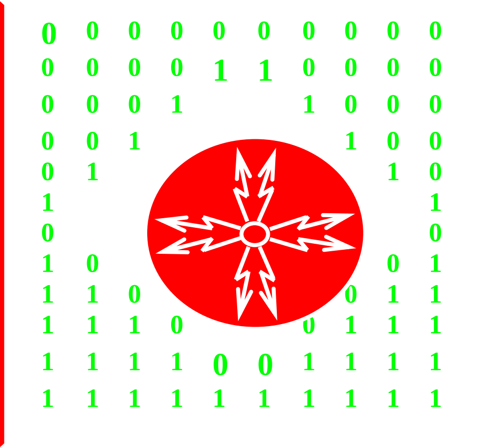
Борисенко А.А.

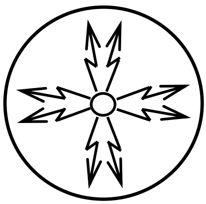
Биномиальный счет
Теория и практика



Борисенко А.А.

Биномиальный счет
Теория и практика

0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**1**			**1**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**					**1**	**0**	**0**
0	**1**							**1**	**0**
1									**1**
0									**0**
1	**0**							**0**	**1**
1	**1**	**0**					**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**			**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**



«Университетская книга"
Сумы 2004

ББК 22.174
УДК 621.3.037.37
Б82

Рекомендовано к печати Ученым советом
Сумского государственного университета.
Протокол № 8 от 12.03.04

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, профессор Г.С. Воробьев
канд. физ.-мат. наук, доцент А.И. Борискин

Борисенко А. А.

Б82 Биномиальный счет. Теория и практика: Монография.- Сумы: ИТД "Университетская книга", 2004. - 159 с.

ISBN 966-680-147-7

Книга имеет теоретическое и практическое значение в области двоичного счета и рекомендована в первую очередь студентам и аспирантам, которые обучаются в областях компьютерной техники, электроники и информатики. Предлагаемый материал окажет помощь также инженерам соответствующих специальностей.

ББК 22.174

ISBN 966-680-147-7

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 5

Часть 1. Исходные положения

1.1 Бином Ньютона 10
1.2 Биномиальные коэффициенты 14
1.3 О некоторых обобщенных классификационных признаках позиционных систем счисления 25
1.4 Однородные позиционные системы счисления 37
1.5 Перевод чисел из одной системы счисления в другую 51

Часть 2. Теория биномиального счета

2.1 Биномиальные системы счисления 60
2.2 Свойства биномиальных чисел 63
2.3 Свойства параметров коэффициентов биномиальной числовой функции 78
2.4 Доказательство префиксности биномиальных чисел. 92
2.5 Доказательство однозначности представления биномиальных чисел 94
2.6 Двойственность биномиальных чисел 99
2.7 Порядковые свойства биномиальных чисел 106
2.8 Помехоустойчивость биномиальных чисел 118

Часть 3. Практика биномиального счета

3.1 Алгоритмы прямого суммирующего биномиального счета неравномерных чисел 120
3.2 Алгоритмы суммирующего неравномерного биномиального счета с промежуточным инвертированием 126
3.3 Алгоритмы суммирующего биномиального счета равномерных чисел 129
3.4 Алгоритмы вычитающего неравномерного биномиального счета 133
3.5 Алгоритмы вычитающего неравномерного биномиального счета с переходом к симметричной биномиальной системе счисления 137

3.6 Алгоритмы вычитающего равномерного биномиального счета 141
3.7 Перебор равновесных кодовых комбинаций на основе биномиальных чисел 144

Задание для контрольных работ 149
Контрольные вопросы 154

Список литературы 157
Аннотация 159

ВВЕДЕНИЕ

Не все, что можно
сосчитать, сосчитано,
и не все, что сосчитано,
можно сосчитать.
Альберт Эйнштейн

Алгоритмы счета - это широко распространенные процедуры, сопровождавшие человека на всем протяжении его истории. Еще в древности широко пользовались абакой – инструментом для счета с помощью камешков, помещаемых в канавках на специальной доске. Современный счетчик это та же абака, но усложненная и интеллектуально развитая.

Однако счетные устройства это лишь один аспект применения алгоритмов счета. Их широко также применяют на практике и при разработке различных компьютерных программ. Мало имеется дискретных задач, где так или иначе нельзя было бы использовать обычный счет. Например, он используется в программах дешифровки сообщений, в игровых моделях, при решении задач методом Монте-Карло и т.д. Многие программы кодирования для универсальных ЭВМ значительно легче реализовать в виде алгоритмов счета, чем в виде разветвленных блок-схем, при условии, что имеющийся запас времени достаточен для этого.

Область применения счета в программах и цифровых устройствах можно значительно увеличить, если использовать не обычные виды счета, а более сложные, например, факториальный, который широко используется для генерирования перестановок [26]. Поэтому владение эффективными приемами современного счета необходимо не только схемотехникам, а и программистам.

Однако понятие счета, несмотря на его распространенность, не до конца на сегодня определено. Счетом, например, считается *последовательный перебор любых состояний* [22]. Это слишком общее определение. Более конкретным будет определение, по которому *счетом называется перебор состояний в возрастающем или убывающем порядке, в котором численное значение (номер) последующего состояния отличается от предыдущего на 1.*

Именно так в данной работе и понимается счет. Это понятие подразумевает, что любая последующая комбинация кода может быть получена прибавлением или вычитанием с предыдущей комбинации 1. Это требует знаний арифметических правил выполнения операций сложения и вычитания с комбинациями кода.

Ниже будут разработаны процедуры *биномиального* счета, на основе которых возможно решение различных переборных задач, имеющих значение в задачах кодирования и комбинаторной оптимизации, а также при построении различных специализированных цифровых устройств.

В соответствии с приведенной в работе [16] классификацией существует линейный, линейно-циклический и матричный биномиальный счет. В данной работе исследуется только линейный двоичный биномиальный счет. Соответственно при этом используются линейные биномиальные системы счисления с двоичным алфавитом. Эти системы счисления должны одновременно выполнять две основные задачи: определение количества и упорядочивание различных объектов, первую из которых решает теория кардинальных, а вторую - теория порядковых чисел. Кроме того, система счисления должна обеспечивать выполнение арифметических операций над числами.

Наиболее эффективно все эти задачи решают позиционные системы счисления, простейшими среди которых были и остаются *однородные* (естественные) системы счисления. Однако они явились лишь первым шагом в теории позиционных систем счисления, так как затем были разработаны *неоднородные* системы счисления, числа которых с одной стороны отличались избыточным числом разрядов, а с другой позволяли решать ряд специальных задач, которые были не под силу однородным. Например, они могли преобразовывать числа из системы остаточных классов в позиционные системы счисления или порождать перестановки в задачах комбинаторной оптимизации.

Очередной шаг в развитии позиционных систем счисления может быть связан со *структурными* системами счисления, число которых в настоящее время невелико, но потенциально оно большое. Эти системы относятся к наиболее сложным системам, и для своего синтеза потребовали разработки специальной теории. Ее одним из практических результатов был синтез двух классов линейных биномиальных систем счисления с двоичным и многозначным алфавитом.

Принципиальной особенностью структурных систем счисления является то, что в них введены ограничения, которые вес цифр ставят в зависимость не только от их позиции в числе, а и от значений предшествующих им цифр. Такая связь с одной стороны усложнила структурные системы счисления и особенно их арифметику, а с другой – привела к появлению в структурных системах счисления новых положительных качеств, таких как возможность самостоятельно обнаруживать ошибки в своей работе, строить сложные математические объекты и производить их сжатие.

Выделим четыре элемента, составляющих основу любой позиционной системы счисления, - *алфавит* цифр, формируемое на основе этого алфавита конечное множество всех *возможных* чисел, *ограничения* на возможные числа и *числовую* (нумерационную) функцию. Первые три элемента решают внутренние задачи системы счисления: формируют ее разрешенные (рабочие) числа и определяют правила выполнения над ними арифметических операций. Четвертый элемент - числовая функция, используя в качестве аргументов цифры числа, решает внешние задачи: нумерации и преобразования числа из исходной системы счисления в любую другую и обратно.

В данной работе рассматриваются основные теоретические положения двоичного линейного биномиального счета, основанного позиционной линейной биномиальной системе счисления с двоичным алфавитом [3]. Практика двоичного биномиального счета, как это часто бывает, значительно опередила адекватную этому счету теорию. На сегодня получен ряд оригинальных биномиальных устройств, признанных изобретениями, имеются биномиальные интегральные микросхемы, опытные образцы цифровых устройств на основе биномиальных систем счисления, но отсутствует их законченная теория. Этот пробел в теории биномиальных систем счисления частично восполняется ниже.

Общая теория позиционных систем счисления утверждала, что любое комбинаторное соотношение, типа 2^n, $n!$, C_n^k и т.д. может быть положено в основу позиционной системы счисления. Соотношения 2^n и $n!$ уже использовались для построения двоичной и факториальной систем счисления. Поэтому в качестве примера структурной системы счисления была выбрана биномиальная система, названная автором так, потому что в ее основе лежал биномиальный коэффициент C_n^k.

Предлагаемая работа, с одной стороны, представляет в определенной мере законченное научное исследование в области линейного биномиального счета, а с другой может быть учебным пособием для студентов специальностей “Электронные системы” и “Информатика”, в частности, применительно к таким дисциплинам, как цифровые автоматы, кодирование информации, комбинаторная оптимизация. Автор также предполагает использование рассматриваемого материала в курсовом и дипломном проектировании, а также в магистерских работах.

Заложенный в предлагаемом материале и идеях потенциал, по мнению автора, использован в теории и практике кодирования информации еще далеко не полностью. Поэтому данная работа вполне может быть применена для дальнейших научных исследований. Здесь просматриваются два направления. Это, с одной стороны, использование рассматриваемого материала для решения информационных и оптимизационных задач, а с другой – для получения новых схемных решений цифровых автоматов различного применения и в первую очередь быстродействующих и надежных переборных автоматов и счетных устройств.

Следует особо остановиться на таком аспекте биномиального счета, как его конкретная практическая полезность для решения некоторых задач дискретной математики. Она базируется на трех отличительных особенностях биномиальных чисел. Во-первых, они способны генерировать различные комбинаторные объекты, такие, например, как обычные сочетания, сочетания с повторением, композиции и т.д. Во-вторых, биномиальные числа легко решают задачу перехода от указанных комбинаторных объектов к их номерам, решая при этом задачу сжатия информации, и, наконец, в-третьих, на том, что биномиальный счет в своей основе помехоустойчив. Комбинация приведенных трех свойств, применительно к конкретным условиям, дает широкую сферу применения биномиального счета в различных подчас самых неожиданных задачах.

Попытки синтезировать биномиальные системы счисления на основе существующих представлений о позиционных системах счисления предпринимались неоднократно. Так в работе [22] предлагалась полиномиальная система счисления, основанная на биномиальных коэффициентах. На самом деле система счисления в данном источнике не была образована, а только была решена задача нумерации сочетаний. Такой же результат был получен и для биномиальной системы счисления в [20]. Поэтому не удивительно, что практический результат счета в этих системах счисления не был достигнут. Дело в том, что в структурных системах счисления особое значение имеют ограничения на числа, которые собственно их и формируют, а получение этих ограничений требует использования специальной теории, которая не была тогда еще разработана.

Разработка числовых функций, с одной стороны нумерующие комбинаторные объекты, а с другой их формирующие, представляет не простую задачу. Имеющаяся теория нумерационного кодирования решает задачу нумерации комбинаторных конфигураций, не выделяя из них числа как таковые. Это приводит к тому, что для каждой нумерационной задачи разрабатывается свое особое решение [2]. Структурный подход к получению комбинаторных объектов отличается тем, что сначала находятся числа структурных систем счисления, лежащие в основе данного класса объектов, а затем от них происходит переход непосредственно к самим объектам. В результате стал возможен общий подход к решению любых задач нумерационного кодирования, состоящий в том, что сначала создается структурная система счисления для объектов заданного класса, формирующая структуры этих объектов, а затем они преобразуются или в номера, или в комбинаторные объекты в зависимости от поставленной задачи. Специфика решения нумерационных задач проявляется при этом только на втором этапе кодирования при нумерации или формировании комбинаторных объектов.

Таким образом, выделение из решений нумерационных задач этапа формирования чисел структурных систем счисления привело к их универсализации и создало самостоятельный объект исследования – структурные системы счисления.

Автор

Часть 1 Исходные положения

1.1 Бином Ньютона

Бином Ньютона это одна из наиболее известных и важных в математике формул для разложения бинома $(x-a)$ в n-й степени, где n – целое положительное число. Она может быть представлена в виде теоремы.

Теорема 1

$$\boldsymbol{P = (x - a)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k}}\ . \qquad (1)$$

Коэффициент C_n^k, обозначаемый также как $\binom{n}{k}$ и называемый *биномиальным коэффициентом*, в приведенной выше формуле определяет *число* различных k-элементных подмножеств, получаемых при их выборе из n-элементного исходного множества.

Доказательство. Возьмем произведение n двучленов

$$P = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$$

и, раскрывая скобки и группируя члены с одинаковыми степенями, получим многочлен, расположенный по убывающим степеням:

$$P = x^n - x^{n-1}(a_1 + a_2 + ... + a_n) + x^{n-2}(a_1a_2 + a_1a_3 ... + a_{n-1}a_n) -$$

$$-x^{n-3}(a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n) + ... + (-1)^n(a_1a_2...a_n)\ .$$

Нетрудно увидеть, что в скобках полученного выше выражения приведены всевозможные сочетания по 1, 2, …, n элементов из множества $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Тогда в случае $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$

$$P = (x-a)^n = x^n - C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} - C_n^3 a^3 x^{n-3} + ... +$$

$+(-1)^k C_n^k a^k x^{n-k} + ... + (-1)^n a^n$, $k = 0,1,...,n$.

В этой формуле k-й член будет иметь вид:
$T_k = (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k}$.

Тогда при условии, что $T_0 = (-1)^0 C_n^0 a^0 x^{n-0} = C_n^0 x^n = x^n$ и

$T_n = (-1)^n C_n^n a^n x^{n-n} = (-1)^n C_n^n a^n x^0 = (-1)^n a^n$,

$$P = (x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. $(x-a_1)(x-a_2) = x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2$.

Допустим, что $a_1 = a_2 = a$.

Тогда $(x-a)(x-a) = (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

Пример 2. $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) = x^3 - (a_1 + a_2 + a_3)x^2 +$

$+(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)x - a_1 a_2 a_3$.

Если $a_1 = a_2 = a_3 = a$, то

$(x-a)(x-a)(x-a) = (x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2 x - a^3$.

Пример 3.

$$(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2 x + a^3.$$

Под x и a можно понимать любое число или любое алгебраическое выражение.

Пример 4

$$(3x-2a)^5 = (3x)^5 - 5 \cdot 2a(3x)^4 + 10(2a)^2(3x)^3 - 10(2a)^3(3x)^2 +$$

$+5(2a)^4 3x - (2a)^5 = 243x^5 - 810ax^4 + 1080a^2 x^3 - 720a^3 x^2 +$

$240a^4 x - 32a^5$.

Следствие 1. ***В случае, если a является отрицательным числом, то***

$$\boldsymbol{P = (x - (-a))^n = (x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k}} \ . \qquad (2)$$

Отметим некоторые очевидные свойства формул (1, 2):

1. Число членов разложения на 1 больше показателя n.

2. Показатели степени числа x убывают, а числа a возрастают от члена к члену на 1.

3. Сумма показателей x и a в каждом члене равна n.

Докажем следующие два свойства биномиальных коэффициентов на основе формулы (2).

Теорема 2

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n} \ . \qquad (3)$$

Доказательство. Допустим, что в выражении (2) $x = a = 1$. Тогда $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$. С другой стороны при $x = a = 1$ $(x+a)^n = (1+1)^n = 2^n$. Поэтому имеем $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Теорема доказана.

Теорема 3. ***Сумма биномиальных коэффициентов с четным k равна сумме биномиальных коэффициентов с нечетным k, и каждая из этих сумм равна 2^{n-1}.***

Доказательство. Допустим, что в выражении (2) $x = 1$ и $a = -1$. Тогда $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k} = (1-1)^n = (0)^n = 0$.

Слагаемые $C_n^k a^k x^{n-k}$ в приведенном выше выражении принимают в случае, если k четное, положительные значения равные $C_n^{k'}$, а в случае, если k нечетное, отрицательные: $-C_n^{k''}$, где $k' = 0, 2, 4, \ldots$; $k'' = 1, 3, 5, \ldots$; при этом k' - значение верхнего параметра биномиальных коэффициентов, с четным k, а k'' - значение верхнего параметра коэффициентов, с нечетным k.

Поэтому $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k} = \sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} - \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} = 0,$$

где n' - максимальное значение k';

n'' - максимальное значение k''.

Из полученного равенства следует, что

$$\sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} = \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''}.$$

Так как из вышеприведенного равенства следует, что указанные суммы равны между собой, а из теоремы 2 при $x = a = 1$ вытекает, что $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} + \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} = 2^n$, то каждая из сумм должна равняться $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$: $\sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} = 2^{n-1}$, $\sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} = 2^{n-1}$.

Теорема доказана.

Историческая справка

Формулу (1) называют часто биномом Ньютона, хотя эту формулу до Ньютона (1643-1727) для целых положительных значений n знали еще среднеазиатские математики, в частности, Омар Хайям (1048-1131), а в Западной Европе – Паскаль (1623-1662). Формулу (1) называют еще биномиальной формулой или биномиальной теоремой.

Заслугой Ньютона является то, что он впервые обобщил формулу (1) для дробных и отрицательных показателей n. Об этом открытии Исаак Ньютон сообщил в письмах от 13 июня и 24 октября 1676 г. Секретарю Королевского товарищества Ольденбургу, но полноценного доказательства формулы разложения бинома $(x-a)^n$ для нецелых и отрицательных n у него не было, хотя именно об этом его просил Лейбниц. Доказательство Ньютона больше основывалось на примерах и аналогиях, в частности, взятых из работ Валлиса, которые касались задач интерполяции.

В 1774 году эту теорему пытался доказать Леонард Эйлер и только в 1812 году ее доказал Карл Фридрих Гаусс с помощью теории бесконечных сумм.

Как видим разложение выражения $(x+a)^n$, носящее название бинома Ньютона для целых, дробных, положительных и отрицательных n имеет долгую историю, и этим выражением занимались такие ученые, как Хайям, Паскаль, Ньютон, Лейбниц, Эйлер, Гаусс. Все это говорит о непреходящем значении бинома Ньютон в науке.

1.2 Биномиальные коэффициенты

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество из k элементов называется *сочетанием* k элементов из n, где n, k – целые положительные числа 0, 1, …; $n \geq k$. Число всех возможных сочетаний k элементов из n C_n^k представляет собой *биномиальный коэффициент*.

Так если элементами исходного множества будут буквы *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, то из них можно получить следующие сочетания: *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*, число которых $C_5^3 = 10$.

Различные сочетания отличаются друг от друга только составом входящих в них элементов, а порядок их расположения в сочетаниях не играет роли. Например, последовательности *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* представляют одно сочетание, состоящие из 3 элементов *a*, *b*, *c*, порядок которых в нем не важен.

Если же порядок в сочетании имеет значение, то такое сочетание будет называться *размещением* k элементов из n.

Теорема 4. ***Число размещений для k элементов из n,*** $\boldsymbol{n \geq k}$**,**

$$\boldsymbol{A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)}. \qquad (4)$$

Доказательство. Первый элемент размещения из n, очевидно, можно выбрать n способами, второй $n-1$ и т.д. до k–го элемента, который может быть выбран $n-k+1$ способами, так как к моменту выбора k–го элемента остается $n-(k-1)=n-k+1$ элементов. В результате число способов, которыми можно выбрать k элементов из n –элементного множества, а значит и число размещений

$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$.

Теорема доказана.

Размещение, для которого $k = n$, называется *перестановкой*

$$P_k = P_n = A_n^n = n! = n(n-1)...1 . \qquad (5)$$

Теорема 5

$$\boldsymbol{A_n^k = P_k C_n^k = k! C_n^k} . \qquad (6)$$

Доказательство. Каждому сочетанию k элементов из n соответствует $P_k = k!$ перестановок, а все возможные перестановки для всех сочетаний образуют все размещения k элементов из n. Поэтому $A_n^k = P_k C_n^k = k! C_n^k$.

Теорема доказана.

Теорема 6. ***Число сочетаний для k элементов из n***

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}} . \qquad (7)$$

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{A_n^k}{k!},$$

а из теоремы 4, что $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$. Поэтому

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Теорема доказана.

Принято, что 0!=1, поэтому

$$C_n^0 = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1,$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 .$$

Пример 5. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Для того, чтобы шестизначное число, составленное из заданных цифр, делилось на 5 необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные 5 цифр могут стоять на оставшихся местах в любом порядке.

Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных 5, равно числу перестановок из 5 элементов, т.е.

$$P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120.$$

Пример 6. Студенты изучают 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

Решение. Различных способов составления расписания, очевидно, столько, сколько существует пятиэлементных упорядоченных подмножеств четырнадцатиэлементного множества.

Следовательно, число способов равно числу размещений из 14 элементов по 5:

$$A_{14}^5 = 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10 = 240240.$$

Пример 7. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 14 преподавателей?

Решение. Очевидно столько, сколько существует сочетаний из 14 преподавателей по 7:

$$C_{14}^7 = \frac{14!}{7!\cdot 7!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 3432.$$

Свойства биномиальных коэффициентов

Теорема 7

$$\boldsymbol{C_n^k = C_n^{n-k}}. \tag{8}$$

Доказательство. Подставив $n-k$ вместо k в формулу 7 получим:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Теорема доказана.

Данное свойство известно как *свойство симметрии* биномиальных коэффициентов. Его смысл состоит в том, что не имеет значения, как выбирать элементы из n по k или из n по $n-k$. В этом и другом случае число сочетаний будет одинаково.

Теорема 8

$$\boldsymbol{C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k}. \tag{9}$$

Доказательство

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k-1)(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}\left(\frac{n-k}{1} + \frac{k+1}{1}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Теорема доказана.

Доказательство данной теоремы также можно получить и исходя из следующих соображений.

Число C_{n+1}^{k+1} определяет число тех подмножеств из $k+1$ элементов, которые могут быть выбраны из множества, содержащего $n+1$ элементов.

Выберем один из этих элементов, например, x, и разобьем исходное множество из C_{n+1}^{k+1} подмножеств на два класса, один из которых содержит в своих подмножествах элемент x, а второй нет.

Так как элемент x в последнем втором классе отсутствует, то входящие в него подмножества не содержат этого элемента и соответственно выбор элементов, число которых остается, как и ранее, равным $k+1$, происходит не с $n+1$ элементов, а с n. Поэтому число подмножеств во втором классе равно C_n^{k+1}.

В первом классе элемент x присутствует во всех без исключения подмножествах. Это значит, что он просто присоединяется к элементам, число которых теперь будет равно k, и которые выбираются не из $n+1$ элементов, как было до разбиения, а из n (элемент x при их выборе отсутствует). Поэтому число подмножеств в первом классе равно C_n^k. Соответственно сумма подмножеств первого и второго классов $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, что и доказывает исходное утверждение.

Следствие 1

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{10}$$

Теорема 8 известна, как *правило Паскаля*. Это наиболее широко применяемое в комбинаторике свойство, позволяющее выразить по правилам рекурсии один биномиальный коэффициент через два других.

Теорема 8 является основой построения треугольников Паскаля, как числового (рис. 1а), так и символического (рис. 1b).

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$

Рисунок 1a – Числовой треугольник Паскаля

C_0^0	$n = 0$
C_1^0 C_1^1	$n = 1$
C_2^0 C_2^1 C_2^2	$n = 2$
C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3	$n = 3$
C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4	$n = 4$
C_5^0 C_5^1 C_5^2 C_5^3 C_5^4 C_5^5	$n = 5$

Рисунок 1b – Символический треугольник Паскаля

В n-й, n = 0, 1,…, строке (ряде) треугольника Паскаля стоят коэффициенты разложения выражения $(a+b)^n$, причем каждый коэффициент, кроме двух крайних, которые равны 1, равен сумме стоящих над ним ближайших двух коэффициентов из предшествующей строки (см. рис 1a и 1b).

Числовой треугольник Паскаля при неограниченном его продолжении позволяет находить биномиальные коэффициенты с любым значениями n и k, что может значительно упростить процедуру их вычисления.

Для нахождения значения какого-либо коэффициента C_n^k необходимо найти в треугольнике Паскаля соответствующий n номер ряда и в этом ряду номер биномиального коэффициента, соответствующий числу k.

Нумерация при этом как отдельных рядов, так и внутри каждого ряда биномиальных коэффициентов начинается с 0 и происходит сверху вниз при нумерации рядов и слева направо при нумерации биномиальных коэффициентов внутри каждого ряда.

Так как каждый ряд биномиальных коэффициентов представляет все коэффициенты биномиального разложения $(a+b)^n$, то в соответствии с теоремой 2 их сумма равняется 2^n. Кроме того, сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна их сумме, стоящих на четных местах. В свою очередь каждая из этих сумм равна 2^{n-1} (теорема 3).

Числовой треугольник в соответствии со свойством симметрии биномиальных коэффициентов (теорема 7) строго симметричный по отношению к его срединной линии. Поэтому при использовании его для вычисления биномиальных коэффициентов достаточно построить какую-либо одну его половину.

На практике для вычисления C_n^k иногда более удобно пользоваться треугольником Паскаля, представленном в табличной форме (см. таблицу 1).

Таблица 1- Треугольник Паскаля в табличной форме

n	Биномиальные коэффициенты											
0	C_0^0						1					
1	C_1^0	C_1^1					1	1				
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				1	2	1			
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			1	3	3	1		
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		1	4	6	4	1	
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	1	5	10	10	5	1

Здесь, как и ранее, биномиальные коэффициенты расположенные в одном ряду в сумме образуют величину 2^n.

В то же время правило Паскаля реализуется путем суммирования двух рядом стоящих в одной строке биномиальных коэффициентов. Результирующий коэффициент при этом находится в соседней нижней строке и столбце правого коэффициента (см. табл. 1).

Например,

$$\begin{array}{cc} C_3^1 & C_3^2 \\ & C_4^2 \end{array}.$$

Это значит, что $C_4^2 = C_3^2 + C_3^1$ (правило Паскаля).

Теорема 9

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-k} C_{k+i-1}^{k-1}. \qquad (11)$$

Доказательство. На основе правила Паскаля (теорема 8) запишем следующие равенства:

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$,…, $C_{k+2}^k = C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k-1}$, $C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1}$.

Подставив выражение для C_{k+1}^k в выражение для C_{k+2}^k получим, что

$$C_{k+2}^k = C_k^k + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} = C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1},$$

так как $C_k^k = C_{k-1}^{k-1} = 1$.

Подставив коэффициенты для коэффициента C_{k+2}^k в предшествующее ему равенство $C_{k+3}^k = C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k-1}$, получим, что

$$C_{k+3}^k = C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}.$$

Затем такую же операцию проведем для остальных коэффициентов вплоть до C_{n-1}^k и в результате получим (11).

Теорема доказана.

Равенство (11) реализуется в треугольнике Паскаля путем арифметических операций над соседними коэффициентами любой строки, расположенной параллельно левой стороне треугольника. В этом случае коэффициент C_n^k находится в соседней нижней строке и определяется как сумма стоящего над ним и всех соседних справа коэффициентов верхней строки (см. рис. 1a, b).

Так, например, коэффициент C_3^2 на рис. 1b образуется коэффициентами C_2^1 и C_1^1 верхней строки. При этом коэффициент C_2^1 стоит над ним вверху, а коэффициент C_1^1 - справа от коэффициента C_2^1.

Соответственно коэффициент 3 в нижней строке рис. 1a равен сумме двух коэффициентов - коэффициенту 2 в верхней строке и соседнему к нему справа коэффициенту 1 в этой же строке.

Реализация равенства (11) в табличной форме треугольника Паскаля происходит суммированием всех биномиальных коэффициентов, стоящих в одном и том же столбце, до коэффициента C_{n-1}^{k-1} включительно. Искомый коэффициент C_n^k находится в соседнем справа столбце в строке, где расположен коэффициент C_n^{k-1} (см. табл.1).

Теорема 10

$$\boldsymbol{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-k+1}^2 + C_{n-k}^1 + C_{n-k-1}^0 = \sum_{i=0}^{k} C_{n-k+i-1}^i} . \quad (12)$$

Доказательство. Так как $C_{n-k-1}^0 = C_{n-k}^0 = 1$, то в соответствии с равенством $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ имеем, что $C_{n-k}^1 + C_{n-k}^0 = C_{n-k+1}^1$ и соответственно $C_{n-k+1}^2 + C_{n-k+1}^1 = C_{n-k+2}^2$ и т.д. до получения в конечном итоге равенства (12).

Теорема доказана.

Коэффициент C_n^k в соответствии с (12) можно найти также и с помощью треугольника Паскаля. Для этого берется строка параллельная правой стороне треугольника и с её помощью находится разложение коэффициентов C_n^k по n и k (см. рис. 2).

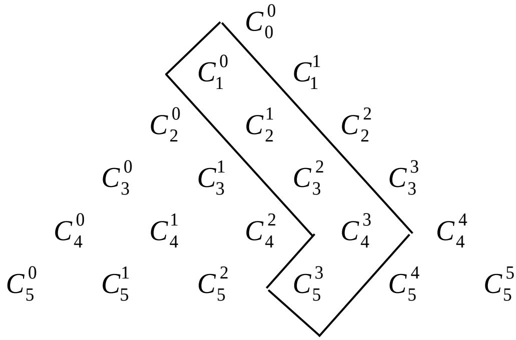
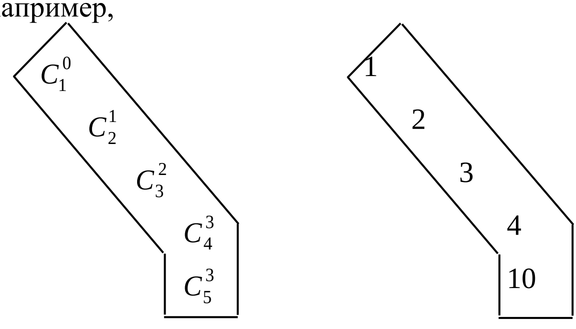


Рисунок 2 – Символический треугольник Паскаля с представлением коэффициентов C_n^k суммой коэффициентов верхней строки.

Выражение (12) можно получить и с помощью треугольника Паскаля в табличной форме. Для этого выделяется строка параллельная гипотенузе, полученного в табл.1 прямоугольного треугольника. Сумма всех коэффициентов в любой начальной части этой строки равна коэффициенту параллельной ей соседней строки, стоящему под последним коэффициентом этой части.

Например,



Из (12) следует, что $C_5^3 = C_4^3 + C_3^2 + C_2^1 + C_1^0$.

Теорема 11. ***При k ≠ 0***

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}}. \qquad (13)$$

Доказательство

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Так как отношение $\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = C_{n-1}^{k-1}$, то $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

Теорема доказана.

Следствие 1

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}. \qquad (14)$$

Следствие 2. *При k ≠ 0, n ≠ 0*

$$\frac{1}{n} C_n^k = \frac{1}{k} C_{n-1}^{k-1}. \qquad (15)$$

Теорема 12. *При n ≠ k ,*

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^k}. \qquad (16)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 11

$$C_n^{n-k} = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^{n-k-1}.$$

Вследствие теоремы 7, по которой $C_{n-1}^{n-k-1} = C_{n-1}^k$, $C_n^{n-k} = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^k$.

Теорема доказана.

Следствие 1

$$(n-k) C_n^k = n C_{n-1}^k. \qquad (17)$$

Историческая справка

Самое раннее описание биномиальных коэффициентов встречается в работах древнегреческих авторов. В 12 веке подробное описание биномиальных коэффициентов дал индийский математик Бхаскара Ачарья.

Табл.1 на рис. 1а была приведена Паскалем в 1653г. и поэтому за свою треугольную форму была названа Треугольником Паскаля, однако она была известна задолго до Паскаля, например, китайскому математику Чжу Ши-Цзе еще в 1303 году.

Заслугой Паскаля является то, что он представил биномиальный коэффициент с помощью явной формулы для его вычисления, которая широко используется и в настоящее время и, кроме того, он впервые дает доказательство этой формулы на основе осознанно примененного им нового на то время фундаментального метода математических доказательств – метода математической индукции.

1.3. О некоторых обобщенных классификационных признаках позиционных систем счисления.

Развитие математики неразрывно связано с системами счисления, которые в своем развитии прошли сложный путь от простейших непозиционных систем через пальцевый счет и числа совокупности до современных позиционных систем счисления.

Число по своей природе двойственно. С одной стороны оно определяет количество, а с другой - порядок расположения элементов в множествах. Количество является абстракцией от свойств множества и представляется числом, содержащихся в нем элементов. На этой идее основан подход Кантора к определению числа. Оно представляет то общее, что имеют равномощные множества независимо от их природы. Порядковые свойства чисел исследует теория порядковых чисел, основанная на аксиомах Пеано. Они обосновывают возможность порядкового счета элементов с помощью чисел.

К системам счисления предъявляется ряд требований, среди которых наиболее важными являются требования однозначности, конечности, эффективности, возможности сравнения чисел между собой по величине и выполнения над числами арифметических и логических действий. От удачного или неудачного выбора системы счисления зависит эффективность ее применения для практических нужд математики.

