

Treball de Fi de Grau

**Grau en Enginyeria en Tecnologies Industrials**

**Control no lineal del sistema Twin Rotor**

**MEMÒRIA**

**Autor:** Marc Badia Martínez  
**Director:** Ramon Costa Castelló  
**Convocatòria:** Setembre 2017



Escola Tècnica Superior  
d'Enginyeria Industrial de Barcelona



## Resum

El Twin Rotor MIMO System és un sistema mecànic amb múltiples entrades i múltiples sortides assimilable a un helicòpter, però d'escala més reduïda. Una diferència destacable entre el Twin Rotor MIMO System i una maqueta d'helicòpter és que les forces aerodinàmiques no varien segons l'angle d'atac de les pales de les hèlixs sinó segons la velocitat angular dels rotors de les hèlixs.

Les equacions diferencials que modelen el sistema són no lineals i hi ha un fort acoblament entre les variables característiques del sistema, fet que planteja un repte des de el punt de vista del control. L'objectiu d'aquest projecte és dissenyar estructures de control que puguin implementar-se en aquest sistema, tenint en compte les seves fortes no linealitats. Aquestes estructures de control estan ordenades des de les més senzilles fins les més complexes, i es fa una comparativa del comportament del sistema utilitzant cada una de les estructures.

Totes les estructures de control dissenyades en aquest projecte es fan linealitzant el sistema al voltant d'un punt d'equilibri, això permet fer una aproximació lineal del sistema sempre i quan es trobi proper a una configuració determinada, la del punt d'equilibri. Si es linealitza el sistema s'arriba a un sistema linealitzat d'ordre molt elevat, donat que és incòmode treballar amb sistemes d'ordre elevat es redueix l'ordre del sistema. S'han realitzat dues reduccions d'ordre diferents i s'ha comparat el comportament del sistema aplicant-hi les estructures de control dissenyades amb les dues reduccions d'ordre.



# Sumari

<b>RESUM</b>	<b>2</b>
<b>SUMARI</b>	<b>4</b>
<b>1. INTRODUCCIÓ</b>	<b>11</b>
1.1. Objectius del projecte .....	11
1.2. Abast del projecte .....	12
<b>2. DESCRIPCIÓ DEL MODEL</b>	<b>13</b>
2.1. Paràmetres del model .....	14
2.2. Equacions del model .....	15
<b>3. CONTROL DEL MODEL</b>	<b>16</b>
3.1. Control en llaç obert.....	16
3.2. Control en llaç tancat.....	21
3.2.1. Linealització al voltant d'un punt d'equilibri.....	21
3.2.2. Reducció d'ordre .....	24
3.2.2.1. Reducció d'ordre per truncació.....	24
3.2.2.2. Reducció a un sistema de sisè ordre .....	26
3.2.2.3. Reducció a un sistema de quart ordre .....	28
3.2.3. Realimentació d'estat i observador.....	30
3.2.3.1. Ordre 6 .....	32
3.2.3.1.1 Simulacions.....	33
3.2.3.2. Ordre 4 .....	37
3.2.3.2.1 Simulacions.....	38
3.2.4. Realimentació d'estat i observador resistent a pertorbacions .....	41
3.2.4.1. Ordre 6 .....	42
3.2.4.1.1 Simulacions.....	43
3.2.4.2. Ordre 4 .....	47
3.2.4.2.1 Simulacions.....	49
3.2.5. Linealització al voltant de diversos punts .....	54
3.2.5.1. Simulacions.....	56

<b>PRESSUPOST</b>	<b>58</b>
<b>CONCLUSIONS I TREBALL FUTUR</b>	<b>59</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>60</b>

## Sumari de Figures

---

Figura 1. Twin Rotor MIMO System.....	9
Figura 2. Simulació del sistema en anell obert. Configuració inicial del punt d'equilibri i soroll desactivat. ....	17
Figura 3. Simulació del sistema en anell obert. Configuració inicial del punt d'equilibri i soroll activat. ....	18
Figura 4. Simulació del sistema en anell obert. Configuració inicial de l'entorn del punt d'equilibri i soroll desactivat. ....	19
Figura 5 Simulació del sistema en anell obert. Configuració inicial de l'entorn del punt d'equilibri i soroll activat .....	20
Figura 6. Comparativa de la resposta freqüencial del sistema complet i el sistema reduït....	27
Figura 7. Comparativa de la resposta davant un graó del sistema complet i el sistema reduït. ....	27
Figura 8. Comparativa de les respostes freqüencials dels sistemes complet i reduït .....	29
Figura 9. Comparativa de la resposta en front entrada graó dels sistemes complet i reduït .	29
Figura 10 Diagrama de blocs del sistema realimentat amb un observador d'estat .....	27
Figura 11 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial és la del punt d'equilibri i el soroll està desactivat.....	33
Figura 12 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial és la del punt d'equilibri i el soroll està activat.....	34
Figura 13 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial és de l'entorn del punt d'equilibri i el soroll està desactivat.....	34
Figura 14 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial és de l'entorn del punt d'equilibri i el soroll està activat.....	35
Figura 15. Sistema en anell tancat pertorbat. La configuració inicial és propera al punt d'equilibri i el soroll està activat.....	36
Figura 16 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és la del punt d'equilibri i el soroll està desactivat. ....	38

Figura 17 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració del sistema és la del punt d'equilibri i el soroll està activat. ....	39
Figura 18 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està desactivat. ....	39
Figura 19 Simulació del sistema en anell tancat. Configuració inicial propera al punt d'equilibri i soroll activat. ....	40
Figura 20. Inicialment el sistema es troba al punt d'equilibri i no està pertorbat .....	43
Figura 21. Sistema no pertorbat inicialment a l'entorn del punt d'equilibri,.....	44
Figura 22. Sistema pertorbat inicialment al punt d'equilibri. Soroll desactivat.....	45
Figura 23. Sistema pertorbat inicialment al punt d'equilibri amb el soroll activat. ....	45
Figura 24. Sistema pertorbat inicialment a l'entorn del punt d'equilibri i amb el soroll desactivat.....	46
Figura 26. Sistema pertorbat inicialment a l'entorn del punt d'equilibri amb el soroll activat. ....	47
Figura 26 Simulació del sistema en anell tancat. Inicialment el sistema es troba configurat en el punt d'equilibri i el soroll està desactivat. El sistema no està pertorbat. ....	49
Figura 27 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és la del punt d'equilibri i el soroll està activat. El sistema no està pertorbat. ....	50
Figura 28. Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està activat. El sistema no està pertorbat.....	50
Figura 29 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està activat. El sistema no està pertorbat.....	51
Figura 30 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està desactivat. El sistema està pertorbat.....	52
Figura 31 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està activat. El sistema està pertorbat.....	53
Figura 32 Simulació del sistema en anell tancat. El sistema inicialment es troba en un punt d'equilibri i està pertorbat. El soroll està desactivat. ....	56

Figura 33 Simulació del sistema en anell tancat. El sistema es troba inicialment en un punt d'equilibri i està pertorbat. El soroll està activat. ....57

## Sumari d'equacions

---

Equació 1. Forces i parells aplicats a l'articulació del sistema .....	15
Equació 2. Equació diferencial que modela el Twin Rotor MIMO System.....	15
Equació 3. Equació diferencial que modela el Twin Rotor MIMO System compactada.....	15
Equació 4. Definició genèrica d'un sistema en espai d'estats .....	21
Equació 5. Definició d'un sistema discret i invariant en el temps en espai d'estats.....	21
Equació 6 Definició en espai d'estats d'un sistema no lineal .....	22
Equació 7. Mètode per aconseguir les matrius característiques del sistema linealitzat .....	22
Equació 8 Matrius característiques del sistema linealitzat d'ordre complet .....	23
Equació 9 Definició en espai d'estats d'un sistema lineal.....	24
Equació 10 Descomposició de les matrius característiques d'un sistema lineal .....	24
Equació 11 Definició en espai d'estats del sistema reduït emprant les submatrius característiques del sistema d'ordre complet .....	25
Equació 12 Vectors d'estats dels sistema reduït d'ordre 6.....	25
Equació 13 Vector d'estats del sistema reduït d'ordre 4.....	25
Equació 14 Matrius característiques del sistema reduït d'ordre 6.....	26
Equació 15 Matrius Característiques del sistema reduït d'ordre 4 .....	28
Equació 16 Definició en espai d'estats d'un sistema lineal .....	30
Equació 17 Estructura proposada per dissenyar l'observador d'estat .....	30
Equació 18 Condició que cal complir per assegurar la convergència.....	30
Equació 19 Llei de Control proposada .....	31



Equació 20 Matrius de guany de la realimentació d'estat i matriu L.....	32
Equació 21 Matrius L i de guany de la realimentació d'estat.....	37
Equació 22 Definició en espai d'estats del sistema amb la pertorbació modelitzada inclosa	41
Equació 23 Definició en espai d'estats del sistema amb la pertorbació modelitzada inclosa compactada .....	41
Equació 24 Matrius Característiques de la modelització de la pertorbació.....	42
Equació 25 Matrius Característiques de l'estructura de control resistent a pertorbacions graó que s'ha dissenyat usant la reducció a ordre 6.....	43
Equació 26 Matrius Característiques de l'estructura de control resistent a pertorbacions graó que s'ha dissenyat usant la reducció a ordre 6.....	48

## **Sumari de Taules**

---

Taula 1. Paràmetres del Twin Rotor MIMO System.....	14
Taula 2 Punts al voltant dels quals s'ha linealitzat el sistema.....	54



# 1. Introducció

El Twin Rotor MIMO System és un aparell dissenyat per Feedback Instruments que pot assimilar-se a un helicòpter. És un sistema amb múltiples entrades (2) i múltiples sortides (4). Les equacions diferencials que el modelen són no lineals i el sistema està fortament acoblat, és a dir que la velocitat angular de cadascun dels dos rotors afecta tant a l'angle de capcineig com al de guinyada.

Els rotors dels helicòpters convencionals acostumen a girar a una velocitat angular constant i per variar les forces aerodinàmiques es varia l'angle d'atac de les pales. En maquetes d'escala reduïda en canvi s'acostuma a treballar amb un angle d'atac fix i una velocitat angular dels rotors que depengui de la tensió que se li aplica, això permet reduir la complexitat mecànica i el cost a l'hora de construir-los.

No obstant aquesta simplificació mecànica no es tradueix en una simplificació en el moment de controlar el sistema ja que les complexitats que cal afrontar són les no linearitats i l'acoblament, presents en els dos tipus de dissenys.

Aquest projecte dissenyarà diferents estructures de control que s'enfrontin als problemes associats a aquestes no linealitats i acoblaments. S'iniciarà estudiant el comportament del sistema en llaç obert per tal de determinar quins comportaments cal millorar, i mitjançant tècniques de control en llaç tancat es milloraran aquests comportaments. Les estratègies de control emprades estan ordenades des de les més senzilles fins les més complexes, i s'ha fet d'aquesta manera perquè les estructures de control més complexes s'han dissenyat aprofitant els conceptes i comportaments de les més senzilles, d'aquesta manera es pot observar l'evolució del comportament del sistema durant les diverses fases del projecte.

## 1.1. Objectius del projecte

El Twin Rotor MIMO System és un equip de laboratori modelable com un sistema mecànic no lineal fortament acoblat. Aquest projecte té com a objectiu dissenyar sistemes i estructures de control que puguin ser aplicades a aquest sistema, amb totes les dificultats que això comporta. Evidentment hi ha infinites estratègies a seguir per tal d'aconseguir aquest objectiu, i es poden fer estructures de control per aconseguir que el sistema compleixi moltes especificacions, en aquest sistema s'ha volgut seguir una metodologia que permetés anar dissenyant les estructures de control de manera gradual, d'aquesta manera les estructures de control que estan situades en primer lloc compleixen menys especificacions que les que estan en darrer lloc, i són també més senzilles. Això s'ha realitzat d'aquesta manera per tal que es pugues observar el comportament del sistema

davant diferents demandes d'actuació.

A banda de l'objectiu genèric de dissenyar estructures de control que puguin ser aplicades al sistema Twin Rotor, i per tant a un sistema no lineal, cal concretar què es vol que el sistema faci, o quines especificacions ha de complir. El primer objectiu és verificar que el sistema en anell obert és capaç de mantenir una posició desitjada, per tal de fer-ho possible caldrà fer un estudi de les equacions diferencials que modelen el sistema per tal d'establir quines entrades cal donar-li al sistema. Una vegada visualitzat el comportament del sistema en anell obert es té un segon objectiu que és millorar aquest comportament mitjançant tècniques de control en llaç tancat, es valorarà la celeritat del sistema en arribar al valor final així com el transitori del sistema.

Finalment hi ha un últim objectiu que és aconseguir que el sistema sigui resistent a pertorbacions. Aquest últim objectiu és molt important ja que si el Twin Rotor MIMO System és assimilable a un helicòpter cal que sigui resistent a possibles pertorbacions externes, com bé podria ser una onada de vent, d'aquesta manera, encara que hi hagi condicions externes adverses el sistema serà capaç d'acabar a la posició desitjada.

## 1.2. Abast del projecte

De tots els sistemes de control possibles aquest projecte es limita a explorar les possibilitats d'alguns d'aquells que impliquin la linealització del sistema, i que per tant després d'aquesta puguin ser controlats mitjançant tècniques lineals. D'aquesta manera, en aquest projecte es faran linealitzacions del sistema al voltant de diversos punts d'equilibri per tal d'aconseguir un comportament correcte sempre i quan el sistema es trobi a l'entorn d'aquestes configuracions d'equilibri. El punt i final del projecte serà un sistema que permeti triar quina configuració de punt d'equilibri s'ha d'utilitzar depenent de la configuració en la que es trobi el sistema, per fer això possible s'hauran de calcular diversos conjunts de matrius que connectades de la manera correcta al sistema aconseguixin que el sistema es comporti favorablement al voltant dels diferents punts d'equilibri.

## 2. Descripció del model



*Figura 1. Twin Rotor MIMO System*

El Twin Rotor MIMO System és un equip de laboratori dissenyat per Feedback instruments que permet fer experiments de control. Està format per dos rotors que poden girar independentment, aquests dos rotors estan units mitjançant una barra que té dues articulacions al centre d'un grau de llibertat cadascuna. Aquestes dues articulacions permeten que el sistema mecànic pugui girar al voltant de dos eixos, fent que el sistema es pugui orientar segons l'angle de guinyada i capcineig. Del centre de la barra principal en surt una altra barra amb un contrapès per tal de poder arribar a posicions d'equilibri estable.

Els rotors són motors de corrent continu i per tant la seva velocitat de rotació depèn de la tensió aplicada a l'entrada.

És un sistema d'ordre elevat, multivariable, no lineal i fortament acoblat. Això fa que sigui un sistema molt interessant des del punt de vista del control. L'estat del sistema es pot descriure a partir de 6 variables, que són les velocitats angulars dels dos rotors, les posicions angulars de capcineig i guinyada, i les velocitats angulars de capcineig i guinyada també.

Tal i com ja s'ha dit no és possible variar l'angle d'atac de les pales de les hèlices i per tant les forces aerodinàmiques depenen només de les velocitats angulars dels rotors, i aquestes depenen de la tensió elèctrica que se'ls hi apliqui, és possible per tant, a partir d'una posició

desitjada, determinar a quina velocitat han de girar cadascun dels dos rotors.

## 2.1. Paràmetres del model

A continuació cal afegir una taula amb els paràmetres que utilitza el model del Twin Rotor MIMO System.

Símbol	Paràmetre	Valor	Unitat
$L_m$	Longitud de la barra principal (part del motor principal)	0,24	m
$L_t$	Longitud de la barra principal (part del rotor de cua)	0,25	m
$L_b$	Longitud de la barra del contrapès	0,26	m
$L_d$	Distància de la barra principal a l'articulació fixa.	0,025	m
$L_{cb}$	Distància entre el contrapès i l'articulació mòbil	0,255	m
$r_{cb}$	Radi del contrapès	0,01	m
$r_{ms}$	Radi de l'escut del rotor principal	0,155	m
$r_{ts}$	Radi de l'escut del rotor de cua	0,10	m
$h_{cb}$	Altura del contrapès	0,03	m
$h$	Altura dels escuts dels dos rotors	0,05	m
$M_{mr}$	Massa del motor i el rotor principals	0,228	Kg
$M_{ms}$	Massa de l'escut del rotor principal	0,225	Kg
$M_{tr}$	Massa del motor i el rotor de cua	0,206	Kg
$M_{ts}$	Massa de l'escut del rotor de cua	0,165	Kg
$M_m$	Massa de la barra principal (part del motor principal)	0,0145	Kg
$M_t$	Massa de la barra principal (part del rotor de cua)	0,0155	Kg
$M_b$	Massa de la barra del contrapès	0,022	Kg
$M_{cb}$	Massa del contrapès	0,068	Kg
$M_{mh}$	Massa de les hèlixs del rotor principal	0,0022	Kg
$M_{th}$	Massa de les hèlixs del rotor de cua	0,0033	Kg
$J_{mr}$	Inèrcia del rotor principal	$2,65 \cdot 10^{-5}$	$Kg \cdot m^2$
$J_{tr}$	Inèrcia del rotor de cua	$1,6543 \cdot 10^{-5}$	$Kg \cdot m^2$
$g$	Acceleració de la gravetat	9,81	$m \cdot s^{-2}$

Taula 1. Paràmetres del Twin Rotor MIMO System

## 2.2. Equacions del model

Cada grup rotor-hèlix del Twin Rotor MIMO System genera una força de propulsió  $T$  i un parell reactiu  $Q$  que depenen de la seva velocitat angular. El parell reactiu  $Q$  és generat per l'aire oposant-se al moviment de les pales. Aquest parell fa que el Twin Rotor MIMO System tendeixi a girar en sentit oposat al de les pales.

$$\begin{bmatrix} F_{a,qv} \\ F_{a,qh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_m & 0 \\ -L_d \cdot \sin(q_v) & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m(w_m) \\ Q_m(w_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ L_t \cdot \cos(q_v) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_t(w_t) \\ Q_t(w_t) \end{bmatrix}$$

*Equació 1. Forces i parells aplicats a l'articulació del sistema*

A l'equació 1 es poden veure com s'apliquen aquestes forces i parells a les articulacions del sistema.

