高校数学の授業における創造的思考の分析

江　森　英　世・内　田　靖　子
群馬大学教育学部数学教育講座
（2013 年 9 月 18 日受理）

An analysis of creative thinking in a high school mathematics class

Hideyo EMORI and Yasuko UCHIDA
Department of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan
(Accepted on September 18th, 2013)

1．はじめに

授業という協同での活動において，生徒はともに学ぶことで理解を深めていく。数学をできあがったものではなく，創り上げていく活動として捉え，未知のものを明らかにしていくことが創造的な思考の育成につながると考える。

創造行為とは，刻々と変化し，その内容が時間の流れの中で切れ目なく続き，1 つの過程として展開する。過ぎていった全体を含みながら，次のものとつながって新しい効果を生み出していく。創造には，大きく分けて既存知識を再構成する創造と飛躍的な発想による創造とが考えられる。数学教育においては，Polya がその飛躍の論理を明らかにしている（cf. Polya, 1953/1959）。本研究では，問題解決場面における新しい解釈による再構成や問いを生み出し考えていくことを創造的思考と捉え，その過程を分析する。創造活動の動機や思考過程，その結果として得られる喜びというような心的な側面について研究していく。

20 世紀初期に至るまで，多くの理論家は，思考にはなんらかのイメージが必要であるという立場をとってきた。また，昔の哲学者が考えたように，思考は経験と直結していると考えられてきた。それらに対し，Berlo は，思考には言語が必要であると述べている。言語は人間の見方，考え方，決定の導き方をある程度定める。それは，私たちが前に経験したことには名称がついていて，それら操作できるものについて考えるからである。学習はコミュニケーションであり，知覚され解釈された刺激と，それに対する反応との関係に変化が起こることである（cf. Berlo, 1960/1972）。

そこで，個人が深く考え生み出していくには，コミュニケーションが必要であり，授業でのかかわりや対話を通して，学び深めることができると考える。数学理解や問題解決において，いかに他者や教材とかかわり，学んでいくか考察する。したがって，本研究では，コミュニケーションによる協同での創造的思考の過程を明らかにする。

2．研究の方法

分析は，Skemp の理解と Polya の推論の考え方に基づいて行う。理解とは，対象を適切なシェマの中に同化し調節することである，という立場に立ち考察していく。人は考えるとき，対象を既有知識と同

じだと捉えることから始まり，試行錯誤と見直しを繰り返し，調節しながらより深い認識へと進む（cf. Skemp, 1971/1973）。推論とは，ある推測に対する考察と検証の過程であり，蓋然的推論は特殊から一般へ，論証的推論は一般から特殊へと対象を扱うことにより進めていく思考の仕方である。蓋然的推論は，暫定的で流動的であり，新しい知識を生み出すことができ，論証的推論は，完全で争う余地なく明白にされた最終的なものであるとしている。この 2 つは互いに補足し合い，推論することができる（cf. Polya, 1953/1959）。思考は，推論をしながら理解を深めていく過程である。思考は，内発的動機づけ，概念形成，理解，問題解決と進みながら，物事を考え表現し判断する能力を高め，知識の形成を導く。

もう 1 つの分析の方法は，江森のコミュニケーション連鎖の考え方である。コミュニケーションを送り手から受け手へという一方向の情報伝達過程としてではなく，双方の相互作用によって意味が創発される過程として捉えるためには，コミュニケーション連鎖という視点が必要である。教師がある生徒に働きかけ質問を始め（Initiation），その生徒から教師への応答（Response），教師から生徒へのフィードバック（Feedback）という IRF 型のコミュニケーションから学習者主導のコミュニケーション連鎖へと転換することが求められる。そして，新しいものを生み出していくには，反省的思考と反照的思考が必要である。江森は，これまで「Reflective Thinking」と呼ばれてきた思考を反省的思考と反照的思考という 2 つの相に分けて説明した。「アイデアの創発には，自分の思考の限界に気づくという反省的思考が必要であり，例示された表現を観照する反照的思考により自分自身の思考の枠組みを超越する必要がある（江森，2012，p.154）」と示している。他者とのコミュニケーションにより，個人の知識や経験に縛られない新しい思考過程が，突然活性化される可能性も出てくる。他者からのメッセージが，独力では見い出せなかった表現をもたらし，本質を捉えることも可能となる。生徒の思考を外化させたものを授業で相互に吟味，検討し，振り返ることで，生徒が自身の思考をより洗練させていく（cf. 江森，2006）。

これらのことから，協同での変化をもちながら進み続ける意識のあり方こそが，思考の契機となると考える。「驚きから問いと認識が生れ，認識されたものに対する疑いから批判的吟味と明晰な確実性が生れ，人間が受けた衝動的な動揺と自己喪失の意識から自己自身に対する問いが生れる（Jaspers, 1950/1954, p.22）」と主張する Jaspers は，人間と人間との間の交わりの中に，驚異から認識，懐疑から確実性，自己喪失から自己となることへの動機があるという。コミュニケーションは常に受け手に働きかけられており，個人の思考を強く促す内面的な行為と直結している。したがって，理解と推論による思考過程にそったコミュニケーションがどのような意味をもって展開され，発展させていくことができるのかという観点から分析を行う。

