águas pouco profundas para águas profundas.

Abstract

In this work, a Petrov-Galerkin formulation of the finite element method was developed, for the discretization of a Boussinesq-type wave propagation models, in one and two horizontal dimensions. The aim of the work was to ensure that stability and third order accuracy which are necessary for the simulation dispersive waves are achieved by the numerical scheme.

The Petrov-Galerkin formulation used in the present study is an extension to the Boussinesq type models, of the formulation proposed by Avilez-Valente and Seabra-Santos, for the RLW equation, and based on a previous one developed by those authors for the modelling of dispersive waves.

The developed finite element method is based on a space-time finite elements with C^0 continuity, resulting in a predictor-corrector scheme for the time integration. It was applied to models that simulate the propagation of surface waves with narrow band spectra, from shallow to deep water conditions: Boussinesq 1DH model, Seabra-Santos 1DH model, Beji-Nadaoka 1DH 1-term model and Boussinesq 2DH model. This Petrov-Galerkin formulation is third order accurate and conditionally stable.

In order to evaluate the models and the developed finite element formulations, some cases were studied. For the 1DH models, two cases were analyzed: the propagation of regular and irregular waves over a submerged bar. The numerical results were compared with laboratorial results available in the literature and with numerical results obtained by the FUNWAVE model. For the 2DH model, the propagation of a solitary wave was simulated and the numerical results were compared with laboratorial results available in the literature.

Finally, it is concluded that the numerical scheme proposed is both stable and accurate. On the other hand, the wave models in the proposed form show some problems in the propagation of waves from shallow waters into deep waters.

Aos meus pais e irmã

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu Orientador pelos conhecimentos transmitidos, e por todo o tempo que disponibilizou para a realização deste trabalho.

Gostaria também de agradecer a todas as pessoas que me apoiaram durante este ano, nomeadamente:

aos meus pais, irmã, cunhado e sobrinho por toda a força que me deram;

aos meus colegas de Mestrado pelo companheirismo e amizade que sempre demonstraram ao longo deste ano alucinante;

aos meus colegas e amigos do DEC da FEUP que tão bem me receberam nesta instituição, e por todo o carinho demonstrados.

Por fim, agradeço o financiamento concedido pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do projecto POCTI/ECM/41800/2001, com verbas da União Europeia, programa FEDER, e verbas próprias da República Portuguesa.

Índice

Lista de Figuras	xii
Lista de Símbolos	xiii
1 Introdução	1
1.1 Ondas em zonas costeiras	1
1.2 Modelos de água pouco profunda a intermédia	2
1.2.1 Modelos de propagação	2
1.2.2 Método dos elementos finitos	3
1.3 Estrutura deste trabalho	5
2 Formulação Matemática 1DH	7
2.1 Modelos de propagação	7
2.1.1 Teoria linear de Airy	7
2.1.2 Modelo de Boussinesq a 1DH	8
2.1.3 Modelo de Seabra-Santos a 1DH	9
2.1.4 Modelo de Beji-Nadaoka 1DH a 1-termo	11
2.1.5 Condições iniciais e de fronteira	11
2.2 Método dos elementos finitos	12
2.2.1 Formulação de Petrov-Galerkin	12
2.2.2 Esquema de integração temporal	15

2.2.3	Análise da precisão e da estabilidade	18
3	Formulação Matemática 2DH	24
3.1	Modelo de Boussinesq a 2DH	24
3.2	Formulação de Petrov-Galerkin	25
3.3	Esquema de integração temporal	31
3.4	Análise da precisão e da estabilidade	34
4	Testes Computacionais	39
4.1	Propagação da agitação sobre um quebra-mar submerso	39
4.1.1	Resultados e discussão	41
4.2	Propagação de uma onda solitária em torno de um cilindro	53
4.2.1	Resultados e discussão	64
5	Conclusões e Trabalho Futuro	72
	Referências	73

Lista de Figuras

2.1	Secção vertical e definição de variáveis, para um domínio a uma dimensão horizontal (reprodução de Avilez-Valente, 2000).	8
2.2	Comparação das celeridades de fase com a celeridade de fase de Airy (—). (a) Boussinesq (—). (b) Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (—); $(kh)_0 = \pi$ (— · —); $(kh)_0 = 2\pi$ (···). (c) Beji-Nadaoka para: $k_p h = \pi/2$ (—); $k_p h = \pi$ (— · —); $k_p h = 2\pi$ (···).	10
2.3	Discretização espaço-temporal. Numeração local dos nós do e -ésimo elemento.	13
2.4	Discretização espacial para $t=0$. Funções de forma lineares. (a) Função de forma local no ponto 1 do e -ésimo elemento. (b) Função de forma local no ponto 2 do e -ésimo elemento. (c) Função de forma global no i -ésimo ponto do domínio.	14
2.5	Passo predictor. $kh = 2kd$ e $Cr = 0.7$. (a) Módulo do coeficiente de propagação para o passo predictor; (b) Celeridades de fase para o passo predictor(■) e de Boussinesq (■).	21
2.6	1ª Iteração do passo corrector. $kh = 2kd$ e $Cr = 0.7$. (a) Módulo do coeficiente de propagação para a 1ª iteração do passo corrector; (b) Celeridades de fase para a 1ª iteração do passo corrector (■) e de Boussinesq (■).	22
2.7	2ª Iteração do passo corrector. $kh = 2kd$ e $Cr = 0.7$. (a) Módulo do coeficiente de propagação para a 2ª iteração do passo corrector; (b) Celeridades de fase para a 2ª iteração do passo corrector (■) e de Boussinesq (■).	23
3.1	Discretização espaço-temporal para o caso de (a) elementos quadriláteros e (b) elementos triangulares.	26

3.2	Numeração local dos nós para o elemento com (a) forma quadrilátera e (b) forma triangular.	27
3.3	Discretização espacial das funções de forma para o elemento quadrilátero. (a) N_1 , (b) N_2 , (c) N_3 e (d) N_4	28
3.4	Discretização espacial das funções de forma para o elemento triangular. (a) N_1 , (b) N_2 e (c) N_3	30
4.1	Batimetria e posição das sondas 2 a 11.	41
4.2	Caso A. Agitação regular. Modelo de Boussinesq (MEF). Comparação dos resultados experimentais (—) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondagens 6, 7, 10 e 11.	43
4.3	Caso A. Agitação regular. Modelo de Seabra-Santos (MEF). Comparação dos resultados experimentais (—) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondagens 6, 7, 10 e 11.	44
4.4	Caso A. Agitação regular. Modelo de Beji-Nadaoka (MEF). Comparação dos resultados experimentais (—) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondagens 6, 7, 10 e 11.	45
4.5	Caso A. Agitação regular. Modelo de Wei (FUNWAVE). Comparação dos resultados experimentais (—) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondagens 6, 7, 10 e 11.	46
4.6	Caso A. Agitação regular. Modelo de Boussinesq (MEF). Amplitude da 1 ^a (■), 2 ^a (■), 3 ^a (■) e 4 ^a (■) componentes. Resultados experimentais (—) e resultados numéricos (—). Sondagens 6, 7, 10 e 11.	47
4.7	Caso A. Agitação regular. Modelo de Seabra-Santos (MEF). Amplitude da 1 ^a (■), 2 ^a (■), 3 ^a (■) e 4 ^a (■) componentes. Resultados experimentais (—) e resultados numéricos (—). Sondagens 6, 7, 10 e 11.	48
4.8	Caso A. Agitação regular. Modelo de Beji-Nadaoka (MEF). Amplitude da 1 ^a (■), 2 ^a (■), 3 ^a (■) e 4 ^a (■) componentes. Resultados experimentais (—) e resultados numéricos (—). Sondagens 6, 7, 10 e 11.	49
4.9	Caso A. Agitação regular. Modelo de Wei (FUNWAVE). Amplitude da 1 ^a (■), 2 ^a (■), 3 ^a (■) e 4 ^a (■) componentes. Resultados experimentais (—) e resultados numéricos (—). Sondagens 6, 7, 10 e 11.	50

4.10	Caso A. Agitação irregular. Espectro de potência nas sondas 4 a 11. Modelo de Boussinesq (■), modelo de Seabra-Santos (■), modelo de Beji-Nadaoka (■) e modelo de Wei (■).	51
4.11	Caso C. Agitação regular. Modelo de Boussinesq (MEF). Comparação dos resultados experimentais (--) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.	54
4.12	Caso C. Agitação regular. Modelo de Seabra-Santos (MEF). Comparação dos resultados experimentais (--) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.	55
4.13	Caso C. Agitação regular. Modelo de Beji-Nadaoka (MEF). Comparação dos resultados experimentais (--) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.	56
4.14	Caso C. Agitação regular. Modelo de Wei (FUNWAVE). Comparação dos resultados experimentais (--) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.	57
4.15	Caso C. Agitação regular. Modelo de Boussinesq (MEF). Amplitude da 1 ^a (■), 2 ^a (■), 3 ^a (■) e 4 ^a (■) componentes. Resultados experimentais (--) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.	58
4.16	Caso C. Agitação regular. Modelo de Seabra-Santos (MEF). Amplitude da 1 ^a (■), 2 ^a (■), 3 ^a (■) e 4 ^a (■) componentes. Resultados experimentais (--) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.	59
4.17	Caso C. Agitação regular. Modelo de Beji-Nadaoka (MEF). Amplitude da 1 ^a (■), 2 ^a (■), 3 ^a (■) e 4 ^a (■) componentes. Resultados experimentais (--) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.	60
4.18	Caso C. Agitação regular. Modelo de Wei (FUNWAVE). Amplitude da 1 ^a (■), 2 ^a (■), 3 ^a (■) e 4 ^a (■) componentes. Resultados experimentais (--) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.	61
4.19	Caso C. Agitação irregular. Espectro de potência nas sondas 4 a 11. Modelo de Boussinesq (■), modelo de Seabra-Santos (■), modelo de Beji-Nadaoka(■) e modelo de Wei (■).	62
4.20	Canal de ondas e posição das sondas (reprodução de Avilez-Valente, 2000).	63

4.21	Pormenor da malha de elementos finitos utilizada (reprodução de Avilez-Valente, 2000).	64
4.22	Onda solitária 1 em torno de um cilindro vertical. Modelo de Boussinesq 2DH. Comparação dos resultados numéricos (—) com os resultados experimentais (--) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 0 a 6.	66
4.23	Onda solitária 2 em torno de um cilindro vertical. Modelo de Boussinesq 2DH. Comparação dos resultados numéricos (—) com os resultados experimentais (--) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 0 a 6.	67
4.24	Onda 1. Espectro de potência na sonda 1. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	68
4.25	Onda 1. Espectro de potência na sonda 2. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	68
4.26	Onda 1. Espectro de potência na sonda 3. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	68
4.27	Onda 1. Espectro de potência na sonda 4. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	69
4.28	Onda 1. Espectro de potência na sonda 5. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	69
4.29	Onda 1. Espectro de potência na sonda 6. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	69
4.30	Onda 2. Espectro de potência na sonda 1. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	70
4.31	Onda 2. Espectro de potência na sonda 2. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	70
4.32	Onda 2. Espectro de potência na sonda 3. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	70
4.33	Onda 2. Espectro de potência na sonda 4. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	71
4.34	Onda 2. Espectro de potência na sonda 5. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (--).	71

4.35 Onda 2. Espectro de potência na sonda 6. Ensaio numérico (—),
ensaio experimental (—). 71

Lista de Símbolos

- a : Amplitude da onda
- C_{Bou} : Celeridade de fase do modelo de Boussinesq
- $(C_g)_p$: Celeridade de grupo dada pela teoria linear de Airy para ω_p
- $\mathbf{p}_x^{(n)}$: Vector do valor nodal de \hat{p}_x no instante de cálculo $t^{(n)}$
- C_p : Celeridade local dada pela teoria linear de Airy para ω_p
- \mathbf{C} : Matriz elementar de convecção
- \mathbf{C}_x : Matriz elementar de convecção segundo x
- \mathbf{C}_y : Matriz elementar de convecção segundo y
- Cr : Número de Courant
- Cr_x : Número de Courant segundo a direcção x
- Cr_y : Número de Courant segundo a direcção y
- g : Aceleração da gravidade
- h : Profundidade local
- H : Altura da onda
- H_s : Altura significativa da onda
- k : Número de onda
- k_p : Número de onda dado pela teoria linear de Airy para ω_p
- \mathbf{K} : Matriz elementar de difusão
- \mathbf{K}_{xx} : Matriz elementar de difusão
- \mathbf{K}_{yy} : Matriz elementar de difusão
- \mathbf{K}_{xy} : Matriz elementar de difusão
- \mathbf{M} : Matriz elementar de massa
- \hat{p}_x : Quantidade de movimento específica segundo a direcção x
- \hat{p}_y : Quantidade de movimento específica segundo a direcção y

- q : Energia específica
 $\mathbf{q}^{(n)}$: Vector do valor nodal de \hat{q} no instante de cálculo $t^{(n)}$
 \bar{t} : Coordenada local sobre o elemento
 T : Período da onda monocromática
 T_p : Período de pico da agitação
 $\mathbf{u}^{(n)}$: Vector do valor nodal da função u no instante de cálculo $t^{(n)}$
 \bar{u} : Média vertical da velocidade horizontal instantânea
 \bar{x} : Coordenada local sobre o elemento
 \bar{y} : Coordenada local sobre o elemento
 $\mathbf{p}_y^{(n)}$: Vector do valor nodal de \hat{p}_y no instante de cálculo $t^{(n)}$
- λ : Comprimento de onda
 ω : Frequência angular da onda
 ζ : Elevação da superfície livre
 $\zeta^{(n)}$: Vector do valor nodal da função $\hat{\zeta}$ no instante de cálculo $t^{(n)}$

Capítulo 1

Introdução

1.1 Ondas em zonas costeiras

Em todos os oceanos, mares, lagos, etc., além de outros movimentos ondulatórios, existem ondas geradas pelo vento. O conhecimento destas ondas de curto período (entre 3 s e 25 s), resultantes da acção do vento na interface ar-água, e das forças que elas geram é essencial em engenharia costeira de forma a prever as consequências da interacção entre a ondulação e qualquer obra de protecção ou regularização costeira.

A energia das ondas determina a geometria das praias, provoca a dispersão de sedimentos de fundo, transporta materiais do fundo ao longo da costa, bem como do largo para a costa e vice-versa, e exerce forças sobre as estruturas costeiras. Assim, para se compreender o movimento da água em mares, lagos, etc., deve existir em primeiro lugar uma compreensão dos processos físicos na geração e propagação de ondas de superfície. Estes processos, podem ser estudados experimentalmente recorrendo a modelos à escala num tanque de ondas, ou numericamente com a aplicação de modelos matemáticos e numéricos apropriados.

Quando os processos são estudados matematicamente e estamos perante domínios de geometria simples e condições de fronteira simples é possível determinar soluções analíticas dos processos físicos, contudo nos casos mais complexos estas soluções são quase impossíveis de obter. Nestes casos é necessário recorrer a modelos numéricos que determinem soluções aproximadas, tendo em conta as diversas teorias ondulatórias existentes, optando pela que melhor descreve as ondas que pretendemos estudar. A teoria de ondas mais simples é a teoria ondulatória de Airy que é uma teoria linear (1ª ordem). Esta teoria proporciona estimativas aceitáveis das condições das ondas para alguns problemas de engenharia, onde as ondas do tipo

sinusoidal são a base para os modelos de previsão da agitação, utilizados em engenharia costeira. No entanto, quando as ondas se propagam em águas pouco profundas, os fenómenos de não linearidade tornam-se importantes, sendo necessário recorrer a teorias ondulatórias de ordem superior.

Os modelos matemáticos que simulam a propagação de ondas devem ser selecionados consoante o tipo de onda a simular, dependendo das relações de grandeza entre a amplitude da onda, o comprimento de onda e a profundidade local. Os modelos dividem-se em modelos lineares e não lineares, e estes últimos em modelos de água profunda a intermédia e modelos de água pouco profunda a intermédia. Os modelos de água pouco profunda a intermédia simulam a propagação de ondas cujo número de onda multiplicado pela profundidade local, kh , seja $\ll 1$, enquanto que para as ondas para as quais $kh \gg 1$, os modelos utilizados são modelos de água profunda a intermédia.

Este trabalho debruça-se sobre modelos de água pouco profunda a intermédia.

1.2 Modelos de água pouco profunda a intermédia

1.2.1 Modelos de propagação

Os modelos de água pouco profunda são, classicamente, baseados num perfil vertical da velocidade horizontal polinomial em z , sendo z a coordenada espacial vertical. Os três modelos de referência são o de Saint-Venant (1871), não dispersivo e com não linearidade de primeira ordem, o de Boussinesq (1872), com efeitos dispersivos e não lineares de primeira ordem, e o de Serre (1953), igualmente com dispersividade de primeira ordem, mas com efeitos não lineares de ordem superior. O modelo de Saint-Venant, apesar das suas limitações de validade (cf. Seabra-Santos et al., 1988, Ursell, 1953), constitui o modelo de preferência para a modelação das marés e correntes em zonas costeiras (cf. Massel, 1989). O modelo de Boussinesq para profundidades variáveis tem demonstrado ser capaz de descrever a propagação de ondas geradas pelo vento em zonas costeiras (Elgar et al., 1990, Elgar e Guza, 1985, 1986, Freilich e Guza, 1984, Liu et al., 1985, Rygg, 1988). O modelo de Serre é de utilização menos comum, devido à presença de efeitos não lineares de ordem superior a 1.

O modelo de Boussinesq apresenta características de dispersão linear que limitam a sua aplicação a zonas de pequena profundidade relativa, i.e. $kh < \pi/2$. Madsen e Sørensen (1992) melhoraram as propriedades dispersivas deste modelo através da

introdução de uma perturbação de ordem superior no termo dispersivo. Desta forma, o quadrado da celeridade de fase do novo modelo é igual ao aproximante $[2, 2]$ de Padé* do quadrado da celeridade de fase da teoria linear de Airy. Nwogu (1993), utilizando como variáveis a elevação da superfície livre e a velocidade horizontal a uma profundidade arbitrária, obteve um modelo cujas características dispersivas podem ser optimizadas em função da gama de profundidades relativa desejada. Seabra-Santos (1994), com base no método das perturbações, derivou um modelo com características dispersivas exactas para uma profundidade relativa de referência. Schäffer e Madsen (1995), por perturbação dos termos dispersivos nas equações de Boussinesq, obtiveram um modelo com apenas terceiras derivadas mas com um aproximante $[4, 4]$ de Padé do quadrado da celeridade de fase de Airy.

Os modelos acima citados permitem modelar a propagação da agitação até águas relativamente profundas. No entanto isto não significa que apresentem elevada precisão na modelação das características cinemáticas do movimento. Não é possível, recorrendo a expansões polinomiais em z do perfil vertical de velocidades, obter uma boa representação deste perfil em águas profundas. Nadaoka et al. (1997) ultrapassam esse problema introduzindo funções de distribuição vertical das velocidades horizontais do tipo co-seno hiperbólico, por analogia com a teoria linear de Airy, e aplicando a formulação de Galerkin às equações de conservação da quantidade de movimento. Com um número reduzido de componentes na função de distribuição vertical de velocidades, aqueles autores conseguem obter características de dispersão linear óptimas numa gama extremamente larga de profundidades relativas.

1.2.2 Método dos elementos finitos

Vários autores propõem soluções numéricas para modelos de propagação de ondas do tipo Boussinesq com base no método das diferenças finitas (e.g. programa FUNWAVE, Kirby et al., 1998, Wei e Kirby, 1995). Estes esquemas recorrem à introdução de filtros para garantir a sua estabilidade e ao método de Runge-Kutta de elevada ordem para assegurar a precisão. No entanto, existe um método mais

*Sendo $p, q \geq 0$ dois números inteiros, define-se aproximante de Padé de ordem $[p, q]$ da função $f(x)$ e denota-se por

$$[p/q]f(x),$$

a função racional tal que a sua série de MacLaurin coincide até ao termo de ordem $p + q$ com a série de MacLaurin da função $f(x)$, i.e.

$$f(x) = [p/q]f(x) + \mathcal{O}(x^{(p+q+1)}).$$

robusto que o método das diferenças finitas, que permite a modelação de geometrias complexas, de uma forma mais simples: o método dos elementos finitos.

O método dos elementos finitos é uma técnica numérica para obter soluções aproximadas das equações diferenciais que governam os diferentes fenómenos físicos. Este método é composto por três características base que são responsáveis pela sua superioridade sobre os restantes métodos (diferenças finitas, volumes finitos, etc.).

Primeiro, é representado um domínio geometricamente complexo do problema como um conjunto de subdomínios geometricamente simples, chamados elementos finitos. Em segundo, sobre cada elemento finito, as funções de aproximação são derivadas tendo em conta que qualquer função contínua pode ser representada por uma combinação linear de polinómios algébricos. Em terceiro, sobre cada elemento as relações algébricas dos coeficientes indeterminados (valores nodais) são obtidas de modo a satisfazerem as equações diferenciais do problema. As funções de aproximação são polinómios algébricos e os coeficientes indeterminados representam os valores da solução num número finito de pontos pré-seleccionados, chamados nós, na fronteira e no interior do elemento. As funções de aproximação são derivadas usando conceitos da teoria de interpolação, sendo chamadas funções de interpolação. O grau das funções de interpolação depende do número de nós no elemento e da ordem da equação diferencial a resolver.

As primeiras aplicações do método dos elementos finitos aos modelos de água pouco profunda (modelo de Saint-Venant) devem-se a Grotkop (1973) e a Taylor e Davis (1975), no entanto os resultados obtidos não eram satisfatórios. Gray e Lynch (1977) provaram que os esquemas de Bubnov-Galerkin aplicados às equações de Saint-Venant dão origem a oscilações com comprimento de onda $\lambda = 2\ell$, sendo ℓ a distância entre dois pontos da malha. Ao ser utilizada uma equação de onda em vez da equação da continuidade (Lynch e Gray, 1979), ou formulações de Taylor-Galerkin (Peraire et al., 1986, Teixeira, 1994) ou ainda formulações de Petrov-Galerkin (Bova e Carey, 1996, Katopodes, 1984), é possível eliminar as oscilações referidas, utilizando o método de elementos finitos.

Na modelação de ondas dispersivas é fundamental a garantia de estabilidade e precisão de terceira ordem (Abbott et al., 1978), podendo recorrer-se a uma formulação de Petrov-Galerkin, para um aumento da precisão e eliminação dos problemas de oscilações numéricas. A formulação de Petrov-Galerkin é utilizada por forma a ultrapassar os problemas de instabilidade e baixa precisão dos modelos de ondas dispersivas com a formulação de Bubnov-Galerkin (Avilez-Valente e Seabra-Santos, 1997). Christie et al. (1976), mostraram que a aplicação da formulação de Petrov-Galerkin a métodos de elementos finitos, permite a obtenção de soluções

livres de oscilações de origem numérica através da introdução de um termo dissipativo de elevada ordem, e aumentar a precisão por diminuição do erro de dispersão numérica. Na aplicação do método às equações de Euler e de Navier-Stokes citam-se os trabalhos de Hughes e colaboradores (Brooks e Hughes, 1982, Hughes, 1978, Hughes e Franca, 1987, Hughes et al., 1986a, 1987, Hughes e Mallet, 1986a,b, Hughes et al., 1986b, Hughes e Tezduyer, 1984, Mizukami e Hughes, 1985) e Johnson e colaboradores (Johnson et al., 1984, Johnson e Szepessy, 1986).

Para a formulação de Bubnov-Galerkin a duas dimensões horizontais citam-se os trabalhos de Antunes do Carmo e colaboradores (Antunes do Carmo e Seabra-Santos, 1996, Antunes do Carmo et al., 1993a) e para as aplicações das formulações de Taylor-Galerkin e de Petrov-Galerkin ao modelo de Boussinesq a uma dimensão horizontal, citam-se os trabalhos de Katopodes e Wu (1984, 1987). O esquema de Katopodes e Wu (1984), de terceira ordem após discretização no espaço, tem no entanto apenas precisão de primeira ordem após a discretização temporal.

Recentemente, foram publicados vários trabalhos onde o método dos elementos finitos é usado para a discretização espacial de modelos do tipo Boussinesq (e.g. Antunes do Carmo et al., 1993b) e de Boussinesq estendido (modelos de Nwogu e de Madsen e Sørensen) (e.g. Walkley e Berzins, 1999, Woo e Liu, 2004), neste caso com recurso ao método de Runge-Kutta para a integração no tempo.

O objectivo deste trabalho é o desenvolvimento de um método de elementos finitos baseado num esquema de Petrov-Galerkin, de modo a garantir a estabilidade e precisão de terceira ordem na modelação de ondas dispersivas, eliminando os problemas de oscilações numéricas.

1.3 Estrutura deste trabalho

No Capítulo 2 deste trabalho são apresentadas as equações dos modelos dispersivos de Boussinesq, Seabra-Santos (1994) e de Beji-Nadaoka a 1-termo (Nadaoka et al., 1997) para uma dimensão horizontal. Nesse capítulo é também apresentado um método de elementos finitos baseado num esquema de Petrov-Galerkin. Este esquema é uma extensão, aos modelos do tipo de Boussinesq, da formulação proposta por Avilez-Valente e Seabra-Santos (2004a,b) para a equação RLW (Regularized Long Wave), e baseado num primeiro esquema desenvolvido por Avilez-Valente (2000) e por Avilez-Valente e Seabra-Santos (2000, 2002).

No Capítulo 3, são apresentadas as equações do modelo de Boussinesq a duas dimensões horizontais e é apresentado um método de elementos finitos baseado num

esquema de Petrov-Galerkin, para o caso bidimensional.

No Capítulo 4 descrevem-se as simulações numéricas efectuadas, tanto para os modelos a uma dimensão horizontal, como para duas direcções horizontais. Para o caso unidimensional, os resultados numéricos obtidos para a propagação de ondas regulares são comparados com resultados laboratoriais disponíveis na literatura (Dingemans, 1994), e com o modelo não linear de Wei (Kirby et al., 1998, Wei e Kirby, 1995), e os obtidos para as simulações com ondas irregulares são comparados com os resultados numéricos obtidos com o modelo não linear completo de Wei. Para o caso bidimensional, os resultados numéricos obtidos foram comparados com medições obtidas por Antunes do Carmo et al. (1993b) no canal de ondas do Institut de Mécanique de Grenoble, França. Estas comparações têm como objectivo avaliar a precisão dos esquemas numéricos para os modelos referidos nos Capítulos 2 e 3.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões deste trabalho e as propostas de trabalho futuro.

