高校数学の授業における創発的思考の分析

内 田 靖 子・江 森 英 世

群馬大学教育実践研究　別刷
第32号　1～10頁　2015

群馬大学教育学部　附属学校教育臨床総合センター

群馬大学教育実践研究　第32号　1～10頁　2015

高校数学の授業における創発的思考の分析

内　田　靖　子[1)]・江　森　英　世[2)]

1）群馬県立富岡東高等学校
2）群馬大学教育学部数学教育講座

An Analysis of Emergent Thinking in a High School Mathematics Class

Yasuko UCHIDA[1)], Hideyo EMORI[2)]

1）Tomioka Higashi High School, Gunma
2）Department of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University

キーワード：創発的思考，反省的思考と反照的思考，選択的知覚
Keywords : Emergent Thinking, Reflective Thinking, Selective Perception

（2014年10月31日受理）

１．はじめに

生徒一人ひとりが学びに参加し理解を深めていく過程において，生徒は実践の中で活用しながら自分の学習をつくっていく。コミュニケーションを通して，変化していくプロセスを内省し，生徒が自分自身で確認し意味や価値を発見する。生徒たちは，新しい関係への可能性を探求しようとともに学ぶ中で，知識を創造し，新しい価値を創り出すことができる。教育の目的は，生徒が集団の中で知識を協同構成しながら，主体性をもって自己生成していくことであると考える。

授業においてともに学ぶことで，今までにもち得なかった新しい考えが生み出されることがある。それは，推論をしながら新しい考えを創り出していく創発的思考である。「創発とは，構成要素以上のものをもたらし，かつ，もとの要素に還元できないものを生み出すことである（江森，2010，p.71）」という定義に基づいて考察する。

創発的思考の分析には，“Reflective Thinking”を反省的思考と反照的思考の２つの層に分けて捉える。反省的思考は，思考を表したものを内省し試行錯誤を経て，個人でより良い表現にかきかえる段階である。一方，反照的思考は，反省的思考によりかきかえられた表現を観照し，他者とのコミュニケーションなどから刺激を受けることで，新たなアイデアや見方が創発される段階である。他者とのコミュニケーションにより，反照的思考をもたらす表現や創発的な思考が，ある発言をきっかけにひらめくことがある。これは，反省的思考では辿り着くことのできなかった新しい解釈の想起をもたらしている。一面的であった自分の見方を，もう一度みつめ直すことによって行われる知覚の更新である。その反照的思考のプロセスの中で，新たな解釈としての選択的知覚が与えられる。選択的知覚とは，ある１つの解釈により，対象を何らかの固まりや構造物とみる見方である。それは，その後の認知過程によって再解釈され，別の構造として認識され，新たな思考を生み出すことへとつながる。それは，問いを位置づけし直し，問いに含まれる課題を理解し，協同で新たな知識を構成していくために必要なことであると考える（cf. 江森，2010，pp.71-72）。

本稿の目的は，生徒たちがコミュニケーションをもちながら学ぶ中で，創発的思考における新たな選択的

知覚の獲得を促進する要因について明らかにすることである。したがって，ともに学ぶ授業において，問いを変え理解していく契機を探り，いかに新たな知識を生み出すよう実践していくことができるのかという課題を考察していくことにする。

2．事例

本課題を検討するため，高校1年生の事例を分析する。習熟度別の20人で行う授業は，机をコの字に配列している。協同的で探求型の授業づくりに心がけ，コミュニケーションを通して理解を深めていくことができるよう進めている。分析の対象とする授業で扱う問題は，数学Ⅰの2次関数の単元の2次不等式の応用で，「$\boxed{1}$ 2次関数 $y=x^2+mx+1$ のグラフが x 軸と共有点をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。$\boxed{2}$ 2次不等式 $-x^2+mx+m<0$ の解がすべての実数であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。$\boxed{3}$ 2次関数 $y=ax^2+4x+a-3$ において，y の値が常に負であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ」である（cf. 大島，2011，pp.110-111）。これらの問題をグループで考える際，素朴な疑問からコミュニケーションが連鎖することにより，それを問いに発展させ，生徒たち自身がその問いを明らかにしていく創造的思考過程を採り上げることにする。

数学教育において重点を置くことは，概念や法則の体系的な理解を深めるとともに，数学的論拠に基づいて判断し表現する力を養うことである。生徒が見通しをもって問題に取り組み，考え方を身につけていくことが大事である。本授業では，生徒が題意の条件からグラフをイメージし，判別式の意味を感得しながら2次不等式を解けるようになることがねらいである。また，題意の必要十分条件を求めるには，2つの条件を満たさなければならないことから，生徒たち自身で2次不等式の連立という考え方を創り出していけるように課題構成をしている。

以下では，本事例を2つの場面に分けて分析する。事例1では，他者とのコミュニケーションを通して新たな選択的知覚を獲得することにより，生徒たちはグラフ解釈の新たな意味づけをしていく。事例2において，生徒たちは見通しをもってともに考えることで，2次不等式の連立という新しい考えへと発展させていく。これらの事例は，反省的思考から始まり，他者とのコミュニケーションを通じて選択的知覚を得ることで，反照的思考へと向かう創発的思考過程の場面になっている。