Исторически первыми возникли непозиционные системы счисления. В их основе лежит количественный подход к определению числа. Для определенных количеств придумывались особые знаки-числа, которыми в дальнейшем пользовались для получения других чисел.

Когда количество используемых чисел ограничивалось несколькими десятками, то такое кодирование устраивало практику, но с ростом количества применяемых на практике чисел появилась потребность в более сложных системах счисления, позволяющих решать задачи кодирования любых чисел и выполнять над ними арифметические и логические операции.

Позиционные системы счисления появились в Европе относительно недавно в 13 веке. Их принесли из Индии арабские завоеватели. История их создания теряется в прошлом и на сегодня имеется немного достоверных сведений о них.

Уверенно можно утверждать лишь то, что позиционные системы счисления произвели революцию в мышлении и практической деятельности человека и, что создавало их все человечество в течение тысячелетий.

Первыми позиционными системами счисления, получившими распространение на практике, были пятеричная и десятичная системы счисления. После появилась двоичная, восьмеричная, двенадцатеричная и другие системы счисления, основанные на числах натурального ряда. Такие системы счисления называются *однородными*, а также *естественными* или *степенными*. Их характерной особенностью является равенство чисел по длине.

Разработка более сложных *неоднородных* позиционных систем счисления началась во второй половине 20-го века после появления цифровой техники. Они использовались в основном при построении специализированных вычислителей, систем связи и управления, кодирующих и декодирующих устройств с целью получения их более высокой эффективности.

При этом возникла задача исследования общих принципов позиционного счета, чтобы на этой основе произвести классификацию позиционных систем счисления, получить и исследовать новые классы и разработать новые методы их построения.

Каждая позиционная система счисления характеризуется древовидной структурой, которая создается в процессе последовательных разбиений некоторого конечного множества элементов $Q=\{q_1,\ q_2,\ldots,q_P\}$ по шагам $j=1,\ldots,n$ на подмножества в общем случае с разным количеством элементов до получения в каждом из них *одного* элемента.

Признаки $r=0,\ 1,\ldots,k$ подмножеств, получаемых в том или ином разбиении, называются *цифрами*.

Наибольшее множество цифр среди всех возможных разбиений называется алфавитом системы счисления $A=\left(0,\ 1,\ldots,k_{\max}\right)$, где $k_{\max}$ - наибольшая цифра разбиения с наибольшим количеством подмножеств, задаваемых на том или ином дереве разбиений.

Последовательность цифр $X=x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n;\ x_j\in A$, в процессе пошаговых разбиений однозначным образом кодирует один из элементов множества Q. В результате с помощью этой последовательности будет получена полная информация о кодируемом элементе.

Число, функция или какое-либо условие, по которому происходят разбиения в системе счисления, называется ее *основанием*.

Число n последовательных разбиений исходного множества Q до получения подмножества, состоящего из *одного* элемента, называется разрядностью числа, а номер $i=n-j$ - его разрядом.

Представленную последовательность цифр $X=x_1,\ x_2,\ldots x_n$, получаемых по всем шагам разбиений, можно с помощью равенства $i=n-j$ представить в виде последовательности цифр

$$X=x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_i\ldots x_0;\ x_i\in A,$$

которая называется *числом*.

Количество элементов P в разбиваемом множестве Q называется *диапазоном*, представимых в данной позиционной системе счисления чисел.

Количество элементов в подмножестве, получаемом в том или ином разбиении, называется *весом* соответствующей данному разбиению цифре.

Количество цифр n в числе называется его *длиной* или *разрядностью*.

Равную длину числа имеют только тогда, когда подмножества, получаемые на каждом шаге разбиений, содержат одинаковое число элементов. Это условие имеет место для однородных систем счисления: десятичной, двоичной, восьмеричной и других.

Системы счисления с равной длиной чисел относятся к классу равномерных кодов.

Однако в общем случае, когда получаемые в процессе разбиений подмножества содержат разное количество элементов, длины чисел будут различными. Причем, ни одно число в этом случае не может быть началом или префиксом другого. Это следует из того, что последняя цифра каждого числа кодирует подмножество, содержащее *один* элемент и соответственно дальнейшее разбиение этих подмножеств невозможно. А раз это так, то продолжение числа отсутствует и, значит, оно не может быть началом никакого другого числа.

В этом применительно к системам счисления суть *принципа унитарности*, по которому полная информация об объекте будет передана только тогда, когда в процессе разбиений будет получен *один* и только *один* объект [12].

Системы счисления с различной длиной чисел относятся к неравномерным или префиксным кодам и являются неоднородными.

Более простым ограничением для неоднородных систем счисления будет требование постоянства числа элементов в k подмножествах в пределах одного шага разбиений. При этом устанавливается функциональная связь между номером шага разбиений j и числом подмножеств k в разбиениях на этом шаге.

Веса цифр, принадлежащих к одному разряду числа, в этом случае равны между собой, однако не изменяются по степенному закону, как это имеет место для однородных систем счисления.

Числа для неоднородных систем счисления с такими ограничениями имеют, как и для однородных, равную длину.

Примером таких систем счисления являются факториальные, а в более общем случае – системы счисления со смешанным основанием или полиадические.

В неоднородных системах счисления с неравномерным кодированием веса цифр чисел зависят как от номера i разряда, так и от значений предшествующих цифр в числе. В результате число элементов в подмножествах, получаемых в пределах одного шага разбиений, в общем случае будет различным. В этом случае кодирование чисел будет неравномерным (префиксным).

Неоднородные системы счисления с неравномерным кодированием будем называть *структурными*.

Их характерным признаком будет разная длина, принадлежащих им чисел. Примером структурных систем счисления являются рассматриваемые ниже в данной книге двоичные биномиальные.

Системы счисления, в качестве оснований которых выбраны комбинаторные соотношения, будем называть *комбинаторными*.

Примером комбинаторных систем счисления будут, упоминавшиеся ранее факториальные системы счисления, основанные на факториале, и структурные биномиальные, использующие в своей основе биномиальные коэффициенты.

Наиболее сложными ограничениями на количество подмножеств в разбиениях являются числа, полученные в процессе случайных разбиений, для которых отсутствуют правила их построения. Числа в таких системах счисления будут являться неравномерными и соответственно структурными.

Назовем такие системы счисления *табличными*, так как задать их можно только с помощью таблиц. Это наиболее сложные системы счисления.

На рис. 3 в виде блок-схемы приведена классификация систем счисления.

Таким образом, позиционные системы счисления, подразделяются на два больших класса - однородные с равной длиной чисел и неоднородные с равной и неравной длиной чисел. Однородные, веса которых являются степенными функциями, в свою очередь, подразделяются на двоичные, троичные, десятичные и т.д., а неоднородные на полиадические с равной длиной и структурные с неравной длиной чисел, которые в свою очередь делятся на комбинаторные и табличные.

Все позиционные системы счисления без исключений могут быть представлены в виде деревьев разбиений, вершины которых отображают количества чисел в разбиваемых множествах, а ветви представляют цифры, кодирующие подмножества, получаемые после разбиения. При этом последовательности цифр образуют числа позиционных систем счисления.

Рассмотрим более подробно структуры различных систем счисления, представленных на рис. 4, 5, 6, среди которых наиболее простой является двоичная система.

На рис. 4 представлена двоичная система счисления с диапазоном $P=8$.

Диапазон двоичной системы счисления образуется степенной функцией $P=2^n$, разбиение на каждом шаге в которой происходит ровно на два класса, кодирующиеся цифрами $0,\ 1$. Все двоичные числа имеют одинаковую длину, а порождающий их алфавит A содержит две цифры 0 и 1.

Числовая функция, задающая количественный эквивалент двоичного числа, имеет вид:

$$A_{\langle 2\rangle} = x_{n-1}2^{n-1} + x_{n-2}2^{n-2} + \ldots + x_0 2^0 . \qquad (18)$$

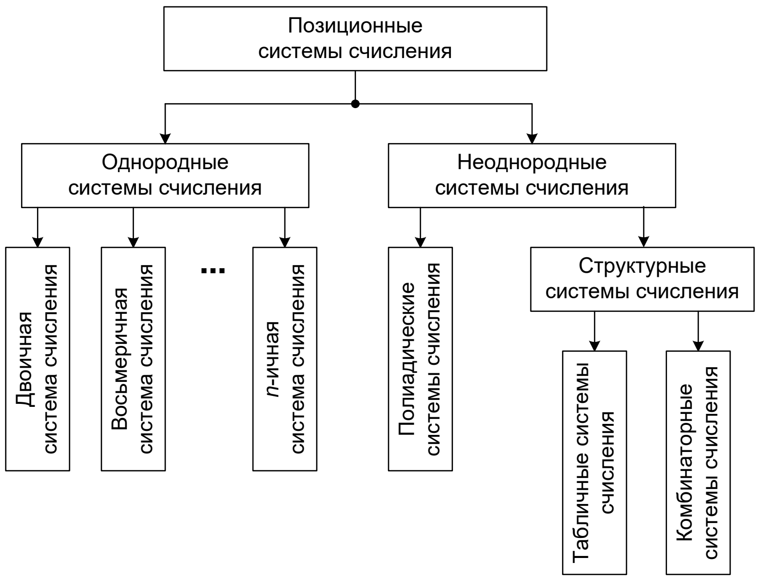


Рисунок 3 – Классификация систем счисления

Обратим внимание на то, что такое же дерево разбиений могут иметь и другие коды, например, код Грея. Однако любое другое кодирование классов эквивалентности отличное от приведенного класса на рис. 4, это уже более сложное кодирование, представляющее множество слов, а не чисел. Для чисел требуется только кодирование разбиений цифрами в указанном выше порядке. В этом отличие обычных кодов от систем счисления, то есть не всякий код является системой счисления, хотя в основе любого кода лежит система счисления.

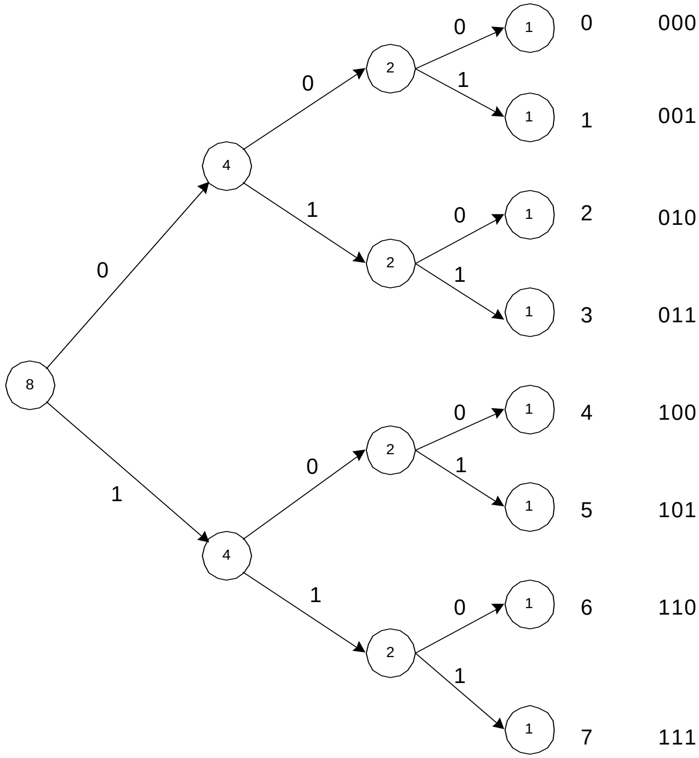


Рисунок 4 – Дерево разбиений двоичной системы счисления

Это принципиальное положение, позволившее автору создать теорию структурных систем счисления и, как следствие, получить рассматриваемую в данной монографии теорию двоичных биномиальных систем счисления.

Система счисления это математическая запись структуры, на базе которой можно получить неограниченное число различных кодов, комбинации которых являются словами, а не числами.

На этом положении основаны предлагаемые автором методы нумерации и построения комбинаторных объектов.

Двоичная система счисления является представительницей однородных (естественных, степенных) систем счисления.

Неоднородные системы счисления состоят из систем счисления со смешанным основанием (полиадических), числа которых имеют равную длину, и структурных систем счисления, отличающихся неравной длиной своих чисел. Они относятся к префиксным кодам, т.е. кодам с неравной длиной, в которых никакая комбинация меньшей длины не может быть началом комбинации большей длины.

Широко используемым на практике примером системы счисления со смешанным основанием является факториальная система счисления:

$$F = x_n n! + x_{n-1}(n-1)! + ... + x_1 1! + x_0 0!, \qquad (19)$$

$0 \le x_i \le i,\ i = 0,\ 1, \ldots, n$;

$P = n!$.

Структура с $n = 3$ разбиениями факториальной системы счисления для диапазона, состоящего из $P = n! = 3! = 6$ чисел, приведена на рис. 5.

Информационными разрядами у этой системы счисления являются только первый и второй, а нулевой разряд является избыточным.

Числовая функция для данной системы счисления имеет вид:

$F = x_2 2! + x_1 1! + x_0 0!$,

$0 \le x_i \le i,\ i = 0,\ 1,\ 2$.

Полезной особенностью факториальных систем счисления является то, что они способны генерировать перестановки. Это свойство объясняется тем, что структурой множества перестановок является факториальная система счисления. Кроме перестановок данная система счисления может генерировать и другие комбинаторные объекты так или иначе связанные с перестановками, в чем собственно и заключается ее потенциальная полезность.

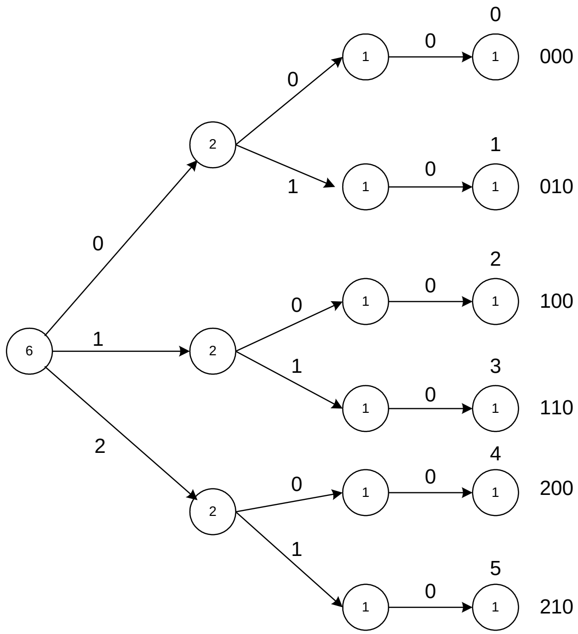


Рисунок 5 – Дерево разбиений факториальной системы счисления

На рис. 6 представлена двоичная структурная система счисления с неравной длиной чисел.

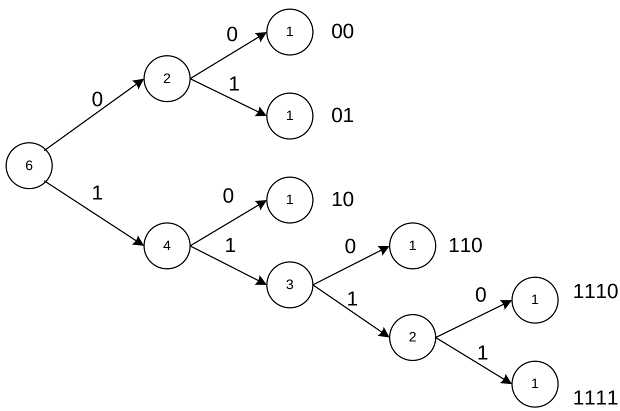


Рисунок 6 – Структурная система счисления
с неравной длиной чисел

Множество чисел этой системы счисления представляет собой префиксный код, потому что ни одно из приведенных на рис. 6 чисел не является началом другого. Так как для этой системы счисления не просматривается никакого правила построения, то ее следует отнести к табличной.

Историческая справка

Наиболее ранние формы представления чисел основывались на группировании предметов в классы. На основании такого подхода вавилонские математики предложили шестидесятеричную систему счисления, хорошо уже известную к 1750 г. до н.э.

Система по основанию 20 была известна в Центральной Америке у индейцев Майя около 2000 лет назад. Они уже тогда употребляли в своих записях знак нуля.

У греков для проведения вычислений широко использовалась счётная доска – абака, в которой были начерчены строки и столбцы, соответствующие десятичной системе счисления.

Используемая сегодня десятичная система счисления впервые появилась в Индии. Там же появился нуль и его современная форма записи. В первых вариантах десятичной системы старший разряд записывался справа, а младший слева и только через значительный промежуток времени запись этих разрядов была изменена на обратную. После 700 года н.э. эта система счисления попала к арабам в Персию (Иран). Решающее значение по распространению десятичной системы счисления оказала книга по арифметике Леонардо Пизано (Фибоначчи), вышедшая в 1202 году.

Вначале десятичная система счисления применялась только к целым числам. Десятичные дроби появились в 10 веке в трактате по арифметике, написанном в Дамаске математиком под именем «аль Уклидиси» (последователь Эвклида), а затем математиком аль-Коши, умершем в 1429 году.

Операции с десятичными дробями в Европе начали производиться в 15 веке. Используемый при этом метод умножения был назван турецким. Затем появились работы по десятичным дробям Кристофа Рудольфа в 1522 году, Франсуа Виста в 1579 году и Симона Стевина в 1585 году. В результате в течении 17 века десятичные дроби распространились по всем странам Европы, в том числе и в России.

Особую историю имеет двоичная система счисления. Многие первобытные племена использовали элементы двоичного счёта, группируя подсчитываемые предметы по два. Чисто двоичная система счисления появилась впервые в 1605 году в неопубликованных работах американского учёного Томаса Хэрриота.

Первый опубликованный анализ двоичной системы счисления появился в работе испанского священника Хуана де Кармюэля Лобковица в 1670 году, затем она была исследована в статье Лейбница Г.В. в 1703г.

После этого двоичная система счисления становится известной системой и применялась для вычисления степеней, а также при анализе некоторых игр и головоломок.

Арчибальд Р.К. собрал более 20 работ по этой теме, написанных в то время.

Антон Глейзер в своей книге 1981 года History of Binary and Other Nondecimal Numeration привёл исчерпывающую информацию по двоичной системе счисления.

Дискуссии, состоявшиеся по двоичной системе счисления в начале 20 века, приведены в статье Э.Уильяма Филипса «Двоичные вычисления».

Следует отметить, что в первых ЭВМ в США, созданных в начале 40-х годов, использовалась десятичная арифметика и только затем, начиная с 1946 г., стала использоваться двоичная.

Кроме десятичной и двоичной систем счисления неоднократно предлагались системы счисления с другими основаниями. Но то, что любое натуральное число большее 1 может быть основанием системы счисления, впервые доказал в 1658 году Блез Паскаль. Он также предлагал перейти к 12-ричной системе счисления.

Эрхард Вайгель, начиная с 1673 года, в своих публикациях предлагал использовать четверичную систему счисления. Ее же предлагал использовать и Джошуа в работе Duodecimal Arithmetick в 1687 году.

Король Швеции Карл XII в 1717 году увлёкся восьмеричной арифметикой и собирался ввести её в Швеции. Однако его гибель в одной из битв помешала ему это сделать. Эта система была также предложена около 1750 года в Америке Хью Джонсом, профессором колледжа «Уильям и Мэри» и описана Тэйлором А.Б. в 1887 году.

Спустя 100 лет американец, швед по национальности, Джон Нистром предложил 16-ричную систему счисления.

В дальнейшем появились экзотические системы счисления с дробными, иррациональными, отрицательными основаниями. Последние из них впервые описаны Витторио Грюнвальдом в 1885 году. Затем были предложены системы счисления с комплексными основаниями, например, $2i$, $\sqrt{2}\ \ i$, i-1, а также уравновешенная троичная система исчисления, в которой используются цифры 0,+1,-1.

Позиционные системы счисления с отрицательными цифрами были предложены Дж. Колсоном в 1726 году и Дж. Лесли в 1817 году.

Биномиальные системы счисления, о которых будет идти речь ниже, это уже новый класс систем счисления (структурных), отличительной особенностью которых является то, что вес разрядов их чисел зависит не только от их позиций в числе, а и от значений цифр предшествующих старших разрядов.

1.4 Однородные позиционные системы счисления

Однородные (естественные) позиционные системы счисления это наиболее распространенный на практике класс систем счисления, так как к ним относятся шестнадцатеричная, десятеричная, восьмеричная, двоичная системы счисления, широко используемые при устном и машинном счете.

Цифры однородных систем счисления используют обычно арабскую символику 0, 1,…, 9, к которой в случае необходимости добавляются буквы из латинского алфавита, например, A B C D E F для шестнадцатеричной системы счисления, где A соответствует десятичному числу 10, B - 11, C - 12, D - 13, E - 14, F - 15.

Совокупность используемых цифр, представляемых в той или иной однородной системе счисления, образуют её *алфавит* A, а число цифр q в алфавите A является *основанием* этой системы счисления.

Количество разрядов n, используемых для записи числа, называется *длиной* числа или *разрядностью*.

Отношение

$$S_i = \frac{q^i}{q^0}, \qquad (20)$$

где $i = 0,1,...,n-1$ - номер разряда, а q^i - его *вес*. Однородное число $F_{\langle q \rangle}$ кодируется с помощью последовательности знаков $x_{n-1}x_{n-2}...x_i...x_0$, где $x_i \in A$.

Количественный эквивалент однородного позиционного числа $F_{\langle q \rangle}$ находится с помощью числовой функции

$$F_{\langle q \rangle} = x_{n-1}q^{n-1} + x_{n-2}q^{n-2} + ... + x_0 q^0, \qquad (21)$$

где

$$0 \le x_i \le q-1, \qquad (22)$$

$i = 0,1,...,n-1$.

Неравенство (22) представляет собой ограничение однородных позиционных систем счисления, которое является наиболее простым ограничением позиционных систем счисления.

Пример 8

$$A_{\langle 10\rangle} = 123 = 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 = 1\cdot 100 + 2\cdot 10 + 3\cdot 1 = 123_{\langle 10\rangle}.$$

Пример 9 $A_{\langle 5\rangle} = 123_{\langle 5\rangle} = 1\cdot 5^2 + 2\cdot 5^1 + 3\cdot 5^0 = 38_{\langle 10\rangle}$.

Особое значение для ЭЦВМ имеет двоичная система счисления, так как она легко реализуется с помощью элементов с двумя устойчивыми состояниями.

Пример 10

$$A_{\langle 2\rangle} = 1011_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11_{\langle 10\rangle}.$$

Диапазон представляемых в однородной позиционной системе счисления чисел представляется *степенной* функцией

$$P = q^n. \qquad (23)$$

Поэтому однородные системы счисления называются еще *степенными*.

Минимальное число, представляемое в однородной системе счисления, $F_{\min} = 0$, а максимальное

$$F_{\max} = P - 1 = q^n - 1. \qquad (24)$$

Арифметические операции в однородных позиционных системах счисления

1. Сложение

Операция сложение чисел в однородных позиционных системах счисления происходит в соответствии с таблицами сложения, которые задаются основаниями систем счисления q (табл. 2, 3, 4, 5). При этом 1 переноса в старший разряд в этих таблицах не учитывается.

Так соответственно для двоичной, восьмеричной, десятичной и шестнадцатеричной систем счисления это будут следующие таблицы:

Таблица 2 – Сложение для двоичной системы счисления

	0	1
0	0	1
1	1	0

Пример 11. Сложить два числа $A_{\langle 2\rangle} = 1101$ и $B_{\langle 2\rangle} = 1011$ в двоичной системе счисления.

Решение

$$\begin{array}{r} 1101_{\langle 2\rangle} \\ + \\ 1011_{\langle 2\rangle} \\ \hline 11000_{\langle 2\rangle} \end{array}$$

Проверка: $1101_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 13_{\langle 10\rangle}$;

$1011_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 11_{\langle 10\rangle}$;

$11000_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 24_{\langle 10\rangle}$;

$13_{\langle 10\rangle} + 11_{\langle 10\rangle} = 24_{\langle 10\rangle}$.

Таблица 3 – Сложение для восьмеричной системы счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

Пример 12. Сложить два числа $A_{\langle 8\rangle} = 517$ и $B_{\langle 8\rangle} = 243$ в восьмеричной системе счисления.

Решение.

$$\begin{array}{r} 243_{\langle 8\rangle} \\ + \\ 517_{\langle 8\rangle} \\ \hline 762_{\langle 8\rangle} \end{array}$$

Проверка: $243_{\langle 8\rangle} = 2\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = 163_{\langle 10\rangle}$;

$$517_{\langle 8\rangle} = 5\cdot 8^2 + 1\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 = 335_{\langle 10\rangle};$$

$$762_{\langle 8\rangle} = 7\cdot 8^2 + 6\cdot 8^1 + 2\cdot 8^0 = 498_{\langle 10\rangle};$$

$$163_{\langle 10\rangle} + 335_{\langle 10\rangle} = 498_{\langle 10\rangle}.$$

Таблица 4 – Сложение для десятичной системы счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Таблица 5 –Сложение для шестнадцатеричной системы счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*
C	*C*	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*
D	*D*	*E*	*F*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*
E	*E*	*F*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*
F	*F*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*

Пример 13. Сложить два числа $A_{\langle 16\rangle} = A1B$ и $B_{\langle 16\rangle} = 11F$ в шестнадцатеричной системе счисления.

Решение.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} A1B_{\langle 16\rangle} \\ 11F_{\langle 16\rangle} \end{array} \\ \hline B3A_{\langle 16\rangle} \end{array}$$

Проверка:

$A1B_{\langle 16\rangle} = 10\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 11\cdot 16^0 = 2560 + 16 + 11 = 2587_{\langle 10\rangle}$;

$11F_{\langle 16\rangle} = 1\cdot 16^2 + 1\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 = 256 + 16 + 15 = 287_{\langle 10\rangle}$;

$B3A_{\langle 16\rangle} = 11\cdot 16^2 + 3\cdot 16^1 + 10\cdot 16^0 = 2816 + 48 + 10 = 2874_{\langle 10\rangle}$;

$2587_{\langle 10\rangle} + 287_{\langle 10\rangle} = 2874_{\langle 10\rangle}$.

2. Вычитание

Для операции вычитания применяются специальные таблицы, которые также как и для сложения задаются с помощью оснований систем счисления q (см. табл. 6, 7, 8, 9). В них учитывается 1 заема из старшего разряда.

Таблица 6 - Вычитание для двоичной системы счисления

	0	1
0	0	1
1	1	0

Пример 14 Вычесть из числа $A_{\langle 2\rangle} = 1101$ число $B_{\langle 2\rangle} = 1011$.

Решение.

$$\begin{array}{r} 1101_{\langle 2\rangle} \\ -\ 1011_{\langle 2\rangle} \\ \hline 0010_{\langle 2\rangle} \end{array}$$

Проверка:

$$1101_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 13_{\langle 10\rangle},$$

$$1011_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 11_{\langle 10\rangle},$$

$$0010_{\langle 2\rangle} = 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 2_{\langle 10\rangle},$$

$$13_{\langle 10\rangle} - 11_{\langle 10\rangle} = 2_{\langle 10\rangle}.$$

Таблица 7 – Вычитание для восьмеричной системы счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	7	6	5	4	3	2	1
1	1	0	7	6	5	4	3	2
2	2	1	0	7	6	5	4	3
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	3	2	1	0	7	6	5
5	5	4	3	2	1	0	7	6
6	6	5	4	3	2	1	0	7
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Пример 15. Вычесть из числа $A_{\langle 8\rangle} = 517$ число $B_{\langle 8\rangle} = 243$.

Решение

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{l} 517_{\langle 8\rangle} \\ 243_{\langle 8\rangle} \end{array} \\ \hline 254_{\langle 8\rangle} \end{array}$$

Проверка:

$$517_{\langle 8\rangle} = 5\cdot 8^2 + 1\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 = 335_{\langle 10\rangle},$$

$$243_{\langle 8\rangle} = 2\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = 163_{\langle 10\rangle},$$

$$254_{\langle 8\rangle} = 2\cdot 8^2 + 5\cdot 8^1 + 4\cdot 8^0 = 172_{\langle 10\rangle},$$

$$335_{\langle 10\rangle} - 163_{\langle 10\rangle} = 172_{\langle 10\rangle}.$$

Таблица 8 – Вычитание для десятичной системы счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2
2	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3
3	3	2	1	0	9	8	7	6	5	4
4	4	3	2	1	0	9	8	7	6	5
5	5	4	3	2	1	0	9	8	7	6
6	6	5	4	3	2	1	0	9	8	7
7	7	6	5	4	3	2	1	0	9	8
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Таблица 9 – Вычитание для шестнадцатеричной системы счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
0	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6	5	4	3	2
2	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6	5	4	3
3	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6	5	4
4	4	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6	5
5	5	4	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6
6	6	5	4	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7
7	7	6	5	4	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
A	*A*	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*
B	*B*	*A*	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*	*C*
C	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	*F*	*E*	*D*
D	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	*F*	*E*
E	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	*F*
F	*F*	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Пример 16. Вычесть из числа $A1B_{\langle 16\rangle}$ число $11F_{\langle 16\rangle}$.

Решение

$$
\begin{array}{r}
A1B_{\langle 16\rangle} \\
-\;11F_{\langle 16\rangle} \\
\hline
8FC_{\langle 16\rangle}
\end{array}
$$

Проверка:

$A1B_{\langle 16\rangle} = 2587_{\langle 10\rangle}$,

$11F_{\langle 16\rangle} = 287_{\langle 10\rangle}$,

$2587_{\langle 10\rangle} - 287_{\langle 10\rangle} = 2300_{\langle 10\rangle}$,

$8FC_{\langle 16\rangle} = 9 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = 2048 + 240 + 12 = 2300_{\langle 10\rangle}$.

3. Умножение

Выполняется на основе таблиц умножения и сложения по основанию q (см. табл. 10, 11, 12, 13).

Эти таблицы строятся путем умножения множимого (слева) на множитель (справа) в десятичной системе счисления и затем результат умножения (произведение) представляется в q-ичной системе счисления путем разложения по степеням в соответствии с формулой (21).

Например, для десятичной системы счисления после умножения 5 на 4 получаем результат 20. Представив этот результат с помощью выражения (21) в восьмеричной системе счисления, получим, что

$20_{\langle 10\rangle} = 2 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = 24_{\langle 8\rangle}$.

Поэтому в табл. 11 в клетке, стоящей на пересечении строки, соответствующей цифре 5, и столбца, соответствующего цифре 4, будет стоять результат перемножения цифры 5 на 4 в восьмеричной системе счисления равный $24_{\langle 8\rangle}$.

Аналогично в табл. 13 для шестнадцатеричной системы счисления на пересечении строки «5» и столбца «4» будет стоять число

$14_{\langle 16\rangle} = 1 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = 20_{\langle 10\rangle}$, а на пересечении той же строки «5» и столбца «9» число

$$2D_{\langle 16\rangle} = 2\cdot 16^1 + D\cdot 16^0 = 2\cdot 16^1 + 13\cdot 16^0 = 45_{\langle 10\rangle}.$$

Таблица 10 - Умножение для двоичной системы счисления

	0	1
0	0	0
1	0	1

Пример 17. Перемножить числа $A_{\langle 2\rangle} = 1101$ и $B_{\langle 2\rangle} = 1011$ в двоичной системе счисления.

Решение

$$\begin{array}{r} 1101_{\langle 2\rangle} \\ \times \quad 1011_{\langle 2\rangle} \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ 0000 \\ 1101 \\ \hline 10001111_{\langle 2\rangle} \end{array}$$

Проверка:

$1101_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 13_{\langle 10\rangle}$;

$1011_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 11_{\langle 10\rangle}$;

$13\times 11 = 143_{\langle 10\rangle}$;

$$10001111_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 =$$
$$= 128 + 8 + 4 + 2 + 1 = 143_{\langle 10\rangle}.$$

Таблица 11 – Умножение для восьмеричной системы счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Пример 18. Перемножить число $A_{\langle 8\rangle}=517$ на число $B_{\langle 8\rangle}=243$ в восьмеричной системе счисления.

Решени.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 243_{\langle 8\rangle} \\ 517_{\langle 8\rangle} \end{array} \\ \hline 1755 \\ 2474 \\ 1236 \\ \hline 152515_{\langle 8\rangle} \end{array}$$

Проверка:

$517_{\langle 8\rangle}=5\cdot 8^2+1\cdot 8^1+7\cdot 8^0=335_{\langle 10\rangle}$;

$243_{\langle 8\rangle}=2\cdot 8^2+4\cdot 8^1+3\cdot 8^0=163_{\langle 10\rangle}$;

$335\times 163=54605_{\langle 10\rangle}$;

$$152515_{\langle 8\rangle}=1\cdot 8^5+5\cdot 8^4+2\cdot 8^3+5\cdot 8^2+1\cdot 8^1+5\cdot 8^0=$$
$$=32768+20480+1024+320+8+5=54605_{\langle 10\rangle}.$$

Таблица12 – Умножение для
десятичной системы счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Таблица 13 – Умножение для
шестнадцатеричной системы счисления

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Пример 19. Перемножить число $A1B_{\langle 16 \rangle}$ на число $11F_{\langle 16 \rangle}$ в шестнадцатеричной системе счисления.