3．事　例

本研究の課題を検討するため，筆者の勤務校の高校 3 年生の事例を分析する。理系の数学Ⅲ C コースの 9 人で行う授業は，机をコの字に配列している。協同的な授業づくりに心がけ，コミュニケーションを通して理解を深めていくことができるよう進めている。分析の対象とする授業で扱う問題は，「問題（1）$y=x+sin\ x$，$0 \leqq x \leqq 3\pi$ と $y=x+a$ が接するように正数 a の値を定めよ。（2）$y=x+sin\ x$ と（1）の接線とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ」である。この問題における $y=x+sin\ x$ のグラフをかく過程について採り上げることにする。

3.1　事例の概要

$y=x+sin\ x$ をかくために，2 つの関数の和とみる方法を考える。$y=x+2x$ と $y=sin\ x+cos\ x$ を例に，教師が黒板で説明した。同様に，$y=x+sin\ x$ のグラフを同じ方法で考えることにする。その際，10 個の目盛りをとった座標平面が板書されている。

生徒 A は $y=x$ をかいた座標平面に $y=sin\ x$ をのせるときに π の位置がわからず，生徒 B や生徒 C と対話を始める。生徒 A と生徒 B は，その中で π の

3.14 の意味を見い出すが，生徒 C は途中から 2 人の会話を聞かずにグラフをかいている。黒板の目盛りを正確に写した生徒 B は，自分でかいた目盛りを数え，10 個の目盛りの意味を捉える。それは，10 あれば，定義域の 3π がちょうどかけるということである。生徒 B は，$\pi=3.14$ と気づいた考えに確信をもち，自信をもつことになる。

生徒 F は，自分でかいた $y=x$ と $y=\sin x$ のグラフが重なっていたため，上下関係の疑問をつぶやく。教師は気づき考えている生徒 F を評価する。それを聞いた生徒 I は重ならないと答え，再度考えていく。生徒 B も上下関係を疑問に思い始め，生徒 E に重なりを問いかける。そして，生徒 E は，重なっていない自らのグラフの理由を考えることになる。π の意味を見い出す過程に参加しなかった生徒 C も，このときは交差する自らのグラフを再考している。

この後，π の長さの意味を確認して，$y=x$ と $y=\sin x$ のグラフを同一平面上にかき，生徒が疑問に思っている上下関係を考えていく。その際，単位円の弧の長さは角度と等しいという弧度法の定義を確認し，中心角が x で半径が 1 の扇形を考え，弧の長さ x は $\sin x$ 以上が成り立つことを教師との対話を通して学んでいく。

以下では，本事例を 3 つの場面に分けて分析する。

3.2　事例 1

表 1　事例 1 の発話記録

01　生徒 A：πってどこ？
02　生徒 B：わかんない。πってどこ？
03　生徒 C：わかんない。
（少しの間，それぞれ考える。）
04　生徒 B：πって？
05　生徒 A：3.14？…3.14！
06　生徒 B：あ，そういうこと？

（07～17 では，3π までの範囲について話している。）

$y=x+\sin x$ をかくために，2 つの関数の和とみる方法を考える。$y=x+2x$ のグラフをかく際，2 つの関数 $y=x$，$y=2x$ の和とみるかき方について，教師が黒板で説明した。同様に，$y=\sin x+\cos x$ も示した（図 1）。次に，$y=x+\sin x$ のグラフを同じ方法で考えることにする。その際，細かく目盛りをとった座標平面が板書されている（図 2）。

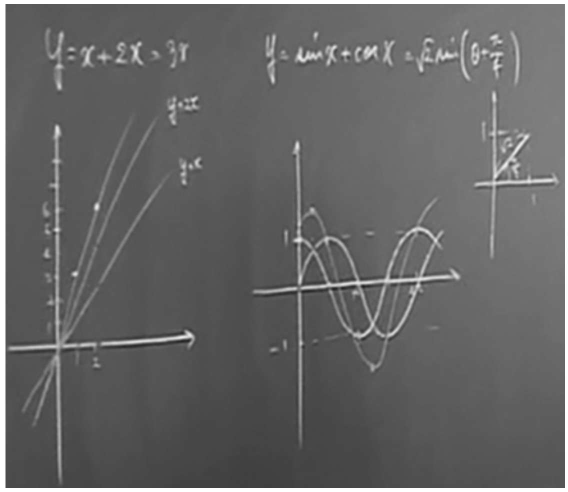

図 1　2 つの関数の和とみる方法

図 2　$y=x+\sin x$ を考える座標平面

$y=x$ のグラフをかいた生徒 A は，$y=\sin x$ のグラフをかくときに「πってどこ？（発言 01）」と x 軸との交点の位置を聞く。そして，生徒 B は，「わかんない。πってどこ？（発言 02）」と生徒 C にさらに問いかける。生徒 C は，「わかんない（発言 03）」と答える。少しの間それぞれ考え，生徒 B は「πって？（発言 04）」と投げかける。そこで，生徒 A は思いつき，「3.14？…3.14！（発言 05）」と答える。それを生徒 B も受け入れ，「あ，そういうこと？（発言 06）」と反応している。