2．1　事例1の分析

表1：事例1の発話記録

23：06	4人グループでの学習
01 生徒A	：これ何？
02 生徒B	：さっきのグラフ見ると……。
03 生徒C	：ん？
04 生徒A	：なんかわかんなくなってきちゃった。
05 生徒B	：（黒板を指しながら）あのグラフ。これは x で。
06 生徒A	：x？これは，x か。
07 生徒C	：x？
08 生徒A	：これは，x なんだよ。で，ふつうに m のときは。m のときは，下でいいんだっけ？
09 生徒C	：あー。交わるやつか。
10 生徒A	：え？あ，そっか。あー，そうだ。m のときは。（グラフを書く。）
11 生徒C	：（Bのグラフをのぞき込み）え，そういう意味？
12 生徒B	：これ関係ないってこと？
13 生徒A	：それは，この式のこと言ってんじゃないの？
14 生徒B	：だから，これいらないってことでしょ。グラフ書いたから，おかしくなっちゃった。あー，もうわかった。
24：37	

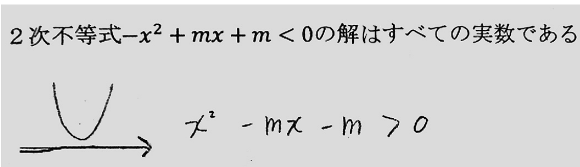

図1：生徒Aのイメージ

事例1は，コの字型の形態で共有した問題「$\boxed{1}$ 2次関数 $y=x^2+mx+1$ のグラフが x 軸と共有点をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ」の問題の考え方をもとに，「$\boxed{2}$ 2次不等式 $-x^2+mx+m<0$ の解がすべての実数であるとき，定数 m の値の範囲を求めよ」を4人グループで考えている場面である（表1）。

生徒Aは，題意から図1のような下に凸で x 軸と共有点をもたないグラフをイメージした。それは，与式 $-x^2+mx+m<0$ に -1 をかけて式変形したもので，$x^2-mx-m>0$ の解がすべての実数になる場合を視

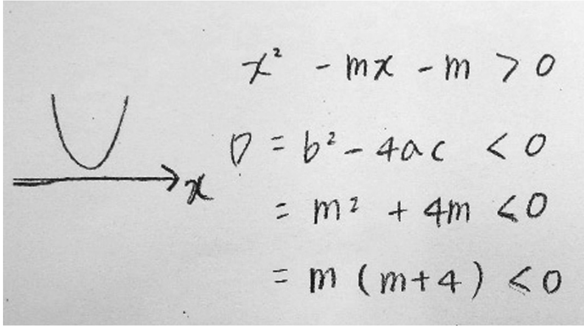

図２：生徒Ａの解法①

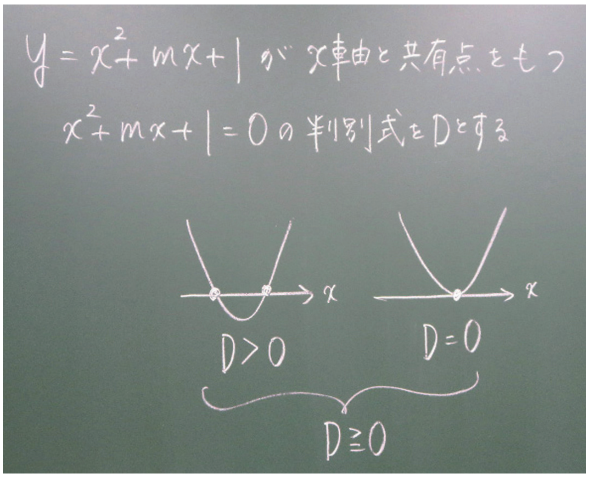

図３：１のイメージ（黒板）

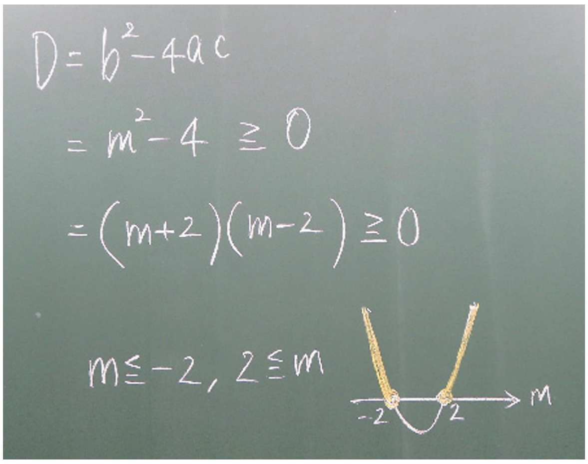

図４：１の解法（黒板）

覚的に確認したものである。生徒Ａは，このグラフから導かれた判別式$D=\mathrm{b}^2-4ac<0$を考えることになる（図２）。$D=m^2+4m<0$をm（$m+4$）<0まで因数分解した生徒Ａは，グラフを用いてこの解を求めようとする。そこで，この式からグラフと軸との交点が２つ出てきてしまい，矛盾をかかえることになる。それは，最初にイメージした交点をもたないグラフとの間の不協和である。そこから，生徒Ａは，「これ何？（発言01)」と疑問をつぶやく。この発言は，題意から見通しをもってグラフを考えたことにより生じた疑問である。生徒Ａに投げかけられ，生徒Ｂは黒板に書かれている$\boxed{1}$で考えたグラフ（図３，図４）を指しながら，「さっきのグラフ見ると……（発言02)」と答える。生徒Ｂは生徒Ａの問いかけに答えられず，まずは前の問題を振り返ることから始めた。このとき，生徒Ｂは，図５のように生徒Ａと同様のグラフをイメージしている段階である。一方，生徒Ｃは，これまでの会話を聞いてはいるが理解できず，「ん？（発言03)」と反応のみしている。このとき，生徒Ｃは，与式をそのまま見て，$-x^2+mx+m<0$の解がすべての実数になるような上に凸で軸と交点をもたないグラフをイメージしている（図６）。さらに，生徒Ａは，最初にイメージした交点のないグラフと判別式Dを解く際のグラフとの関連がわからず，「なんかわかんなくなってきちゃった（発言04)」と続ける。

