REGOLA del TAGLIO (CUT)

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\ A \qquad A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1\ \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1\ \Delta_2}\ \text{TAGLIO}$$

Teorema (G. Gentzen 193)
Sia dato un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow A$ in cui si fa uso anche della regola del TAGLIO. Allora esiste un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow A$ in cui NON si fa uso della regola del TAGLIO

Conseguenze Nella dimostrazione del teorema di validità del calcolo di deduzione naturale possiamo fare uso della regola del taglio. Infatti ogni albero di sequenti in cui occorre tale regola può essere trasformato in un albero dello stesso sequente finale (alla radice) in cui NON occorre la regola del taglio.

Def. Con $\Gamma \vdash A$ indichiamo che esiste una derivazione di A da assunzioni dell'insieme Γ.
(Non è detto che la derivazione utilizzi <u>tutte</u> le formule di Γ)

<u>Teorema</u> Se $\Gamma \vdash A$ allora esiste un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow A$.

<u>Dimostrazione</u> Sia $\Gamma \vdash A$. Dunque esiste una derivazione di A da Γ.
Si consideri una tale derivazione $\mathcal{D}$.
Per induzione sulla definizione di derivazione mostriamo che esiste un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow A$.

caso 1. $\mathcal{D}$ è una derivazione atomica

caso 2. $\mathcal{D}$ non è una derivazione atomica

caso 1 Se $\mathcal{D}$ è atomica vuol dire che

$\mathcal{D}$ consiste nel porre A come assunzione

$$\overset{A}{\bullet}$$

A dunque deve essere in Γ, per cui

abbiamo $\Gamma', A \vdash A$

ove $\Gamma = \Gamma' \cup \{A\}$.

$\Gamma', A \Rightarrow A$ è un albero di sequenti chiuso

in cui $\Gamma', A \Rightarrow A$ è foglia e radice

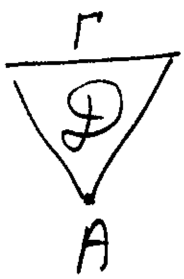
insieme dell'albero di sequenti.

Il caso 1 è dimostrato, se

$\Gamma', A \vdash A$ allora esiste un albero di

sequenti chiuso per $\Gamma', A \Rightarrow A$.

Caso 2. La derivazione $\mathcal{D}$ di A da Γ non è atomica.

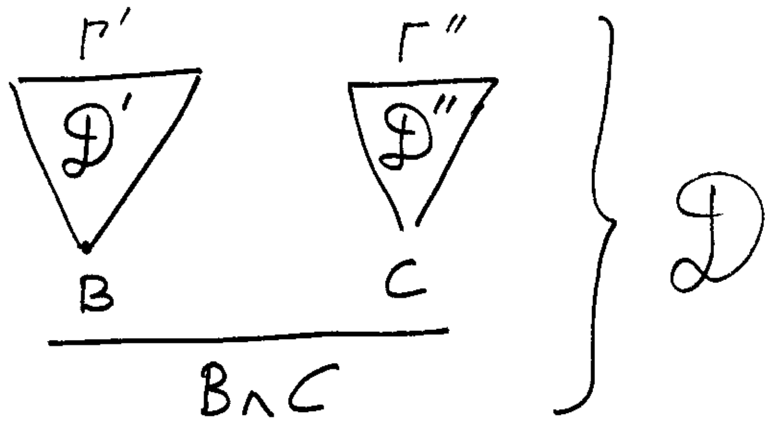


Si consideri l'ultima regola utilizzata in $\mathcal{D}$ per ottenere A.