3.2.1　事例 1 の分析

$y=x+\sin x$ を考える際，教師は $y=x+2x$ と $y=\sin x+\cos x$ の説明をして，関数の和とみるグラフのかき方を示した。$y=x+\sin x$ から，2 つの特殊

な類比の場合を調べることにより，与えられた問題の方法について帰納的に推測する。類比とは，次のように考える。「二つの系は，もしそれらがそれぞれの部分の明白に定義できる諸関係において一致するならば，類比である（Polya, 1953/1959, p.14）」。生徒は，教師の説明により，関数の和は，その点における 2 つの y の長さをたせばよいということがわかる。関数の和とみる方法の形式の内省により，$y=x+sin\ x$ のグラフを $y=x$ と $y=sin\ x$ を並べ重ねてかくことになる。教師は，座標系の違う $y=x$ と $y=sin\ x$ を同じ座標平面上に重ねてかくところに難しさがあると認識している。そのため，整数値で目盛りをとることができる $y=x+2x$，π や 2π という無理数の目盛りの $y=sin\ x+cos\ x$ を最初にそれぞれ示すことで，次にそれらを組み合わせた $y=x+sin\ x$ を考えられるように組み立てた。その意図は，生徒自身が π の位置を探し，その意味を捉えるところにある。このような 2 つの関数の和 $y=f(x)+g(x)$ とみる方法の一般化により，$y=x+x^{-1}$，$y=x+\sqrt{1-x^2}$ だけでなく，表現上困難な $y=-x+e^x$，$y=x+log\ x$ のようなグラフもイメージすることが可能となる（図 3）。これらは，導関数を求めることで，関数の増加減少やグラフの凹凸について正確に捉えることもできるが，本時は回転体を求めるときのイメージ作りに留め，概形を理解することを目標としている。

まず，生徒 A は，図 2 の黒板のような整数値で目盛りをとった座標平面上に $y=x$ をかき，続いて $y=sin\ x$ をかく際，「π の点はどこだろうか」という疑問をもつ。その疑問を「π ってどこ？（発言 01）」と言葉にすると，聞かれた生徒 B は，「わかんない（発言 02）」と答える。そこから，生徒 B は，π は何かという新たな問いをもち考えることになる。「π って？（発言 04）」と生徒 A に対して生徒 B が発信することで，生徒 A は改めて π の意味を考え始める。生徒 B からの問いかけが，最初のメッセージ送信者である生徒 A の思考に影響を与える。生徒 A は，今までに学習した $\pi=3.14$ という知識を思い出し，今考えている π は 3.14 という数値を表しているのではないかと直観的に推測する。「3.14？（発言 05）」と声に出しながら内省することで，振り返り吟味することになる。そして，π の位置は，数直線上に 3.14 の長さをとればよいことに気づき，やはり間違いなく「3.14！（発言 05）」と確信をもって再度言い切っている。ここでは，今までグラフをかくときには，180° という角度の意味で捉えていた π を数直線上での 3.14 の長さとみる新たな見方への変換が生じている（図 4）。つまり，π の意味を考えることにより，個人の中にバラバラに認識していた $\pi=180°$ と $\pi=3.14$ という知識につながりをもたせることができたのである。教師が示した $y=x+2x$ や $y=sin\ x+cos\ x$ の方法を模倣してかくことで，$y=x$ をかいた整数値の目盛りの座標平面上に生徒自身が π の位置を探し，その意味を捉えて $y=sin\ x$ をかくことができた。

生徒 C は π の場所を聞かれ，生徒 B と同様に「わかんない（発言 03）」と答えるが，生徒 A や生徒 B の発言は，生徒 C に影響を与えていない。生徒 C は，他者の発言を聞かずに自分の思考に集中している。$y=x$ と $y=sin\ x$ のグラフをかく際，目盛りの意識をせずに単純に重ね，本来交差するはずのない $y=x$ と $y=sin\ x$ のグラフが図 5 のように交わっている。これは，生徒 C が目盛りの意識をせず，教師が示した方法を機械的に利用しているためである。

より一般的な

$\boxed{y=f(x)+g(x)}$

↑

$\boxed{\begin{matrix} y=x+x^{-1} \\ y=x+\sqrt{1-x^2} \end{matrix}} \leftarrow \boxed{y=x+sin\ x} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} y=-x+e^x \\ y=x+log\ x \end{matrix}}$

類比（易）　　　　　　類比（難）

↓

$\boxed{y=x+2x=3x,\quad y=sin\ x+cos\ x=\sqrt{2}\ sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

