高校数学における創発的思考がもたらす学びの筋道の連続

江　森　英　世・内　田　靖　子
群馬大学教育学部数学教育講座
（2015 年 9 月 30 日受理）

The Continuous Thread of Learning through Emergent Thinking in High School Mathematics

Hideyo EMORI and Yasuko UCHIDA
Department of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan
(Accepted on September 30th, 2015)

１．はじめに

授業という協同での活動において，自ら体験して得られる能力は，教えられる知識以上に私たちが活かせる問題解決力となっていく。生徒たちは，わからない問題を考え続け，そこから生まれた新たな問いを吟味検証し，考えていく過程で学ぶことができる。問いを自分自身に投げかけ，コミュニケーションを通してそれを他者と共有し，試行錯誤を経て理解を深めていく。思考の筋道を創り上げていくには，授業でのコミュニケーションにおいて，生徒が自分の考えと違う別のアイデアもあると認識し，その中で再考し，自分の考えをまとめていくことが必要である。たとえ難しくなかなか手が出せない問題だとしても，仲間とともに行けるところまで考え続けることによって，物事を多面的に思慮深く捉えることができ，それが未知の考えを切り開いていく力にもつながる。その中での挑戦において，生徒たちは思考錯誤から自分たちで何かを発見し，もっと深く掘り下げてみようという意欲がさらに生まれる。授業において発見を実感することで生徒の自主性が育ち，段階的，継続的に挑戦が続き，それが創発的な思考の育成をもたらし，学びの連続につながる。

授業において他者とともに学ぶことにより，いずれの生徒にも今までにもち得なかった新しい考えが生み出されることがあると考える。それは，推論をしながら新しいものを創り出していく創発的思考である。本稿では，「創発とは，構成要素以上のものをもたらし，かつ，もとの要素に還元できないものを生み出すことである（江森，2010，p.71）」という定義に基づいて考察する。

その分析には，“Reflective Thinking”を反省的思考と反照的思考の 2 つの層に分けて捉える必要がある。反省的思考は，思考を表したものを内省し試行錯誤を経て，個人でより良い表現に書きかえる段階である。一方，反照的思考は，反省的思考により書きかえられた表現を観照し，他者とのコミュニケーションなどから刺激を受けることで創発される段階である。創発的思考は，反省的思考と反照的思考の一連の思考と考える。反照的思考の結果として，新たな解釈としての選択的知覚が与えられる。選択的知覚とは，ある 1 つの解釈により，対象を何らかの固まりや構造物とみる見方である。それは，その後の認知過程によって再解釈され，別の構造として認

識され，新たな思考を生み出すことへとつながる（cf. 江森，2010，pp.71–72）。

これらのことから，いかに反省的思考から反照的思考へと進み，結果として選択的知覚により新しい構造が得られるのかを分析する。そのために，他者の刺激を受けて知識が構造化されるように内省的な心的活動の場を設けることが必要であると考える。いかに他者とかかわり，その相互作用からアイデアを創発することができるかを考察する（内田，2014，p.11）。そして，その創発的思考がもたらす学びの筋道の連続について考えていく。したがって，本稿の目的は，高校数学における創発的思考過程を明らかにし，それが次の学びの筋道へといかに連続していくのかを分析することにある。

2．事　　例

推論をしながら新たに目覚めさせることができる創発的思考の事例について具体的に考える。

推論とは，ある推測に対する考察と検証の過程であり，蓋然的推論は特殊から一般へ，論証的推論は一般から特殊へと対象を扱うことにより進めていく思考の仕方である。このような具体から抽象への活動と抽象から具体への活動は，対で捉えることが必要である。

本研究の課題を検討するため，筆者の勤務校の高校2年生の事例を分析する。本時は，指数関数の導入として，問題を通して指数法則を楽しみながら学ぶことを目的にしている。理系クラスの20人で行う授業は，常に机をコの字に配列している。また，協同的な授業づくりに心がけ，コミュニケーションを通して理解を深めていくことができるよう問題解決においては4人グループで進めている。分析の対象とする授業で扱う問題は，「問題（1）2015^2 を 1, 2, 3, …，2015^2 で割った商として現れる整数は何種類あるか。（2）2^{2014} を 1, 2, 3, …，2^{2014} で割った商として現れる整数は何種類あるか」である。これらの問題における数学的アイデアの仕組みを見出していく過程についてとりあげることにする。

2.1　事例1の概要

「2015^2 を 1, 2, 3, …，2015^2 で割った商として現れる整数は何種類あるか」という課題が与えられると，生徒たちはまず問題の意味がわからないとの声をあげる。あるグループは，「2015^2 を 1, 2, 3, …，2015^2 で割った商として現れる整数は…」とこの数字のまま考えようとする。2015^2 を計算するが，考え始めるとすぐに，2015^2 という大きな数は想像できないため，それを思考の対象とすることは難しいことがわかる。しばらく試行錯誤が続くが，まずは考えやすいところでやってみようと，2^2，3^2，4^2 と表してみる生徒が出てきた。この生徒は，よくわからないけれど，このように書いてみることで，何か規則性が見出せないかと思って試してみたという。そして，グループで議論した結果を生徒Aが黒板を使って説明する（表1）。「（黒板を指しながら）よくわからないんだけど，これ2だから，2の2乗の2かける2して，引く1したら3種類になって。3乗のときは，3かける2して，引く1したら5になって。これも同じように4かけて，この4とかける2引く1したら