Dobbiamo considerare le 18 regole del calcolo di deduzione naturale -

(1) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ sia $I_\wedge$, quindi

$A \equiv B \wedge C$



$\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$

Per ipotesi di induzione
esiste un albero di sequenti chiuso per
$\Gamma' \Rightarrow B$ e per $\Gamma'' \Rightarrow C$

quindi

$$\dfrac{\overset{ch}{\vdots}\atop{\Gamma' \Rightarrow B} \qquad \overset{ch}{\vdots}\atop{\Gamma'' \Rightarrow C}}{\Gamma', \Gamma'' \Rightarrow B \wedge C}\, R_\wedge$$

è un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow B \wedge C$

(2) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ sia $E^s_\wedge$, quindi

abbiamo

$$\left.\begin{array}{c} \Gamma \\ \mathcal{D}' \\ \dfrac{A \wedge B}{A}\, E^s_\wedge \end{array}\right\} \mathcal{D}$$

~~Esiste~~ Per ipotesi di induzione esiste
un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow A \wedge B$.
Costruiamo il seguente albero di sequenti:

$$\dfrac{\overset{ch}{\vdots}\atop{\Gamma \Rightarrow A \wedge B} \qquad \dfrac{A, B \Rightarrow A}{A \wedge B \Rightarrow A}\, L_\wedge}{\Gamma \Rightarrow A}\, \text{TAGLIO}$$

Il L'albero di sequenti qui presentato

è un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow A$

(3) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ sia $E^d_\wedge$.

La dimostrazione è analoga a quella per $E^s_\wedge$

(4) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ sia $I^s_\vee$.

Quindi abbiamo $A \equiv B \vee C$ e

$$\mathcal{D} \left\{ \begin{array}{c} \Gamma \\ \mathcal{D}' \\ \dfrac{C}{B \vee C}\, I^s_\vee \end{array} \right.$$

Per ipotesi di induzione esiste un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow C$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ch \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow C \end{array} \qquad C \Rightarrow B, C}{\Gamma \Rightarrow B, C}\,\text{TAGLIO}}{\Gamma \Rightarrow B \vee C}\, R_\vee$$

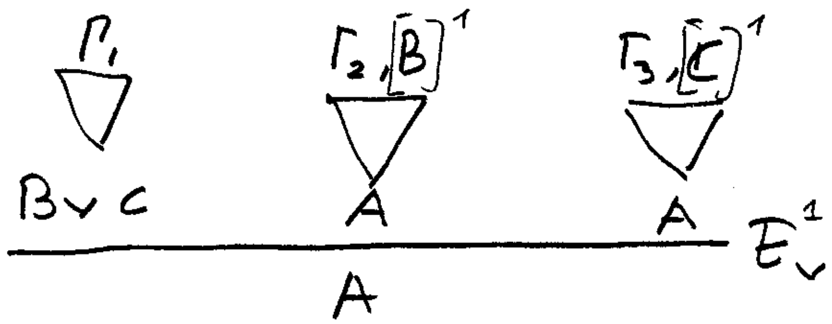
L'albero qui sopra presentato è un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow B \vee C$

(5) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ sia $I_\vee^d$

la dimostrazione è analoga a quella per $I_\vee^s$

(6) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ sia $E_\vee$.

Quindi abbiamo:



ove $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Per ipotesi di induzione esistono tre alberi di sequenti chiusi, per

$\Gamma_1 \Rightarrow B \vee C$, $\Gamma_2 B \Rightarrow A$ e $\Gamma_3, C \Rightarrow A$

Si consideri il seguente albero di sequenti

$$\dfrac{\overset{\nabla^{ch}}{\Gamma_1 \Rightarrow B \vee C} \qquad \dfrac{\overset{\nabla^{ch}}{B\ \Gamma_2 \Rightarrow A} \qquad \overset{\nabla^{ch}}{C, \Gamma_3 \Rightarrow A}}{B \vee C\ \ \Gamma_2\ \ \Gamma_3 \Rightarrow A}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow A}\ \text{TAGLIO}$$

Ma questo è un albero di sequenti chiuso per
$\Gamma \Rightarrow A$.