これらの生徒の様子からも，同様に考えた$\boxed{1}$の$y=x^2+mx+1$のグラフ（図３）と$D=m^2-4=$（$m+2$）（$m-2$）≥ 0を解く際のグラフ（図４）が混乱していて，理解が不十分であったということが読み取れる。$\boxed{2}$において，生徒Ａと生徒Ｂは，この段階では前の解法を道具的に活用して解いているだけである。そのため，$x^2-mx-m>0$の解がすべての実数になるグラフと$D=m^2+4m<0$を考えるグラフとのつながりがもてずにいることがわかる。

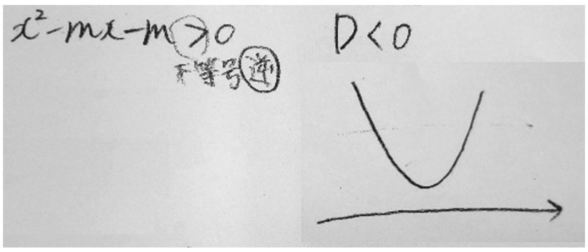

図５：生徒Ｂのイメージ

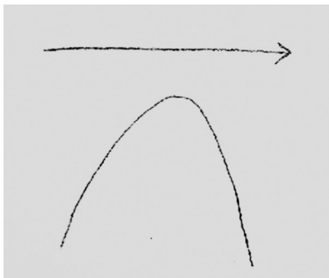

図６：生徒Ｃのイメージ

その後，生徒Bが板書してある$\boxed{1}$のグラフを確認しようと再度指し，「あのグラフ。これはxで（発言05)」と自分のプリントのグラフと交互に見ながら内省している。黒板には，グラフと横軸の関係として，図3にはx軸，図4にはm軸が記されている。このつぶやきを聞いた生徒Aは，「x？これは，xか（発言06)」と2つの別の文字が存在していることにこの時点で気がつき，ここからまた考え始めることになる。生徒Aは，声に出しながら内省することで，振り返り吟味している。この振り返りから，1つ目のグラフ（図3）は，題意をイメージするために書いたx軸との関係であることに気がつき，やはり間違いなく，「これは，xなんだよ（発言08)」と確信をもって再度言い切っている。生徒Cは理解し始めた生徒Aとは異なり，同じ会話を聞いてはいるが，「x？（発言07)」と繰り返しているままである。

さらに，生徒Aは，「で，ふつうにmのときは。mのときは，下でいいんだっけ？（発言08)」と見方を確認しながら発言している。この発言は，図3と図4の2つのグラフの違いをわからずにいた生徒Aが，その意味を確実にし，認識したうえで本問題の式を解こうと進めているものである。「mのときは（発言08)」というmの文字を明らかにした発言からいえることは，同じくくりで見ていた2つのグラフに対し，新たな見方を獲得し，区別して改めて捉え直すことができたということである。

この生徒Aの問いかけに対して，生徒Cは，「あー。交わるやつか（発言09)」と下に凸で軸と2つの交点をもつグラフをイメージできてはいるが，生徒Aの思考の流れとは違うことが，その後の発言からもわかる。生徒Cは，図5の生徒Bのイメージしたグラフをのぞき込みながら，「え，そういう意味？（発言11)」と答える。生徒Cは，$-x^2+mx+m<0$の解がすべての実数であるという与えられた問題通りに，上に凸の2次関数のまま考えていたため，疑問をもったのである（図6）。生徒Cのように，この式のまま考えても，全体に-1をかけて$x^2-mx-m>0$として下に凸の2次関数を考えたとしても，解がすべての実数となる必要十分条件は$D<0$である（図7）。生徒Cと生徒A，Bとの式の違いについても，この後触れていくことになる。

生徒Aは，生徒Cの「あー。交わるやつか（発言09)」という発言から，自分の考えは間違っていないと再認識しながら，「え？あ，そっか。あー，そうだ。mのときは（発言10)」と2次不等式を考えるためのグラフを書いている（図8）。生徒Bは，「これ関係ないってこと？（発言12)」と図9のグラフを示しながら尋ねる。グラフをかくことで自己を振り返り，そこから疑問が生まれているといえる。この発言は，2次関数のグラフを利用して2次不等式を解いている生徒Bが，前述の生徒Aと同じように，この段階で2つのグラフの違いについて疑問をもったということである。前述した「これはxで（発言05)」という生徒Bの発言は，意味を理解したうえでの発言ではなく，板書の図や式を見て直観的につぶやいただけであったということがこの発言からも読み取れる。生徒たちの様子からも，これらの2つのグラフの解釈ができないと考えが先に進まないことがわかる。そこで，生徒Aは，「それは，この式のこと言ってんじゃないの？（発言13)」と答える。これは，$x^2-mx-m>0$の解がすべての実数であるときには，生徒Bの示した図9の上のグラフとなること