Capítulo 2

Formulação Matemática 1DH

2.1 Modelos de propagação

2.1.1 Teoria linear de Airy

A teoria linear de Airy (cf. Mei, 1994, pág. 513) baseia-se nas seguintes hipóteses: escoamento incompressível e irrotacional, fluido não viscoso, fundo plano e impermeável, e ondas sinusoidais de pequena amplitude. Uma representação genérica da geometria do domínio está ilustrada na Figura 2.1, onde uma onda de superfície se propaga no sentido positivo de x . Admitindo que a evolução da superfície livre é descrita por:

$$\zeta(x, t) = \Re \left(a e^{i(kx - \omega t)} \right), \quad (2.1)$$

da teoria linear de Airy resulta que a velocidade das partículas, $u(x, z, t)$, se pode escrever como o gradiente de um potencial, ϕ , dado por

$$\phi(x, z, t) = -i \frac{g a}{\omega} \frac{\cosh [k(z + h)]}{\cosh kh} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.2)$$

Nas equações (2.1) e (2.2), ζ é a elevação da superfície livre, a é a amplitude da onda, $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda, sendo λ o comprimento de onda, $\omega = 2\pi/T$ é a frequência angular da onda, sendo T o seu período, h é a profundidade, e g é a aceleração da gravidade.

Como requerimento da teoria de Airy, o número de onda e a frequência da onda estão relacionadas pela relação de dispersão:

$$\omega^2 = g k \tanh kh. \quad (2.3)$$

A dispersão neste caso significa dispersão de frequência das ondas, i.e. para uma mesma profundidade, ondas mais longas propagam-se mais rapidamente do que as

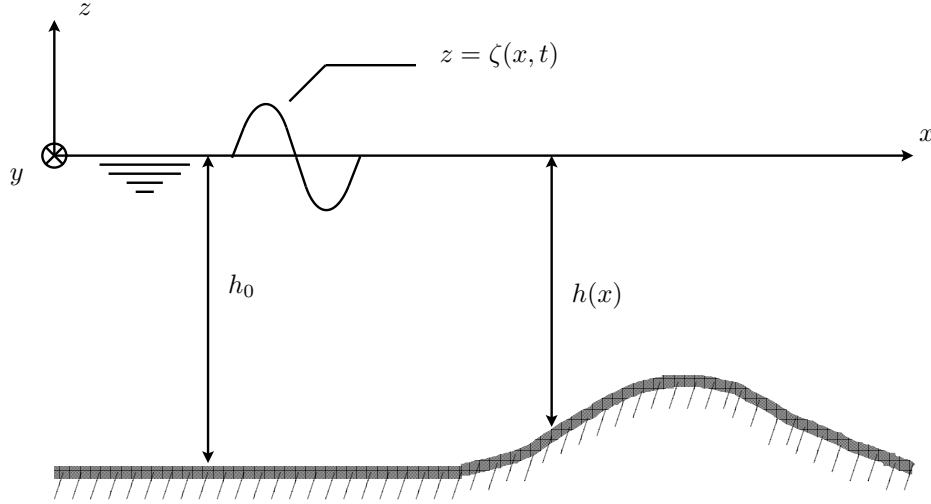


Figura 2.1: Seção vertical e definição de variáveis, para um domínio a uma dimensão horizontal (reprodução de Avilez-Valente, 2000).

ondas mais curtas, de acordo com a celeridade dada por:

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g h \frac{\tanh kh}{kh}}. \quad (2.4)$$

Note-se que kh é uma razão entre a profundidade e o comprimento de onda, e um parâmetro característico da dispersividade da onda.

2.1.2 Modelo de Boussinesq a 1DH

Para o caso unidimensional e considerando fundos fixos de variação muito suave segundo x , o sistema de equações para o modelo de Boussinesq, sem dissipação e na forma vectorial é dado por:

$$\mathbf{A}_t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x \partial t} \right) + \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (2.5a)$$

com

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta \\ g & \bar{u} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_{xx} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.5b)$$

onde $\zeta(x, t)$ é a elevação da superfície livre, $\bar{u}(x, t)$ é a média vertical da velocidade horizontal instantânea, $h(x)$ é a profundidade e g é a aceleração da gravidade. O quadrado da celeridade de fase do modelo de Boussinesq, C_{Bou} , é um aproximante

de Padé de ordem $[0, 2]$ do quadrado da celeridade de fase do modelo linear de Airy, quando $kh \rightarrow 0$ (ver Figura 2.2(a)):

$$C_{\text{Bou}}^2 = \frac{gh}{1 + \frac{(kh)^2}{3}}. \quad (2.6)$$

Nestas condições, o modelo de Boussinesq é válido apenas para $kh < \pi/2$, não representando correctamente a propagação de ondas em águas de profundidade relativa elevada.

2.1.3 Modelo de Seabra-Santos a 1DH

Seabra-Santos (1994) propôs um modelo de propagação a uma dimensão horizontal válido para ondas monocromáticas e para agitação irregular com espectro de banda estreita. As equações do modelo de Seabra-Santos, para ondas a uma dimensão horizontal, sem dissipação e de fundo fixo são, na forma vectorial:

$$\mathbf{A}_t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x \partial t} \right) + \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (2.7a)$$

com

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta \\ g & (2\check{\alpha} - 1)\bar{u} \end{bmatrix},$$

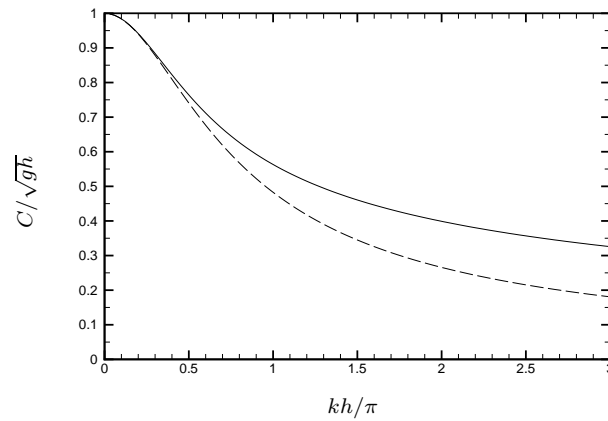
$$\mathbf{B}_{xx} = \check{\beta} h^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7b)$$

onde os coeficientes $\check{\alpha}$ e $\check{\beta}$ são dados por:

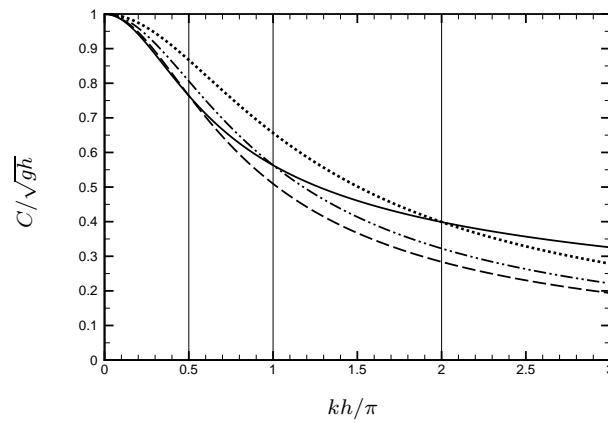
$$\check{\alpha} = \frac{1}{2} \left[\frac{(kh)_0}{\tanh(kh)_0} + \left(\frac{(kh)_0}{\tanh(kh)_0} \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad \check{\beta} = \frac{1}{(kh)_0^2} \left(\frac{(kh)_0}{\tanh(kh)_0} - 1 \right). \quad (2.8)$$

Nas equações anteriores, $(kh)_0$ corresponde a uma profundidade relativa local associada a uma frequência de referência e que respeita a relação de dispersão de Airy. A celeridade de fase deste modelo é exacta para números de onda tais que $kh = (kh)_0$ e aproximada para kh na vizinhança de $(kh)_0$. É nestas condições um modelo de ondas de banda estreita. A sua celeridade de fase é tal que (ver Figura 2.2(b)):

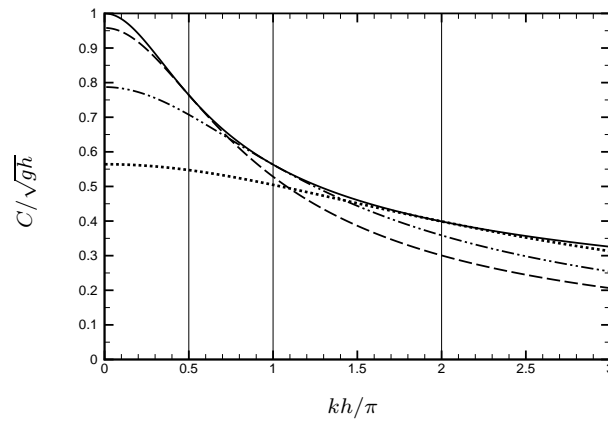
$$C_{\text{Sea}}^2 = \frac{gh}{1 + \check{\beta} (kh)^2}. \quad (2.9)$$



(a) Boussinesq.



(b) Seabra-Santos.



(c) Beji-Nadaoka.

Figura 2.2: Comparação das celeridades de fase com a celeridade de fase de Airy (—). (a) Boussinesq (---). (b) Seabra-Santos para: $(kh)_0 = \pi/2$ (---); $(kh)_0 = \pi$ (- · - ·); $(kh)_0 = 2\pi$ (····). (c) Beji-Nadaoka para: $k_p h = \pi/2$ (---); $k_p h = \pi$ (- · - ·); $k_p h = 2\pi$ (····).

2.1.4 Modelo de Beji-Nadaoka 1DH a 1-termo

Para ultrapassar as limitações em relação à dispersividade dos modelos do tipo de Boussinesq (e.g. Madsen e Sørensen (1992), Nwogu (1993), Schäffer e Madsen (1995)), nomeadamente na representação do perfil vertical das velocidades horizontais, Nadaoka et al. (1997) desenvolveram um modelo assumindo uma função de distribuição vertical das velocidades baseada na solução geral da equação de Laplace para fundos planos. As equações a uma dimensão horizontal de Beji-Nadaoka a 1-termo (Avilez-Valente e Seabra-Santos, 2002, Nadaoka et al., 1997) para ondas fracamente não lineares e dispersivas e para fundos fixos de variação suave, podem ser escritas na forma:

$$\mathbf{A}_t \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x \partial t} \right) + \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (2.10a)$$

com

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \zeta \\ u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_p (C_g)_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} u & \frac{C_p^2}{g} + \zeta \\ g C_p^2 & C_p^2 u \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_p (C_p - (C_g)_p)}{k_p^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{g} \frac{\partial C_p^2}{\partial x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10b)$$

onde u é a velocidade horizontal à superfície, e C_p , $(C_g)_p$ e k_p são respectivamente a celeridade local, a celeridade de grupo e o número de onda dados pela teoria linear de Airy para a frequência de onda de referência ω_p . Tal como o modelo de Seabra-Santos, também o modelo de Beji-Nadaoka é um modelo de banda estreita sendo a celeridade de fase exacta para o número de onda $k = k_p$, e dada por:

$$C_{\text{Beji}}^2 = \frac{C_p^3}{(C_g)_p - (C_p - (C_g)_p) \frac{(kh)^2}{(k_p h)^2}}. \quad (2.11)$$

Note-se que a função celeridade de fase deste modelo é tangente à função celeridade de fase de Airy para o comprimento de onda de referência (ver Figura 2.2(c)).

2.1.5 Condições iniciais e de fronteira

Condições de fronteira

Para a resolução numérica de um conjunto de equações diferenciais, é necessário especificar os valores das variáveis dependentes nas fronteiras do domínio computacional. Podem ser aplicados vários tipos de fronteiras no domínio de interesse, dependendo

do caso em estudo. As fronteiras laterais podem ser limitadas fisicamente por barreiras naturais (linha de costa, ilhas, obras de engenharia costeira) ou limitadas artificialmente através de fronteiras imaginárias (fronteiras abertas no mar).

Condições iniciais

Para além das condições de fronteira, é necessário definir condições iniciais para o sistema de equações. As condições iniciais devem corresponder a uma solução do problema físico, por forma a garantir a convergência da solução numérica. Normalmente recorre-se à situação de repouso, $\zeta = 0$, $\bar{u} = 0$ e $\bar{v} = 0$, evitando o aparecimento de perturbações numéricas e de soluções sem significado físico.

2.2 Método dos elementos finitos

2.2.1 Formulação de Petrov-Galerkin

A formulação de Petrov-Galerkin (Avilez-Valente, 2000) para os modelos (2.5), (2.7) e (2.10), baseada numa discretização em elementos finitos no espaço e no tempo, será encontrar a função vectorial aproximada $\hat{U}(x, t) = (\hat{\zeta}, \hat{u})$ definida em $]0, L[\times]t^{(n)}, t^{(n+1)}[$ que satisfaz a equação:

$$\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \int_0^L \hat{\mathbf{W}} \cdot \left[\mathbf{A}_t \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{U}}}{\partial x \partial t} \right) + \mathbf{C} \hat{\mathbf{U}} \right] dx dt = 0, \forall \hat{\mathbf{W}}(x, t). \quad (2.12)$$

As soluções aproximadas $\hat{\zeta}$ e \hat{u} são interpoladas sobre cada elemento e (ver Figura 2.3) por:

$$\hat{\zeta}(x, t) = N_1(\bar{x}, t) \hat{\zeta}_i^{(n)} + N_2(\bar{x}, t) \hat{\zeta}_{i+1}^{(n)} + N_3(\bar{x}, t) \hat{\zeta}_{i+1}^{(n+1)} + N_4(\bar{x}, t) \hat{\zeta}_i^{(n+1)}, \quad (2.13a)$$

$$\hat{u}(x, t) = N_1(\bar{x}, t) \hat{u}_i^{(n)} + N_2(\bar{x}, t) \hat{u}_{i+1}^{(n)} + N_3(\bar{x}, t) \hat{u}_{i+1}^{(n+1)} + N_4(\bar{x}, t) \hat{u}_i^{(n+1)}, \quad (2.13b)$$

sendo $\hat{\zeta}_i$ e \hat{u}_i os valores nodais das variáveis. As funções algébricas de interpolação N_j são funções bilineares no espaço e no tempo, dadas por:

$$N_1 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x} \right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \quad (2.14a)$$

$$N_2 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \quad (2.14b)$$

$$N_3 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (2.14c)$$

$$N_4 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (2.14d)$$

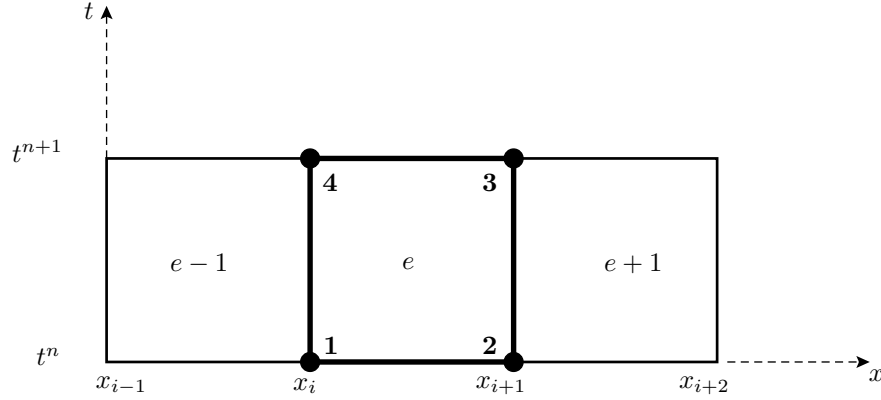


Figura 2.3: Discretização espaço-temporal. Numeração local dos nós do e -ésimo elemento.

onde \bar{x} e \bar{t} são coordenadas locais sobre o elemento, e $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta t = t^{(n+1)} - t^{(n)}$. As funções de peso para a formulação de Petrov-Galerkin são funções vectoriais, lineares no espaço e quadráticas no tempo, definidas em cada elemento por:

$$\mathbf{W}_i(x, t) = \mathbf{P}_i + \frac{\Delta x}{2C_0} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{A}_x^\ell)^T \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial x} + \frac{\Delta x \Delta t}{4C_0} \mathbf{T}_\beta (\mathbf{A}_x^\ell)^T \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i}{\partial x \partial t}, \quad (2.15)$$

onde C_0 é a celeridade característica da versão linear e não dispersiva do modelo de onda em causa. Pode-se mostrar (Avilez-Valente, 2000, Avilez-Valente e Seabra-Santos, 2002) que para os modelos de Boussinesq e de Seabra-Santos temos

$$(C_0)_{\text{Bou}} = (C_0)_{\text{Sea}} = \sqrt{gh}, \quad (2.16)$$

enquanto que para o modelo de Beji-Nadaoka

$$(C_0)_{\text{Beji}} = C_p \sqrt{\frac{C_p}{(C_g)_p}}. \quad (2.17)$$

Na equação (2.15), $\mathbf{P}_i = (P_i, P_i)^T$, a matriz \mathbf{A}_x^ℓ é a restrição da matriz \mathbf{A}_x ao caso linear, conforme o modelo de onda, e é,

$$(\mathbf{A}_x^\ell)_{\text{Bou}} = (\mathbf{A}_x^\ell)_{\text{Sea}} = \begin{bmatrix} 0 & h \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (\mathbf{A}_x^\ell)_{\text{Beji}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_p^2}{g} \\ g C_p^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

e os tensores \mathbf{T}_α e \mathbf{T}_β são dados por

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

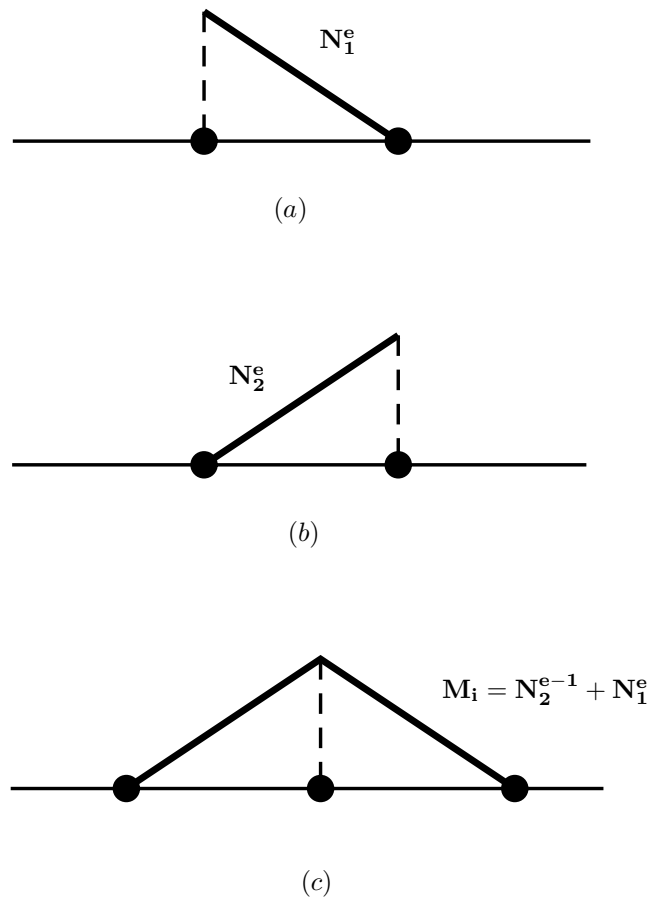


Figura 2.4: Discretização espacial para $t=0$. Funções de forma lineares. (a) Função de forma local no ponto 1 do e -ésimo elemento. (b) Função de forma local no ponto 2 do e -ésimo elemento. (c) Função de forma global no i -ésimo ponto do domínio.

As funções peso escalares P_i são apenas definidas para os nós para os quais $\bar{t} = \Delta t$, onde a solução é calculada a cada passo de tempo (Yu e Heinrich, 1986):

$$P_3 = 6 \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (2.20a)$$

$$P_4 = 6 \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right). \quad (2.20b)$$

Os coeficientes escalares β_1 e β_2 são escolhidos por forma a eliminar os erros de dispersão numérica de segunda ordem, enquanto o coeficiente α introduz um termo dissipativo de terceira ordem na equação da conservação da quantidade de movimento por forma a garantir a estabilidade do esquema numérico. Os coeficientes α , β_1 e β_2 dependem do modelo de onda utilizado e estão indicados em §2.2.2. Nos modelos de Boussinesq e de Seabra-Santos, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Finalmente a formulação de Petrov-Galerkin pode ser escrita como um sistema de duas equações escalares, após a integração por partes dos termos dispersivos (para detalhes ver Avilez-Valente, 2000, Avilez-Valente e Seabra-Santos, 2002).

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \left(\hat{\varphi} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4 C_0} h \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x \partial t} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} dx dt = 0, \quad \forall \hat{\varphi}(x, t), \quad (2.21a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \left(\hat{\varphi} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \hat{\varphi} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} \right) dx dt \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) dx dt \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_0^L \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4 C_0} g \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x \partial t} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dx dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\hat{\varphi} \frac{h^2}{3} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} \right]_0^L dt = 0, \forall \hat{\varphi}(x, t). \end{aligned} \quad (2.21b)$$

2.2.2 Esquema de integração temporal

Para a integração no tempo e devido à presença de termos não lineares nos modelos apresentados em §2.1, recorre-se a um esquema iterativo do tipo predictor-corrector. Este esquema tem dois passos correctores sendo os valores dos coeficientes escalares α , β_1 e β_2 escolhidos em cada passo por forma a garantir uma precisão de 4ª ordem na celeridade de fase e um termo dissipativo de 3ª ordem, no segundo passo corrector. O esquema é no entanto condicionalmente estável. Definindo o número de Courant como sendo,

$$Cr = C_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (2.22)$$

mostra-se que a condição de estabilidade para qualquer um dos modelos é $Cr < 1$ (ver §2.2.3).

Modelo de Boussinesq

As equações a resolver para um elemento no interior do domínio, i.e. não afectado pelas condições fronteira, são:

passo predictor

$$\mathbf{M} \Delta \boldsymbol{\zeta} = -\Delta t \mathbf{C} \mathbf{p}^{(n)}, \quad (2.23a)$$

$$\left(\mathbf{M} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K} \right) \Delta \mathbf{u} = -\Delta t \left(\mathbf{C} \mathbf{q}^{(n)} + \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{K} \mathbf{p}^{(n)} \right); \quad (2.23b)$$

passo corrector

$$\mathbf{M} \Delta \boldsymbol{\zeta} = -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^{(n)} \right) + \beta \frac{\Delta t \Delta x}{4 C_0} h \mathbf{K} \Delta \mathbf{q}^*, \quad (2.23c)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K} \right) \Delta \mathbf{u} = & -\frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^{(n)} \right) + \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{K} \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^{(n)} \right) \right] \\ & -\alpha \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{C}^T \Delta \boldsymbol{\zeta}^* + \beta \frac{\Delta t \Delta x}{4 C_0} g \mathbf{K} \Delta \mathbf{p}^*, \end{aligned} \quad (2.23d)$$

onde $\boldsymbol{\zeta}^{(n)}$ e $\mathbf{u}^{(n)}$ são os vectores dos valores nodais das funções $\hat{\zeta}$ e \hat{u} no instante de cálculo $t^{(n)}$, $\mathbf{q}^{(n)}$ é o vector dos valores nodais da energia específica, $\hat{q} = \hat{u}^2/2 + g \hat{\zeta}$, para o mesmo instante, e $\mathbf{p}^{(n)}$ é o vector dos valores nodais da quantidade de movimento específica, $\hat{p} = (h + \hat{\zeta}) \hat{u}$. Os vectores dos incrementos nodais $\Delta \boldsymbol{\zeta}$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{p}$ e $\Delta \mathbf{q}$, são

$$\Delta \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^{(n+1)} - \boldsymbol{\zeta}^{(n)}, \quad (2.24a)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}, \quad (2.24b)$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(n+1)} - \mathbf{p}^{(n)}, \quad (2.24c)$$

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(n+1)} - \mathbf{q}^{(n)}. \quad (2.24d)$$

As quantidades com * correspondem à previsão do passo predictor, para a primeira iteração do passo corrector, ou à previsão da primeira iteração do passo corrector, para a segunda iteração do passo corrector. As matrizes elementares de massa, \mathbf{M} , convecção, \mathbf{C} , e difusão, \mathbf{K} , são dadas por:

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

A escrita das equações (2.23) na forma indicada, permite uma mais rápida resolução dos sistemas de equações, dado que as matrizes do sistema se mantêm constantes ao longo de toda a simulação, apenas variando o vector independente.

Modelo de Seabra-Santos

Para o modelo de Seabra-Santos, a formulação de Petrov-Galerkin do método dos elementos finitos, consiste na resolução das equações:

passo predictor

$$\mathbf{M} \Delta \zeta = - \Delta t \mathbf{C} \mathbf{p}^{(n)}, \quad (2.26a)$$

$$\left(\mathbf{M} + \check{\beta} h^2 \mathbf{K} \right) \Delta \mathbf{u} = - \Delta t \left(\mathbf{C} \mathbf{q}^{(n)} + \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{K} \mathbf{p}^{(n)} \right); \quad (2.26b)$$

passo corrector

$$\mathbf{M} \Delta \zeta = - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^{(n)} \right) + \beta \frac{\Delta t \Delta x}{4 C_0} h \mathbf{K} \Delta \mathbf{q}^*, \quad (2.26c)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \check{\beta} h^2 \mathbf{K} \right) \Delta \mathbf{u} = & - \frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C} \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^{(n)} \right) + \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{K} \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^{(n)} \right) \right] \\ & - \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{C}^T \Delta \zeta^* + \beta \frac{\Delta x \Delta t}{4 C_0} g \mathbf{K} \Delta \mathbf{p}^*. \end{aligned} \quad (2.26d)$$

Novamente, as quantidades com * correspondem à previsão do passo predictor, para a primeira iteração do passo corrector, ou à previsão da primeira iteração do passo corrector, para a segunda iteração do passo corrector. A energia específica é agora redefinida como sendo

$$q = (2 \check{\alpha} - 1) \frac{\bar{u}^2}{2} + g \zeta, \quad (2.27)$$

enquanto a quantidade de movimento específica se conserva como

$$p = (h + \zeta) \bar{u}. \quad (2.28)$$

Modelo de Beji-Nadaoka

Para o modelo de Beji-Nadaoka, a formulação de Petrov-Galerkin do método dos elementos finitos, consiste na resolução das equações:

passo predictor

$$\mathbf{M} \Delta \zeta = - \Delta t \mathbf{C} \mathbf{p}^{(n)}; \quad (2.29a)$$

$$\left(C_p (C_g)_p \mathbf{M} + \frac{C_p (C_p - (C_p)_g)}{k_p^2} \mathbf{K} \right) \Delta \mathbf{u} = - \Delta t \left[C_p^2 \mathbf{C} \mathbf{q}^{(n)} + \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g C_p^2 \mathbf{K} \mathbf{p}^{(n)} \right]; \quad (2.29b)$$

passo corrector

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \zeta &= -\frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^{(n)} \right) + \beta_2 \frac{\Delta t \Delta x}{4 C_0} \frac{C_p^2}{g} \mathbf{K} \Delta \mathbf{q}^*, & (2.29c) \\ \left(C_p (C_g)_p \mathbf{M} + \frac{C_p (C_p - (C_p)_g)}{k_p^2} \mathbf{K} \right) \Delta \mathbf{u} &= -\frac{\Delta t}{2} \left[C_p^2 \mathbf{C} \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^{(n)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g C_p^2 \mathbf{K} \left(\mathbf{p}^{(n+1)*} + \mathbf{p}^{(n)} \right) \right] \\ &\quad - \alpha \frac{\Delta x}{C_0} g C_p^2 \mathbf{C}^T \Delta \zeta^* + \beta_1 \frac{\Delta x \Delta t}{C_0} g C_p^2 \mathbf{K} \Delta \mathbf{p}^*. & (2.29d) \end{aligned}$$

A quantidade de movimento específica e a energia específica são agora redefinidas como sendo:

$$p = \left(\frac{C_p^2}{g} + \zeta \right) u, \quad (2.30)$$

$$q = \frac{u^2}{2} + g \zeta. \quad (2.31)$$

2.2.3 Análise da precisão e da estabilidade

Os coeficientes α e β , ou α , β_1 e β_2 , são definidos por forma a garantir a estabilidade e a precisão da formulação e do processo iterativo. Recorrendo ao método da equação diferencial equivalente (ver Hirsch, 1992, Capítulo 9), Avilez-Valente (2000) determinou as expressões para α e β que conduzem a uma formulação estável, com termo dissipativo de 3ª ordem em $k\Delta x$ e celeridade de fase com precisão de 4ª ordem. As equações diferenciais equivalentes do modelo de Boussinesq são:

$$\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \frac{1}{4} h C_r \Delta x^2 \left(\beta - \frac{C_r}{3} \right) \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x), \quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} &= \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{4} g C_r \Delta x^2 \left(\beta - \frac{C_r}{3} \right) \frac{\partial^3 \hat{\zeta}}{\partial x^3} \\ &\quad - \frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 \alpha (1 - C_r^2) \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x). \end{aligned} \quad (2.32b)$$

O coeficiente de não linearidade, ϵ , é definido como a razão entre a amplitude da onda e a profundidade, i.e.

$$\epsilon = \frac{a}{h}. \quad (2.33)$$

Facilmente se verifica que definindo os coeficientes β e α respectivamente como

$$\beta = \frac{C_r}{3} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{C_r^2}{1 - C_r^2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{C_r^3}{1 - C_r^2}, \quad (2.34)$$

e admitindo que $\epsilon \sim kh \sim k\Delta x$, o esquema é de 3ª ordem, com um termo dissipativo de 3ª ordem na equação de conservação da quantidade de movimento (2.32b).

