ガウス整数環とスーパーガウス整数環のゼータ関数

谷口 正*　　森下 奈保子†

(2014 年 11 月 27 日受理)

1　はじめに

数学最大の難問といわれるリーマン予想とは, リーマンゼータ

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\prod_{p:\text{素数}}(1-p^{-s})^{-1}$$

の自明でない零点の実部がすべて $\frac{1}{2}$ になるという予想であり，1859 年に数学者リーマンが提出してから 150 年以上経った今でもまだ未解決である ([2],[3])．ミレニアム問題として, 日本円にして約 1 億円の懸賞問題でもある.

我々の興味の理由は, リーマン予想の解決に向かう方向が,「新しい空間概念の発見」の方向にあるような気がするからである．我々の興味である「点とは何か」「素数とは何か」さらに云うと「量子化とは何か」「超対称性とは何か」などの素朴な問題に根付いている気がするからである．リーマン予想の解決は全ての数学に測り知れない影響を与えると予想される．そして重要なことは, リーマン予想の解決への様々な試み事態が数学の発展に強い影響があるということである．その一つの我々の興味ある動向として, 黒川, マニン, コンヌたちの一元体 $\mathbb{F}_1$ 上で考える絶対数学の研究がある.

本研究は，新しく定義したスーパーガウス整数環のゼータを考察することを目的とする．三種類のゼータのうち一つは絶対井草ゼータと一致することが示される（系 1).これがどんな意味があるのか, たまたま偶然一致したのか, 現段階では解らない．スーパーガウス整数環は先ほどの「超対称性とは何か」を意識して考えた出された対象である．まだ全くの初歩の研究段階で, スーパーガウス整数環について考えるべきことは山ほどある.

* 一般教科（自然科学)
† お茶の水女子大学理学部数学科

2　ガウス整数環

環の定義は以下である.
集合 R に演算 $+,\cdot$ が入っていて，次の条件を満たす.
(1)$(R,+)$ は可換な加法群.
(2)$(R,\cdot)$ はモノイド（単位元をもつ半群).
(3) 分配法則をみたす.
最も基本的な環の例は整数 $\mathbb{Z}$ に通常の和と積を入れた有理整数環 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ である.

ガウス整数環の定義は以下である ([1]).

$$\mathbb{Z}[i]=\{n+mi \mid i^2=-1\ ,\ n,m\in\mathbb{Z}\}$$

ガウス整数 ρ について，真の約数を持たず，0 でも単数 $(\pm1,\pm i)$ でもないとき，ρ をガウス素数という. 例えば, $1+i,2+i,3,3+2i$ などである. 有理素数 2 は，ガウス整数においては $2=(1+i)(1-i)$ と分解することができるので，ガウス素数ではない. このように、有理素数がガウス素数であるとは限らない. また，単数因数 ($\pm\alpha,\pm i\alpha$ ただし,$\alpha\in\mathbb{Z}[i]$) の違いと順序の違いを除けば，素因数分解の一意性が成立する.

ガウス整数 $\alpha=n+mi\ \ (n,m\in\mathbb{Z})$ のノルムは

$$N(\alpha)=\alpha\overline{\alpha}=n^2+m^2$$

と定義されている．また，次の 2 つの性質を満たす.
(1)　$N(\alpha)$ は，0 または正の整数である.
　このとき, $N(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$
(2)　$N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$
ガウス素数は次のように判定することができる.

ガウス素数の判定

ガウス整数 α に対し,
$N(\alpha)$ が有理素数　$\Rightarrow \alpha$ がガウス素数

ただし，この逆は成り立たないことに注意する．例えば，3 はガウス素数だが，$N(3)=9$ なのでノルムは有理素数にはならない．

有理素数について，次の定理からガウス素数に分解することができる．

有理素数の分解定理

奇素数 p に対して,
(1) $p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ のとき p は互いに共役なガウス素数の $\alpha,\overline{\alpha}$ の積に分解される．
$\because p=\alpha\overline{\alpha}=n^2+m^2$
よって p はガウス素数ではない．
(2) $p\equiv 3(\mathrm{mod}4)$ のとき p はガウス素数．