L'equació diferencial que modela el sistema és la següent:

$$\begin{bmatrix} M_q(q) & M_{q,\theta}(q) \\ M_{q,\theta}(q)^T & M_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_q(q, \dot{q}, w) \\ c_\theta(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_q(q) \\ 0 \end{bmatrix} = B_x \cdot \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(q, w) \\ v(i, w) \end{bmatrix}$$

*Equació 2. Equació diferencial que modela el Twin Rotor MIMO System*

que de forma més compacta es pot escriure de la següent manera:

$$M(x) \cdot \ddot{x} + c(x, \dot{x}) + g(x) = B_x \cdot \dot{x} + f$$

*Equació 3. Equació diferencial que modela el Twin Rotor MIMO System compactada*

on  $x$  és el vector d'estat  $(q_v, q_h, w_m, w_t)^T$ ,  $M(x)$  és la matriu associada a les inèrcies del sistema  $c(x, \dot{x})$  són els termes associats als efectes de Coriolis  $g(x)$  són els termes que provenen de l'energia potencial,  $B_x \cdot \dot{x}$  provenen de les dissipacions viscoses i  $f$  són les forces aerodinàmiques i electromecàniques externes al sistema.

## 3. Control del model

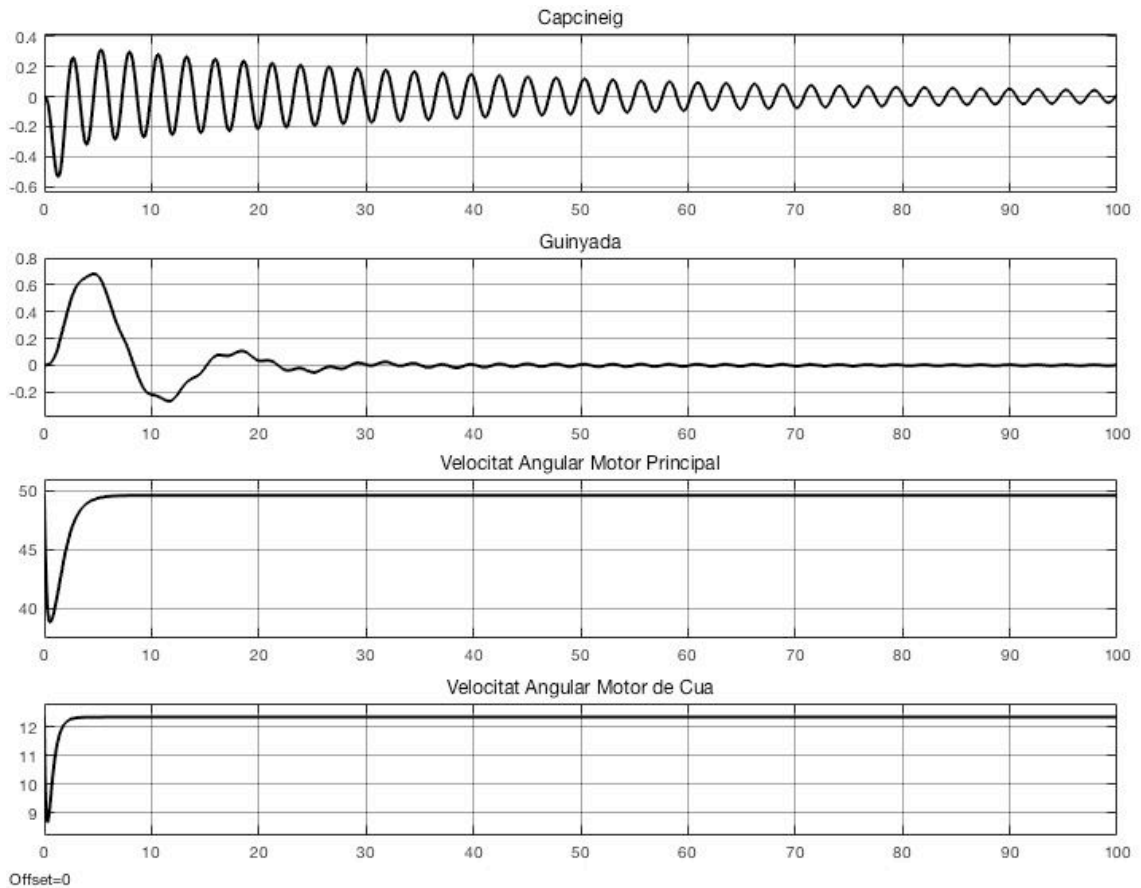
### 3.1. Control en llaç obert

A partir de les equacions diferencials que modelen el sistema, i de les aproximacions polinòmiques que relacionen les velocitats angulars dels rotors amb les forces aerodinàmiques, és possible calcular quines velocitats angulars dels rotors són necessàries per mantenir el sistema en una posició d'equilibri determinada.

Per tant si el sistema es troba inicialment en una posició d'equilibri, donant-li l'entrada apropiada s'aconsegueix que el sistema torni de manera estacionària al punt d'equilibri. Per tal d'aconseguir-ho cal calcular quina és l'entrada apropiada. En aquest cas s'ha utilitzat un control de posició de les velocitats dels rotors que donades les velocitats angulars que es desitgen i les velocitats angulars reals, dels rotors, calcula quins voltatges s'han de donar a les entrades del sistema. Per tant, per tal d'aconseguir que el sistema torni de manera estacionària al punt d'equilibri desitjat caldrà calcular quines velocitats angulars dels rotors són necessàries. Aquest càlcul es pot fer resolent les equacions diferencials que modelen el sistema descrites anteriorment o bé utilitzant mètodes numèrics que resolguin els punts d'equilibri després de diverses iteracions. En aquest apartat s'ha validat que seguint les dues metodologies s'arriba al mateix resultat i a la resta del projecte s'ha decidit fer els càlculs seguint mètodes iteratius.

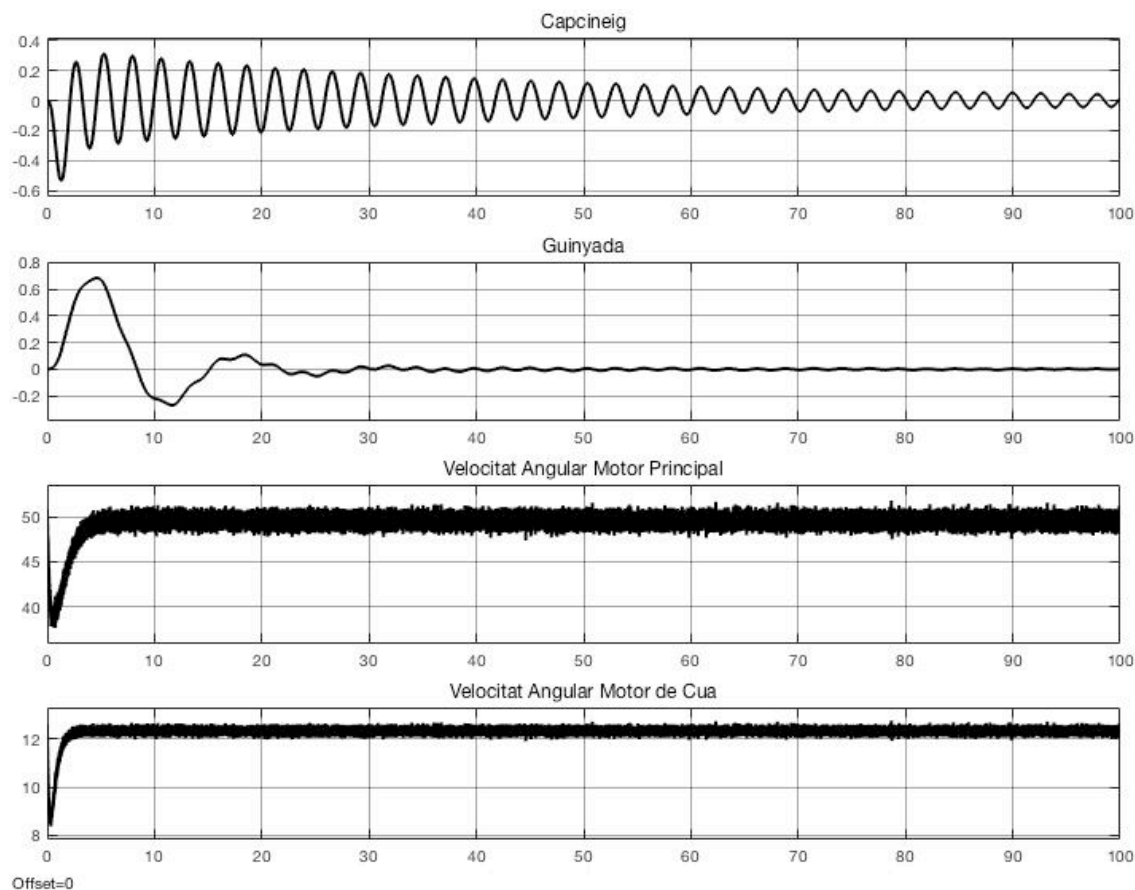
Una vegada fets aquests càlculs s'ha procedit a validar en simulació que el sistema actua tal i com s'ha predit. Per fer les simulacions s'ha utilitzat el model *TRMS\_II\_con\_lin.slx* que s'ha entregat amb aquest projecte. La primera simulació efectuada ha pres per condicions inicials les del punt d'equilibri corresponent a un angle de 0 radians pels angles de capcineig i guinyada i s'ha calculat quines velocitats angulars dels rotors són necessàries per quedar-se en aquesta posició. El resultat ha estat una velocitat angular de 49,5803 rad/s del motor principal i una velocitat angular de 12,3423 rad/s del motor de cua.





*Figura 2. Simulació del sistema en anell obert. Configuració inicial del punt d'equilibri i soroll desactivat.*

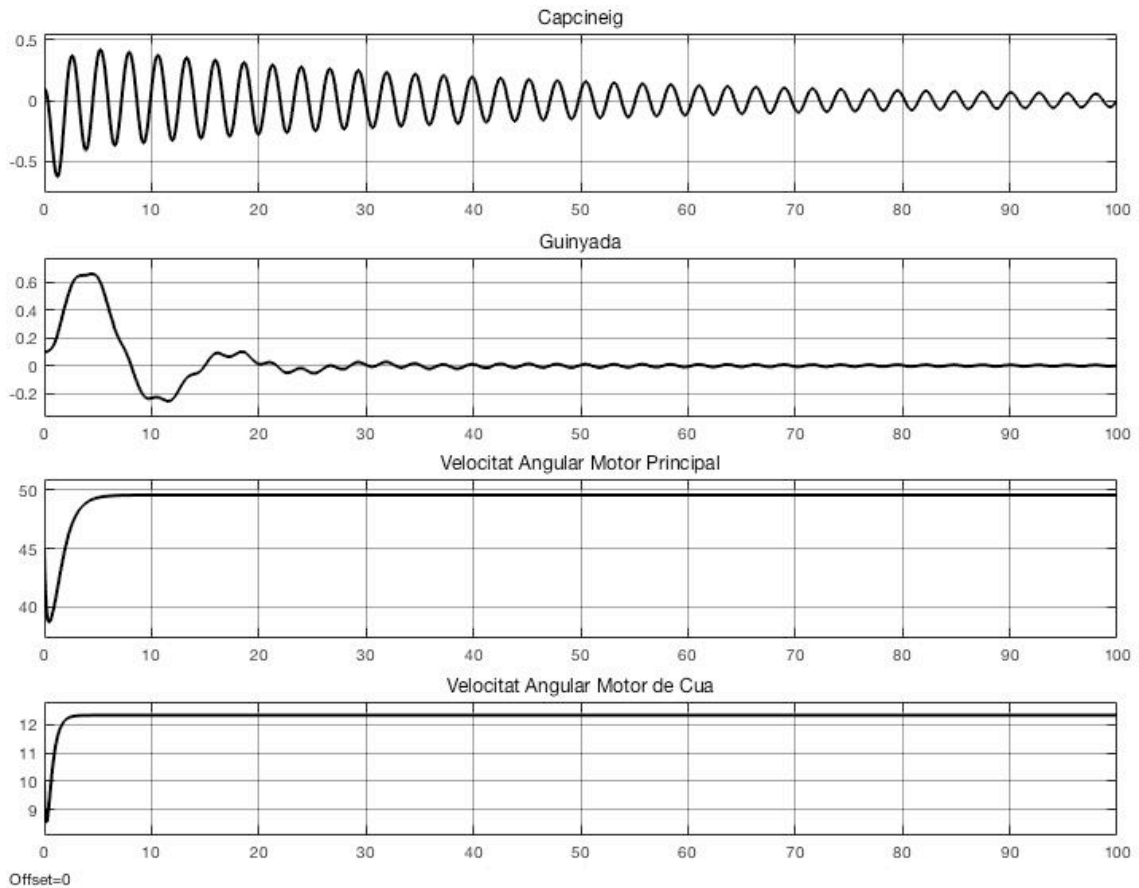
Tal i com es pot observar a la Figura 2, i tal i com havia estat predit, si el sistema inicialment es troba configurat en una posició d'equilibri, després d'un transitori, acaba retornant a la posició d'equilibri. També es pot observar que els temps d'establiment dels angles de capcineig i guinyada són notablement superiors als temps d'establiments de les velocitats angulars dels rotors principal i de cua. En aquesta simulació s'ha decidit desactivar el soroll per tal que les interferències no modifiquessin els resultats predits per teoria, una vegada feta la validació sense soroll cal verificar que activar-lo no modifica notablement el comportament del sistema.



*Figura 3. Simulació del sistema en anell obert. Configuració inicial del punt d'equilibri i soroll activat.*

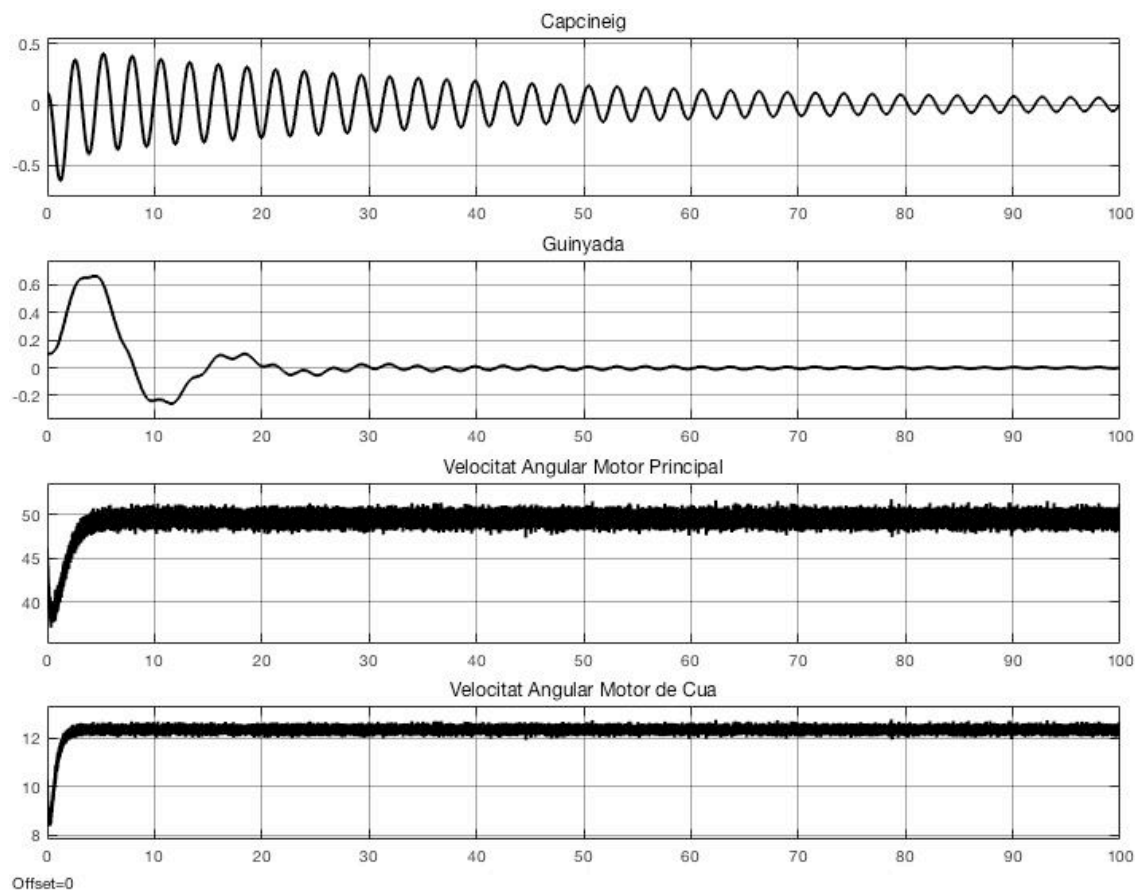
Si s'agafen com a condicions inicials les mateixes que a les de la simulació de la Figura 2, es pot observar a la Figura 3 que el comportament del sistema no varia de forma substancial amb l'activació del soroll. Es pot observar que el transitori i estacionari dels angles de capcineig i guinyada és pràcticament calcat al que s'ha observat a la simulació de la Figura 2 però en canvi si podem veure els efectes del soroll a les gràfiques de les velocitats angulars dels rotors. Es pot observar que el soroll fa que aquestes gràfiques fluctuïn de manera estacionària sense alterar que el sistema acabi retornant a la posició d'equilibri. S'arriba a la conclusió per tant que activar el soroll no evita que el sistema compleixi amb les especificacions, tal i com s'havia previst.