Recorrendo a uma técnica semelhante, o mesmo autor apresentou uma formulação semelhante para as equações de Seabra-Santos (Avilez-Valente, 2000) e de Beji-Nadaoka a 1-termo (Avilez-Valente e Seabra-Santos, 2002). Para o modelo de Seabra-Santos os coeficientes β e α são iguais aos encontrados para o modelo de Boussinesq, enquanto que para o modelo de Beji-Nadaoka, β_1 , β_2 e α são dados por:

$$\beta_1 = \frac{Cr}{3} \quad , \quad \beta_2 = \frac{1}{Cr} \frac{Cr}{C_p(C_g)_p} \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{Cr^2}{1 - Cr^2} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{Cr^3}{1 - Cr^2}, \quad (2.35)$$

No entanto, a utilização de um esquema de integração no tempo do tipo predictor-corrector pode conduzir a resultados diferentes. O estudo agora proposto, via método de Von Neumann (ver Hirsch, 1992, Capítulo 8), permite estabelecer expressões para α e β para cada passo predictor-corrector. O recurso ao método de Von-Neumann no entanto restringe o estudo à forma linear das equações (2.23), (2.26) e (2.29).

Relações de dispersão: admitindo que ζ e u são funções que permitem desenvolvimentos em série de Fourier, cada termo dessa série será solução do problema. A solução particular para ζ e u será:

$$\zeta(x, t) = \Re \left(a_\zeta e^{i(kx - \omega t)} e^{-st} \right) = \Re \left(a_\zeta e^{ik \left[x - \left(C + i \frac{s}{k} \right) t \right]} \right), \quad (2.36a)$$

$$u(x, t) = \Re \left(a_u e^{i(kx - \omega t)} e^{-st} \right) = \Re \left(a_u e^{ik \left[x - \left(C + i \frac{s}{k} \right) t \right]} \right), \quad (2.36b)$$

onde a_ζ e a_u são coeficientes complexos, definindo simultaneamente a amplitude e a fase das ondas para $t = 0$ e $x = 0$. Para o modelo de Boussinesq (2.5) linearizado, a celeridade de fase é:

$$C = \sqrt{\frac{gh}{1 + \frac{(kh)^2}{3}}}, \quad (2.37)$$

e da sua expansão em série de Taylor, resulta:

$$\frac{C}{\sqrt{gh}} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{1}{24} (kh)^4 + O((kh)^6). \quad (2.38a)$$

Por outro lado, sendo o modelo não dissipativo, o seu coeficiente de amortecimento é nulo:

$$s = 0. \quad (2.38b)$$

Pretende-se que o esquema numérico tenha uma celeridade de fase que seja uma aproximação de 4ª ordem da celeridade de fase (2.37), e um coeficiente de amortecimento negativo, de 3ª ordem.

Considere-se uma discretização espacial do domínio em elementos finitos de comprimento constante $\Delta x = d$. Definindo um coeficiente de propagação do esquema

numérico $G = e^{-i(\omega+is)\Delta t}$, e substituindo as expressões (2.36) nas equações (2.23), omitindo os termos não lineares, resulta um problema de valores próprios, com duas soluções possíveis. Uma das soluções, G_1 , representa uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo OX , enquanto G_2 representa uma onda que se propaga no sentido negativo do mesmo eixo. Resolvendo este problema para o coeficiente de propagação G , a celeridade de fase adimensionalizada do esquema numérico, \hat{c} , e o seu coeficiente de amortecimento adimensionalizado, \hat{s} , obtêm-se das expressões

$$\hat{c} = \frac{C}{\sqrt{gh}} = \Re\left(i \frac{1}{Cr kd} \log G\right), \quad (2.39a)$$

$$\hat{s} = \frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{s}{k} = \Im\left(i \frac{1}{Cr kd} \log G\right). \quad (2.39b)$$

Passo predictor: as expansões em séries de Taylor multivariadas, de \hat{c} e \hat{s} , para a onda que se desloca no sentido positivo, em torno de $kh = 0$ e $kd = 0$ para o passo predictor são:

$$\hat{c}_{(0)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \left(-\frac{1}{8} \alpha_{(0)}^2 + \frac{1}{2} \alpha_{(0)} Cr - \frac{1}{3} Cr^2\right) (kd)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kd)^2, (kd)^4), \quad (2.40a)$$

$$\begin{aligned} \hat{s}_{(0)} &= \left(-\frac{1}{2} \alpha_{(0)} + \frac{1}{2} Cr\right) kd + \left(-\frac{1}{24} \alpha_{(0)} - \frac{1}{4} Cr^3 - \frac{1}{4} Cr \alpha_{(0)}^2 + \frac{1}{2} Cr^2 \alpha_{(0)}\right) (kd)^3 \\ &+ \left(\frac{1}{6} \alpha_{(0)} - \frac{1}{6} Cr\right) kd (kh)^2 + O((kd)^5, (kh)^2 (kd)^3). \end{aligned} \quad (2.40b)$$

O índice $_{(0)}$ indica o valor calculado para o passo predictor. Fazendo $\alpha_{(0)} = Cr$, mantém-se um erro dispersivo de 2ª ordem, e elimina-se a dissipação de 1ª ordem, conservando-se um termo dissipativo, estabilizador, de 3ª ordem no passo predictor:

$$\hat{c}_{(0)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{1}{24} Cr^2 (kd)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kd)^2, (kd)^4), \quad (2.41a)$$

$$\hat{s}_{(0)} = -\frac{1}{24} Cr (kd)^3 + O((kd)^5, (kh)^2 (kd)^3). \quad (2.41b)$$

Neste passo o coeficiente β não intervém, sendo portanto $\beta_{(0)} = 0$. Na Figura 2.5(b) está representada a celeridade de fase adimensionalizada \hat{c}_0 em comparação com a celeridade para o modelo de Airy. Pode-se observar que para $kd < 1$ a celeridade de fase é reproduzida correctamente pelo passo predictor. Este comportamento já não se verifica para $kd > 1$.

Através do critério de estabilidade de Von Neumann, um esquema numérico é estável se e só se $|G| \leq 1$ para qualquer valor do número de onda k . Assim, e através da análise da Figura 2.5(a) pode-se observar que a estabilidade do esquema está garantida para qualquer valor do número de onda.

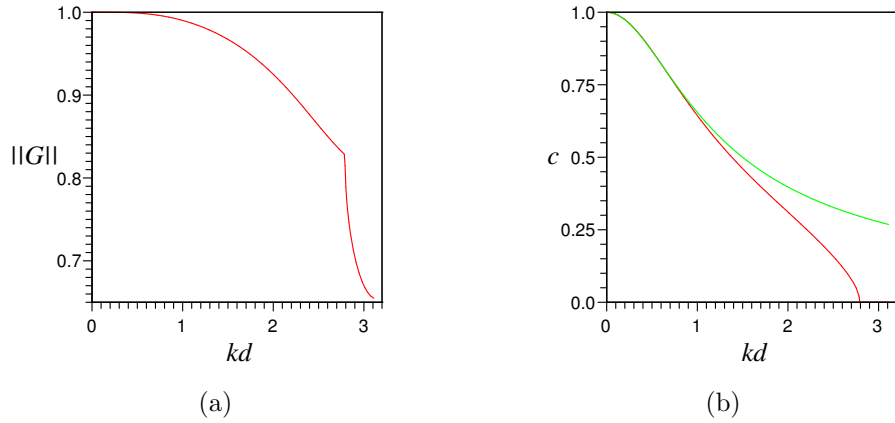


Figura 2.5: Passo predictor. $kh = 2kd$ e $Cr = 0.7$. (a) Módulo do coeficiente de propagação para o passo predictor; (b) Celeridades de fase para o passo predictor (■) e de Boussinesq (■).

1ª iteração do passo corrector: neste passo, tanto o coeficiente α como o coeficiente β têm de ser definidos. As expansões em série de Taylor ficam:

$$\hat{c}_{(1)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \left(\frac{1}{4} \beta_{(1)} Cr - \frac{1}{12} Cr^2 \right) (kd)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kd)^2, (kd)^4), \quad (2.42a)$$

$$\hat{s}_{(1)} = \left(\frac{1}{8} \beta_{(1)} Cr^2 - \frac{1}{24} \alpha_{(1)} + \frac{1}{16} Cr^2 \alpha_{(1)} - \frac{1}{16} Cr^3 \right) (kd)^3 + O((kh)^2 (kd)^3, (kd)^5). \quad (2.42b)$$

Escolhendo $\beta_{(1)} = Cr/3$ é obtida uma aproximação de 4ª ordem para a velocidade de fase. No entanto, ainda não é possível escolher uma expressão para α semelhante à obtida pelo método da equação diferencial equivalente (2.34). Fazendo $\alpha_{(1)} = 0$, é possível manter um termo estabilizador de 3ª ordem, resultando:

$$\hat{c}_{(1)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kd)^2, (kd)^4), \quad (2.43a)$$

$$\hat{s}_{(1)} = -\frac{1}{48} Cr^3 (kd)^3 + O((kh)^2 (kd)^3, (kd)^5). \quad (2.43b)$$

Ao analisar a Figura 2.6(b), observa-se que após a 1ª iteração do passo corrector, a celeridade de fase para o modelo de Boussinesq, aproxima-se mais da celeridade de fase analítica dada pelo modelo linear de Airy. A estabilidade da formulação após a 1ª iteração do passo corrector continua garantida para qualquer valor do número de onda sendo a dissipação inferior à do passo predictor. (cf. Figura 2.6(a)).

2ª iteração do passo corrector: para esta iteração as expansões em série de Taylor são

$$\hat{c}_{(2)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \left(\frac{1}{4} \beta_{(2)} Cr - \frac{1}{12} Cr^2 \right) (kd)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kd)^2, (kd)^4), \quad (2.44a)$$

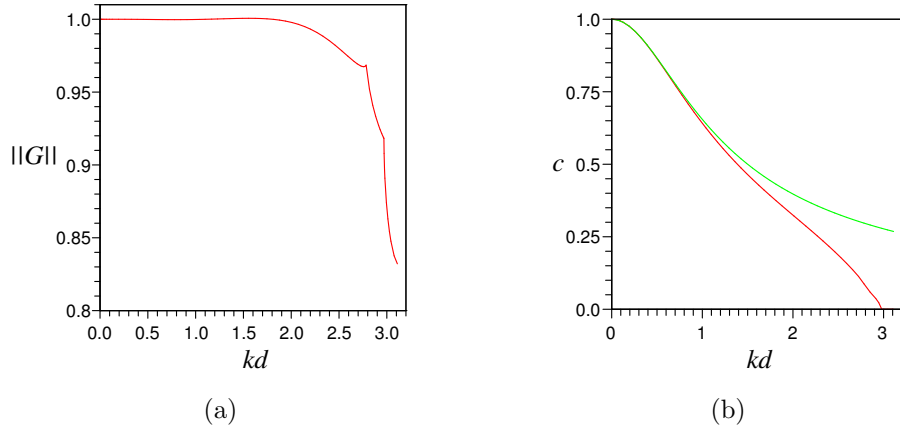


Figura 2.6: 1ª Iteração do passo corrector. $kh = 2kd$ e $Cr = 0.7$. (a) Módulo do coeficiente de propagação para a 1ª iteração do passo corrector; (b) Celeridades de fase para a 1ª iteração do passo corrector (■) e de Boussinesq (■).

$$\hat{s}_{(2)} = \left(\frac{1}{8} \beta_{(2)} Cr^2 - \frac{1}{24} Cr^3 + \frac{1}{24} \alpha_{(2)} Cr^2 - \frac{1}{24} \alpha_{(2)} \right) (kd)^3 + O((kh)^2 (kd)^3, (kd)^5). \quad (2.44b)$$

O termo dispersivo pode ser corrigido até à 4ª ordem fazendo $\beta_{(2)} = Cr/3$. Um termo dissipativo de 3ª ordem é obtido para

$$\alpha_{(2)} = \frac{Cr^2}{1 - Cr^2} \quad \text{ou} \quad \alpha_{(2)} = \frac{Cr^3}{1 - Cr^2}, \quad (2.45)$$

precisamente as expressões obtidas através da análise efectuada via método da equação diferencial equivalente, com a condição de estabilidade $Cr < 1$. Com estas escolhas para $\beta_{(2)}$ e $\alpha_{(2)}$, as expansões de Taylor ficam da forma:

$$\hat{c}_{(2)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kd)^2, (kd)^4), \quad (2.46a)$$

$$\hat{s}_{(2)} = -\frac{1}{24} Cr^3 (kd)^3 + O((kh)^2 (kd)^3, (kd)^5). \quad (2.46b)$$

Note-se que a 1ª iteração do passo corrector é menos dissipativa do que a 2ª iteração para a mesma precisão, o que é evidente da comparação das Figuras 2.6(a) e 2.7(a), obtida para $\alpha = Cr^2/(1 - Cr^2)$. Procurou-se no entanto que o esquema predictor-corrector convergisse para as equações diferenciais equivalentes (2.32) as quais incorporam também os termos não lineares.

De forma análoga determinam-se os coeficientes α e β para o modelo de Seabra-Santos, e α , β_1 e β_2 para o modelo de Beji-Nadaoka, tendo em conta a relação de dispersão característica de cada modelo. Resumindo:

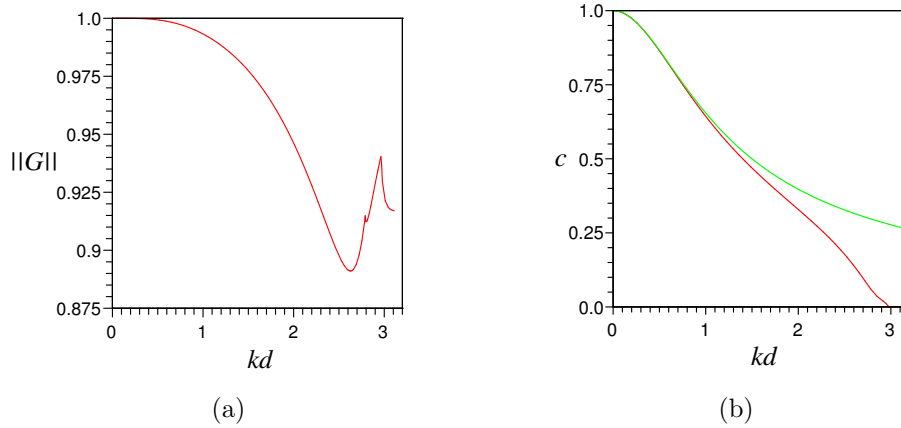


Figura 2.7: 2ª Iteração do passo corrector. $kh = 2kd$ e $Cr = 0.7$. (a) Módulo do coeficiente de propagação para a 2ª iteração do passo corrector; (b) Celeridades de fase para a 2ª iteração do passo corrector (■) e de Boussinesq (■).

modelos de Boussinesq e de Seabra-Santos

- passo predictor

$$\alpha_{(0)} = Cr \quad \text{e} \quad \beta_{(0)} = 0, \quad (2.47a)$$

- 1ª iteração do passo corrector

$$\alpha_{(1)} = 0 \quad \text{e} \quad \beta_{(1)} = \frac{Cr}{3}, \quad (2.47b)$$

- 2ª iteração do passo corrector

$$\alpha_{(2)} = \frac{Cr^2}{1 - Cr^2} \quad \text{ou} \quad \alpha_{(2)} = \frac{Cr^3}{1 - Cr^2} \quad \text{e} \quad \beta_{(2)} = \frac{Cr}{3}; \quad (2.47c)$$

modelo de Beji-Nadaoka

- passo predictor

$$\alpha_{(0)} = Cr \quad \text{e} \quad \beta_{1(0)} = \beta_{2(0)} = 0, \quad (2.48a)$$

- 1ª iteração do passo corrector

$$\alpha_{(1)} = 0, \quad \beta_{1(1)} = \frac{Cr}{3} \quad \text{e} \quad \beta_{2(1)} = \frac{1}{3} \frac{Cr}{C_p (C_g)_p}, \quad (2.48b)$$

- 2ª iteração do passo corrector

$$\alpha_{(2)} = \frac{Cr^2}{1 - Cr^2} \quad \text{ou} \quad \alpha_{(2)} = \frac{Cr^3}{1 - Cr^2},$$

$$\beta_{1(2)} = \frac{Cr}{3} \quad \text{e} \quad \beta_{2(2)} = \frac{1}{3} \frac{Cr}{C_p (C_g)_p}. \quad (2.48c)$$

Capítulo 3

Formulação Matemática 2DH

3.1 Modelo de Boussinesq a 2DH

Considerando o modelo bidimensional de Boussinesq e considerando fundos de variação suave, o problema clássico consiste em encontrar a função vectorial $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, t)$ tal que:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{B}_{xy} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x \partial y \partial t} + \mathbf{B}_{yy} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial y^2 \partial t} + \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

$\forall P \in Q, (3.1a)$

sendo P o ponto de coordenadas (x, y, t) , e Q o domínio espaço-temporal definido como $Q = \Omega \times T$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $T = [0, +\infty[$. O vector \mathbf{U} e as matrizes \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{B}_{xx} , \mathbf{B}_{xy} , \mathbf{B}_{yy} e \mathbf{C} são definidos por:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta & 0 \\ g & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & h + \zeta \\ 0 & \bar{v} & 0 \\ g & 0 & \bar{v} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}_{xx} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{xy} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}_{yy} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1b)$$

3.2 Formulação de Petrov-Galerkin

A formulação de Petrov-Galerkin (Avilez-Valente e Seabra-Santos, 2000) para o modelo (3.1) baseada numa discretização em elementos finitos no espaço e no tempo, será encontrar a função vectorial aproximada $\hat{U}(x, y, t) = (\hat{\zeta}, \hat{u}, \hat{v})$ definida em $]0, L[\times]t^{(n)}, t^{(n+1)[$ que satisfaz a equação:

$$\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{W}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} + \mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^3 \hat{U}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{B}_{xy} \frac{\partial^3 \hat{U}}{\partial x \partial y \partial t} + \mathbf{B}_{yy} \frac{\partial^3 \hat{U}}{\partial y^2 \partial t} + \mathbf{C} \hat{U} \right) d\Omega dt = \mathbf{0}, \forall \hat{\mathbf{W}}(x, y, t). \quad (3.2)$$

Para o caso bidimensional, a formulação de Petrov-Galerkin foi desenvolvida para dois tipos de elementos: quadriláteros e triângulos.

Para o caso dos quadriláteros, as soluções aproximadas $\hat{\zeta}$, \hat{u} e \hat{v} são interpoladas sobre cada elemento e (ver Figura 3.1) por:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(x, y, t) = & N_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i,j}^{(n)} + N_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1,j}^{(n)} + N_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1,j+1}^{(n)} \\ & + N_4(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i,j+1}^{(n)} + N_5(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i,j}^{(n+1)} + N_6(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1,j}^{(n+1)} \\ & + N_7(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1,j+1}^{(n+1)} + N_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i,j+1}^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (3.3a)$$

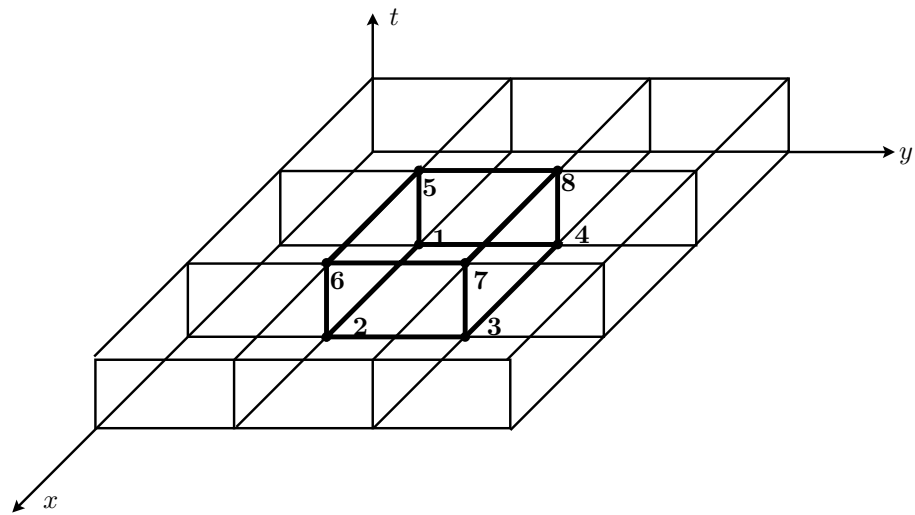
$$\begin{aligned} \hat{u}(x, y, t) = & N_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i,j}^{(n)} + N_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i+1,j}^{(n)} + N_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i+1,j+1}^{(n)} \\ & + N_4(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i,j+1}^{(n)} + N_5(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i,j}^{(n+1)} + N_6(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i+1,j}^{(n+1)} \\ & + N_7(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i+1,j+1}^{(n+1)} + N_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i,j+1}^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (3.3b)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, y, t) = & N_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i,j}^{(n)} + N_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i+1,j}^{(n)} + N_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i+1,j+1}^{(n)} \\ & + N_4(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i,j+1}^{(n)} + N_5(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i,j}^{(n+1)} + N_6(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i+1,j}^{(n+1)} \\ & + N_7(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i+1,j+1}^{(n+1)} + N_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i,j+1}^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (3.3c)$$

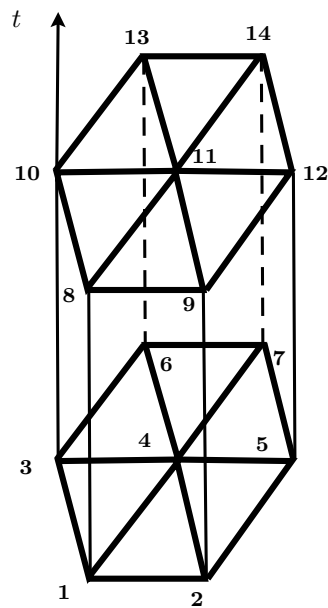
sendo $\hat{\zeta}_i$, \hat{u}_i e \hat{v}_i os valores nodais das variáveis ζ , u e v , e \bar{x} , \bar{y} e \bar{t} as coordenadas locais sobre o elemento.

As numerações locais dos nós para o elemento quadrilátero e para o elemento triangular, estão representadas nas Figuras 3.2(a) e 3.2(b), respectivamente.

As funções de interpolação N_j para os quadriláteros, representadas na Figura



(a)



(b)

Figura 3.1: Discretização espaço-temporal para o caso de (a) elementos quadriláteros e (b) elementos triangulares.

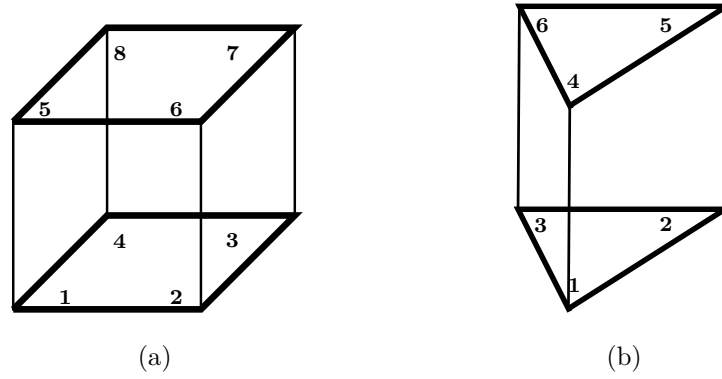


Figura 3.2: Numeração local dos nós para o elemento com (a) forma quadrilátera e (b) forma triangular.

3.3, são funções bilineares no espaço e lineares no tempo, dadas por:

$$N_1 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (3.4a)$$

$$N_2 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (3.4b)$$

$$N_3 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{y}}{\Delta y} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (3.4c)$$

$$N_4 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{y}}{\Delta y} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (3.4d)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (3.4e)$$

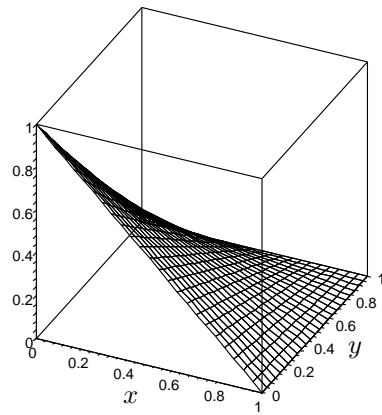
$$N_6 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (3.4f)$$

$$N_7 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (3.4g)$$

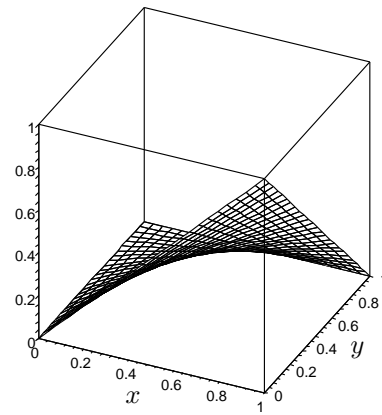
$$N_8 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (3.4h)$$

onde \bar{x} , \bar{y} e \bar{t} são coordenadas locais sobre o elemento e $\Delta x = x_{i+1,j} - x_{i,j}$, $\Delta y = y_{i,j+1} - y_{i,j}$, e $\Delta t = t^{(n+1)} - t^{(n)}$.