より特殊な

図 3　$y=x+sin\ x$ の一般化，特殊化，類比

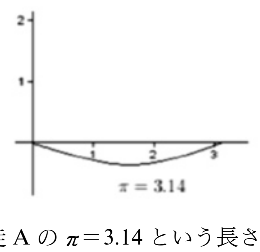

図 4　生徒 A の $\pi=3.14$ という長さとみる見方

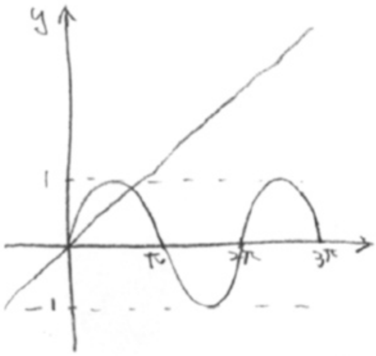

図 5　生徒 C の $y=x$ と $y=sin\ x$ のグラフ

3.2.2　事例 1 の考察

分析で述べたように，π が意味するものとして，バラバラに認識していた 180° の角度と 3.14 という数直線上の長さにつながりをもたせることは，個人では難しいことである。これは，生徒 A と生徒 B による発言 01〜06 のメッセージ解釈の相互作用により，生み出されたものである。「3.14？…3.14！（発言 05)」という 3.14 の繰り返しは，生徒 A がいかに内的苦闘を経てメッセージを展開しているかが感じとられる。考えながら話し，話すことそのものが再構成を促していく。この発言は外に向かうとともに，内への深まりとなる。生徒 A と生徒 B は，対話しながら思考することで，π の位置から意味を考え始め，その意味を想起し確かめ，確実にすることができたと考えられる。そして，個人がすでに知っていた π の表現として，両方の意味につながりをもたせて理解することが可能となる。教師が示した方法に同化させ，内省的思考の対象とすることで，さらに自分たちで思考を発展させることができている。自己の解釈に基づいてそれを受けとめ，自分で確かめながら意味づけをしている。自分で自身の知識を繰り返し活用することで，意味やつながりの変化をもたらし，理解を深化させることができるといえる。生徒 A と生徒 B にとって，180° という角度と 3.14 の長さは，π の意味として分化されていたが，π の位置を考えることでその意味を捉え，再構成することができた。これは，コミュニケーションによる他者との相互作用により，個人では明らかでなかった新しい迫り方がわかってきたからである。これまでの意味が修正されたとき，変形され，新たな深さをもって捉えることができる。

また，生徒 C は，$y=x$ と $y=sin\ x$ のグラフを $y=x+2x$ や $y=sin\ x+cos\ x$ の方法から機械的に模倣し，そのまま写しとっている。2 つのグラフが交差したのは，教師が示した方法を操作として認識し同化させ，内省することなく道具的に活用しているためである。つまり，$y=x$ と $y=sin\ x$ を同じ座標平面上にのせる際に，x 軸の点の取り方として，整数と無理数が混在しているという意識をもっていないのである。2 つの座標系の違うグラフを重ねるという感覚は，生徒にとって捉えにくいことが予想される。この後，π の表現として，角度と 3.14 の長さの両方の意味を確認する場面があるが，図 5 の生徒 C のグラフの π の位置からもその必要性を読みとることができる。教師は，生徒の外化されたメッセージを的確に読みとり，生徒がいかに思考し，何につまづいているのかを把握したうえで，その点が明らかになるような学習を作っていくことが求められる。教師は生徒のできていないところから授業を考えていくことが必要である。わかっていることではなく，どこがよく理解できていないのかを明確にしていく過程が，理解を深めるのに重要であるといえる。

3.3　事例 2

表 2　事例 2 の発話記録

18	生徒 F：	えー。あたし，重なっちゃった。
19	生徒 H：	え？どうに重なったの？（F のグラフをのぞき込む。）
20	教　師：	ああ，いいじゃない。うん，そういう気づきがほしいね。
21	生徒 I：	重ならない。
22	生徒 D：	え？だから，違うんだって。重ならないの？まさか。えー。（E に問う。）
23	生徒 E：	だって，$\frac{\pi}{2}$ までだよね？
24	生徒 B：	待って，1，2，3，4，5，6，7，8，9。あれ？ 9？ 3.14…だから。
25	生徒 C：	重なっちゃってるんだけど。
26	生徒 B：	3.14 だから，いいんじゃない，これぐらいで。

27　教　師：	黒板にさ，細かく目盛りをいっぱいふっているのは，意味があるんですけど。
28　生徒 F：	え？めっちゃ適当。

（29 は，机間支援中の教師の発言である。）

生徒 F は，$y=x$ と $y=sin\ x$ のグラフをかき，「えー。あたし，重なっちゃった（発言 18）」と発言する。生徒 H は，「え？どうに重なったの？（発言 19）」と生徒 F のグラフをのぞき込み確認する。教師は，「ああ，いいじゃない。うん，そういう気づきがほしいね（発言 20）」と生徒 F を評価している。それを聞いた生徒 I は，「重ならない（発言 21）」と自分のグラフを振り返ることになる。「え？だから，違うんだって。重ならないの？まさか。えー（発言 22）」と同じく重なると思っていた生徒 D は，生徒 E に問いかける。生徒 E は「だって，$\frac{\pi}{2}$ までだよね？（発言 23）」と重なる可能性のある部分を考え，検討していく。