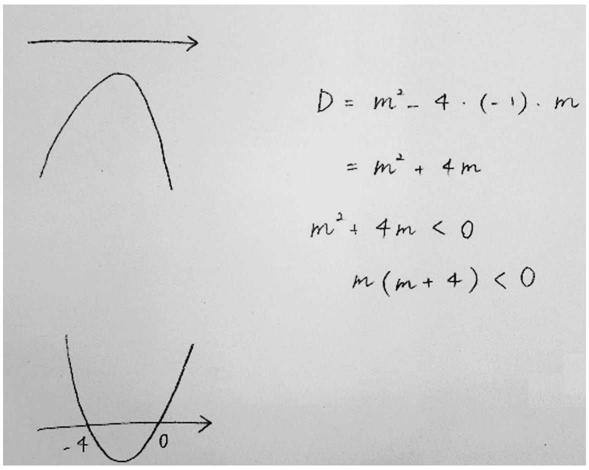

図7：生徒Cの解法

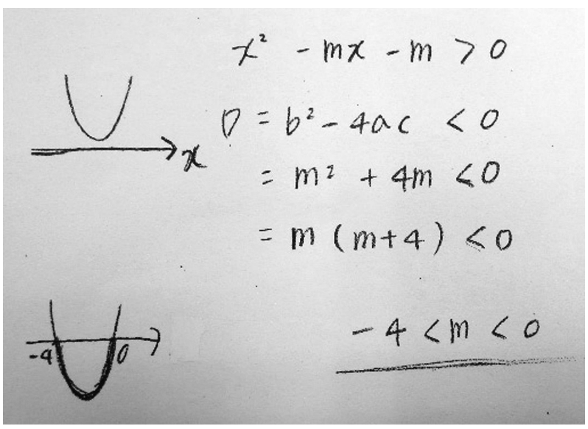

図8：生徒Aの解法②

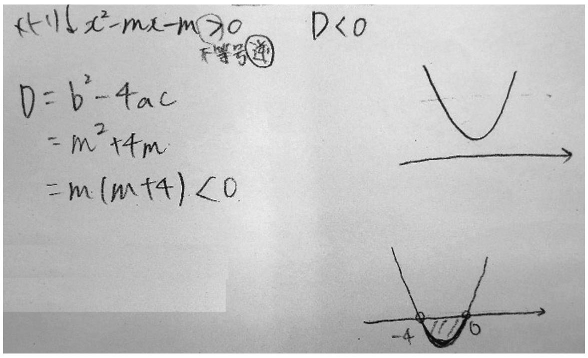

図９：生徒Ｂの解法

を的確に伝えている。このことから，生徒Ｂは，「だから，これいらないってことでしょ。グラフかいたから，おかしくなっちゃった。あー，もうわかった（発言14）」と生徒Ａの発言の意味を解釈し，$D=m^2+4m=m(m+4)<0$を解くにはイメージするだけで十分であり，図９の下のグラフはかかずに解けばよいと結論づけた。

２．２　事例１の考察

分析で述べたように，１つの問題で２つの別のグラフが出てくると，それらに関連をもたせることが個人では難しい。２つのグラフのもつそれぞれの意味を自分のものにしたときに，初めてその論理を受け入れ納得できるものである。そのためには，生徒Ａ，生徒Ｂ，生徒Ｃによる01から14のメッセージ解釈の相互作用が必要であったといえる。それらのコミュニケーション連鎖は，「これ何？（発言01）」という生徒Ａの問題を解いている中での反省的思考におけるつぶやきから始まる。生徒Ｂは，その問いかけがよくわからず，とりあえず前の問題を確認しておこうと黒板を指さす。生徒Ｂの「あのグラフ。これはxで（発言05）」の発言から生徒Ａは再度考え直し，その反照的思考の中で新たな見方を獲得することができた。生徒Ａの得た新たな選択的知覚とは，図３はx軸，図４はm軸という２つのグラフにおける横軸の違いである。

これらのコミュニケーションの展開から言えることは，同じ知識や情報をもっていても，個人では限界があり思考が止まってしまい，現状を打破するには外からの何らかの刺激が必要であるということである。対象の構造については，ある見方をしているだけでは捉えることはできない場合がある。生徒たちは自身の考えを試し内省してはいるが，個人の枠の中だけで考えていて，別の視点に移ることができず限界を感じている。この場合，１つのことにとらわれない視点をもつには，他者からの刺激が必要である。生徒Ｂのように，たとえそれを理解していなくても，何かとつなげようと振り返りを言葉にするだけで，熟考している中そのメッセージを受け取った生徒Ａには影響があるといえる。自己の解釈に基づいてそれを受けとめ，自分で確かめながら意味づけをすることができている。生徒たちは，自分の知識を繰り返し活用することで，意味やつながりの変化をもたらし，理解を深化させることができるといえる。

x軸とm軸というグラフの横軸の違いを考え始めた生徒Ａが，「で，ふつうにmのときは。mのときは，下でいいんだっけ？（発言08）」と見方を確認している場面がある。このとき生徒Ａは，別の見方を探りつつある段階で，まだ自分の新たな考えに確信をもてていないといえる。「あー。交わるやつか（発言09）」という生徒Ｃからの応答により，確信のなかった自分の考えに自信をもって意欲的に取り組み続けることができていった。それは，生徒Ａの問いかけの反応として返されたメッセージから，確かに自分の考えてきた論理は正しいと判断し，そこから確信をもつことになったと考えられる。なぜかと根拠を追求し，コミュニケーションをしながら意味付けをしていく探求活動の中で，生徒たちはある構造を発見していくことができる。仕組みを探そうとともに考えていた仲間の反省的思考のメッセージを聞いた生徒が，対象を改めて見直し考えることで，自信をもって新しい選択的知覚を獲得し，今までに持ち得なかったアイデアを創発することができたといえる。