Решение

$$\begin{array}{r} A1B_{\langle 16\rangle} \\ \times\ \ 11F_{\langle 16\rangle} \\ \hline 9795 \\ A1B \\ A1B \\ \hline B5445_{\langle 16\rangle} \end{array}$$

Проверка:

$A1B_{\langle 16\rangle} = 2587_{\langle 10\rangle}$;

$11F_{\langle 16\rangle} = 287_{\langle 10\rangle}$;

$2587_{\langle 10\rangle} \times 287_{\langle 10\rangle} = 742469_{\langle 10\rangle}$;

$$B5445_{\langle 16\rangle} = 11\cdot 16^4 + 5\cdot 16^3 + 4\cdot 16^2 + 4\cdot 16^1 + 5\cdot 16^0 =$$
$$= 720896 + 20480 + 1024 + 64 + 5 = 742469_{\langle 10\rangle}.$$

Пользуясь приведенными таблицами умножения, легко осуществить умножение чисел в соответствующих системах счисления.

3. Деление

Выполняется на основе таблиц умножения и вычитания по основанию q по обычным правилам до получения остатка меньшего делителя.

Пример 20 Разделить число $1101_{\langle 2\rangle}$ на число $1011_{\langle 2\rangle}$ в двоичной системе счисления.

$$\begin{array}{r|l} \_1101 & 1011 \\ \cline{2-2} \underline{\ 1011} & 1 \\ 10 & \end{array}$$

Проверка.

Частное от деления, очевидно, равно 1, а остаток $10_{\langle 2\rangle} = 2_{\langle 10\rangle}$. Деление числа $13_{\langle 10\rangle} = 1101_{\langle 2\rangle}$ на число $11_{\langle 10\rangle} = 1011_{\langle 2\rangle}$ в десятичной системе счисления даст тот же результат.

$$\begin{array}{r|l} -13 & 11 \\ \cline{2-2} \underline{11} & 1 \\ 2 & \end{array}$$

Пример 21. Разделить число $517_{\langle 8\rangle}$ на число $243_{\langle 8\rangle}$ в восьмеричной системе счисления.

$$\begin{array}{r|l} -517 & 243 \\ \cline{2-2} \underline{506} & 2 \\ 11 & \end{array}$$

Проверка:

$517_{\langle 8\rangle} = 5\cdot 8^2 + 1\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 = 335_{\langle 10\rangle}$;

$243_{\langle 8\rangle} = 2\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = 163_{\langle 10\rangle}$;

$11_{\langle 8\rangle} = 9_{\langle 10\rangle}$;

$2_{\langle 8\rangle} = 2_{\langle 10\rangle}$;

$$\begin{array}{r|l} -335_{\langle 10\rangle} & 163_{\langle 10\rangle} \\ \cline{2-2} \underline{326} & 2 \\ 9 & \end{array}$$

Пример 22. Разделить число $A1B_{\langle 16\rangle}$ на число $11F_{\langle 16\rangle}$ в шестнадцатеричной системе счисления.

$$\begin{array}{r|l} -A1B_{\langle 16\rangle} & 11F_{\langle 16\rangle} \\ \cline{2-2} \underline{A17} & 9 \\ 4 & \end{array}$$

Проверка:

$A1B_{\langle 16\rangle} = 2587_{\langle 10\rangle}$;

$11F_{\langle 16\rangle} = 287_{\langle 10\rangle}$.

$$\begin{array}{r|l} -2587_{\langle 10\rangle} & 287_{\langle 10\rangle} \\ \cline{2-2} \underline{2583} & 9 \\ 4 & \end{array}$$

1.5 Перевод чисел из одной системы счисления в другую

1. Табличный метод перевода

Создается таблица, содержащая числа одной системы счисления и соответствующие им числа другой. Процедура перевода состоит в том, что находится строка, в которой стоит переводимое исходное число и в этой же строке ищется число, представленное в системе счисления, в которую происходит перевод исходного (см. табл. 14). Недостатком такого перевода является громоздкость таблиц при большом количестве переводимых чисел, а достоинством – большая скорость преобразования. В перспективе с ростом емкости запоминающих устройств такой перевод может оказаться вполне эффективным и практичным. Сегодня он применяется в отдельных специальных случаях, особенно в быстродействующих специализированных цифровых устройствах.

Таблица 14 - Перевод двоичных чисел в десятичные

Десятичные числа	Двоичные числа	Десятичные числа	Двоичные числа
00	0000	08	1000
01	0001	09	1001
02	0010	10	1010
03	0011	11	1011
04	0100	12	1100
05	0101	13	1101
06	0110	14	1110
07	0111	15	1111

2. Перевод чисел в систему счисления с кратным основанием

Этот метод эффективен в случае, когда основания преобразуемых систем счисления кратны между собой. Например, когда требуется перевести десятичное число в пятеричную систему счисления или наоборот. В этом случае основание 10 десятичной системы счисления нацело делится на основание 5 пятеричной системы счисления.

В результате, например, число 17 из десятичной системы счисления можно преобразовать следующим образом:

$$17_{\langle 10\rangle} = 1\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 = 2\cdot 5^1 + 1\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0 = 3\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0 = 32_{\langle 5\rangle}.$$

3. Перевод чисел путем подбора степеней

Суть этого метода заключается в том, что исходное число представляется суммой произведений различных степеней нового основания на максимально возможные коэффициенты, выбранные таким образом, чтобы эта сумма была как можно ближе к переводимому числу, но не больше его. При этом степени можно подбирать из соответствующей таблицы. Первой степенью выбирается та, которая дает максимальное число, не превышающее исходное десятичное число.

Например, требуется перевести десятичное число $123_{\langle 10\rangle}$ в двоичное. Максимальной степенью числа 2, не превышающей число 123, будет число $2^6 = 64 < 123$. Следующая степень $2^7 = 128 > 123$. Степенью в сумме с предыдущей суммой, не превышающей число 123, будет $2^5 = 32$ (32 + 64 = 98 < 123), затем степень $2^4 = 16$ (16 +32 + 64 = 112 <123) и $2^3 = 8$ (8 + 16 + 32 + +64 =120 < 123). Степень $2^2 = 4$ следует пропустить, потому что $4+8+16+32+64=124>123$, зато оставляется степень $2^1 = 2$ и степень $2^0 = 1$, так как $2+8+16+32+64=122<123$ и, наконец, $1+2+8+16+32+64=123$.

Следовательно, двоичным числом равным по количественному эквиваленту числу $123_{\langle 10\rangle}$ будет число

$$1111011_{\langle 2\rangle} = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 123_{\langle 10\rangle}.$$

Аналогично можно произвести перевод десятичного числа в 16-ричную систему счисления, например, число $377_{\langle 10\rangle}$:

$$377_{\langle 10\rangle} = 1\cdot 16^2 + 7\cdot 16^1 + 9\cdot 16^0 = 179_{\langle 16\rangle}.$$

Отличие перевода в данном примере от рассмотренного выше перевода в двоичную систему счисления, состоит в том, что умножение степени происходило на 1 или 0. В случае умножения на 0 она исключалась из суммы степеней нового числа. В данном случае каждую новую степень нужно умножить на число из 0, 1, …, 15 и найти среди них наибольшее число, при котором сумма произведений еще не превышает исходное переводимое число.

4. Перевод чисел с основанием, являющимся степенью исходной

В случае, если происходит преобразование чисел из системы счисления с основанием q, являющимся m-й степенью основания p системы счисления, в которую происходит преобразование, т.е. $q = p^m$, то каждая цифра преобразуемого числа может быть представлена m цифрами в системе счисления с основанием p и в результате будет получено требуемое число.

Пример 23 Дано восьмеричное число $12156_{\langle 8\rangle}$ с $q = 8$. Требуется перевести его в двоичную систему счисления, т.е. с $p = 2$.

Решение. Очевидно, что $8 = 2^3$.

Поэтому $12156_{\langle 8\rangle} = 001\,010\,001\,101\,110_{\langle 2\rangle}$.

При переводе из системы счисления с основанием p в систему счисления с основанием q цифры переводимого числа, начиная с младших разрядов, объединяются по m разрядов и дальше записываются с помощью одной цифры в q-й системе счисления.

Пример 24 Дано двоичное число $111001111111_{\langle 2\rangle}$. Требуется преобразовать его в 16-ричное.

Решение. Исходя из соотношения $2^4 = 16$ получим, что

$1110\,0111\,1111_{\langle 2\rangle} = E7F_{\langle 16\rangle}$.

5. Перевод чисел в систему счисления на основе промежуточного преобразования цифр

В основу данного перевода положена числовая функция позиционных чисел (21), данная в разделе 1.4.

В соответствии с этой функцией каждая цифра исходного числа и основание q преобразуются в систему счисления с основанием p, а затем выполняются все арифметические операции, предусмотренные в функции.

Пример 25. Перевести десятичное число $121_{\langle 10\rangle}$ в двоичное.

Решение

1. Преобразуем все цифры числа и основание q в двоичную систему счисления:

$$1_{\langle 10\rangle} = 0001_{\langle 2\rangle},\ 2_{\langle 10\rangle} = 0010_{\langle 2\rangle},\ 10_{\langle 10\rangle} = 1010_{\langle 2\rangle}.$$

2. Вычислим

$$(1010)^2 = 1010 \times 1010 = 1100100 \text{ и } 2 \times 10 = 0010 \times 1010 = 10100.$$

3. Подставим полученные значения в числовую функцию (21) для числа $121_{\langle 10\rangle}$, получим искомое выражение

$$121_{\langle 10\rangle} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 =$$

$$= 0001 \times 1100100 + 0010 \times 1010 + 0001 \times 1010 =$$

$$= 1100100 + 10100 + 0001 = 1111001_{\langle 2\rangle}.$$

Пример 26. Перевести двоичное число $1001110_{\langle 2\rangle}$ в десятичное.

Решение. Записав числовую функцию искомого числа в двоичной форме и выполнив в десятичном виде все указанные в ней арифметические операции, получим искомое десятичное число

$$1001110_{\langle 2\rangle} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$$

$$= 64 + 8 + 4 + 2 = 78_{\langle 10\rangle}.$$

6. Перевод чисел на основе использования промежуточной системы счисления

Идея состоит в том, чтобы с целью упрощения или ускорения перевода использовать промежуточную систему счисления.

Пример 27. Перевести десятичное число 121 в двоичную систему счисления с использованием в качестве промежуточной восьмеричной системы счисления.

Решение. Преобразуем одним из известных методов число 121 в восьмеричную систему счисления: $121_{\langle 10\rangle} = 171_{\langle 8\rangle}$.

Затем из восьмеричной системы счисления перейдем к двоичной $171_{\langle 8\rangle} = 1111001_{\langle 2\rangle}$.

7. *Перевод чисел в систему счисления путем деления на её основание*

Это универсальный и наиболее широко используемый алгоритм перевода чисел из системы счисления с основанием *q* в систему счисления с основанием *p*.

Он содержит следующие шаги:

1. Разделить переводимое число в системе счисления с основанием *q* на основание *p* по правилу *q*-ой системы счисления.

2. Проверить, не равно ли частное нулю. Если не равно, то принять его за новое число и вернуться к пункту 1.

3. Если частное равно нулю, то выписать все полученные остатки от деления в порядке обратном порядку их получения.

4. Полученная запись есть запись числа в системе счисления с основанием *p*.

Пример 28

Перевести число $38_{\langle 10\rangle}$ в пятеричную систему счисления

Решение.

$$\begin{array}{llllll}
-38 & \vert\, \underline{5} & & & & \\
\underline{35} & & -7 & \vert\, \underline{5} & & \\
3 & & \underline{5} & & -1 & \vert\, \underline{5} \\
 & & 2 & & \underline{0} & 0 \\
 & & & & 1 &
\end{array}$$

Ответ: $38_{\langle 10\rangle} = 123_{\langle 5\rangle}$.

Пример 29

Перевести число $11_{\langle 10 \rangle}$ в двоичную систему счисления

Решение:

```
_11 | 2
 10  ‾‾‾‾
  1   _5 | 2
       4  ‾‾‾‾
       1   _2 | 2
            2  ‾‾‾‾
            0   _1 | 2
                 0  ‾‾‾‾
                 1   0
```

Ответ: $11_{\langle 10 \rangle} = 1011_{\langle 2 \rangle}$.

Пример 30 Перевести число $1101110_{\langle 2 \rangle}$ в десятичную систему счисления путем деления на основание 10.

Решение. Предварительно представим число 10 в двоичной системе счисления $10_{\langle 10 \rangle} = 1010_{\langle 2 \rangle}$.

Затем используем вышеописанный алгоритм преобразования, производя в нем деление по правилам двоичной системы счисления:

```
_1101110 | 1010
 1010    |‾‾‾‾‾‾
 _0111   | _1011 | 1010
  0000       1010 |‾‾‾‾‾‾
  _1111      0001 | _0001 | 1010
   1010             0000 |‾‾‾‾‾
   _1010            0001 | 0
    1010
    0000
```

Полученные остатки в двоичной системе выписываются последовательно друг за другом в порядке обратном порядку их получения и затем переводятся в десятичные цифры:

$$0001_{\langle 2 \rangle} = 1_{\langle 10 \rangle},\ 0001_{\langle 2 \rangle} = 1_{\langle 10 \rangle},\ 0000_{\langle 2 \rangle} = 0_{\langle 10 \rangle}.$$

Последовательность этих цифр образует искомое десятичное число $110_{\langle 10 \rangle} = 1101110_{\langle 2 \rangle}$.

Пример 31. Перевести восьмеричное число $521_{\langle 8\rangle}$ в десятичную систему счисления.

Решение. Так как $10_{\langle 10\rangle} = 12_{\langle 8\rangle}$, то, выполняя деление десятичного числа 521 по правилам восьмеричной системы счисления, получим

$$\begin{array}{r|r|r|r}
-521 & 12 & & \\
\underline{50} & 41 & 12 & \\
-21 & \underline{36} & -3 & 12 \\
\underline{12} & 3 & \underline{0} & 0 \\
7 & & 3 &
\end{array}$$

Ответ: $521_{\langle 8\rangle} = 337_{\langle 10\rangle}$.

Пример 32. Перевести шестнадцатеричное число $9BE5_{\langle 16\rangle}$ в десятичную систему счисления и провести проверку решения.

Решение. Учитывая, что в шестнадцатеричной системе счисления $10_{\langle 10\rangle} = A$, делим число $9BE5_{\langle 16\rangle}$ на A по правилам шестнадцатеричной системы счисления, используя для этого соответствующие таблицы умножения и вычитания.

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
-9BE5 & A & & & & \\
\underline{96} & -F96 & A & & & \\
-5E & \underline{A} & -18F & A & & \\
\underline{5A} & -59 & \underline{14} & -27 & A & \\
-45 & \underline{50} & 4F & \underline{1E} & -3 & A \\
\underline{3C} & -96 & \underline{46} & 9 & \underline{0} & 0 \\
9 & \underline{96} & 9 & & 3 & \\
 & 0 & & & &
\end{array}$$

Ответ: $9BE5_{\langle 16\rangle} = 39909_{\langle 10\rangle}$.

Проверка:

```
_39909 | 16
 32    | _2494 | 16
 _79      16   | _155 | 16
  64     _89     144  | _9 | 16
 _150     80      11    0  | 0
  144    _94            9
   _69    80
    64    14
     5
```

Ответ: $39909_{\langle 10\rangle} = 9BE5_{\langle 16\rangle}$.

Необходимость введения дополнительных символов в 16-ричной системе счисления может вызвать у начинающих программистов некоторые трудности, так как необходимо все время обращаться к таблицам вычитания и умножения в шестнадцатеричной системе счисления.

Эти трудности можно несколько уменьшить, если вместо символов *A, B, C, D, E, F* в шестнадцатеричной системе счисления воспользоваться десятичными цифрами соответственно 10, 11, 12, 13, 14, 15, выделяя их с двух сторон в числах точками. Тогда шестнадцатеричное число $9BE5_{\langle 16\rangle} = 9.11.14.5_{\langle 16\rangle}$, а перевод его в десятичную систему счисления будет иметь следующий вид:

```
_9.11.14.5 | 10
 9.6       | _15.9.6 | 10
 _5.14        10     | _ 1.8.15 | 10
  5.10       _5.9       1.4     | _2.7 | 10
   _4.5       5.0      _4.15      1.14 | _3 | 10
    3.12     _9.6       4.6          9    0 | 0
       9      9.6         9               3
               0
```

Получен результат, соответствующий ответу задачи примера 32.

Обращение к таблицам умножения и вычитания в этом случае можно избежать, если производить непосредственный перевод из 10-ой в 16-ричную систему счисления при каждой операции умножения и вычитания, что может оказаться проще, чем искать ответ в таблицах.

Например, при поиске частного от деления 9.11 на 10 следует перевести 9.11 из 16-ричной системы счисления в 10

$9 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 155_{\langle 10 \rangle}$.

Тогда деление 155 на 10 даст целое значение 15, которое и ставим в виде первой цифры частного. Затем после умножения 15 на 10 происходит перевод числа $150_{\langle 10 \rangle}$ в 16-ричную систему счисления ($150_{\langle 10 \rangle} = 9.6_{\langle 16 \rangle}$) и уже это число $9.6_{\langle 16 \rangle}$ вычитается из делимого. Аналогично можно получить и остальные цифры частного.

Пример 33 Преобразовать 16-ричное число $7B4_{\langle 16 \rangle}$ в десятичную систему счисления.

Решение. Представим число $7B4_{\langle 16 \rangle}$ в виде числа 7.11.4 и разделим его на A = 10.

```
_7.11.4 | 10
 7.8    |______
 ----   | _12.5 | 10
 _3.4      10   |______
  3.2      ----  | _1.3 | 10
  ---     _2.5      10  |_____
    2      1.14     --  | _1 | 10
           ----      9     0 |____
              7            -  | 0
                           1
```

Ответ: $7B4_{\langle 16 \rangle} = 1972_{\langle 10 \rangle}$.

Проверка:

```
_1972 | 16
 16   |______
 --   | _123 | 16
 _37     112 |____
  32     --- |  7
  --      11
  _52
   48
   --
    4
```

$7.11.4 = 7B4_{\langle 16 \rangle}$.

Часть 2 Теория биномиального счета

2.1 Биномиальные системы счисления

Определение 1 *Биномиальными системами счисления называются позиционные системы счисления с биномиальными коэффициентами в качестве оснований.*

В данной работе будут рассмотрены линейные биномиальные системы счисления с двоичным алфавитом $A=\{0, 1\}$ и с числовыми функциями

$$F = x_{r-1}C_{n-1}^{k-q_{r-1}} + \ldots + x_i C_{n-r+i}^{k-q_i} + \ldots + x_1 C_{n-r+1}^{k-q_1} + x_0 C_{n-r}^{k-q_0}, \qquad (1)$$

которые обладают следующей системой кодообразующих ограничений:

$$\begin{cases} k \le r \le n-1, & (2) \\ q = k, & (3) \\ x_0 = 1 & (4) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} n-k = r-q, & (5) \\ 0 \le q \le k-1, & (6) \\ x_0 = 0\quad, & (7) \end{cases}$$

где r - количество разрядов биномиального числа (длина),

$r \in 1, 2, \ldots;$

k - максимальное количество единиц $q_{\max}$ в биномиальном числе;

i - порядковый номер разряда, $i = 0, 1, \ldots, r - 1$;

x_i - биномиальная двоичная цифра - 0 или 1;

n - целочисленный параметр системы счисления;

q - число единиц в биномиальном числе;

q_i - сумма единичных значений цифр x_i от $(r -1)$ – го разряда до $(i +1)$ - го включительно:

$$q_i = \sum_{j=i+1}^{r} x_j\ ; \qquad (8)$$

$i = 0, 1, \ldots, r-1$; $x_r = 0$.

Функции (1, 8) и системы ограничений (2 - 4) и (5 -7) получены с более общих соображений, вытекающих из теории структурных систем счисления.

В качестве весового коэффициента *i*-го разряда в числовой функции (1) выступает биномиальный коэффициент $C_{n-r+i}^{k-q_i}$. Он зависит как от позиции i = 0, 1,…, r - 1 рассматриваемого разряда, так и от суммы q_i предшествующих этому разряду двоичных значений цифр x_i. Последняя зависимость характерна только для структурных систем счисления и придает им помехоустойчивые и структурообразующие свойства.

Пример 1. Дано двоичное биномиальное число 1100010 длины $r = 7$ с параметрами $n = 9$, $k = 5$.

Требуется с помощью числовой функции F найти десятичный номер этого числа.

Решение.

1. В соответствии с (8) найдем величины q_i для значащих разрядов с $x_i = 1$, $i = 0,1,...,r-1$:

$$q_0 = \sum_{j=1}^{7} x_j = 3,\ q_1 = \sum_{j=2}^{7} x_j = 2,\ q_5 = \sum_{j=6}^{7} x_j = 1, q_6 = \sum_{j=7}^{7} x_j = 0.$$

2. Подставив полученные в пункте 1 значения q_i в выражение (1) получим значение числовой функции

$$F = C_{9-7+6}^{5-0} + C_{9-7+5}^{5-1} + C_{9-7+1}^{5-2} + C_{9-7+0}^{5-3} = C_8^5 + C_7^4 + C_3^3 + C_2^2 =$$

$$= \frac{8!}{5!3!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{3!}{3!0!} + \frac{2!}{2!0!} = 56 + 35 + 1 + 1 = 93.$$

Ответ. Таким образом, двоичному биномиальному числу 1100010 соответствует десятичный номер 93.

Упражнение. С помощью числовой функции (1) доказать соответствие десятичных номеров, приведенных в табл. 1, с двоичными биномиальными числами с $n = 7$ и $k = 3$.

Таблица 1 – Биномиальные числа с $n=7$ **,** $k=3$

Ном.	Биномиальные числа	Ном.	Биномиальные числа	Ном.	Биномиальные числа
0	0 0 0 0	12	0 1 0 0 1 1	24	1 0 0 1 0 **1**
1	0 0 0 1 0	13	0 1 0 1 0 0	25	1 0 0 1 1
2	0 0 0 1 1 0	14	0 1 0 1 0 1	26	1 0 1 0 0 **0**
3	0 0 0 1 1 1	15	0 1 0 1 1	27	1 0 1 0 0 **1**
4	0 0 1 0 0	16	0 1 1 0 0 0	28	1 0 1 0 1
5	0 0 1 0 1 0	17	0 1 1 0 0 1	29	1 0 1 1
6	0 0 1 0 1 1	18	0 1 1 0 1	30	1 1 0 0 0 **0**
7	0 0 1 1 0 0	19	0 1 1 1	31	1 1 0 0 0 **1**
8	0 0 1 1 0 1	20	1 0 0 0 0	32	1 1 0 0 1
9	0 0 1 1 1	21	1 0 0 0 1 0	33	1 1 0 1
10	0 1 0 0 0	22	1 0 0 0 1 1	34	1 1 1
11	0 1 0 0 1 0	23	1 0 0 1 0 0		

2.2 Свойства биномиальных чисел

Каждая система счисления должна удовлетворять ряду требований, предъявляемых к системам счисления вообще. Это, прежде всего существование и единственность (однозначность) представления числа и затем его эффективность, выражающаяся в наличии алгоритма перехода за конечное число шагов от кода числа, представленного в той или иной системе счисления, к самому числу (номеру). Ещё одним требованием, выдвигаемым к числам, является конечность их длины, которое обычно является очевидным и не требует доказательства.

Требование существования числа в биномиальной системе счисления может быть удовлетворено путем построения чисел, соответствующих системам ограничений (2 - 4) и (5 - 7). Эти числа могут быть реализованы только в том случае, если указанные ограничения не являются внутренне противоречивыми.

Определение 2. *Любая конечная последовательность двоичных цифр* x_{r-1}, ..., x_1, x_0, *удовлетворяющая ограничениям (2-4) или (5-7), называется биномиальным числом.*

Лемма 1. ***Количество нулей в биномиальных числах длины r, задаваемых ограничениями* (2 - 4),**

$$\boldsymbol{l = r - k.} \tag{9}$$

Доказательство. Количество нулей l в биномиальных числах равно разнице между их длиной r и числом содержащихся в них единиц q:
$l = r - q$.

Ограничение (3) показывает, что $q = k$. Следовательно, $l = r - k$. ***Лемма доказана***.

Теорема 1. ***Количество возможных нулей, содержащихся в биномиальных числах, образуемых ограничениями (2 - 4),*** $\boldsymbol{l = 0,1,...,n - k - 1}$, ***а количество возможных единиц, образуемых ограничениями (5-7),*** $\boldsymbol{q = 0,1,...,k - 1}$.

Доказательство. Так как из ограничения (2) системы ограничений (2-4) следует, что минимальное значение $r = r_{\min} = k$, а максимальное $r = r_{\max} = n - 1$, то соответственно, подставив $r_{\min}$ и $r_{\max}$ в полученное в лемме 1 выражение $l = r - k$, получим, что $l = l_{\min} = 0$ и $l = l_{\max} = n - k - 1$. Остальные возможные значения l для промежуточных значений r находятся в пределах между $l_{\min}$ и $l_{\max}$ и соответственно $l = 0, 1, ..., n - k - 1$.

Из ограничения (6) системы ограничений (5 - 7) следует, что $q = q_{\min} = 0$ и $q = q_{\max} = k - 1$. Остальные возможные значения q очевидно находятся в пределах между $q_{\min}$ и $q_{\max}$. Поэтому $q = 0, 1, ..., k - 1$. ***Теорема доказана***.

Теорема 2. ***Количество нулей в биномиальных числах, задаваемых ограничениями (5 - 7),***

$$\boldsymbol{l = n - k}. \tag{10}$$

Доказательство. Количество нулей l в биномиальных числах равно разности между их длиной r и числом содержащихся в них единиц q:
$l = r - q$.

Из ограничения (5) следует, что число единиц в биномиальном числе $q = r - (n - k)$. Подставив последнее равенство в предыдущее, получим, что $l = n - k$. ***Теорема доказана***.

Теорема 3. ***Максимальная длина биномиальных чисел, задаваемых ограничениями (5 - 7),***

$$\boldsymbol{r_{\max} = n - 1}, \tag{11}$$

а минимальная

$$\boldsymbol{r_{\min} = n - k}. \tag{12}$$

Доказательство. Из ограничения (5) вытекает, что $r = n - k + q$, а из ограничения (6) следует, что максимальное значение $q = q_{\max} = k - 1$. Тогда $r = r_{\max} = n - k + q_{\max} = n - k + k - 1 = n - 1$. Из (6) следует, что минимальное значение $q = q_{\min} = 0$ и соответственно $r = r_{\min} = n - k + q_{\min} = n - k$. ***Теорема доказана.***

Теорема 4. ***Количество различных длин биномиальных чисел, задаваемых ограничениями (2 - 4),***

$$\boldsymbol{d_1 = n - k}\,, \tag{13}$$

а ограничениями (5 - 7),

$$\boldsymbol{d_0 = k}\,. \tag{14}$$

Доказательство. Так как непосредственно из ограничения (2) следует, что $r_{\max} = n-1$, а $r_{\min} = k$, то количество различных длин биномиальных чисел, определяемых ограничениями (2 - 4), находится из выражения

$d_1 = r_{\max} - r_{\min} + 1 = (n-1) - k + 1 = n - k$.

Для биномиальных чисел, удовлетворяющих ограничениям (5-7), из теоремы 3 следует, что $r_{\max} = n-1$ и $r_{\min} = n-k$. Тогда количество различных длин биномиальных чисел, задаваемых ограничениями (5 - 7), определится из выражения

$d_0 = r_{\max} - r_{\min} + 1 = (n-1) - (n-k) + 1 = k$.

Теорема доказана.

Теорема 5. ***Минимальная возможная величина максимального числа единиц k в биномиальном числе***

$$\boldsymbol{k_{\min} = 1}\,, \tag{15}$$

а максимальная

$$\boldsymbol{k_{\max} = n - 1}\,. \tag{16}$$

Доказательство. Так как из ограничения (6) следует, что, с одной стороны, число единиц в биномиальном числе $q \le k-1$, а с другой $q \ge 0$, то минимальное значение q, при котором оба приведенные выше условия для ограничений (5 - 7) еще выполняются, будет $q = 0$ и соответственно $k = k_{\min} = 1$.

Из леммы 1 следует, что длина биномиальных чисел $r = k + l$. Подставив последнее выражение в ограничение (2), получим следующее неравенство: $k \le k + l \le n-1$.

Минимальное число нулей в биномиальных числах для ограничений (2 - 4), как это следует из теоремы 1, $l = l_{\min} = 0$. Подставив это значение в полученное выше выражение, получим, что при $l = l_{\min} = 0$ и соответственно $r = k$,

$k = k_{\max} = n - 1$.

Теорема доказана.

Следствие 1. ***В случае, когда*** $\boldsymbol{k_{\max} = k_{\min} = 1}$, ***значение*** $\boldsymbol{n = n_{\min} = 2}$. ***Таким образом, n = 2, 3, ...***

Теорема 6. ***Ограничения (2 - 4) и (5 - 7) разбивают биномиальные числа на два непересекающихся класса, первый из которых содержит числа с k единицами и l, 0 ≤ l ≤ n - k - 1, нулями, а второй – с n - k нулями и q,*** $\boldsymbol{0 \le q \le k - 1}$, ***единицами.***

Доказательство. Ограничения (2 - 4) порождают биномиальные числа, содержащие $q = k$ единиц, и соответственно из теоремы 1 следует, что эти числа содержат $l = 0,1,...,n - k - 1$ нулей. Поэтому имеет место неравенство $0 \le l \le n - k - 1$.

В соответствии с теоремой 2 ограничения (5-7) порождают числа с количеством нулей $l = n - k$, в которые входят q, $0 \le q \le k - 1$, единиц.

Сравнивая числа, порождаемые теми или другими ограничениями, приходим к выводу, что биномиальные числа, удовлетворяющие ограничениям (2-4), не соответствуют числам, порождаемым ограничениями (5-7) и наоборот. Других биномиальных чисел, кроме порождаемых ограничениями (2-4) и (5-7), не существует.

Следовательно, каждое биномиальное число может принадлежать только к одному из двух классов биномиальных чисел: удовлетворяющих ограничениям (2-4) или ограничениям (5-7).

Теорема доказана.

Следствие 1. ***Биномиальные числа первого класса заканчиваются единицей, а второго – нулем.***

Следует из ограничений 4 и 7, которые показывают, что при появлении k-й единицы или $(n - k)$-го нуля необходимый признак окончания формирования биномиального числа получен.

Лемма 2. ***Количество биномиальных чисел первого класса с фиксированным числом нулей l, 0 ≤ l ≤ n - k - 1,***

$$\boldsymbol{N_l = C_{k+l-1}^{l}}. \qquad (17)$$

Доказательство. Так как в конце каждого биномиального числа первого класса в соответствии со следствием 1 теоремы 6 стоит 1, то общее число биномиальных чисел длины r для заданного l

$N_l = C_{r-1}^{l}$.

Так как в соответствии с леммой 1 длина чисел из заданного класса $r = k + l$, то $r - 1 = k + l - 1$ и соответственно

$N_l = C_{k+l-1}^{l}$.

Лемма доказана.

Следствие 1. ***При*** $\boldsymbol{l = l_{\max} = n - k - 1}$

$$\boldsymbol{N_l = N_{l_{\max}} = C_{k+l_{\max}-1}^{l_{\max}} = C_{n-2}^{n-k-1} = C_{n-2}^{k-1}}. \qquad (18)$$

Следствие 2. ***При*** $\boldsymbol{l = l_{\min} = 0}$

$$\boldsymbol{N_l = N_{l_{\min}} = C_{k-1}^{0} = 1}. \qquad (19)$$

Теорема 7. ***Количество биномиальных чисел первого класса***

$$\boldsymbol{N_k = C_{n-1}^{k}}. \qquad (20)$$

Доказательство. Суммируя полученные в лемме 2 значения N_l по всем возможным $l = 0,1,\ldots,n-k-1$, получим количество всех биномиальных чисел, содержащих k единиц:

$$N_k = \sum_{l=0}^{n-k-1} N_l = \sum_{l=0}^{n-k-1} C_{k+l-1}^{l} = C_{n-2}^{n-k-1} + \ldots + C_k^1 + C_{k-1}^{0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k-1} C_{n-2-j}^{n-k-1-j} = C_{n-1}^{n-k-1} = C_{n-1}^{k}.$$

Теорема доказана.

Лемма 3. ***Количество биномиальных чисел второго класса с фиксированным числом единиц q, 0 ≤ q ≤ k – 1,***

$$\boldsymbol{N_q = C^{q}_{n-k+q-1}}\,. \qquad (21)$$

Доказательство. Так как в соответствии со следствием 1 теоремы 6 в конце каждого из биномиальных чисел рассматриваемого класса стоят нули, то общее число биномиальных чисел при заданном q должно определяться числом сочетаний q единиц из r -1 элементов:
$N_q = C^{q}_{r-1}$.

Учитывая то, что $r = l + q = n - k + q$,
$N_q = C^{q}_{n-k+q-1}$.
Лемма доказана.