一方，生徒 B は，「待って，1，2，3，4，5，6，7，8，9。あれ？ 9？ 3.14…だから（発言 24）」と自分のグラフの目盛りを数え，事例 1 で捉えた $\pi=3.14$ の考えを利用してグラフをかく。事例 1 で生徒 A と生徒 B の影響を受けなかった生徒 C は，「重なっちゃってるんだけど（発言 25）」と反応する。それに対し生徒 B は，「3.14 だから，いいんじゃない，これぐらいで（発言 26）」と答えている。そして，教師が「黒板にさ，細かく目盛りをいっぱいふっているのは，意味があるんですけど（発言 27）」と全体に投げかけることで，生徒 F は「え？めっちゃ適当（発言 28）」と自分のグラフを省みることになる。

3.3.1　事例 2 の分析

場面 1 において，生徒 B は，π の表現として，角度と 3.14 の長さのつながりを受け入れ納得した。そして，3π までグラフをかくときに，「1，2，3，4，5，6，7，8，9。あれ？ 9？ 3.14…だから（発言 24）」というように，$\pi=3.14$ と捉え，3×3.14 と範囲を考える。図 2 の黒板の目盛りを正確に写しとった生徒 B は，自分でかいた座標平面の目盛りを数え，教師が板書した 10 個の目盛りの意味を意識する。それは，$3\times3.14=9.42$ より，目盛りが 10 あれば 3π が収まるということである。その認識は，なぜ教師が 10 まで目盛りをふったのかという意味を見い出し，生徒 A と生徒 B がともに生み出した $\pi=3.14$ と捉えた考えに確信をもつことへとつながる。このことから，教師の送ったメッセージは，生徒 B には意味があったといえる。そして，「黒板にさ，細かく目盛りをいっぱいふっているのは，意味があるんですけど（発言 27）」という教師の発言で，その思いは再確認される。教師のこの発言は，グラフをかくときには目盛りの意識が必要であり，そこに重要なポイントがあることを示している。

生徒 F は，$y=sin\ x$ と $y=x$ を同じ座標平面上にのせると，$\frac{\pi}{2}$ までの範囲にグラフの重なりがみられたため（図 6），「えー。あたし，重なっちゃった（発言 18）」と 2 つのグラフが重なってよいのかと発言する。グラフをかくことで自己を振り返り，そこから疑問が生まれる。この発言は，面積や体積を求めるには，グラフの上下関係を意識する必要があり，考え方に影響を及ぼすことを理解しているためである。つまり，図 6 のようなグラフでは，上下関係が問題になるということである。生徒 F は，グラフが重なってよいか否かについて発言しているのではなく，重なりについて直観的に疑問をもった段階である。後に「めっちゃ適当（発言 28）」と発言しているように，細かく目盛りをとらずにグラフをかいた生徒 F によるメッセージの送信が，他の生徒たちの思考に影響を与えることになる。これに対し教師は，「そういう気づきがほしいね（発言 20）」とグラフの重なりに注意する生徒 F を評価している。

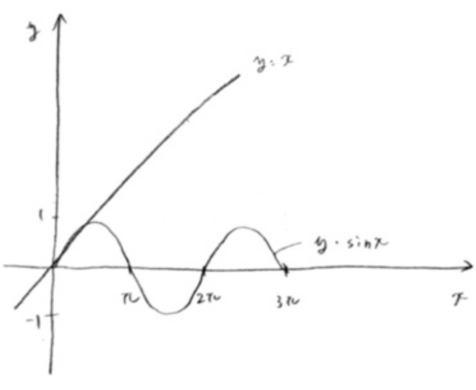

図 6　生徒 F の $y=x$ と $y=sin\ x$ のグラフ

この生徒 F の発言「えー。あたし，重なっちゃった（発言 18）」に対するフィードバックとして，生徒 I は「重ならない（発言 21）」とつぶやき，生徒 F と自分のグラフとの違いを考える。そして，グラフの最初のあたりはどうなっているのだろうかと思考を続けていく。生徒 I は，一言つぶやいただけで積極的に発言はしていないが，外化されたメッセージからも確かに学んでいる様子がみられる。

また，生徒 D は，$y=x$ と $y=\sin x$ のグラフの上下関係について，一連の対話を聞くことで意識し，「え？だから，違うんだって。重ならないの？まさか。えー（発言 22）」と生徒 E に問いかけている。「ああ，いいじゃない。うん，そういう気づきがほしいね（発言 20）」という教師の発言に対し，教師が生徒 F の解答を評価したと生徒 D は思っている。そこから，生徒 D は，グラフの重なりについて否定的に捉える。教師は，生徒 F の解答自体ではなく，発見し気づき考察する取り組みについて言及しているのである。ここに，教師と生徒 D のコミュニケーションギャップが生じている。しかし，このことから生徒 D は，さらに考え始めることになる。そして，生徒 D に問いかけられた生徒 E は，自分のかいたグラフは重なっていないが，なぜ重なるといえるのだろうかと疑問をもつ。「だって，$\frac{\pi}{2}$ までだよね？（発言 23）」と重なるはずはないと思いながらも，その理由を考える契機になっている。この発言から，生徒 E は，$y=\sin x$ の最初の頂点である $\frac{\pi}{2}$ までの単調増加の部分において，重なる可能性を考えていると解釈できる。そして，自分でかいたグラフが重ならない根拠を考えていくことになる。