有理整数環 $\mathbb{Z}$ において，$n\mathbb{Z}$(n の倍数全体) はイデアルであり，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{0,1,2,\cdots n-1\}$ は環をなし，n を法とした剰余環という．n が有理素数 p とすると，$p\mathbb{Z}$ は素イデアルであり，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}=\{0,1,2,\cdots p-1\}$ は体をなし，p を法とした剰余体という．

これと同様なことがガウス整数環においても成り立つ．ガウス整数環 $\mathbb{Z}[i]$ において，ガウス整数 ρ に対して $\rho\mathbb{Z}[i]=(\rho)=\{\rho\alpha\mid\alpha$ は任意の複素整数 $\}$ はイデアルであり，$\mathbb{Z}[i]/(\rho)$ は環である．

$\mathbb{Z}[i]$ において，ガウス整数 $\rho\neq 0$ に対し，次の 3 条件は同値である：
(1)ρ はガウス素数
(2)(ρ) は素イデアル
(3)$\mathbb{Z}[i]/(\rho)$ は体
以下が成り立つことが知られている．

命題 1. ([1])
(1) ガウス素数 ρ で $p=\rho\overline{\rho}$, $p\equiv 1(\mathrm{mod}4)$ の有理素数の因数のとき

$$\mathbb{Z}[i]/(\rho)\cong\mathbb{F}_p\ ,\ N(\rho)=p$$

(2) ガウス素数 $p\equiv 3(\mathrm{mod}4)$ の有理素数のとき

$$\mathbb{Z}[i]/(p)\text{ の素体}\cong\mathbb{F}_p\ ,\ N(p)=p^2$$

3 環のゼータ

一般の環 A のゼータの定義を 2 種類示す ([2],[3])．

$$\zeta_A(s)=\sum_{\substack{I\subset A\\ \text{イデアル}}}N(I)^{-s}\qquad(1)$$

$$\zeta_A(s)=\prod_{\substack{M\subset A\\ \text{極大イデアル}}}(1-N(M)^{-s})^{-1}\qquad(2)$$

ここで，I は A のイデアルで $N(I)=|A/I|<\infty$ となるものを動き，M は A の極大イデアルを動く．$N(M)=|A/M|$ は剰余体 A/M の位数を表す．(1) 式の定義は，少なくとも A が有限環や代数体の整数環のような 0 次元や 1 次元の環の場合に有効であり，良いゼータになる．(2) 式の定義は，高次元の環に対して使われる．

有理整数環 $\mathbb{Z}$ において，$n\mathbb{Z}$(n の倍数全体）はイデアルであり，(1) 式の定義に当てはめるとリーマンゼータになる．また，ガウス整数環 $\mathbb{Z}[i]$ においても，有理整数環 $\mathbb{Z}$ の場合と同じく $\sigma\mathbb{Z}[i]$ ($\sigma=a+bi$ の倍数全体) がイデアルになり，ゼータは

$$\zeta_{\mathbb{Z}[i]}(s)=\frac{1}{4}\sum_{\substack{a,b=-\infty\\(a,b)\neq(0,0)}}^{\infty}(a^2+b^2)^{-s}=\zeta(s)L(s)$$

ただし,

$$L(s)=\prod_{p:\text{奇素数}}(1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{-s})^{-1}$$

となることが知られている．これをデデキントゼータという．

4 合同ゼータ

(2) 式の環のゼータを拡張すると,

$$\zeta_A(s)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\mathrm{Hom}(A,\mathbb{F}_{p^m})|}{m}(p^{-s})^m\right)$$

という合同ゼータになる．ここで $\mathbb{F}_{p^m}$ は p^m 元体であり，p 元体を m 次拡大したものである。$\mathrm{Hom}(A,\mathbb{F}_{p^m})$ とは A から $\mathbb{F}_{p^m}$ への $\mathbb{F}_p$-代数準同型全体である．

$A=\mathbb{F}_p$ のときには

$$\zeta_{\mathbb{F}_p}(s)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(p^{-s})^m\right)=(1-p^{-s})^{-1}$$