表1　事例1の発話記録

01	生徒A：	（黒板を指しながら）よくわからないんだけど，これ2だから，2の2乗の2かける2して，引く1したら3種類になって。3乗のときは，3かける2して，引く1したら5になって。これも同じように4かけて，この4とかける2引く1したら7だから。規則性があるなって思って，こういう式が成り立ちました。
02	教師　：	最後の式はどういうこと？
03	生徒A：	この式は，この問題は2015の2乗だから，2015かける2引く1して，この答です。
	（少しの間，それぞれ考える。）	
	（4人グループでの発話）	
04	生徒B：	かける2って何？
05	生徒C：	こうなるのはわかるんだけど，なんでなるのかがわからない。
06	生徒D：	確かに，証明しなきゃだよね。
07	生徒C：	どうやったら，この形になるんだろ？
08	生徒B：	よくわからない，理由が。

7 だから。規則性があるなって思って，こういう式が成り立ちました（発言 01）」と発表する（図 1〜3）。それを教師が受けて，「最後の式はどういうこと？（発言 02）」と最後の式に対する解釈を確認する（図 4）。生徒 A は，「この式は，この問題は 2015 の 2 乗だから，2015 かける 2 引く 1 して，この答です（発言 03）」と一般化した考えをもとに説明する。

この後，この発見に関する発言から，生徒たちは他者の考えを解釈するため，さらにコミュニケーションをしながら内省し始める。その中での疑問，生徒 B「かける 2って何？（発言 04）」，生徒 C「こうなるのはわかるんだけど，なんでなるのかがわからない（発言 05）」，生徒 D「確かに，証明しなきゃだよね（発言 06）」，生徒 C「どうやったら，この形になるんだろ？（発言 07）」，生徒 B「よくわからない，理由が（発言 08）」と生徒 A のアイデアに対するさらなる追求がそれぞれの段階で進んでいく。

2.1.1　事例 1 の分析

2015^2 という数から 2^2, 3^2, 4^2 と試し始めたこの生徒は，問題解決における数学的な考え方として，その問いを平方数の簡単な類比の問題に変え，対象を観察し試している。何も書き出さなければ始まらないが，思考したものを外化することにより，それを反省的思考の対象として認識することが可能となる。このアイデアから，同じグループの他の生徒も同様に表してみることから始めた。別のグループは，2015^2 を大きな数として捉え，100 や 15, 20, 25 等，いろいろな数で試している。このようにまずは表してみることで，生徒たちは問題の意味を理解し，次に何か法則はないものかと議論が進んでいく。

平方数の類比として考えを表した生徒たちは，2^2, 3^2, 4^2 の場合の商の表現を見直していくと，2^2 を 1, 2, 3, 2^2 で割った商として現れる整数が，4, 2, 1 の 3 種類であることがわかる（図 1）。3^2 を 1, 2, 3, …, 3^2 で割った商として現れる整数は，9, 4, 3, 2, 1 の 5 種類である（図 2）。4^2 を 1, 2, 3, …, 4^2 で割った商として現れる整数は，16, 8, 5, 4, 3, 2, 1 の 7 種類になることがわかる（図 3）。その表現を反省的思考の対象として考えた結果，生徒 A は，「（黒板を指しながら）よくわからないんだけど，これ 2 だから，2 の 2