(7) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $I_{\to}$. Quindi

$A \equiv B \to C$ e $\Gamma = \Gamma' \cup \{B\}$

$$\mathcal{D}\left\{ \begin{array}{c} [B]^1 \\ \vdots \\ \dfrac{C}{B \to C}\, I^1_{\to} \end{array} \right.$$

Per ipotesi di induzione esiste un albero di sequenti chiuso per $\Gamma', B \Rightarrow C$. Allora

$$\dfrac{\Gamma'\ B \Rightarrow C}{\Gamma' \Rightarrow B \to C}\, R_{\to}$$

è un albero di sequenti chiuso per $\Gamma' \Rightarrow A$.

(8) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $E_\to$

Dunque abbiamo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \nabla\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \nabla\\ B\to A\end{array}}{A}\,E_\to \qquad \text{ove } \Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma$$

Per ipotesi di induzione esistono alberi di sequenti chiusi per $\Gamma_1 \Rightarrow B$ e $\Gamma_2 \Rightarrow B\to A$.

Si consideri allora il seguente albero

$$\dfrac{\begin{array}{c}ch\\ \nabla\\ \Gamma_1 \Rightarrow B\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}ch\\ \nabla\\ \Gamma_2\Rightarrow B\to A\end{array}\qquad \dfrac{B\Rightarrow B \qquad A\Rightarrow A}{(B\to A)\; B\Rightarrow A}\,L_\to}{\Gamma_2\;\; B\Rightarrow A}\,\text{TAGLIO}}{\Gamma_1\;\; \Gamma_2\Rightarrow A}\,\text{TAGLIO}$$

Questo è un albero chiuso per $\Gamma \Rightarrow A$

(9) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $I_\perp$

$$\frac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \neg A & A\end{matrix}}{\perp}\, I_\perp$$

Si procede come per $E_\rightarrow$ poiché

$$\neg A =_{df} A \rightarrow \perp$$

(10) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $E_\perp$.

Dunque abbiamo

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{c} \Gamma \\ \mathcal{D}' \\ \dfrac{\perp}{A}\, E_\perp \end{array}\right.$$

Per ipotesi di induzione esiste un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow \perp$. Si consideri l'albero chiuso:

$$\frac{\begin{matrix}\nabla^{ch} & \\ \Gamma \Rightarrow \perp & \perp \Rightarrow A\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow A}\,\text{TAGLIO}$$

(11) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ sia $I_\neg$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\, I_\neg$$

Si procede come per $I_\to$ poiché

$$\neg A =_{df} A \to \bot$$

(12) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ sia $E_\neg$

$$\mathcal{D}\left\{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^n\\ \vdots \\ \bot\end{array}}{A}\, E_\neg^n\right.$$

Per ipotesi di induzione esiste un albero di sequenti chiuso per $\neg A, \Gamma^* \Rightarrow \bot$. Allora

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\nabla \, ch\\ \Gamma^*, \neg A \Rightarrow \bot\end{array} \qquad \bot \Rightarrow}{\Gamma^*, \neg A \Rightarrow}}{\Gamma^* \Rightarrow A}\ \text{TAGLIO}$$

è un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow A$.

(13) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $I_\forall$. Dunque abbiamo $A \equiv \forall x B$

$$\dfrac{\begin{matrix} \Gamma \\ \vdots \\ B[a/x] \end{matrix}}{\forall x B}\, I_\forall$$

ove a non occorre in $\forall x B$ o in Γ.

Per ipotesi di induzione esiste un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow B[a/x]$. Allora l'albero:

$$\dfrac{\begin{matrix} \overline{}^{\,ch} \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow B[a/x] \end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \forall x B(x)}\, R_\forall$$

ove a non occorre in $\forall x B$ o in Γ.