Una vegada validat que el comportament del sistema és l'adequat quan la configuració inicial és la del punt d'equilibri cal observar què passa si la configuració inicial és diferent a la del punt d'equilibri però es troba en un entorn proper. Una altra vegada es farà una primera simulació sense tenir en compte el soroll i després es validarà que tenir-lo en compte no afecta en els resultats



**Figura 4.** Simulació del sistema en anell obert. Configuració inicial de l'entorn del punt d'equilibri i soroll desactivat.

Agafant com a punt d'equilibri el mateix que a les Figures 2 i 3, s'ha decidit fer una simulació fent que la configuració inicial del sistema sigui de 0,1 rad pels angles de capcineig i guinyada respectivament i unes velocitats angulars de 45 i 10 rad/s dels motors principal i de cua respectivament. Les entrades del sistema han seguit sent les mateixes que a les simulacions anteriors per tal que el sistema vagi al punt d'equilibri desitjat. Es pot observar a la Figura 4 que efectivament després d'un transitori el sistema acaba tornant al punt d'equilibri. La dinàmica del sistema s'assembla molt a la de les simulacions anteriors amb un comportament marcadament oscil·latori i relativament lent en els angles de capcineig i guinyada. Una altra vegada el soroll no estava activat per tal de validar que el comportament del sistema era l'adequat abans de tenir en compte possibles interferències, no obstant aquestes no haurien d'alterar el resultat.



*Figura 5 Simulació del sistema en anell obert. Configuració inicial de l'entorn del punt d'equilibri i soroll activat*

Tal i com ja s'ha previst, si s'agafen les mateixes condicions inicials que a les de la Figura 4, a la Figura 5 podem observar que activar el soroll no altera notablement el comportament del sistema. Una altra vegada es pot observar que el sistema té com a valor final la configuració del punt d'equilibri i el soroll no afecta significativament la dinàmica dels angles de capcineig i guinyada, que segueixen tenint un comportament marcadament oscil·latori, però en canvi sí que fan fluctuar de manera notable les velocitats angulars dels rotors principal i de cua, no obstant aquestes fluctuacions no eviten que el sistema compleixi les especificacions.

Tot i que el sistema compleixi amb les especificacions es pot observar que el transitori té uns pics d'oscil·lació considerables i que la dinàmica és molt lenta ja que no s'arriba a l'estat estacionari fins passats 100s de l'inici de la simulació. És per això que s'ha decidit utilitzar algun sistema de control que millori el comportament del sistema, s'ha decidit fer una realimentació d'estat utilitzant un observador per tal d'estimar els estats no mesurables.

## 3.2. Control en llaç tancat

### 3.2.1. Linealització al voltant d'un punt d'equilibri

Tal i com ja s'ha dit el Twin Rotor MIMO System és un sistema no lineal, ja que les equacions diferencials que el modelen són també no lineals. Els sistemes no lineals són més complexes de controlar que els lineals, i per tant una de les possibles estratègies per controlar un sistema no lineal és linealitzar-lo al voltant d'un punt d'equilibri mitjançant una aproximació de Taylor. Aquesta aproximació serà raonablement bona en punts propers del punt d'equilibri però en canvi serà una mala aproximació si ens allunyem d'aquest.

Una forma general de representació en espai d'estats d'un sistema lineal és la següent:

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t)$$

$$y(t) = C(t) \cdot x(t) + D(t) \cdot u(t)$$

*Equació 4. Definició genèrica d'un sistema en espai d'estats*

En el cas d'un sistema discret i invariant en el temps:

$$x(k + 1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k)$$

$$y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k)$$

*Equació 5. Definició d'un sistema discret i invariant en el temps en espai d'estats*

On  $x$  és el vector d'estats,  $y$  és el vector de sortida,  $u$  és el vector d'entrades o de control,  $A$  és la matriu d'estats,  $B$  és la matriu d'entrada,  $C$  és la matriu de sortida i  $D$  és la matriu de transmissió directa.

La representació en espai d'estats d'un sistema no lineal no es pot expressar de la mateixa manera ja que no és possible treure factor comú els vectors  $x$  i  $u$  i per tant no es poden identificar les matrius  $A, B, C, D$ . La seva representació en espai d'estats és per tant:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = h(x(t))$$

*Equació 6 Definició en espai d'estats d'un sistema no lineal*

Aplicant un desenvolupament en sèries de Taylor de primer ordre s'aconsegueix una aproximació lineal del sistema i les seves matrius característiques es poden deduir de les següents expressions:

$$A = \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{(X,U)}$$

$$B = \left. \frac{\delta f}{\delta u} \right|_{(X,U)}$$

$$C = \left. \frac{\delta h}{\delta x} \right|_X$$

*Equació 7. Mètode per aconseguir les matrius característiques del sistema linealitzat*

on  $X, U$  són els valors que prenen els vectors d'estats i de control en el punt d'equilibri. S'ha decidit linealitzar inicialment el Twin Rotor MIMO System utilitzant com a punt d'equilibri el punt on els angles de capcineig i guinyada prenen els valors de 0 respectivament. Les matrius resultants han estat les següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 \\ 0 & 0 & 0,9986 & 0 & -0,0011 & -0,0011 & -0,0004 & 0,0012 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9968 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0017 & -0,0017 & -0,0006 & 0,0029 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0003 & 0 & -0,0009 & -0,0009 & -0,0003 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0005 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0014 & -0,0014 & -0,0005 & 1 & 0 & 0 \\ -0,0057 & 0 & 0,0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0,0004 & -0,0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9997 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0029 & 0 \\ 0 & 0,0046 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0025 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,0037 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Equació 8 Matrius característiques del sistema linealitzat d'ordre complet

Tal i com observar la matriu d'estats té dimensions 14x14 i per tant el sistema té ordre 14. Per tal de no haver de treballar amb un sistema d'ordre tant elevat s'intentarà fer una reducció d'ordre.

### 3.2.2. Reducció d'ordre

Quan es té un sistema d'ordre molt elevat, com és el cas d'aquest projecte, a vegades és convenient intentar reduir-ne l'ordre. Una reducció d'ordre té per objectiu aproximar un sistema dinàmic d'ordre superior mitjançant un sistema dinàmic d'ordre inferior al original. L'objectiu per tant és trobar un sistema d'ordre inferior al original però que en canvi presenti la mateixa dinàmica, o una dinàmica molt similar. Hi ha molts mètodes o estratègies per reduir l'ordre d'un sistema, en aquest projecte s'ha decidit utilitzar el mètode de reducció de l'ordre d'un sistema per truncació ja que l'error comès per aquest mètode és acceptable pels objectius del projecte i és relativament senzill de dur a terme.

#### 3.2.2.1. Reducció d'ordre per truncació

Si es té un sistema lineal del següent tipus:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

*Equació 9 Definició en espai d'estats d'un sistema lineal*

on les matrius del sistema es poden descomposar com les següents:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad C = (C_1 \quad C_2)$$

*Equació 10 Descomposició de les matrius característiques d'un sistema lineal*



i assumint que el sistema que cal reduir és asimptòticament estable, controlable i observable. Usant les matrius descompostes es pot definir un sistema truncat d'ordre reduït com el següent:

$$\dot{x}_r = A_{11} \cdot x_r + B_1 \cdot u$$

$$y_r = C_1 \cdot x_r + D \cdot u$$

*Equació 11 Definició en espai d'estats del sistema reduït emprant les submatrius característiques del sistema d'ordre complet*

Per tal de reduir d'ordre el Twin Rotor MIMO System linealitzat s'ha utilitzat la comanda *modred* que elimina els estats que se li indiqui del vector d'estats. S'ha volgut fer dues reduccions d'ordre per tal de comparar l'eficàcia de les estratègies de control en cada un dels sistemes reduïts. Els vectors d'estats per cada una de les reduccions d'ordre són respectivament:

$$x = \begin{pmatrix} q_v \\ q_h \\ w_m \\ w_t \\ \dot{q}_v \\ \dot{q}_h \end{pmatrix}$$

*Equació 12 Vectors d'estats dels sistema reduït d'ordre 6*

$$x = \begin{pmatrix} q_v \\ q_h \\ w_m \\ w_t \end{pmatrix}$$

*Equació 13 Vector d'estats del sistema reduït d'ordre 4*

### 3.2.2.2. Reducció a un sistema de sisè ordre

En el primer cas s'ha volgut aconseguir un sistema de sisè ordre on els estats siguin les velocitats angulars dels rotors i les posicions i velocitats angulars de capcineig i guinyada respectivament. La reducció d'ordre, que s'ha realitzat utilitzant la metodologia explicada anteriorment ha quedat de la següent manera:

$$A_r = \begin{pmatrix} 0,9999 & -0,0023 & 0,0005 & -0,0002 & 0,0001 & 0 \\ 0,0024 & 0,9999 & 0,0003 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0,0005 & -0,0007 & 0,9972 & -0,0005 & -0,0003 & -0,0002 \\ -0,0002 & 0,0003 & -0,0005 & 0,9961 & -0,0001 & 0 \\ 0,0001 & -0,0001 & -0,0009 & -0,0001 & 0,9998 & 0,0004 \\ 0,0001 & -0,0001 & -0,0007 & -0,0001 & -0,0005 & 0,9998 \end{pmatrix}$$

$$B_r = \begin{pmatrix} -0,0142 & 0,0003 \\ 0,0083 & 0 \\ 0,0468 & -0,0246 \\ -0,02 & -0,0581 \\ 0,0082 & -0,0039 \\ 0,0059 & -0,003 \end{pmatrix}$$

$$C_r = \begin{pmatrix} -0,0019 & -0,0077 & 0,0006 & -0,0003 & 0,0001 & 0,0001 \\ -0,0002 & -0,0005 & -0,0005 & 0 & 0,007 & -0,0058 \\ -0,0141 & 0,0032 & 0,0467 & -0,0203 & 0,0051 & 0,003 \\ 0,003 & 0 & -0,0248 & -0,058 & -0,0027 & -0,0014 \end{pmatrix}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,0003 \\ 0,0008 & 0,0003 \\ 0,0026 & 0,0301 \end{pmatrix}$$

#### *Equació 14 Matrius característiques del sistema reduït d'ordre 6*

Per tal de comprovar que el sistema d'ordre reduït i el sistema d'ordre superior tenen comportaments molt similars i que per tant s'està fent una bona aproximació s'ha decidit comparar les respostes freqüencials mitjançant diagrames de Bode i la resposta dels dos

sistemes davant entrades graó.

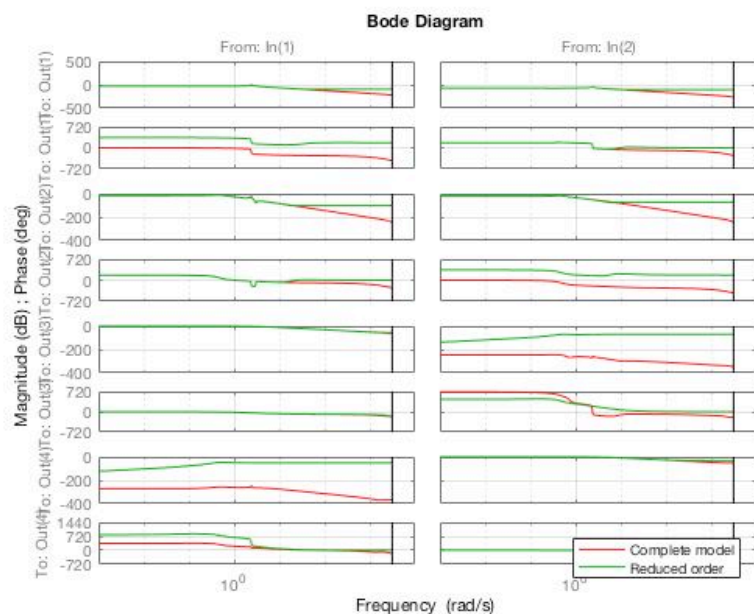


Figura 6. Comparativa de la resposta freqüencial del sistema complet i el sistema reduït

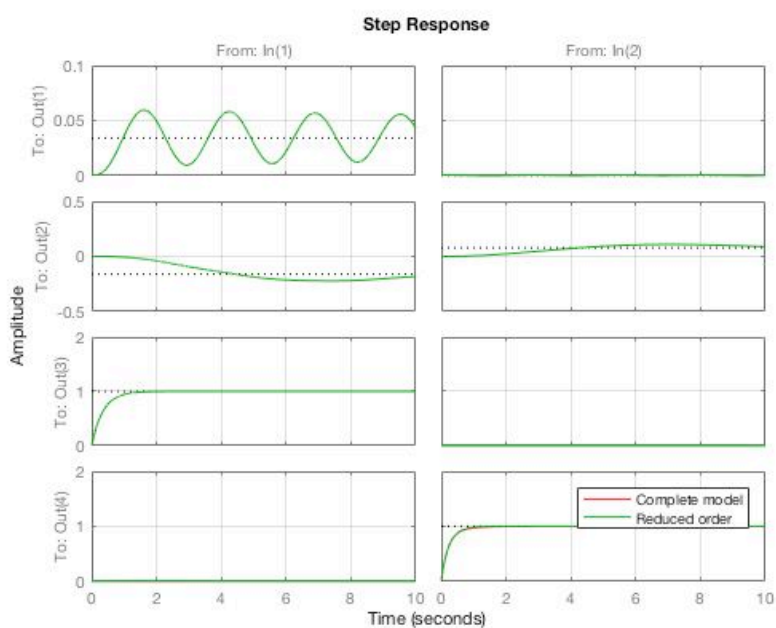


Figura 7. Comparativa de la resposta davant un graó del sistema complet i el sistema reduït.

Tal i com es pot observar a les Figures 6 i 7 la resposta del sistema reduït és molt similar a la resposta del sistema complet, i per tant la reducció d'ordre efectuada es pot considerar

com a vàlida per la precisió que es necessita. S'observa que la resposta davant graó dels dos sistemes és pràcticament idèntica.

### 3.2.2.3. Reducció a un sistema de quart ordre

La segona reducció d'ordre que s'ha volgut dur a terme és una que tingui com a estats les velocitats angulars dels rotors i les posicions angulars de capcineig i guinyada. És a dir una reducció d'ordre on es trunquin els mateixos estats que els de la reducció a ordre sis, però que a més descriu el comportament del sistema dinàmic sense agafar com a estats les velocitats angulars corresponents als angles de guinyada i capcineig. La reducció d'ordre, ha quedat de la següent manera:

$$A_r = \begin{pmatrix} 0,9999 & -0,0023 & 0,0005 & -0,0002 \\ 0,0024 & 0,9999 & 0,0003 & -0,0001 \\ 0,0005 & -0,0007 & 0,9974 & -0,0004 \\ -0,0002 & 0,0003 & -0,0004 & 0,9961 \end{pmatrix}$$

$$B_r = \begin{pmatrix} -0,0137 & 0 \\ 0,0085 & -0,0001 \\ 0,0451 & -0,0237 \\ -0,0207 & -0,0577 \end{pmatrix}$$

$$C_r = \begin{pmatrix} -0,0019 & -0,0077 & 0,0005 & -0,0003 \\ 0,0029 & -0,0026 & -0,0196 & -0,0024 \\ -0,0132 & 0,0027 & 0,0416 & -0,0212 \\ -0,0001 & 0,0003 & -0,0221 & -0,0575 \end{pmatrix}$$

$$D_r = \begin{pmatrix} 0,0011 & -0,0006 \\ 0,1787 & -0,0858 \\ 0,0449 & -0,0228 \\ -0,0218 & 0,0428 \end{pmatrix}$$

#### *Equació 15 Matrius Característiques del sistema reduït d'ordre 4*

Per tal de comprovar que el sistema d'ordre reduït i el sistema d'ordre superior tenen comportaments molt similars i que per tant s'està fent una bona aproximació s'ha decidit comparar les respostes freqüencials mitjançant diagrames de Bode i la resposta dels dos sistemes davant entrades graó.