となって，リーマンゼータのオイラー積の p 因子がでてくる ([2],[3])．

そこでガウス素数 ρ の素イデアル (ρ) を法とする“剰余体”$\mathbb{Z}[i]/(\rho)$ を A に当てはめると次の定理が得られた．

定理 1. 命題1より，２種類のガウス素数について，
(1) $\rho = c+di$（ただし, $p \equiv 1(\mathrm{mod}4)$ で $p = (c+di)(c-di)$ と分解できる）のとき，$A = \mathbb{Z}[i]/(\rho)$ でのゼータは

$$\zeta_{\mathbb{Z}[i]/(\rho)}(s) = (1 - p^{-s})^{-1}$$

(2) $p \equiv 3(\mathrm{mod}4)$ のとき，$A = \mathbb{Z}[i]/(p)$ でのゼータは

$$\zeta_{\mathbb{Z}[i]/(p)}(s) = (1 - 2p^{-s})^{-1}$$

証明. (1) ガウス素数 ρ が $p \equiv 1(\mathrm{mod}4)$ の因数のとき，ρ を法とする剰余体 $\mathbb{Z}[i]/(\rho)$ の元の数は,

$$|\mathbb{Z}[i]/(\rho)| = \rho\overline{\rho} = p$$

であり，これは p 元体 $\mathbb{F}_p$ の元の数と等しいので，体として同型であるといえる。よって，$\mathbb{Z}[i]/(\rho) \simeq \mathbb{F}_p$ となり，合同ゼータの定義に当てはめると,

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{Z}[i]/(\rho)}(s) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[i]/(\rho)\mathbb{F}_{p^m})|}{m}(p^{-s})^m\right) \\
&= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_{p^m})|}{m}(p^{-s})^m\right) \\
&= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(p^{-s})^m}{m}\right) \\
&= (1 - p^{-s})^{-1}
\end{aligned}$$

(2) ガウス素数 $p \equiv 3(\mathrm{mod}4)$ のとき，p を法とする剰余体 $\mathbb{Z}[i]/(p)$ の元の数は,

$$|\mathbb{Z}[i]/(p)| = p^2$$

であり，これはこれは p 元体を２次拡大した $\mathbb{F}_{p^2}$ の元の数と等しいので，体として同型であるといえる。よって，$\mathbb{Z}[i]/(p) \simeq \mathbb{F}_{p^2}$ となり, 合同ゼータの定義に当てはめると,

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{Z}[i]/(\rho)}(s) &= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[i]/(p)\mathbb{F}_{p^m})|}{m}(p^{-s})^m\right) \\
&= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_{p^2}, \mathbb{F}_{p^m})|}{m}(p^{-s})^m\right) \\
&= \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2p^{-s})^m}{m}\right) \\
&= (1 - 2p^{-s})^{-1}
\end{aligned}$$

□

(1) は，リーマンゼータのオイラー積の p 因子になっていることがわかる．また (2) を，素数全体で掛け合わせれば新たなゼータが得られる．

5　スーパーガウス整数環のゼータ

谷口・森下によって以下のように新しい環を定義した．

$$\mathbb{Z}[\theta] = \{a + b\theta \mid \theta^2 = 0, a, b \in \mathbb{Z}\}$$

これをスーパーガウス整数環と呼ぶ．ここで，θ は１次元グラスマン代数の生成元で, 変数と考える場合と i と同様に定数のように扱う場合がある．θ を１次元グラスマン代数の生成元と考える場合, $\mathbb{Z}[\theta]$ は多項式環 $\mathbb{Z}[T]$ の剰余環 $\mathbb{Z}[T]/(T^2)$ とは異なる対象であることを注意しておく．また，$\mathbb{Z}[\theta]$ はベキ零元を含む環としても興味があると考えられる．

$\mathbb{Z}[\theta]$ のイデアルは $(\varepsilon) = \varepsilon\mathbb{Z}[\theta](\varepsilon = a + b\theta\ ,\ a, b \in \mathbb{Z})$ である．これを環のゼータの定義 (1) にあてはめ, 以下の定理を得た．

定理 2.

$$\mathbb{Z}[\theta] = \{a + b\theta \mid \theta^2 = 0\ ,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

の環において，イデアル (ε) のノルムは $a^2, |a|, |a| + |b|$ の３通り考えられ, それぞれのゼータは以下である．

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{Z}[\theta]}(s) &= \zeta(2s) \\
\zeta_{\mathbb{Z}[\theta]}(s) &= \zeta(s) \\
\zeta_{\mathbb{Z}[\theta]}(s) &= \zeta(s) + \zeta(s-1)
\end{aligned}$$