è un albero chiuso per $\Gamma \Rightarrow \forall x B(x)$

(14) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $E_\forall$. Dunque abbiamo $A \equiv B[c/x]$ e

$$\mathcal{D} \left\{ \dfrac{\begin{matrix} \Gamma \\ \vdots \\ \forall x B(x) \end{matrix}}{B[c/x]}\, E_\forall \right.$$

Per ipotesi di induzione esiste un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow \forall x B(x)$.
Si consideri il seguente albero

$$\dfrac{\overset{ch}{\nabla} \atop \Gamma \Rightarrow \forall x B(x) \qquad \dfrac{B[c/x] \Rightarrow B[c/x]}{\forall x B(x) \Rightarrow B[c/x]}\, L_\forall}{\Gamma \Rightarrow B[c/x].}\,\text{TAGLIO}$$

Esso è un albero chiuso per $\Gamma \Rightarrow B[c/x]$

(15) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $I_\exists$. Quindi $A \equiv \exists x B$ e

$$\dfrac{\overset{\Gamma}{\nabla} \atop B[c/x]}{\exists x B}$$

Per ipotesi di induzione esiste un albero chiuso per $\Gamma \Rightarrow B[c/x]$.
Si consideri il seguente albero chiuso per $\Gamma \Rightarrow \exists x B$

$$\dfrac{\overset{ch}{\nabla} \atop \Gamma \Rightarrow B[c/x] \qquad \dfrac{B[c/x] \Rightarrow B[c/x]}{B[c/x] \Rightarrow \exists x B}\, R_\exists}{\Gamma \Rightarrow \exists x B}\,\text{TAGLIO}$$

(16) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $E_\exists$. Quindi abbiamo

$$\mathcal{D}\left\{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \vdots \\ \exists x\, C(x)\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\ [C[a/x]]^n\\ \vdots\\ A\end{array}}{A}\,E_\exists^{\,n}\right.$$

ove a non occorre in $\exists x C(x)$ né in $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ né in A.

Per ipotesi di induzione esistono alberi di sequenti chiusi per $\Gamma_1 \Rightarrow \exists x C(x)$ e $\Gamma_2, C[a/x] \Rightarrow A$. Il seguente albero è un albero chiuso per $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ ch\\ \Gamma_1 \Rightarrow \exists x C\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ ch\\ \Gamma_2, C[a/x] \Rightarrow A\end{array}}{\Gamma_2\ \exists x C \Rightarrow A}\,L_\exists}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A}\,\text{TAGLIO}$$

(17) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $I_=$

Dunque $A \equiv (c = c)$ per qualche costante c e l'insieme Γ è vuoto.
Dobbiamo far vedere se esiste un albero di sequenti chiuso per $\Rightarrow c = c$. Eccolo

$$\frac{c = c \Rightarrow c = c}{\Rightarrow c = c}\ R\mathcal{I}.$$

(18) L'ultima regola in $\mathcal{D}$ è $E_=$. Dunque

$$\frac{\begin{matrix}\Gamma_1\\ \vdots\\ A[c/x]\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2\\ \vdots\\ c = b\end{matrix}}{A[b/x]}\ E_=$$

Per ipotesi di induzione esistono alberi di sequenti chiusi per $\Gamma_1 \Rightarrow A[c/x]$ e per $\Gamma_2 \Rightarrow (c = b)$ ne $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Si consideri il seguente albero chiuso per $\Gamma \Rightarrow A[b/x]$

$$\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow A[c/x] \qquad \dfrac{A[c/x],\ A[b/x],\ c=b \Rightarrow A[b/x]}{A[c/x],\ c=b \Rightarrow A[b/x]}\ \text{SOST}}{\Gamma_1,\ c=b \Rightarrow A[b/x]}\ \text{TAGLIO}$$

$$\dfrac{\Gamma_2 \Rightarrow c=b \qquad \Gamma_1,\ c=b \Rightarrow A[b/x]}{\Gamma_1\ \Gamma_2 \Rightarrow A[b/x]}\ \text{TAGLIO}$$

Per il principio di induzione, per ogni derivazione $\mathcal{D}$ di A da Γ esiste un albero di sequenti chiuso per $\Gamma \Rightarrow A$.

Il teorema è così dimostrato.