また，生徒Ａの２つのグラフの違いに対する気づきと生徒Ｂのグラフへの疑問は，同時に起こったわけではないが，コミュニケーション連鎖がつながり，それぞれが各々の段階で互いに支え合いながら知識を再構成している。これらの発見は他者から与えられたものではなく，コミュニケーションを通して生徒自身が捉えていった見方である。そこから生徒は喜びを感じ，グラフと式がどのように関連しているのかについて，さらに目を向けるようになっていく。このような生徒たちの思考のプロセスは，コミュニケーションに参加していた生徒Ｃや聞きながら考えていた他の生徒にも影響を与え，この後さらに展開していくことにつながり，思考を発展させていく。

このように，推論をしながら新しい考えを創り出していく一連の創発的思考において，新たな選択的知覚の獲得を促進する要因は，内省において今までの知識とつながりをもたせて考えようとする意識と探求活動にある。この意識と活動への移行は，素朴な疑問に応じようとする意思からくるものであり，それを考え求めている仲間とともに学び合う環境とコミュニケーション連鎖から生じるものである。ともに学ぶ仲間がいることは，新たな選択的知覚を獲得し，深い理解へと進めていく必要条件といえる。

２．３　事例２の分析

事例２は，$\boxed{2}$を解いた後に，グループで「$\boxed{3}$ ２次関数 $y=ax^2+4x+a-3$ において，y の値が常に負であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ」を考えている場面である（表２）。

題意の条件から，上に凸で x 軸と交点をもたないグラフ（図10）をイメージしながら問題を解いている際，生徒Ｄは，図11のように $a<0$ を満たさない解が出てきてしまうことに気がつく。「これ，こうなるから，０より小さくならなきゃだよね？（発言15）」と言葉にしながら今までの思考の流れを振り返る。題意の条件から，上に凸の２次関数になるには $a<0$ が必要条件であるが，$D<0$ を考えたときには $(a-4)(a+1)>0$ となるので，$a<-1$，$4<a$ の解が存在してしまう。

表２：事例２の発話記録

44：52	３人グループでの学習
15 生徒Ｄ：	これ，こうなるから，０より小さくならなきゃだよね？
16 生徒Ｅ：	でもさ，これ範囲が決まってるじゃん。
17 生徒Ｆ：	a ……。
18 生徒Ｄ：	うーん。
19 生徒Ｅ：	a が０より小さいじゃん。－１が a より小さい，いや大きいのか？こっちか？ん？
20 生徒Ｆ：	難しいな。
21 生徒Ｄ：	数直線かいちゃう？
22 生徒Ｅ：	それが合わさったとこ？
23 生徒Ｄ：	あー，それ，したわ。
24 生徒Ｅ：	なんか，前のときもさ，やったじゃん。いくつか書いて。
25 生徒Ｆ：	これでしょ？（教科書を指す。）
26 生徒Ｅ：	あー，そうそうそう，そういう感じ。
27 生徒Ｆ：	なに，なに？
28 生徒Ｅ：	これ数直線だとすると，こうなるじゃん。
45：29	

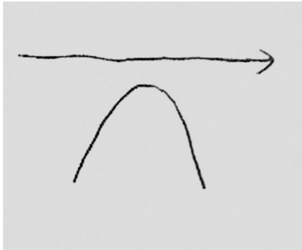

図10：生徒Ｄのイメージ

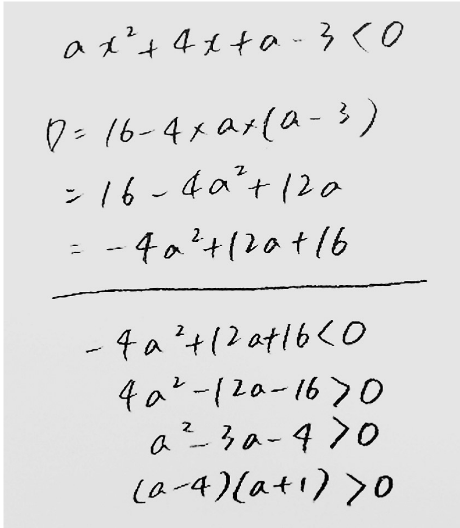

図11：生徒Ｄの解法

そこで，$a<-1$，$4<a$の不適の解は，いかに扱えばよいのかと生徒Ｄは疑問をもち始めているのである。それに対し，生徒Ｄと同様のグラフ（図12）をイメージした生徒Ｅは，「でもさ，これ範囲が決まってるじゃん（発言16）」と $D<0$ から $-4a^2+12a+16<0$ を考える。そして，この式を変形し，まずは $a^2-3a-4=(a-4)(a+1)>0$ が示す部分をグラフに示し答える（図13）。生徒Ｅは，２次関数の y の値が常に負であるという条件から，グラフが軸と交点をもたないための判別式について，$D<0$ を考えている。一方，生徒Ｆは，「a……（発言17）」と生徒Ｄと生徒Ｅの焦点化された話に反応し，グラフのイメージはできているが，解法のアイデアが浮かんでいない（図14）。さらに，生徒Ｄは，他者からのメッセージを受けて，「うーん（発言18）」と考えていくことになる。

そこで，生徒Ｅは，「a が０より小さいじゃん。－１が a より小さい，いや大きいのか？こっちか？ん？（発言19）」と，生徒Ｄの発言した $a<0$ の考えを受けて再考している。それは，図13のグラフを利用して解いた $a<-1$，$4<a$の解と $a<0$ の条件を組み合わせていこ