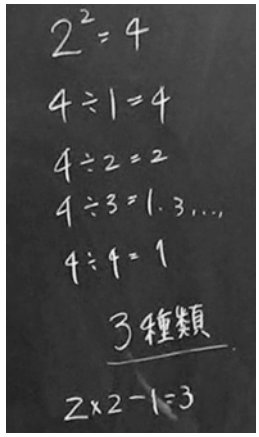

図 1　2^2 の場合の例

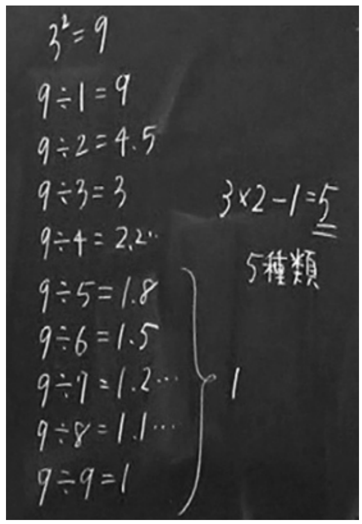

図 2　3^2 の場合の例

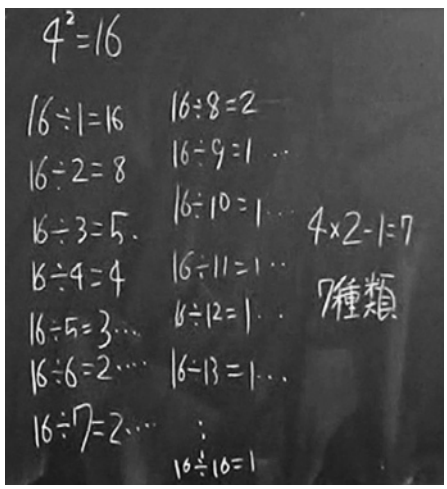

図 3　4^2 の場合の例

乗の 2 かける 2 して，引く 1 したら 3 種類になって。3 乗のときは，3 かける 2 して，引く 1 したら 5 になって。これも同じように 4 かけて，この 4 とかける 2 引く 1 したら 7 だから。規則性があるなって思って，こういう式が成り立ちました（発言 01）」と説明した（図 1〜3）。

生徒 A のグループは，2^2，3^2，4^2 の場合の外化された表現から，2^2，3^2，4^2 の商の種類の解釈として，2×2－1＝3，3×2－1＝5，4×2－1＝7 という仕組みを推測したのである。生徒たちは，2^2 の場合は 3 種類，3^2 の場合は 5 種類という 2 つの解をみたときに，共通するある類似性に気づいた。表現の観察から始まり，3＝2×2－1，5＝3×2－1 と予想し，「$\square^2$ の場合は□×2－1 種類」という新たな解釈としての選択的知覚が与えられ，新しい見方を発見する。この推測が，帰納的推論の第 1 段階である。Polya は，私たちは経験を通して学び，その経験を処理する手続きとして，帰納があるという。帰納は物事の観察から始まり，推測を構成するに至る。しかし，蓋然的推論は単に一つの推測であり，暫定的なものに過ぎない。蓋然的推論とは，観察によって暗示されたある推測や判断の信頼を強めるために展開される思考の仕方である。それは，新しい推測や判断を導く生産的な推論といえる。この推測は，4^2 の場合の 7＝4×2－1 に適用され信頼を増す。さらに多くの特別な場合を確かめることで，確かめられるごとに信頼を増すことになる。

この規則性の発見が，考察の対象を数学的に構造化することへとつながる。このことから，「n^2 を 1, 2, 3, …, n^2 で割った商として現れる整数は何種類あるか」の解として，n×2－1 という一般化された形へ進む。そして，図 4 を用いて，本課題の商の種類の個数を具体的にみていくことができる。このような一連の反照的思考から生まれた選択的知覚により，一般化されたものを適応して同様に考え，生徒たちは，この問題の商の個数を 2015×2－1＝4029 種類と結論づけた。

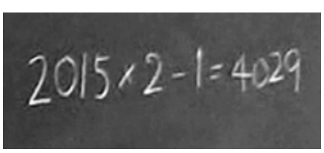

図 4　2015^2 の場合

この後，この発見に関する発言を受けて，なるほどとしきりに感心する生徒や同様に考えていたと納得する生徒等，他者の考えを受けることでさらにコミュニケーションをしながら内省し始める。その中での疑問として，生徒 B が「かける 2って何？（発言 04）」とつぶやく。これは，生徒 A の見方である「n×2－1」の×2 の部分は何を意味しているのかと新たな疑問をもったのである。続いて生徒 C も，「こうなるのはわかるんだけど，なんでなるのかがわからない（発言 05）」と投げかける。生徒 C は，生徒 A のアイデアを受け入れ納得し，そこからその式の意味を解釈しようと試みているといえる。生徒 D は生徒 B と生徒 C の発言を受けて，「確かに，証明しなきゃだよね（発言 06）」と答える。

生徒 A の示したこの推測は帰納的推論によって 1 つひとつの確かめは推測を強化され，その信頼を高めているが，推測の証明にはなり得ていない。そこで，生徒たちは，この連鎖から推測の意味を考え始めているのである。今まで調べた場合について振り返ると，最初の特別な数 2^2，3^2 は推測を暗示したものであり，また 4^2 の検証結果はそれを指示したものである。そこから一般化し，2015^2 の場合についても同様に考えたわけである。しかし生徒たちは答えが出たことだけに満足せず，与えられた推測が真である理由を明らかにすることが必要であると感じ，それを生徒たち自身が欲しているのである。

さらに，生徒 C は，「どうやったら，この形になるんだろ？（発言 07）」と再度表現されたものを見直し考えている。Polya（1953/1959, p.56）は，「一般的な数学的結果に導く特殊な事例を注意深く観察することは，またその証明を暗示することがある」と述べているが，この生徒 C の態度からもその可能性が読み取れ，ここからさらに考察が進んでいくことにつながる。そして，生徒 B も「よくわからない，理由が（発言 08）」と述べ，疑問を明らかにしようとコミュニケーションを通した協同での探求が進んでいく。