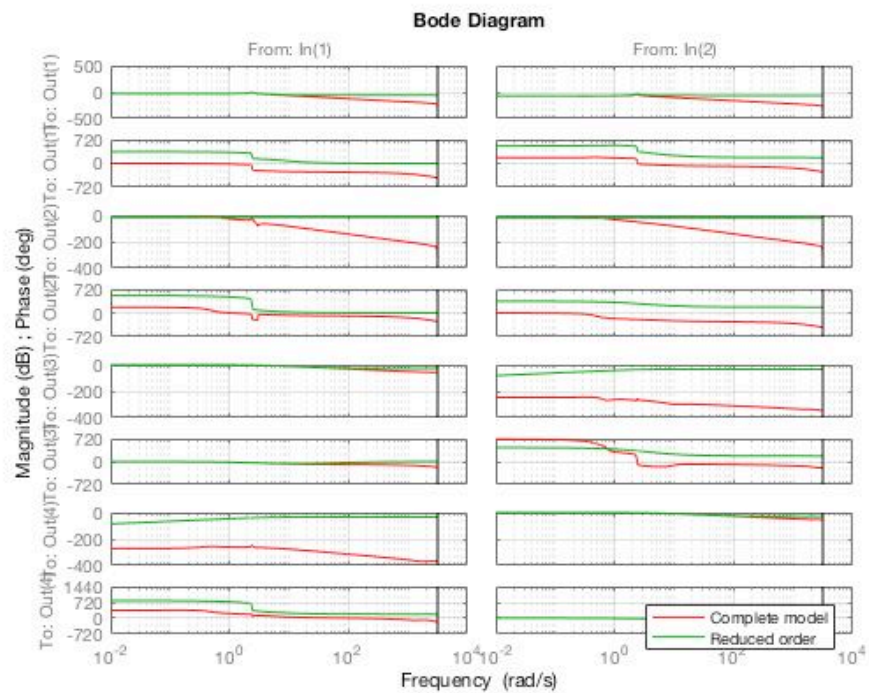


Figura 8. Comparativa de les respostes freqüencials dels sistemes complet i reduït

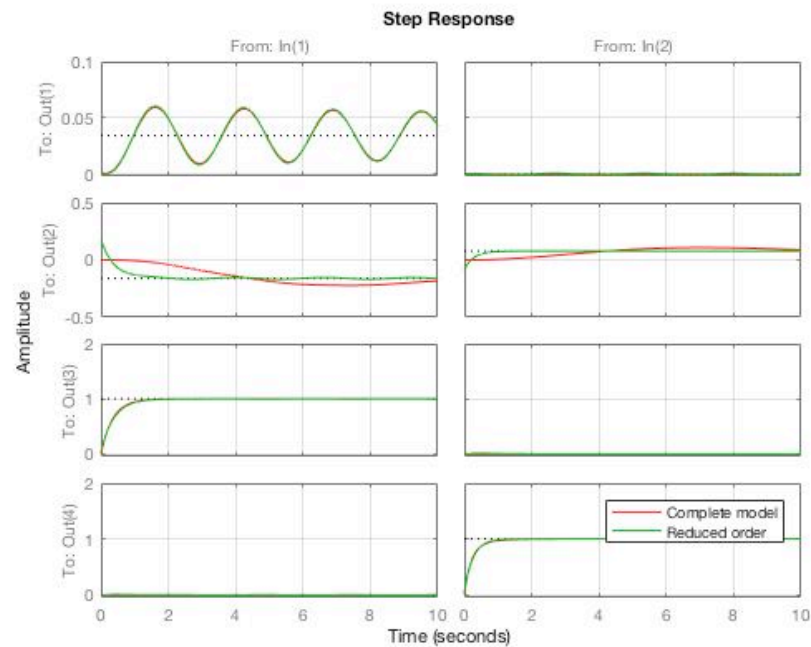


Figura 9. Comparativa de la resposta en front entrada graó dels sistemes complet i reduït

Tal i com es pot veure a les Figures 8 i 9 el comportament del sistema reduït és molt semblant al comportament del sistema d'ordre complet, especialment a les gràfiques de la resposta dels sistemes en front d'entrada graó, on en la majoria dels casos s'observa un comportament pràcticament calcat. A més aquestes gràfiques s'assemblen en gran mesura a les mateixes gràfiques comparatives fetes per la reducció a ordre sis.

### 3.2.3. Realimentació d'estat i observador

En el cas que totes les variables d'estat es puguin medir es pot fer una realimentació d'estat sense utilitzar un observador. En el nostre cas no és possible ja que no totes les variables d'estat són mesurables, i per tant caldrà utilitzar un observador d'estat que les estimi. Un observador d'estat estima les variables d'estat a partir de les variables de sortida i de control. L'observador d'estat es pot utilitzar per tal de generar el vector de control, i és el que es farà en aquest apartat.

Si es desitja observar l'estat d'un sistema lineal del tipus:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = C \cdot x$$

*Equació 16 Definició en espai d'estats d'un sistema lineal*

i es coneixen les matrius A,B,C es proposa la següent estructura per l'observador:

$$\dot{\hat{x}} = A_0 \cdot \hat{x} + L \cdot y + B \cdot u$$

*Equació 17 Estructura proposada per dissenyar l'observador d'estat*

on les matrius  $A_0$  i  $L$  són matrius que han de ser dissenyades per forçar la convergència dels estats de l'observador amb els del sistema. Per tal d'assegurar-ho s'ha de complir que:

$$A_0 = A - L \cdot C$$

*Equació 18 Condició que cal complir per assegurar la convergència*

Per dissenyar L cal que assigni els pols dins de la circumferència unitat per tal de complir que el sistema sigui estable i que tinguin mòdul inferior als pols del sistema per tal que siguin més ràpids.

D'aquesta manera es pot utilitzar la llei de control:

$$u = -K \cdot \hat{x}$$

### Equació 19 Llei de Control proposada

i cal dissenyar K per tal de fixar els pols del sistema dins el cercle unitat per tal de garantir l'estabilitat del sistema i amb mòdul més gran dels que s'han fixat per la matriu L per tal que els pols siguin més lents.

El diagrama del sistema realimentat per tant és com el següent:

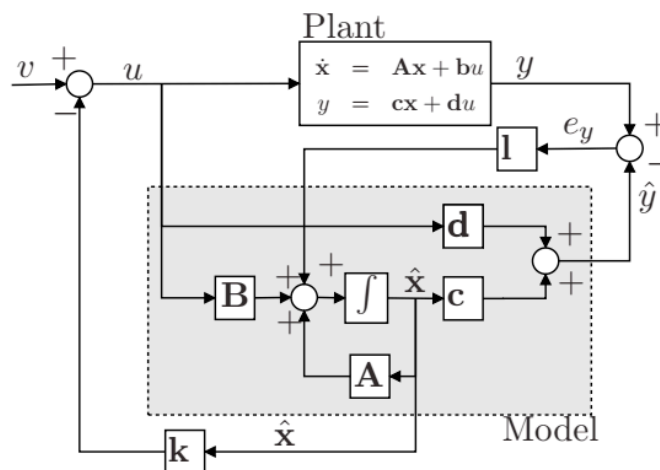


Figura 10 Diagrama de blocs del sistema realimentat amb un observador d'estat

En el cas d'aquest projecte en comptes de tenir una planta definida en espai d'estats on es coneixen totes les matrius i es multipliquen directament amb els vectors d'estat i els de control, fet que passaria en un sistema lineal, tenim un sistema no lineal. Aquest sistema no lineal s'ha linealitzat al voltant d'un punt d'equilibri i s'ha controlat assumint que era un sistema lineal. Aquesta assumció fa que el control del sistema només sigui efectiu en punt propers al punt d'equilibri, si el sistema s'allunya d'aquest l'aproximació feta a la linealització deixa de ser bona i el sistema deixa d'estar controlat.

### 3.2.3.1. Ordre 6

Seguint el procediment indicat anteriorment, i utilitzant la reducció d'ordre a un sistema d'ordre sis especificat també anteriorment s'arriba a les següents matrius necessàries per tal de realimentar el sistema de forma adequada:

$$L = \begin{pmatrix} -18,1962 & 4,2441 & -0,6454 & -1,6166 \\ -1,7145 & 0,5814 & 0,0378 & 0,0171 \\ -2,3467 & -13,7266 & 0,292 & 0,2667 \\ 0,6923 & 1,0767 & -0,5136 & -0,9614 \\ -12,4638 & 83,3839 & -1,8065 & -3,9198 \\ -13,1122 & 90,246 & -2,0045 & -4,315 \end{pmatrix}$$

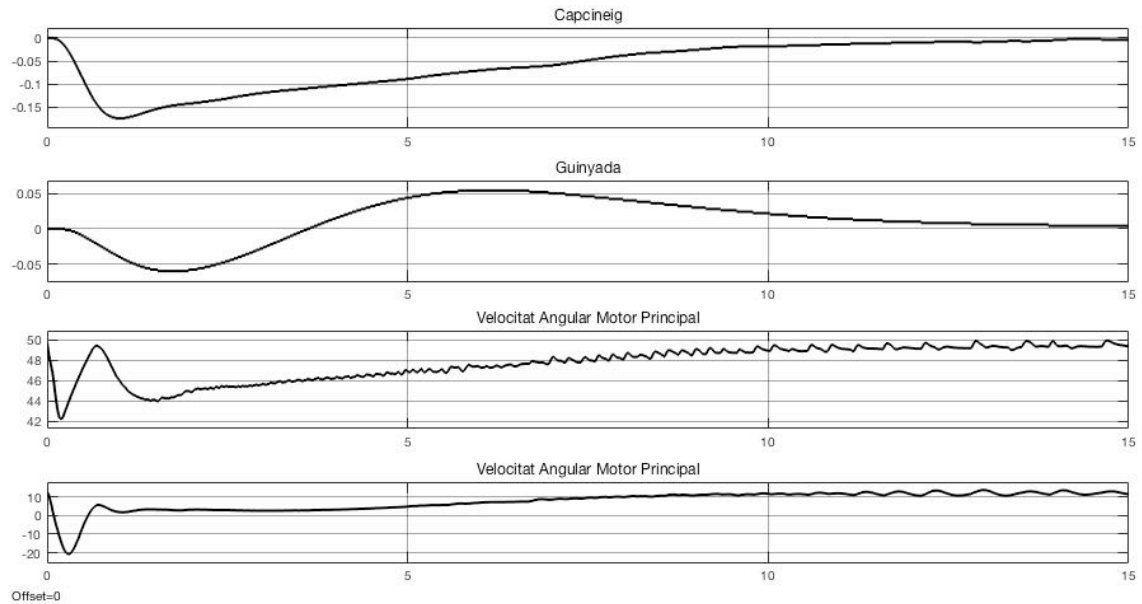
$$K = \begin{pmatrix} -10,8828 & 3,0841 & -3,4155 & 1,0815 & 3,3338 & 0,8788 \\ -4,0995 & 2,9978 & -2,3191 & 0,3183 & 3,2208 & 1,5469 \end{pmatrix}$$

*Equació 20 Matrius de guany de la realimentació d'estat i matriu L*

A partir d'aquestes matrius, i de les especificades anteriorment es pot muntar el diagrama de la Figura 10 i a partir d'aquest s'han fet les simulacions següents, per tal d'observar el comportament del sistema amb el sistema de control dissenyat.

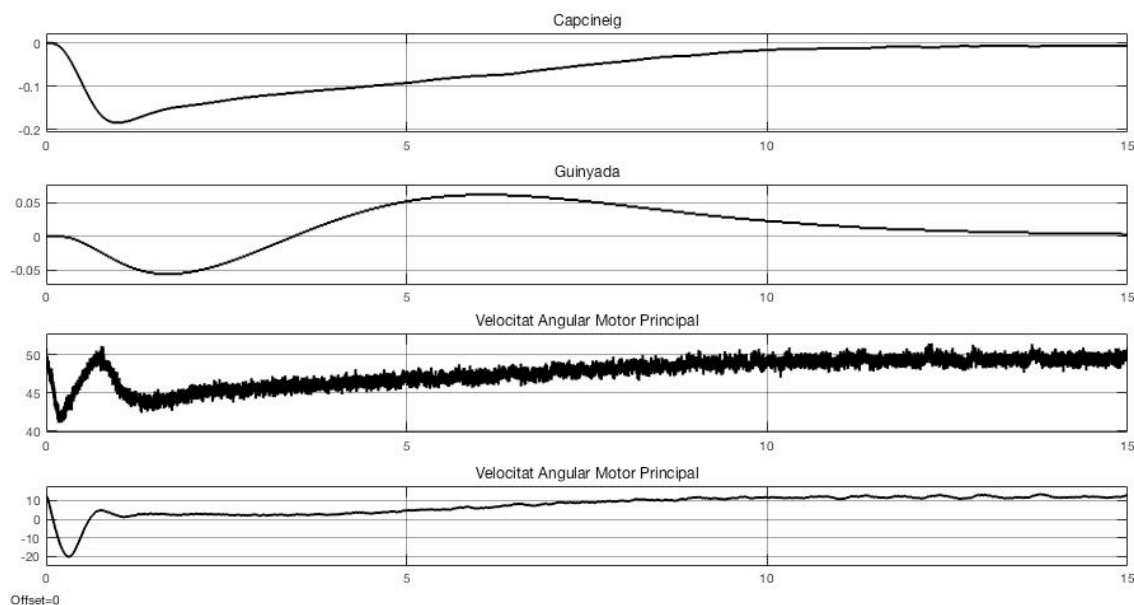


### 3.2.3.1.1 Simulacions



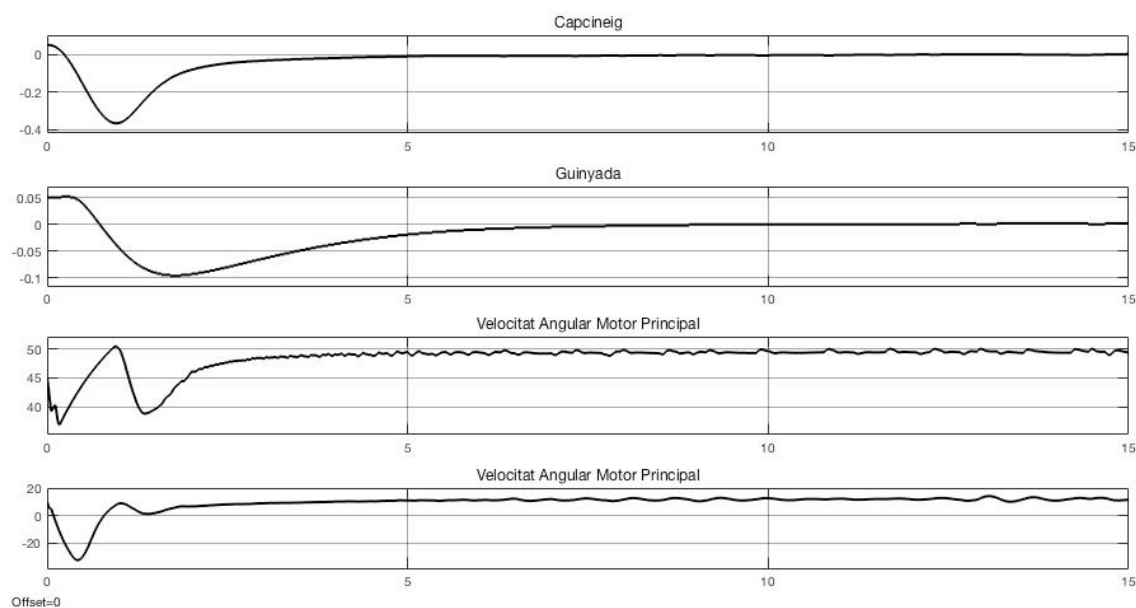
**Figura 11 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial és la del punt d'equilibri i el soroll està desactivat.**

Tal i com es pot observar a la Figura 11, i tal i com passava amb el sistema en llaç obert, si la configuració inicial del sistema és la del punt d'equilibri, el sistema hi acaba retornant de manera estacionària. Si es segueix comparant el comportament del sistema amb el que s'observava en llaç obert es pot veure que la dinàmica és clarament millor ja que els pics d'oscil·lació són notablement inferiors i el sistema és considerablement més ràpid, aconseguint uns temps d'establiment d'uns 15 si s'observa la gràfica. Es pot observar que la dinàmica dels rotors segueix sent més ràpida que la dinàmica de les posicions angulars, tal i com era d'esperar.



*Figura 12 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial és la del punt d'equilibri i el soroll està activat.*

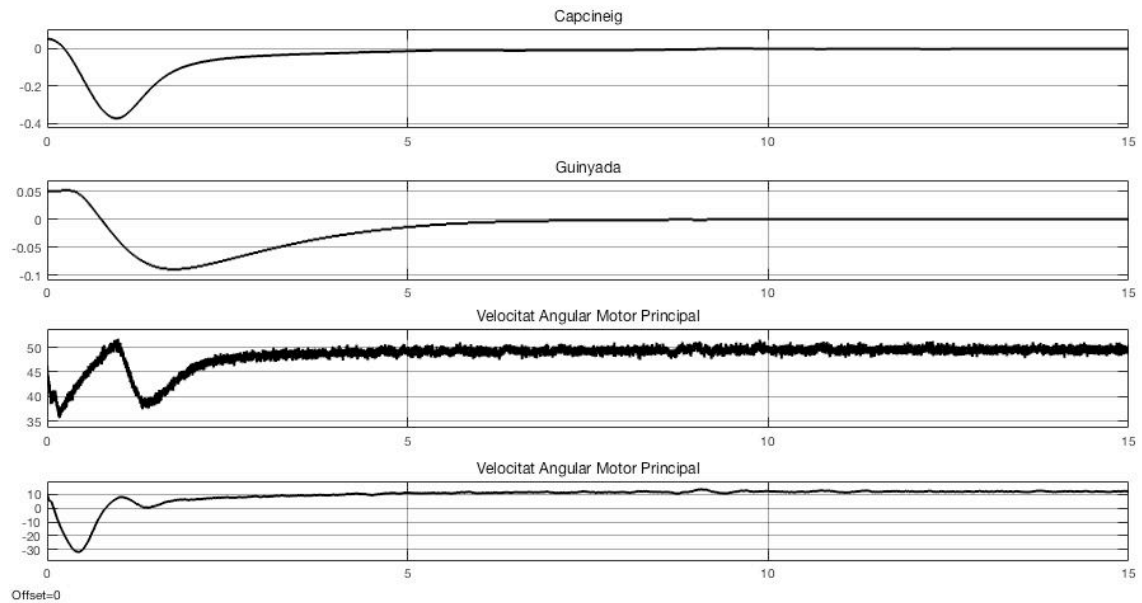
Activar el soroll no modifica sensiblement els resultats de la simulació ja que la dinàmica del sistema és molt similar, tal i com es pot observar a la Figura 12



*Figura 13 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial és de l'entorn del punt d'equilibri i el soroll està desactivat*

A la simulació de la Figura 13 la posició inicial del sistema ha estat de 0,05 rad i 0,05 rad pels angles de capcineig i guinyada respectivament amb unes velocitats angulars dels rotors

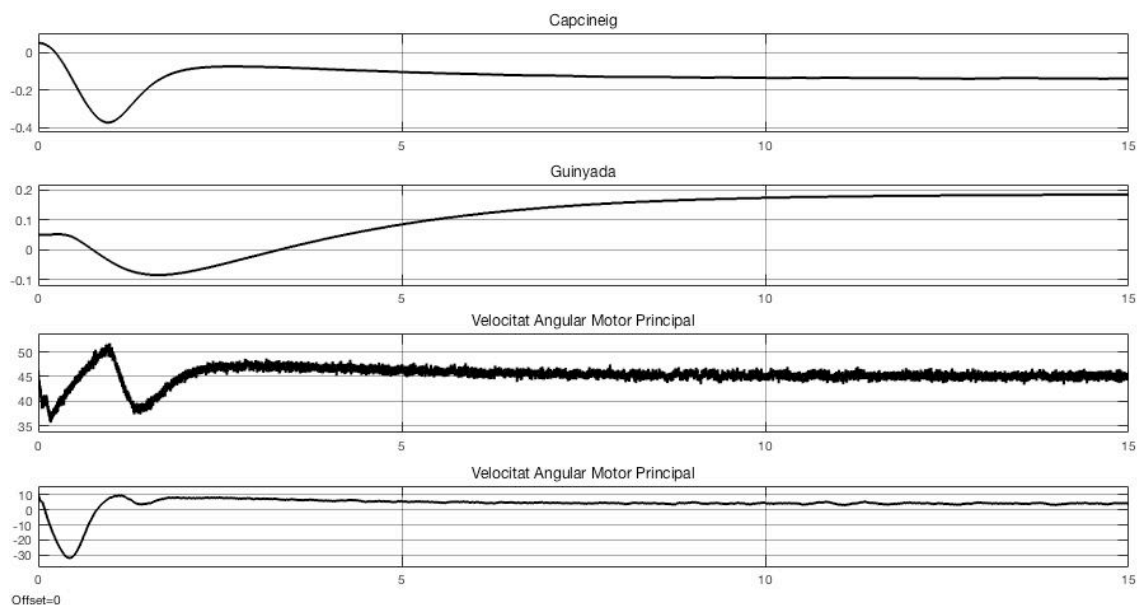
principal i de cua de 45 rad/s i 10 rad/s respectivament. Aquesta simulació demostra que si la configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri desitjat aquest és capaç d'anar-hi després d'un transitori. Podem observar que aquest transitori és notablement més ràpid que l'anàleg del sistema en llaç obert i a més els pics d'oscil·lació tenen una amplitud considerablement inferior.