証明. (1)　$N((\varepsilon)) = a^2$ のとき
環のゼータの定義 (1) より,

$$\zeta_{\mathbb{Z}[\theta]}(s) = \sum^{\infty} N((\varepsilon))^{-s} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{c=-\infty \\ c\neq 0}}^{\infty} c^{-2s} = \zeta(2s)$$

(2)　$N((\varepsilon)) = |a|$ とき
同様にして,

$$\zeta_{\mathbb{Z}[\theta]}(s) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{c=-\infty \\ c\neq 0}}^{\infty} |c|^{-s} = \zeta(s)$$

(3)　$N((\varepsilon)) = |a| + |b|$ のとき
同様にして,

$$\zeta_{\mathbb{Z}[\theta]}(s) = \frac{1}{4}\sum_{\substack{c,d=-\infty \\ (c,d)\neq(0,0)}} (|c| + |d|)^{-s} = \zeta(s) + \zeta(s-1)$$

□

いずれもリーマンゼータの形で示せるため，自然なゼータだといえる．

6 $\mathbb{F}_1$-代数と一元体 $\mathbb{F}_1$

$\mathbb{F}_1$-代数とは，集合に一つの演算が定義されていて，3 つの条件 (1) 結合法則，(2) 単位元が存在，(3) 零元が存在，を満たすものである．また，(1),(2) を満たすものをモノイドという．モノイド X に対して集合を

$$\mathbb{F}_1[X] = \begin{cases} X & (X \text{ が零元を含むとき}) \\ X \cup \{0\} & (X \text{ が零元を含まないとき}) \end{cases}$$

とおくことができる．モノイド X から作られる $\mathbb{F}_1$-代数を $\mathbb{F}_1[X]$ と表記する．

一元体 $\mathbb{F}_1$ とは，単位元のみからなる群 $G = \{1\}$ に対し零元を添加して作ったモノイド G' のことである．すなわち，集合としては

$$\mathbb{F}_1 = \{1\}' = \{1\ \} \cup \{0\}$$

であり，群 G から作られる一元体 $\mathbb{F}_1$ を $\mathbb{F}_1[G]$ と表記する．

一元体 $\mathbb{F}_1$ は二元体 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ と外見上似ているように見えるが，$\mathbb{F}_2$ には和が定義されているのに対して，$\mathbb{F}_1$ では定義されていないという決定的な違いがある．この「和を忘れる」という行為が絶対数学において大きく影響してくる ([3])．一元体 $\mathbb{F}_1$ は体ではないことに注意する．

また，自然数 N に対して

$$\mathbb{F}_{1^m} = \mu_N \cup \{0\} = \mathbb{F}_1[\mu_N]$$

とおく．ここで μ は 1 の N 乗根全体の群である．たとえば,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{F}_{1^1} = \{1, 0\} = \mathbb{F}, \\
&\mathbb{F}_{1^2} = \{1, -1, 0\}, \\
&\mathbb{F}_{1^3} = \{1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, 0\}, \\
&\mathbb{F}_{1^4} = \{1, i, -1, -i, 0\}
\end{aligned}$$

である ([2]).

7 絶対井草ゼータ

井草ゼータは井草準一が創始したゼータであり, ゼータに日本人名がついている珍しい例である．
$\mathbb{Z}$-代数 A の井草ゼータは,

$$\zeta_A^{Igusa}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})|}{m^s}$$

と定義される．

このとき, オイラー積

$$\zeta_{A/\mathbb{Z}}^{Igusa}(s) = \prod_{p:\text{prime}} \zeta_{A/\mathbb{Z}}^{p}(s),$$

$$\zeta_{A/\mathbb{Z}}^{p}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})| p^{-ks}$$

をもつ．定義は合同ゼータに似ているが，考えている準同型の行き先が，合同ゼータでは有限体 $\mathbb{F}_{p^m}$ であるのに対し，井草ゼータでは有限環 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ である点が大きく異なる．

これを $\mathbb{F}_1$-代数上で考えると，群として

$$\mu_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

であることから，$\mathbb{F}_1$-代数 A の絶対井草ゼータは

$$\zeta_A^{Igusa}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(A, \mathbb{F}_{1^m})|}{m^s} \tag{3}$$

と定義できる ([2],[3]). ここで $\mathbb{F}_{1^m} = \mu_m \cup \{0\}$.