2.1.2　事例 1 の考察

事例 1 の分析で述べたように，2015^2 からより簡単な平方数の類比の場合を調べることにより，この問いにあたる準備をすることができたといえる。人はある問題を考えるとき，まずは表し，漠然としながらも，こうやったらよいのではないかという見通しをもって試し始める。具体的に書き出すことで，これから探そうとする規則性や構造を読みとっていくための表現を作ることができた。そして，表現されたものを反省的思考の対象として思考を深め，表し直している。ここから以前には気づかれなかった諸関係のもつ規則正しさと類似性を発見するに至り，新たな選択的知覚を得て，対象を見直していく。このような反照的思考において，生徒は対象を深く理解して学習し，さらにその上に新たに必要なものを創発し表現することができる。その中に，発見の喜びや次への意欲につながるものがあると考える。

生徒たちは何度も何度も試行錯誤を繰り返し，いろいろな観察を組み合わせて類比をたどり，1 つのアイデアを予測した。さらに，この蓋然的推論によって，推測によって発見されたアイデアを証明していこうという自然な思考の流れが互いのコミュニケーション連鎖から生まれている。蓋然的推論は，暫定的で流動的であるが，新しい知識を生み出すには必要であり，論証的推論は，完全で争う余地なく明白にされた最終的なものであると考える（cf. Polya, 1953/1959, p.4）。この 2 つは互いに補足し合い，推論することができる。生徒たちは，根拠を追及し，考え方の正しさを求め，意味づけをしようと，次の学びへと思考を連続させていく。

2.2　事例 2 の概要

事例 1 での疑問を明らかにしようと探求している生徒たちは，式の意味をその表現から読み取ろうと試行錯誤を繰り返す。その中での気づきとして，割り算をしていくと，商として 1 がその数の半分だけ出てくるということがわかる。例えば，$4^2=16$ の場合は，商として現れる 1 の個数は 8 個である。そのことは他の表現においても成り立ち，それが正しいことが予想されるが，それが式といかなる関係をもつのかとさらに疑問が続くことになる。しばらくの間はどのグループもやり取りをしていくが，やがて思考が止まってしまう。

表 2　事例 2 の発話記録

09	教師	：ちょっと意味をもって○をつけてみたんだけど。
	（しばらくの間，それぞれ考える。）	
10	生徒 E	：あ，わかった。逆になってる。
11	生徒 F	：え？逆になってる？あー，そういうことか。逆になってる。
12	生徒 G	：あー，なるほど。
13	生徒 E	：で，4 と 4 のやつを引くんだ！
14	生徒 H	：あー，かぶってる。
15	生徒 I	：え？なに，なに？

そこで，教師が，事例 1 で板書してある 4^2 の表現にいくつか書き加える（図 4）。割る数と商の数に○をつけたのである。生徒には，「ちょっと意味をもって○をつけてみたんだけど（発言 09）」と投げかけている（表 2）。それを確認した生徒たちは，どのような意味があるのかと検証していくことになる。しばらくの間考えた後，生徒 E が，「あ，わかった。逆になってる（発言 10）」と反応する。この発言に続き，生徒 F は，「え？逆になってる？（発言 11）」と生徒 E のメッセージを解釈しようと再度「逆」という視点で表現を見直すことで，「あー，そういうことか。逆になってる（発言 11）」とその発言の意味を理解することができた。それを受けて，生徒 G も「あー，なるほど（発言 12）」と生徒 E と生徒 F のやりとりを聞くことで，この段階で理解していく。他者のメッセージを聞くことで，最初に発言した生徒 E は，自分の考えは正しいのではないかと少し自信をもって確認するように，「で，4 と 4 のやつを引くんだ！（発言 13）」と式への解釈を進めた発言をする。生徒 H は，「あー，かぶってる（発言 14）」と生徒 E の「4 と 4」という具体的な数値を聞くことで，生徒 E の言う仕組みを納得し発見している。生徒 E から生徒 H は同じ 4 人グループで話をしていたが，これまでのコミュニケーションを遠巻きにみていた隣の班の生徒 I が，「え？なに，なに？（発言 15）」と理解している様子を察知し，会話に加わろうとしている。生徒 I の発言から，この新たな選択的知覚は，このグループ

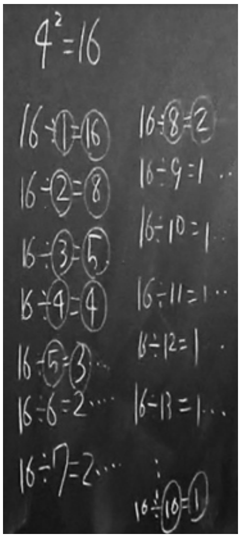

図5　4^2 の新たな表現

内だけに終わらず，クラス全体へと共有されていくことにつながる。

2.2.1　事例2の分析

思考が止まってしまったときに，外からのなんらかの刺激は思考を促すためには必要となる。それが，生徒同士でのコミュニケーション連鎖の中でうまく作用することが求められる。しかし，滞ってしまったときには，教師を含めたコミュニケーションも考えていく。ここでは，事例1で生徒が表した 4^2 の場合のものに教師が○を書き加えることで，生徒たちに刺激を与えている。教師は，$4^2=16$ を1から順に割った表現の割る数と商のセット，1と16，2と8，3と5，4と4，5と3，8と2，16と1に○をつけた（図4）。そして，生徒たちに「ちょっと意味をもって○をつけてみたんだけど（発言09）」と投げかける。教師の役割としては，生徒の問いを課題に変換させ，深く理解できるような環境づくりを心がけることが必要であると考える。この○をつける方法以外で生徒の思考を進めるような手立てがあるかどうかは考える余地がある。