*Figura 14 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial és de l'entorn del punt d'equilibri i el soroll està activat*

A la Figura 14 podem observar que si s'activa el soroll a la simulació el comportament del sistema no varia de manera considerable.

Veient les simulacions efectuades, i comparant-les amb les del sistema en llaç obert es pot observar que el sistema en llaç tancat ofereix un comportament millor, ja que la seva dinàmica és més ràpida i les amplituds d'oscil·lació són considerablement inferiors.



*Figura 15. Sistema en anell tancat pertorbat. La configuració inicial és propera al punt d'equilibri i el soroll està activat.*

Tot i que el comportament del sistema en les condicions anteriors sigui l'esperat, tal i com es pot veure a la Figura 15 si el sistema és sotmès a pertorbacions en forma de graó les sortides del sistema no acaben tendint al punt d'equilibri desitjat. Convindria per tant que el sistema tingués error en estat estacionari nul davant entrades graó, d'aquesta manera, encara que el sistema sigui pertorbat el valor final acabarà sent el punt d'equilibri desitjat.

### 3.2.3.2. Ordre 4

La metodologia emprada per trobar les matrius necessàries per la realimentació d'estat i l'observador d'estat pot ser usada indistintament pel sistema reduït d'ordre sis com pel d'ordre quatre, l'únic que canvia és la dimensió de les matrius emprades pels càlculs i per tant també les dimensions de les matrius resultants, així com els valors de totes aquestes matrius. Per tant, seguint la metodologia explicada anteriorment però emprant les matrius característiques del sistema reduït de quart ordre s'arriba a les següents matrius:

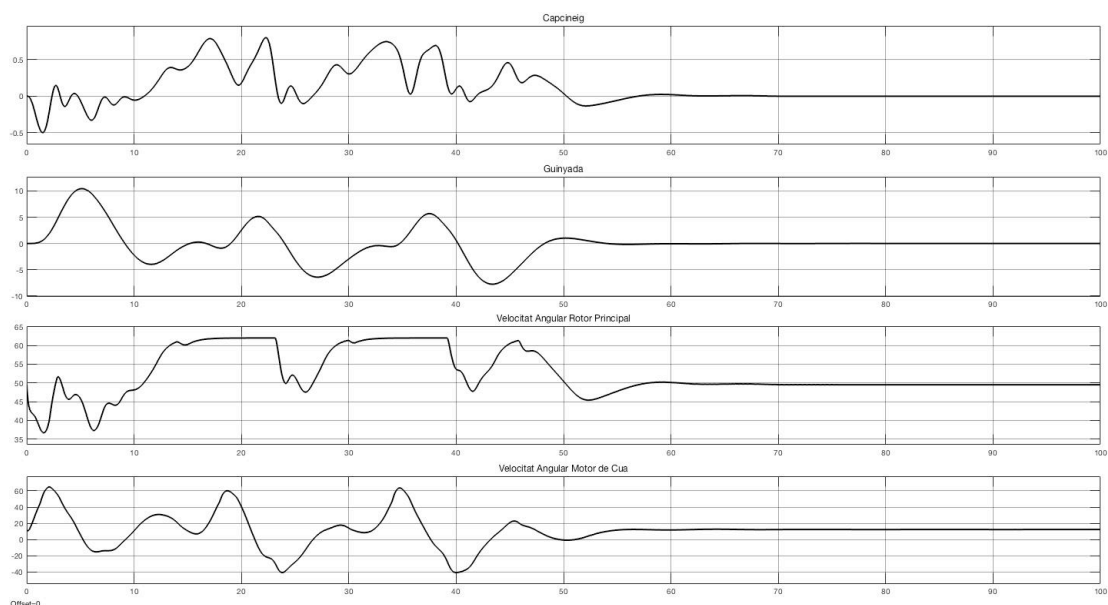
$$L = \begin{pmatrix} 6,998 & -31,4532 & -11,87 & 5,6794 \\ -10,755 & 7,8232 & 3,0737 & -1,406 \\ 0,1135 & -0,1462 & -0,0875 & 0,0456 \\ -0,035 & 0,0149 & 0,0249 & 0,0531 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0,0607 & 0,3279 & -0,0029 & 0,002 \\ -0,0064 & -0,0122 & 0,0132 & 0,0413 \end{pmatrix}$$

*Equació 21 Matrius L i de guany de la realimentació d'estat*

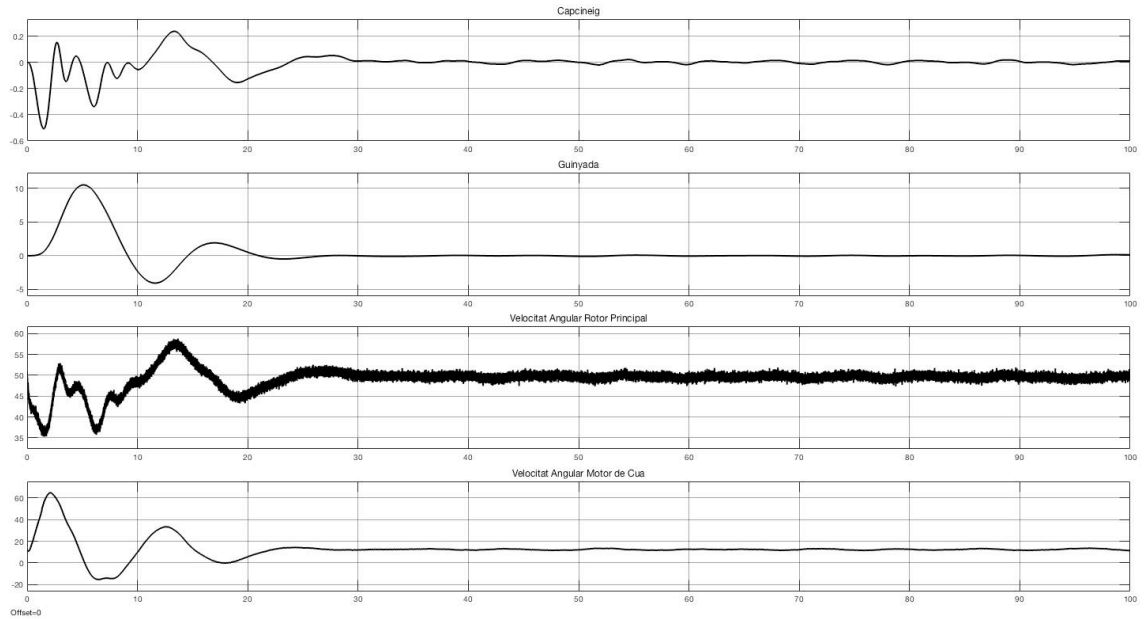
A partir d'aquestes matrius, i de les especificades anteriorment es pot muntar el diagrama de la Figura 10 i a partir d'aquest s'han fet les simulacions següents per tal d'observar el comportament del sistema amb el sistema de control dissenyat.

### 3.2.3.2.1 Simulacions



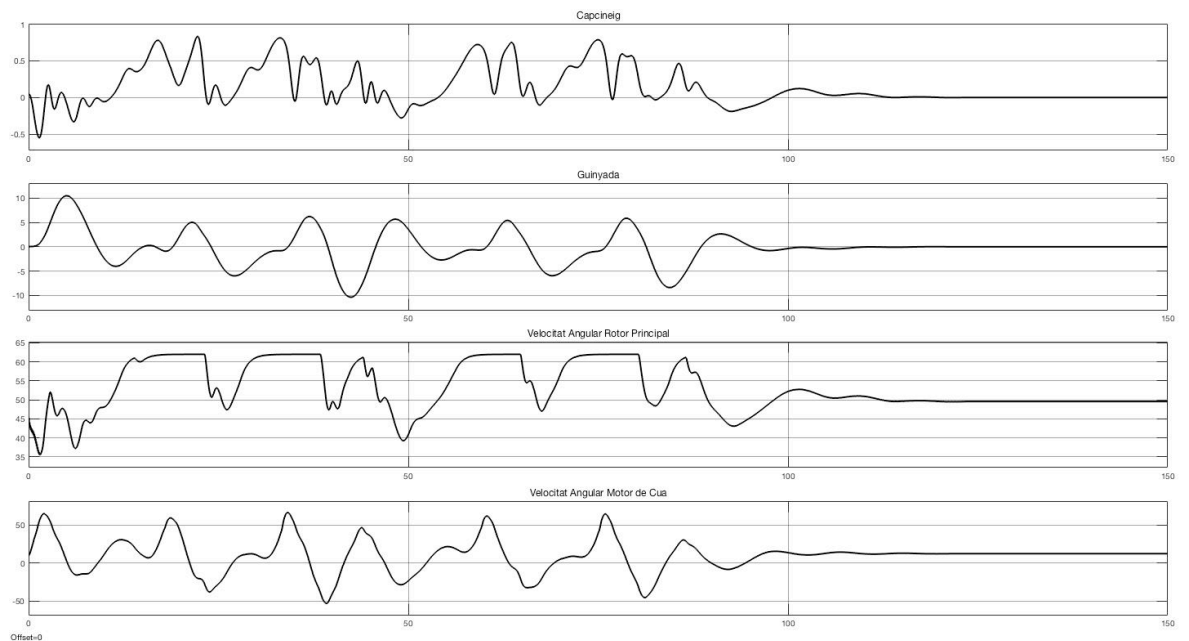
**Figura 16** Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és la del punt d'equilibri i el soroll està desactivat.

A la Figura 16 es pot observar que utilitzant el sistema reduït d'ordre 4, si la configuració inicial del sistema és la del punt d'equilibri, el sistema en simulació acaba retornant a la mateixa posició de manera estacionària. No obstant el transitori del sistema és altament poc favorable ja que hi ha marges de pic superiors als 10 radiants per l'angle de guinyada. Aquest transitori fa que la resposta temporal del sistema no sigui acceptable. Aquesta simulació ha estat efectuada amb l'opció del soroll desactivada, per tal que les interferències modelades com a soroll no afectin als resultats de la simulació.



**Figura 17** Simulació del sistema en anell tancat. La configuració del sistema és la del punt d'equilibri i el soroll està activat.

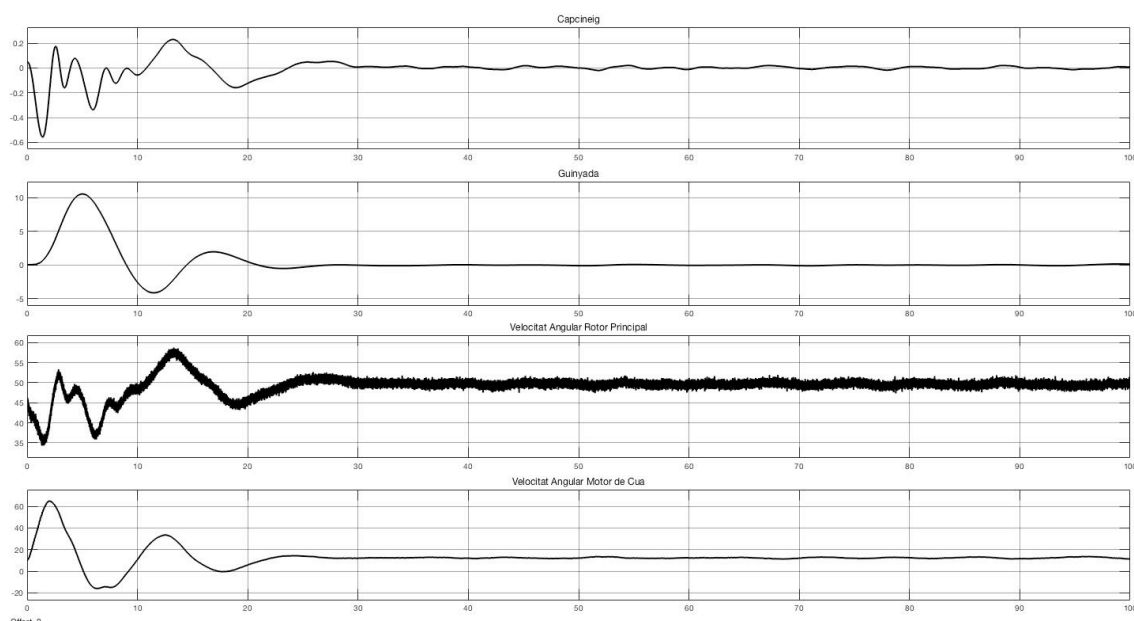
A la Figura 17 es pot observar que activar el soroll no altera el comportament del sistema ja que aquest acaba retornant de manera estacionària al punt d'equilibri, però ho fa amb un transitori gens favorable.



**Figura 18** Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està desactivat.

A la Figura 18 s'ha realitzat una simulació agafant com a configuració inicial una posició propera al punt d'equilibri. Concretament la posició propera ha estat la mateixa que la utilitzada en les simulacions de l'observador dissenyat amb el sistema reduït de sisè ordre, per tal de poder fer bé la comparació. Aquesta configuració és d'un angle de 0,05 rad pels angles de capcineig i guinyada respectivament i unes velocitats angulars de 45 i 10 rad/s pels rotors principal i de cua respectivament.

Tal i com podem observar a la Figura 18 el sistema segueix retornant al punt d'equilibri de manera estacionària però segueix tenint un estat transitori amb uns marges de pic que impossibiliten aquest tipus de control ja que s'arriba a tenir angles de 10 rad a l'angle de guinyada. Aquesta simulació s'ha realitzat amb l'opció del soroll desactivada però no es preveu que activant-la els resultats canviïn significativament.



*Figura 19 Simulació del sistema en anell tancat. Configuració inicial propera al punt d'equilibri i soroll activat.*

A la Figura 19 es pot observar que activar l'opció del soroll no altera els resultats vistos en les anteriors simulacions. El sistema segueix retornant a la posició d'equilibri després d'un transitori altament desfavorable amb uns pics amb amplituds desmesurades, superiors a una volta completa per l'angle de guinyada.

Observant els resultats de totes les simulacions, tant les de l'observador que utilitza el sistema reduït de sisè ordre com el que agafa el de quart, es pot determinar que en estat estacionari és indiferent quina de les dues reduccions d'ordre fer. No obstant, el transitori de



l'observador que utilitza el sistema reduït d'ordre sis és factible i millor que el transitori que es podia observar en el sistema en llaç obert, en canvi el transitori del sistema que utilitzava l'observador creat amb el sistema reduït de quart ordre fa que aquesta no sigui una opció vàlida. S'arriba a la conclusió per tant, que si es vol fer una realimentació d'estat usant un observador és millor utilitzar el sistema reduït de sisè ordre, ja que dóna una millor dinàmica.