また，素スペクトルを用いて次のようにも書き表すことができる．環 R に対して R の素イデアル全体の集合を $\mathrm{Spec}(R)$ と書き，素スペクトルという．

$$\zeta^{Igusa}(s, X) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{1^m}), X)|}{m^s} \tag{4}$$

ただし，X は $X = \mathrm{Spec}(A)$ である．

命題 2. ([4],[5])

$X = \mathbf{A}^1(\mathbb{F}_1)$ のとき,

$$\zeta^{Igusa}(s, \mathbf{A}^1(\mathbb{F}_1)) = \zeta(s) + \zeta(s-1)$$

ただし，$\mathbf{A}^1(\mathbb{F}_1)$ は $\mathbb{F}_1$ 上 1 次元アファイン空間である．

証明 1

Spec A=$\mathbf{A}^1(\mathbb{F}_1)$ を満たす $\mathbb{F}_1$-代数 A は，一元体 $\mathbb{F}_1$ であると考えられる．よって，絶対井草ゼータの定義 (3) 式より,

$$\begin{aligned}
\zeta_A^{Igusa}(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_1,\ \mathbb{F}_{1^m})|}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+1}{m^s} \\
&= \zeta(s) + \zeta(s-1)
\end{aligned}$$

となり，命題を得る． □

証明 2

ダイトマーによって次の公式が成り立つ．

$$X(\mathbb{F}_A) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_A), X)$$

A はモノイド, $\mathbb{F}_A$ は A から作られる $\mathbb{F}_1$-代数．これより，$X = \mathbf{A}^1(\mathbb{F}_1)$ のとき，$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{1^m}), \mathbf{A}^1(\mathbb{F}_1)) =$

$\mathbf{A}^1(\mathbb{F}_{1^m})$ が成り立つ．よって絶対井草ゼータ関数の定義 (4) 式を用いると，

$$\zeta_A^{Igusa}(s, \mathbf{A}^1(\mathbb{F}_1)) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{A}^1(\mathbb{F}_{1^m})|}{m^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+1}{m^s} = \zeta(s) + \zeta(s-1)$$

となり，命題を得る．□

これより，スーパーガウス整数環のゼータのひとつと，$\mathbb{F}_1$-代数上の絶対井草ゼータが一致していることがわかる．

系 1. 定理 2 のノルムが $N((\varepsilon)) = |a| + |b|$ のときのスーパーガウスゼータは，命題 2 の絶対井草ゼータと一致している．

8　今後の課題

以下のような問題が考えられる．

1. 定理 1 の (2) に対するリーマン予想の類似性を調べる．
2. 定理 1 を $\mathbb{F}_1$-合同ゼータで考える．
3. スーパーガウス整数環 $\mathbb{Z}[\theta]$ の素元を決定する．
4. $\mathbb{Z}[\theta]$ のある種の剰余環を構成し，そのゼータを定義する．
5. $\mathbb{Z}[\theta]$ の井草ゼータと絶対井草ゼータを構成する．

参考文献

[1] 加藤明史, ガウス 整数論への道, 現代数学社, 2009.

[2] 黒川信重, リーマン予想の 150 年, 岩波書店, 2009.

[3] 黒川信重・小山信也, 絶対数学, 日本評論社 ,2010.

[4] A. Deitmar, Schemes over F_1, arXiv:math /0404185,2006.

[5] A. Deitmar, S. Koyama, N. Kurokawa, Absolute zeta functions, Documenta Math.141-142,2008.

Zeta Functions on Gauss Integer Ring and Super Gauss Integer Ring

Naoko MORISHITA and Tadashi TANIGUCHI

In this paper we study the Zeta functions on the Gauss integer ring and super Gauss integer ring. We define the super Gauss integer ring $\mathbb{Z}[\theta] = \{a + b\theta \mid \theta^2 = 0, a, b \in \mathbb{Z}\}$. There are three different types of norms according to a^2, $|a|$ and $|a| + |b|$. Then we have the three types of Zeta functions with respect to three types of norms, respectively. We see that the one of the three types coincides with absolute Igusa Zeta on the one dimensional affine space $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_1)$ on $\mathbb{F}_1$-algebra .