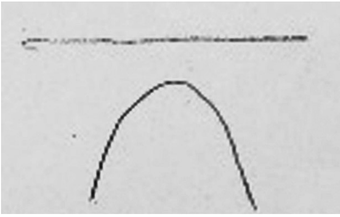

図12：生徒Ｅのイメージ

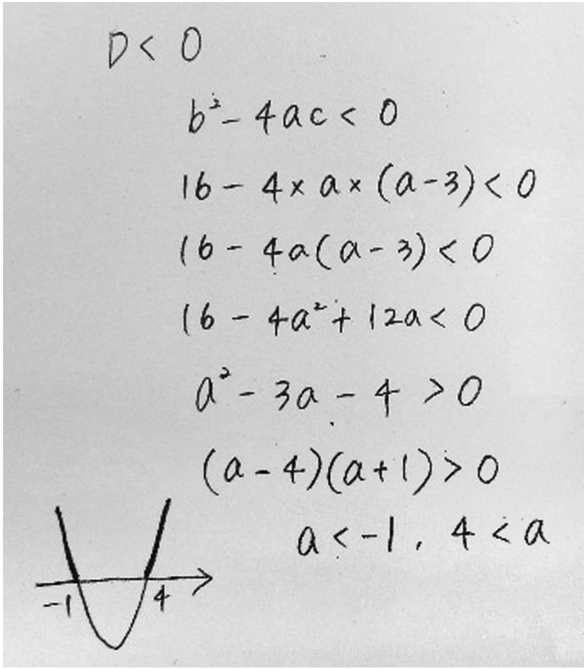

図13：生徒Ｅの解法

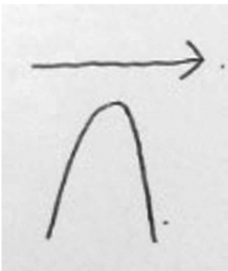

図14：生徒Ｆのイメージ

うと考え直しているのである。生徒Ｆは，これまでのコミュニケーションの展開から，題意を満たすためにはいくつかの条件に注意を払わなければならないことに触れながら，「難しいな（発言20）」とつぶやいている。

そのとき，生徒Ｄが生徒Ｆのこのメッセージを受けて，いかにわかりやすく条件をまとめていけばよいのかを考えたことから，「数直線かいちゃう？（発言21）」と提案する。この生徒Ｄの数直線というアイデアを受けて，生徒Ｅは，この問題を解決するには，「それが合

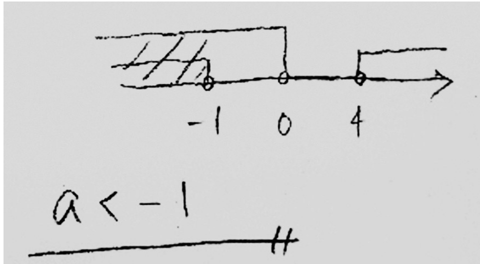

図15：生徒Ｅの解

わさったとこ？（発言22）」と数直線上で２つの共通範囲を求めればよいという新たな考え方にたどりつくことができた。ここから生徒Ｄは，「あー，それ，したわ（発言23）」と半年前に学んだ１次の連立不等式を解く方法を思い出すことになる。生徒Ｄは，複雑な考えを視覚的に整理するために，数直線というアイデアを言葉にしたが，その偶発的直観は生徒Ｅの既存知識と今の問題を考える方法とを結びつけることになった。さらに，それは生徒Ｄ自身の連立不等式の知識の再構成にもつながっているといえる。生徒Ｅは，「なんか，前のときもさ，やったじゃん。いくつか書いて（発言24）」と以前に学んだ連立の方法を思い出し始め，具体的に示していく。そこから難しいと発言していた生徒Ｆも自然にメッセージを送ることになり，「これでしょ？（発言25）」と教科書で不等式の連立の頁を示しながら応じることができている。２次の連立不等式はこれから先に学ぶ内容ではあるが，題意のイメージをもちながら問題に取り組んでいる生徒たちにとっては，自然な思考の流れで進めていくことができた。生徒Ｅは，「あー，そうそうそう，そういう感じ（発言26）」と，反応しながら，$a<-1$，$4<a$ と $a<0$ の数直線を重ねて書き始める（図15）。生徒Ｆは，その図を見ながら，「なに，なに？（発言27）」と矛盾を乗り越え，本問題を考え進めることへとつながっていく。生徒Ｅは，「これ数直線だとすると，こうなるじゃん（発言28）」と言いながら，３人での探求型の学びが深まり，生徒たち自身がそれぞれの段階で，この疑問を解決していくことになる。

２．４　事例２の考察

分析で述べたように，生徒Ｄは，題意を視覚的にイメージしたことから，「これ，こうなるから，０より小さくならなきゃだよね？（発言15）」と現段階の解に疑

問をもち始める。その疑問は，今の解のままでは最初にイメージした条件を完全には満たしていないという気づきからくるものである。生徒たちは問題を解いていく中で，自分たち自身で何かに気がつき，その素朴な疑問や矛盾を問いとして考えていくことになる。それは，未知の解法やアイデアを互いに模索していく探求型のアプローチになっている。