### 3.2.4. Realimentació d'estat i observador resistent a pertorbacions

La majoria de sistemes dinàmics estan subjectes a entrades no conegudes o pertorbacions, sota aquestes condicions el més normal és que el sistema cometi un error en estat estacionari no desitjat en el moment de dissenyar el sistema de control, per tal d'evitar-ho cal incorporar el generador de la pertorbació dins el controlador o la planta. Es pot assumir que la pertorbació ha estat generada per un sistema dinàmic autònom, i per tant és possible construir un sistema que contingui alhora la planta del sistema que es desitja controlar i la pertorbació que ha estat modelada com un sistema dinàmic. El sistema format per la planta i la pertorbació es pot descriure de la següent manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^d \\ \dot{x}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d & 0 \\ b^p \cdot c^d & A^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^d \\ x^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b^p \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & c^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^d \\ x^p \end{bmatrix}$$

*Equació 22 Definició en espai d'estats del sistema amb la pertorbació modelitzada inclosa*

Els subíndexs p indiquen que són les matrius de la planta i els subíndexs d que són de la pertorbació. El mateix sistema es pot escriure de manera més compacta de la següent forma:

$$\dot{x}^t = A^t \cdot x^t + B^t \cdot u^t$$

$$y = C^t \cdot x^t$$

*Equació 23 Definició en espai d'estats del sistema amb la pertorbació modelitzada inclosa compactada*

Si es vol dissenyar el sistema de control per tal que el sistema sigui resistent a pertorbacions graó cal modelar la pertorbació de la següent manera:

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Equació 24 Matrius Característiques de la modelització de la pertorbació

#### 3.2.4.1. Ordre 6

Per dissenyar el sistema de control amb l'observador d'estat cal seguir la metodologia explicada anteriorment, d'aquesta manera les matrius del sistema, si s'utilitza de partida la reducció a ordre sis, queden de la següent manera:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0142 & 0,0003 & 0,9999 & -0,0023 & 0,0005 & -0,0002 & 0,0001 & 0 \\ 0,0083 & 0 & 0,0023 & 0,9999 & 0,0003 & -0,0001 & 0 & 0 \\ 0,0468 & -0,0246 & 0,0005 & -0,0007 & 0,9972 & -0,0005 & -0,0003 & -0,0002 \\ -0,02 & -0,0581 & 0,0002 & 0,0003 & -0,0005 & 0,9961 & -0,0001 & 0 \\ 0,0082 & -0,0039 & 0,0001 & -0,0001 & -0,0009 & -0,0001 & 0,9998 & 0,0004 \\ 0,0059 & -0,003 & 0,0001 & -0,0001 & -0,0007 & -0,0001 & -0,0005 & 0,9998 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0,0142 & 0,0003 \\ 0,0083 & 0 \\ 0,0468 & -0,0246 \\ -0,02 & -0,0581 \\ 0,0082 & -0,0039 \\ 0,0059 & -0,003 \end{pmatrix}$$

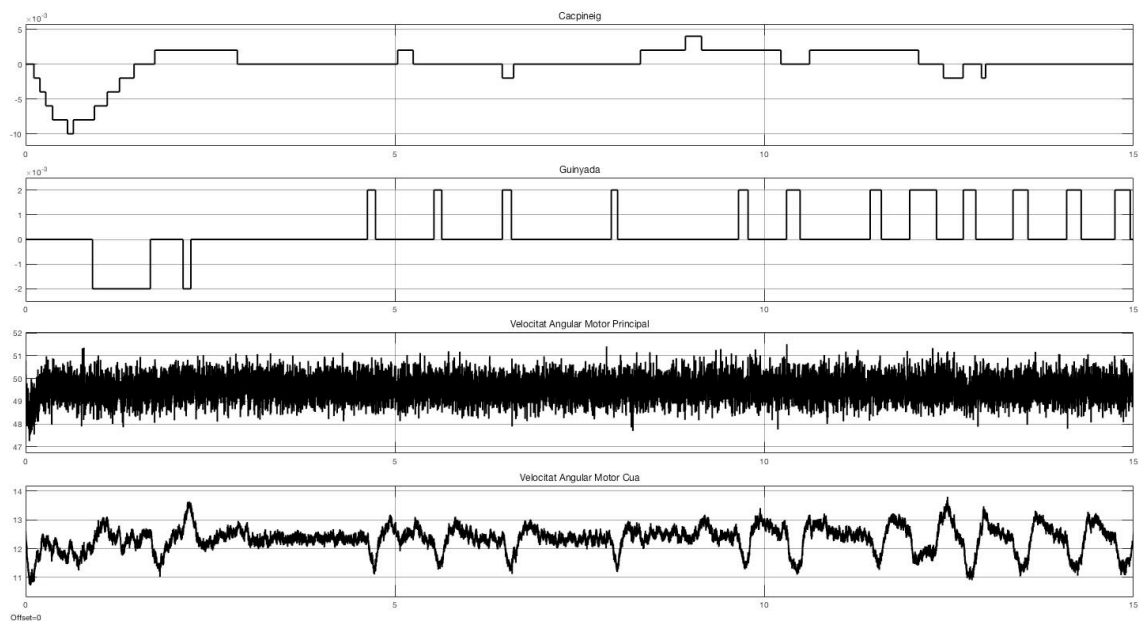
$$C^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,0019 & -0,0077 & 0,0006 & -0,0003 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0 & 0 & -0,0002 & -0,0005 & -0,0005 & 0 & 0,007 & -0,0058 \\ 0 & 0 & -0,0141 & 0,0032 & 0,0467 & -0,0203 & 0,0051 & 0,003 \\ 0 & 0 & 0,003 & 0 & -0,0248 & -0,058 & -0,0027 & -0,0014 \end{pmatrix}$$

$$L' = \begin{pmatrix} -1,9039 & 1,3919 & 2,9656 & -0,5346 \\ 0,8295 & 0,4238 & -0,6440 & 2,6193 \\ -253,7636 & -113,7276 & 1,5509 & -1,9203 \\ 40,6851 & 26,4926 & -0,006 & 0,3855 \\ -125,775 & -92,7255 & 4,3486 & -2,5467 \\ 28,4766 & 12,9812 & -1,2207 & -2,5846 \\ 306,7557 & 345,2379 & -2,4118 & 2,6337 \\ 381,2732 & 403,1415 & -3,3037 & 3,3625 \end{pmatrix}$$

$$K' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,4082 & 0,6780 & -0,1256 & 0,0382 & 0,0878 & 0,0204 \\ 0 & 1 & 0,3352 & 1,1371 & -0,3339 & 0,0031 & 0,8353 & 0,4198 \end{pmatrix}$$

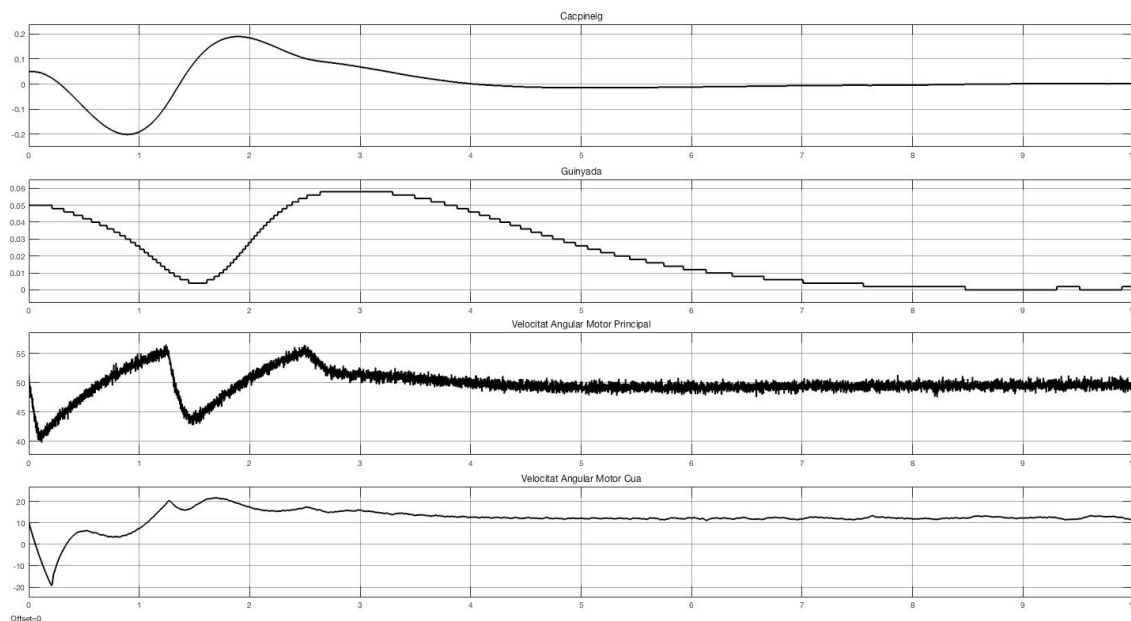
*Equació 25 Matrius Característiques de l'estructura de control resistent a perturbacions graó que s'ha dissenyat usant la reducció a ordre 6*

### 3.2.4.1.1 Simulacions



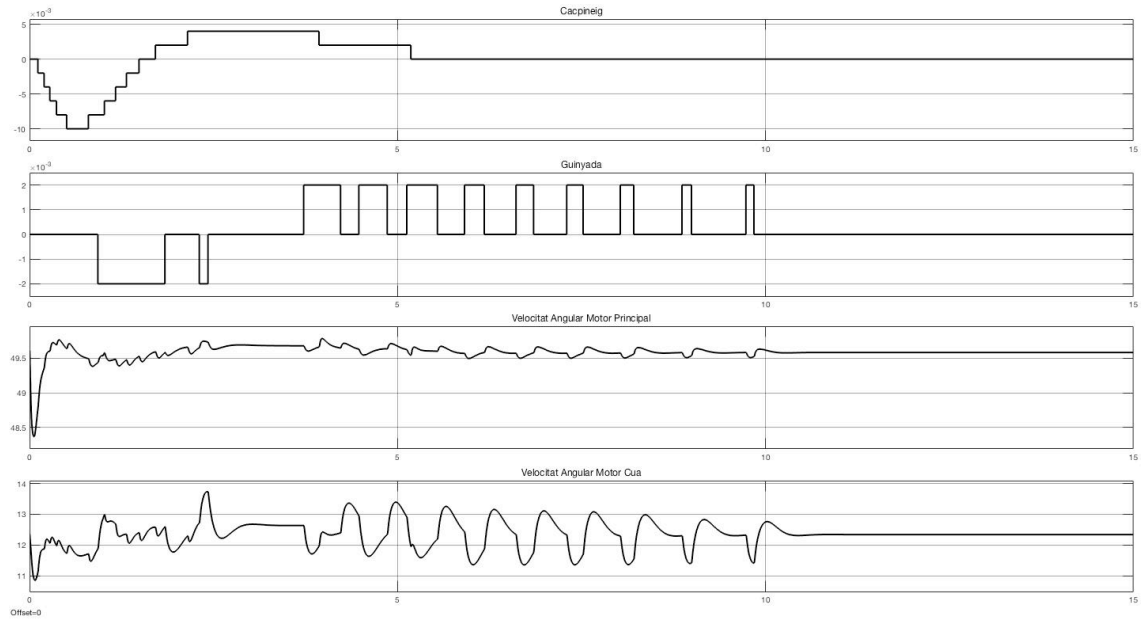
*Figura 20. Inicialment el sistema es troba al punt d'equilibri i no està pertorbat*

Tal i com es pot observar a la Figura 20, tot i haver canviat les matrius que es troben a la realimentació el sistema segueix retornat al punt d'equilibri si inicialment s'hi troba. S'observa que el transitori és molt més curt que en les simulacions anteriors i a més les amplituds de les oscil·lacions són molt petites.



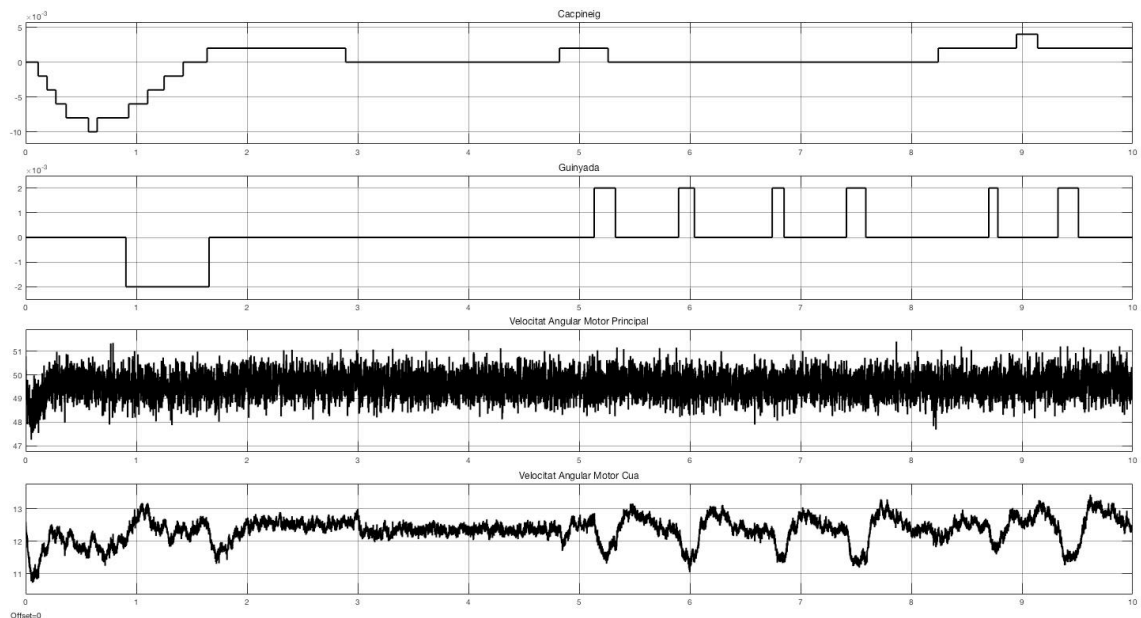
*Figura 21. Sistema no pertorbat inicialment a l'entorn del punt d'equilibri,*

A la simulació de la Figura 21 el sistema segueix sense estar pertorbat però les condicions inicials són de l'entorn del punt d'equilibri. En aquest cas el sistema inicialment tenia un angle de capcineig de 0,05 radians, un angle de guinyada també de 0,05 radians i les velocitats angulars dels rotors eren de 50 rad/s pel rotor principal i de 10 rad/s pel rotor de cua respectivament. Es pot observar que el sistema retorna al punt d'equilibri després d'un transitori. Aquest transitori és també relativament ràpid i les amplituds de les oscil·lacions són raonablement reduïdes.



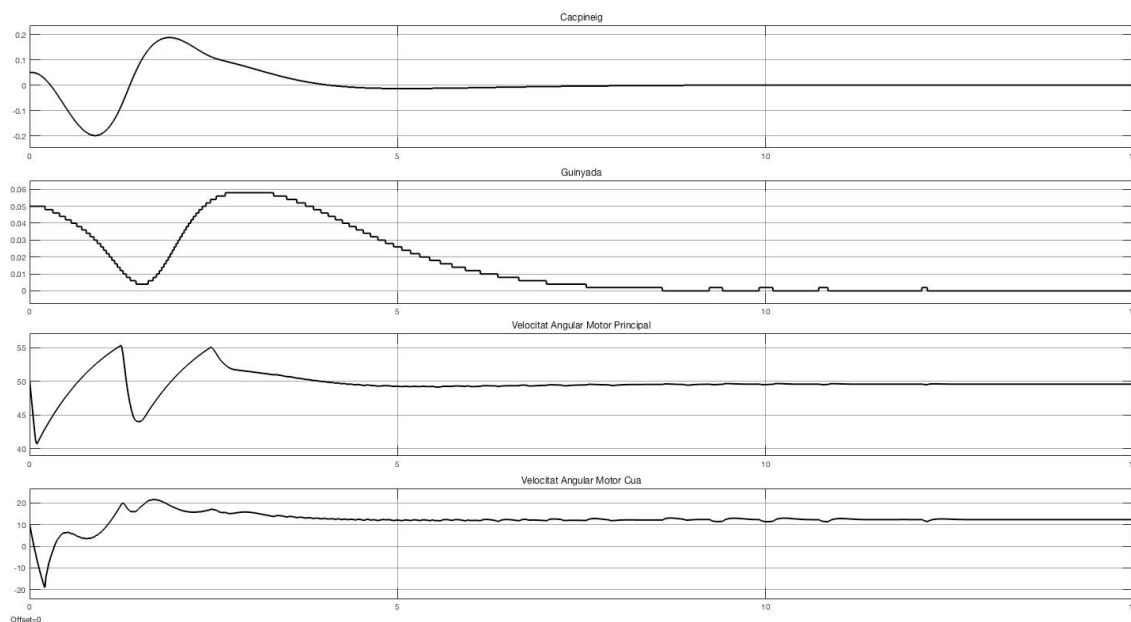
*Figura 22. Sistema pertorbat inicialment al punt d'equilibri. Soroll desactivat.*

Amb les noves matrius situades a la realimentació s'observa una millora en el transitori del sistema, tal i com ja s'ha vist en les simulacions anteriors i a més s'aconsegueix que el sistema cometi error nul si se'l pertorba amb un graó. Es pot observar a la Figura 22 que tot i que el sistema sigui pertorbat aquest acaba tendint cap al punt d'equilibri, en aquest cas l'origen després d'un transitori.