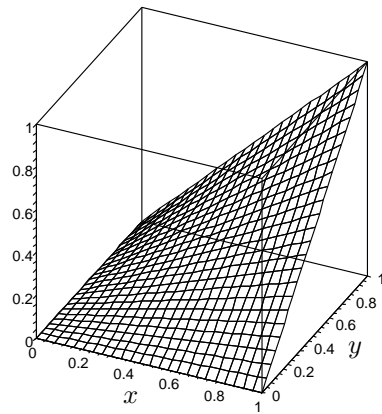
Para os triângulos, as funções de interpolação L_j (ver Figura 3.4) lineares no espaço e lineares no tempo, são dadas por:



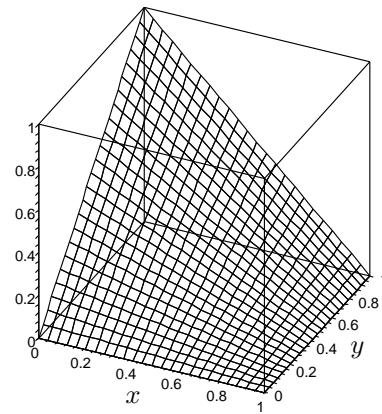
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.3: Discretização espacial das funções de forma para o elemento quadrilátero. (a) N_1 , (b) N_2 , (c) N_3 e (d) N_4 .

- Tipo 1

$$\begin{aligned}
L_1 &= \left(d^2 - \bar{x}d - \frac{\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \\
L_2 &= \left(\bar{x}d - \frac{\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \\
L_3 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \\
L_4 &= \left(d^2 - \bar{x}d - \frac{\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \\
L_5 &= \left(\bar{x}d - \frac{\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \\
L_6 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \frac{\bar{t}}{\Delta t},
\end{aligned} \tag{3.5a}$$

- Tipo 2

$$\begin{aligned}
L_1 &= \left(d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \\
L_2 &= \left(-\frac{d^2}{2} + \bar{x}d + \frac{\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \\
L_3 &= \left(\frac{d^2}{2} - \bar{x}d + \frac{\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \\
L_4 &= \left(d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \\
L_5 &= \left(-\frac{d^2}{2} + \bar{x}d + \frac{\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \\
L_6 &= \left(\frac{d^2}{2} - \bar{x}d + \frac{\sqrt{3}}{3}d\bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t},
\end{aligned} \tag{3.6a}$$

onde \bar{x} , \bar{y} e \bar{t} são coordenadas locais sobre os elementos, $d = \Delta x = x_{i+1,j} - x_{i,j}$ e $\Delta t = t^{(n+1)} - t^{(n)}$. As funções de peso para a formulação de Petrov-Galerkin são funções vectoriais, bilineares (quadriláteros) ou lineares (triângulos) no espaço, e quadráticas no tempo, definidas em cada elemento por (Avilez-Valente e Seabra-

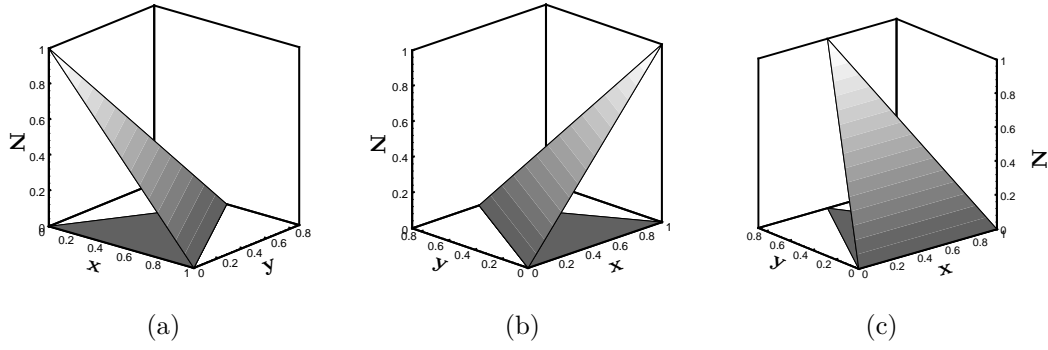


Figura 3.4: Discretização espacial das funções de forma para o elemento triangular. (a) N_1 , (b) N_2 e (c) N_3 .

Santos, 2000):

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i(x, y, t) = & \mathbf{P}_i + \alpha_x \frac{\Delta x}{2C_0} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{A}_x^\ell)^T \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial x} + \alpha_y \frac{\Delta y}{2C_0} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{A}_y^\ell)^T \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial y} \\ & + \beta_x \frac{\Delta x \Delta t}{4C_0} \mathbf{T}_\beta (\mathbf{A}_x^\ell)^T \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i}{\partial x \partial t} + \beta_y \frac{\Delta y \Delta t}{4C_0} \mathbf{T}_\beta (\mathbf{A}_y^\ell)^T \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i}{\partial y \partial t} \\ & + \frac{\Delta x \Delta y \Delta t}{8h^2/3} \mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_{xy}^T \frac{\partial^3 \mathbf{P}_i}{\partial x \partial y \partial t}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Na equação (3.7), $\mathbf{P}_i = (P_i, P_i, P_i)^T$, as matrizes \mathbf{A}_x^ℓ e \mathbf{A}_y^ℓ são

$$(\mathbf{A}_x^\ell) = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (\mathbf{A}_y^\ell) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

e os tensores \mathbf{T}_α , \mathbf{T}_β e \mathbf{T}_γ são dados por

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

As funções peso escalares P_i são apenas definidas para os nós para os quais $\bar{t} = \Delta t$, onde a solução é calculada a cada passo de tempo. Para os quadriláteros serão (Yu e Heinrich, 1987):

$$P_5 = 6 \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (3.10a)$$

$$P_6 = 6 \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (3.10b)$$

$$P_7 = 6 \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (3.10c)$$

$$P_8 = 6 \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right). \quad (3.10d)$$

Por analogia, para os triângulos será:

- Tipo 1

$$P_4 = 6 \left(d^2 - \bar{x} d - \frac{d}{\sqrt{3}} \bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \quad (3.11a)$$

$$P_5 = 6 \left(\bar{x} d - \frac{d}{\sqrt{3}} \bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \quad (3.11b)$$

$$P_6 = 6 \frac{2}{\sqrt{3}} d \bar{y} \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right); \quad (3.11c)$$

- Tipo 2

$$P_4 = 6 \left(d^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} d \bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \quad (3.12a)$$

$$P_5 = 6 \left(-\frac{d^2}{2} + \bar{x} d + \frac{d}{\sqrt{3}} \bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right), \quad (3.12b)$$

$$P_6 = 6 \left(\frac{d^2}{2} - \bar{x} d + \frac{d}{\sqrt{3}} \bar{y} \right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right). \quad (3.12c)$$

3.3 Esquema de integração temporal

As equações a resolver para um elemento no interior do domínio, i.e. não afectado pelas condições fronteira, são:

passo predictor

$$\mathbf{M} \Delta \zeta = -\Delta t \left(\mathbf{C}_x \mathbf{p}_x^{(n)} + \mathbf{C}_y \mathbf{p}_y^{(n)} \right), \quad (3.13a)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}_{xx} \right) \Delta \mathbf{u} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}_{xy} \Delta \mathbf{v} = -\Delta t \left(\mathbf{C}_x \mathbf{q}^{(n)} + \alpha_x \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{K}_{xx} \mathbf{p}_x^{(n)} \right. \\ \left. + \alpha_x \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{K}_{xy} \mathbf{p}_y^{(n)} \right), \end{aligned} \quad (3.13b)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}_{yy} \right) \Delta \mathbf{v} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}_{xy} \Delta \mathbf{u} = -\Delta t \left(\mathbf{C}_y \mathbf{q}^{(n)} + \alpha_y \frac{\Delta y}{C_0} g \mathbf{K}_{yx} \mathbf{p}_x^{(n)} \right. \\ \left. + \alpha_y \frac{\Delta y}{C_0} g \mathbf{K}_{yy} \mathbf{p}_y^{(n)} \right); \end{aligned} \quad (3.13c)$$

passo corrector

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \zeta = & -\frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C}_x \left(\mathbf{p}_x^{(n+1)*} + \mathbf{p}_x^{(n)} \right) + \mathbf{C}_y \left(\mathbf{p}_y^{(n+1)*} + \mathbf{p}_y^{(n)} \right) \right] \\ & + \beta_x \frac{\Delta t \Delta x}{4 C_0} h \mathbf{K}_{xx} \Delta \mathbf{q}^* + \beta_y \frac{\Delta t \Delta y}{4 C_0} h \mathbf{K}_{yy} \Delta \mathbf{q}^*, \end{aligned} \quad (3.13d)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}_{xx} \right) \Delta \mathbf{u} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}_{xy} \Delta \mathbf{v} = & -\frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C}_x \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^{(n)} \right) \right. \\ & \left. + \alpha_x \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{K}_{xx} \left(\mathbf{p}_x^{(n+1)*} + \mathbf{p}_x^{(n)} \right) + \alpha_x \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{K}_{xy} \left(\mathbf{p}_y^{(n+1)*} + \mathbf{p}_y^{(n)} \right) \right] \\ & - \alpha_x \frac{\Delta x}{C_0} g \mathbf{C}_x^T \Delta \zeta^* + \beta_x \frac{\Delta t \Delta x}{4 C_0} g \mathbf{K}_{xx} \Delta \mathbf{p}_x^* + \beta_x \frac{\Delta t \Delta x}{4 C_0} g \mathbf{K}_{xy} \Delta \mathbf{p}_y^* \\ & - \frac{\Delta t \Delta x \Delta y}{8} \gamma_{33} \mathbf{T}_{xyy} \Delta \mathbf{q}^*, \end{aligned} \quad (3.13e)$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}_{yy} \right) \Delta \mathbf{v} + \frac{h^2}{3} \mathbf{K}_{yx} \Delta \mathbf{u} = & -\frac{\Delta t}{2} \left[\mathbf{C}_y \left(\mathbf{q}^{(n+1)*} + \mathbf{q}^{(n)} \right) \right. \\ & \left. + \alpha_y \frac{\Delta y}{C_0} g \mathbf{K}_{yx} \left(\mathbf{p}_x^{(n+1)*} + \mathbf{p}_x^{(n)} \right) + \alpha_y \frac{\Delta y}{C_0} g \mathbf{K}_{yy} \left(\mathbf{p}_y^{(n+1)*} + \mathbf{p}_y^{(n)} \right) \right] \\ & - \alpha_y \frac{\Delta y}{C_0} g \mathbf{C}_y^T \Delta \zeta^* + \beta_y \frac{\Delta t \Delta y}{4 C_0} g \mathbf{K}_{yx} \Delta \mathbf{p}_x^* + \beta_y \frac{\Delta t \Delta y}{4 C_0} g \mathbf{K}_{yy} \Delta \mathbf{p}_y^* \\ & - \frac{\Delta t \Delta x \Delta y}{8} \gamma_{22} \mathbf{T}_{xyx} \Delta \mathbf{q}^*, \end{aligned} \quad (3.13f)$$

onde $\zeta^{(n)}$, $\mathbf{u}^{(n)}$ e $\mathbf{v}^{(n)}$ são os vectores dos valores nodais das funções $\hat{\zeta}$, \hat{u} e \hat{v} no instante de cálculo t_n , $\mathbf{q}^{(n)}$ é o vector dos valores nodais da energia específica, $\hat{q} = \hat{u}^2/2 + \hat{v}^2/2 + g \hat{\zeta}$ para o mesmo instante, $\mathbf{p}_x^{(n)}$ e $\mathbf{p}_y^{(n)}$ são os vectores dos valores nodais da quantidade de movimento específica $\hat{p}_x = (h + \hat{\zeta}) \hat{u}$ e $\hat{p}_y = (h + \hat{\zeta}) \hat{v}$, respectivamente. Os vectores dos incrementos nodais $\Delta \zeta$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{v}$, $\Delta \mathbf{p}_x$, $\Delta \mathbf{p}_y$ e $\Delta \mathbf{q}$, são

$$\Delta \zeta = \zeta^{(n+1)} - \zeta^{(n)}, \quad (3.14a)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}, \quad (3.14b)$$

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(n+1)} - \mathbf{v}^{(n)}, \quad (3.14c)$$

$$\Delta \mathbf{p}_x = \mathbf{p}_x^{(n+1)} - \mathbf{p}_x^{(n)}, \quad (3.14d)$$

$$\Delta \mathbf{p}_y = \mathbf{p}_y^{(n+1)} - \mathbf{p}_y^{(n)}, \quad (3.14e)$$

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(n+1)} - \mathbf{q}^{(n)}. \quad (3.14f)$$

As quantidades com * correspondem à previsão do passo predictor, para a primeira iteração do passo corrector, ou à previsão da primeira iteração do passo corrector, para a segunda iteração do passo corrector.

As matrizes elementares de massa, \mathbf{M} , convecção, \mathbf{C}_x e \mathbf{C}_y , difusão, \mathbf{K}_{xx} , \mathbf{K}_{xy} ,

\mathbf{K}_{yx} e \mathbf{K}_{yy} , e dispersão, \mathbf{T}_{xyy} e \mathbf{T}_{xyx} , para os quadriláteros, são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{\Delta x \Delta y}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_x &= \frac{\Delta y}{12} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_y &= \frac{\Delta x}{12} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{xx} &= \frac{\Delta y}{6 \Delta x} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{yy} &= \frac{\Delta x}{6 \Delta y} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{xy} = \mathbf{K}_{yx} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_{xyx} &= \frac{1}{2 \Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{T}_{xyy} &= \frac{1}{2 \Delta y} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para os triângulos são:

- Tipo 1

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_x &= \frac{\sqrt{3}}{12} d \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_y &= \frac{d}{12} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{xx} &= \frac{3}{16} \frac{d^2}{A} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{yy} &= \frac{1}{16} \frac{d^2}{A} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{xy} = \mathbf{K}_{yx} &= \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{d^2}{A} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{T}_{xyx} = \mathbf{T}_{xyy} &= 0; \end{aligned} \quad (3.16)$$

- Tipo 2

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_x &= \frac{\sqrt{3}}{12} d \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{C}_y &= \frac{d}{12} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_{xx} &= \frac{3}{16} \frac{d^2}{A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{K}_{yy} &= \frac{1}{16} \frac{d^2}{A} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_{xy} = \mathbf{K}_{yx} &= \frac{\sqrt{3}}{16} \frac{d^2}{A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{T}_{xyx} = \mathbf{T}_{xyy} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Nas expressões (3.16) e (3.17), A é a área do triângulo.

3.4 Análise da precisão e da estabilidade

Tal como para o caso unidimensional, os coeficientes α e β são definidos por forma a garantir a estabilidade e a precisão da formulação e do processo iterativo. Recorrendo ao método da equação diferencial equivalente (ver Hirsch, 1992, Capítulo 9), Avilez-Valente (2000) determinou as expressões para α e β , para elementos quadriláteros, que conduzem a uma formulação estável, com termo dissipativo de 3ª ordem em $k\Delta x$ e celeridade de fase com precisão de 4ª ordem. As equações diferenciais equivalentes do modelo de Boussinesq a 2DH são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}_y}{\partial y} = & -\frac{1}{12} h C_0 \Delta x \Delta t (Cr_x - 3\beta_x) \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial x^2 \partial y} \right) \\ & - \frac{1}{12} h C_0 \Delta y \Delta t (Cr_y - 3\beta_y) \left(\frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x \partial y^2} \right) + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x), \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) = & -\frac{1}{12} \frac{C_0^3}{h} \Delta x \Delta t (3\beta_x - Cr_x) \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right) \\ & - \frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 (1 - Cr_x^2) \alpha_x \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} + \frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 Cr_x^2 \alpha_x \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^3 \partial y} \\ & + \frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 \left(\frac{3}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} Cr_x \gamma_{33} + Cr_x^2 \alpha_x \right) \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x \partial y^3} \right) \\ & + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x), \end{aligned} \quad (3.18b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial y} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) = & -\frac{1}{12} \frac{C_0^3}{h} \Delta y \Delta t (3\beta_y - Cr_y) \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} \right) \\ & - \frac{1}{12} C_0 \Delta y^3 (1 - Cr_y^2) \alpha_y \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} + \frac{1}{12} C_0 \Delta y^3 Cr_y^2 \alpha_y \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x \partial y^3} \\ & + \frac{1}{12} C_0 \Delta y^3 \left(\frac{3}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} Cr_y \gamma_{22} + Cr_y^2 \alpha_y \right) \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\ & + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x). \end{aligned} \quad (3.18c)$$

sendo ϵ o coeficiente de não linearidade, $\epsilon = a/h$, tal como definido no caso unidimensional, e:

$$C_0 = \sqrt{gh}, \quad Cr_x = C_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad e \quad Cr_y = C_0 \frac{\Delta t}{\Delta y}, \quad (3.19)$$

em que C_0 é a celeridade para uma onda longa não dispersiva, e Cr_x e Cr_y são os números de Courant direccionais. Através da análise das equações (3.18), é possível concluir que para garantir uma precisão de 3ª ordem e a estabilidade do esquema numérico os coeficientes β_x e β_y , α_x e α_y são:

$$\beta_x = \frac{Cr_x}{3}, \quad \beta_y = \frac{Cr_y}{3}, \quad \alpha_x = \frac{Cr_x^2}{1 - Cr_x^2} \quad e \quad \alpha_y = \frac{Cr_y^2}{1 - Cr_y^2}, \quad (3.20a)$$

e, admitindo a irrotacionalidade do escoamento, i.e. $\partial v / \partial x = \partial u / \partial y$,

$$\gamma_{22} = -\frac{4}{3} Cr_x \alpha_y \quad e \quad \gamma_{33} = -\frac{4}{3} Cr_y \alpha_x. \quad (3.20b)$$

A condição de estabilidade foi estabelecida heurísticamente, dado que diferentes definições podem ser estabelecidas para α_x e α_y e para γ_{22} e γ_{33} . As equações

diferenciais equivalentes, resultam então em:

$$\frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}_y}{\partial y} = O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x), \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) &= -\frac{1}{12} C_0 C r_x^2 \Delta x^3 \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} \\ &- \frac{1}{12} C_0 \frac{C r_x^4}{1 - C r_x^2} \Delta x^3 \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial y^4} + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x), \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial y} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) &= -\frac{1}{12} C_0 \frac{C r_y^4}{1 - C r_y^2} \Delta y^3 \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^4} \\ &- \frac{1}{12} C_0 C r_y^2 \Delta y^3 \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x). \end{aligned} \quad (3.21c)$$

No entanto, a utilização de um esquema de integração no tempo do tipo predictor-corrector pode conduzir a resultados diferentes. O estudo agora proposto, via método de Von Neumann (ver Hirsch, 1992, Capítulo 8) permite estabelecer expressões para α_x , α_y , β_x e β_y para cada passo predictor-corrector, embora neste caso o estudo seja restringido à versão linearizada das equações (3.13).

Relações de dispersão: admitindo que ζ , u e v são funções que permitem desenvolvimentos em série de Fourier, cada termo dessa série será solução do problema. A solução particular para ζ , u e v será então:

$$\zeta(x, y, t) = \Re \left(\zeta_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} e^{-st} \right), \quad (3.22a)$$

$$\bar{u}(x, y, t) = \Re \left(\bar{u}_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} e^{-st} \right), \quad (3.22b)$$

$$\bar{v}(x, y, t) = \Re \left(\bar{v}_0 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} e^{-st} \right). \quad (3.22c)$$

Pretende-se que o esquema numérico tenha uma celeridade de fase que seja uma aproximação de 4ª ordem da celeridade de fase do modelo de Airy (2.37), associada a um termo dissipativo de 3ª ordem, semelhante ao conseguido em (3.21). Recordando que o coeficiente de propagação do esquema numérico é dado por $G = e^{-i(\omega + is)\Delta t}$, e resolvendo o problema de valores próprios resultante da substituição das expressões (3.22) nas equações (3.13) para o coeficiente de propagação G , fazendo $\ell = \Delta x = \Delta y$ no caso dos quadriláteros, a celeridade de fase adimensionalizada do esquema numérico e o seu coeficiente de amortecimento adimensionalizado obtêm-se das expressões:

$$\hat{c} = \frac{C}{\sqrt{gh}} = \Re \left(i \frac{C_0}{C r k \ell} \log G \right), \quad (3.23a)$$

$$\hat{s} = \frac{1}{\sqrt{gh}} \frac{s}{k} = \Im \left(i \frac{C_0}{C r k \ell} \log G \right). \quad (3.23b)$$

Considerando um caso particular, em que a onda se propaga no sentido positivo da direcção OX , apresentam-se a seguir as expressões para \hat{c} e \hat{s} para os passos predictor e corrector, para elementos quadriláteros.

Passo predictor: as expansões em séries de Taylor multivariadas, de \hat{c} e \hat{s} em torno de $kh = 0$ e $kl = 0$ para o passo predictor são

$$\hat{c}_{(0)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \left(-\frac{1}{8} \alpha_{x(0)}^2 + \frac{1}{2} \alpha_{x(0)} Cr - \frac{1}{3} Cr^2 \right) (kl)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kl)^2, (kl)^4), \quad (3.24a)$$

$$\begin{aligned} \hat{s}_{(0)} = & \left(-\frac{1}{2} \alpha_{x(0)} + \frac{1}{2} Cr + \frac{1}{6} (kh)^2 \alpha_{x(0)} - \frac{1}{6} Cr (kh)^2 \right) kl \\ & - \left(\frac{1}{24} \alpha_{x(0)} - \frac{1}{4} Cr^3 - \frac{1}{4} Cr \alpha_{x(0)}^2 + \frac{1}{2} Cr^2 \alpha_{x(0)} \right) (kl)^3 + O((kl)^5, (kh)^2 (kl)^3). \end{aligned} \quad (3.24b)$$

Fazendo $\alpha_{x(0)} = Cr$, mantém-se um erro dispersivo de 2ª ordem, e elimina-se a dissipação de 1ª ordem, conservando-se um termo dissipativo, estabilizador, de 3ª ordem no passo predictor:

$$\hat{c}_{(0)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{1}{24} Cr^2 (kl)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kl)^2, (kl)^4), \quad (3.25a)$$

$$\hat{s}_{(0)} = -\frac{1}{24} Cr (kl)^3 + O((kl)^5, (kh)^2 (kl)^3). \quad (3.25b)$$

1ª iteração do passo corrector: neste caso estão presentes os coeficientes $\alpha_{x(1)}$ e $\beta_{x(1)}$. As expansões em série de Taylor ficam

$$\hat{c}_{(1)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \left(-\frac{1}{12} Cr^2 + \frac{1}{4} \beta_{x(1)} Cr \right) (kl)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kl)^2, (kl)^4), \quad (3.26a)$$

$$\hat{s}_{(1)} = \left(\frac{1}{8} \beta_{x(1)} Cr^2 + \frac{1}{8} \beta_{x(1)} Cr \alpha_{x(1)} - \frac{1}{24} \alpha_{x(1)} - \frac{1}{16} Cr^3 \right) (kl)^3 + O((kh)^2 (kl)^3, (kl)^5). \quad (3.26b)$$

Escolhendo $\beta_{x(1)} = Cr/3$ é obtida uma aproximação de 4ª ordem para a velocidade de fase. No entanto, ainda não é possível escolher uma expressão para $\alpha_{x(1)}$ semelhante à obtida pelo método da equação diferencial equivalente (3.20a). Fazendo $\alpha_{x(1)} = 0$, é possível manter um termo estabilizador de 3ª ordem, resultando:

$$\hat{c}_{(1)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (kl)^2, (kl)^4), \quad (3.27a)$$

$$\hat{s}_{(1)} = -\frac{1}{48} Cr^3 (kl)^3 + O((kh)^2 (kl)^3, (kl)^5). \quad (3.27b)$$

2ª iteração do passo corrector: para esta iteração as expansões em série de Taylor são

$$\hat{c}_{(2)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \left(-\frac{1}{12} Cr^2 + \frac{1}{4} \beta_{x(2)} Cr \right) (k\ell)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (k\ell)^2, (k\ell)^4), \quad (3.28a)$$

$$\hat{s}_{(2)} = \left(\frac{1}{8} \beta_{x(2)} Cr^2 - \frac{1}{24} \alpha_{x(2)} - \frac{1}{24} Cr^3 + \frac{1}{8} Cr \alpha_{x(2)} \beta_{x(2)} \right) (k\ell)^3 + O((kh)^2 (k\ell)^3, (k\ell)^5). \quad (3.28b)$$

O termo dispersivo pode ser corrigido até à 4ª ordem fazendo $\beta_{x(2)} = Cr/3$. Um termo dissipativo de 3ª ordem é obtido para $\alpha_{x(2)} = Cr^2/(1 - Cr^2)$, com a condição de estabilidade $Cr < 1$. Com estas escolhas para $\beta_{x(2)}$ e $\alpha_{x(2)}$, as expansões de Taylor ficam da forma:

$$\hat{c}_{(2)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (k\ell)^2, (k\ell)^4), \quad (3.29a)$$

$$\hat{s}_{(2)} = -\frac{1}{24} Cr^3 (k\ell)^3 + O((kh)^2 (k\ell)^3, (k\ell)^5). \quad (3.29b)$$

Desta forma garante-se a convergência com os resultados da análise pelo método da equação diferencial equivalente.

Considerando uma onda propagando-se no sentido positivo da direcção OY , ter-se-iam obtido expressões semelhantes para β e α , resultando:

$$\beta_{y(0)} = 0 \quad , \quad \alpha_{y(0)} = Cr, \quad (3.30a)$$

$$\beta_{y(1)} = \frac{Cr}{3} \quad , \quad \alpha_{y(1)} = 0, \quad (3.30b)$$

$$\beta_{y(2)} = \frac{Cr}{3} \quad , \quad \alpha_{y(2)} = \frac{Cr^2}{1 - Cr^2}. \quad (3.30c)$$

Ao considerar-se uma onda que se propaga numa direcção fazendo 45° com o eixo OX , apenas se conseguiram obter expressões para \hat{c} e \hat{s} para o passo predictor, para elementos quadriláteros.

Passo predictor: as expansões em séries de Taylor multivariadas, de \hat{c} e \hat{s} em torno de $kh = 0$ e $k\ell = 0$ para o passo predictor são

$$\hat{c}_{(0)} = 1 - \frac{1}{6} (kh)^2 + \frac{1}{24} Cr^2 kd^2 + O((kh)^4, (kh)^2 (k\ell)^2, (k\ell)^4), \quad (3.31a)$$

$$\hat{s}_{(0)} = -\frac{1}{96} Cr kd^3 + O((k\ell)^5, (kh)^2 (k\ell)^3). \quad (3.31b)$$

Será conveniente encontrar uma ferramenta mais potente de modo a se conseguirem obter as expressões para os passos correctores, e poder-se fazer a sua aplicação ao modelos de propagação.