生徒 C は今までの会話を聞き，「重なっちゃってるんだけど（発言 25）」とつぶやく。場面 1 では生徒 A と生徒 B の影響を受けずにグラフをかいていた生徒 C が，このときは自己を開き，振り返ることができている。

これまで分析してきたように，生徒 F の「えー。あたし，重なっちゃった（発言 18）」というメッセージ送信から，教師「ああ，いいじゃない。うん，そういう気づきがほしいね（発言 20）」，生徒 I「重ならない（発言 21）」，生徒 D「え？だから，違うんだって。重ならないの？まさか。えー（発言 22）」，生徒 E「だって，$\frac{\pi}{2}$ までだよね？（発言 23）」，生徒 C「重なっちゃってるんだけど（発言 25）」と連鎖的なコミュニケーションが生まれる。自分の考えた答えに対し，他者の発言から影響を受けて内省することにより，わからないことがみえてきて，自ら新たな問いをもち考えることになる。また，今まで意識しなかったことに気づき，自分自身を振り返り根拠を探し，それぞれの段階で学び求めていく。教師の「黒板にさ，細かく目盛りをいっぱいふっているのは，意味があるんですけど（発言 27）」という全体への投げかけにより，グラフが重なるか重ならないかという原因究明についての焦点化が進み，それらの問題点が明らかになっていく。

3.3.2 事例 2 の考察

生徒 B は，生徒 A とともに考え出した π の解釈をもとに範囲内のグラフをかくとき，目盛りを数えることで，教師が板書した 10 個の目盛りの意味を理解する。そこから論理がみえ，自分がやってきたことは正しいと自信をもつのである。根拠を追求し，考え方の正しさを求め，意味づけをする探究活動においてもたらされた発見から数学の美しさを感じる。そこから，生徒の自発性と積極性を発揮させることができる。1 つの構造を捉えることができれば，同じ構造をもつ数多くのものに応用がきく。生徒が構造を捉えたとき，それを拡張でき，そこにさらなる自発性が創り出され，意識的で積極的な学習が展開できる。Bruner によれば，ある分野で基本的諸観念を習得するということは，ただ一般的原理を把握するというだけではなく，学習と研究のための態度，推量と予測を育ててゆく態度，自分自身で問題を解決する可能性に向かう態度などを発達させることと関係があるという。「重要な要素は，発見をうながす興奮の感覚であるように思われる。ここで発見というのは，以前には気づかれなかった諸関係のもつ規則正しさと，諸観念の間の類似性を発見するということであり，その結果，自分の能力に自信をもつにいたるのである（Bruner, 1960/1963, p.25）」。推論において，生徒は知識を深く理解して学習し，さらにその上に新たに必要なものを創造し表現することが

できる。その中に，発見の喜びや次への意欲につながるものがあるといえる。

分析でも述べたように，教師は，生徒 F「えー。あたし，重なっちゃった（発言 18）」による気づくことで問いをもち思考していく過程を評価している。教師の役割として，生徒の問いを課題に変換させ，深く理解できるような環境づくりを心がけることが必要である。より深い概念的な理解には，発見や気づきが大事だと考える。

そして，生徒 F のこの一言から他の生徒は刺激を受け，問いをもつことになったといえる。分析で示したように，生徒 F から教師，生徒 I，生徒 D，生徒 E，生徒 C にみられる連続的なコミュニケーション連鎖が生じる。生徒 F の素朴な疑問から始まり，それを明確な問いとして展開している。生徒 F は，最初にグラフの重なりについて疑問に思っただけである。疑問を感じるだけでは，まだ自分から進んでその疑問を解いていくことにはつながらない。そのメッセージを受け取った他者とのかかわりを通じて，疑問は感じるだけで終わらず，その答えを探し出そうという行動につながっていく。コミュニケーション連鎖によって，「なぜ」という問いのかたちへと変化し，考えを深めるきっかけとなる。思考がとまらずに考えることが継続され，連鎖を生み出している。

コミュニケーションによって刺激を受けた一人ひとりが，自分の学びをつぶやき，それによって理解を深めるために協同での学びはある。複数の視点を自由に表現することで，1 つにとらわれない相対化する視点をもつことができる。一面的な視点やものの見方を，それが絶対でないとみなすことは，独力では難しいことである。自分の考えを捉え直すには，他者との対話からの刺激が必要である。個々の疑問がぶつかり合うことで，お互いの思考の差異が明確化していく。対話を通して影響を受け，自分のわからないことに気づき，自分で問いをもつことができる。学習におけるプロセスを振り返り，自分の言葉で語りながら学んでいく。最初はわからなくてできない生徒も，刺激を受け理解を深めることができる。できた生徒も，まず答えを求めることに満足を感じるが，たとえ一時的に満足することができたとしても，また次の疑いが生じてくる。自分の思考を言語化して伝えることで，わからないことが自覚的になれる。そこから問いが生まれ，生徒は自分の認識をもつことではなく，探究しようと努める。それは，答えを求めることより重要であるとも思われ，また，答えは新しい問いとなる。答えが次々と新しい「なぜ」を生み，自分の視点を変える問いを発見することができる。問われることによって，物事は明らかになっていくといえる。