生徒Dの思考の流れは，まず$D<0$を解き，考えを外化したことで，$a<-1$，$4<a$を反省的思考の対象としていく。次に，そこから生まれたある推測を検証している。それは，題意からイメージされた見通しをもって問題を考えることにより生じた推測「上に凸の２次関数になるために，解は$a<0$という条件を満たす必要がある」というものである。その推測は，他者の外化された図等のメッセージを互いに確認し，コミュニケーションをもつことで検証され，確信をもつことになった。生徒たちは，１つのことに確信をもつと，また次の問いをもつことになる。それは，$a<0$を満たすには，$a<-1$，$4<a$という解をいかに考えていけばよいのかという疑問である。$\boxed{1}$や$\boxed{2}$のような既知の問題と同様に考えてもアイデアが浮かばないときには，生徒たちは自然とコミュニケーションを連鎖させ，さらに思考を進めていく。

コミュニケーションが連鎖し，生徒たちは疑問を解消しようと困りを共有する中で，生徒たち自身で数直線というアイデアを生み出すことができた。それは，既有知識を使って考えようと互いの意識が高まった中で生じた発想である。「難しいな（発言20）」という生徒Fのつぶやきから，いかにわかりやすく整理すればよいのかという視点へ移り，式から図への解釈という考えが生まれたといえる。数直線というアイデアから刺激を受けて自分なりに考えることで，式の表現を図式化して捉え，$a<-1$，$4<a$と$a<0$をともに満たす部分を全体的に見直している。これは，「数直線書いちゃう？（発言21）」という生徒Dの考えを理解しようと表現を見直した生徒Eの反照的思考から生まれた見方である。生徒Dの発言は，個人の閉じた考えに終わらず他への刺激ともなり，また生徒D自身もその考えを内省することへとつながる。生徒たちは，数直線を利用した図解の選択的知覚を獲得して認識が始まり，２つの解を捉える新たな解釈の段階が生まれ，２次の連立不等式の方法を発見するに至る。仕組みを探そうとともに考えていた仲間の反省的思考のメッセージを聞いた生徒が，対象を改めて見直し考えることで新たな見方を獲得し，新しいアイデアを創発することができたといえる。その数直線という発想は，以前に学んだ１次の連立不等式の考えと同化させ，２次の連立不等式でも使えると調節した。このことから，連立不等式の原理の真の同化が可能となり，その方法が定式化され，新たな考え方を創発させることができた。生徒たちは，同化と調節を繰り返していくことで知識が豊かになり，理解をより深めていくことができる。単純に結果を求めるだけでなく，プロセスを思考の対象にすることが大切であると考える。

生徒たちは，繰り返し体験を積みながら場面を拡張させ，考え方の意味と方法を一般化させていく。一般化とは，与えられた対象の集合の考察から，それを含むより大きな集合の考察に移ることである（cf. Skemp, 1971/1973, pp.49-50）。生徒たちは，コミュニケーションを通して新たな思考を創り出し，今までの知識とのつながりをもたせ，新たな意味や価値付けをして，一般化させているといえる。多様な側面からアプローチすることで，その問題に含まれている数学的な深い意味を見抜くための思考へとつなげていくことができる。このように，発達の過程に注意を払う内省的活動が，数学のより進んだレベルに達するためにも重要であるといえる。

ともに学ぶ中で，生徒たちは，「でもさ，これ範囲が決まってるじゃん（発言16）」，「難しいな（発言20）」等の批判や共感を互いに与え合い，支え合いながら思考を進めていくことができた。このように，一人ではなく，ともに安心して学び合う環境だからこそ，個々の考えを遠慮なくつぶやき，自然に考える状況が生まれている。そこから生徒たちは矛盾を解消するために，$a<0$と$D<0$という２つの条件を満たす範囲を求めようとコミュニケーションを連鎖させていく。そのプロセスにおけるコミュニケーション連鎖の互いの刺激によって，今までにもち得なかった新しい解釈が導き出されていくことになる。

コミュニケーションには，生徒が推論をしながら思考することを助ける役割がある。１人の生徒のつぶやきから始まったコミュニケーションが，他者とともに振り返ることによって，その生徒の問いからグループ全体の共通の問いとなっていく。１人ひとりの考えが

深まり，具体的な表現から数学的な構造の課題に問いを変化させることができる。この新たな段階に移り，対象の構造を理解することが問題解決へとつながっていくことになる。可視化された表現を反省的に思考し，その中で生まれた問いを新たな視点から考察し，理解していくことが思考を展開していくことになる。生徒たちは，このように展開していく授業でのプロセスにおいて，新たなものを創り出し主体的に考えていくことができる。

他者からの刺激から，生徒たちは２次の連立不等式という考えを創発し，思考を発展させていくことができた。$a<-1$，$4<a$と$a<0$の２つの考えにつながりをもたせるアイデアについて，生徒は蓋然的推論（cf. Polya, 1953/1959）をしながらもっともらしい根拠をあげ考えていくが，それには検討の余地があり，生徒たちはさらに検討していくことになる。コミュニケーションにおける問いかけや意見交換は，生徒がより深く考えるために必要なものであるといえる。他者とのコミュニケーションを通して自分と違う考えに直面し，そのアイデアについても考える機会を得ることができ，思考の幅を広げることができる。自分とは異なる考えを知ることで驚きや発見があり，１つの推測に対して検証しようと生徒たちのコミュニケーションが連鎖することで，生徒たちは次々と新たな問いや根拠を考え理解し，新しい知識を協同構成していくことになる。生徒たちは，コミュニケーションを通した授業において，考える経験から学んでいくことができる。