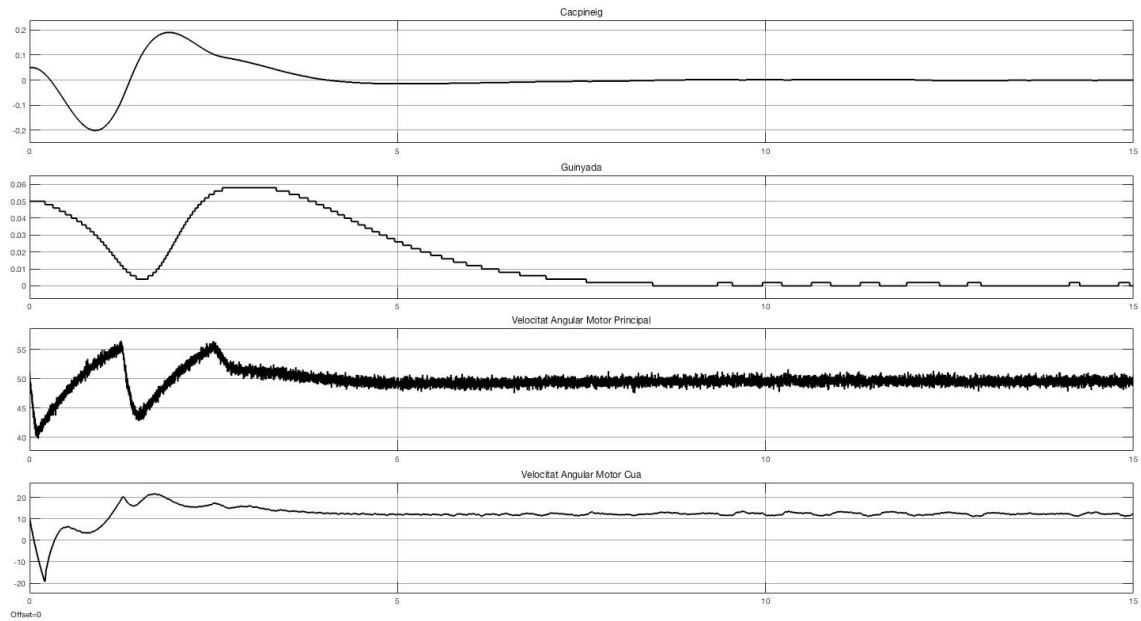
*Figura 23. Sistema pertorbat inicialment al punt d'equilibri amb el soroll activat.*

A la Figura 23 podem observar que amb les mateixes condicions que a la simulació de la Figura 22 el soroll no afecta significativament al comportament del sistema i aquest segueix complint amb les especificacions.



**Figura 24. Sistema pertorbat inicialment a l'entorn del punt d'equilibri i amb el soroll desactivat.**

A la simulació de la Figura 24 les condicions inicials eren les mateixes que a les de la Figura 23 amb la diferència que el sistema estava pertorbat. Es pot observar que la pertorbació no evita que el sistema compleixi amb les especificacions i aquest acaba retornant al punt d'equilibri i per tant comet error nul.



*Figura 25. Sistema pertorbat inicialment a l'entorn del punt d'equilibri amb el soroll activat.*

A la Figura 25 s'observa que el soroll no altera de manera significativa el comportament del sistema i que si inicialment es troba a l'entorn del punt d'equilibri, en les mateixes condicions que les de la Figura 24 el sistema acaba retornant al punt d'equilibri, l'origen, cometent error nul.

### 3.2.4.2. Ordre 4

A partir del sistema reduït d'ordre quatre també és possible dissenyar un sistema de control que sigui capaç de suportar pertorbacions de tipus graó cometent error nul. S'ha de seguir el mateix procediment que s'ha seguit pel sistema d'ordre sis, però emprant les matrius de quart ordre. D'aquesta manera les matrius resultants són les següents:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0137 & 0 & 0,9999 & -0,0023 & 0,0005 & -0,0002 \\ 0,0085 & -0,0001 & 0,0024 & 0,9999 & 0,0003 & -0,0001 \\ 0,0451 & -0,0237 & 0,0005 & -0,0007 & 0,9974 & -0,0004 \\ -0,0207 & -0,0577 & -0,0002 & 0,0003 & -0,0004 & 0,9961 \end{pmatrix}$$

$$B_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0,0137 & 0 \\ 0,0085 & -0,0001 \\ 0,0451 & -0,0237 \\ -0,0207 & -0,0577 \end{pmatrix}$$

$$C_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0,0019 & -0,0077 & 0,0005 & -0,0003 \\ 0 & 0 & 0,0029 & -0,0026 & -0,0196 & -0,0024 \\ 0 & 0 & -0,0132 & 0,0027 & 0,0416 & -0,0212 \\ 0 & 0 & -0,0001 & 0,0003 & -0,0221 & -0,0575 \end{pmatrix}$$

$$D_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_t = \begin{pmatrix} -2,0587 & 1,9403 & 3,9438 & -0,8872 \\ -2,4875 & 4,4484 & 0,9890 & 2,6573 \\ 14,8568 & -67,4246 & -25,8436 & 12,2427 \\ -1,2906 & -2,4226 & -0,2803 & 0,3711 \\ 1,8321 & -15,8995 & -2,3983 & 1,0953 \\ 0,7525 & 3,5345 & 0,2852 & -3,9298 \end{pmatrix}$$

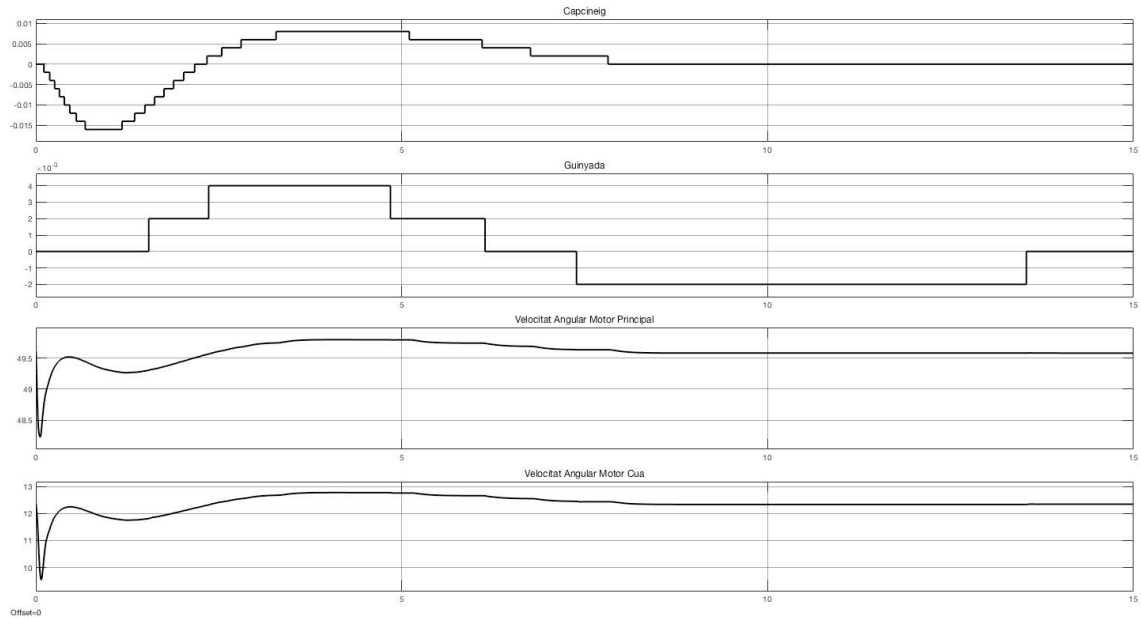
$$K_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,0028 & 0,4411 & -0,0107 & 0,0062 \\ 0 & 1 & 0,0285 & -0,0503 & 0,0232 & 0,0477 \end{pmatrix}$$

**Equació 26 Matrius Característiques de l'estructura de control resistent a pertorbacions graó que s'ha dissenyat usant la reducció a ordre 6.**

A partir de les següents matrius es pot realimentar el sistema per tal que sigui capaç de suportar pertorbacions tipus graó cometent error nul. Els resultats han estat validats en simulació i s'exposen a continuació.

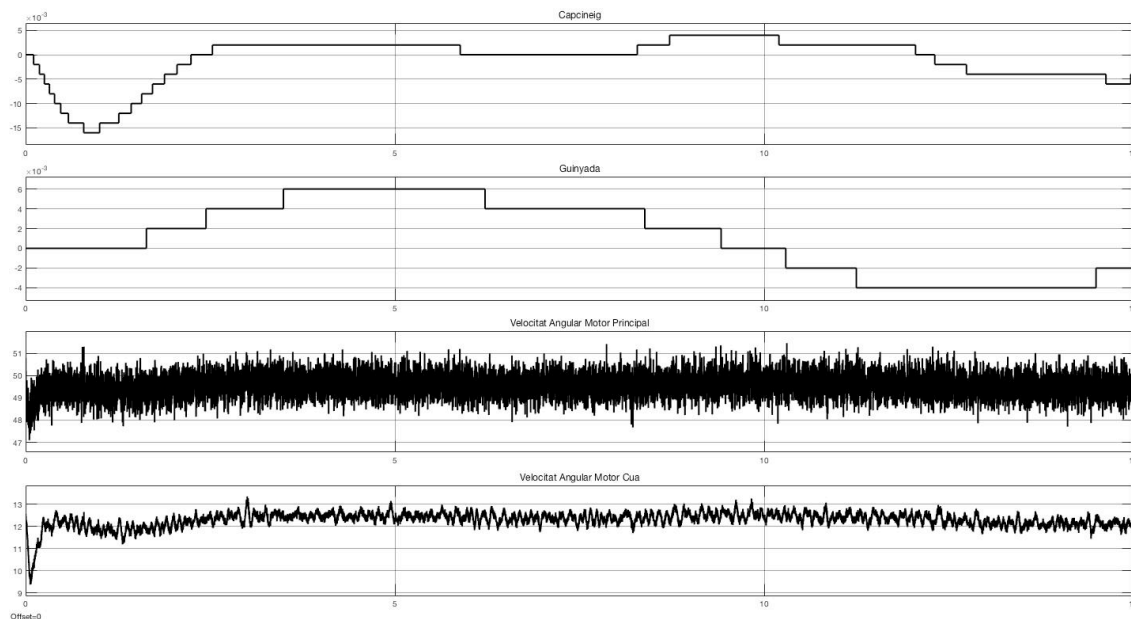


## 3.2.4.2.1 Simulacions



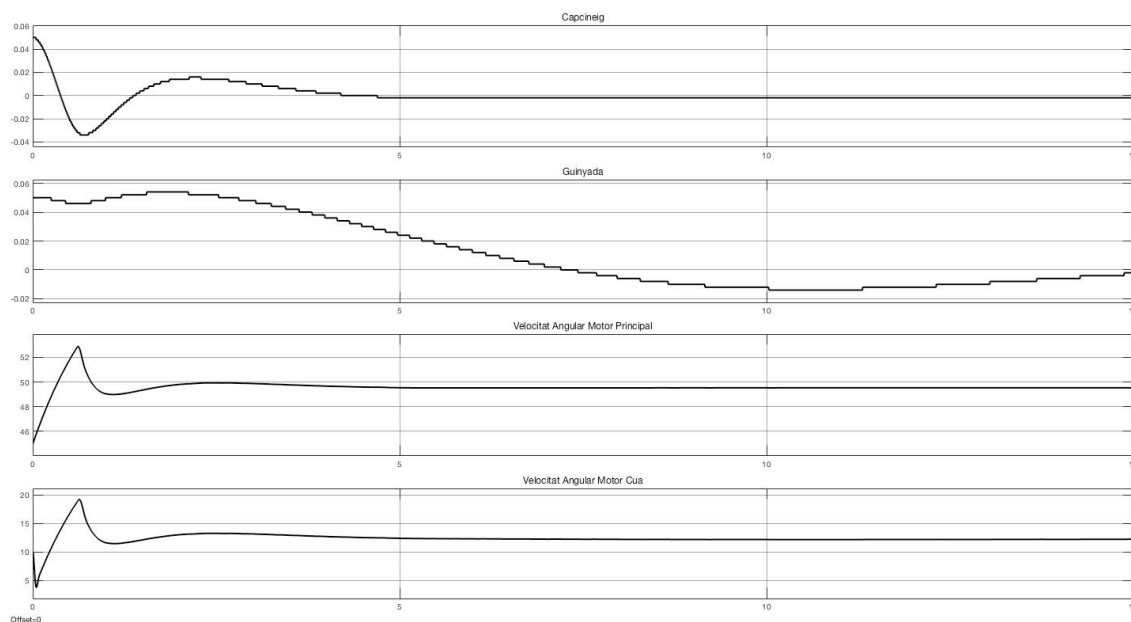
*Figura 26 Simulació del sistema en anell tancat. Inicialment el sistema es troba configurat en el punt d'equilibri i el soroll està desactivat. El sistema no està pertorbat.*

A la Figura 26 es pot observar la resposta temporal del sistema si inicialment es troba en la configuració del punt d'equilibri amb el soroll desactivat i sense estar pertorbat. Es pot observar que el sistema acaba retornant de forma estacionària al punt d'equilibri després de passar per un transitori, però que aquest transitori, a diferència del que no era resistent a perturbacions, si que és acceptable. Els pics d'aquest transitori són de dècimes de radià, perfectament assumibles.



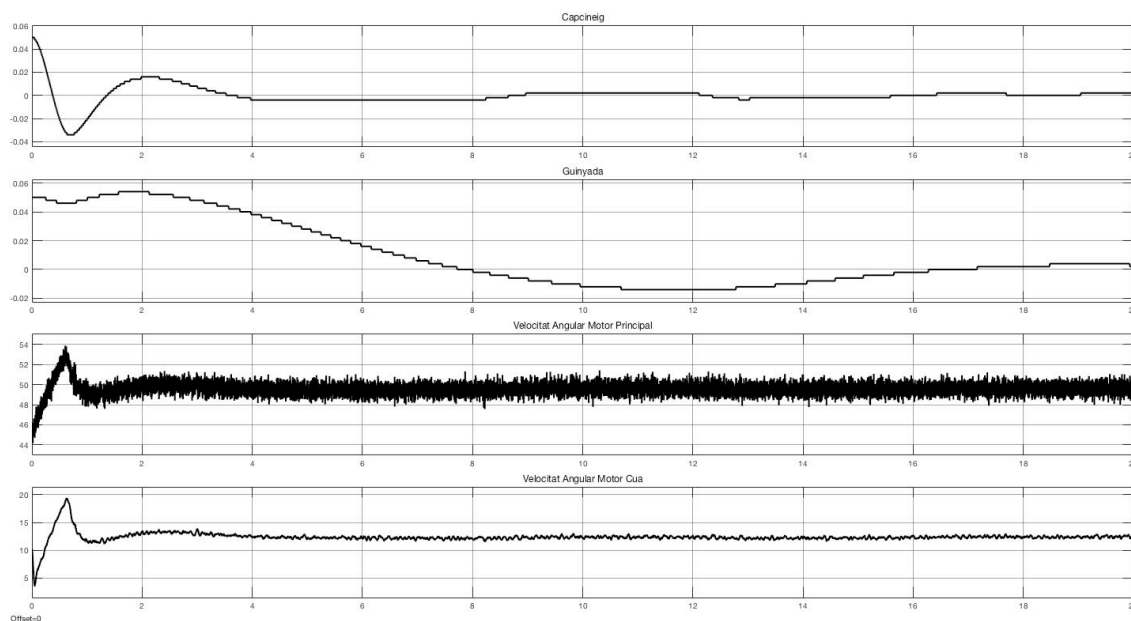
*Figura 27 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és la del punt d'equilibri i el soroll està activat. El sistema no està pertorbat.*

A la Figura 27 es pot observar que activar l'opció del soroll no altera els resultats de la simulació ja que l'estacionari dels angles de capcineig i guinyada segueix sent l'origen i el transitori s'hi assembla molt. El comportament amb el soroll activat, per tant segueix sent acceptable.



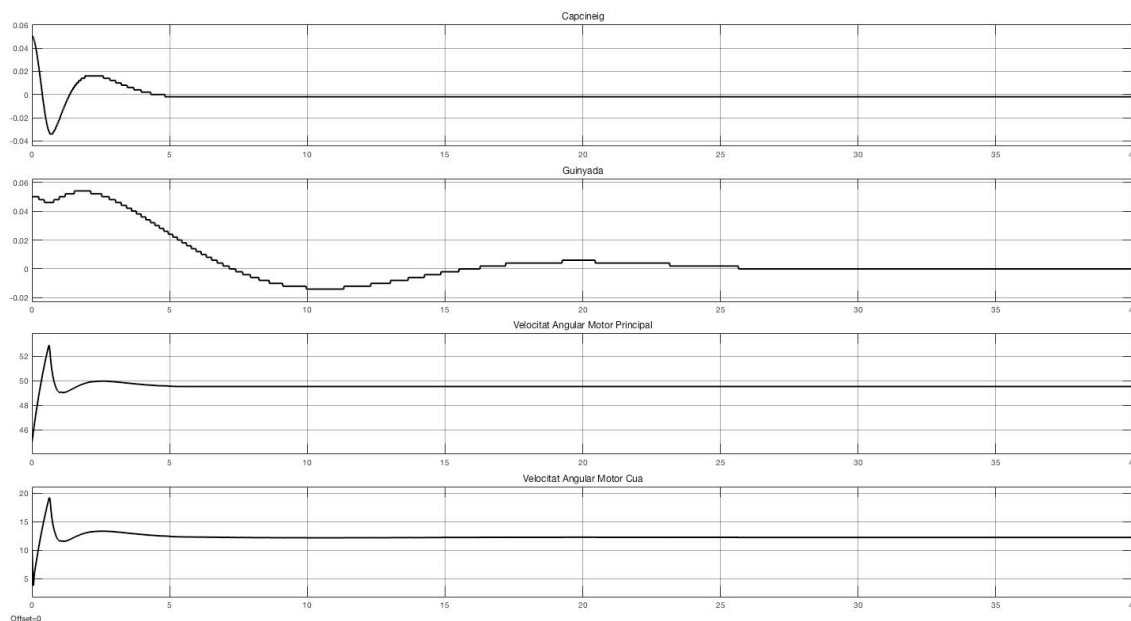
*Figura 28. Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està activat. El sistema no està pertorbat.*

A la Figura 28 es pot observar el comportament del sistema si la configuració inicial és propera a la del punt d'equilibri, tal i com es pot observar el valor final de les sortides acaba sent la del punt d'equilibri, i el transitori és raonablement ràpid i amb uns marges de pics de poca amplitud. El comportament del sistema és per tant molt favorable. En aquesta simulació l'opció del soroll estava desactivada per tal que les interferències del senyal no afectessin els resultats de la simulació.