3.4 事例 3

表 3 事例 2 の発話記録

30	教　師：	だいたい今，みんなグラフが両方かけたところかな。E さんは，何に迷ってます？
31	生徒 E：	π を数字に変えて，目盛りとって，グラフをかいてます。
32	教　師：	そうですね。(黒板のグラフを指しながら) さっきは 1，2ってかいてあったし，こっちは πってかいたけど，それが 2 つ入っているのね。
33	生徒 E：	重ならない。
34	教　師：	だから，1 の目盛りと π の目盛りをきちんと考えないと，明らかになんかおかしいグラフになっちゃうよね。だいたいイメージっていったけど，だいたいもあまりにもひどいと，とんでもないことになるので。いいですかね？
35	生徒 H：	グサリ…。

教師は，「E さんは，何に迷ってます？（発言 30）」と問う。生徒 E は，「π を数字に変えて，目盛りとって，グラフをかいてます（発言 31）」と答える。それに対し，「そうですね。さっきは 1，2ってかいてあったし，こっちは πってかいたけど，それが 2 つ入っているのね（発言 32）」と教師は補足する。生徒 E は，「重ならない（発言 33）」とグラフの重なりについて発言する。教師は，「1 の目盛りと π の目盛りをきちんと考えないと，明らかになんかおかしいグラフになっちゃうよね（発言 34）」と注意点をはっきりさせている。ここまで聞いた生徒 H は，「グサリ…（発言 35）」と自覚することになる。

3.4.1　事例 3 の分析

教師の「E さんは，何に迷ってます？（発言 30）」という質問に対し，生徒 E は「π を数字に変えて，目盛りとって，グラフをかいてます (発言 31)」と答える。これは，$y=x$ と $y=sin\ x$ の座標系の違う 2 つのグラフを比べて重ねる操作方法を説明している。生徒 E の「重ならない（発言 33)」という発言は，そのことについて意識しなければ，2 つのグラフを同一平面上にかくことはできないこと，そして，2 つのグラフは重ならないことについて言及している。「1 の目盛りと π の目盛りをきちんと考えないと，明らかになんかおかしいグラフになっちゃうよね (発言 34)」と，教師がその必要性を具体的に再確認している。ここまで聞いた生徒 H は，自分がそれらについて全く意識していなく，前述した生徒 C と同様，$y=x$ と $y=sin\ x$ のグラフが交差していた自らの思考過程を振り返り，「グサリ…（発言 35)」とその解釈を認識することになる。生徒 H は，このとき改めて，これまでの議論の意味を自覚する。生徒 E は，$y=sin\ x$ のグラフを考えるとき，$\frac{\pi}{2}$ のときに 1.5，π のときに 3 で，縦軸には 1 と -1 の目盛りをとり，サインカーブをかいた。彼女にとって，自分のかいたグラフから 2 つのグラフが重ならないことは読みとれるが，その理由について明らかにすることはできていない。生徒 E は，その根拠が明確でないため，確実なものを探究しようとしていく。この後の教師による説明で，グラフの上下関係を判断するうえで重要となる考えを知ることになる。それは，単位円の弧の長さは角度と等しいという弧度法の定義である（図 7)。このことから，π の意味として，180° という角度，数直線上での 3.14 の長さ，半径 1 の半円の弧の長さと理解を深めていくことができる。それを理解すれば，常に $sin\ x \leqq x$ となることがいえる。中心角が x で半径が 1 の扇形を考えると，弧の長さ x は $sin\ x$ 以上が成り立つからである (図 8)。$x=0$ の接線の傾きは，両関数とも 1 となり接していて，$0<x<\pi$ における $y=sin\ x$ の第 2 次導関数 $y''=-sin\ x<0$ を考えることで，接線の傾きは減少することがわかり，上下関係を判断することもできる。今回，教師が最初に導関数の説明から入らなかったのは，π の意味を考え発展させることに重きをおいたからである。グラフの上下関係の問題をこのように展開することで，それまで隠れていた弧度法に関する問題の発見につながる。生徒 E は，他の生徒の指摘や投げかけにより，結果を求め安心することに終わらず，なぜそうなるのかというところまで発展させ思考し，弧度法理解の再構造化にもつなげることができたといえる。

図 7　弧度法の定義

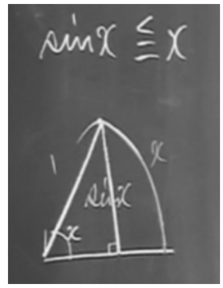

図 8　x と $sin\ x$ の大小関係

3.4.2　事例 3 の考察

「グサリ…（発言 35)」と発言した生徒 H のように，生徒自身が，どこが問題でどこを知りたいのかを明らかにしていくことが，教師に求められるかかわりの姿勢といえる。生徒から認識や問いを引き出し，考えさせるような授業を作っていくことが必要である。