Следствие 1. ***При*** $\boldsymbol{q = q_{\max} = k-1}$

$$\boldsymbol{N_q = N_{q_{\max}} = C^{q_{\max}}_{n-k+q_{\max}-1} = C^{k-1}_{n-k+k-1-1} = C^{k-1}_{n-2}}\,. \qquad (22)$$

Следствие 2. ***При*** $\boldsymbol{q = q_{\min} = 0}$

$$\boldsymbol{N_q = N_{q_{\min}} = C^{0}_{n-k-1} = 1}\,. \qquad (23)$$

Теорема 8. ***Количество биномиальных чисел второго класса***

$$\boldsymbol{N_{n-k} = C^{k-1}_{n-1}}\,. \qquad (24)$$

Доказательство. Суммируя полученные в лемме 3 значения N_q по всем возможным $q = 0,1,\ldots,k-1$, получим количество всех биномиальных чисел, содержащих $n-k$ нулей:

$$N_{n-k} = \sum_{q=0}^{k-1} N_q = \sum_{q=0}^{k-1} C^{q}_{n-k+q-1} = C^{k-1}_{n-2} + \ldots + C^{1}_{n-k} + C^{0}_{n-k-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} C^{k-1-j}_{n-2-j} = C^{k-1}_{n-1}.$$

Теорема доказана.

Теорема 9. ***Количество биномиальных чисел, задаваемых ограничениями (2 - 4) и (5 - 7),***

$$\boldsymbol{N = C_n^k}. \qquad (25)$$

Доказательство. Так как $N = N_k + N_{n-k}$, то, подставив вместо N_k и N_{n-k} их значения из выражений (20) и (24), получим, что

$N = N_k + N_{n-k} = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$.

Теорема доказана.

Следствие 1. ***Диапазон биномиальных чисел***

$$\boldsymbol{P = C_n^k}. \qquad (26)$$

Определение 3. *Совокупность биномиальных чисел первого класса, содержащая* k *единиц и фиксированное число* $l = 0,1,...,n-k-1$ *нулей, называется подклассом первого класса.*

Определение 4. *Совокупность биномиальных чисел второго класса, содержащая* $n-k$ *нулей и фиксированное число* $q = 0,1,...,k-1$ *единиц, называется подклассом* q *второго класса.*

Предположим, что даны два подкласса l' и l'' биномиальных чисел первого класса, где l', $l'' = 0,1,...,n-k-1$, один из которых содержит $N_{l'}$ биномиальных чисел, а другой - $N_{l''}$. При этом $l'' \geq l'$.

Теорема 10 $$\boldsymbol{N_{l''} \geq N_{l'}}. \qquad (27)$$

Доказательство. В соответствии с леммой 2 $N_{l'} = C_{k-1+l'}^{l'}$, $N_{l''} = C_{k-1+l''}^{l''}$. Так как $l'' \geq l'$, то $l'' = l' + \alpha$, где $\alpha = 0,1,2,...,n-k-1$, и соответственно

$C_{k-1+l''}^{l''} = C_{k-1+l'+\alpha}^{l'+\alpha} \geq C_{k-1+l'}^{l'}$.

В результате приходим к выводу, что

$N_{l''} \geq N_{l'}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. ***Подкласс первого класса с большим числом биномиальных чисел обладает числами большей длины и наоборот.***

Следует из того, что $r = k + l$ и соответственно длины чисел второго класса $r'' = k + l''$ больше длин чисел первого класса. $r' = k + l'$.

Предположим, что даны два $q',\ q''$ подкласса биномиальных чисел второго класса, где $q',\ q'' = 0,1,...,k-1$, один из которых содержит $N_{q'}$ биномиальных чисел, а другой - $N_{q''}$. При этом выполняется условие $q'' \geq q'$.

Теорема 11

$$\boldsymbol{N_{q''} \geq N_{q'}}. \tag{28}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 3 $N_{q'} = C_{n-k+q'-1}^{q'}$, $N_{q''} = C_{n-k+q''-1}^{q''}$. Так как $q'' \geq q'$, то $q'' = q' + \alpha$,

где $\alpha = 0,1,2,...,k-1$, и соответственно

$$C_{n-k-1+q''}^{q''} = C_{n-k-1+q'+\alpha}^{q'+\alpha} \geq C_{n-k-1+q'}^{q'}.$$

В результате приходим к выводу, что

$N_{q''} \geq N_{q'}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. ***Подкласс второго класса с большим числом биномиальных чисел обладает числами большей длины и наоборот.***

Следует из того, что $r = n - k + q$, и соответственно длины чисел второго класса $r'' = n - k + q''$ больше длин чисел первого класса $r' = n - k + q'$.

Теорема 12. ***Если*** $\boldsymbol{l'' = l' + 1}$***, то***

$$\boldsymbol{N_{l''} - N_{l'} = \frac{k-1}{l'+1} N_{l'}}. \tag{29}$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $N_{l'} = C_{k-1+l'}^{l'}$ и $N_{l''} = C_{k-1+l''}^{l''}$. Так как $l'' = l' + 1$, то $N_{l''} = C_{k+l'-1+1}^{l'+1}$.

Тогда $N_{l''} - N_{l'} = C_{k+l'-1+1}^{l'+1} - C_{k+l'-1}^{l'} = C_{k+l'-1}^{l'+1}$. Так как $C_{k+l'-1}^{l'+1} =$

$$= \frac{(k+l'-1)!}{(l'+1)!(k-2)!} = \frac{(k-1)}{(l'+1)} \cdot \frac{(k+l'-1)!}{l'!(k-1)!} = \frac{k-1}{l'+1} C_{k+l'-1}^{l'} = \frac{k-1}{l'+1} N_{l'},$$

то, подставив правую часть последнего равенства в правую часть предыдущего, получим требуемое выражение. ***Теорема доказана.***

Теорема 13. ***Если*** $l'' = l' + 1$***, то***

$$\frac{\boldsymbol{N_{l''}}}{\boldsymbol{N_{l'}}} = \frac{\boldsymbol{k+l'}}{\boldsymbol{l'+1}}. \tag{30}$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $N_{l'} = C_{k-1+l'}^{l'}$ и $N_{l''} = C_{k-1+l''}^{l''}$. Так как $l'' = l' + 1$, то

$$N_{l''} = C_{k+l'-1+1}^{l'+1} = \frac{(k+l')!}{(l'+1)!\ \ (k-1)!} = \frac{(k+l')}{(l'+1)} \cdot \frac{(k+l'-1)!}{l'!\ \ (k-1)!} =$$

$$= \frac{k+l'}{l'+1} C_{k+l'-1}^{l'} = \frac{k+l'}{l'+1} N_{l'}.$$

Разделив $N_{l''}$ на $N_{l'}$, получим требуемое равенство.

Теорема доказана.

Данный результат можно получить и на основании теоремы 12. Для этого преобразуем выражение (29) следующим образом:

$$N_{l''} = \frac{k-1}{l'+1} N_{l'} + N_{l'} = N_{l'} \left(\frac{k-1}{l'+1} + 1 \right) = N_{l'} \left(\frac{k-1+l'+1}{l'+1} \right) = \frac{k+l'}{l'+1} N_{l'}.$$

Теорема 14

$$\boldsymbol{N_{l'+\alpha} = N_{l'} \frac{k+l'}{l'+1} \cdot \frac{k+(l'+1)}{(l'+1)+1} \times \ldots \times \frac{k+(l'+(\alpha-1))}{(l'+(\alpha-1))+1}}, \qquad (31)$$

$\boldsymbol{\alpha = 1, 2, \ldots, n-k-1-l'}$ **;**
$\boldsymbol{l' = 0, 1, \ldots, n-k-2}$ **.**

Доказательство. Проведем его методом математической индукции. Как следует из теоремы 13, при $\alpha = 1$

$$N_{l'+1} = N_{l'} \frac{k+l}{l'+1}.$$

Это значит, что основание для проведения математической индукции получено.

Допустим теперь, что доказываемая теорема справедлива для некоторого $\alpha = z$:

$$N_{l'+z} = N_{l'} \frac{k+l'}{l'+1} \cdot \frac{k+(l'+1)}{(l'+1)+1} \times \ldots \times \frac{k+(l'+(z-1))}{(l'+(z-1))+1}.$$

Докажем теперь, что также истинно и равенство

$$N_{l'+(z+1)} = N_{l'} \frac{k+l'}{l'+1} \cdot \frac{k+(l'+1)}{(l'+1)+1} \times \ldots \times \frac{k+(l'+(z-1))}{(l'+(z-1))+1} \cdot \frac{k+(l'+z)}{(l'+z)+1}.$$

Для этого представим равенство для $N_{l'+(z+1)}$ в следующем виде:

$$N_{l'+(z+1)} = N_{l'+z} \frac{k+(l'+z)}{(l'+z)+1}.$$

Так как в соответствии с теоремой 13 равенство

$$N_{(l'+z)+1} = N_{l'+z} \frac{k+(l'+z)}{(l'+z)+1}$$

справедливо, то справедливо и равенство

$$N_{l'+(z+1)} = N_{l'+z} \frac{k+(l'+z)}{(l'+z)+1}.$$

Теорема доказана.

Формулу (31) можно получить и исходя из следующих соображений:

$$N_{l'+1} = N_{l'} \frac{k+l'}{l'+1};$$

$$N_{l'+2} = N_{(l'+1)+1} = N_{l'+1} \frac{k+(l'+1)}{(l'+1)+1} = N_{l'} \frac{k+l'}{l'+1} \cdot \frac{k+(l'+1)}{(l'+1)+1};$$

……………………………………………………………

$$N_{l'+\alpha} = N_{(l'+\alpha-1)+1} = N_{l'+\alpha-1} \frac{k+(l'+(\alpha-1))}{(l'+(\alpha-1))+1} =$$

$$= N_{l'} \frac{k+l'}{l'+1} \times \ldots \times \frac{k+(l'+\alpha-1))}{(l'+(\alpha-1))+1}.$$

Следствие 1. ***При*** $\boldsymbol{l'=0 \quad N_{l'} = C_{k-1-l'}^{l'} = C_{k-1}^{0} = 1}$ ***и соответственно*** $\boldsymbol{N_{l'+\alpha} = N_\alpha = 1\frac{k}{1}\frac{k+1}{2}\cdots\frac{k+\alpha-1}{\alpha} =}$

$$\boldsymbol{= \frac{k(k+1)...(k+\alpha-1)(k-1)!}{\alpha!(k-1)!} = C_{k+\alpha-1}^{\alpha} = C_{k-1+\alpha}^{k-1}}. \qquad (32)$$

Следствие 2. ***При*** $\boldsymbol{l'=0,\ \alpha=1}$

$$\boldsymbol{N_{l'+\alpha} = C_k^1 = k}. \qquad (33)$$

Теорема 15. ***Если*** $\boldsymbol{q''=q'+1}$***, то***

$$\boldsymbol{N_{q''} - N_{q'} = \frac{n-k-1}{q'+1} N_{q'}}. \qquad (34)$$

Доказательство. Из леммы 3 следует, что $N_{q'} = C_{n-k+q'-1}^{q'}$, $N_{q''} = C_{n-k+q''-1}^{q''}$. Так как $q''=q'+1$, то $N_{q''} = C_{n-k+q'-1+1}^{q'+1}$. Тогда

$$N_{q''} - N_{q'} = C_{n-k+q'-1+1}^{q'+1} - C_{n-k+q'-1}^{q'} = C_{n-k+q'-1}^{q'+1}.$$

Так как

$$C_{n-k+q'-1}^{q'+1} = \frac{(n-k+q'-1)!}{(q'+1)!(n-k-2)!} = \frac{(n-k-1)}{(q'+1)} \frac{(n-k+q'-1)!}{q'!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n-k-1}{q'+1} C_{n-k+q'-1}^{q'} = \frac{n-k-1}{q'+1} N_{q'},$$

то, подставив правую часть последнего равенства в правую часть предыдущего, получим требуемое выражение. ***Теорема доказана.***

Теорема 16. ***Если q'' = q' + 1, то***

$$\boldsymbol{\frac{N_{q''}}{N_{q'}} = \frac{n-k+q'}{q'+1}}. \tag{35}$$

Доказательство. Из леммы 3 следует, что $N_{q'} = C_{n-k+q'-1}^{q'}$ и $N_{q''} = C_{n-k+q''-1}^{q''}$. Так как $q'' = q' + 1$, то $N_{q''} = C_{n-k+q'-1+1}^{q'+1} =$

$$= \frac{(n-k+q')!}{(q'+1)!\ (n-k-1)!} = \frac{n-k+q'}{q'+1} \ \frac{(n-k+q'-1)!}{q'!\ (n-k-1)!} = \frac{n-k-q'}{q'+1} C_{n-k+q'-1}^{q'} =$$

$= \dfrac{n-k+q'}{q'+1} N_{q'}$. Разделив $N_{q''}$ на $N_{q'}$, получим требуемое равенство. ***Теорема доказана.***

Выражение (35) можно получить другим путем, преобразовав выражение (34) следующим образом:

$$N_{q''} = N_{q'}\left(1 + \frac{n-k-1}{q'+1}\right) = N_{q'}\left(\frac{q'+1+n-k-1}{q'+1}\right) = N_{q'} \frac{n-k+q'}{q'+1}.$$

Теорема 17. $$\boldsymbol{N_{q'+\beta} = N_{q'} \frac{n-k+q'}{q'+1} \cdot \frac{n-k+(q'+1)}{(q'+1)+1} \times \ldots \times}$$

$$\boldsymbol{\times \frac{n-k+(q'+\beta-1)}{(q'+(\beta-1))+1}}; \tag{36}$$

$\boldsymbol{\beta = 1, 2, \ldots, k-1-q'}$;

$\boldsymbol{q' = 0,1,...,k-2}$.

Доказательство $N_{q'+1} = N_{q'}\dfrac{n-k+q'}{q'+1}$;

$$N_{q'+2} = N_{(q'+1)+1} = N_{q'+1}\frac{n-k+(q'+1)}{(q'+1)+1};$$

....

$$N_{(q'+\beta-1)+1} = N_{q'+\beta-1}\frac{n-k+(q'+\beta-1)}{(q'+(\beta-1))+1} =$$

$$= N_{q'}\frac{n-k+q'}{q'+1}\cdot\frac{n-k+(q'+1)}{(q'+1)+1}\times\ldots\times\frac{n-k+(q'+\beta-1)}{(q'+(\beta-1))+1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. ***При*** $\boldsymbol{q' = 0}$

$$\boldsymbol{N_{q'+\beta} = N_{\beta} = 1\times\frac{n-k}{1}\times\frac{n-k-1}{2}\ldots\frac{n-k+\beta-1}{\beta} =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{(n-k)(n-k+1)\ldots(n-k+\beta-1)(n-k-1)!}{\beta!\,(n-k-1)!} = \frac{(n-k+\beta-1)!}{\beta!\,(n-k-1)!} =}$$

$$\boldsymbol{= C^{\beta}_{n-k+\beta-1}}. \qquad (37)$$

Следствие 2. ***При*** $\boldsymbol{q' = 0}$, $\boldsymbol{\beta = 1}$

$$\boldsymbol{N_{q'+\beta} = C^{1}_{n-k} = n-k}. \qquad (38)$$

Таким образом, проведенный выше анализ доказывает существование биномиальных чисел, удовлетворяющих ограничениям (2 - 4), (5 - 7), и определяет их количество для исходных параметров n и k биномиальной системы счисления.

Биномиальные числа подразделяются на два основных класса: первый содержит k единиц и $l = 0,1,...,n-k-1$ нулей, а второй -

соответственно n - k нулей и $q = 0,1,...,k-1$ единиц. Длина чисел первого класса $r = k + l$, а второго - $r = n - k + q$.

Первый класс, содержащий k единиц, оканчивается 1, а второй, содержащий n- k нулей, - 0.

Каждый из двух классов биномиальных чисел, в свою очередь, разбивается на подклассы, отличающиеся длиной, как минимум на 1 разряд, и количеством входящих в них чисел. Количество различных длин и соответственно подклассов биномиальных чисел первого класса равно n - k, а второго - k .

Количество единиц в биномиальных числах первого класса $q = k$, а второго - $q = r - n + k$.

Количество нулей в биномиальных числах первого класса $l = r - k$, а второго - $l = n - k$.

Минимальная длина биномиальных чисел первого класса $r_{\min} = k$, а второго - $r_{\min} = n - k$.

Максимальная длина биномиальных чисел первого и второго классов $r_{\max} = n - 1$.

Количество биномиальных чисел, входящих в первый класс, равно C_{n-1}^{k}, а во второй - C_{n-1}^{k-1}. В сумме эти числа образуют диапазон биномиальных чисел $P = C_n^k$.

Количество биномиальных чисел в l -м, $l = 0,1,...,n-k-1$, подклассе первого класса

$$N_l = C_{k+l-1}^{l},$$

а в q - м, $q = 0,1,...,k-1$, подклассе второго класса

$$N_q = C_{n-k+q-1}^{q}.$$

Из двух подклассов одного и того же класса обладает большим количеством биномиальных чисел тот, у которого длина чисел больше и наоборот.

В первом классе существует подкласс, содержащий одно, состоящее только из единиц, биномиальное число. Его длина r минимальна и равна k. Это подкласс с наименьшим количеством биномиальных чисел среди всех подклассов первого класса.

Во втором классе существует подкласс, который содержит одно состоящее из нулей биномиальное число, длина которого $r = n - k$ минимальна. Это подкласс с наименьшим количеством биномиальных чисел среди всех подклассов второго класса.

Количество биномиальных чисел с максимальной длиной $r_{\max} = n - 1$ для первого и второго классов одинаково и равно C_{n-2}^{k-1}. Эти числа в своих классах образуют подклассы с максимальным количеством биномиальных чисел.

Пример 2. Допустим, что n = 6, k = 4. Требуется определить все параметры соответствующих биномиальных чисел и затем сформировать их.

Число всех чисел $P = C_n^k = C_6^4 = 15$. Они разбиваются на 2 класса, в первый из которых входят $N_k = C_{n-1}^k = C_5^4 = 5$ чисел, содержащих по k = 4 единицы и l = 0, 1 нулей, а во второй класс входят $N_{n-k} = C_{n-1}^{k-1} = C_5^3 = 10$ чисел, содержащих по $n - k = 6 - 4 = 2$ нуля и q = 0, 1, 2, 3 единиц.

Первый класс разбивается на $n - k = 6 - 4 = 2$ подкласса с длинами чисел $r = k + 0 = 4$, $r = k + 1 = 5$, каждое из которых содержит по k = 4 единицы. Количество чисел среди них, имеющих максимальное число нулей $l_{\max} = n - k - 1 = 6 - 4 - 1 = 1$ и соответственно максимальную длину $r_{\max} = n - 1 = 6 - 1 = 5$,

$$N_{l_{\max}} = C_{n-2}^{k-1} = C_4^3 = 4.$$

Количество чисел, имеющих минимальное количество нулей $l_{\min} = 0$ и соответственно минимальную длину $r_{\min} = k + 0 = 4$ $r = k + 0 = 4$,

$$N_{l_{\min}} = C_{k-1}^0 = 1.$$

Числа, образующие 2 подкласса первого класса с соответственно максимальным и минимальным количеством биномиальных чисел, будут следующими:

01111 1111.
10111
11011
11101

Других подклассов в первом классе нет.

Второй класс биномиальных чисел с n - k = 6 - 4 = 2 нулями разбивается на k = 4 подкласса с $q = 0,1,2,3$, и соответственно с длинами биномиальных чисел $r = n - k + 0 = 2$, $r = n - k + 1 = 3$, $r = n - k + 2 = 4$, $r = n - k + 3 = 5$. Количество биномиальных чисел в каждом подклассе $N_0 = C^0_{6-4+0-1} = 1$, $N_1 = C^1_{6-4+1-1} = 2$, $N_2 = C^2_{6-4+2-1} = 3$, $N_3 = C^3_{6-4+3-1} = 4$.

Они распределяются по подклассам следующим образом:

00	010	0110	01110
	100	1010	10110
		1100	11010
			11100.

Самое большое количество биномиальных чисел с 3 единицами относится к 3-му подклассу, отличающемуся наибольшей длиной входящих в него чисел, а наименьшее количество этих чисел минимальной длины, состоящее из одного числа без единиц, относится к нулевому подклассу.

2.3 Свойства параметров коэффициентов биномиальной числовой функции

Числовая функция (1) биномиальной системы счисления основана на биномиальных коэффициентах, которые определяют вес каждого разряда биномиального числа и имеют два параметра – верхний $\gamma_i = k - q_i$ и нижний $\alpha_i = n - r + i$. Произведя соответствующие подстановки в формулу (1) для числовой функции, получим её в виде:

$$F = x_{r-1} C^{\gamma_{r-1}}_{\alpha_{r-1}} + \ldots + x_i C^{\gamma_i}_{\alpha_i} + \ldots + x_1 C^{\gamma_1}_{\alpha_1} + x_0 C^{\gamma_0}_{\alpha_0} = \sum_{i=0}^{r-1} x_i C^{\gamma_i}_{\alpha_i} . \quad (39)$$

Обратим внимание на то, что верхний параметр γ_i биномиального коэффициента зависит от числа q_i единичных цифр в старших разрядах $i+1,...,r-1$ биномиального числа, а нижний α_i от текущего номера i (позиции) рассматриваемого разряда и длины r числа, которая для биномиальных чисел является переменной.

Таким образом, веса разрядов чисел биномиальной системы счисления являются функцией трех переменных q_i, i, r в отличие от весов разрядов чисел естественных (однородных) систем счисления, которые зависят только от i-ой позиции разряда.

Лемма 4. ***Биномиальные числа с количеством единиц*** $q=k$ ***обладают значением***

$$\gamma_0 = k - q_0 = 1\,. \qquad (40)$$

Доказательство. *Так как биномиальные числа с количеством единиц* $q=k$ *в соответствии со следствием 1 теоремы 6 в младшем разряде всегда содержат цифру* $x_0=1$*, то сумма единиц в предшествующих ему разрядах* $q_0=k-1$*. Поэтому* $\gamma_0=k-q_0=$ $=k-(k-1)=1$. **Лемма доказана**.

Теорема 18. ***Биномиальные числа с количеством нулей*** $l=n-k$ ***для всех значений*** q ***за исключением*** $q=k-1$ ***имеют*** $\gamma_0>1$***. При*** $q=k-1$ $\gamma_0=1$***.***

Доказательство. Биномиальные числа, содержащие $l=n-k$ нулей, имеют q = 0, 1, …, k-1 и в соответствии со следствием 1 теоремы 6 в их младших разрядах стоят нули. Поэтому все q единиц биномиальных чисел находятся в старших разрядах, а так как значения q_0 в соответствии с (8) представляют собой сумму единиц в разрядах предшествующих нулевому разряду биномиальных чисел, то $q_0=q$.

Соответственно, если $q=k-1$, то также и $q_0=k-1$, и поэтому $\gamma_0=k-q_0=k-(k-1)=1$. При любых других возможных значениях q

= 0, 1, …, k - 2 и соответственно $q_0 = q$ величина $\gamma_0 = k - q_0 > 1$.
Теорема доказана.

Теорема 19. ***Биномиальные числа с $q = k - 1$ и $\gamma_0 = 1$ имеют длину***

$$\boldsymbol{r = n - 1}. \tag{41}$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 18 биномиальные числа с $q = k - 1$ и $\gamma_0 = 1$ имеют значение $l = n - k$ и соответственно $r = q + l = q + n - k = k - 1 + n - k = n - 1$.

Теорема доказана.

Теорема 20. ***Количество биномиальных чисел с $\gamma_0 = 1$ и $q = k - 1$ равно***

$$\boldsymbol{N_{k-1} = C_{n-2}^{k-1}}. \tag{42}$$

Доказательство. В соответствии со следствием 1 леммы 3 количество биномиальных чисел с числом единиц $q = k - 1$, $N_{k-1} = C_{n-2}^{k-1}$. По теореме 18 все эти числа имеют $\gamma_0 = 1$.
Теорема доказана.

Теорема 21. ***Количество биномиальных чисел с*** $\gamma_0 = 1$

$$\boldsymbol{N_{\gamma_0 = 1} = \frac{n + k - 1}{k} C_{n-2}^{k-1}}. \tag{43}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 4 и теоремой 18 значение $\gamma_0 = 1$ имеют биномиальные числа с $q = k$ и $q = k - 1$. Количество чисел с $q = k$ по теореме 7 равно $N_k = C_{n-1}^{k}$, а с $q = k - 1$ по следствию 1 леммы 3 равно $N_{k-1} = C_{n-2}^{k-1}$. Общее количество биномиальных чисел с $\gamma_0 = 1$

$$N_{\gamma_0 = 1} = N_k + N_{k-1} = C_{n-1}^{k} + C_{n-2}^{k-1} =$$

$$= \frac{n-1}{k} \cdot \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{n-1}{k}+1\right) = \frac{n+k-1}{k}C_{n-2}^{k-1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. ***Так как*** $\boldsymbol{n-1=r_{max}}$ **, а** $\boldsymbol{n+k-1=r_{max}+k}$ ***, то***

$$\boldsymbol{N_{\gamma_0=1} = \frac{r_{max}+k}{k}C_{r_{max}-1}^{k-1}}. \quad (44)$$

Теорема 22. ***Минимальное значение***

$$\boldsymbol{\gamma_0 = \gamma_{0min} = 1}. \quad (45)$$

Доказательство.

Из леммы 4 и теоремы 18 следует, что если $q=k$ и $q=k-1$, то $\gamma_0=1$.

Если $q=k-2$, то при $x_0=0$ $q_0=q-x_0=k-2-0= =k-2$, а при $x_0=1$ $q_0=q-x_0=k-2-1=k-3$.

Соответственно в первом случае $\gamma_0=k-q_0=k-(k-2)=2$, а во втором $\gamma_0=k-q_0= =k-(k-3)=3$. И в том и другом случае $\gamma_0>1$.

При значениях $q<k-2$ величина γ_0 будет только возрастать и, значит, $\gamma_0>1$ при всех возможных значениях q за исключением $q=k$ и $q=k-1$. Так как в этом случае $\gamma_0=1$, то $\gamma_0=\gamma_{0\min}=1$. ***Теорема доказана***.

Теорема 23. ***Максимальное значение***

$$\boldsymbol{\gamma_0 = \gamma_{0max} = k}. \quad (46)$$

Доказательство. Величина $\gamma_0=k-q_0$ обладает максимальным значением $\gamma_{0\max}$ в случае, когда q_0 принимает своё минималь-ное значение $q_{0\min}$. Так как из ограничения (6) следует, что $q=q_{\min}=0$, то и минимальное значение $q_0=q_{0\min}=0$. Следовательно, $\gamma_0=\gamma_{0\max}=k-q_{0\min}=k-0=k$. ***Теорема доказана.***

Пример 3. Дано $n=6$, $k=4$. Требуется определить:

а) общее количество биномиальных чисел с $q = k$ и $\gamma_0 = 1$;

в) минимальную $r_{\min}$ и максимальную $r_{\max}$ длину биномиальных чисел с $q = k$ и $\gamma_0 = 1$;

с) количество длин r_l биномиальных чисел с $q = k$ и $\gamma_0 = 1$;

d) количество биномиальных чисел с заданной длиной r_l, $l = 0,1,...,n-k-1$.

Решение. Общее количество биномиальных чисел с $q = k$ и соответственно $\gamma_0 = 1$ определяется на основе теоремы 7 и равно $N_k = C_{n-1}^k = C_{6-1}^4 = C_5^4 = 5$.

Исходя из ограничения (2) получим, что минимальная длина чисел с $q = k$ и $\gamma_0 = 1$ $r_{\min} = k = 4$, а максимальная $r_{\max} = n - 1 = 5$.

В соответствии с теоремой 1 для биномиальных чисел с $q = k$ число содержащихся в них нулей $l = 0,1,...,n-k-1$. Так как $n - k - 1 = 6 - 4 - 1 = 1$, то $l = 0,\ 1$. Поэтому других длин r_l биномиальных чисел с $q = k$ и $\gamma_0 = 1$, кроме двух $r_0 = r_{\min} = 4$ и $r_1 = r_{\max} = 5$ для рассматриваемого примера не имеется.

Количество биномиальных чисел с минимальной длиной $r_{\min} = 4$ в случае $q = k$ и $\gamma_0 = 1$ в соответствии с леммой 2 будет равно $N_0 = C_{k+0-1}^0 = 1$, а максимальной, в соответствии с той же леммой 2, $r_{\max} = n - 1 = 5 - N_{n-k-1} = C_{4+1-1}^1 = 4$. ***Решение получено***.

Пример 4. Дано $n = 6,\ k = 4$. Требуется определить:

а) общее количество биномиальных чисел с $q = k - 1$ и соответственно $\gamma_0 = 1$;

в) их длину;

с) количество биномиальных чисел с $\gamma_0 = 1$.

Решение. В соответствии с теоремой 20 количество биномиальных чисел с $q = k - 1$ и соответственно $\gamma_0 = 1$ равно

$$N_{k-1} = C_{n-2}^{k-1} = C_{6-2}^{4-1} = C_4^3 = 4.$$

В соответствии с теоремой 19 длина этих чисел $r = r_{\max} = n - 1 = 6 - 1 = 5$.

В соответствии с теоремой 21 общее количество биномиальных чисел с $\gamma_0 = 1$

$$N_{\gamma_0 = 1} = \frac{n+k-1}{k} C_{n-2}^{k-1} = \frac{6+4-1}{4} C_4^3 = 9 .$$

Решение получено.

Лемма 5

$$\boldsymbol{\gamma_i = k - q_i = x_i + \gamma_{i-1}}, \qquad \textbf{(47)}$$

$\boldsymbol{i = 1, 2, ..., r-1}$.

Доказательство. Так как q_i в соответствии с (8) представляют собой сумму единиц до $i+1$-го разряда включительно, то $q_{i-1} = q_i$, если $x_i = 0$, и $q_{i-1} = q_i + 1$, если $x_i = 1$. Следовательно, в первом случае $k - q_i = k - q_{i-1}$, а во втором $k - q_i = k - q_{i-1} + 1$. Эти равенства можно представить одним выражением: $k - q_i = x_i + k - q_{i-1}$, где $x_i \in \{0,1\}$, или, с учётом того, что $\gamma_i = k - q_i$ и $\gamma_{i-1} = k - q_{i-1}$**,** получим, что $\gamma_i = x_i + \gamma_{i-1}$. ***Лемма доказана.***

Теорема 24

$$\boldsymbol{\gamma_i = \sum_{j=1}^{i} x_j + \gamma_0 = s_i + \gamma_0} . \qquad (48)$$

Доказательство. Из (47) следует, что $\gamma_{i-1} = x_{i-1} + \gamma_{i-2}$**,** $\gamma_{i-2} = $ $= x_{i-2} + \gamma_{i-3}, ..., \gamma_{i-(i-1)} ... \gamma_1 = x_1 + \gamma_0$. Произведя подстановку каждого последующего равенства в предшествующее и, в конечном итоге, в $\gamma_i = x_i + \gamma_{i-1}$ получим, что $\gamma_i = \sum_{j=1}^{i} x_j + \gamma_0$.

Теорема доказана.

Следствие 1. ***Подставив значение*** γ_i ***для всех*** $\boldsymbol{i = 0,1,...,r-1}$ ***в выражение 39, получим числовую функцию в следующем виде:***

$$\boldsymbol{F = x_{r-1}C_{\alpha_{r-1}}^{s_{r-1}+\gamma_0} + \ldots + x_iC_{\alpha_i}^{s_i+\gamma_0} + \ldots + x_1C_{\alpha_1}^{s_1+\gamma_0} +}$$
$$\boldsymbol{+x_0C_{\alpha_0}^{s_0+\gamma_0} = \sum_{i=0}^{r-1} x_iC_{\alpha_i}^{s_i+\gamma_0}}, \tag{49}$$

где $\boldsymbol{s_0 = 0}$, $\boldsymbol{s_i = \sum_{j=1}^{i} x_j}$.

Из теоремы 24 вытекает простой алгоритм определения значений γ_i для всех i –ых разрядов биномиального числа.

Он на первом шаге содержит определение величины $\gamma_0 = k - q_0 = k - s_{r-1}$ путем подсчета числа единиц в числе, начиная от его старшего $(r-1)$-го и до первого разряда включительно и затем на втором шаге - вычитание полученного результата из k .

На третьем шаге алгоритма полученное значение γ_0 складывается с числом s_i , которое определяется подсчетом количества единиц от 1-го разряда до i -го включительно. В результате находится $\gamma_i = s_i + \gamma_0$.

Так, например, для биномиальных чисел 01110, 01111 длины $r = 5$ и с $n = 6$, $k = 4$ $\gamma_0 = k - s_{r-1} = k - s_4 = 4 - 3 = 1$. Поэтому для этих чисел $\gamma_{r-1} = \gamma_4 = s_4 + \gamma_0 = 3 + 1 = 4$, $\gamma_3 = s_3 + \gamma_0 = 3 + 1 = 4$, $\gamma_2 =$ $= s_2 + \gamma_0 = 2 + 1 = 3$, $\gamma_1 = 1 + 1 = 2$.

Соответственные биномиальные числовые функции F_{01110} и F_{01111} будут при этом иметь вид:

$$F_{01110} = 0 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^4 + 1 \cdot C_3^3 + 1 \cdot C_2^2 + 0 \cdot C_1^1 = 3$$
и
$$F_{01111} = 0 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^4 + 1 \cdot C_3^3 + 1 \cdot C_2^2 + 1 \cdot C_1^1 = 4.$$

Для числа 100 $\gamma_0 = k - s_{r-1} = 4 - 1 = 3$.