この発言を受けて，生徒たちは，この表現を反省的思考の対象として，再考していくことになる。生徒Eが，「あ，わかった。逆になってる（発言10）」とつぶやくことから，あるグループでのコミュニケーション連鎖が始まる。この生徒Eの発言は，○をつけた数値のペア，（1, 16）と（16, 1），（2, 8）と（8, 2），（3, 5）と（5, 3）というように，割る数と商が逆になってまた現れてくるということを示している。この発言から，「え？逆になってる？（発言11）」と個人ではひらめいていない生徒Fは，再度表現を見直す契機が生じる。生徒Fは，その逆になっているという意味を意識し，数学的に解釈しようとすることで，「あー，そういうことか。逆になってる（発言11）」とかけ算はかける順を逆にしても成り立つという生徒Eの新たな見方を認識していく。この生徒Eと生徒Fのコミュニケーションを聞いていた生徒Gも，じっくりと落ち着いて時間をかけて再考することで，この後初めてそのアイデアを受け入れ，「あー，なるほど（発言12）」とその関係性を自分の中に創り上げることができたといえる。これらの反照的思考は，コミュニケーション連鎖を受けて，一面的であった自分の見方をもう一度みつめ直すことによって行われる知覚の更新から生まれたものである。

生徒Eは教師の書き加えた表現から割る数と商が逆になって現れてくるということに気がついただけであったが，自分の発言に対する生徒Fと生徒Gのフィードバックにより，新たな自分の見方を受け入れてくれたことによる安心感と自信が生まれているといえる。それは，この表現の見方から，式の解釈へと思考をつなげ，「で，4と4のやつを引くんだ！（発言13）」という発見に結びついている。4^2 の場合の $7=4\times2-1$ という解釈として，割る数と商の同じペアがでてくるから×2をし，（4, 4）は1つしかないからその分を引くという，「×2−1」の解釈にたどり着くことができた。動きや変化を内包するコミュニケーションは，切り離され分析される前に，その内側から感じられ体験されるものである。絶えず変化をもちながら進み続ける意識のあり方こそが，生徒たちの思考の契機となったといえる。

ここからさらに，生徒Hは，「あー，かぶってる（発言14）」と−1の意味を見出すことができた。それは，「で，4と4のやつを引くんだ！（発言13）」という生徒Eの（4, 4）という具体的な数値を聞くことによ

りはっきりと意識され，ペアとしてカウントするには 4 で重なりが生じるということを述べている。

発言 10 から発言 14 のコミュニケーション連鎖により，参画者のいずれもがもち得なかったアイデアが創発された。ここで創発されたアイデアは，送り手の意図したものではなく，受け手が一人で考え出したものでもない。送り手と受け手のいずれにも内在されていなかったもので，コミュニケーションによって創発されたものといえる。他者とのコミュニケーションにより，個人の知識や経験に縛られない創発的な思考過程が，突然活性化される可能性も出てくる。他者からのメッセージが，独力では見出せなかった表現をもたらし，本質を捉えることが可能となる。

生徒 E，F，G，H の 4 人によるコミュニケーション連鎖から，新たな構造を見出したグループの様子を感じ取った生徒 I が，「え？なに，なに？（発言 15）」とその解釈を確認していく。生徒たちは，個で考えたり，同じ班の生徒とやりとりをしたり，また他の班や全体での共有場面を経たりしながら，それぞれの段階で学んでいくことができる。それらのコミュニケーション連鎖による相互作用が，思考やその意識を連続させていくことになる。

2.2.2　事例 2 の考察

誰かが何かのメッセージを発することで，事例 1 での完結した考えで終わらず，式の意味を再度考えてみようという意欲につながる。最初の段階では意識していない他者からのメッセージによって，意識作用と意識対象の相関関係が生じるのである。そこから，新しい考えを創り出すことへつながっていく。開かれた可能性への積極的な姿勢が思考の継続につながり，新しい解釈や発見を生むことができる。

思考の理解深化の段階を振り返ってみる。最初は，とりあえず考えを外化し表を書くことから始めた生徒たちは，規則性を探そうという意識で表を書くため，この表記は割る数と商のセットで縦に並べられている。書いてみたものを振り返ることで意識化され，発見へとつながる。とりあえず書いてみたこれらの表は，規則を読みとるために有用であると気づき，思考の道具となり考えることができる。この表現の良さに気がつくことで自信になり，この後もこの表現をもとにして思考していく。そして，対象の表現のある部分に○をつけ，注視された全体を個々の構成部分に分解して吟味し始める。しかし，この分割的な吟味が行われるからといって，全体を認識する思考が終わったわけではない。さらに，すでに観察してきたものに再度立ち返り，今示されている状況を全体的な視野のもとで見直す。このようにして，さまざまな要素が関係し合う一つの構造体として，捉えることができるようになるのである。そして，選択的な知覚が始まり，新たな解釈の段階が生まれ，内容を分析し表現することが可能となるといえる。