A mesma impossibilidade foi encontrada para o caso de funções de forma triangulares.

Capítulo 4

Testes Computacionais

Neste capítulo são descritos os testes computacionais que foram efectuados para comparação dos modelos e da formulação de elementos finitos desenvolvida, sendo também apresentados os seus resultados. Para o modelo unidimensional simulou-se a propagação da ondulação sobre um quebra-mar submerso, tendo sido utilizados os modelos de Boussinesq, Seabra-Santos e Beji-Nadaoka. Os resultados numéricos são comparados com os resultados experimentais obtidos por G. Klopman no laboratório da Delft Hydraulics e descritos por Dingemans (1994), e com resultados numéricos obtidos por uma implementação de diferenças finitas (FUNWAVE) do modelo não linear completo de Wei (Wei e Kirby, 1995). Para o modelo a duas dimensões horizontais, simulou-se a propagação de uma onda solitária em torno de um pilar cilíndrico, e os resultados numéricos são comparados com os resultados experimentais obtidos por Antunes do Carmo et al. (1993b), no canal de ondas do Institut de Mécanique de Grenoble.

4.1 Propagação da agitação sobre um quebra-mar submerso

Para o caso a uma dimensão horizontal foram analisados dois casos de propagação da ondulação sobre um quebra-mar submerso. Estes casos, sem rebentação, são descritos e designados em Dingemans (1994) por Casos A e C. Para cada um dos casos fizeram-se simulações de ondas regulares e irregulares. As ondas regulares têm as condições apresentadas na Tabela 4.1, onde T e H são respectivamente o período e a altura da onda. Para as simulações da agitação irregular, as ondas incidentes têm um espectro do tipo JONSWAP (cf. Goda, 2000, pág. 29) com as condições

Caso	T (s)	H (cm)
A	$2.02\sqrt{2}$	4.0
C	$1.01\sqrt{2}$	8.2

Tabela 4.1: Casos simulados para a propagação de ondas regulares a uma dimensão horizontal.

Caso	T_p (s)	H_s (cm)	γ
A	$2.02\sqrt{2}$	4.0	3.3
C	$1.01\sqrt{2}$	8.2	3.3

Tabela 4.2: Casos simulados para a propagação de agitação irregular a uma dimensão horizontal.

descritas na Tabela 4.2, onde T_p e H_s são respectivamente o período de pico e a altura significativa das ondas, e γ é o factor de forma do espectro.

O nível da água em repouso é $h = 0.86$ m na zona mais profunda do canal e $h = 0.20$ m sobre o coroamento do quebra-mar. O canal numérico tem 43 m de comprimento e está representado na Figura 4.1. São utilizadas 11 sondas cujas posições relativamente à fronteira numérica de barlamar estão indicadas na Tabela 4.3. Nas experiências o comprimento dos elementos foi $\Delta x = 0.1$ m, constante, e a discretização temporal $\Delta t = 1/30$ s.

Nas simulações para as ondas regulares, o registo laboratorial da elevação da superfície livre na sonda 1 foi utilizado como condição fronteira, para a equação da continuidade. Para a equação da quantidade de movimento a condição fronteira é uma condição de radiação de uma onda com celeridade de fase dada pela expressão

$$C = \sqrt{\frac{gh}{1 + \frac{(kh)^2}{3}}}, \quad (4.1)$$

sendo k o número de onda para o período de referência ou de pico e h a profundidade local, resultando

$$\bar{u} = C \frac{\zeta}{h + \zeta}, \quad (4.2)$$

Sonda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Posição (m)	0.0	4.0	6.4	17.0	21.0	23.0	25.0	27.0	30.6	34.0	38.0

Tabela 4.3: Posição das sondas para o estudo a uma dimensão horizontal.

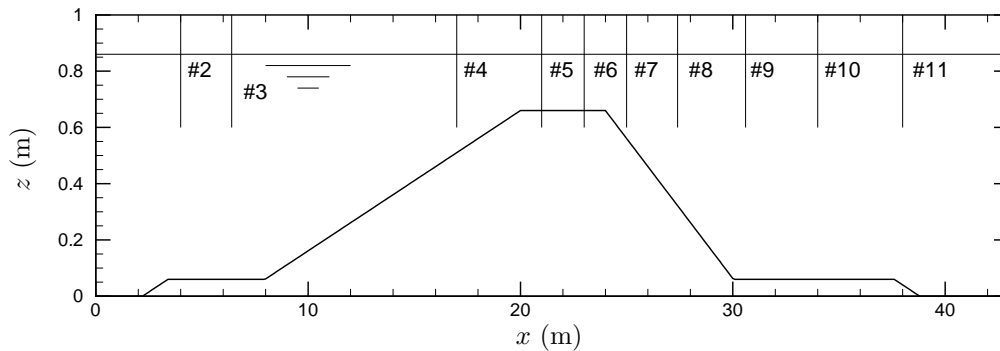


Figura 4.1: Batimetria e posição das sondas 2 a 11.

Na fronteira de barlamar, ζ é a elevação da superfície livre do registo laboratorial, enquanto que na fronteira a sotamar, ζ é a elevação da superfície livre calculada. Nenhuma condição fronteira foi imposta na fronteira de sotamar para a equação da continuidade.

No caso da agitação irregular e como não se dispunha de resultados laboratoriais, foram geradas 20 e 40 realizações (Casos A e C, respectivamente) da onda com duração de 136.53 s cada, com variabilidade estatística (ver Goda, 2000, pág. 367, para detalhes do procedimento), e as suas séries temporais foram utilizadas como condição fronteira. O espectro resultante em cada sonda é obtido como o espectro médio do total das realizações, tendo sido aplicado um filtro de Hanning.

4.1.1 Resultados e discussão

Caso A — Agitação regular

Durante a propagação em água profunda, a onda é essencialmente constituída por apenas uma componente. Ao atingir o talude, e devido à crescente não linearidade, são geradas harmónicas de ordem superior. Sobre o coroamento do quebra-mar e devido a um equilíbrio dinâmico entre os efeitos não linear e dispersivo, estas harmónicas propagam-se em fase com a componente principal, dando praticamente origem a uma onda solitária. Sobre o talude de sotamar verifica-se um aumento da profundidade, pelo que o efeito dispersivo se torna dominante propagando-se as diversas harmónicas com diferentes celeridades.

A análise das séries temporais nas sondas 6, 7, 10 e 11 mostra que os três modelos implementados têm comportamentos bastante semelhantes (ver Figuras 4.2, 4.3 e 4.4) com uma melhor precisão de fase do modelo de Beji-Nadaoka nas sondas 10 e 11, onde o comportamento dispersivo é dominante. O modelo de Seabra-Santos

apresenta também resultados ligeiramente superiores aos do modelo de Boussinesq. O modelo de Wei apresenta os melhores resultados em termos de forma da onda mas não da sua fase (ver Figura 4.5).

Fazendo uma análise de Fourier com evolução temporal do sinal das sondas 6, 7, 10 e 11 (ver Figuras 4.6 a 4.9), verifica-se que nos resultados experimentais é bem patente a presença da componente principal da onda e das suas duas primeiras harmónicas, sendo que a partir da sonda 7, a segunda componente tem uma amplitude igual ou superior à da componente principal. A sotamar da sonda 7, a primeira e a terceira componentes têm amplitudes tendencialmente semelhantes. Os resultados numéricos apresentam comportamentos algo díspares. Os modelos de Boussinesq (cf. Figura 4.6), Seabra-Santos (cf. Figura 4.7) e Beji-Nadaoka (cf. Figura 4.8) sobrevalorizam a amplitude da segunda componente na sonda 7. O mesmo comportamento, embora menos acentuado é apresentado pelo modelo de Wei (FUNWAVE) (cf. Figura 4.9). Este comportamento é corrigido nas sondas em água profunda nos modelos de Boussinesq e de Seabra-Santos, persistindo no entanto nos modelos de Beji-Nadaoka e de Wei. Em águas profundas, sondas 10 e 11, os modelos de elementos finitos implementados não conseguem capturar a presença da terceira e quarta harmónicas, o que pode indicar uma deficiência do comportamento do termo não linear, ou ser uma consequência de se terem desprezado os termos dispersivos associados a grandes declives do fundo. Os modelos de Boussinesq e de Seabra-Santos apresentam também nas sondas 10 e 11, um atraso de fase da segunda componente. Nas mesmas sondas 10 e 11, os modelos de Beji-Nadaoka e de Wei sobrevalorizam a amplitude da primeira componente.

Caso A — Agitação irregular

As estimativas da densidade espectral nas sondas 4 a 11, estão representadas na Figura 4.10 e foram calculadas com 32 graus de liberdade, a que corresponde um erro proporcional de 49% (desprezando o enviesamento), para um intervalo de confiança de 95%.

Os resultados obtidos para as sondas 4 a 7 mostram que relativamente ao modelo não linear completo de Wei (FUNWAVE), o modelo de Boussinesq e os modelos de banda estreita (Seabra-Santos e Beji-Nadaoka a 1-termo) têm um comportamento semelhante, sobrestimando um pouco a densidade espectral associada à frequência de pico. Por outro lado a análise efectuada para as sondas 8 a 11 indica que os mesmos modelos subestimam a densidade espectral associada às altas frequências após o regresso da onda a águas profundas, onde o carácter dispersivo do fenómeno se torna dominante e onde a ausência dos termos dispersivos associados a grandes

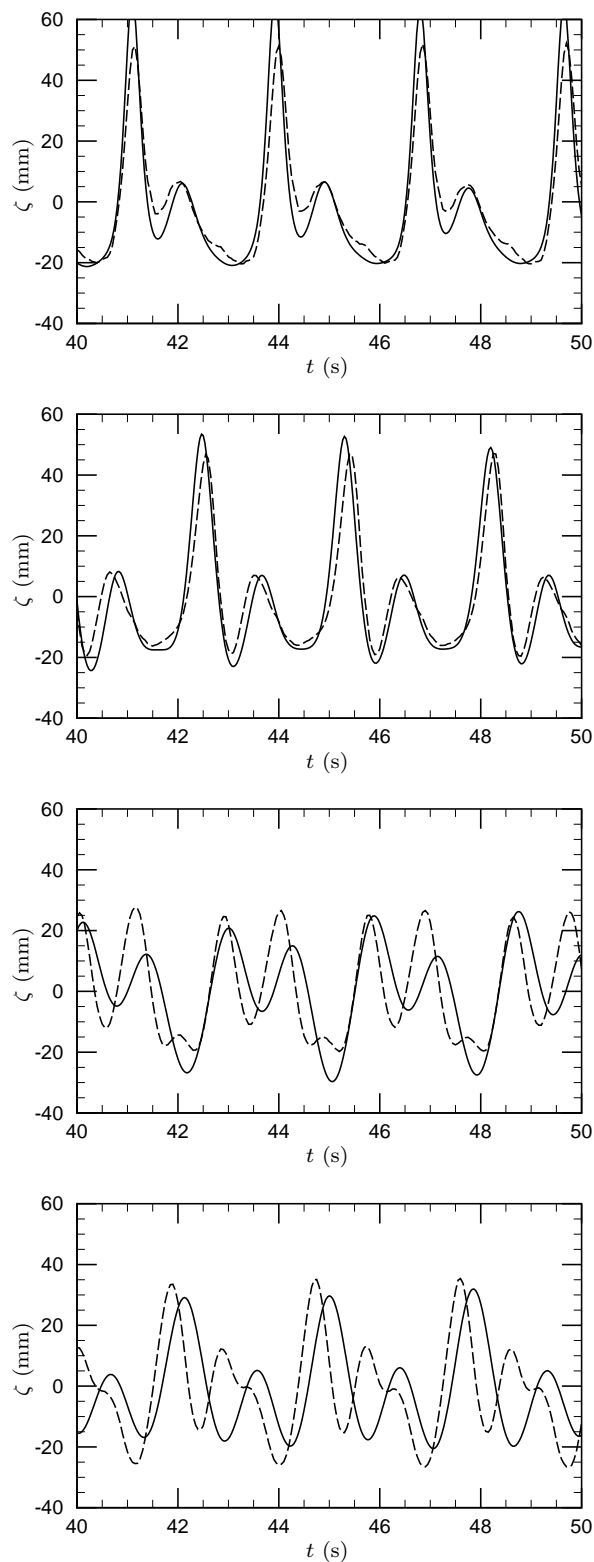


Figura 4.2: Caso A. Agitação regular. Modelo de Boussinesq (MEF). Comparação dos resultados experimentais (---) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.

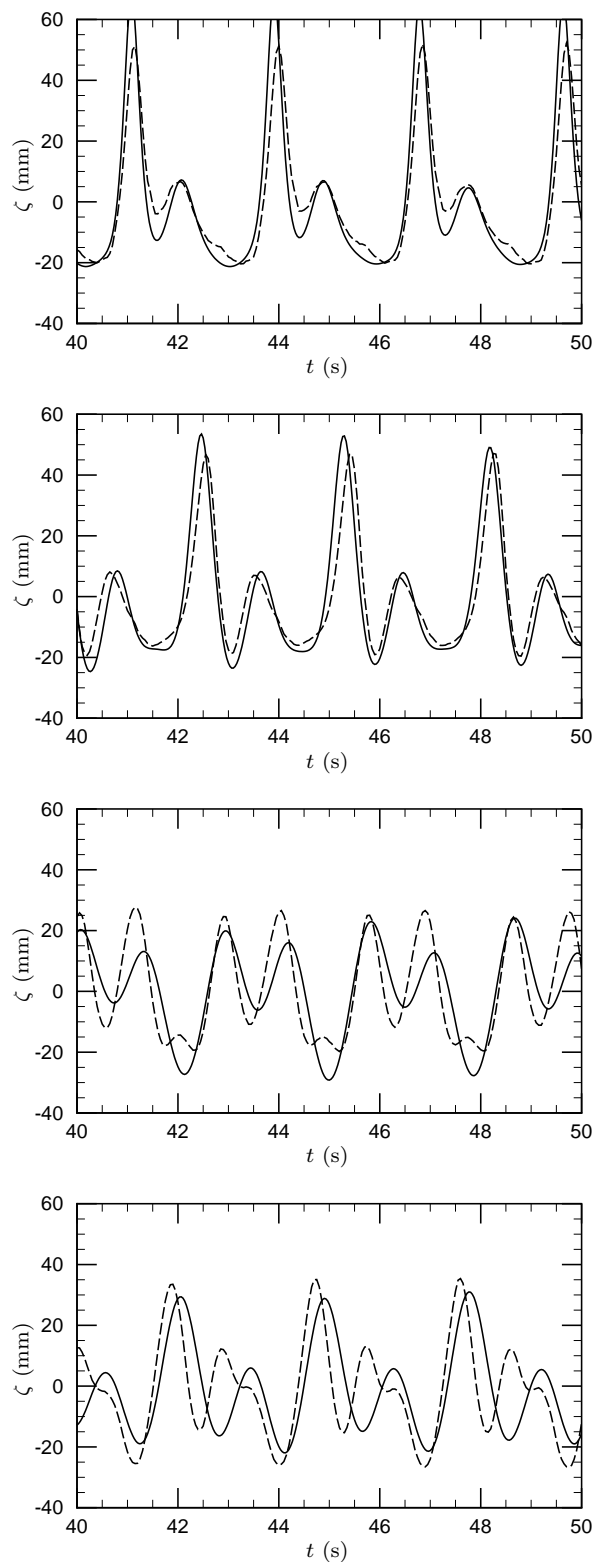


Figura 4.3: Caso A. Agitação regular. Modelo de Seabra-Santos (MEF). Comparação dos resultados experimentais (—) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.

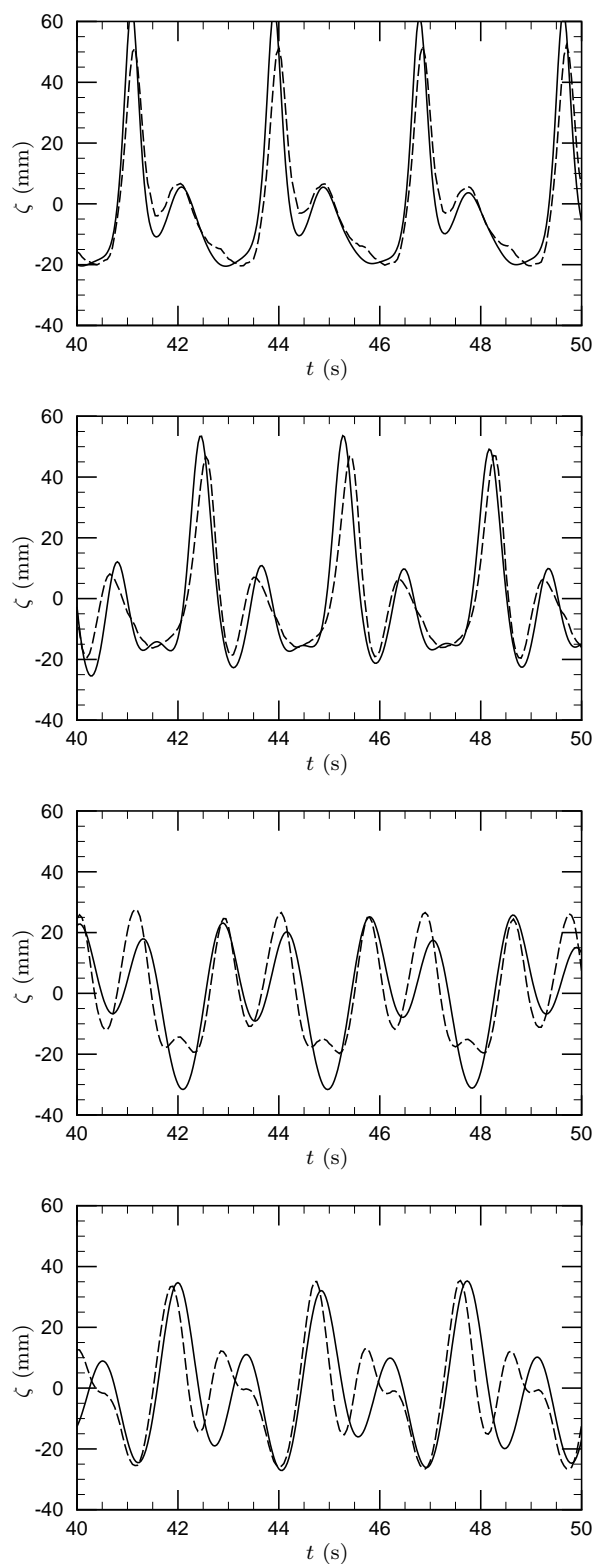


Figura 4.4: Caso A. Agitação regular. Modelo de Beji-Nadaoka (MEF). Comparação dos resultados experimentais (---) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.

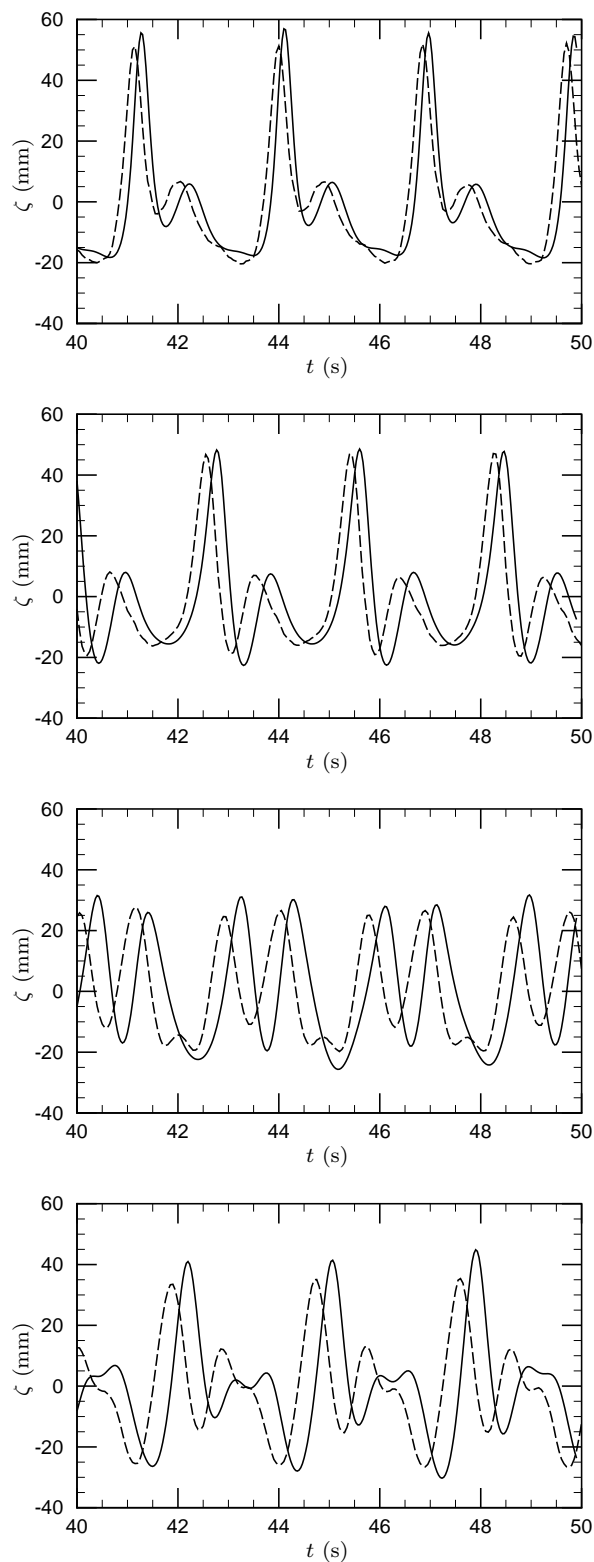


Figura 4.5: Caso A. Agitação regular. Modelo de Wei (FUNWAVE). Comparação dos resultados experimentais (---) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.

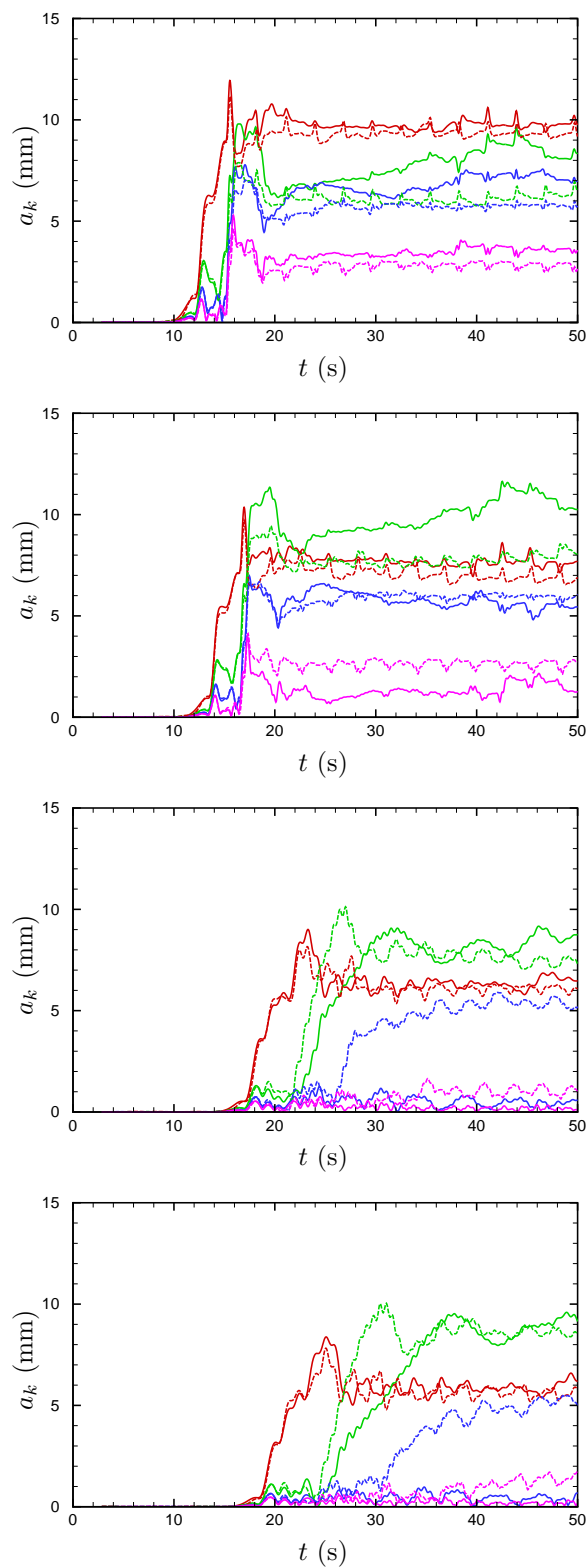


Figura 4.6: Caso A. Agitação regular. Modelo de Boussinesq (MEF). Amplitude da 1^a (■), 2^a (■), 3^a (■) e 4^a (■) componentes. Resultados experimentais (– –) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.

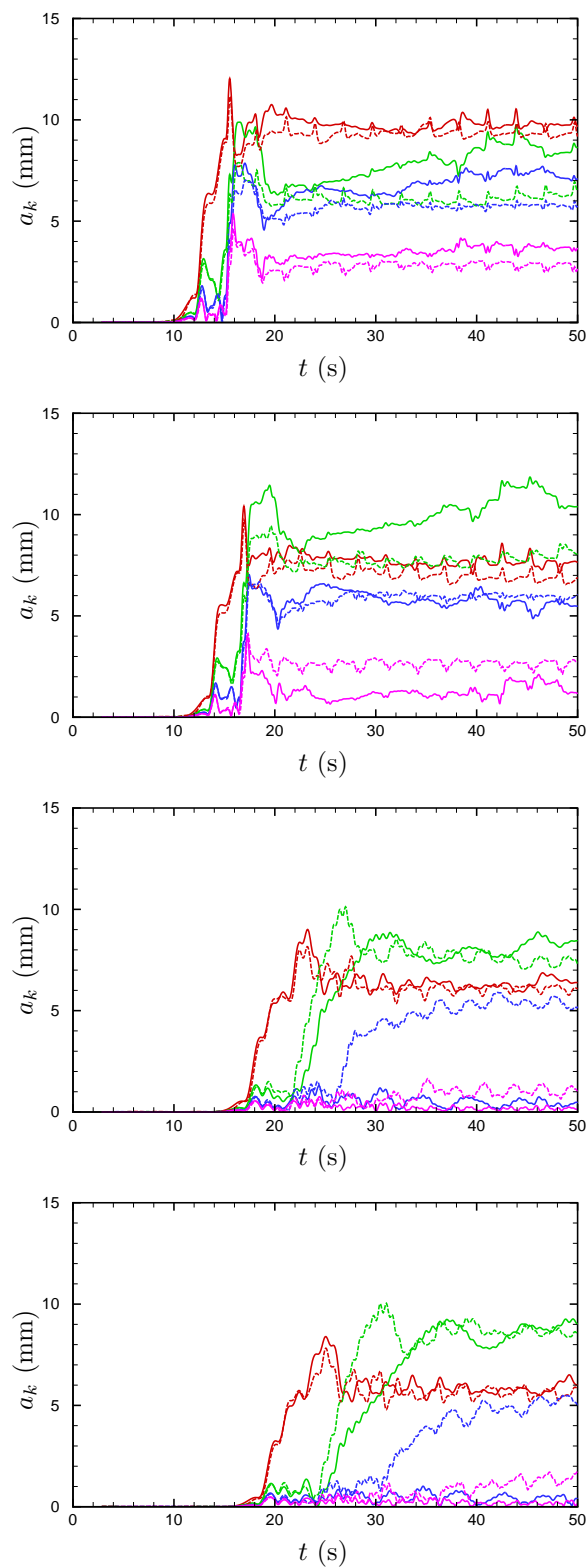


Figura 4.7: Caso A. Agitação regular. Modelo de Seabra-Santos (MEF). Amplitude da 1^a (■), 2^a (■), 3^a (■) e 4^a (■) componentes. Resultados experimentais (– –) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.