Поэтому $\gamma_{r-1} = \gamma_2 = s_2 + \gamma_0 = 1 + 3 = 4,$ $\gamma_1 = s_1 + \gamma_0 = 0 + 3 = 3$, $\gamma_0 = s_0 + \gamma_0 = 0 + 3 = 3$.

Соответственно $F_{100} = 1 \cdot C_5^4 + 0 \cdot C_4^3 + 0 \cdot C_3^3 = 5$.

Теорема 25. ***Если в числовой функции*** $\boldsymbol{q = k}$ ***или*** $\boldsymbol{q = k - 1}$***, то***

$$\boldsymbol{\gamma_i = s_i + 1}. \qquad (50)$$

Доказательство. В соответствии с леммой 4 $\gamma_0 = k - q_0 = 1$, если $q = k$, и в соответствии с теоремой 18, $\gamma_0 = 1$, если $q = k - 1$. Так как в соответствии с теоремой 24

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{i} x_j + \gamma_0 = s_i + \gamma_0,$$

то $\gamma_i = s_i + 1$ в случае если $q = k$ или $q = k - 1$. ***Теорема доказана.***

Подставив в выражение (39) числовой функции F $\gamma_i = s_i + 1$, $i = 0,1,\ldots,r-1$, получим её вид для значения $q = k$ и $q = k - 1$**:**

$$F = x_{r-1}C_{\alpha_{r-1}}^{s_{r-1}+1} + \ldots + x_i C_{\alpha_i}^{s_i+1} + \ldots + x_1 C_{\alpha_1}^{s_1+1} + x_0 C_{n-r}^{1}. \qquad (51)$$

При $q = k$ биномиальное число в соответствии со следствием 1 теоремы 6 имеет в нулевом разряде $x_0 = 1$. Поэтому для $q = k$

$$F = x_{r-1}C_{\alpha_{r-1}}^{s_{r-1}+1} + \ldots + x_i C_{\alpha_i}^{s_i+1} + \ldots + x_1 C_{\alpha_1}^{s_1+1} + n - r. \qquad (52)$$

При $q = k - 1$ биномиальное число в соответствии со следствием 1 теоремы 6 имеет в нулевом разряде $x_0 = 0$. Поэтому для $q = k - 1$

$$F = x_{r-1}C_{\alpha_{r-1}}^{s_{r-1}+1} + \ldots + x_i C_{\alpha_i}^{s_i+1} + \ldots + x_1 C_{\alpha_1}^{s_1+1}. \qquad (53)$$

Лемма 6

$$\boldsymbol{s_{r-1} = q_0}. \qquad (54)$$

Доказательство. В соответствии с выражением (8) $q_0 = \sum_{j=1}^{r} x_j$ и так как по условию $x_r = 0$, то $q_0 = \sum_{j=1}^{r-1} x_j$. С другой стороны, так как $s_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$, то при $i = r - 1$ $s_{r-1} = \sum_{j=1}^{r-1} x_j$ и поэтому $s_{r-1} = q_0$.

Лемма доказана.

Теорема 26

$$\gamma_{r-1} = k\,. \tag{55}$$

Доказательство. Так как из леммы 6 следует, что $s_{r-1} = q_0$, а $\gamma_0 = k - q_0$, то при $i = r - 1$ из выражения $\gamma_i = s_i + \gamma_0$ следует, что $\gamma_{r-1} = s_{r-1} + \gamma_0 = q_0 + k - q_0 = k$. ***Теорема доказана.***

Теорема 27. ***Если $q = k$ и $l = 0$, то***

$$\gamma_i = i + 1. \tag{56}$$

Доказательство. При $q = k$ и $l = 0$ в каждом разряде биномиального числа стоит цифра $x_j = 1$. В соответствии с леммой 4 при $q = k$ $\gamma_0 = 1$. Поэтому $\gamma_i = \sum_{j=1}^{i} x_j + \gamma_0 = i + 1$.

Теорема доказана.

Теорема 28. ***При $q = k$ и $l = 0$ биномиальная числовая функция***

$$F = \sum_{i=0}^{r-1} x_i C_{n-r+i}^{\gamma_i} = C_n^k - 1. \tag{57}$$

Доказательство. При $q = k$ и $l = 0$ $r = k$. Подставив в выражение $F = \sum_{i=0}^{r-1} x_i C_{n-r+i}^{\gamma_i}$ вместо r число k, вместо $\gamma_i = k - q_i$, а также на основании теоремы 27 вместо $\gamma_i = i + 1$ и заменив все x_i на 1, получим, что $F = \sum_{i=0}^{r-1} x_i C_{n-r+i}^{\gamma_i} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-k+i}^{i+1} = C_n^k - 1$.

Теорема доказана.

Теорема 29. ***Биномиальные числа с количеством единиц $q = k$ обладают***

$$\alpha_i = n - k - l + i\,. \tag{58}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1 биномиальные числа с величиной $q=k$ обладают длиной $r=k+l$. Поэтому $\alpha_i=n-r+i=$ $=n-k-l+i$. ***Теорема доказана***.

Следствие 1. ***При*** $\boldsymbol{l=n-k-1}$

$$\boldsymbol{\alpha_i=i+1}. \tag{59}$$

Следствие 2. ***При*** $\boldsymbol{l=0}$

$$\boldsymbol{\alpha_i=i+n-k}. \tag{60}$$

Следствие 3. ***При*** $\boldsymbol{l=0,1,\dots,n-k-1}$

$$\boldsymbol{i+1\le\alpha_i\le i+n-k}. \tag{61}$$

Теорема 30. ***Биномиальные числа с*** $\boldsymbol{i=r-1}$, $\boldsymbol{q=k}$ ***и*** $\boldsymbol{l=0,1,\dots,n-k-1}$ ***обладают***

$$\boldsymbol{\alpha_{r-1}=n-1}. \tag{62}$$

Доказательство. Так как биномиальные числа с $q=k$ в соответствии с леммой 1 имеют длину $r=k+l$, то при минимальном числе содержащихся в них нулей $l=l_{\min}=0$ $r=k$. Соответственно из выражения (58) следует, что $\alpha_{r-1}=r-1+n-k=k-1+n-k=$ $=n-1$.

При максимальном числе нулей в биномиальных числах с $q=k$ $l=l_{\max}=n-k-1$ $r=k+l=k+n-k-1=n-1$. Тогда, подставив в выражение (59) вместо $i=r-1$, получим, что

$\alpha_{r-1}=r-1+1=n-1-1+1=n-1$.

Таким образом, при минимальном и максимальном числе нулей l $\alpha_{r-1}=n-1$. Из этого следует, что для любых допустимых значений $l=0,1,\dots,n-k-1$ для чисел с $q=k$ и $i=r-1$, $\alpha_{r-1}=n-1$.

Теорема доказана.

Теорема 31. ***Биномиальные числа с количеством нулей*** $\boldsymbol{l=n-k}$ ***обладают***

$$\boldsymbol{\alpha_i=k-q+i}. \tag{63}$$

Доказательство. В соответствии с ограничением (5) биномиальные числа с величиной $l = n - k$ имеют длину $r = n - k + q$. Так как $\alpha_i = \ = n - r + i$, то $\alpha_i = n - (n - k + q) + i = k - q + i$.

Теорема доказана.

Следствие 1. ***При*** $\boldsymbol{q = k - 1}$

$$\boldsymbol{\alpha_i = i + 1}. \tag{64}$$

Следствие 2. ***При*** $\boldsymbol{q = 0}$

$$\boldsymbol{\alpha_i = i + k}. \tag{65}$$

Следствие 3. ***Для*** $\boldsymbol{q = 0, 1, \ldots, n - k - 1}$

$$\boldsymbol{i + 1 \le \alpha_i \le i + k}. \tag{66}$$

Следствие 4.

$$\boldsymbol{\alpha_{i+1} = k - q + i + 1 = \alpha_i + 1}. \tag{67}$$

Теорема 32. ***Биномиальные числа с*** $\boldsymbol{i = r - 1}$, $\boldsymbol{l = n - k}$ ***и*** $\boldsymbol{q = 0, 1, \ldots, k - 1}$ ***обладают***

$$\boldsymbol{\alpha_{r-1} = n - 1}. \tag{68}$$

Доказательство. Так как биномиальные числа с $l = n - k$ в соответствии с ограничением (5) имеют длину $r = n - k + q$, то при минимальном числе содержащихся в них единиц $q = q_{\min} = 0$ $r = r_{\min} = n - k$. Подставляя это значение в выражение (65) для $i = r - 1$ получим, что $\alpha_i = i + k = r - 1 + k = n - k - 1 + k = n - 1$.

При максимальном числе единиц в биномиальных числах с числом нулей $l = n - k$ $r = n - k + q = n - k + k - 1 = n - 1$. Подставив это значение в выражение (64) при $i = r - 1$ получим, что

$\alpha_i = i + 1 = r - 1 + 1 = n - 1 - 1 + 1 = n - 1$.

Таким образом, при минимальном и максимальном числе единиц q $\alpha_{r-1} = n - 1$. Из этого следует, что для любых допустимых значений

$q = 0,1,...,k-1$ биномиальные числа с $l = n-k$ и $i = r-1$ обладают $\alpha_{r-1} = n-1$. ***Теорема доказана***.

Теорема 33. $$\alpha_i \ge \gamma_i. \qquad (69)$$

Доказательство. Допустим, что в биномиальных числах $q = k$ и соответственно $l = 0,1,...,n-k-1$. Тогда, исходя из (50), $\gamma_i = \sum_{j=1}^{i} x_j + 1$.

Из приведенного равенства следует, что максимальное значение $\gamma_i = \gamma_{i\max} = i+1$ принимает только тогда, когда все $x_j = 1$, а во всех остальных случаях $\gamma_i < i+1$. Из (61) следует, что при $q = k$ минимальное значение $\alpha_i = \alpha_{i\min} = i+1$, а во всех остальных случаях $\alpha_i > i+1$.

Поэтому при $q = k$ $\alpha_i = \gamma_i$ только в одном случае - когда все $x_j = 1$, а при наличии хотя бы некоторых значений $x_j = 0$ $\alpha_i > \gamma_i$.

Это значит, что если $q = k$, то $\alpha_i \ge \gamma_i$ при любых значениях x_j равных 0 или 1.

Допустим теперь, что для биномиальных чисел $l = n-k$ и соответственно $q = 0,1,...,n-k-1$. Тогда в соответствии со следствием 1 теоремы 6 в нулевом разряде этих чисел стоит ноль и поэтому $q_0 = q$. Так как в соответствии с теоремой 24

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{i} x_j + \gamma_0 = \sum_{j=1}^{i} x_j + k - q_0.$$

Из теоремы 31 следует, что $\alpha_i = i + k - q$ и, соответственно,

$$k - q = \alpha_i - i, \text{ то } \gamma_i = \sum_{j=1}^{i} x_j + \alpha_i - i.$$

Из последнего равенства вытекает, что $\gamma_i = \alpha_i$ только тогда, когда все цифры $x_j = 1$ и соответственно $\sum_{j=1}^{i} x_j = i$. Во всех остальных случаях

$\sum_{j=1}^{i} x_j < i$ и, значит, разность $\sum_{j=1}^{i} x_j - i < 0$. Поэтому $\alpha_i > \gamma_i$ на величину $\sum_{j=1}^{i} x_j - i$.

Это значит, что $\alpha_i \ge \gamma_i$ не только в случае, когда $q = k$, а и в случае, когда $l = n - k$, то есть указанное неравенство выполняется для любых параметров α_i и γ_i биномиальных чисел. ***Теорема доказана***.

Следствие 1

$$\boldsymbol{C_{\alpha_i}^{\gamma_i} = C_{n-r+i}^{k-q_i} \ge 1}, \qquad (70)$$

$$\boldsymbol{i = 0,\ 1,\dots,r - 1}$$

Пример 5. Дано биномиальное число 01111 с параметрами $k = 4$ и $n = 6$. Требуется представить его с помощью биномиальной числовой функции и найти его номер.

Решение. Из вида числа следует, что $r = 5$, $k = 4$, $l = 1$, $\gamma_0 = k - q_0 = 1$. Из леммы 5, по которой $\gamma_i = x_i + \gamma_{i-1}$, определяем все γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, которые соответственно равны

$\gamma_1 = x_1 + \gamma_0 = 1 + 1 = 2$, $\gamma_2 = x_2 + \gamma_1 = 1 + 2 = 3$,

$\gamma_3 = x_3 + \gamma_2 = 1 + 3 = 4$, $\gamma_4 = x_4 + \gamma_3 = 0 + 4 = 4$.

Из теоремы 27, по которой $\alpha_i = n - k - l + i$ определим:

$\alpha_0 = 6 - 4 - 1 + 0 = 1$, $\alpha_1 = 6 - 4 - 1 + 1 = 2$,

$\alpha_2 = 6 - 4 - 1 + 2 = 3$, $\alpha_3 = 6 - 4 - 1 + 3 = 4$,

$\alpha_4 = 6 - 4 - 1 + 4 = 5$.

На основе полученных значений γ_i и α_i в соответствии с выражением (39) получим биномиальную числовую функцию и её номер $F = 0C_5^4 + 1C_4^4 + 1C_3^3 + 1C_2^2 + 1C_1^1 = 4$. Таким образом, бино- миальному числу 01111 соответствует десятичный номер 4.

Пример 6. Дано биномиальное число 0110 с параметром n = 6. Требуется представить это число помощью биномиальной числовой функции и найти его номер.

Решение. По виду числа определяем, что $r=4$, $q=2$, $l=2$, $q_0=2$, $k=n-l=6-2=4$. Соответственно $\gamma_0=k-q_0=4-2=2$. На основании леммы 5 определяем все остальные γ_i, $i=0,1,2,3$, которые соответственно равны

$\gamma_1=x_1+\gamma_0=1+2=3$, $\gamma_2=x_2+\gamma_1=1+3=4$, $\gamma_3=x_3+\gamma_2=0+4=4$.

Из теоремы 31 определим все $\alpha_i=k-q+i$:

$\alpha_0=4-2+0=2$, $\alpha_1=4-2+1=3$,

$\alpha_2=4-2+2=4$, $\alpha_3=4-2+3=5$.

На основе полученных значений α_i и γ_i в соответствии с выражением (39) получим биномиальную числовую функцию для биномиального числа 0110 и её номер:

$$F=0C_5^4+1C_4^4+1C_3^3+0C_2^2=2.$$

Примечание. В соответствии со следствием 4 теоремы 31 все α_i можно получить после вычисления α_0 путем добавления к его значению последовательно единиц до получения $\alpha_i=\alpha_{r-1}=n-1$.

2.4. *Доказательство префиксности биномиальных чисел*

Полученные выше результаты показывают, что часть биномиальных чисел имеет разную длину и, следовательно, образуемый ими код является *неравномерным*. Для того чтобы такие числа можно было однозначно декодировать, необходимо, чтобы задаваемое биномиальной системой счисления множество биномиальных чисел было *префиксным*.

Требования префиксности состоит в том, чтобы ни одно биномиальное число не было *началом* другого.

Это требование не выдвигается для однородных систем счисления, так как числа в них имеют равную длину и то, что ни одно из них не может быть началом другого, является очевидным фактом.

Однако для структурных систем счисления, к которым относятся и биномиальные, наряду с четырьмя общими требованиями для всех систем счисления, такими, как существование, однозначность, конечность и эффективность, выдвигается еще и пятое требование - *префиксности* их чисел.

Теорема 34. ***Биномиальные числа являются префиксными.***

Доказательство. В соответствии с теоремой 6 множество биномиальных чисел разбивается на два больших класса, первый из которых содержит биномиальные числа с k единицами и $0,1,...,n-k-1$ нулями, а второй - с $n-k$ нулями и $0,1,...,k-1$ единицами. При этом числа первого класса заканчиваются 1, а второго - 0.

Так как числа первого класса содержат $q=k$ единиц, то при сравнении этих чисел по длине с большими или равными числами второго класса, содержащими $q \le k-1$ единиц, они будут отличаться хотя бы в одном разряде, и соответственно требование префиксности в этом случае будет выполнено.

При сравнении по длине чисел второго класса с большими или равными числами первого класса также будет наблюдаться отличие хотя бы в одном разряде, так как первые содержат $l=n-k$ нулей, а вторые $l \le n-k-1$ нулей.

Первый класс биномиальных чисел, содержащий $q=k$ единиц и $l=0,1,...,n-k-1$ нулей, состоит из $n-k$ подклассов, содержащих биномиальные числа *равной* длины. Они характеризуются фиксированным числом $0 \le l \le n-k-1$ нулей. Входящие в эти подклассы числа представляют собой сочетания $k-1$ единицы из $r-1=k+l-1$ разрядов. Так как эти числа являются сочетаниями, то очевидно, что они префиксные.

Так как рассматриваемые подклассы содержат биномиальные числа с $q=k$ единицами, то они по сравнению с числами других классов с большей длиной будут содержать как минимум 1 единицу, против которой будет стоять ноль большего числа. Значит, свойство префиксности и в этом случае будет соблюдено.

Таким образом, все биномиальные числа внутри первого класса обладают свойством префиксности.

Второй класс биномиальных чисел, содержащий $l=n-k$ нулей и $q=0,1,...,k-1$ единиц, разбивается на k подклассов, состоящих из биномиальных чисел *равной* длины с фиксированным числом q, $0 \le q \le k-1$, единиц. Входящие в эти подклассы числа представляют собой сочетания $n-k-1$ нулей из $r-1=n-k+q-1$ разрядов. Их префиксность очевидна.

Так как в конце биномиальных чисел второго класса стоит ноль, а количество нулей в них равно $n-k$, то биномиальные числа второго класса в своей префиксной части будут содержать хотя бы на один нуль меньше по сравнению с количеством нулей в числах других подклассов этого же класса, но меньшей длины. В результате обязательно появится разряд, в котором префиксная часть большего числа и равное ему меньшее число будут отличаться своими цифрами. В результате свойство префиксности распространяется на все биномиальные числа второго класса.

А так как выше в доказательстве данной теоремы было показано, что числа первого и второго классов также обладают свойством префиксности, то можно утверждать, что все биномиальные числа, задаваемые ограничениями (2-4), (5-7), обладают свойством префиксности. ***Теорема доказана***.

2.5. Доказательство однозначности представления биномиальных чисел

Выделим из биномиального числа F две части - *младшую* F_j^m, начиная с нулевого разряда и до (j-1)-го, и *старшую* F_{r-j}^s, начиная с j-го разряда и до $(r-1)$-го. Соответственно младшая часть будет содержать j разрядов, а старшая - $(r-j)$.

Лемма 7. ***Младшая часть F_j^m биномиального числа F достигает своего максимального значения $F_{j_{\max}}^m$ тогда, когда все входящие в ее j разрядов цифры $x_i = 1$, $i = 0, 1, ..., j-1$.***

Доказательство. Проведем методом математической индукции. Для получения ее основания допустим, что младшая часть F_j^m биномиального числа содержит 1 разряд - $F_j^m = F_{j=1}^m$. Тогда, как это следует из выражения (1) для числовой функции,

$$F_{j=1}^m = x_0 C_{n-r}^{k-q_0}.$$

Так как цифра x_0 может принимать лишь два значения - 0 и 1, то при $x_0 = 0$

$$F_{j=1}^m = F_{j=1}^m(0) = 0,$$

а при $x_0 = 1$

$$F_{j=1}^m = F_{j=1}^m(1) = C_{n-r}^{k-q_0}.$$

Так как в соответствии с (70) $C_{n-r}^{k-q_0} > 1$, то

$$F_{j=1}^m(1) \geq F_{j=1}^m(0).$$

Основание индукции получено.

Допустим, что младшая часть биномиального числа содержит $j = z$, $z = 1, 2, ..., r-1$ разрядов. В соответствии с выражением (1) для числовой функции получим, что

$$F^m_{j=z} = \sum_{i=0}^{z-1} x_i C^{k-q_i}_{n-r+i} .$$

Предположим также, что при всех $x_i = 1$, $i = 0, 1, ..., z-1$,

$$F^m_{j=z} = F^m_{(j=z)\max} = \sum_{i=0}^{z-1} C^{k-q_i}_{n-r+i} ,$$

где $F^m_{j=z\max}$ - максимальное значение младшей части биномиального числа, содержащей z разрядов.

Рассмотрим теперь младшую часть числа F с $j = z+1$ разрядами:

$$F^m_{j=z+1} = \sum_{i=0}^{z} x_i C^{k-q_i}_{n-r+i} = x_z C^{k-q_z}_{n-r+z} + \sum_{i=0}^{z-1} x_i C^{k-q_i}_{n-r+i} .$$

Предположим теперь, что в функции $F^m_{j=z+1}$ в $j = z$ младших разрядах стоят цифры $x_i = 1$, $i = 0, 1, ..., z$. Тогда

$$F^m_{j=z+1} = x_z C^{k-q_z}_{n-r+z} + F^m_{(j=z)\max} .$$

Выражение $x_z C^{k-q_z}_{n-r+z}$ в случае $x_z = 0$ также равно 0, а в случае $x_z = 1$ - $C^{k-q_z}_{n-r+z}$. Так как в соответствии с (70) $C^{k-q_z}_{n-r+z} \geq 1$, то при $x_z = 1$ $F^m_{j=z+1} = F^m_{(j=z+1)\max}$ **.**

Это значит, что $F^m_j = F^m_{j\max}$ для любых значений $j = 1, ..., r$, для которых все цифры $x_i = 1$, $i = 0, 1, ..., j-1$. ***Лемма доказана.***

Следствие 1. ***Если все цифры x_i биномиального числа F равны 1, то это число является наибольшим среди всех чисел из диапазона $P = C^k_n$.***

Теорема 35. ***Минимальное значение биномиального числа*** $\boldsymbol{F_{\min}=0}$***, а максимальное***

$$F_{max} = C_n^k - 1\,. \qquad (71)$$

Доказательство. Подставив в выражение (1) для числовой функции F все $x_i = 0$, получим, что $F = 0$. Любые другие значения цифр x_i приведут к тому, что в сумме слагаемых, входящих в функцию (1), появятся биномиальные коэффициенты, значения которых больше нуля. Поэтому при любых значениях цифр x_i, кроме всех нулевых, $F > 0$. Следовательно, минимальное значение функции $F = F_{\min} = 0$.

Если значения всех цифр $x_i = 1$, то в соответствии со следствием 1 леммы 7 биномиальная функция F примет максимальное значение:

$$F_{\max} = \sum_{i=0}^{r-1} C_{n-r+i}^{k-q_i} = C_{n-r}^{k-(k-1)} + C_{n-r+1}^{k-(k-2)} + \ldots + C_{n-1}^{k} =$$

$$= C_{n-r}^{1} + C_{n-r+1}^{2} + \ldots + C_{n-1}^{k} = C_{n-1}^{k} + \ldots + C_{n-r+1}^{2} + C_{n-r}^{1} + C_{n-r}^{0} - C_{n-r}^{0}\,.$$

Так как

$C_{n-r}^{1} + C_{n-r}^{0} = C_{n-r+1}^{1}$, $C_{n-r+1}^{2} + C_{n-r+1}^{1} = C_{n-r+2}^{2}, \ldots, C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = C_{n}^{k}$, то

$$F_{\max} = C_n^k - C_{n-r}^0 = C_n^k - 1\,.$$

Теорема доказана.

Из свойства префиксности биномиальных чисел, доказанного в теореме 34, следует, что два произвольных биномиальных числа F_1 и F_2 (в общем случае - неравной длины) при сравнении их цифр со стороны старших разрядов имеют хотя бы в одном разряде различные цифры 0 и 1. Выделим в этих числах первый разряд при счете от старших разрядов к младшим, где произошло несовпадение цифр. Получаемые до этого разряда старшие разряды определим как *общие* разряды чисел F_1 и F_2, а оставшиеся - как *собственные*. Соответственно каждое биномиальное число F_1 и F_2 разбивается на *общую* часть F_1^0 и F_2^0 и *собственную* F_1^s и F_2^s так, что $F_1 = F_1^0 + F_1^s$,

$F_2 = F_2^0 + F_2^s$. Из выражения (1) следует, что $F_1^0 = F_2^0$. Поэтому разность $F_2 - F_1 = F_2^s - F_1^s$.

Допустим, что даны собственные части биномиальных чисел F_1 и F_2: $F_1^s = x_\alpha x_{\alpha-1}...x_0$, $\alpha = 0,1,...,r_1 - 1$; $F_2^s = x_\beta x_{\beta-1}...x_0$, $\beta = 0,1,...,r_2 - 1$; $x_\alpha \neq x_\beta$.

Предположим также, что они имеют следующий вид:
$F_1^s = F_1^{s*} = 011...1$ и $F_2^s = F_2^{s*} = 100...0$, что соответствует $x_\alpha = 0$; $x_{\alpha-1},...,x_0 = 1$ и $x_\beta = 1$; $x_{\beta-1},...,x_0 = 0$.

Теорема 36 . $\boldsymbol{F_2^{s*} = F_1^{s*} + 1}$. (72)

Доказательство. В аналитической форме F_1^{s*} имеет следующий вид:

$$F_1^{s*} = 0C_{n-r_1+\alpha}^{k-q_\alpha} + 1C_{n-r_1+\alpha-1}^{k-q_\alpha} + 1C_{n-r_1+\alpha-2}^{k-q_\alpha-1} + ... + 1C_{n-r_1+\alpha-\alpha}^{k-q_\alpha-(\alpha-1)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\alpha} C_{n-r_1+j-1}^{k-q_\alpha-\alpha+j}.$$

Так как младший разряд части F_1^{s*} заканчивается 1, то число q содержащихся в числе F_1 единиц будет равно k. Поэтому при $j = 1$ выражение $k - q_\alpha - \alpha + j = 1$ и соответственно выражение $k - q_\alpha - \alpha = 0$. Из этого следует, что

$$F_1^{s*} = \sum_{j=1}^{\alpha} C_{n-r_1+j-1}^{k-q_\alpha-\alpha+j} + C_{n-r_1}^{k-q_\alpha-\alpha} - C_{n-r_1}^{k-q_\alpha-\alpha} = C_{n-r_1+\alpha}^{k-q_\alpha} - 1.$$

Для F_2^{s*} имеет место следующее выражение:

$$F_2^{s*} = C_{n-r_2+\beta}^{k-q_\beta}.$$

Так как общая часть $F_1^0 = F_2^0$, то $q_\alpha = q_\beta$ и $r_1 - \alpha = r_2 - \beta$. Соответственно $C_{n-r_2+\alpha}^{k-q_\alpha} = C_{n-r_2+\beta}^{k-q_\beta}$. Следовательно, $F_1^{s*} = F_2^{s*} - 1$ и соответственно $F_2^{s*} = F_1^{s*} + 1$. ***Теорема доказана.***

Теорема 37. $\boldsymbol{F_1 \neq F_2}$. (73)

Доказательство. Из теоремы 36 непосредственно следует, что $F_2^{s*} - F_1^{s*} = 1$, а из леммы 7, что собственная часть F_1^{s*}, в которой, за исключением старшего, все разряды стоят с цифрами равными 1, достигает своего максимального значения. Поэтому появление одного или нескольких нулей вместо единиц в выражении для F_1^{s*} изменит его величину в меньшую сторону и соответственно разность $F_2^s - F_1^s$ станет больше 1.

Появление одной или нескольких единиц вместо нулей в выражении для F_2^s приведет к его увеличению и соответственно к увеличению разности $F_2^s - F_1^s$, которая станет больше 1.

Если поменять теперь цифры с индексами α и β в собственных частях F_1^{s*} и F_2^{s*}, то это приведет только к увеличению разности между этими частями.

Одновременное нахождение нулей и единиц в разрядах с индексами α и β в F_1^s и F_2^s запрещено по определению. Других вариантов сравнения собственных частей F_1^s и F_2^s нет.

В результате при любых возможных значениях цифр в разрядах $\alpha - 1, \alpha - 2, \ldots, 0$, и $\beta - 1, \beta - 2, \ldots, 0$ собственных частей F_1^s и F_2^s или при отсутствии этих цифр будет наблюдаться неравенство $F_1^s \neq F_2^s$. Так как $F_2 - F_1 = F_2^s - F_1^s$, а собственная часть $F_1^s \neq F_2^s$, то $F_1 \neq F_2$. ***Теорема доказана.***

Теорема 38. ***Каждое биномиальное число из диапазона*** $\boldsymbol{P = C_n^k}$ ***имеет единственное значение.***

Доказательство. Из теоремы 37 вытекает, что два любых биномиальных числа F_1 и F_2 из диапазона $P = C_n^k$ имеют разные значения. Из этого следует, что каждое биномиальное число F из диапазона $P = C_n^k$ будет отличаться по своему значению от любого другого, входящего в этот диапазон, и соответственно будет иметь единственное значение. ***Теорема доказана.***

Следствие 1. ***Биномиальные числа имеют одно и то же значение функции F только в случае, если имеется равенство их цифр*** x_i, $i = 0, 1, ..., r-1$, ***в их кодовом представлении*** $x_{r-1}, ..., x_i, ..., x_1, x_0$.

Таким образом, теоремы 37 и 38 доказывают единственность (однозначность) представления биномиальных чисел с помощью функции *F*. Конечность биномиальных чисел вытекает из ограничения (2) и теоремы 3, которые показывают, что длина биномиальных чисел r находится в пределах от k или n-k до n-1, а эффективность вытекает из выражения (1) для *F*, которое задает алгоритм перехода от биномиального числа к его номеру за конечное число шагов. Префиксность биномиальных чисел была доказана выше, соответственно в теореме 34. В результате можно утверждать, что биномиальная система счисления удовлетворяет всем требованиям предъявляемым, к каноническим (неизбыточным) системам счисления.

Однако выполнение указанных требований к системам счисления решает только задачу их представления, которая позволяет числам систем счисления представлять количества объектов, содержащихся в различных множествах. Для установления порядковых отношений между элементами множеств должны быть установлены признаки, по которым можно определять, какое из двух чисел больше, а какое меньше.

2.6 Двойственность биномиальных чисел

Одним из важных свойств биномиальных чисел является возможность их двойственного представления, вытекающая из известного равенства для биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (74)$$

Из приведенного равенства следует, что одному и тому же диапазону чисел P соответствуют биномиальные числа с разными значениями максимального числа единиц $q_{\max}=k$ для исходной системы и $q'_{\max}=k'=n-k$ для двойственной биномиальной систем счисления. Соответственно максимальное число нулей $l_{\max}=n-k$ для исходной и $l'_{\max}=n-k'=n-n+k=k$ для двойственной систем счисления.

Исходя из полученной выше биномиальной числовой функции (1) и ограничений (2 - 4) и (5 - 7) представим полученные на их основе результаты исследования свойств биномиальных чисел в двойственной форме.

Определение $1'$. *Двойственной $k'=n-k$ биномиальной системой счисления называется числовая функция*

$$\begin{aligned} F &= x_{r-1}C_{n-1}^{k'}+\ldots+x_iC_{n-r+i}^{k'-q_i}+\ldots+x_0C_{n-r+i}^{k'-q_i}= \\ &= x_{r-1}C_{n-1}^{n-k-q_{r-1}}+\ldots+x_iC_{n-r+i}^{n-k-q_i}+\ldots+x_0C_{n-r}^{n-k-q_0} \end{aligned} \qquad (1')$$

с системами кодообразующих ограничений

$$\begin{cases} n-k\le r\le n-1, & (2') \\ q=n-k, & (3') \\ x_0=1 & (4') \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} k=r-q, & (5') \\ 0\le q\le n-k-1, & (6') \\ x_0=0. & (7') \end{cases}$$

В качестве весового коэффициента i-го разряда в числовой функции ($1'$) выступает биномиальный коэффициент

$$C_{n-r+i}^{k'-q_i}=C_{n-r+i}^{n-k-q_i}. \qquad (8')$$

Определение $2'$**.** *Любая конечная последовательность двоичных цифр $x_{r-1},\ldots,x_1,\ x_0$, удовлетворяющая ограничениям ($2'-4'$) или ($5'$-$7'$), называется двойственным двоичным биномиальным числом.*

В качестве примера исходной биномиальной системы счисления и двойственной к ней в табл. 2, 3 приведены соответственно все биномиальные числа с параметром $n=6$ и максимальным числом единиц $k = 4$ и с тем же параметром $n = 6$ и максимальным числом единиц $k' = n - k = 2$.

Максимальное число нулей соответственно будет для исходной системы счисления $l_{\max} = n - k = 6 - 4 = 2$ и для двойственной к ней $l'_{\max} = k = 4$.

Таблица 2 – Биномиальные числа с $n = 6,\ k = 4$ исходной системы счисления

Номер числа	Бином. число	Номер числа	Бином. число	Номер числа	Бином. число	Номер числа	Бином. число
0	00	4	01111	8	10111	12	11100
1	010	5	100	9	1100	13	11101
2	0110	6	1010	10	11010	14	1111
3	01110	7	10110	11	11011		

Таблица 3 – Биномиальные числа с $n = 6,\ k' = n - k = 2$ двойственной системы счисления

Номер числа	Бином. число	Номер числа	Бином. число	Номер числа	Бином. число	Номер числа	Бином. число
0	0000	4	00101	8	0101	12	1001
1	00010	5	0011	9	011	13	101
2	00011	6	01000	10	10000	14	11
3	00100	7	01001	11	10001		

Ниже без доказательств приведены теоремы для двойственных биномиальных систем счисления, полученные из теорем для исходных систем путем замены в их условиях $q_{\max}$ на $q'_{\max}$ и $l_{\max}$ на $l'_{\max}$. Это значит, что. максимальное число единиц $q_{\max} = k$ в исходных системах меняется на $q'_{\max} = k' = n - k$ и максимального числа нулей $l_{\max} = n - k$ на $l'_{\max} = k$. Такая замена не влияет на сам ход доказательств, однако приводит к новым результатам, устанавливающим взаимосвязь между исходной и двойственной системами счисления, что имеет значение при построении эффективных алгоритмов биномиального счета.