これまでみてきたように，問いから新しいものを生み出していく過程において，問いのもっている意味がだんだんとまとまっていく。あまり意識せずに受け取った刺激が，時間が経つにつれ相互に作用し合って徐々に意味をもってくる。このように，学びの筋道の連続には，協同での思考から内化していく作用が重要な役割をもっていると考える。

2.3　事例 3 の概要

事例 1 と事例 2 で，「2015^2 を 1, 2, 3, …, 2015^2 で割った商として現れる整数は何種類あるか」という問題について考えてきた。その数値のまま考えられない場合には，より易しい類比の表現を創り，そこから新たな選択的知覚を得て，この課題の構造を理解してきた。その確認問題として，事例 3 においては，「2^{2014} を 1, 2, 3, …, 2^{2014} で割った商として現れる整数は何種類あるか」を考える。本授業では，この課題を通して，指数法則を楽しみながら学ぶことを目標にしていたが，その仕組みを読み取る準備として，前の問題を考えてきたのである。

まず，この問題が与えられると，生徒 C が「2^{2014} って？（発言 16）」とつぶやく（表 3）。この生徒は 2^{2014} 自体が大きすぎて想像ができないため，どのように考えればよいのかと疑問をもったのである。すると，生徒 B も「えー。何これ？（発言 17）」と生徒 C の発言に同意する。そこで，生徒 C はわからないながらも前の問題を確認しようと，「さっきは，2 乗だったよね（発言 18）」と今までの知識を活用して何とか

表 3　事例 3 の発話記録

16	生徒C：	2^{2014} って？
17	生徒B：	えー。何これ？
18	生徒C：	さっきは，2 乗だったよね。
19	生徒B：	うーん。
20	生徒D：	2^{1007} の 2 乗？
21	生徒C：	あー。
22	生徒B：	あー，指数法則って言ってた。
23	生徒C：	ってことは，$2^{1007}\times2-1$？
24	生徒B：	うん，うん。
25	生徒D：	1008 乗？
26	生徒 J：	これって，計算しなくていいんだ。
27	生徒K：	あー。

解けないだろうかと振り返っている。それを受けて，生徒 B も前の問題を見返しながら，「うーん（発言 19）」と考えていく。今まで個人で思考しながらも，生徒 C と生徒 B のコミュニケーションを聞いていた生徒 D は，「2^{1007} の 2 乗？（発言 20）」と反応する。これは，2^{2014} という数は考えられないと思いながら，これまでの 2 人のやりとりから，平方数という見方を得て，2^{2014} を $(2^{1007})^2$ の形に表し直すことを試みたのである（図 5）。

そこで，生徒 C は「あー（発言 21）」と納得しながら生徒 D の新たな見方を受け入れている。生徒 B も同様に，「あー，指数法則って言ってた（発言 22）」と 2^{2014} を $(2^{1007})^2$ と捉えるのは指数法則を使っているのだと理解することができている。新たな見方を獲得した生徒 C は，「ってことは，$2^{1007}\times2-1$？（発言 23）」と商の種類について前問題のアイデアを活用して式を考えている。最初はわからなかった生徒 B も，生徒 C の答えた式の意味を解釈し，「うん，うん（発言 24）」と確かなものにしている。さらに，生徒 D は「1008 乗？（発言 25）」と生徒 C が発言した「$2^{1007}\times2$」の部分に指数法則を用いて，さらに計算を進めることができた（図 6）。これらのコミュニケーション連鎖から，生徒 J は「これって，計算しなくていいんだ（発言 26）」と $2^{1008}-1$ が最終解であることを発見している。生徒 K は「あー（発言 27）」とそんなふうに考えるとは思いもよらなかったと感嘆の声をあげる。それぞれがコミュニケーション連鎖を経て，発見をしながら関連性を個人の中に創り上げている様子が見受けられる。

2.3.1　事例 3 の分析

「2^{2014} を $1, 2, 3, \cdots, 2^{2014}$ で割った商として現れる整数は何種類あるか」という問いに対して，最初生徒たちは前の問題との関連性に気づいていない。それは，生徒 C の「2^{2014} って？（発言 16）」やそれに同意する「えー。何これ？（発言 17）」という生徒 B の発言からもうかがえる。それらは，2^{2014} という突然出てきた大きな数については考えられないという思いの表れであるといえる。生徒 C は，「さっきは，2 乗だったよね（発言 18）」となんとか思考を進められないかと前の問題の思考過程を反省的思考の対象として見直している。類似性に注目する活動は観察できないため，心的に 2 つの対象を関連づけ，関係を創り上げることが求められる。問題解決において，自分の知識を活用して考えることはできないかと協同で探求していく過程において，生徒たちは深く学ぶことができる。この生徒 C の発言から，刺激を受けた生徒 B も前の問題の解法を見返しながら，「うーん（発言 19）」と考え続けている。