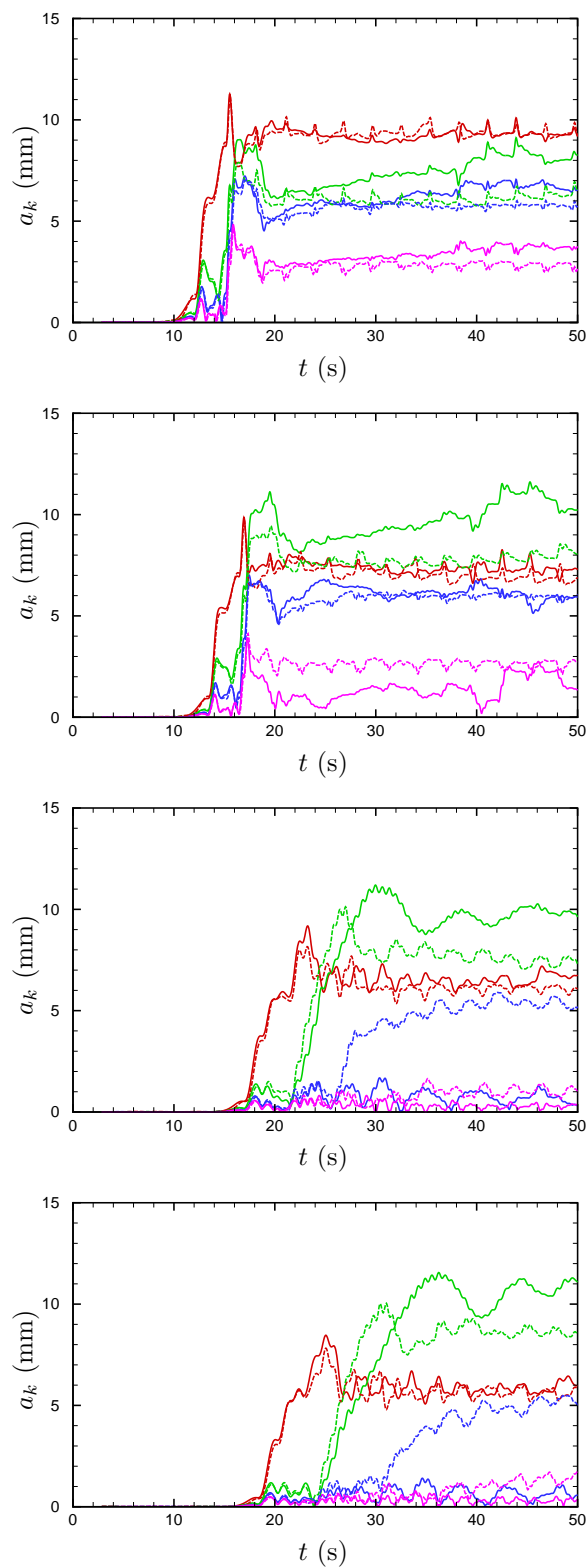


Figura 4.8: Caso A. Agitação regular. Modelo de Beji-Nadaoka (MEF). Amplitude da 1^a (■), 2^a (■), 3^a (■) e 4^a (■) componentes. Resultados experimentais (– –) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.

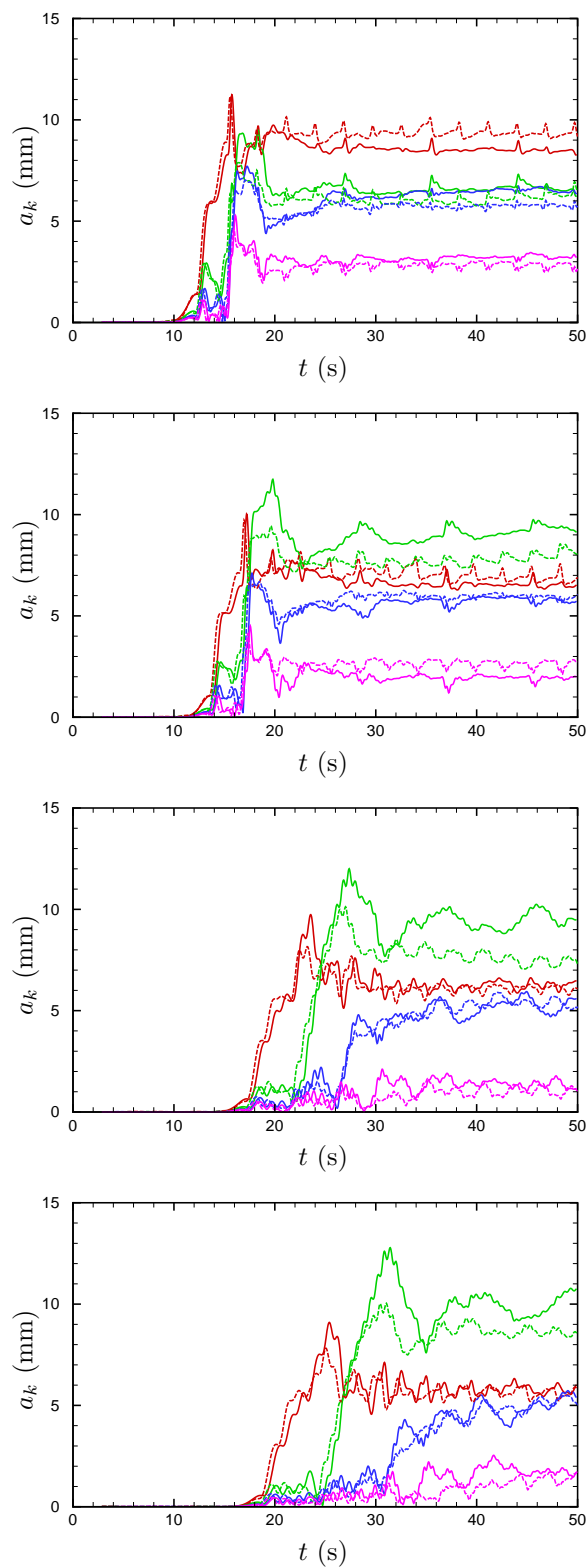


Figura 4.9: Caso A. Agitação regular. Modelo de Wei (FUNWAVE). Amplitude da 1ª (■), 2ª (■), 3ª (■) e 4ª (■) componentes. Resultados experimentais (—) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.

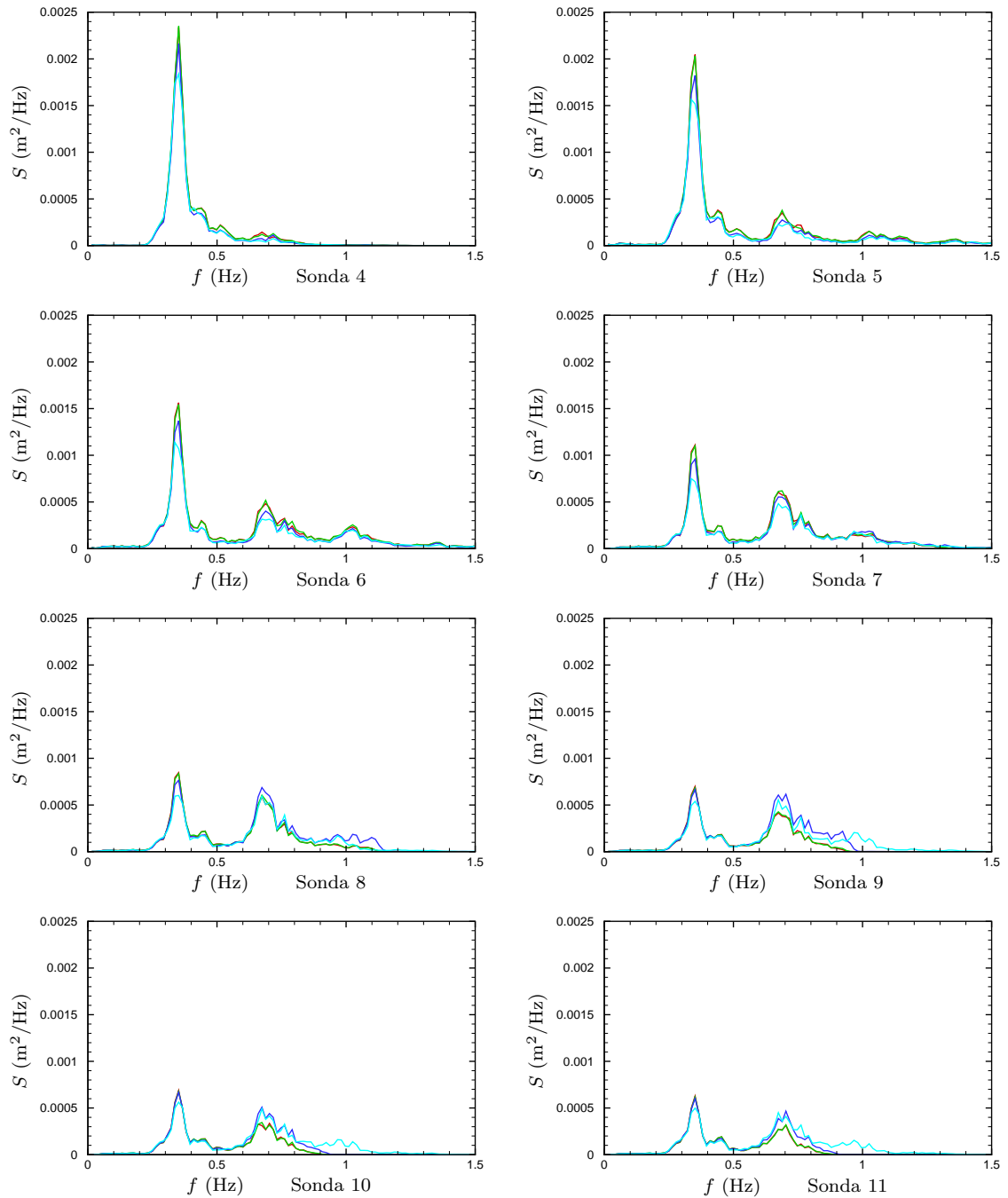


Figura 4.10: Caso A. Agitação irregular. Espectro de potência nas sondas 4 a 11. Modelo de Boussinesq (■), modelo de Seabra-Santos (■), modelo de Beji-Nadaoka (■) e modelo de Wei (■).

declives do fundo pode ser condicionante. Este comportamento é menos acentuado para o modelo de Beji-Nadaoka.

Caso C — Agitação regular

Analisando as séries temporais nas sondas 6, 7, 10 e 11, observa-se que o modelo de Boussinesq (ver Figura 4.11) é o que apresenta resultados menos satisfatórios, quando comparado com os modelos de Seabra-Santos e de Beji-Nadaoka (ver Figuras 4.12 e 4.13). O modelo de Boussinesq apresenta a amplitude da onda sobre o coroamento do quebra-mar (sonda 6) quase correcta, subestimando-a quando a profundidade começa a aumentar. É visível a existência de um grande atraso de fase na onda numérica, pressupondo um erro no cálculo da celeridade da onda, bem como a não reprodução correcta da 2ª harmónica e superiores. O modelo de Seabra-Santos (ver Figura 4.12) sobrestima a amplitude para a sonda 6 e subestima-a nas sondas 10 e 11, em água profunda. Em relação à fase da onda, esta tem um comportamento que parece ser razoável, embora exibindo sempre um ligeiro avanço. O modelo de Beji-Nadaoka (ver Figura 4.13) é o que apresenta melhores resultados globais, quando comparado com os outros dois modelos implementados. O modelo de Wei não consegue reproduzir correctamente nem a forma da onda nem a sua fase (ver Figura 4.14).

Fazendo uma análise de Fourier com evolução temporal do sinal das sondas 6, 7, 10 e 11 (ver Figuras 4.15 a 4.18), é visível a presença das 1ª, 2ª e 3ª componentes da onda nos resultados experimentais, enquanto a 4ª componente apresenta amplitudes quase residuais. Para este caso, os modelos de Boussinesq (cf. Figura 4.15) e de Seabra-Santos (cf. Figura 4.16) sobrevalorizam na sonda 6 a 2ª componente da onda, ao contrário do que acontece a partir da sonda 7 onde esta componente é visivelmente subvalorizada. O modelo de Beji-Nadaoka (cf. Figura 4.17) apresenta amplitudes aceitáveis da 1ª componente em praticamente todas as sondas. A amplitude da 2ª componente é sobrevalorizada na sonda 6 e subvalorizada a partir da sonda 7. No que à fase diz respeito, é notório um grande atraso de fase da 1ª componente para o modelo de Boussinesq, em qualquer uma das sondas. Esta situação é corrigida no modelo de Seabra-Santos para as sondas 6 e 7, mas nas sondas 10 e 11 existe também algum atraso. O modelo de Beji-Nadaoka apresenta um bom comportamento de fase para a 1ª componente em todas as sondas e para a 2ª componente na sonda 6. Infelizmente é notória a incapacidade para propagação das harmónicas superiores na zona de maior profundidade. O modelo de Wei apresenta um bom comportamento da celeridade de fase da 1ª componente em todas as sondas, bem como das 2ª e 3ª componentes nas sondas 6 e 7. No que concerne à amplitude das componentes,

o seu comportamento é no entanto oscilatório, de onde resulta a forma errada da onda, visível na Figura 4.14. Também na sonda 6, o modelo de Wei sobrevaloriza a amplitude da 2ª componente.

Caso C — Agitação irregular

As estimativas da densidade espectral nas sondas 4 a 11 estão representadas na Figura 4.19 e foram calculadas com 65 graus de liberdade, a que corresponde um erro proporcional de 34% (desprezando o envezamento) para um intervalo de confiança de 95%.

Os resultados obtidos para as sondas 5, 6 e 7, mostram que existe alguma sobrestimação da densidade espectral associada à frequência de pico do modelo de Seabra-Santos, quando comparados com os resultados obtidos através do modelo não linear completo de Wei, nas zonas de menor profundidade (sondas 5, 6 e 7). Quando existe um aumento da profundidade, o carácter dispersivo do fenómeno torna-se dominante, alterando o comportamento dos modelos implementados, devido à ausência dos termos dispersivos associados a grandes declives do fundo nos modelos de elementos finitos. Nas sondas situadas a sotamar do quebra-mar, os modelos implementados subvalorizam a energia espectral, principalmente a energia associada às altas frequências.

4.2 Propagação de uma onda solitária em torno de um cilindro

Para o modelo a duas dimensões horizontais, o esquema numérico desenvolvido é aplicado ao caso da propagação de uma onda solitária ao longo de um canal rectangular e contornando um cilindro vertical. O canal de ondas tem 15 m de comprimento e 0.55 m de largura, e o cilindro tem 16 cm de diâmetro. O centro da base do cilindro foi colocado no ponto de coordenadas (4.320, 0.275) m. Um esquema do canal está representado na Figura 4.20. Os registos experimentais dos valores da elevação da superfície livre foram obtidos em sete sondas de profundidade, cujas posições estão descritas na Tabela 4.4. O nível da água em repouso é de $h = 0.15$ m, sendo estudada a propagação de duas ondas com amplitudes diferentes. Na primeira simulação, propaga-se uma onda solitária com amplitude $a = 0.0268$ m na sonda 0. Na segunda simulação propaga-se uma onda solitária com amplitude $a = 0.0353$ m. O coeficiente de não linearidade, $\epsilon = a/h$, da primeira onda é de 0.179 e da segunda onda é de 0.235. As características destas ondas estão resumidas na Tabela

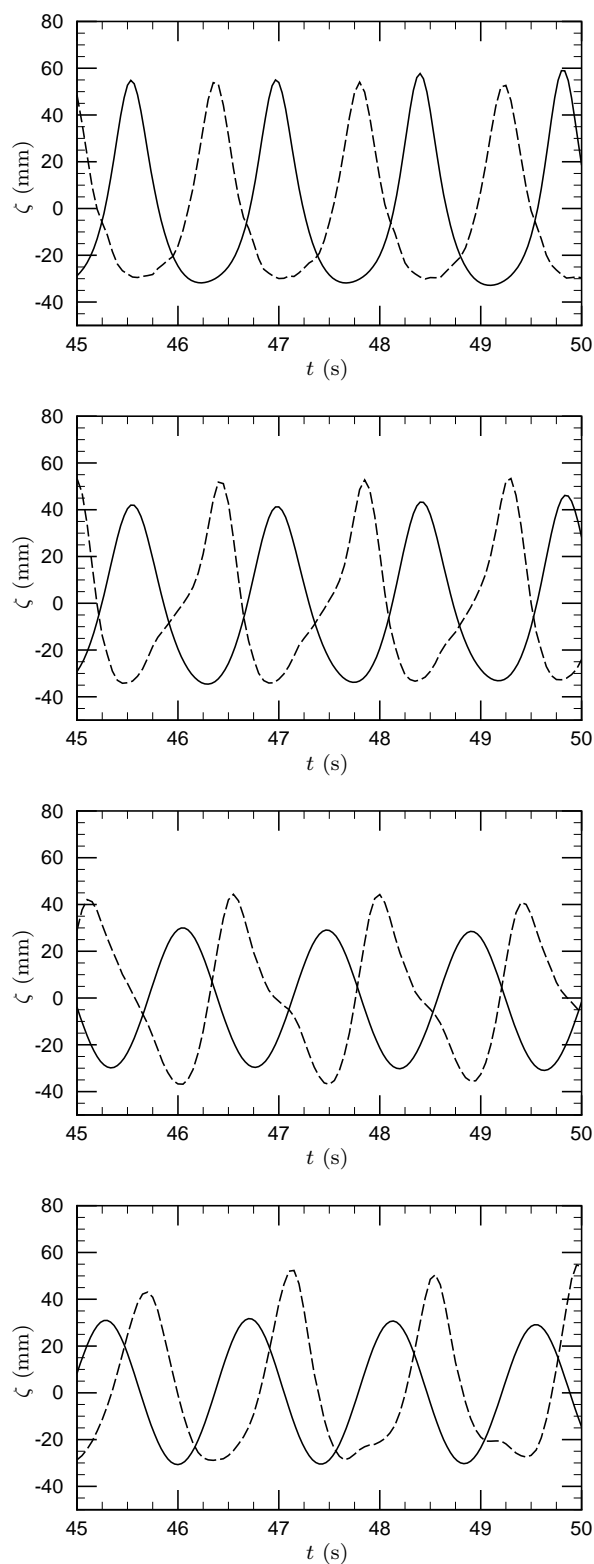


Figura 4.11: Caso C. Agitação regular. Modelo de Boussinesq (MEF). Comparação dos resultados experimentais (---) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.

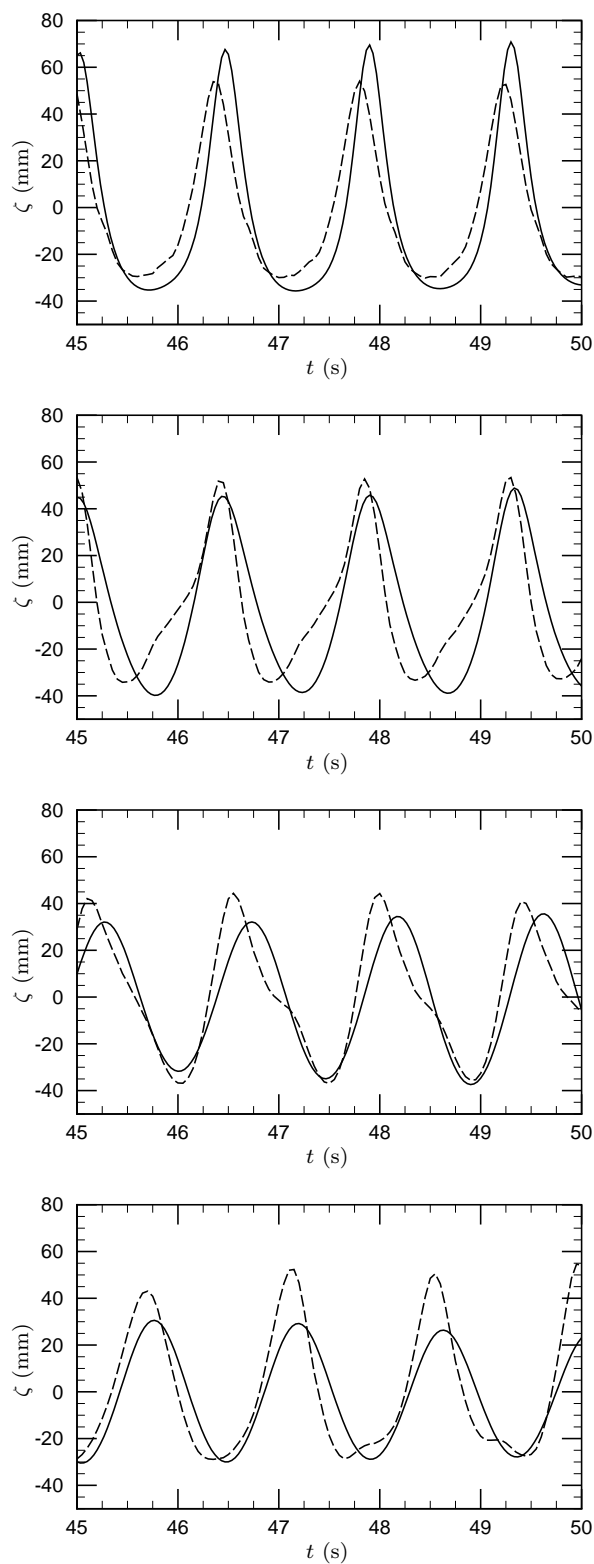


Figura 4.12: Caso C. Agitação regular. Modelo de Seabra-Santos (MEF). Comparação dos resultados experimentais (---) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.

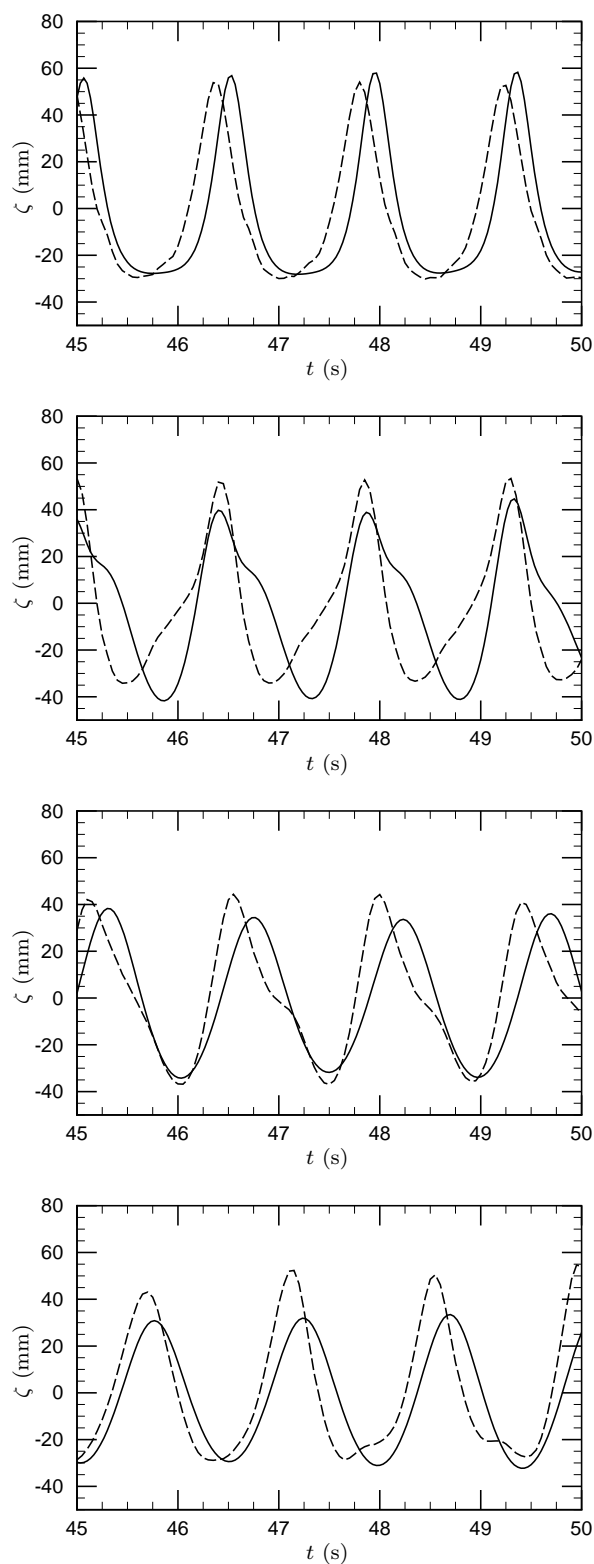


Figura 4.13: Caso C. Agitação regular. Modelo de Beji-Nadaoka (MEF). Comparação dos resultados experimentais (---) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.