Лемма $1'$. ***Количество нулей в двойственных биномиальных числах длины r , задаваемых ограничениями ($2'$ - $4'$),***

$$l' = r - k' = r - (n - k). \qquad (9')$$

Теорема $1'$. ***Количество возможных нулей, содержащихся в двойственных биномиальных числах, образуемых ограничениями ($2'$ - $4'$), $l' = 0, 1,\ldots,k - 1$, а количество возможных единиц, образуемых ограничениями ($5'$ - $7'$), $q' = 0, 1,\ldots,n - k - 1$.***

Следствие $1'$. ***Минимальное количество нулей в числах, образуемых ограничениями ($2'$ - $4'$), $l'_{min} = 0$, а максимальное $l'_{max} = k - 1$.***

Следствие $2'$. ***Минимальное количество единиц в числах, образуемых ограничениями ($5'$ - $7'$), $q'_{min} = 0$, а максимальное $q'_{max} = n - k - 1$.***

Теорема $2'$. ***Количество нулей в двойственных биномиальных числах, задаваемых ограничениями ($5'$ - $7'$),***

$$l' = k. \qquad (10')$$

Если сравнить полученный результат с соответствующей теоремой исходной системы счисления, то становится очевидным, что для ограничений (5 - 7) и ($5'$ - $7'$) $l + l' = n$ или $l' = n - l$.

Теорема $3'$. ***Максимальная длина двойственных биномиальных чисел, задаваемых ограничениями ($5'$ - $7'$),***

$$r'_{max} = n - 1, \qquad (11')$$

а минимальная

$$r'_{min} = k. \qquad (12')$$

Обратим внимание на то, что независимо от того в какой системе счисления исходной или двойственной представлены биномиальные числа их максимальная длина остается одной и той же равной $n-1$. Минимальная $r'_{\min}$ длина чисел с ограничениями ($5'$-$7'$) двойственной системы счисления всегда является такой, что в сумме с длиной чисел $r_{\min}$ с ограничениями (5-7) исходной системы равна n .

Теорема $4'$. ***Количество различных длин биномиальных чисел, задаваемых ограничениями ($2'$ - $4'$)***

$$d'_1 = k, \tag{13'}$$

а ограничениями ($5'$ - $7'$)

$$d''_0 = n - k. \tag{14'}$$

Теорема $5'$. ***Минимальная величина максимального числа единиц k' в двойственном биномиальном числе***

$$k'_{min} = 1, \tag{15'}$$

а максимальная

$$k'_{max} = n - 1. \tag{16'}$$

Теорема $6'$. ***Ограничения ($2'$ - $4'$) и ($5'$ - $7'$) разбивают двойственные биномиальные числа на два непересекающихся класса, первый из которых содержит числа с $q'_{\max} = n - k$ единицами и $0 \le l' \le k-1$ нулями, а второй – с $l'_{\max} = k$ нулями и $0 \le q' \le n-k-1$ единицами.***

Следствие $1'$. ***Двойственные биномиальные числа первого класса заканчиваются 1, а второго – 0, так как при появлении ($n-k$)-ой 1 или k-го 0 необходимый признак окончания формирования биномиального числа получен.***

Лемма $2'$. ***Количество двойственных биномиальных чисел первого класса с фиксированным числом нулей l', $0 \le l' \le k-1$,***

$$N'_{l'} = C^{l'}_{n-k+l'-1}. \tag{17'}$$

Следствие 1′. ***При*** $l' = l'_{max} = k-1$

$$N'_{l'} = N'_{l'_{max}} = C_{n-k+l'_{max}-1}^{l'_{max}} = C_{n-2}^{k-1}. \qquad (18')$$

Следствие 2′. ***При*** $l' = l'_{min} = 0$

$$N'_{l'} = N'_{l'_{min}} = C_{n-k-1}^{0} = 1. \qquad (19')$$

Теорема 7′. ***Количество двойственных биномиальных чисел первого класса***

$$N_{n-k} = C_{n-1}^{n-k} = C_{n-1}^{k-1}. \qquad (20')$$

Лемма 3′. ***Количество двойственных биномиальных чисел второго класса с фиксированным числом единиц*** q', $0 \le q' \le k-1$,

$$N'_{q'} = C_{k+q'-1}^{q'}. \qquad (21')$$

Следствие 1′. ***При*** $q' = q'_{max} = n-k-1$

$$N'_{q'} = N'_{q'_{max}} = C_{k+q'_{max}-1}^{q'_{max}} = C_{k+n-k-1-1}^{n-k-1} = C_{n-2}^{n-k-1} = C_{n-2}^{k-1}. \qquad (22')$$

Следствие 2′. ***При*** $q' = q'_{min} = 0$

$$N'_{q} = N'_{q'_{min}} = C_{k-1}^{0} = 1. \qquad (23')$$

Теорема 8′ ***Количество двойственных биномиальных чисел второго класса***

$$N'_{k'} = C_{n-1}^{n-k-1} = C_{n-1}^{k}. \qquad (24')$$

Теорема 9′. ***Количество двойственных биномиальных чисел, совместно задаваемых ограничениями (2′ - 4′) и (5′ - 7′),***

$$N'_{k'} = C_{n}^{n-k} = C_{n}^{k}. \qquad (25')$$

Следствие 1. Диапазон *двойственных* биномиальных чисел

$$\boldsymbol{P' = P = C_n^k}. \qquad (26')$$

Приведенные выше утверждения говорят о том, что общее количество биномиальных чисел, как в исходной, так и в двойственной ей биномиальной системе счисления остается равным друг другу. Однако количество чисел, оканчивающихся на 0 в двойственной системе счисления, является равным количеству биномиальных чисел, оканчивающихся на 1 в исходной системе счисления (теорема $6', 7', 8'$).

В соответствии со следствием $1'$ леммы $2'$ и следствием $1'$ леммы $3'$ количество биномиальных чисел с максимальным числом единиц $q'_{\max}$ в двойственной биномиальной системе счисления равно такому же количеству чисел с максимальным числом нулей в исходной системе счисления.

Анализ таблиц 2, 3 подтверждает вышесказанное. Так в таблице 2 исходных чисел и таблице 3 двойственных к ним содержится по 15 биномиальных кодовых чисел, из которых в табл. 2 одно число 00 не содержит единиц, а еще одно 1111 не содержит нулей. Соответственно в табл. 3 единственным числом, не содержащим единиц, является число 0000, а не содержащим нулей – 11.

Количество исходных биномиальных чисел в табл. 2, оканчивающихся на 0 и содержащих максимальное число единиц $q_{\max} = k-1$, в соответствии с 22, равно

$$N_{q_{\max}} = C_{n-2}^{k-1} = C_{6-2}^{4-1} = C_4^3 = 4,$$

и исходя из $22'$ такое же количество с числом единиц $q'_{\max} = n-k-1$ в табл. 3 для двойственных к ним:

$$N'_{q'_{\max}} = C_{n-2}^{n-k-1} = C_{6-2}^{6-4-1} = C_4^1 = 4.$$

Это будут следующие числа:

01110	00010
10110	00100
11010	01000
11100	10000.

Также равны между собой и количества биномиальных чисел, оканчивающихся на 1 и содержащие максимальное количество нулей, - $l_{\max} = n-k-1$(табл. 2) и $l'_{\max} = k-1$ (табл. 3).

Это будут такие числа:

01111	00011
10111	00101
11011	01001
11101	10001.

Однако, как следует из теорем $7'$ и $8'$, количество двойственных биномиальных чисел оканчивающихся соответственно на 1 и 0 в таблице 3 будет $N'_{n-k} = C_{n-1}^{k-1} = C_5^3 = 10$ и $N'_k = C_{n-1}^{k} = C_5^4 = 5,$ а в таблице 2 в соответствии с теоремами 7 и 8 все будет наоборот: количество чисел оканчивающихся на 1, равно $N_k = C_{n-1}^{k} = C_5^4 = 5,$ а количество чисел оканчивающихся на 0, $N_{n-k} = C_{n-1}^{k-1} = C_5^3 = 10.$

Аналогично вышеприведенному доказательству доказываются и остальные свойства двойственных биномиальных чисел.

2.7 Порядковые свойства биномиальных чисел

Теорема 39. ***Если число F находится внутри ряда упорядоченных по величине биномиальных чисел из диапазона $P = C_n^k$, то непосредственно после него в этом ряду может идти только одно число из диапазона P.***

Доказательство. Так как в соответствии с теоремой 38 каждое биномиальное число из диапазона $P = C_n^k$ имеет только одно значение, то при упорядочивании биномиальных чисел по величине после числа F, если оно не будет стоять в конце их ряда, может следовать только одно число из этого диапазона. ***Теорема доказана***.

Теорема 40. ***Для любого биномиального числа за исключением минимального и максимального из диапазона $P = C_n^k$ найдется два других, которые отличаются от него в большую и меньшую стороны на 1.***

Доказательство. Так как из теоремы 38 следует, что каждое биномиальное число имеет одно значение, то их общее количество будет равным их диапазону $P = C_n^k$.

Так как из теоремы 38 следует, что числа отличаются друг от друга, а из теоремы 35 следует, что минимальное биномиальное число $F_{\min} = 0$, а максимальное $F_{\max} = C_n^k - 1$, то все эти C_n^k биномиальные числа можно расположить в порядке от 0 до $C_n^k - 1$: $0, 1, \ldots, C_n^k$ - 1. Это значит, что между двумя биномиальными числами разница по абсолютной величине равна 1. Каждое из этих чисел, за исключением минимального и максимального чисел, являясь большим на 1 по отношению к стоящему рядом меньшему, является также меньшим на 1 по отношению к соседнему большему. Из этого следует, что указанные числа отличаются от соседних чисел на 1 в большую и в меньшую стороны. ***Теорема доказана.***

Теорема 41. ***После любого биномиального числа из заданного диапазона $P = C_n^k$ при их упорядочении в большую или меньшую стороны может идти только одно число из этого же диапазона, отличающееся по своей величине на 1.***

Доказательство. Действительно, из теоремы 40 следует, что при упорядочении биномиальных чисел из диапазона P после любого биномиального числа может идти или большее, или меньшее биномиальное число, отличающееся от него на 1, а из теоремы 39 – что такое число может быть только одно. Следовательно, после любого биномиального числа из диапазона P при их упорядочении в большую или меньшую стороны может идти только одно биномиальное число, отличающееся по своей величине на 1. ***Теорема доказана.***

Теорема 42. ***Если $F_2^s = 1,\ x_{\beta-1,\ldots,}x_0$ и $F_1^s = 0,\ x_{\alpha-1,\ldots,}x_0$ то***

$$F_2^s > F_1^s. \tag{75}$$

Доказательство. Допустим, что $F_2^s = F_2^{s*} = 10...0$ и $F_1^s = F_1^{s*} =$ $= 01...1$. Тогда в соответствии с теоремой 36 $F_2^{s*} - F_1^{s*} = 1$. Появление одной или нескольких единиц вместо нулей в выражении для F_2^{s*}

увеличит F_2^s, а появление одного или нескольких нулей вместо единиц в выражении для F_1^{s*} уменьшит F_1^s. В результате в том и другом случаях разность $F_2^s - F_1^s$ будет увеличиваться и поэтому $F_2^s > F_1^s$. ***Теорема доказана.***

Теорема 43. ***Если даны два биномиальных числа F_1 и F_2, то большим из них будет то, у которого собственная часть начинается с 1.***

Доказательство. Допустим, что для первого числа F_1 собственная часть $F_1^s = 0$, $x_{\alpha-1,...,}x_0$, а для второго F_2 $F_2^s = 1$, $x_{\beta-1,...,}x_0$. Тогда в соответствии с теоремой 42 $F_2^s > F_1^s$.

Так как общие части F_1^0 и F_2^0 чисел F_1 и F_2 по определению равны между собой, то, в силу неравенства их собственных частей, $F_2 > F_1$.

Аналогично можно доказать, что если собственная часть числа F_1 начинается с 1, а числа F_2 с 0, то $F_1 > F_2$. ***Теорема доказана.***

Например, если даны два биномиальных числа $F_1 = 00100$ и $F_2 = 0011$ с параметрами $n = 6$ и $k = 2$, общая часть у которых $F_1^0 = F_2^0 = 001$, а собственные части $F_1^s = 00$ и $F_2^s = 1$, то разница по величине между числом $F_1 = 0C_5^2 + 0C_4^2 + 1C_3^2 + 0C_2^1 + 0C_1^1$ и числом $F_2 = 0C_5^2 + 0C_4^2 + 1C_3^2 + 1C_2^1$ равна разнице между их собственными частями: $F_2^s - F_1^s = 1C_2^1 - (0C_2^1 - 0C_1^1) = C_2^1 = 2$ и соответственно большим из них будет число F_2.

Теорема 44. ***Если биномиальное число F_1 имеет собственную часть $F_1^s = F_1^{s*} = 011...1$, то следующим в порядке возрастания единственным числом за ним будет число F_2 с собственной частью $F_2^s = F_2^{s*} = 100...0$ и количественным значением $F_2 = F_1 + 1$.***

Доказательство. Из теоремы 36 следует, что если биномиальные числа F_1 и F_2 имеют собственные части $F_1^s = F_1^{s^*} = 011...1$ и $F_2^s = F_2^{s^*} = 100...0$, то эти части по количественному значению отличаются на 1, т.е. $F_2^s - F_1^s = 1$. Так как количественные значения общих частей F_1^0 и F_2^0 чисел F_1 и F_2 равны между собой, то из полученного равенства вытекает, что $F_2 = F_1 + 1$. ***Теорема доказана.***

Теорема 45. *Если дано биномиальное число* $\boldsymbol{F_1 \neq F_{max}}$, *то за ним следует число* $\boldsymbol{F_2 = F_1 + 1}$, *в котором, при количестве нулей в числе* $\boldsymbol{F_1}$ $\boldsymbol{l = n - k}$, *последняя 1 при счете слева направо стоит на месте его* $\boldsymbol{n - k}$*-го 0 или, если количество нулей в числе* $\boldsymbol{F_1}$ $\boldsymbol{l < n - k}$, *эта 1 стоит на месте последнего 0, находящегося перед входящими в число* $\boldsymbol{F_1}$ *единицами, и если после этого окажется, что количество единиц в числе* $\boldsymbol{F_2}$ $\boldsymbol{q = k}$, *то его формирование окончено. В противном случае, при количестве единиц* $\boldsymbol{q < k}$, *после полученной единицы должны быть проставлены нули в таком количестве, чтобы их общая сумма стала равной* $\boldsymbol{l = l_{\max} = n - k}$.

Доказательство. Если имеются два биномиальных числа F_1 и F_2, из которых F_2 следует за F_1 и соответственно образуется равенство $F_2 = F_1 + 1$, то в соответствии с теоремой 44 собственная часть числа F_2 должна быть равной $F_2^s = F_2^{s^*} = 100...0$, а числа F_1: $F_1^s = F_1^{s^*} = 011...1$. Из этого следует, что для получения числа F_2 из числа F_1, если в нем имеется $n-k$ нулей, необходимо на место $n-k$-го нуля числа F_1 при счете слева направо поставить 1 и если при этом число единиц q не станет равным $q_{\max} = k$, то для окончательного формирования числа F_2 следует после этой 1 добавить нуль чтобы сумма нулей l, как это следует из теоремы 6, равнялась $l_{\max} = n - k$. Если после преобразования 0 в 1 количество единиц в формируемом числе F_2 станет равным k, то в соответствии с той же теоремой 6 число следует считать сформированным.

Если же в числе F_1 число нулей $l < l_{\max} = n - k$ и соответственно имеется $q = q_{\max} = k$ единиц, одна из которых стоит в конце числа, то для того, чтобы преобразовать число F_1 в число $F_2 = F_1 + 1$ необходимо преобразовать последний 0, стоящий перед находящимися в конце числа F_1 единицами, в 1.

Если после преобразования 0 в 1 окажется, что число единиц q в формируемом числе F_2 стало равным величине $q_{\max} = k$, то в соответствии с теоремой 6 число F_2 будет сформированным. В противном случае в соответствии с той же теоремой 6 формируемое число после полученной 1 необходимо дополнить нулями в младших разрядах таким образом, чтобы их общее число стало равным $l_{\max} = n - k$.

Если же нули в преобразуемом в число F_2 биномиальном числе F_1 отсутствуют, то это в соответствии с теоремой 6 значит, что число содержит k единиц и, кроме того, в соответствии со следствием 1 леммы 7 оно является наибольшим в диапазоне P и соответственно за ним не идет никакое большее по порядку число F_2.

Таким образом, число $F_2 = F_1 + 1$ следует после числа F_1 тогда, когда $F_1 \neq F_{\max}$ и удовлетворяет всем перечисленным в условиях теоремы требованиям. ***Теорема доказана***.

Из приведенной теоремы следует, что после биномиального числа F_1, оканчивающегося одной или несколькими единицами, в порядке возрастания следует число F_2 с той же общей частью $F_2^0 = F_1^0$ и единицей на месте младшего нуля в числе F_1.

Если при этом число единиц увеличивается до k, то на этом формирование числа F_2 заканчивается.

Если, однако, общее число единиц не становится равным k, то после полученной 1 происходит добавление нулей до тех пор, пока их общее количество в числе F_2 не станет равным $n - k$.

В первом случае число F_2 остается в 1-ом классе, оканчивающемся на 1, а во втором – во 2-ом классе, оканчивающемся на 0. Так, в случае $n=6$, $k=4$, после числа 01111 идет число 100, числа 10111 – 1100, числа 11011 – 11100, числа 11101 – 1111.

Появление комбинации, в которой вообще нет нулей, говорит о том, что получено наибольшее биномиальное число в данном диапазоне $P=C_n^k$, и дальнейший счет невозможен. После этого числа никакое другое число идти не может. Число, состоящее из $l=n-k$ нулей и $q=0$ единиц, очевидно, является наименьшим.

Так, для рассматриваемых нами примеров биномиальных чисел с $n=6$, k = 4 минимальным нулевым числом будет число 00, а максимальным – число 1111, равное $C_n^k-1=C_6^4-1=15$.

Таким образом, если два числа F_1 и F_2 имеют собственные части $F_1^s=011...1$ и $F_2^s=100...0$, то это значит, что число F_2 следует за F_1. Этот вывод также относится и к числам, собственные части которых $F_1^s=0$ и $F_2^s=1$, так как по определению собственная часть F_1^s может состоять из одного нуля, а собственная часть F_2^s из одной единицы ($F_1^s=0$, $F_2^s=1$).

Теорема 45 позволяет расположить биномиальные числа в возрастающем порядке так, как это показано для биномиальных чисел с $n=6$ и $k=4$ в табл. 4. Там же для каждого биномиального числа дан соответствующий ему вид числовой функции и указан номер, в который преобразуется биномиальное число.

Теорема 46. ***Если в биномиальном числе $F_1 \neq 11...1$ провести инверсию всех его разрядов, а затем их новую инверсию до разряда с последней единицей, при счете слева направо. При этом в случае появления в числе $q=q_{\max}=k$ единиц, среди которых находиться хотя бы один 0, исключить младшие разряды с нулями, если они есть, полученные при первой инверсии, или, если $q<q_{\max}=k$, довести их до общей суммы $l=l_{\max}=n-k$, то полученное число будет увеличенным на 1 следующим по порядку числом F_2.***

Доказательство. Первая инверсия переводит все нули и единицы числа F_1 в инверсные состояния, в том числе и последний $n-k$-й ноль или ноль, стоящий перед единицами, в 1. Это значит, что для нуля числа F_2 выполнено основное условие теоремы 45 – переход первого нуля F_1^{s*} в 1.

При второй инверсии, которая является неполной, так как не инвертируется последняя 1 при счете слева направо и следующие за ней цифры, происходит возвращение всех разрядов в исходное состояние, за исключением разрядов, начинающихся с последней 1. При этом если число единиц в формируемом числе становится равным k, то новое следующее по порядку, биномиальное число F_2 будет сформировано. В противном случае, если $q < q_{\max} = k$, число нулей l, стоящих после 1, необходимо увеличивать таким образом, чтобы их сумма стала равной $l_{\max} = n - k$. В том и другом случае в соответствии с теоремой 44 будет получено новое биномиальное число $F_2 = F_1 + 1$**,** следующее по порядку за числом F_1. ***Теорема доказана***.

Таблица 4 – Биномиальные числа и их числовые функции с $k=4$, $n=6$

Номер бином числа	**Бином. число**	**Числовая функция**
0	00	$0C_5^4+0C_4^4$
1	010	$0C_5^4+1C_4^4+0C_3^3$
2	0110	$0C_5^4+1C_4^4+1C_3^3+0C_2^2$
3	01110	$0C_5^4+1C_4^4+1C_3^3+1C_2^2+0C_1^1$
4	01111	$0C_5^4+1C_4^4+1C_3^3+1C_2^2+1C_1^1$
5	100	$1C_5^4+0C_4^3+0C_3^3$
6	1010	$1C_5^4+0C_4^3+1C_3^3+0C_2^2$
7	10110	$1C_5^4+0C_4^3+1C_3^3+1C_2^2+0C_1^1$
8	10111	$1C_5^4+0C_4^3+1C_3^3+1C_2^2+1C_1^1$
9	1100	$1C_5^4+1C_4^3+0C_3^2+0C_2^2$
10	11010	$1C_5^4+1C_4^3+0C_3^2+1C_2^2+0C_1^1$
11	11011	$1C_5^4+1C_4^3+0C_3^2+1C_2^2+1C_1^1$
12	11100	$1C_5^4+1C_4^3+1C_3^2+0C_2^1+0C_1^1$
13	11101	$1C_5^4+1C_4^3+1C_3^2+0C_2^1+1C_1^1$
14	1111	$1C_5^4+1C_4^3+1C_3^2+1C_2^1$

Теорема 46, в отличии теоремы 45, предлагает для получения числа F_2 другие действия, которые в ряде случаев могут привести к более эффективным алгоритмам перебора биномиальных чисел.

Теорема 47. ***Если биномиальное число F_1 с $l=n-k$ нулями имеет собственную часть $F_1^s=0$, то следующим за ним в***

порядке возрастания биномиальным числом с $l = n - k$ нулями, отличающимся по количественному значению на 1, будет число F_2 с собственной частью $F_2^s = 10$.

Доказательство. Так как младшие разряды чисел F_1 и F_2 содержат нули, а количественные значения общих частей F_1^0 и F_2^0 любых биномиальных чисел всегда равны между собой, то отличия в количественном значении чисел F_1 и F_2 определяются разницей их собственных частей $F_2^s - F_1^s$, которая зависит от входящих в них значащих цифр и соответствующих им весовых коэффициентов.

Единственной значащей цифрой в собственных частях $F_1^s = 0$ и $F_2^s = 10$ является 1 в собственной части F_2^s, представляющая собой первый разряд числа F_2. Стоящий возле неё весовой коэффициент $C_{\alpha_1}^{\gamma_1}$ как раз и определяет разницу между числами F_1 и F_2. Если она окажется равной 1, то теорема будет доказана. Для этого докажем, что $\gamma_1 = \alpha_1$, так как в этом случае биномиальный коэффициент $C_{\alpha_1}^{\gamma_1} = 1$.

Действительно, в соответствии с теоремой 31 нижний параметр весового коэффициента биномиального числа с количеством нулей $l = n - k$ $\alpha_i = k - q + i$, а верхний, в соответствии с теоремой 24

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{i} x_j + \gamma_0 .$$

В случае $i = 1$ эти выражения принимают следующий вид:
$\alpha_1 = k - q + 1$,
$\gamma_1 = x_1 + \gamma_0$.

Так как $\gamma_0 = k - q_0$, а q_0 в данном случае равно q, то
$\gamma_1 = x_1 + k - q$.

Учитывая, что цифра x_1 по условию равна 1, то соответственно $\gamma_1 = k - q + 1$, то есть $\gamma_1 = \alpha_1$ и соответственно $C_{\alpha_1}^{\gamma_1} = 1$. ***Теорема доказана***.

В соответствии с доказанной теоремой биномиальные числа с $n=6$, $k=4$ и собственными частями $F_1^s=0$ и $F_2^s=10$ должны располагаться в следующем порядке:

00	100	1100
010	1010	11010
0110	10110	
01110		

В каждой из приведенных групп каждое последующее число отличается от предыдущего по своему количественному значению на 1.

Теорема 47 рассматривала случаи построения биномиальных чисел, при которых число единиц q определялось неравенством $0 \le q \le k-1$, а число нулей $l=n-k$.

При $q=k-1$ возникает особый случай, который рассматривает следующая теорема.

Теорема 48. ***Если биномиальное число F_1 имеет собственную часть $F_1^s=0$ и $q=k-1$, то следующим за ним в порядке возрастания биномиальным числом F_2, отличающимся по количественному значению на 1, будет число с собственной частью $F_2^s=1$ и $q=k$. Длины этих чисел $r=n-1$.***

Доказательство. Биномиальное число F_1, оканчивающееся на 0, содержит число нулей $l=n-k$. Так как по условию теоремы число единиц в нем $q=k-1$, то его длина $r=q+l=k-1+n-k= =n-1$.

В силу того, что для числа F_2 собственная часть $F_2^s=1$, то количество единиц в нём, по сравнению с числом F_1, должно увеличиться на 1. Поэтому число F_2 будет содержать $q=k$ единиц и соответственно $l=n-k-1$ нулей. Его длина $r=q+l=k-1+$ $+n-k=n-1$ при этом останется прежней.

В соответствии с леммой 4 верхний параметр γ_0 весового коэффициента $C_{n-r}^{\gamma_0}$ биномиальной функции для нулевого разряда при $q=k$ равен 1. Нижний параметр также равен 1: $\alpha_0=n-r=$

$=n-(n-1)=1$. Поэтому весовой коэффициент младшего разряда числа F_2 $C_{n-r}^{\gamma_0}=C_1^1=1$. Соответственно количественное значение младшего разряда с учетом того, что стоящая в нем цифра равна 1, будет равно $1\cdot C_1^1=1\cdot 1=1$. При этом количественное значение младшего разряда числа F_1 будет равно 0.

Так как общие части F_1^0 и F_2^0 чисел F_1 и F_2 по своему количественному значению одинаковы, то отличие в количественных значениях чисел F_1 и F_2 происходит только в собственных частях F_1^s и F_2^s. Так как собственные части представляют младшие разряды чисел F_1 и F_2, то разница между значением нулевого разряда числа F_2 и числа F_1 равна 1. Соответственно и разница между числами $F_2-F_1=1$. ***Теорема доказана.***

Из теоремы 48 вытекает, что если $n=6$, $k=4$, то за биномиальным числом 01110 следует число 01111, за числом 10110 – 10111, за числом 11010 – 11011, за числом 11100 – 11101.

Доказанные выше теоремы 47 и 48 охватывают все биномиальные числа второго класса с числом нулей $l=n-k$ и всеми возможными значениями числа единиц q, $0\le q\le k-1$. Все эти числа в соответствии со следствием 1 теоремы 6 оканчиваются на 0. Поэтому, исходя из доказанных теорем, можно сделать вывод, что для любого биномиального числа, оканчивающегося на 0, существует следующее за ним по порядку число, отличающееся от него по своему количественному эквиваленту на 1.

Переход от биномиальных чисел первого класса, оканчивающихся на 1, к следующим по порядку большим числам осуществляется на основании теоремы 44. Таким образом, теоремы 44, 47, 48 решают задачи перехода от любых биномиальных чисел к большим, т.е. решают задачу сложения биномиального числа с 1.

Эти же теоремы в несколько другой формулировке определяют правила перехода биномиальных чисел к меньшим на 1, т.е. решают задачи их упорядочения в меньшую сторону (вычитания 1).

Сформулируем их без доказательства, так как они являются аналогичными для уже доказанных выше теорем 44, 47, 48.

Теорема 49. ***Если биномиальное число F_1 имеет собственную часть $F_1^s = F_1^{s*} = 100...0$, то следующим в порядке убывания за ним будет число F_2 с собственной частью $F_2^s = \; = F_2^{s*} = 011...1$ и количественным значением $F_2 = F_1 - 1$.***

Теорема 50. ***Если биномиальное число F_1 с $l = n - k$ нулями имеет собственную часть $F_1^s = 10$, то следующим за ним в порядке убывания биномиальным числом с $l = n - k$ нулями, отличающимся по количественному значению на 1, будет число F_2 с собственной частью $F_2^s = 0$.***

Теорема 51. ***Если биномиальное число F_1 имеет собственную часть $F_1^s = 1$ и $q = k$, то следующим за ним в порядке убывания биномиальным числом F_2, отличающимся по количественному значению на 1, будет число F_2 с собственной частью $F_2^s = 0$ и $q = k - 1$. Длины этих чисел $r = n - 1$.***

В заключении отметим, что теоремы 44, 47, 48 и соответственно 49, 50, 51 могут быть получены, как следствие из теоремы 45.

Однако в данном виде они имеют более эффективную реализацию и приводят к более простым алгоритмам, чем полученные на основе обобщенного алгоритма теоремы 45, хотя и представляют его частные случаи.

2.8 Помехоустойчивость биномиальных чисел

В отличие от двоичных чисел биномиальные числа используют для своего построения довольно сложные ограничения (2 - 4), (5 - 7), что можно рассматривать как недостаток. Однако эти ограничения вводят в биномиальные числа избыточную информацию, которую можно использовать для обнаружения, а в некоторых случаях и исправления ошибок. Признаком ошибки является нарушение указанных ограничений.

Так если в биномиальном числе обнаружится больше k единиц, то это будет признаком его ошибочности.

Правда, для того, чтобы обнаружить эти ошибки, необходимо неравномерные (префиксные) биномиальные числа преобразовать в равномерные – с одинаковым числом разрядов. Это легко получить, добавляя со стороны младших разрядов биномиальных чисел нули до тех пор, пока общее число разрядов в числе не станет равным $n-1$.

Например, при $n=6$, $k=4$ равномерные числа будут иметь вид представленный в табл. 5.

Таблица 5 – Равномерные биномиальные числа с n = 6, k = 4.

Номер бин. числа	Биномиальные числа	Номер бин. числа	Биномиальные числа	Номер бин. числа	Биномиальные числа
0	0 0 0 0 0	5	1 0 0 0 0	10	1 1 0 1 0
1	0 1 0 0 0	6	1 0 1 0 0	11	1 1 0 1 1
2	0 1 1 0 0	7	1 0 1 1 0	12	1 1 1 0 0
3	0 1 1 1 0	8	1 0 1 1 1	13	1 1 1 0 1
4	0 1 1 1 1	9	1 1 0 0 0	14	1 1 1 1 0

Появление кодовой комбинации 11111 говорит о том, что произошла ошибка, так как появление пяти единиц в данном биномиальном числе запрещено. Запрещено и появление больше одного нуля до последней младшей 1, так как в этом случае происходит нарушение условия, по которому максимальное число нулей в биномиальном числе первого класса не должно превышать

$n-k-1=6-4-1=1$. Поэтому появление комбинаций 00110 или 10010 следует признать ошибочной.

Так как всех возможных комбинаций с пятью разрядами $N=2^5=32$, а используются в качестве биномиальных чисел только 15, то 17 из них являются запрещенными. Причем они распадаются на два класса, один из которых содержит одну комбинацию 11111 с пятью единицами, а остальные 16 (00001, 00010, 00011, 00100, 00101, 00110, 00111 01001, 01010, 01011, 01101, 10001, 10010, 10011, 10101, 11001) больше одного нуля до младшей единицы. Так как запрещенных комбинаций во втором классе больше, чем в первом, то ошибочные переходы 0 в 1 будут обнаруживаться с меньшей вероятностью, чем переходы 1 в 0. Это значит, что биномиальный код может использоваться в асимметричных каналах связи, где вероятности переходов 1 в 0 и 0 в 1 отличаются между собой. При этом, меняя k и n, можно настраивать биномиальные числа на обнаружение ошибок того или иного вида с требуемой вероятностью. Существенно и то, что обнаружение ошибок происходит во время биномиального счета за счет внутренней избыточности используемых чисел, а не за счет внешних искусственно введенных добавочных разрядов.

Это позволяет наряду с решением задачи счета решать и дополнительную задачу – повышения надежности за счет естественной избыточности, не вводя при этом дополнительных аппаратных затрат.

Биномиальные коды уступают по своей обнаруживающей способности более сложным кодам, однако в силу своей естественной избыточности, адаптируемости, простоте аппаратной реализации, асимметричности могут оказаться в ряде случаев достаточно эффективными. Кроме того, получив их в особой матричной форме и тем самым значительно увеличив избыточность, можно достичь показателей в плане обнаруживающей и исправляющей способности недоступных многим известным и широко применяемым на практике кодам.

Часть 3 Практика биномиального счета

3.1 Алгоритмы прямого суммирующего биномиального счета неравномерных чисел

Рассмотренные в части 2 теоремы 44, 47, 48 содержат все необходимые предпосылки для построения алгоритмов суммирующего биномиального счета без каких-либо дополнительных преобразований.