これらのコミュニケーション連鎖から考え続けることによって，生徒 D は「2^{1007} の 2 乗？（発言 20）」と投げかける。生徒 D は，2015^2 のときに考えたアイ

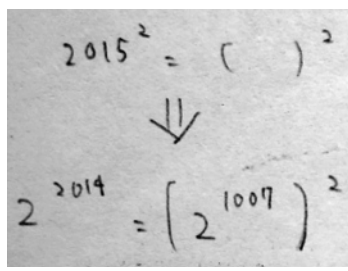

図 6　2^{2014} の見方

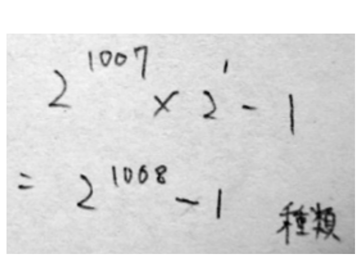

図 7　2^{2014} 場合の式と解

デアを利用できないかと関連性を考え始め，類比からの思考過程を内省することで前の問題は平方数であったことを再認識し，平方数とみることができれば考えられるのではないかと新たな選択的知覚に気がついた。2^{2014} を 2 乗の形に変形しようと見直し，$2^{2014}=(2^{1007})^2$ とみる考えに至る（図 5）。2^{2014} という数をそのまま考えるのではなく，選択的知覚を得ることで，$2^{2014}=(2^{1007})^2$ と再認識しているのである。この新たな見方の獲得は，これまでのコミュニケーション連鎖と 2015^2 の問題における創発的思考過程の生徒たちによる納得した積み上げによりもたらされたといえる。

この生徒 D の発言から，「さっきは，2 乗だったよね（発言 18）」と前の問題との関連を探っていた生徒 C も「あー（発言 21）」と平方数として捉えるアイデアを納得し確かなものにしている。生徒 C の中にも，2^{2014} を考えるにあたって，2015^2 の問題のために考えた 2^2，3^2，4^2 のような易しい類比から創り上げた創発的思考過程が想起されている。そこからそれを活用できないかと「さっきは，2 乗だったよね（発言 18）」と先につぶやいた自分の直観は正しいと自信をもち，さらにそのメッセージを共有した生徒 D の「2^{1007} の 2 乗？（発言 20）」というフィードバックに強く共感しているのである。

このことから，生徒 B も同様に，「あー，指数法則って言ってた（発言 22）」と納得している。生徒 B は「えー。何これ？（発言 17）」と初めはどのように考えればよいのか見当がつかなかったが，これまでのコミュニケーション連鎖を受けて，生徒 C や生徒 D の思考過程を追体験して個人の中にその考えを形成することができたといえる。そこから，2^{2014} を $(2^{1007})^2$ とみる考えには指数法則が利用されていて，それはこの授業の始めに教師が指数法則の確認をしていたこととつながりがあると意識することができた。単に指数法則の計算練習を繰り返すだけでは，生徒たちがその必要性や意味を感じ取ることはなかなかできないが，このように問題解決を通してその活用場面を実体験することがその習得には大切なことであると考える。

この生徒 B の指数法則という確かな根拠を聞いた生徒 C は，「ってことは，$2^{1007}\times2-1$？（発言 23）」と $2^{2014}=(2^{1007})^2$ とみる新たな見方を活用して式へと思考を進めることができた。これは，先の問題で創発した平方数の場合の「n^2 を 1, 2, 3, …, n^2 で割った商として現れる整数は何種類あるか」の解として，$n\times2-1$ 種類という一般化された形を適応したものである。生徒 C はこの解に確かにたどり着きながらも，まだ疑問形で仲間に聞いている。未知のものを探求し新たなものを創造していく過程はこのように不安定なものであるが，協同でのコミュニケーションを通した相互作用により，生徒たちは自分たちの力で確かなものへと変換させることができるようになっていくといえる。それは，その後の生徒 B による「うん，うん（発言 24）」という反応を受けて，さらに固まっていった。

あるアイデアに対して，一度コミュニケーション参画者の間の了承が得られると，さらに生徒たちの思考は次のものへと向かう。それは，生徒 D による「1008 乗？（発言 25）」という発言からさらに進んでいくのである。生徒 D は，先に示したアイデア「n^2 を 1, 2, 3, …, n^2 で割った商として現れる整数は何種類あるか」の解は，$n\times2-1$ 種類になるという方法を 2^{2014} の場合に道具的に利用するだけで終わっていない。それを反省的思考の対象として内省することで，生徒 C の答えた「ってことは，$2^{1007}\times2-1$？（発言 23）」の「$2^{1007}\times2$」の部分に指数法則を用いて，それは計算すると 2^{1008} になるという意味で，「1008 乗？（発言 25）」と反応したのである（図 6）。これは，2^{2014} を $(2^{1007})^2$ とみた自らの発言に対し，生徒 B がそれは指数法則からいえることであると確かな根拠を付け足してくれたことで，その指数法則という考えをこの場面でも使ってみようとしたのである。生徒 B による指数法則という発言は，2^{2014} を捉える際だけでなく，別の場面においてもさらなる影響を及ぼしている。