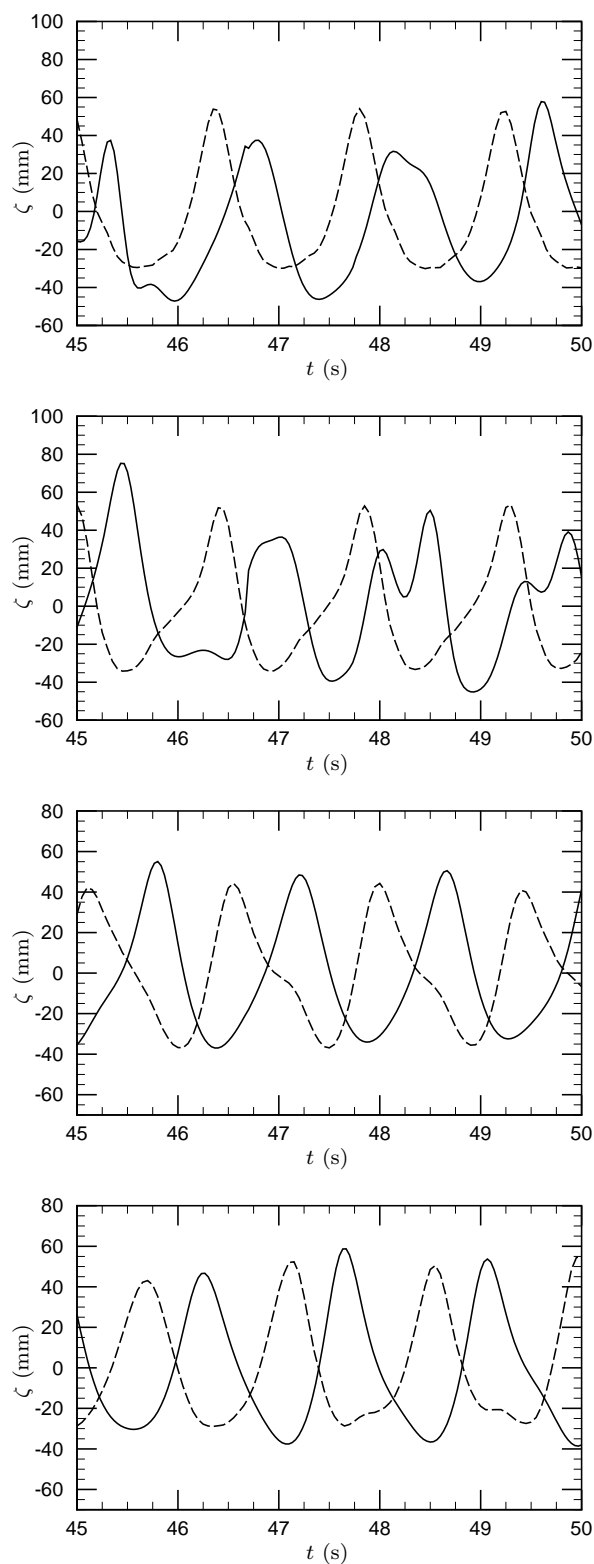


Figura 4.14: Caso C. Agitação regular. Modelo de Wei (FUNWAVE). Comparação dos resultados experimentais (---) com os resultados numéricos (—) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 6, 7, 10 e 11.

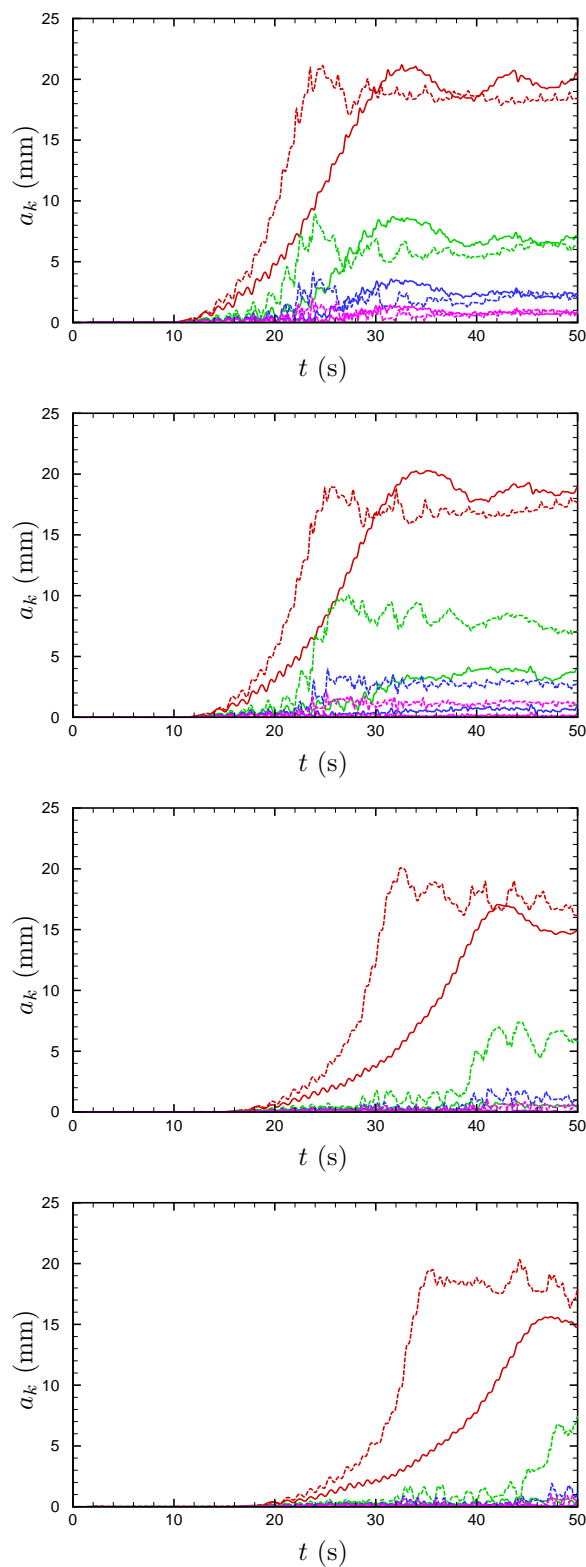


Figura 4.15: Caso C. Agitação regular. Modelo de Boussinesq (MEF). Amplitude da 1^a (■), 2^a (■), 3^a (■) e 4^a (■) componentes. Resultados experimentais (– –) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.

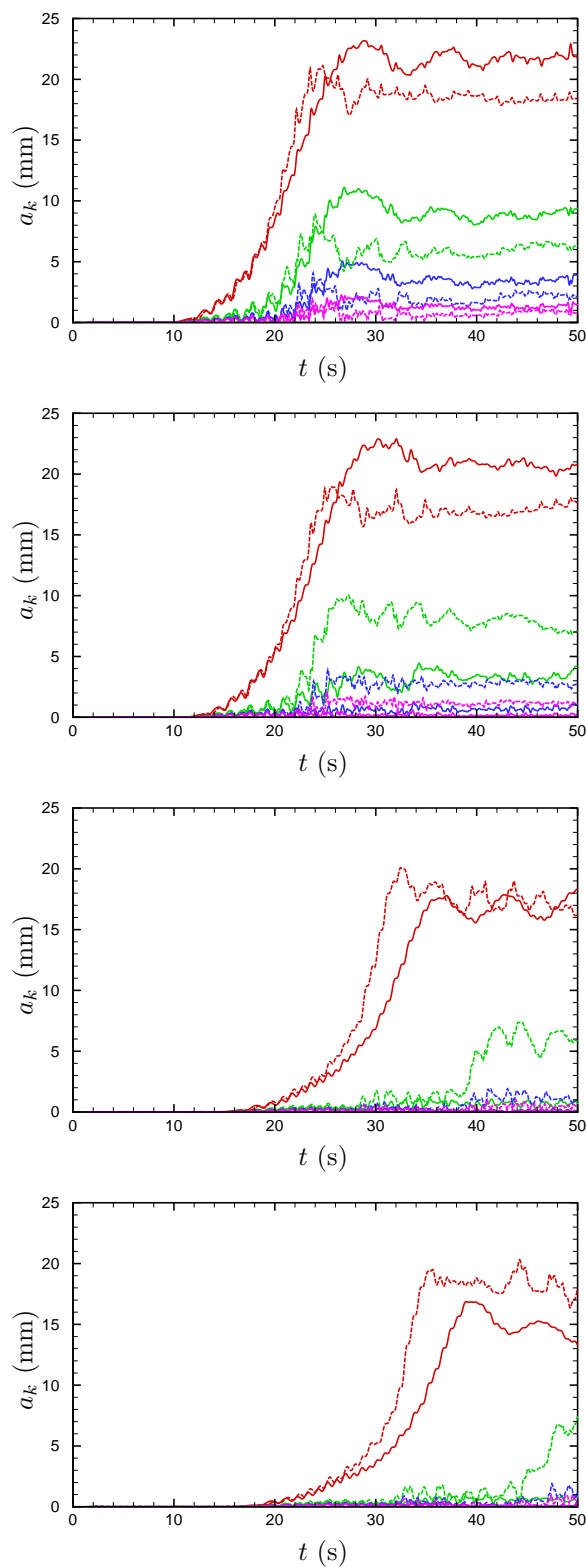


Figura 4.16: Caso C. Agitação regular. Modelo de Seabra-Santos (MEF). Amplitude da 1^a (■), 2^a (■), 3^a (■) e 4^a (■) componentes. Resultados experimentais (– –) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.

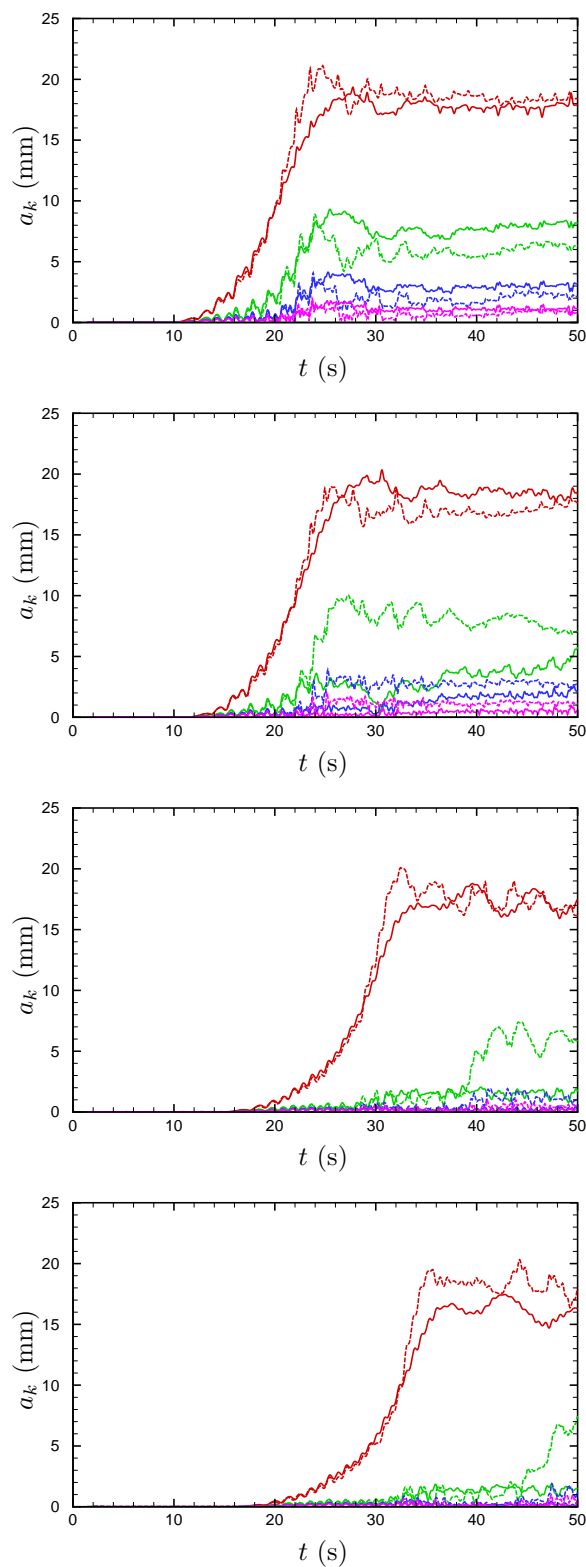


Figura 4.17: Caso C. Agitação regular. Modelo de Beji-Nadaoka (MEF). Amplitude da 1^a (■), 2^a (■), 3^a (■) e 4^a (■) componentes. Resultados experimentais (– –) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.

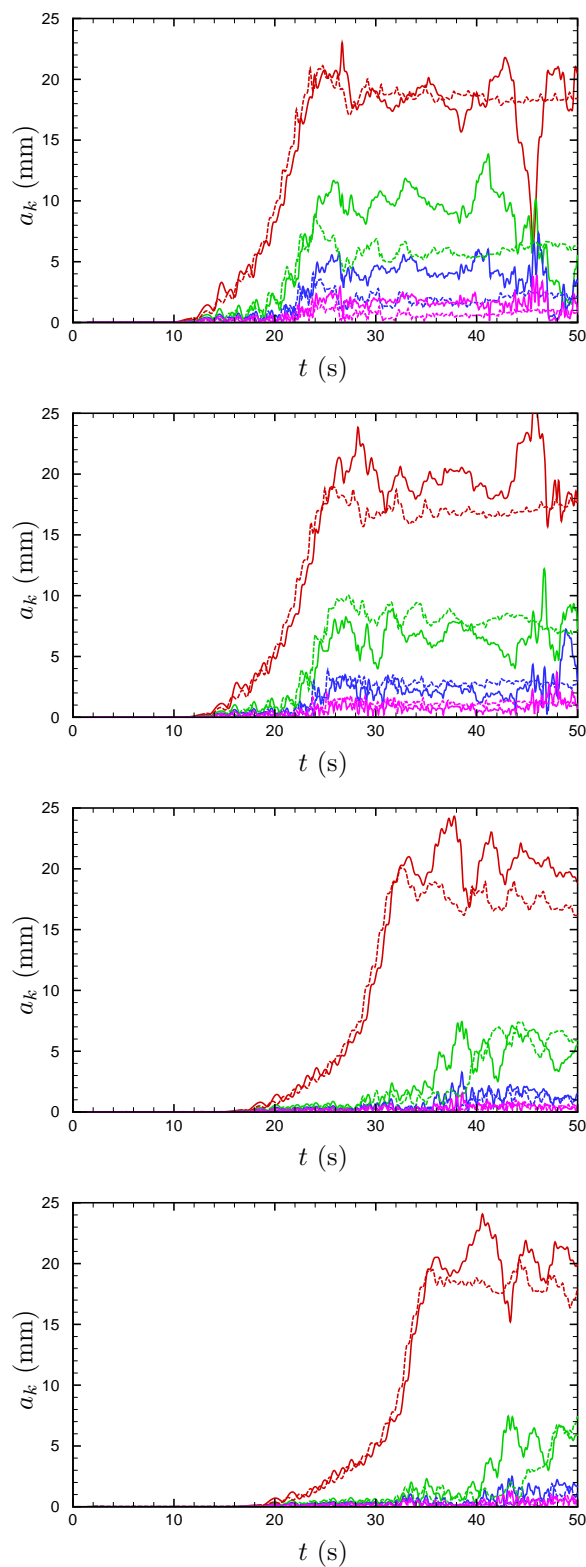


Figura 4.18: Caso C. Agitação regular. Modelo de Wei (FUNWAVE). Amplitude da 1^a (■), 2^a (■), 3^a (■) e 4^a (■) componentes. Resultados experimentais (– –) e resultados numéricos (—). Sondas 6, 7, 10 e 11.

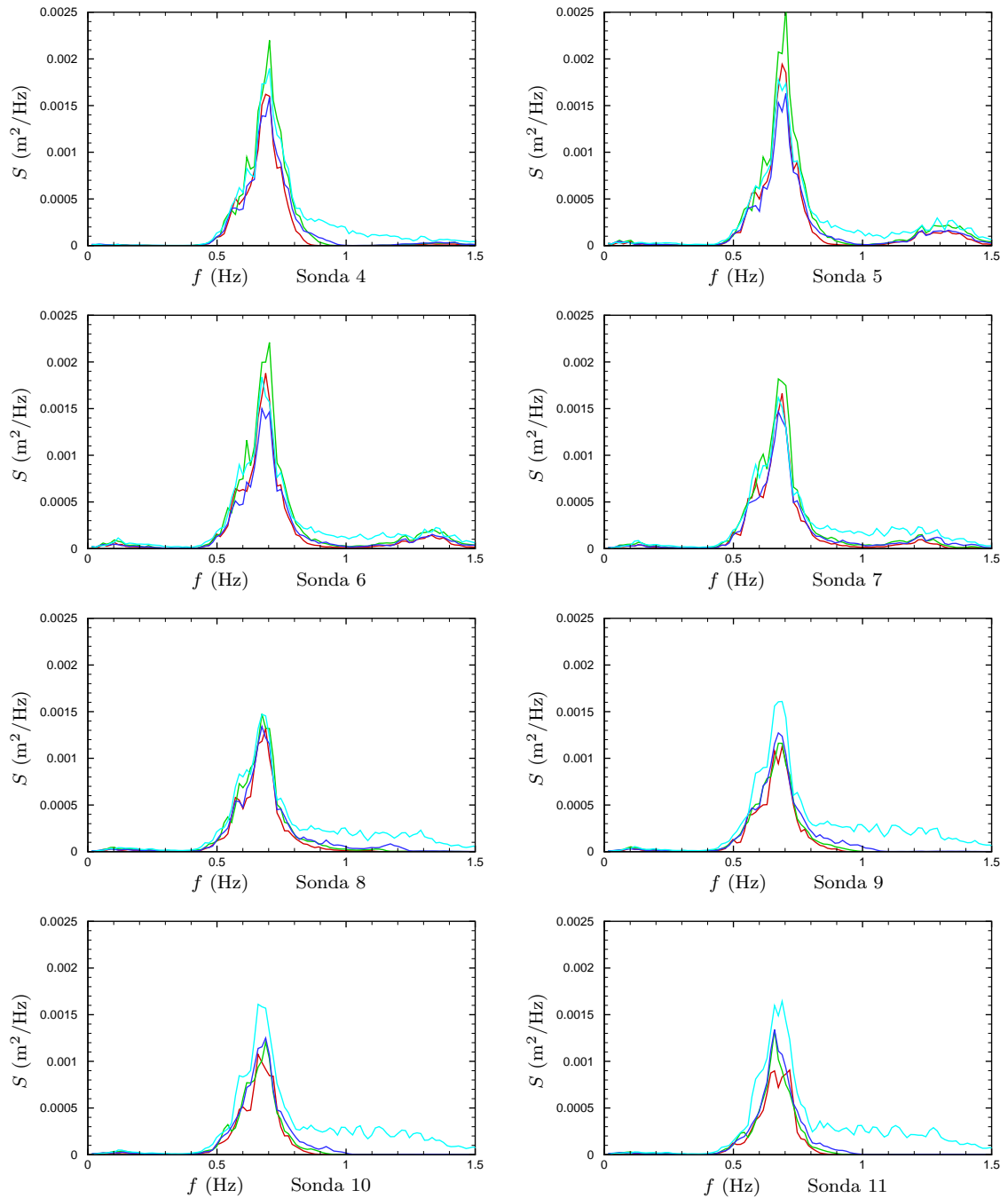


Figura 4.19: Caso C. Agitação irregular. Espectro de potência nas sondas 4 a 11. Modelo de Boussinesq (■), modelo de Seabra-Santos (■), modelo de Beji-Nadaoka(■) e modelo de Wei (■).

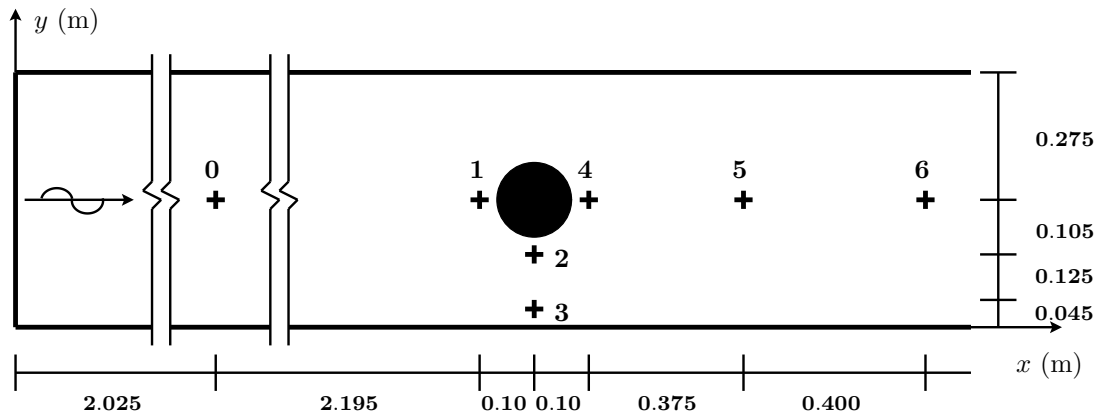


Figura 4.20: Canal de ondas e posição das sondas (reprodução de Avilez-Valente, 2000).

Sonda	0	1	2	3	4	5	6
x (m)	2.025	4.220	4.320	4.320	4.420	4.795	5.195
y (m)	0.275	0.275	0.170	0.045	0.275	0.275	0.275

Tabela 4.4: Posição das sondas para a propagação de uma onda solitária em torno de um cilindro.

4.5. Ambas as ondas propagam-se no sentido positivo do eixo OX .

O canal numérico tem comprimento de 4.59 m e largura de 0.55 m. A malha de elementos finitos utilizada nas simulações a duas dimensões horizontais é constituída por 3800 elementos bilineares e 4030 nós. Um pormenor da malha de elementos finitos está representado na Figura 4.21. A discretização temporal utilizada nas simulações foi de $\Delta t = 0.004$ s.

No modelo computacional, a fronteira de barlarar coincidiu com a secção transversal que contém a sonda 0. O registo experimental da sonda 0, foi utilizado como condição fronteira para a equação da continuidade. Para a equação da conservação da quantidade de movimento e para a mesma fronteira de barlarar, foi imposta

Onda	a (m)	ϵ	c (m/s)	λ (m)
1	0.026818	0.179	1.32	2.44
2	0.0352807	0.235	1.36	2.80

Tabela 4.5: Características das ondas solitárias simuladas.

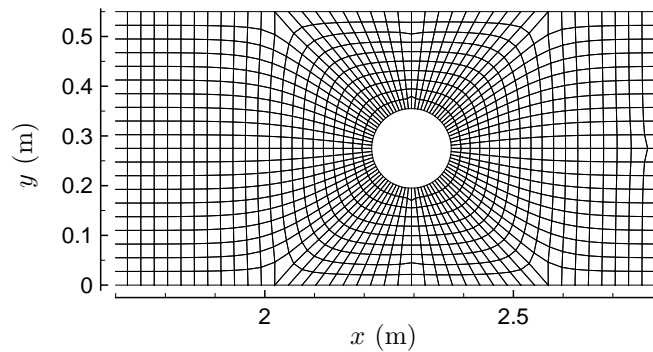


Figura 4.21: Pormenor da malha de elementos finitos utilizada (reprodução de Avilez-Valente, 2000).

uma condição de radiação para a velocidade segundo OX , u , semelhante à definida para o modelo unidimensional, não tendo sido imposta nenhuma condição para a velocidade segundo OY , v . Na fronteira de sotamar não foi imposta nenhuma condição de fronteira, tendo-se verificado que a radiação para o exterior, da onda numérica, se efectuava com pouca ou nenhuma reflexão. As paredes do canal e do cilindro foram consideradas como totalmente reflectoras.

4.2.1 Resultados e discussão

Séries temporais Nas Figuras 4.22 e 4.23 estão representadas as séries temporais obtidas, na simulação da propagação das onda solitária 1 e 2, respectivamente, ao longo do canal esquematizado na Figura 4.20.

Da análise das figuras regista-se que de uma forma geral os resultados experimentais são bem reproduzidos, principalmente para a onda 1. Esta característica é particularmente evidente nas sondas 5 e 6, situadas a sotamar do cilindro. As sondas 2 e 3 registam as maiores discrepâncias na amplitude de pico da onda e nas características da sua cauda dispersiva. As sondas 2 e 3 situam-se entre a parede do canal e o cilindro, pelo que este efeito é provavelmente devido às características reflectivas das paredes do canal ou do cilindro. Um efeito semelhante embora menos acentuado verifica-se na sonda 1, colocada junto ao cilindro e a barlar deste. Na sonda 4, as discrepâncias só são notáveis para a onda 2. O facto de as discrepâncias serem mais evidentes para a onda de maior amplitude, onda 2, corrobora a tese de tais efeitos serem devidos à reflexão nas paredes do canal e no cilindro.

Espectros de potência Nas Figuras 4.24 a 4.29 e 4.30 a 4.35 estão representados os espectros de potência para as ondas 1 e 2, respectivamente. Para esta análise foi utilizada uma janela temporal de 4 s, entre os instantes de simulação $t = 1.5$ s e $t = 5.5$ s. As frequências com energia inferior a 10^{-5} cm²/Hz devem ser consideradas como ruído. Os espectros de potência para a sonda 1, mostram que os resultados experimentais têm energia nas frequências mais elevadas, que não se encontra presente nas simulações. Daqui resulta uma cauda dispersiva mais evidente nas séries temporais experimentais. Nos registos da sonda 2 as ondas numéricas têm menos energia nas baixas frequências e mais energia nas altas frequências, de 1.5 a 3.0 Hz, resultando numa cauda dispersiva mais evidente. Esta situação inverte-se claramente na sonda 3. Os registos das sondas 4, 5 e 6, mostram ondas numéricas de características semelhantes, sendo este facto mais evidente nas sondas 5 e 6.

Conclusão Pode-se concluir que este ensaio, embora pouco exigente por não incluir efeitos de refração e de empolamento da onda, mostrou que o modelo reproduziu convenientemente a difração da onda em torno do pilar cilíndrico. Por outro lado, as características reflectivas do canal e do cilindro não parecem ter sido correctamente reproduzidas nas condições fronteira do modelo numérico, tendo levado a algumas discrepâncias nos registos das sondas colocadas entre o cilindro e as paredes do canal.