Рассмотрим вначале алгоритмы *полного* суммирующего счета, в результате которого происходит упорядочивание всех биномиальных чисел из диапазона $P = C_n^k$ в возрастающем порядке. Счет начинается с кодирующей ноль биномиальной комбинацией 00…0 и заканчивающемся комбинацией 11…1, кодирующей максимальное биномиальное число $F_{\max} = P - 1 = C_n^k - 1$.

При этом числа задаются параметрами биномиальной системы счисления – n и k, где k - максимальное число единиц $q_{\max}$ в биномиальных комбинациях, а n–целочисленный параметр системы счисления. При этом $n > k$ и $k \neq 0$.

Как показано ранее в части 2, в биномиальную систему счисления входят биномиальная числовая функция (1) и ограничения на её параметры (2 – 4), (5 - 7). Для решения задач суммирующего счета достаточно использовать ограничения и зависимости между параметрами биномиальной функции, устанавливаемые в теоремах 44, 47, 48. Сама же биномиальная числовая функция необходима только при решении внешних задач таких, как переход к другим системам счисления, сопряженных с введением и устранением избыточной информации.

Для построения алгоритмов биномиального счета достаточно знать два параметра k и n. Их наличие позволяет определить максимальное число единиц $q_{\max} = k$ и нулей $l_{\max} = n - k$ в биномиальных числах, диапазон биномиальных чисел $P = C_n^k$, максимальную величину биномиального числа $F_{\max} = P - 1$, максимальную длину биномиальных чисел - $r_{\max} = n - 1$, а также их минимальную длину $r_{\min} = k$, если $k \leq l_{\max}$ или, $r_{\min} = n - k$, если $k \geq l_{\max}$, где $l_{\max} = n - k$.

Полный суммирующий счет должен начинаться с биномиального числа, кодирующего 0 – 00...0. Это число должно содержать $l_{max} = n - k$ нулей. После него в соответствии с теоремой 47 должно идти число с длиной, превышающей длину нулевого числа на 1 и содержащее напротив младшего разряда нулевого числа 1. Младший разряд нового числа при этом должен содержать 0. Аналогично строится следующее второе биномиальное число и т.д. до тех пор, пока не будет получено число длины $r = n - 1$ с $l_{max} = n - k$ нулями, нулем в конце и $q = k - 1$ единицами в предшествующих разрядах. Следующее число, как следует из теоремы 48, будет отличаться тем, что в его младшем разряде будет стоять 1, а не 0, как в предшествующем числе, а также еще тем, что число единиц в нем $q = q_{max} = k$, а число нулей $l = n - k - 1$. Это значит, что получена комбинация, относящаяся к 1-му классу биномиальных чисел. На этом действие теорем 47, 48 заканчивается.

Переходим к теореме 44. В соответствии с ней 1 появляется на месте последнего 0, стоящего перед единицами в конце числа. Все единицы после преобразованного в 1 нуля отбрасываются, и если их число было больше 1, то следующее биномиальное число в силу того, что q становится меньше $q_{max} = k$, теперь будет относиться ко второму классу биномиальных чисел, оканчивающихся на 0, и должно содержать $l = l_{max} = n - k$ нулей. Поэтому после вновь полученной 1 ставятся нули до тех пор пока их количество l в числе не станет равным $l_{max} = n - k$. Однако если число единиц, стоящих после преобразуемого нуля было равно 1, то новое биномиальное число останется в том же классе биномиальных чисел, оканчивающихся на 1, что и предыдущее, т.е. с числом единиц $q = k$.

При появлении k стоящих подряд в старших разрядах единиц счет оканчивается, так как получено максимальное число $F_{max} = P - 1$ длины k.

Таким образом, полный биномиальный счет всегда начинается с состоящего из нулей числа длиной $r = n - k$, а заканчивается числом длины $r = k$.

В качестве примеров построим в возрастающем порядке все биномиальные кодовые комбинации с параметрами $n = 6$ и $k = 4$, а затем все биномиальные кодовые комбинации с параметрами $n = 6$ и $k = 2$. В первом случае (см. табл. 1) максимальное число нулей в кодовых комбинациях $l_{max} = n - k = 6 - 4 = 2$, максимальная длина $r_{max} = n - 1 = 6 - 1 = 5$, диапазон биномиальных чисел $P = C_n^k = C_6^4 = 15$, максимальное число $F_{max} = P - 1 = 15 - 1 = 14$, минимальное число - $F_{min} = 0$. Минимальная длина биномиальных чисел $r_{min} = l_{max} = n - k = 6 - 4 = 2$, так как $l_{max} < k = 4$.

Таблица 1 – Суммирующий счет биномиальных чисел с $n = 6$, $k = 4$.

Номер бин. числа	Биномиальные числа	Номер бин. числа	Биномиальные числа	Номер бин. числа	Биномиальные числа
0	0 0	5	1 0 0	10	1 1 0 1 0
1	0 1 0	6	1 0 1 0	11	1 1 0 1 1
2	0 1 1 0	7	1 0 1 1 0	12	1 1 1 0 0
3	0 1 1 1 0	8	1 0 1 1 1	13	1 1 1 0 1
4	0 1 1 1 1	9	1 1 0 0	14	1 1 1 1

Во втором случае (см. табл. 2) максимальное число нулей в кодовых комбинациях $l_{max} = n - k = 6 - 2 = 4$, максимальная длина $r_{max} = n - 1 = 6 - 1 = 5$, диапазон биномиальных чисел $P = C_n^k = C_6^4 = 15$, максимальное биномиальное число $F_{max} = P - 1 = 15 - 1 = 14$, минимальное $F_{min} = 0$. Минимальная длина биномиальных чисел $r_{min} = k = 2$, так как $n - k = 6 - 2 = 4 > k = 2$.

Таблица 2 – Суммирующий счет биномиальных чисел с $n = 6$, $k = 2$.

Номер бин. числа	Биномиальные числа	Номер бин. числа	Биномиальные числа	Номер бин. числа	Биномиальные числа
0	0 0 0 0	5	0 0 1 1	10	1 0 0 0 0
1	0 0 0 1 0	6	0 1 0 0 0	11	1 0 0 0 1
2	0 0 0 1 1	7	0 1 0 0 1	12	1 0 0 1
3	0 0 1 0 0	8	0 1 0 1	13	1 0 1
4	0 0 1 0 1	9	0 1 1	14	1 1

Сформируем теперь в табл. 3 приведенные выше правила упорядочения биномиальных чисел в возрастающем порядке в виде алгоритма полного суммирующего биномиального счета.

Таблица 3 - Алгоритм полного суммирующего биномиального счета

Номер шага	Содержание
1	Формируется равное нулю первое биномиальное число, состоящее из n - k нулей – 00…0.
2	Младший 0 биномиального числа 00…0 преобразовывается в единицу и рядом с ней справа проставляется 0. В результате будет получено число 00…10. В младший разряд полученного числа ставится 1, а рядом с ней справа ставится 0, и так продолжается до тех пор, пока не будет получено биномиальное число длины $r = n – 1$.
3	Следующим биномиальным числом будет то же число, но с 1 вместо 0 в младшем разряде.
4	Все подряд стоящие в конце числа единицы, начиная с 1 младшего разряда, обнуляются, а младший нуль стоящий перед этими единицами преобразуется в 1. Если при этом число единиц в биномиальном числе стало $q = q_{\max} = k$, то нули в конце числа отбрасываются и новое биномиальное число получено. В противном случае после полученной 1 проставляются нули то тех пор пока их общее число в биномиальном числе не станет равным $l = l_{\max} = n - k$.
5	Если $q = k$ и перед единицами нет ни одного 0, то будет получено последнее максимальное биномиальное число, равное $F_{\max}$ = 11...1.
6	Останов.

В качестве примера, иллюстрирующего приведенный алгоритм, рассмотрим построение биномиальных чисел с n = 6, k = 1, а затем с n = 6, k = 5. В обоих случаях диапазон биномиальных чисел $P = C_n^1 = C_6^5 = 6$. Это будут соответственно следующие числа:

00000 = 0	и	0 = 0
00001 = 1		10 = 1
0001 = 2		110 = 2
001 = 3		1110 = 3
01 = 4		11110 = 4
1 = 5		11111 = 5.

В приведенных выше таблицах 1, 2 дан полный суммирующий упорядоченный перебор всех 15 биномиальных неравномерных чисел из их диапазона P. Однако на практике может потребоваться неполный упорядоченный суммирующий перебор части чисел, начиная с любого произвольного биномиального неравномерного числа из заданного диапазона P и до некоторого конечного.

Эта задача не представляет собой особых трудностей и решается по аналогии с полным перебором с тем отличием, что алгоритм начинает работать после анализа начального и последнего чисел.

Пример 1. Задано биномиальное число 1000011 с $n=8$. Требуется организовать неполный упорядоченный перебор биномиальных чисел, начиная с этого числа и до числа 1001001.

Решение. Анализ начального числа показывает, что оно имеет максимальную длину $r=r_{\max}=n-1=7$ разрядов и содержит q = 3 единицы. Так как число оканчивается на 1, то оно относится к первому классу биномиальных чисел и соответственно $q=q_{\max}=k= \ =3$. Следовательно, в нем содержится $l=r-k=7-3=4$ нуля, что меньше их максимально возможного числа $l_{\max}=n-k=8-3=5$.

Последнее упорядочиваемое число 1001001 имеет длину $r=r_{\max}=n-1=7$ разрядов и содержит $q=q_{\max}=k=3$ единицы. Поэтому оно также относится к первому классу биномиальных чисел, оканчивающихся на 1. В нем содержится $l=r-k=7-3=4$ нуля, что меньше $l_{\max}=n-k$ = 8 – 3 = 5.

Так как начальное число 1000011 оканчивается 1, то к нему применима теорема 45. В соответствии с ней первый младший ноль преобразуется в 1, и если затем число единиц $q<k$, то после этой 1 ставятся нули до тех пор, пока их общее количество в числе не станет равным $l_{\max}=n-k=8-3=5$. В результате получим число 1000100. Так как длина этого числа $r=r_{\max}=n-1=7$, то следующим числом в соответствии с теоремой 48 будет 1000101, а затем опять по теореме 45 – 100011 и снова в соответствии с теоремой 45 – 1001000 и далее 1001001. В результате будет получена следующая упорядоченная последовательность биномиальных чисел: 1000011, 1000100, 1000101, 100011, 1001000, 1001001. Таким образом, в процессе биномиального счета оказались перебранными 6 чисел из диапазона $P=C_n^k=C_8^3=\dfrac{8!}{5!3!}=56$.

Сформулируем теперь в табличном виде рассмотренные выше правила неполного суммирующего биномиального счета для случая, когда счет начинается и заканчивается произвольным биномиальным числом (см. табл. 4).

Таблица 4 - Алгоритм неполного суммирующего биномиального счета

Номер шага	Содержание
1	Производится подсчет числа единиц q и числа нулей l в заданном начальном биномиальном числе.
2	Если $l = l_{\max} = n - k$ и $q < k$, а $r = l + q = n - 1$, то в последний справа разряд, содержащий 0, ставится 1. В результате будет получено следующее по порядку биномиальное число с $q = q_{\max} = k$, принадлежащее к первому классу биномиальных чисел, содержащих в конце 1.
3	Если $l = l_{\max} = n - k$, $q < k$, а $r = l + q < n - 1$, то в младший разряд, содержащий 0, записывается 1, а рядом с ним справа ставится 0. Будет получено следующее биномиальное число с $l = l_{\max} = n - k$, содержащее в конце нуль.
4	Если $q = q_{\max} = k$, $l < l_{\max} = n - k$ и перед младшим разрядом, содержащим 1, стоит 0, то на месте этого 0 ставится 1, которая и будет в числе последней. В результате будет получено следующее по порядку биномиальное число с $q = q_{\max} = k$ и 1 в конце.
5	Если $q = q_{\max} = k$, $l < l_{\max} = n - k$ и после разряда, в котором стоит младший 0, справа имеется подряд несколько единиц, то на место 0 ставится 1 и справа добавляются нули до тех пор, пока их число не станет равным $n - k$. В результате будет получено следующее по порядку биномиальное число.
6	Если $q = k$ и перед единицами слева нет ни одного 0, то будет получена конечная кодовая комбинация, представляющая максимальное биномиальное число $F_{\max}$ = 11...1.
7	Останов

3.2 Алгоритм суммирующего неравномерного биномиального счета с промежуточным инвертированием

Теорема 46 предполагает для получения следующего большего на 1 биномиального неравномерного числа его двойное инвертирование. Вначале инвертируются все разряды без исключения, а затем только те разряды, которые стоят до последнего при счете слева направо разряда, содержащего 1. Если число единиц q в результате повторного инвертирования с учетом неинвертированной последней 1 в полученном числе будет равно $q_{\max} = k$, то после отбрасывания стоящих после неинвертированной 1 нулей, если они есть, будет получено следующее в возрастающем порядке биномиальное неравномерное число. В противном случае, если число единиц $q < q_{\max} = k$, после неинвертированной 1 дописываются нули в таком количестве, чтобы их сумма в новом числе $l = l_{\max} = n - k$.

Так, например, если дано биномиальное число 00011 с $n = 6,\ k = 2$, то процедура получения большего на 1 следующего числа состоит из переходов: 00011→11100→00100.

Это значит, что следующим увеличенным на 1 биномиальным числом с $n = 6,\ k = 2$, идущим за числом 00011, будет число 00100.

При этом промежуточным биномиальным числом, возникающим в процессе получения числа 00100 будет число 11100, записанное в симметричной системе счисления с $n = 6$, $k' = n - k = 4$.

Остальные упорядоченные числа для $n = 6,\ k = 2$ приведены ниже в табл. 5.

Обратим при этом внимание на то, что так как в табл. 5 первое инвертирование меняет нули на единицы, а единицы на нули, то происходит перевод биномиальных чисел с параметрами n и k в биномиальные числа с параметрами n и $k' = n - k$ и, кроме того, организовывается их упорядочивание в обратном убывающем порядке, то есть в результате такого инвертирования все двоичные разряды биномиальных чисел значения принимают обратные (инверсные) значения, т.е. 0 переходит в 1, 1 переходит в 0. в результате значение биномиального числа равное 0 переходит в число 14, 1 в 13, …, 13 в 14.

Таблица 5 – Суммирующий биномиальный счет с промежуточным инвертированием

Номер бин. числа i	Бин. число с $n=6, k=2$	Номер бин. числа j	Бин. число с $n=6, k'=4$	Номер бин. числа	Бин. число с $n=6, k=2$
0	0000	14	1111	1	00010
1	00010	13	11101	2	00011
2	00011	12	11100	3	00100
3	00100	11	11011	4	00101
4	00101	10	11010	5	0011
5	0011	9	1100	6	01000
6	01000	8	10111	7	01001
7	01001	7	10110	8	0101
8	0101	6	1010	9	011
9	011	5	100	10	10000
10	10000	4	01111	11	10001
11	10001	3	01110	12	1001
12	1001	2	0110	13	101
13	101	1	010	14	11

Очевидно, что в общем виде номер i исходного биномиального числа с параметрами n и k преобразуется в номер $j = P - i - 1$ биномиального числа с параметрами n и $k' = n - k$, получаемого после первой инверсии, т.е.

$$j = P - i - 1 = C_n^k - i - 1 \qquad (1)$$

и соответственно

$$i = P - j - 1 = C_n^k - j - 1, \qquad (2)$$

где $i,\ j = 0, 1, \ldots, P,\ i \neq j.$

Второе инвертирование в соответствии с теоремой 46 преобразует биномиальное число с параметрами n и $k' = n - k$ в биномиальное число с параметрами n и k, увеличенное по своему количественному значению на 1.

Представим приведенный выше алгоритм суммирующего биномиального счета неравномерных чисел для общего случая в табличной форме.

Таблица 6 – Алгоритм суммирующего биномиального счета неравномерных чисел с промежуточной симметричной системой счисления

Номер шага	Содержание
1	Инвертируются все разряды заданного начального неравномерного биномиального числа.
2	В полученном биномиальном числе инвертируются разряды, начиная со старшего и заканчивая стоящим перед последним при счете слева направо разрядом, содержащим 1.
3	Если общее число единиц q после второго инвертирования стало равным $q_{\max} = k$, то новое биномиальное число, оканчивающееся 1, является сформированным.
4	Если число единичных разрядов $q < k$, то после разряда, содержащего последнюю 1, ставятся разряды, содержащие нули, до тех пор, пока их общее количество l не станет равным $l_{\max} = n - k$. Новое биномиальное число получено.
5	Если полученное число не является $F_{\max} = 11\ldots1$, то переход к пункту 2.
6	Если полученное число $F_{\max} = 11\ldots1$, то останов.

3.3 Алгоритмы суммирующего биномиального счета равномерных чисел

Обратим внимание на то, что рассматриваемые выше биномиальные числа являются неравномерными и префиксными, то есть меньшие из них по длине не могут быть началом более длинных (см. часть 2 теорему 34). Это важное свойство биномиальных чисел, которое предполагает, что они обладают свойством самораспознаваемости и, следовательно, в принципе не требуют синхронизирующих сигналов, задающих их начало и конец. Однако такие неравномерные числа могут быть получены только программным путем на универсальной ЭЦВМ. При схемной реализации в специализированных цифровых устройствах число элементов памяти для хранения кодовых комбинаций определяется исходя из наибольшей возможной их длины, т.е. устройство должно иметь n-1 элементов памяти при формировании любой кодовой биномиальной комбинации независимо от ее длины. В случае если биномиальная кодовая комбинация занимает только часть, а не все элементы памяти из n-1, то свободные элементы остаются в исходном состоянии, т.е. в нулевом. Это значит, что неравномерные биномиальные числа преобразуются в равномерные, разряды которых, идущие за нулевым разрядом неравномерного биномиального числа, заполняются нулями.

Эти разряды являются *избыточными* в отличие от основных, соответствующих разрядам неравномерных биномиальных чисел, которые являются *информационными*.

Например, неравномерные биномиальные числа, содержащие только информационные разряды в табл. 7, 8 получают избыточные нулевые разряды и в результате преобразуются в равномерные числа. Избыточные разряды, преобразующие неравномерные числа в равномерные выделены в табл. 7, 8 сплошной ступенчатой линией.

Таким образом, простейший алгоритм формирования равномерных биномиальных чисел легко реализуется дополнением неравномерных биномиальных чисел нулями со стороны младших разрядов до тех пор, пока их длина r не станет равной $r_{max} = n-1$.

Например, при $n=6$, $k=4$ неравномерные биномиальные числа 00, 010, 0110 после дополнения их нулями будут иметь следующий вид: 00000, 01000, 01100.

Таблица 7 – Суммирующий биномиальный счет равномерных чисел с $n = 6$, $k = 4$.

Номер бин. числа	Разряды					Номер бин. числа	Разряды					Номер бин. числа	Разряды				
	4	3	2	1	0		4	3	2	1	0		4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	5	1	0	0	0	0	10	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	6	1	0	1	0	0	11	1	1	0	1	1
2	0	1	1	0	0	7	1	0	1	1	0	12	1	1	1	0	0
3	0	1	1	1	0	8	1	0	1	1	1	13	1	1	1	0	1
4	0	1	1	1	1	9	1	1	0	0	0	14	1	1	1	1	0

Таблица 8 – Суммирующий биномиальный счет равномерных чисел с $n = 6$, $k = 2$.

Номер бин. числа	Разряды					Номер бин. числа	Разряды					Номер бин. числа	Разряды				
	4	3	2	1	0		4	3	2	1	0		4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	0	5	0	0	1	1	0	10	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	6	0	1	0	0	0	11	1	0	0	0	1
2	0	0	0	1	1	7	0	1	0	0	1	12	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	8	0	1	0	1	0	13	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	9	0	1	1	0	0	14	1	1	0	0	0

Алгоритм формирования всех равномерных биномиальных чисел будет отличаться от приведенного выше алгоритма для неравномерных чисел, хотя и основывается на нем (см. табл.9).

При разработке такого алгоритма взято во внимание вытекающее из теоремы 47 свойство, состоящее в том, что если анализируемая неравномерная кодовая комбинация содержит $l = l_{\max} = \; = n - k$ нулей и, значит, в ее конце стоит 0, то запись 1 для следующей кодовой комбинации происходит именно в этот младший разряд независимо от числа $q = 0,\ 1, \ldots, k-1$ единиц, стоящих в комбинации до этого разряда.

Это свойство удобно выразить с помощью формулы

$$j = n - k - q + 1, \qquad (3)$$

где j – номер разряда равномерного биномиального числа, в который происходит запись 1. Очевидно, что эта 1 последняя в числе при счете единиц слева направо и первая при счете справа налево.

Так, например, при $n=6$, $k=4$ для полного суммирующего счета равномерных биномиальных чисел первым анализируется равномерное биномиальное число 00000. Номер разряда, в который должна быть занесена 1, будет $j=6-4-0+1=3$, что соответствует числу 01000 (см. табл. 7).

Следующее число должно содержать последнюю 1 в $j=6-4-1+1=2$ разряде, что соответствует числу 01100. Затем при $j=6-4-2+1=1$ должно идти число 01110 и, наконец, при $j=6-4-1+3=0$ следует число 01111.

Появление в биномиальном числе в процессе добавления единиц величины $q=k$ приводит к необходимости применения теоремы 44, в соответствии с которой в следующем биномиальном числе 1 должна быть поставлена вместо первого ноля, стоящего перед единицами в его конце, а все единицы, которые стояли после 0, должны быть преобразованы в нули.

Так, например, если $n=6, k=2$, то после числа 00011 должно идти число 00100.

Таблица 9 – Алгоритм полного суммирующего биномиального счета равномерных чисел

Номер шага	**Описание шагов алгоритма**
1	Подсчитывается количество единиц q в биномиальном равномерном числе.
2	Если $q<q_{max}=k$, то в разряд $j=n-k-q+1$ записывается 1.
3	Если $q=q_{max}=k$ и перед единицами имеется хотя бы один 0, то в младший разряд с 0 ставится 1, а все последующие младшие разряды, в которых стоят единицы, преобразуются в нули.
4	Если $q=q_{max}=k$ и перед единицами не стоит ни одного нуля, то получена конечная кодовая комбинация биномиального числа $F=F_{max}=C_n^k-1$. Если $q<q_{max}=k$, то переход к 2.
5	Останов.

Сформулируем теперь в табл. 10 в краткой форме алгоритм неполного суммирующего перебора равномерных биномиальных чисел, начинающийся с произвольного биномиального числа.

Таблица 10 – Алгоритм неполного суммирующего биномиального счета равномерных чисел

Номер шага	Описание шагов алгоритма
1	Подсчитывается число q единиц в биномиальном равномерном числе.
2	Если в числе $q < q_{\max} = k$, то $(n-k)$-й младший при счете слева направо нуль преобразуется в 1. Новое по порядку число сформировано.
3	Если в числе $q = q_{\max} = k$, то стоящий перед единицами в конце числа последний нуль преобразуется в 1, а стоящие за нулем единицы переходят в 0. В результате будет сформировано новое по порядку число.
4	Если $q = q_{\max} = k$, а число нулей, стоящих перед единицами $l = 0$, то получено максимальное биномиальное число. Если $q < q_{\max}$, то переход к пункту 2.
5	Останов.

При суммирующем равномерном счете, как и в разделе 3.2, можно использовать переход к промежуточной симметричной биномиальной системе счисления с $k' = n - k$. Однако алгоритм получения следующего по порядку биномиального числа при этом будет несколько отличаться от рассмотренного выше (см. табл.11).

Первое инвертирование исходного равномерного биномиального числа в нем начинается со старшего разряда и последовательно идет до тех пор пока не будут инвертированы или k единиц или $n-k$ нулей. Остальные младшие разряды не изменяются.

Затем, как и для неравномерных чисел, происходит инвертирование содержимого всех старших разрядов полученного после первого инвертирования до последнего разряда, в котором содержится 1. Однако никаких нулей в этом случае дописывать не следует, так как они уже стоят в младших разрядах. Эти нули в табл. 11 выделены сплошной линией.

Таблица 11 – Суммирующий биномиальный счет с переходом через промежуточную систему счисления

Номер бин. числа	Бином. число с $n=6$, $k=2$	Номер бин. числа	Бином. число с $n=6$, $k=4$	Номер бин. числа	Бином. число с $n=6$, $k=2$
0	0 0 0 0 0	14	1 1 1 1 0	1	0 0 0 1 0
1	0 0 0 1 0	13	1 1 1 0 1	2	0 0 0 1 1
2	0 0 0 1 1	12	1 1 1 0 0	3	0 0 1 0 0
3	0 0 1 0 0	11	1 1 0 1 1	4	0 0 1 0 1
4	0 0 1 0 1	10	1 1 0 1 0	5	0 0 1 1 0
5	0 0 1 1 0	9	1 1 0 0 0	6	0 1 0 0 0
6	0 1 0 0 0	8	1 0 1 1 1	7	0 1 0 0 1
7	0 1 0 0 1	7	1 0 1 1 0	8	0 1 0 1 0
8	0 1 0 1 0	6	1 0 1 0 0	9	0 1 1 0 0
9	0 1 1 0 0	5	1 0 0 0 0	10	1 0 0 0 0
10	1 0 0 0 0	4	0 1 1 1 1	11	1 0 0 0 1
11	1 0 0 0 1	3	0 1 1 1 0	12	1 0 0 1 0
12	1 0 0 1 0	2	0 1 1 0 0	13	1 0 1 0 0
13	1 0 1 0 0	1	0 1 0 0 0	14	1 1 0 0 0
14	1 1 0 0 0	0	0 0 0 0 0		

3.4 Алгоритмы вычитающего неравномерного биномиального счета

Вычитающий биномиальный счет, как и суммирующий, основывается на теоремах 44, 47, 48, которые, однако, теперь должны применяться в обратном порядке.

Так из теоремы 47 следует, что если биномиальное число длины $r < n-1$ оканчивается на 0, то при суммирующем счете для получения следующего по порядку биномиального числа этот 0 необходимо заменить на 1 и рядом с ней надо справа поставить новый 0.

При вычитающем счете все теперь должно происходить наоборот: если биномиальное число длины $r \le n-1$ оканчивается на 0 и перед ним стоит 1, то этот 0 отбрасывается, а 1 заменяется на 0, который является концом нового на 1 меньшего биномиального числа.

Например, если дано число 1010 с $n = 6,\ k = 4$, то после него по теореме 47 должно идти число 100 (см. табл. 12).

Если же биномиальное число имеет длину $r = n - 1$ и в его конце стоит 1, то в соответствии с теоремой 48 эта 1 должна быть заменена на 0 и новое на 1 меньшее биномиальное число получено. Например, после числа 01111 с $n = 6,\ k = 4$ по теореме 48 должно идти число 01110 (см. табл. 12).

В случае, если биномиальное число длины $r \le n - 1$ оканчивается на 0 и впереди него рядом стоит хотя бы еще один 0, то в действие вступает теорема 44.

В соответствии с ней последняя 1 справа, после которой идут нули, преобразовывается в 0 и после этого нуля ставятся единицы до тех пор пока их общее число q в новом на 1 меньшем биномиальном числе не станет равным $q_{\max} = k$.

Например, при $n = 6,\ k = 2$ после числа 00100 должно идти число 00011 (см. табл. 13).

В случае, когда биномиальное число имеет длину $r < n - 1$ и в его конце стоит одна 1, перед которой стоит хотя бы один 0, то в соответствии с теоремой 44 эта 1 заменяется на 0 и справа к нему приписывается 1.

Например, при $n = 6,\ k = 2$ после числа 101 идет число 1001 (см. табл.13).

Таблица 12 – Биномиальные неравномерные числа с $n = 6$, $k = 4$, упорядоченные в убывающем порядке

Номер бин. числа	Бином. число	Номер бин. числа	Бином. число	Номер бин. числа	Бином. число
14	1111	9	1100	4	01111
13	11101	8	10111	3	01110
12	11100	7	10110	2	0110
11	11011	6	1010	1	010
10	11010	5	100	0	00

Таблица 13 – Биномиальные неравномерные числа с $n=6$, $k=2$, упорядоченные в убывающем порядке

Номер бин. числа	Бином. число	Номер бин. числа	Бином. число	Номер бин. числа	Бином. число
14	11	9	011	4	00101
13	101	8	0101	3	00100
12	1001	7	01001	2	00011
11	10001	6	01000	1	00010
10	10000	5	0011	0	0000

Представим приведенный выше алгоритм вычитания неравномерных чисел в табличной форме для их неполного счета.

Таблица 14 – Алгоритм неполного вычитающего биномиального счета

Номер шага	**Содержание**
1	Производится подсчет числа единиц q и числа нулей l в заданном начальном биномиальном числе.
2	Если в биномиальном числе количество нулей $l < n-k$, а количество единиц $q = q_{\max} = k$, и при этом длина числа $r = l + q < n-1$, то последняя справа 1 преобразуется в 0 и рядом с ней также справа ставится новая 1. Следующее по убывающему порядку биномиальное число сформировано.

Продолжение таблицы 14 – Алгоритм неполного вычитающего биномиального счета

Номер шага	**Содержание**
3	Если окажется, что в биномиальном числе $l < n - k$ и $q = q_{\max} = k$, а $r = l + q = n - 1$, то в последний справа разряд, содержащий 1, ставится 0. В результате будет получено следующее по порядку меньшее на 1 биномиальное число с $l = l_{\max} = n - k$ нулями, принадлежащее ко второму классу биномиальных чисел, содержащих в конце 0.
4	Если биномиальное число содержит $l = n - k$ нулей и в его конце имеется их подряд больше одного, то первая 1, стоящая перед нулями, заменяется на 0, а справа от полученного 0 дописываются единицы до тех пор пока их общее количество в числе не станет равным $q_{\max} = k$. Биномиальное число сформировано.
5	Если биномиальное число содержит $l = n - k$ нулей и в его конце имеется один 0, перед которым стоит 1, то эта 1 заменяется на 0, а ранее стоявший 0 отбрасывается, и на этом формирование биномиального числа заканчивается.
6	Если в $n - k$ старших разрядах (находящихся слева) биномиального числа получены нули, то это будет последнее упорядочиваемое число равное 0. Счет в убывающем порядке закончен.
7	Останов.

Полный счет будет отличаться от неполного тем, что в пункте 1 алгоритма неполного убывающего счета будет формироваться биномиальное число, содержащее k единиц: 11…1. Все остальные пункты для полного счета останутся такими же как и для неполного.

3.5 Алгоритмы вычитающего неравномерного биномиального счета с переходом к симметричной биномиальной системе счисления

Известно, что вычитание единиц с двоичных чисел легко получить при реализации суммирующего счета, если информацию получать не в прямой форме, а в инверсной, при которой происходит инвертирование всех разрядов исходного двоичного числа (см. табл. 15).

Таблица 15 – Суммирующий и вычитающий двоичный счет

Номер двоич. числа	Двоичное число в прямой форме	Номер двоич. числа	Двоичное число в инверсной форме
0	000	7	111
1	001	6	110
2	010	5	101
3	011	4	100
4	100	3	011
5	101	2	010
6	110	1	001
7	111	0	000

Это правило относится и к биномиальным системам счисления, однако с тем существенным отличием, что исходные биномиальные числа преобразуются предварительно в промежуточную симметричную исходной биномиальную систему счисления с максимальным числом содержащихся в них единиц $k' = n - k$.

В табл. 16 в последней колонке получен полный вычитающий биномиальный счет для всех биномиальных чисел с $n = 6,\ k = 4$ через промежуточный симметричный счет с $n = 6$, $k' = n - k = \ = 6 - 4 = 2$.

Алгоритм полного вычитающего счета неравномерных биномиальных чисел, реализующий табл. 16, представлен ниже в табл. 17.

Таблица 16 – Полный вычитающий неравномерный биномиальный счет через симметричный промежуточный $n=6,\ k=4$

Номер бин. числа	Бин. число с $n=6, k=4$	Номер бин. числа	Бин. число с $n=6, k'=2$	Номер бин. числа	Инверсное бин. число с $n=6, k=4$
0	00	0	0000	14	1111
1	010	1	00010	13	11101
2	0110	2	00011	12	11100
3	01110	3	00100	11	11011
4	01111	4	00101	10	11010
5	100	5	0011	9	1100
6	1010	6	01000	8	10111
7	10110	7	01001	7	10110
8	10111	8	0101	6	1010
9	1100	9	011	5	100
10	11010	10	10000	4	01111
11	11011	11	10001	3	01110
12	11100	12	1001	2	0110
13	11101	13	101	1	010
14	1111	14	11	0	00

Таблица 17 – Алгоритм полного вычитающего неравномерного биномиального счета на основе перехода к симметричной биномиальной системе счисления

Номер шага	**Содержание**
1	Берется равное нулю биномиальное число с заданными значениями n и k и происходит замена его на такое же число с параметрами n и $k' = n - k$, что приводит к замене $n - k$ нулей в нем на $n - k' = k$.
2	Путем инвертирования содержимого разрядов, полученного по пункту 1 биномиального числа, происходит переход к инверсному к нему числу с параметрами n и k.
3	В соответствии с алгоритмом суммирования биномиальных чисел происходит добавление единиц к биномиальным числам с параметрами n и $k' = n - k$ и их инвертирование до тех пор пока не будет получено биномиальное число, состоящее из одних единиц.
4	Останов.

Алгоритм неполного вычитающего счета будет отличаться от полного счета тем, что начальное биномиальное число с параметрами n и k может быть любым $0, 1, ..., P-2$, за исключением максимального $F_{\max} = P - 1$.