このように，指数法則について問題を通して学ぶということを本時の目標にしていた教師の意図も生徒には十分伝わっている。ここまで聞いていた生徒 J は，「これって，計算しなくていいんだ（発言 26）」と $2^{1007}\times2-1$ を $2^{1008}-1$ にまとめたものが最終形

であると受け入れ，2^{1008} をこれ以上計算しなくてもよいと結論づけた。生徒 K は「あー（発言 27)」と頭をかかえ首を振りながら，自分では想像もしなかった思いもよらない展開について振り返っている。その生徒 K の不安な思いを隣の席の生徒やクラスの仲間は支え，同じ思いをもっていると頷き共有している。生徒 K も個人ではわからなかったが，生徒たちによるコミュニケーション連鎖の中にいることでそれを受け入れることはできた。この難しい問いに対して途中で投げ出さず，仲間とともに考え続けることができたといえる。この姿勢は，本時の問題を解決するといった一時期のためのものではなく，これからいろいろな課題を考えながら乗り越え，新たなものを創発していくためには必要な力であると考える。

2.3.2 事例 3 の考察

新たな問題が出されそのままでは考えられず思考が滞ったとき，生徒たちは前の問題の解法を振り返ろうとした。その反省的思考による他者とのアイデア交換や内省により，思考や認知の変容を導くことができた。個人の中にあるこれまで創り上げてきた知識がつながることで構成的な学習が可能となり，新しい見方が創発されることになったといえる。

コミュニケーション連鎖の中で，生徒たちはその時々の問いを互いに吟味，検証していく。考えていない生徒は，目的意識をもたないまま時間を過ごしていることになり，受け入れるだけの勉強になってしまう。しかし，本事例の考え続けている生徒たちは，問いを自分に投げかけ，またそれを他者へのメッセージとして送り，その問いをともに検証していく。新たな見方の発見からの反照的思考が生徒の充実感につながり，また挑戦していこうという意欲となる。挑戦は段階的にしかできない。挑戦していくためには見通しが必要で，それは互いの送ったメッセージを解釈しようと再考していく過程により導かれていく。段階的，継続的に思考錯誤をしながらチャレンジし，深く追求していくことがそれぞれ生徒の学びを創り，その納得していく過程が次への確かな学びの連続を生むことになる。

3．考　　察

最初の問題を考える際，生徒たちは 2^2，3^2，4^2 等の類比から始まり，その表現を内省することで，新たな見方から一般化させて解を求めた。その思考が内省的理解に裏づけられると，いつでもその問いを解決できる知識となる。このような知識の構成は，学習者の内省的な心的活動によってのみ構築され得る。そのため，知識の構築と検証の機会を多く設け，自分で自分の知識を活用することが必要である。

一度，ある概念についてある程度の内省ができるようになると，重要な次の進歩が始まる。それらの構造に意味づけをしようと，今までの思考過程を反省的思考の対象とし，新たな選択的知覚を求め再解釈していくのである。コミュニケーション連鎖が内省的理解の発達に影響を与え，その反照的思考を活性化することができるといえる。そのときに創発した思考過程は内化され，次の問題を考えるときにも活用され，そこから選択的知覚を得て新たな見方を創り出した。そして，生徒たちは指数法則を理解しながら解へとつなげていくことができた。コミュニケーションにおいて展開される内省の問いは，定まったものではなく新たな創造であり，それらをともに解決しようと何かを発見する中で生徒たちは理解を一歩ずつ深め，学びの筋道を連続させていくことができる。

4．おわりに

生徒たちは，反省的思考から新たな選択的知覚を得て反照的思考をしていくことで，新たなアイデアや見方を創発させていくことができる。協同のコミュニケーションから生まれたその創発的思考過程は個人の中に内化され，その後の問題解決に活かされていく。生徒たちは次の問題を考える際にも相互の関連性を認識し，選択的知覚に気がついて対象を再認識でき，確かな学びを連続させていく。深く追求し創発していく行為を経験することで，思考の筋道を自ら見出していくことができるようになる。今後の課題は，関連性の認識から選択的知覚を得るま

での認知過程を明らかにすることである。

引用文献

内田靖子（2014）. 数学的アイデアの創発的思考の分析. 群馬大学教育実践研究, **31**, 11–20. 群馬大学教育学部.

江森英世（2010）. 数学的コミュニケーションの創発連鎖における反省的思考と反照的思考. 科学教育研究, **34**(2), 71–85. 日本科学教育学会.

Polya, G.（1953/1959）. 柴垣和三雄訳. 数学における発見はいかになされるか 1：帰納と類比. 東京：丸善.