知識を伝達する授業では，２次の連立不等式の単元において，教師が知識を伝え，生徒たちはそのアイデアを受け入れ思考していく展開になりがちである。それに対して，事例２における思考は，生徒たちが必要に応じて考えを創り出していく中で，自然に学び深めていく組み立てとなっているといえる。このように，教師は，生徒が考えたくなる方向，考えるのが自然な方向へと導いていくことができるよう課題設定をし，授業をつくっていく必要があると考える。

これらのコミュニケーションを通した推論からの創発的思考において，新たな選択的知覚の獲得を促進する要因は，生徒たちが見通しをもって問題に取り組み，必要な条件を満たすためにはいかにしたらよいかと探求し，それを乗り越えていく中にある。

第一に題意からイメージされた見通しがあり，第二にその必要条件に矛盾する条件を解決していく協同でのアプローチがあり，第三にコミュニケーションが連鎖することで刺激を受け，その不協和を解消するための新たな意味づけが生じ，その場のいずれもが持ち得なかった新しい思考が創発されることになる。その際，コミュニケーションを通して，生徒たちが考え抜いた段階での他者からの一言が，今までのつながりを変える契機になる。それは，自分のもつ考えが一時分断され，その思考から離れることによって，他者からのメッセージを改めて自分なりに解釈しようと変化する環境と意識がもたらすものといえる。そこから生徒たちは再考し始め，新たなアイデアや意味を発見していくことになる。

個人の中に思考のプロセスが内化されていく過程において，他者との関係の中で自覚できる発見の喜びは自信へとつながり，さらなる思考へと向かう。ともに学ぶ活動を通して，生徒が自分で活動する自発性，自分の内面が成長する内発性，自分で決断する主体性を育てることになると考える。生徒たちは，互いにわからないこと受けとめ，乗り越えていく活動の中で新たな知識を創り出し，成長していくことができるといえる。

３．考察

前述した事例で，生徒たちがともに学ぶ授業において，問いを変え理解していく多様な契機を探り，いかに新たな知識を生み出すよう実践していくことができるのかを検討してきた。

事例１において，生徒それぞれが具体的な表現からそのグラフの意味を探しているとき，１人の生徒がある気づきを言葉にすることで，何気ないつぶやきであったとしても聞いた生徒たちは刺激を受けることになる。何か違いを見出せはしないかと取り組んでいた生徒たちは，問題に関連すると思われるあらゆることを受け入れようとするからである。その発言から刺激を受けた生徒の選択的知覚に基づいて解釈することで，$\boxed{1}$の２つのグラフの解釈が生まれる。この考えは他者に伝えられることで，$\boxed{2}$の問題にもこの見方が適応されることになり，２つのグラフの意味付けが改められる。あるメッセージから影響を受け，推論をしながら表現を振り返ってみることで新しい解釈が創発

され，生徒は視点を転換させ思考することができるようになったといえる。

また，事例２では，題意からイメージしたグラフの条件である$D<0$の解が，上に凸になるための$a<0$という条件を満たしていないという矛盾が生じる。イメージされた見通しからその問題を検証しようと次の問いをもつことになる。そこから生徒たちは，個々の生徒による内省から気づきや振り返りを言葉にすることで，数直線を使って不等式を連立する考えを創発し，思考を発展させていくことができた。コミュニケーションにおける問いかけや意見のやりとりは，生徒がより深く考え進めるために必要なものである。また，他者とのコミュニケーションの中で様々な考えを伝え合うことで，自分の考えだけにとらわれずに進んでいくこともできる。個人では１つの思考にとらわれがちであるが，他者がもつ知識には複雑な層があり，個人の思考にとらわれているのでは見えてこない側面を捉える視点が得られる。問題には多様な側面があり，見る視点によってその多様な側面が違って見える。生徒たちは，新たに加えられたアイデアを内省し，自分で捉え直す複数の見方をもち，試行錯誤をしながらいろいろな条件から判断して選択し思考を深めていくことができる。

４．おわりに

新たな知識を創り出す過程は,「イメージされた見通し→思考における疑問や矛盾→反省的思考→協同でのアプローチ→コミュニケーションの連鎖→個人の思考の分断→他者からのメッセージの新たな解釈→差異の吟味→新たな選択的知覚の獲得→反照的思考→新しい思考の創発→理解の深化→知識の構造化」で捉えてきた。

生徒たちの創発的思考における新たな選択的知覚の獲得は,疑問や矛盾を解決し乗り越えていく中にある。それは,ともに学び合う仲間と蓋然的推論をしながら，ある推測の根拠や論理を探していく探求活動の際に生じる。その中で，互いのコミュニケーションを解釈し差異を吟味していくことで，新たな意味や価値を創発し，新たな選択的知覚を見出していくことができるといえる。

今後の課題は，生徒たちがコミュニケーションをもちながら学ぶ中で，新たな選択的知覚の獲得を促進する多様な要因について考え続け，それを実践していくことである。

引用・参考文献

江森英世 (2010)．数学的コミュニケーションの創発連鎖における反省的思考と反照的思考．科学教育研究，34（2)，71-85．日本科学教育学会．

大島利雄 他（2011)．数学Ⅰ．東京：数研出版株式会社．

Polya, G.（1953/1959)．柴垣和三雄訳．数学における発見はいかになされるか１：帰納と類比．東京：丸善．

Polya, G.（1953/1959)．柴垣和三雄訳．数学における発見はいかになされるか２：発見的推論―そのパターン―．東京：丸善．

Skemp, R. R.（1971/1973)．藤永保・銀林浩訳．数学学習の心理学．東京：新曜社．

（うちだ　やすこ・えもり　ひでよ）