生徒 E は，他者とのコミュニケーションを通じて，グラフの結果を求めることだけでなく，なぜグラフがこのような上下関係になるのかを思考していく。この理解のレベルは，関係的理解まで発展させているといえる。Skemp による関係的理解とは，一般的な数学的関係から規則や手続きを引き出すことができる段階の理解である。解法だけでなく，なぜそうなるのかを理解し，他の問題に関係づけることも可能である。このことから，弧度法理解の再構造化を促し，$y=x$ と $y=sin\ x$ のグラフの上下関係を判断する要因として関連づけられ，新しい知識として再構成される。180° という角度，数直線上での 3.14 の長さ，半径 1 の半円の弧の長さのように，バラバラに分化している π の意味を相互に関連するよう発展させていくためには，このような協同でのコミュニケーションを通じた学びが必要である。も

のごとには多様な側面があり，みる視点によって，その多様な側面が違ってみえる。知っていることと考えることを結びつけることにより，これらは生まれる。「なぜ」という問いから，新しい問いを発見していく。この新しい問いの中には，最初の問いとは別の側面から問題をみる視点が含まれている。連続的なコミュニケーションを通じて，生徒はその都度おかれている状況で思考し，あらゆるものをあらゆるものと結合させ創造し知覚する。コミュニケーションを通して，生徒は能動的に意識のあり方を変えながら，対象についての意味づけを改めていく。

4．考　察

$y=x+sin\ x$ のグラフをかく際，いくつかの具体的な側面に分け考えてきた。教師による $y=x+2x$ と $y=sin\ x+cos\ x$ の説明，π の位置と意味の確認，$y=x$ と $y=sin\ x$ のグラフの上下関係の疑問，π と $sin\ x \leqq x$ の図形的理解である。素朴な疑問から，他者とかかわり合いながら，生徒はその時々で問いをもち考える。その答えがそれぞれ関係しあって，弧度法理解の再構造化へとつながり，最初の問題の解答になる。生徒自身が対話を通して，最初の問題からいくつかの問いに分解し，関連する問いを新たに探していく。問いの分解とその展開により，創造的な思考を生み出すことができる。個人の認識は完結することなく，コミュニケーションを通して絶えず繰り返される。他者との協同的なプロセスにおいて影響を受け，その中での驚きから，自分ではわからないことや意識しなかったことが明確化される。そこから問いが生まれ，思考することへの衝動が生じる。そして，その都度の思考が決定的になり，過去の思考が理解されていく。答えを求めることに満足しても，また次の疑いが生じてきて，批判的な吟味にあうと確実なものはなくなってしまう。個人ではわからないことでも協同で活動することで，各人がそれぞれの段階で学んでいくことが可能となる。コミュニケーションにおいて展開される内省の問いは，定まったものではなく新たな創造であり，理解を1歩ずつ深めていくものである。つまり，授業において協同で活動していく中で，互いに他者とのコミュニケーションから刺激を受け，内省し思考することにより，理解を深めていくことができるといえる。したがって，創造的思考には，協同でのコミュニケーションを通じた学びが必要である。仲間とともに新しい道を切り拓いていく姿勢が形成される過程において創造性が生み出され，生徒は思考していく。

5．おわりに

授業におけるコミュニケーションを分析することで,「問い→思考→問いの分解→新たな視点による問い→思考→構造化」の思考過程を示した。この思考過程は，対話を通して問いを部分に分割して考え，対応する相互関係から構造を創り出す創造的思考の一端である。問いは協同で学ぶことから生まれ，発達とともに解決過程が内化され，個人の中に形成されていく。その過程において，他者との関係の中で自覚できる発見の喜びは，自信へとつながる。今後の課題は，新たな視点による問いをいかに引き出すことができるかを考察することである。

引用・参考文献

Berlo, D. K.（1960/1972）．布留武郎・阿久津喜弘訳．コミュニケーション・プロセス．東京：協同出版.

Bruner, J. S.（1960/1963）．鈴木祥蔵・佐藤三郎訳．教育の過程．東京：岩波書店.

江森英世（2006）．数学学習におけるコミュニケーション連鎖の研究．東京：風間書房.

江森英世（2012）．算数・数学授業のための数学的コミュニケーション論序説．東京：明治図書.

Jaspers, K.（1950/1954）．草薙正夫訳．哲学入門．東京：新潮社.

Polya, G.（1953/1959）．柴垣和三雄訳．数学における発見はいかになされるか 1：帰納と類比．東京：丸善.

Polya, G.（1953/1959）．柴垣和三雄訳．数学における発見はいかになされるか 2：発見的推論―そのパターン―．東京：丸善.

Skemp, R. R.（1971/1973）．藤永　保・銀林　浩訳．数学学習の心理学．東京：新曜社.