**Figura 29** Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està activat. El sistema no està pertorbat.

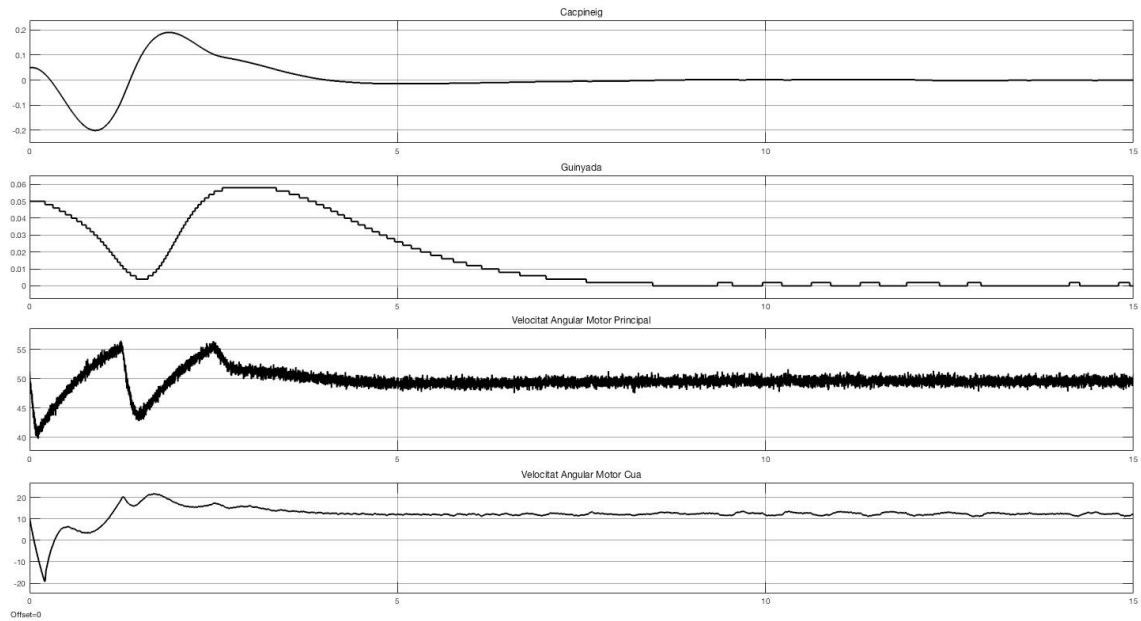
Tal i com es pot observar a la Figura 29 activar l'opció del soroll no afecta al valor final de cada una de les sortides i varia lleugerament els transitoris. La gràfica on es veu més clarament l'afectació del soroll és a la de la velocitat angular del rotor principal, on hi ha fortes fluctuacions, però aquestes pràcticament no afecten a la dinàmica dels angles de capcineig i guinyada. El comportament general del sistema per tant segueix sent molt favorable.



**Figura 30** Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està desactivat. El sistema està pertorbat.

A la Figura 30 es pot observar el comportament del sistema pertorbat. En aquesta simulació les condicions inicials són les d'un punt proper al punt d'equilibri, en aquest cas el sistema es trobava inicialment amb uns angles de 0,05 rad pel capcineig i la guinyada i unes velocitats angulars dels rotors de 45 rad/s en el cas del principal i de 10 rad/s en el cas del rotor de cua. Tots aquests valors estan raonablement propers als del punt d'equilibri.

Tal i com es pot observar el comportament del sistema és molt favorable ja que el sistema acaba retornant al punt d'equilibri després d'un transitori raonablement ràpid. Es pot observar també que el transitori no presenta pics d'oscil·lació exageradament alts, i que per tant és acceptable. Cal validar que el sistema segueix complint les especificacions amb l'opció del soroll activada.



*Figura 31 Simulació del sistema en anell tancat. La configuració inicial del sistema és propera a la del punt d'equilibri i el soroll està activat. El sistema està pertorbat.*

Tal i com es pot observar a la Figura 31 activar l'opció del soroll no altera el resultat de la simulació de forma significativa ja que el sistema segueix complint les especificacions. Les especificacions són que el sistema vagi al punt desitjat, en aquest cas el punt d'equilibri encara que estigui pertorbat. Tal i com podem observar el sistema ho fa a la perfecció ja que l'error que comet és nul. Podem observar també que tot i activar el soroll el transitori del sistema no es veu afectat de manera substancial.

### 3.2.5. Linealització al voltant de diversos punts

El sistema realimentat utilitzat fins ara té un comportament correcte i favorable, però té l'inconvenient que només funciona si la posició del sistema és la de l'entorn d'un punt d'equilibri, en aquest cas la posició de 0 radiants pels angles de capcineig i guinyada. Per tal d'aconseguir que el sistema no es limiti a funcionar al voltant d'un sol punt d'equilibri s'ha decidit calcular més conjunts de matrius que funcionin al voltant de diversos punts d'equilibri. El número de possibles punts d'equilibri i linealitzacions a realitzar podria ser infinit, en aquest projecte s'ha decidit fer 16 conjunts de matrius que permetin al sistema treballar al voltant de 16 punts d'equilibri, distribuïts al llarg de l'espai de la següent manera:

Número identificatiu	$q_v$	$q_h$
1	$-\pi/2$	$-\pi$
2	0	$-\pi$
3	$\pi/2$	$-\pi$
4	$\pi$	$-\pi$
5	$-\pi/2$	$-\pi/2$
6	0	$-\pi/2$
7	$\pi/2$	$-\pi/2$
8	$\pi$	$-\pi/2$
9	$-\pi/2$	0
10	0	0
11	$\pi/2$	0
12	$\pi$	0
13	$-\pi/2$	$\pi/2$
14	0	$\pi/2$
15	$\pi/2$	$\pi/2$
16	$\pi$	$\pi/2$

Taula 2 Punts al voltant dels quals s'ha linealitzat el sistema

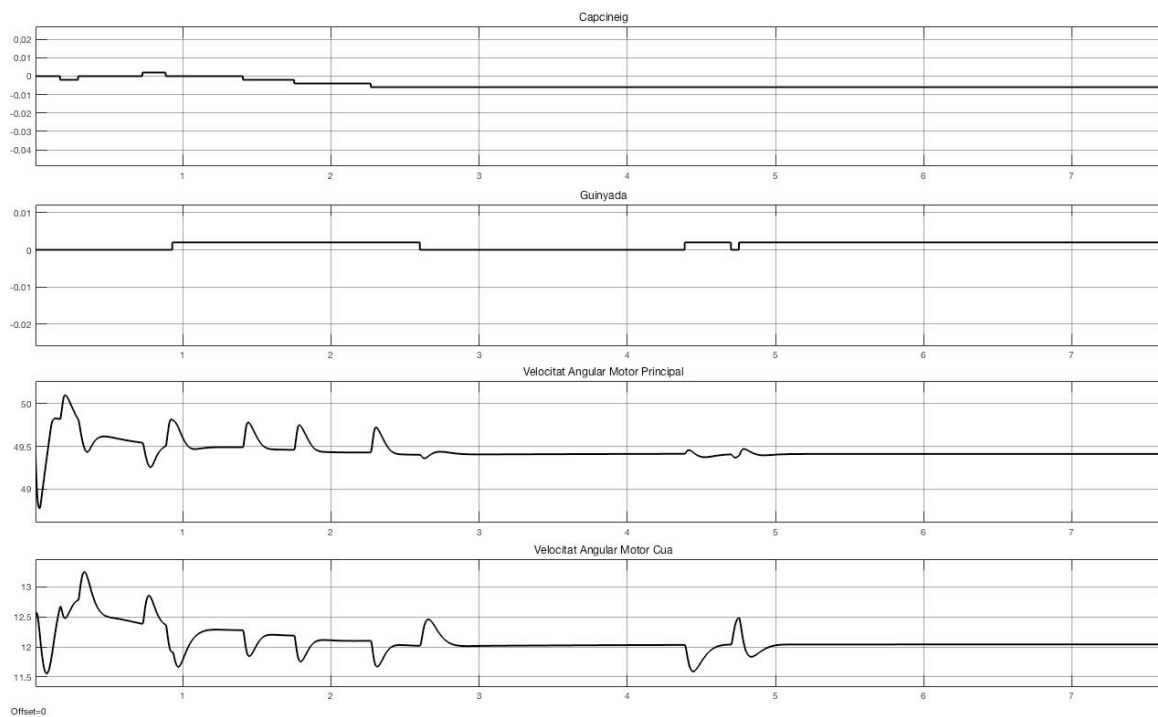
D'aquesta manera cadascun d'aquests punts d'equilibri té associat un conjunt de matrius que fan que el sistema es comporti adequadament al seu entorn. El sistema ha de ser capaç de triar en cada moment quin conjunt de matrius li és més favorable per tal que el comportament global sigui el millor possible.

El sistema també ha de ser capaç de calcular quines velocitats angulars dels rotors li són més favorables en cada posició, d'aquesta manera l'única que se li fa al sistema és la posició a la que es desitja que el sistema acabi tendint en estat estacionari, i no és necessari fer un càlcul previ de a quina velocitat angular han de girar els rotors.

Aquest càlcul de la velocitat angular òptima per cada posició s'ha fet assumint que la velocitat òptima per cada posició és la del punt d'equilibri que té aquesta posició per la que passa el sistema. D'aquesta manera el sistema rep com entrada la velocitat angular necessària per tal que la posició en la que es troba pugui esdevenir un punt d'equilibri.

El conjunt de matrius realitzades en aquest apartat és de 112, donat que si s'especificuessin totes en aquest document ocuparia una gran quantitat de pàgines i dificultaria una lectura àgil de la memòria s'ha decidit no incloure-les. Si el lector desitja saber quins són els valors de cada una de les matrius pot trobar-les al document *Matrius\_Tots\_Punts.m* que acompanya aquest projecte.

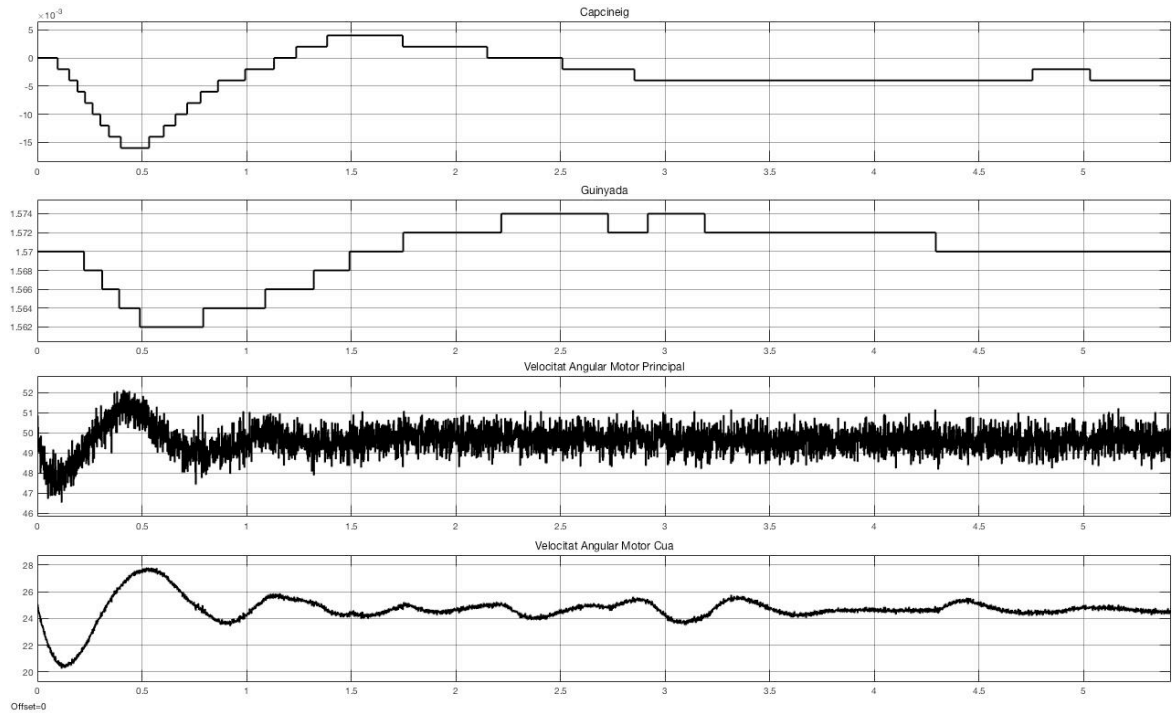
### 3.2.5.1. Simulacions



*Figura 32 Simulació del sistema en anell tancat. El sistema inicialment es troba en un punt d'equilibri i està pertorbat. El soroll està desactivat.*

Tal i com es pot observar a la Figura 21 si el sistema inicialment es troba configurat amb un angle de capcineig i guinyada de 0 radians respectivament aquest hi acaba retornant, igual que feia fins ara. En aquesta simulació s'ha decidit desactivar el soroll i el sistema estava pertorbat.





*Figura 33 Simulació del sistema en anell tancat. El sistema es troba inicialment en un punt d'equilibri i està pertorbat. El soroll està activat.*

A la simulació de la Figura 22 el sistema inicialment es trobava configurat amb un angle de 0 radians per l'angle de capcineig i un angle de  $\pi/2$  radians de guinyada. Es pot observar que tot i que el soroll estigui activat i que el sistema estigui pertorbat el sistema acaba retornant a la posició desitjada. S'ha aconseguit per tant l'objectiu de crear unes estructures de control que donin una solució més global i no es treballi únicament a l'entorn d'un sol punt d'equilibri. Tal i com ja s'ha dit l'estructura de control tria sola quin conjunt de matrius és més favorable per realimentar el sistema i que aquest compleixi amb les especificacions.

## Pressupost

En aquest projecte s'han considerat dos tipus de costos, per una banda els costos derivats de l'adquisició de llicències de programari informàtic i d'una altra banda el cost de tenir un estudiant d'enginyeria treballant en el projecte. Segons la UPC cada crèdit ECTS equival a 30 hores de feina en el cas del Treball Final de Grau, per tant s'ha utilitzat aquest criteri per quantificar les hores ficades en aquest projecte.

S'ha considerat que l'estudiant d'enginyeria té un sou de becari de 8 €/hora. A partir d'aquestes dades s'ha elaborat la taula següent:

Activitat	Descripció	Preu Unitari	Unitats	Preu Total
<b>Software</b>	Llicència de Matlab/Simulink	6000 €	1	6000 €
<b>Estudiant d'Enginyeria</b>	Hores dedicades d'un estudiant d'enginyeria	8 €/h	360	2880 €
<b>Total</b>				8880 €

El pressupost final d'aquest projecte és, per tant, de 8880 €.

## Conclusions i treball futur

Aquest projecte s'havia marcat com a objectius dissenyar estructures de control que fossin capaces d'aplicar-se al sistema Twin Rotor MIMO System, un sistema no lineal i amb les seves variables característiques fortament acoblades. Tal i com s'ha explicat als objectius del projecte s'ha decidit seguir una metodologia gradual que permetés dissenyar estructures de control cada vegada més complexes aprofitant els coneixements i els càlculs efectuats amb anterioritat. Aquesta metodologia ha permès que el comportament del sistema tingui una evolució clarament favorable, ja que inicialment el sistema en anell obert tenia un comportament extremadament lent i obligava a resoldre les equacions diferencials per poder controlar-lo, i el resultat final ha estat una estructura de control que aconseguia temps d'establiment per sota dels cinc segons, i a més l'única entrada del sistema és la posició a la que es desitja arribar. Les primeres estructures de control només es fixaven en que el sistema assolís el valor final desitjat en un temps acceptable i amb uns pics d'oscil·lació dins uns rangs acceptables també, aquestes especificacions s'han complert, i a més s'han anat afegint noves especificacions, com per exemple que el sistema sigui resistent a pertorbacions, en les estructures de control més avançades. Tot i dissenyar controladors seguint tècniques pròpies de sistemes lineals, i aplicar-les a un sistema no lineal, el sistema s'ha comportat en tot moment de la manera prevista per teoria.

És per tota aquesta evolució i pel favorable comportament del sistema al llarg de totes les simulacions i al llarg de tot el projecte que es considera que s'han assolit els objectius marcats a l'inici del projecte.

Evidentment aquest és un projecte que es podria seguir fins on es vulgui, és per això que és interessant marcar cap on es podria seguir el treball efectuat en aquest projecte. Una vegada explorades les diferents opcions a seguir utilitzant controladors dissenyats segons un sistema linealitzat, seria interessant dissenyar una estructura de control que treballi d'una manera diferent. Una opció podria ser dissenyar un sistema de control adaptatiu, que permetés el seguiment de trajectòries.

## Bibliografia

- [1] OGATA, KASTUHIKO ; *Ingenieria de Control Moderna*. 5a Edició. Madrid 2010
- [2] PHILLIPS, CHARLES L., HARBOR, ROYCE D. *Feedback Control Systems*. 3rd edition. New Jersey 1996.
- [3] OBINATA, GORO; ANDERSON, BRIAN D.O.: *Model Reduction for Control System Design*: Regne Unit, 2001
- [4] COSTA CASTELLÓ, RAMON. Apunts de Control de Processos. Barcelona 2017
- [5] MASCARÓ, RUBEN. *Modelat i Control d'un Sistema Twin Rotor* Barcelona 2015