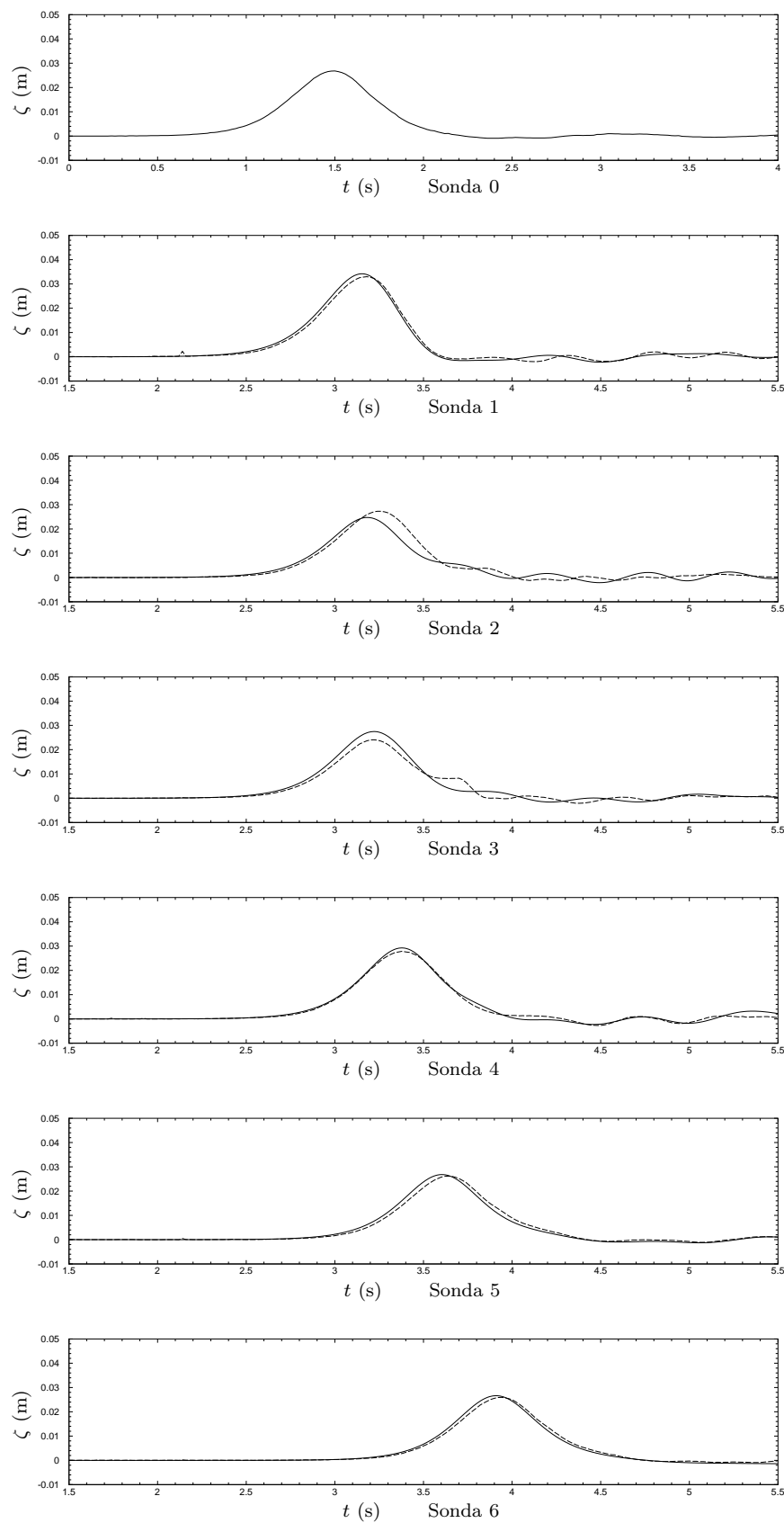


Figura 4.22: Onda solitária 1 em torno de um cilindro vertical. Modelo de Boussinesq 2DH. Comparação dos resultados numéricos (—) com os resultados experimentais (---) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 0 a 6.

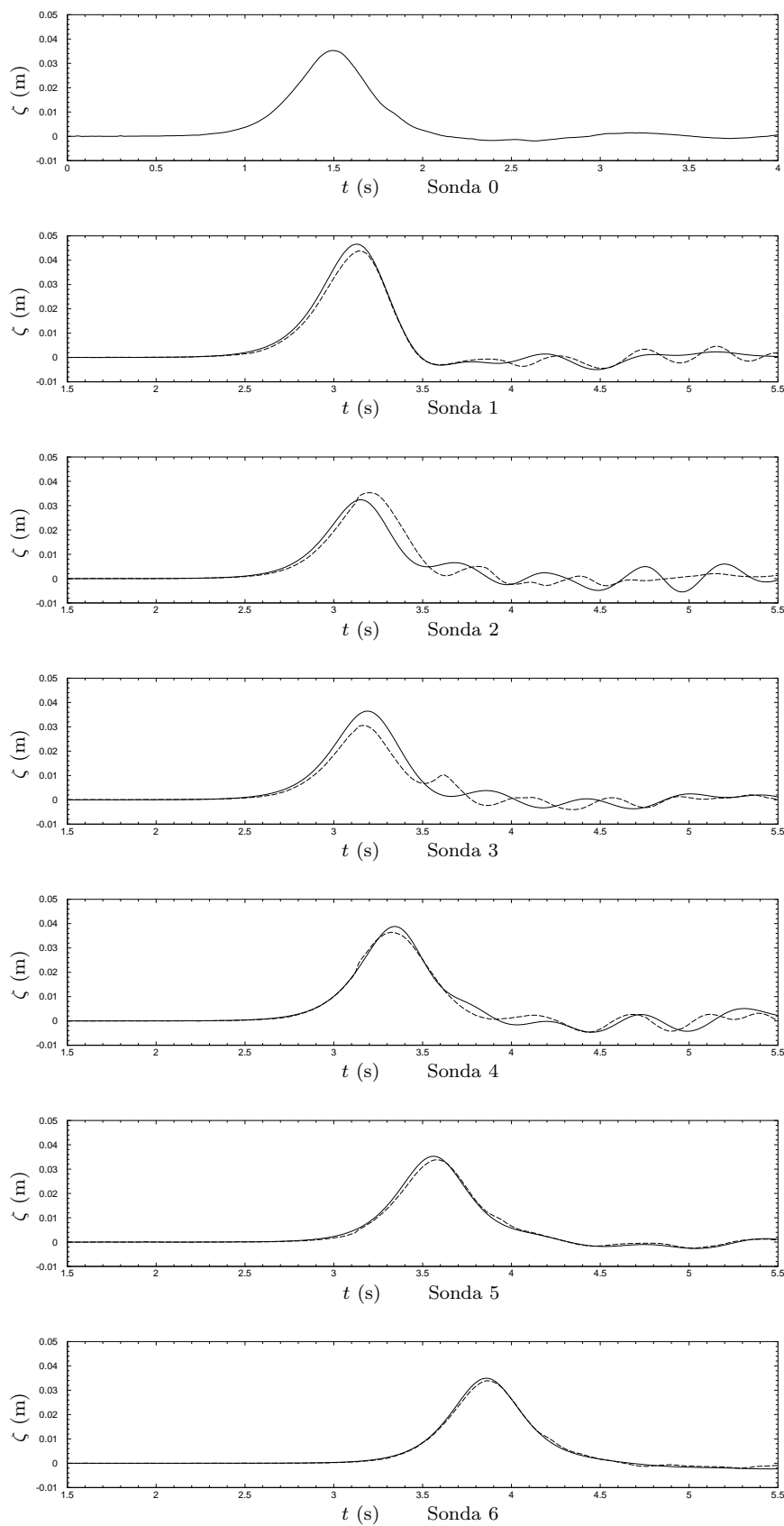


Figura 4.23: Onda solitária 2 em torno de um cilindro vertical. Modelo de Boussinesq 2DH. Comparação dos resultados numéricos (—) com os resultados experimentais (---) da elevação da superfície livre ao longo do tempo. Sondas 0 a 6.

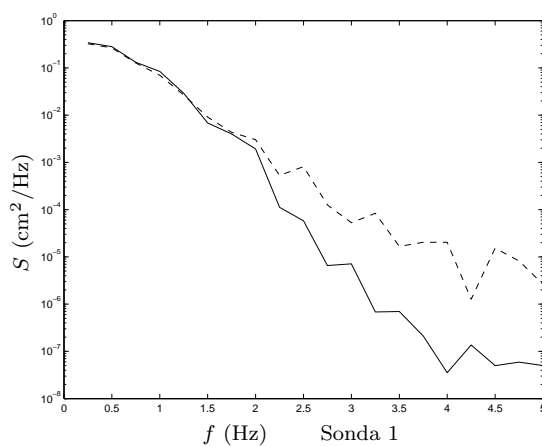


Figura 4.24: Onda 1. Espectro de potência na sonda 1. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

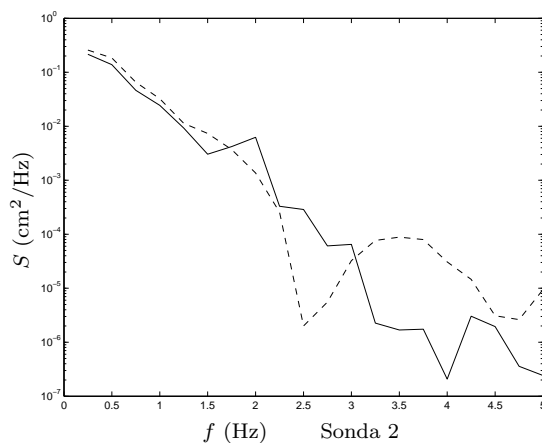


Figura 4.25: Onda 1. Espectro de potência na sonda 2. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

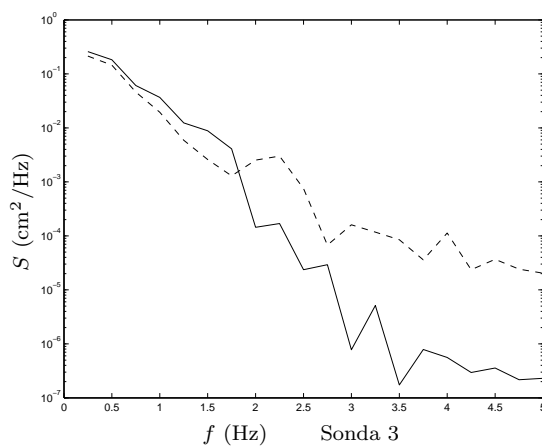


Figura 4.26: Onda 1. Espectro de potência na sonda 3. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

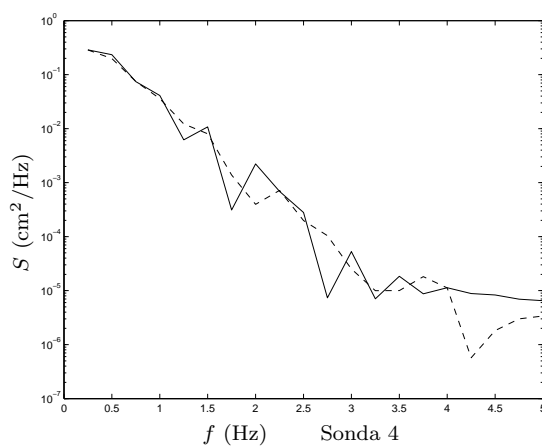


Figura 4.27: Onda 1. Espectro de potência na sonda 4. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

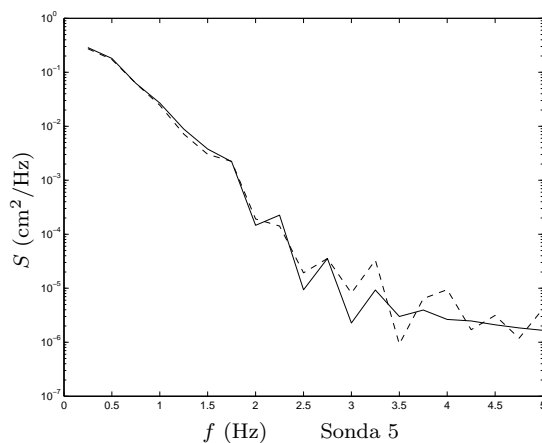


Figura 4.28: Onda 1. Espectro de potência na sonda 5. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

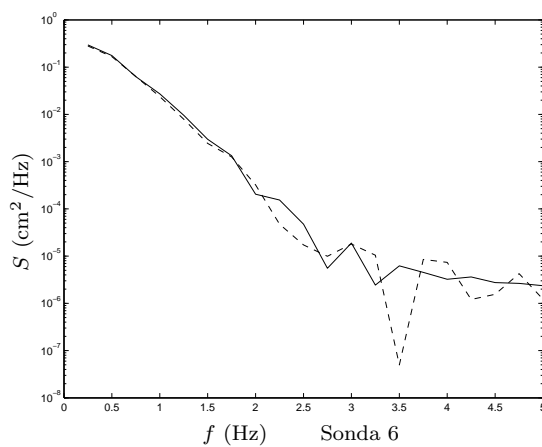


Figura 4.29: Onda 1. Espectro de potência na sonda 6. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

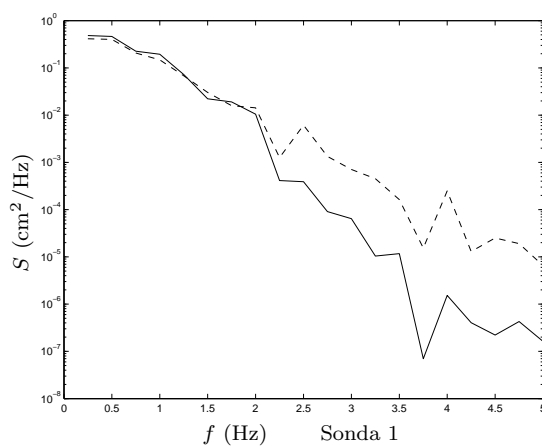


Figura 4.30: Onda 2. Espectro de potência na sonda 1. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

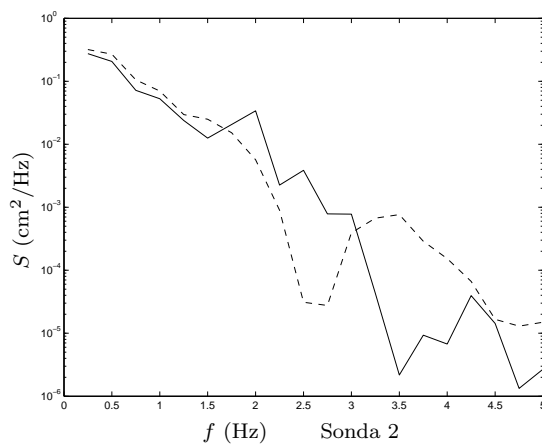


Figura 4.31: Onda 2. Espectro de potência na sonda 2. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

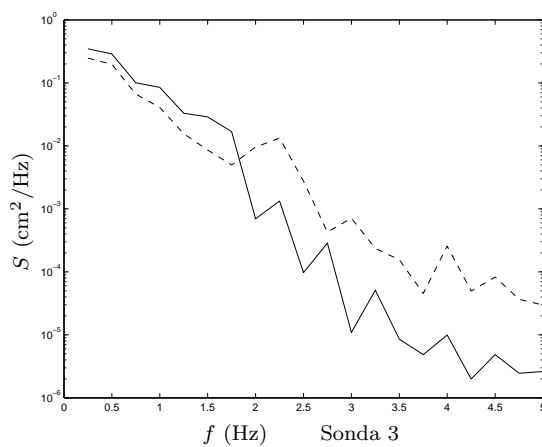


Figura 4.32: Onda 2. Espectro de potência na sonda 3. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

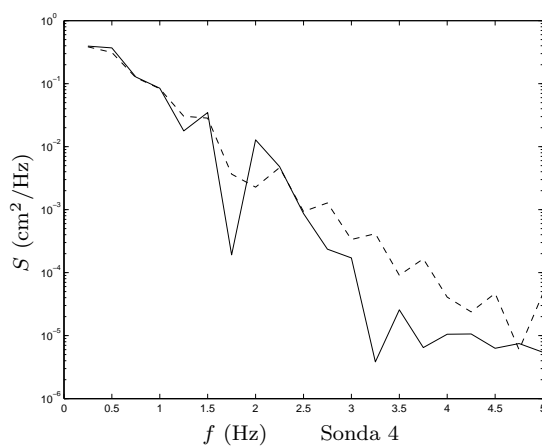


Figura 4.33: Onda 2. Espectro de potência na sonda 4. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

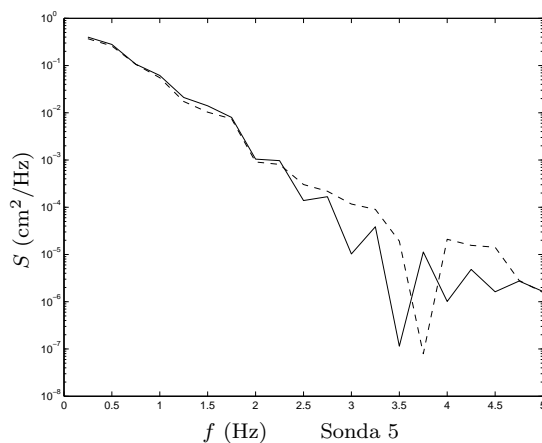


Figura 4.34: Onda 2. Espectro de potência na sonda 5. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

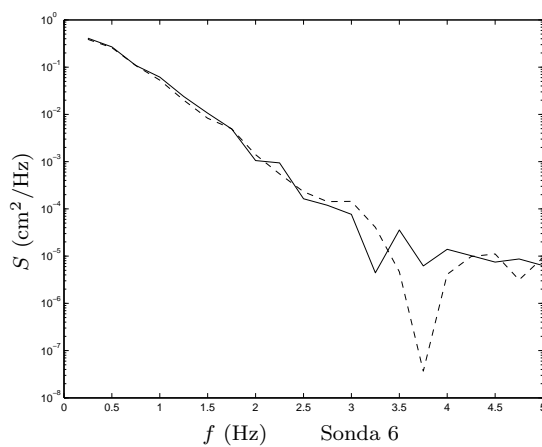


Figura 4.35: Onda 2. Espectro de potência na sonda 6. Ensaio numérico (—), ensaio experimental (---).

Capítulo 5

Conclusões e Trabalho Futuro

Foi desenvolvido um esquema numérico de integração no tempo do tipo predictor-corrector para um esquema de elementos finitos, com formulação de Petrov-Galerkin, aplicado a modelos do tipo Boussinesq para simulação da propagação de ondas de superfície, a uma e duas dimensões horizontais.

Este esquema foi otimizado por forma a garantir uma precisão de 4ª ordem na celeridade de fase associada a um mecanismo dissipativo altamente selectivo de 3ª ordem, e a estabilidade de todos os passos da integração no tempo.

Os resultados apresentados permitem concluir que o esquema numérico é estável, não apresentando oscilações devidas à não propagação das ondas mais curtas ($\lambda = 2\Delta x$), e preciso. As diferenças registadas entre os resultados laboratoriais e os resultados numéricos dos modelos propostos são devidas às propriedades dispersivas e eventualmente ao comportamento do termo não linear destes modelos. É evidente a necessidade de inclusão dos termos dispersivos associados a grandes declives do fundo, por forma a garantir a correcta simulação das ondas na passagem de zonas de pequena profundidade para zonas de grande profundidade.

Como trabalho futuro deverão ser implementados os mesmos esquemas de integração no tempo para as versões a duas dimensões horizontais dos modelos de Seabra-Santos, e de Beji-Nadaoka a 1-termo, discretizados pelo método dos elementos finitos com formulação de Petrov-Galerkin.

Deverão também ser aplicadas as discretizações espaciais com recurso a elementos triangulares apresentadas no Capítulo 3.

Referências

- Abbott M.B., Petersen H.M. e Skovgaard O. (1978). On the numerical modelling of short waves in shallow water. *J. Hydr. Res.*, 16(3):173–203.
- Antunes do Carmo J.S. e Seabra-Santos F.J. (1996). On breaking waves and wave-current interaction in shallow water: a 2DH finite element model. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 22:429–444.
- Antunes do Carmo J.S., Seabra-Santos F.J. e Almeida A.B. (1993a). Numerical solution of the generalized Serre equations with the MacCormack finite-difference scheme. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 16:725–738.
- Antunes do Carmo J.S., Seabra-Santos F.J. e Barthélemy E. (1993b). Surface waves propagation in shallow water: a finite element model. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 16:447–459.
- Avilez-Valente P. (2000). *Métodos de Elementos Finitos para a Modelação a Uma e Duas Dimensões Horizontais da Propagação de Ondas de Gravidade em Engenharia Costeira*. Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra.
- Avilez-Valente P. e Seabra-Santos F.J. (1997). Características dispersivas do método dos elementos finitos aplicado às equações de Boussinesq. In *Actas do V Encontro Nacional de Mecânica Computacional, 20–22 Out. 1997, Guimarães, PT*, 815–823. APMTAC, Lisboa, PT.
- Avilez-Valente P. e Seabra-Santos F.J. (2000). A 2DH finite element method for the propagation of water waves around coastal structures. In *Coastal Structures'99* (Losada I., ed.), 10 páginas. Balkema, NL. (in press).
- Avilez-Valente P. e Seabra-Santos F.J. (2002). A finite element method for the 1-term weakly nonlinear Beji-Nadaoka wave model. In *4th International Symposium on Ocean Wave Measurement and Analysis – 2001* (Edge B.L. e Hemsley J.M., eds.), 874–883. ASCE.

- Avilez-Valente P. e Seabra-Santos F.J. (2004a). A Petrov-Galerkin finite element scheme for the regularized long wave equation. *Computational Mechanics*, 34:256–270.
- Avilez-Valente P. e Seabra-Santos F.J. (2004b). Um esquema de elementos finitos para ondas dispersivas unidireccionais. In *Congresso de Métodos Computacionais em Engenharia* (Soares C.A.M., Baptista A.L., Bugeda G., Casteleiro M., Goicolea J.M., Martins J.A.C., Pina C.A.B. e Rodrigues H.C., eds.), CD-ROM. LNEC.
- Boussinesq J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pure et Appl.*, 2(17):55–108.
- Bova S.W. e Carey G.F. (1996). A symmetric formulation and SUPG scheme for the shallow-water equations. *Adv. Water Resources*, 19(3):123–131.
- Brooks A.N. e Hughes T.J.R. (1982). Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 32:199–259.
- Christie I., Griffiths D.F., Mitchell A.R. e Zienkiewicz O.C. (1976). Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 10:1389–1396.
- Dingemans M.W. (1994). *Comparison of computations with Boussinesq-like models and laboratory measurements*. Rel. Téc. Project 1: Waves, MAST-G8M, Delft Hydraulics, Delft, NL.
- Elgar S., Freilich M.H. e Guza R.T. (1990). Model-data comparisons of moments of non-breaking shoaling surface gravity waves. *J. Geophys. Res.*, 95(C9):16055–16063.
- Elgar S. e Guza R.T. (1985). Shoaling gravity waves: comparisons between field observations, linear theory and a nonlinear model. *J. Fluid Mech.*, 158:47–70.
- Elgar S. e Guza R.T. (1986). Nonlinear model predictions of bispectra of shoaling surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 167:1–18.
- Freilich M.H. e Guza R.T. (1984). Nonlinear effects on shoaling surface gravity waves. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A311:1–41.

- Goda Y. (2000). *Random Seas and Design of Maritime Structures*. Advanced Series on Ocean Engineering, World Scientific Publishing Co., Singapore. ISBN 981-02-3256-X.
- Gray W.G. e Lynch D.R. (1977). Time-stepping schemes for finite element tidal model computations. *Adv. Water Resources*, 1:83.
- Grotkop G. (1973). Finite element analysis of long-period water waves. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 2:147–157.
- Hirsch C. (1992). *Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume I: Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons. ISBN 0 471 92385 0.
- Hughes T.J.R. (1978). A simple scheme for developing “upwind” finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 12:1359–1365.
- Hughes T.J.R. e Franca L.P. (1987). A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 65:85–96.
- Hughes T.J.R., Franca L.P. e Mallet M. (1986a). A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of Thermodynamics. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 54:223–234.
- Hughes T.J.R., Franca L.P. e Mallet M. (1987). A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: VI. Convergence analysis of the generalized SUPG formulation for linear time-dependent multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 63:97–112.
- Hughes T.J.R. e Mallet M. (1986a). A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 58:305–328.
- Hughes T.J.R. e Mallet M. (1986b). A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: IV. A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 58:329–336.
- Hughes T.J.R., Mallet M. e Mizukami A. (1986b). A new finite element formulation for Computational Fluid Dynamics: II. Beyond SUPG. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 54:341–355.

- Hughes T.J.R. e Tezduyer T.Z. (1984). Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 45:217–284.
- Johnson C., Nävert U. e Pitjāranta J. (1984). Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 45:285–312.
- Johnson C. e Szepessy A. (1986). On the convergence of streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws. In *Finite Difference, Element and Volume Techniques, AMD-78*, 75–91. ASME, New York, NY.
- Katopodes N.D. (1984). A dissipative Galerkin scheme for open-channel flow. *J. Hydr. Engrg.*, 110(4):450–466.
- Katopodes N.D. e Wu C.T. (1984). Shallow-water waves at Ursell numbers of order unity. In *Proc. of the 5th Int. Conf. on Finite Elements in Water Resources, Burlington, Vermont*, 437–446.
- Katopodes N.D. e Wu C.T. (1987). Computation of finite-amplitude dispersive waves. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 113:327–346.
- Kirby J.T., Wei G., Chen Q., Kennedy A.B. e Dalrymple R.A. (1998). *FUNWAVE 1.0 — Fully Nonlinear Boussinesq Wave Model, Documentation and user's manual*. University of Delaware.
- Liu P.L.F., Yoon S.B. e Kirby J.T. (1985). Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water. *J. Fluid Mech.*, 153:185–201.
- Lynch D.R. e Gray W.G. (1979). A wave equation model for finite element tidal computations. *Computers and Fluids*, 7:207–228.
- Madsen P.A. e Sørensen O.R. (1992). A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. *Coastal Engineering*, 18:183–204.
- Massel S.R. (1989). *Hydrodynamics of Coastal Zones*. Elsevier Oceanography Series, Elsevier Publishers B.V., Amsterdam, NL. ISBN 0-444-87375-9.
- Mei C.C. (1994). *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. Advanced Series on Ocean Engineering, World Scientific Publishing Co., Singapore. ISBN 9971-50-789-7.
- Mizukami A. e Hughes T.J.R. (1985). A Petrov-Galerkin finite element method for convection dominated flows: an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 50:181–193.

- Nadaoka K., Beji S. e Nakagawa Y. (1997). A fully dispersive weakly nonlinear model for water waves. *Proc. R. Soc. London*, A453:303–318.
- Nwogu O. (1993). An alternative form of the Boussinesq equations for modelling the propagation of waves from deep to shallow water. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 119:618–638.
- Peraire J., Zienkiewicz O.C. e Morgan K. (1986). Shallow water problems: a general explicit formulation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22:547–574.
- Rygg O.B. (1988). Nonlinear refraction-diffraction of surface waves in intermediate and shallow water. *Coastal Engineering*, 12(3):191–211.
- Saint-Venant A.J.C.B. (1871). Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lits. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 73:147–154 e 237–240.
- Schäffer H.A. e Madsen P.A. (1995). Further enhancements of Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering*, 26:1–14.
- Seabra-Santos F.J. (1994). Modified Boussinesq equations for deep shallow water monochromatic waves. *Estudos de Engenharia Civil*, 6(Special Issue):163–172.
- Seabra-Santos F.J., Renouard D.J. e Temperville A.M. (1988). Étude théorique et expérimentale des domaines de validité des théories d'évolution des ondes en eau peu profonde. *Annales Geophysicæ*, 6:671–680.
- Serre F. (1953). Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*, 3:374–388 e 830–872.
- Taylor C. e Davis J.M. (1975). Tidal and long wave propagation: a finite element approach. *Computers and Fluids*, 3:125–148.
- Teixeira A.T. (1994). *Finite Element Modelling of Hydrodynamics in Coastal Zones*. Tese de Doutorado, University College of Swansea, UK.
- Ursell F. (1953). The long wave paradox in the theory of long gravity waves. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 49:685–694.
- Walkley M. e Berzins M. (1999). A finite element method for the one-dimensional extended Boussinesq equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 29:143–157.
- Wei G. e Kirby J.T. (1995). Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 121(5):251–261.

- Woo S.B. e Liu P.L.F. (2004). Finite-element model for modified Boussinesq equations I. Model development. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, 130:1–16.
- Yu C.C. e Heinrich J.C. (1986). Petrov-Galerkin methods for the time-dependent convective transport equation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23(5):883–901.
- Yu C.C. e Heinrich J.C. (1987). Petrov-Galerkin method for multidimensional, time-dependent, convective-diffusion equations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24(11):2201–2215.