Однако при этом надо учитывать то, что номер i исходного биномиального числа F_i с параметрами n и k после промежуточного преобразования (пункт 1 табл. 17) переходит в номер $j = P - i - 1$ биномиального числа с параметрами n и k'.

Затем, начиная с этого числа, осуществляется вычитающий счет, путем реализации операции суммирования единиц в симметричной системе счисления с параметрами n и $k' = n - k$, и затем инвертированием получаемых чисел и переходе соответственно в систему счисления с параметрами n и k.

Например, необходимо вычесть 1 с биномиального числа $F_6 = 1010$, равного 6 с параметрами $n = 6$, $k = 4$.

Тогда путем инвертирования всех разрядов числа $\overline{F}_6 = \overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}$ получаем число $F_8 = 0101$ равное 8 с параметрами $n = 6$, $k' = 2$.

Затем добавляем 1 к этому числу по правилам системы счисления с $k' = 2$ и в результате получим число $F_9 = 011$ с параметрами $n = 6$, $k' = 2$. После инвертирования разрядов числа F_9 будет получено биномиальное число $F_5 = 100$ с номером 5 и параметрами $n = 6$, $k = 4$. В результате была выполнена операция вычитания 1 с исходного числа $F_6 = 1010$.

Операции, аналогичные приведенным, можно проводить до тех пор, пока не будет получено последнее число 00. Очевидно, что с помощью приведенной процедуры легко осуществлять биномиальный реверс.

3.6 Алгоритмы вычитающего равномерного биномиального счета

Очевидно, что равномерные биномиальные числа при вычитании можно получить с неравномерных просто дописав к ним нули в недостающие младшие разряды. Однако это эффективно при программной реализации, когда имеется возможность с помощью программы дописывать недостающие в неравномерных числах нули.

При аппаратной реализации используется $n-1$ элементов памяти, которые в исходном состоянии находятся в нулях и дальше идет их последовательное заполнение по правилам, отличающимся от приведенных в предыдущем разделе для неравномерных чисел.

Рассмотрим эти правила.

Реализация алгоритма вычитания происходит путем выделения младшего единичного разряда в биномиальном числе, перевода его в нуль и записи в рядом стоящих нулевых младших разрядах единиц до общего их количества в числе равном k .

Например, при параметрах $n=6,\ k=4$, биномиальное число 11000 при вычитании с него 1 преобразуется в 10111 (см. табл. 18).

Таблица 18 – Упорядоченные в убывающем порядке биномиальные равномерные числа

Номер бин. числа	Разряды 4 3 2 1 0	Номер бин. числа	Разряды 4 3 2 1 0	Номер бин. числа	Разряды 4 3 2 1 0
14	11110	9	11000	4	01111
13	11101	8	10111	3	01110
12	11100	7	10110	2	01100
11	11011	6	10100	1	01000
10	11010	5	10000	0	00000

Если количество младших разрядов после последней единицы в биномиальном числе меньше, чем количество требуемых единиц, то запись единиц в младшие разряды числа не происходит.

Например, при $n=6,\ k=4$ биномиальное число 01110 преобразуется в 01100 (см. табл. 18), так как после перехода последней 1 в 0 к нему можно приписать только одну 1, а чтобы суммарное число единиц равнялось значению $k=4$ требуется к полученному 0 приписать 2 единицы.

Вычитающий биномиальный счет равномерных чисел можно реализовать и с помощью перехода к промежуточной симметричной биномиальной системе счисления, как это рассмотрено в разделе 3.5 для неравномерных биномиальных чисел. Однако при этом надо учитывать тот факт, что младшие разряды, идущие после $n-k$ старших нулей или k единиц, не должны инвертироваться и содержат нули.

Из этого следует, что для получения биномиальных равномерных чисел с параметрами n и k в убывающем порядке необходимо перейти к промежуточной симметричной равномерной биномиальной системе счисления с параметрами n и $k' = n-k$, в которой производится суммирующий счет и затем осуществляется инверсия, начиная со старших разрядов до тех пор пока не будет получено или k единиц или $n-k$ нулей. Оставшиеся неинвертированными младшие разряды остаются без изменений в нулях (см табл. 19). Выделенные сплошной линией в табл. 19 нули остаются без изменений в симметричных и инверсных биномиальных числах.

Таблица 19 – Вычитающий равномерный биномиальный счет через суммирующий симметричный $n=6,\ k=4$

Номер бин. числа	Бин. число с $n=6, k=4$	Номер бин. числа	Бин. число с $n=6, k'=2$	Номер бин. числа	Бин. число с $n=6, k=4$
0	0 0 0 0 0	0	0 0 0 0 0	14	1 1 1 1 0
1	0 1 0 0 0	1	0 0 0 1 0	13	1 1 1 0 1
2	0 1 1 0 0	2	0 0 0 1 1	12	1 1 1 0 0
3	0 1 1 1 0	3	0 0 1 0 0	11	1 1 0 1 1
4	0 1 1 1 1	4	0 0 1 0 1	10	1 1 0 1 0
5	1 0 0 0 0	5	0 0 1 1 0	9	1 1 0 0 0
6	1 0 1 0 0	6	0 1 0 0 0	8	1 0 1 1 1
7	1 0 1 1 0	7	0 1 0 0 1	7	1 0 1 1 0
8	1 0 1 1 1	8	0 1 0 1 0	6	1 0 1 0 0
9	1 1 0 0 0	9	0 1 1 0 0	5	1 0 0 0 0
10	1 1 0 1 0	10	1 0 0 0 0	4	0 1 1 1 1
11	1 1 0 1 1	11	1 0 0 0 1	3	0 1 1 1 0
12	1 1 1 0 0	12	1 0 0 1 0	2	0 1 1 0 0
13	1 1 1 0 1	13	1 0 1 0 0	1	0 1 0 0 0
14	1 1 1 1 0	14	1 1 0 0 0	0	0 0 0 0 0

При неполном счете надо учитывать то, что суммирующий счет в промежуточной системе счисления с $k' = n - k$ начинается не с исходного числа i биномиальной системы счисления с параметрами n и k, а с числа $j = P - i - 1$. Поэтому исходное число i надо сначала заменить на j в промежуточной симметричной системе счисления путем инвертирования всех его информационных разрядов и затем уже выполнять все необходимые операции, реализующие вычитание.

В конечном итоге алгоритм неполного вычитающего равномерного биномиального счета представим в виде табл. 20.

Таблица 20 – Алгоритм неполного вычитающего равномерного биномиального счета на основе промежуточной симметричной системы счисления

Номер шага	**Содержание**
1	Определяются параметры n и k системы счисления для биномиального числа $i < F_{\max}$, с которого должен начаться вычитающий счет равномерных чисел.
2	Находится число $j = P - i - 1$ в симметричной системе счисления с параметрами n и $k' = n - k$ путем инвертирования всех информационных разрядов числа i.
3	Производится инверсия старших информационных разрядов полученного числа j до получения или k-ой единицы или $(n-k)$-го нуля. Неинвертированными разряды остаются без изменений в нулях.
4	К числу j в симметричной биномиальной системе счисления добавляется 1: $j = j + 1$.
5	Если число $j < F_{\max}$, то переход к пункту 3.
6	Если $j = F_{\max}$, то останов.

3.7 Перебор равновесных кодовых комбинаций на основе биномиальных чисел

Задача перебора равновесных кодовых комбинаций, т.е. комбинаций с постоянным числом единиц, решается давно как программным, так и аппаратным способом и широко используется для надежного кодирования передаваемой информации, а также для построения самоконтролируемых цифровых устройств. Использованием алгоритмов биномиального счета можно поднять эффективность такого кодирования, сделав его более быстродействующим и надежным.

Идея использования биномиального счета для равновесного кодирования является частным случаем предложенной автором более общей идеи. Ее суть состоит в том, что любая позиционная система счисления является структурой некоторого класса комбинаторных объектов, на базе которой возможно их простое построение.

Отсюда вытекает универсальный метод построения комбинаторных объектов, решающий две задачи:

1. Построение позиционной системы счисления, структура которой соответствовала бы классу объектов, к которому принадлежит формируемый.

2. Построение на базе этой системы счисления требуемого объекта.

В данном случае первая задача уже решена в результате синтеза биномиальной системы счисления.

Решение второй задачи будет рассмотрено ниже на основе древовидной структуры биномиальной системы счисления, представленной на рис. 1.

Обратим внимание на то, что все неравномерные биномиальные числа размещены в порядке возрастания, если смотреть сверху вниз, или убывания, если смотреть снизу вверх. Это значит, что каждое последующее биномиальное число при упорядоченной нумерации конечных вершин дерева больше (меньше) на 1 от предшествующего. Только такое кодирование дерева задает структуру системы счисления. При любом другом кодировании исчезает признак, дающий возможность производить сравнение кодовых комбинаций (чисел) по величине и тем самым отличать меньшее число от большего. Как следствие не выполняется порядковая функция системы счисления, и в результате соответствующий код не будет ее представлять, хотя нумерация кодовых комбинаций в произвольном порядке, например, в табличной форме при этом вполне возможна. Однако такое кодирование всегда сложнее, так как требует дополнительной памяти и времени преобразования.

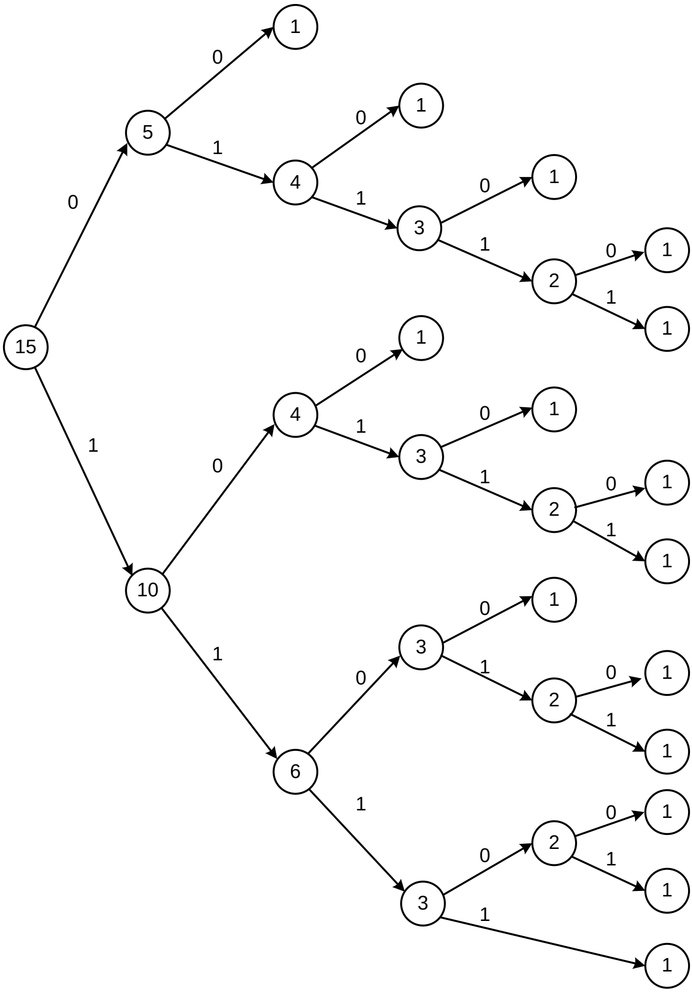


Рисунок 1 – Структура биномиальной системы счисления с $n=6,\ k=4$ *и неравномерными числами*

Возникает вопрос о количестве кодов, которых можно разместить на конкретном дереве. Для этого дерево на рис. 1 с неравномерными биномиальными числами преобразуем в пятиразрядное дерево на рис. 2 биномиальной системы счисления с равномерными числами.

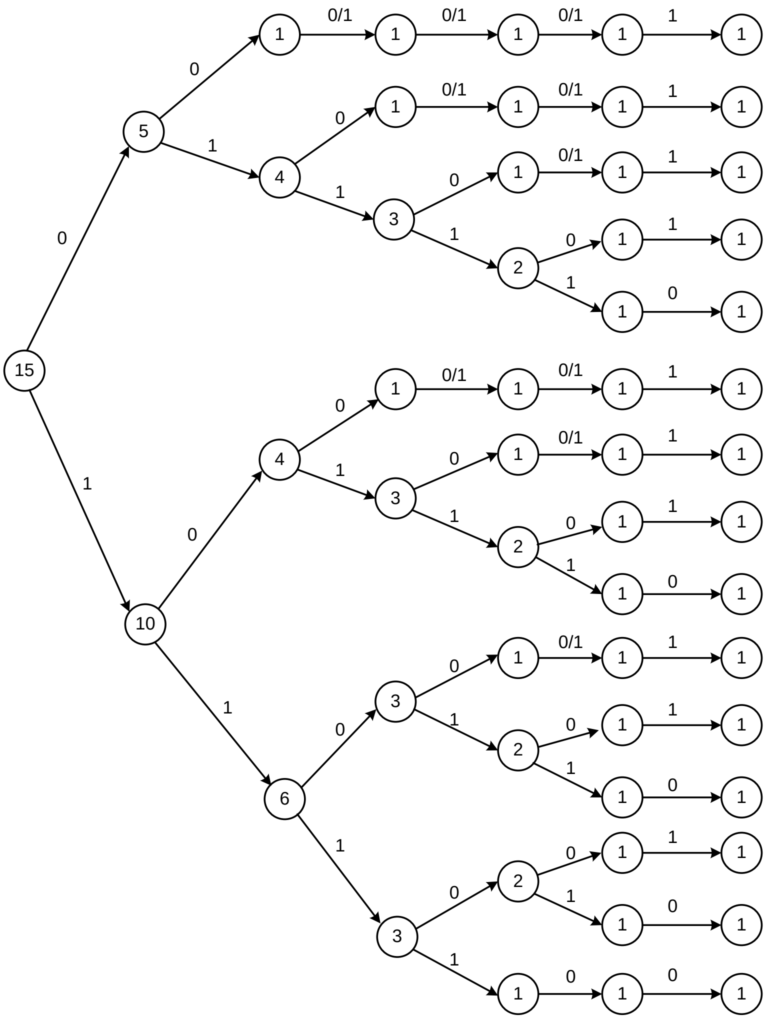


Рисунок 2 – Структура биномиальной системы счисления с $n = 6, k = 4$ и равномерными числами

Число двоичных кодов с равномерными числами очевидно будет равно C_{32}^{15} и только один код представляет биномиальную систему счисления – тот, который показан на рис. 2. Пятиразрядный код на рис. 2 это будет код уже позиционной биномиальной системы счисления с избыточным числом разрядов.

Каждый из C_{32}^{15} двоичных кодов может быть получен на основе биномиальной системы счисления в результате взаимнооднозначного отображения биномиальных чисел в соответствующие им кодовые комбинации, принадлежащие к одному из этих кодов.

В указанное множество кодов входит и равновесный код. На дереве рис. 2 символы равновесных кодовых комбинаций стоят справа от соответствующих им цифр биномиальных комбинаций.

При этом вводится дополнительный (-1)-ый разряд в биномиальное равномерное число, который равен 1, если число предшествующих единиц в старших разрядах не равно 4, или 0, если оно равно 4.

Из рассмотренного примера вытекает простой алгоритм получения равновесных кодов с заданным числом единиц k на основе биномиальных неравномерных чисел (см. таблицу 21).

1. В биномиальном числе подсчитывается число единиц q.

2. Если $q < k$, то к младшему разряду биномиального числа дописываются единицы, так чтобы их сумма в получаемой комбинации равнялась k, а если $q = k$, то нули.

3. Полученная комбинация является равновесной.

Аналогично можно получить множество других комбинаторных объектов, имеющих структуру идентичную биномиальной, и тем самым решить задачу их последовательного перебора в возрастающем или убывающем порядке. В этом состоит универсальность предлагаемого метода формирования комбинаторных объектов.

Таблица 21 - Получение равновесных кодовых комбинаций на основе биномиальных чисел с $n = 6$, $k = 4$.

Номер	Биномиальное число	Равновесные кодовые комбинации	Номер	Биномиальное число	Равновесные кодовые комбинации
0	00000	001111	8	10111	101110
1	01000	010111	9	11000	110011
2	01100	011011	10	11010	110101
3	01110	011101	11	11011	110110
4	01111	011110	12	11100	111001
5	10000	100111	13	11101	111010
6	10100	101011	14	11110	111100
7	10110	101101			

Задания для контрольных работ

1. К разделу биномиальные коэффициенты

1. Из 10 студентов требуется выбрать 5 на студенческую конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

2. Сколькими способами можно поставить 4 шашки на 32 черные клетки?

3. Сколькими способами можно поставить на 32 черные клетки 10 белых и 8 черных шашек?

4. На профсоюзную студенческую конференцию из 20 человек необходимо выбрать 4 делегата. Сколькими способами это можно сделать?

5. У одного студента имеется 5 книг по математике, а у другого 12 по физике. Сколько имеется вариантов для равноценного обмена по две книги?

6. Происходит розыгрыш вещественной лотереи. В урне имеется 100 билетов, из которых 5 выигрышных. Первый игрок вынимает 7 билетов. Какое может быть получено количество вариантов, в которых попадает этому игроку 3 выигрышных билета?

7. Шестнадцать студентов разделились на две равные группы для поиска интересующего их объекта. Среди них лишь 4, которые знакомы с местностью. Каким числом способов они могут разделиться так, чтобы в каждой группе было по два знающих местность студента?

8. Собрание студенческой группы, состоящее из 20 человек, в которой были две девушки, избрали делегацию из 6 человек на студенческую конференцию. Сколько может быть способов формирования делегации, в которых присутствуют обе девушки?

9. Доказать, что

$$C_n^{m+1} + C_n^{n-1} + 2C_n^k = C_{n+2}^{m+1}.$$

10. Студенческий комитет выделил на помощь первокурсникам группу студентов старшекурсников, состоящую из 5 человек. Отбор происходил из 20 добровольцев, в том числе было задействовано 5 студентов шестого курса и 4 пятого. Какое возможно число комплектаций группы, если в нее обязательно входит по одному студенту шестого и пятого курса?

11. Группа студентов из 20 человек собираются путешествовать поездом. В кассе имеется 12 билетов на нижнюю полку и 8 на

верхнюю. При этом 5 студентов не хотят ехать вверху, а 4 внизу. Сколькими способами их можно разместить в вагоне поезда, если порядок размещения пассажиров как снизу, так и вверху не учитывается?

12. Решить предыдущую задачу при условии, что порядок размещения студентов как вверху, так и внизу учитывается.

13. Та же задача 11, но с условием, что порядок размещения учитывается только внизу.

14. Те же условия задачи 11, но с требованием, что порядок размещения студентов учитывается только вверху.

15. Сколько шестизначных чисел можно сложить с цифр $1, 2, 3, \ldots, 9$ если каждое число должно содержать две четные и четыре нечетные цифры, причем никакие три цифры при этом не повторяются?

16. В группе студентов 20 человек. Они решили обменяться на память фотографиями. Сколько всего было роздано фотографий?

17. Пользуясь треугольником Паскаля найдите значение биномиального коэффициента C_{15}^{10}.

18. Зная величину C_{15}^{10} из предыдущей задачи, определите значение биномиального коэффициента C_{13}^{8}.

19. Определив величину биномиального коэффициента при решении предыдущей задачи, найдите с его помощью значение биномиального коэффициента C_{15}^{5}.

20. Исходя из величины биномиального коэффициента, полученного в предыдущей задаче, найдите, пользуясь теоремой 8, значение биномиального коэффициента C_{13}^{2}.

21. Сколько различных спортивных команд можно составить по три участника из 5, а сколько по 2?

22. Десять студентов встретившись после летних каникул обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

23. Студенты изучают 9 различных предметов. Первого сентября должно быть 3 занятия. Сколькими способами можно составить расписание занятий на первое сентября, чтобы в этот день было 3 различных предмета?

24. Для передачи сигналов вывешиваются одно под другим 4 разноцветных полотнища. Сколько различных комбинаций можно передать при наличии белого, желтого и красного полотнищ?

25. Найдите значение x из уравнения $C_{3x+1}^{3x-1}=120.$

26. Сколько существует различных пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами?

27. Сколькими способами можно назначить на дежурство по охране общественного порядка группу из пяти студентов и одного преподавателя, если имеется 15 студентов и 4 преподавателя?

28. На кафедре электроники и компьютерной техники работает 9 преподавателей. Сколькими способами можно составить расписание консультаций на 9 дней, если каждый преподаватель дает консультацию ровно один раз?

29. В студенческом комитете 9 членов. Сколькими способами можно составить из них делегацию в составе 3 человек для поездки к шефам?

30. На основании формулы бинома вычислите величину $1{,}002^5$.

2. К разделу однородные позиционные системы счисления

1. Согласно заданному варианту в табл. 22 перевести два числа из десятичной системы счисления в двоичную систему путем деления на основание. Произвести сложение и вычитание двоичных чисел; преобразовать результат в исходную систему счисления, а также в восьмеричную и шестнадцатеричную.

2. В соответствии с вашим вариантом в табл. 22 перевести число из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную и обратно. Результаты сравнить и сделать выводы.

3. В соответствии с номером вашего варианта в таблице 23 найдите равновесную кодовую комбинацию, преобразуйте ее в биномиальное число и затем по формуле 1 раздела 2.1 переведите в десятичную систему счисления.

Таблица 22 – Варианты задач для задания 2

Вариант	Задание 1		Задание 2
1	108	21	A81C
2	109	47	B93A
3	119	93	CA48
4	191	53	DB59
5	112	84	EC61
6	113	37	FD72
7	184	95	1EA3
8	125	18	2FB4
9	146	56	37CA
10	117	28	48DB
11	178	45	59EC
12	107	98	6AFD
13	196	49	7B1E
14	165	48	8C2F
15	124	53	9D3A
16	193	71	AE45
17	182	88	BF56
18	101	75	C96B
19	129	56	DA77
20	120	79	E38B
21	181	73	FC93
22	137	49	5DA1
23	132	51	6EB2
24	197	83	7FC3
25	141	52	8AD4
26	144	36	9BE5
27	147	57	A4F6
28	151	61	B31A
29	156	43	C23B
30	195	72	F421

Таблица 23 – Варианты задач для задания 3

Вариант	***Задание 3***	***Вариант***	***Задание 3***
1	1110100	**16**	0010111
2	1110010	**17**	0011011
3	1110001	**18**	0011101
4	1101100	**19**	0011110
5	1101010	**20**	0100111
6	1101001	**21**	0101011
7	1100110	**22**	0101101
8	1100101	**23**	0110011
9	1100011	**24**	0110101
10	1011100	**25**	0110110
11	1011010	**26**	0111001
12	1011001	**27**	0111010
13	1010110	**28**	0111100
14	1010101	**29**	1000111
15	1010011	**30**	1001011

Контрольные вопросы

1. Привести формулу бинома Ньютона и дать ее доказательство.

2. Что в биноме Ньютона определяют биномиальные коэффициенты?

3. Доказать, что сумма биномиальных коэффициентов

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

4. Доказать, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах в биноме Ньютона, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

5. Доказать, что суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, и биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равны 2^{n-1}.

6. Дать определение перестановки и доказать формулу вычисления числа перестановок из n элементов.

7. Дать определение размещения и доказать формулу вычисления числа размещений k элементов из n.

8. Доказать формулу для вычисления сочетаний k элементов из n .

9. Доказать свойство симметрии для биномиальных коэффициентов: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

10. Доказать формулу для биномиальных коэффициентов:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k.$$

11. Дать описание треугольника Паскаля и объяснить принцип его построения.

12. Привести отличия числового треугольника Паскаля от символического.

13. Принцип построения треугольника Паскаля в табличной форме. Достоинства и недостатки такого построения.

14. Доказать, что $C_n^k = \sum_{i=0}^{n-k} C_{k+i-1}^{k-1}$.

15. Доказать, что $C_n^k = \sum_{i=0}^{k} C_{n-k+i-1}^{i}$.

16. Привести правила нахождения коэффициентов C_n^k с помощью треугольника Паскаля.

17. Доказать, что $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

18. Доказать, что $C_n^k = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^{k}$.

19. Количественные и порядковые свойства чисел.

20. Отличие позиционных систем счисления от непозиционных.

21. История развития позиционных систем счисления и их значение для развития науки и техники.

22. Отличительные признаки позиционных систем счисления.

23. Числовая функция и ограничения для позиционных систем счисления.

24. Основание, вес и разрядность позиционных чисел.

25. Равномерные и неравномерные позиционные системы счисления. Алфавит и диапазон представления.

26. Однородные и неоднородные позиционные системы счисления. Алфавит и диапазон.

27. Принцип получения позиционных чисел с помощью разбиений.

28. Принцип унитарности применительно к системам счисления.

29. Структурные системы счисления.

30. Комбинаторные системы счисления.

31. Структурное представление позиционных систем счисления.

32. Табличные позиционные системы счисления.

33. Классификация позиционных систем счисления.

34. Факториальная система счисления и ее структура.

35. Двоичная система счисления и ее структура.

36. Отличие структуры двоичной системы счисления от факториальной.

37. Структуры позиционных систем счисления с неравной длиной чисел.

38. Алфавит, вес, основание, разрядность однородных систем счисления.

39. Числовая функция и ограничения однородных систем счисления.

40. Диапазон чисел однородных систем счисления.

41. Сложение в однородных системах счисления.

42. Вычитание в однородных системах счисления.

43. Умножение в однородных системах счисления.

44. Деление в однородных системах счисления.

45. Сложение, вычитание, умножение и деление в двоичной системе счисления.

46. Сложение, вычитание, умножение и деление в восьмеричной системе счисления.

47. Сложение, вычитание, умножение и деление в шестнадцатеричной системе счисления.

48. Табличный метод перевода из одной системы счисления в другую.

49. Перевод чисел в систему счисления с кратным основанием.

50. Перевод чисел путем подбора степеней.

51. Перевод чисел в систему счисления с основанием, являющимся степенью исходной.

52. Перевод чисел в систему счисления на основе промежуточного преобразования цифр.

53. Перевод чисел на основе использования промежуточной системы счисления.

54. Перевод чисел путем деления их на основание.

55. Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную и обратно.

56. Перевод чисел из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин В. А. Методы нумерационного кодирования. – Новосибирск: Наука, 1986. – 155 с.

2. Борисенко А. А. Системы счисления с биномиальным основанием и двоичным алфавитом. – ВИНИТИ, №909-82, 1982. – 6 с.

3. Борисенко А. А., Губарев С. И., Куно Г. В. Алгоритмы построения кодов с постоянным весом на основе биномиальных чисел. // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Харьков, №74, 1985, с 77 – 81.

4. Борисенко А. А., Губарев С. И., Куно Г. В. Биномиальные системы счисления с двоичным алфавитом. // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Харьков, №75, 1985, с.87 – 92.

5. Борисенко А. А., Губарев С. И., Куно Г. В., Алексеев В.А. Синтез автоматов с регулярной структурой для генерирования кодов с постоянным весом // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Харьков, №81, 1987, с.101 – 104.

6. Борисенко А. А., Губарев С.И. О некоторых возможностях позиционных систем счисления. // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики, Харьков, №82, 1987, с.115– 117.

7. Борисенко А. А., Онанченко Е. Л., Кобяков А. Н. Системы счисления с биномиальным основанием // Вестник СумГУ, №1, 1994, с.96-101.

8. Борисенко А. А. Основы теории двоичного биномиального счета // Вестник СумГУ, №1(12), 1999, с. 71-75.

9. Борисенко А. А. О некоторых обобщенных классифика-ционных признаках позиционных систем счисления // Вестник СумГУ, №1(12), 1999, с.76-78.

10. Борисенко А. А. Системы счисления и ЭВМ // Вестник СумГУ, №2(6), 1999, с.72-75.

11. Борисенко А. А. Принцип унитарности и его приложение к теории информации // Вестник СумГУ, №24-25, 2001 - с. 154-160.

12. Борисенко О. А. Лекції з дискретної математики (множини і логіка). Навч. посібник для вузів. – Суми, "Університетська книга", 2002. - 176 с.

13. Борисенко А. А. Основы теории двоичного биномиального счета (продолжение) // Вестник СумГУ, №45, 2002, с.46-56.

14. Борисенко А. А. Представление биномиальных чисел в матричной форме. // Вестник СумГУ, №11(52), 2003, с.51 - 56.

15. Борисенко А. А. Введение в теорию биномиального счета. Монография. – Сумы, "Университетская книга", 2004. – 88с.

16. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. / Пер. с укр. – М.: Наука, 1977. – 80 с.

17. Калбертсон Т. Математика и логика цифоровых устройств. / Пер. с англ. – М.: Просвещение, 1965. – 266 с.

18. Кемени Дж. Снелл Дж.ю Томпсон Дж. Введение в конечную математику. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 486 с.

19. Кнут Д. Искусство программирования. Том 1. Основные алгоритмы. 3-е изд. / Пер. с англ. Уч. пособие. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2000. – 720 с.

20. Кнут Д. Искусство программирования. Том 2. 3-е изд. / Пер. с англ. Уч. пособие. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2000. – 832 с.

21. Оберман Р. М. М. Счет и счетчики / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1984. – 170 с.

22. Пойа Д. Математическое открытие: Пер. с англ. – М.: Наука, 1967. – 448 с.

23. Поспелов Д. А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. – М., Высшая школа, 1970. – 308 с.

24. Процай В. Ф, Новикова У. В. Комбінаторика і теорія ймовірностей у школі: Учбовий посібник. – Х.: Каравела, 1997. – 192 с.

25. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 476 с.

26. Савельев А. Я. Прикладная теория цифровых автоматов. – М., Высшая школа, 1987. – 272 с.

27. Самофалов К. Г., Романкевич А. М., Валуйский В. Н., Каневский Ю. С., Пиневич М. М. и др. Прикладная теория цифровых автоматов. – К.: Вища шк., 1987. – 375 с.

28. Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. - М.: Сов. Радио, 1977. – 288 с.

29. Стахов А. П. Сакральная геометрия и математика гармонии. Винница, ТОВ "ІТГ", 2003. – 32 с.

30. Халамайзер А. Я. Комбинаторика и бином Ньютона. Пособие для учащихся 9-10 кл. – М.: Просвещение, 1980 – 32 с.

АНОТАЦІЯ

В даній праці викладена теорія двійкової біноміальної лічби, яка в свої основі використовує біноміальні коефіцієнти.

В першій частині книги приведені основні поняття з біному Ньютона, біноміальних коефіцієнтів і систем числення.

В другій частині дана теорія двійкових лінійних біноміальних систем числення.

В третій частині приведені алгоритми біноміальної лічби, які дозволяють вирішувати задачі побудови біноміальних лічильників і відповідних програм біноміальної лічби.

ANNOTATION

The theory of binary binomial count, using binomial coefficients as a basis, is given in the science work.

It consists of three chapters. The base notions on Newton's binom, binomial coefficients and number systems are under review in the fist chapter.

The theory of binary lineary binomial number systems is considered directly in the second chapter.

Algorithms of binomial count, solving problems on construction of binomial counters and corresponding programs, are given in the third chapter.

CONTENTS

Introduction 5

Chapter 1. Initial notions

1.1 Newton's binom 12
1.2 Binomial coefficients 16
1.3 On some general classified attributes of positional number systems 27
1.4 Homogeneous positional number systems 39
1.5 Conversion of numbers from one positional number system to another 52

Chapter 2. Theory of binomial count

2.1 Binomial number systems 61
2.2 Property of binomial numbers 64
2.3 Property of coefficients parameters of binomial numerical function 80
2.4 Proof of prefix property for binomial numbers 93
2.5 Proof of representation uniqueness for binomial numbers 95
2.6 Duality of binomial numbers 101
2.7 Ordinal properties of binomial numbers 108
2.8 Noise-immunity of binomial numbers 119

Chapter 3. Practice of binomial count

3.1 Algorithms of direct resumptive binomial count for nonuniform numbers 121
3.2 Algorithms of resumptive irregular binomial count with intermediate inversion 127
3.3 Algorithms of resumptive binomial count for uniform numbers 130
3.4 Algorithms of direct subtracting irregular binomial count 135
3.5 Algorithms of subtracting irregular binomial count with transfer to symmetric binomial number systems 138

3.6 Algorithms of subtracting regular
binomial count 141
3.7 Enumeration of equal-weight code combinations
on basis of binomial numbers 144

Task for test 149
Test questions 154
Literature 157
Annotation 159

INTRODUCTION

Counting algorithms are wide used procedures, which have accompanied human for all the way of his history. They are one of the most widely used operations, which are executed in different automatons of discrete information processing.

In ancient times yet people used abacus as a tool for the count with the help of stones, which were placed in the graves on the special board. A modern counter is the same abacus but more complicated and intellectually developed.

But counters are only one aspect of counting algorithms using. In practice they are also widely used for elaborating different computer programs. There are few programs where ordinary count would not be used somehow or other. For example, it is used in programs of decoding messages, game models and when solving tasks with the help of Monte-Carlo method etc. Many programs of coding for universal computers are much easier realized in the form of counting algorithms, rather than in the form of ramified flow blocks on the condition that there is enough time for this.

The field of using count in programs and digital automatons can be increased if non-ordinary varieties of count but more complex are used, for example factorial, which is used widely for permutations generation [26]. That is why possession of effective count methods is necessary not only for computer engineers but programmers too.

However, the conception on count is not completely determined in spite of its spreading. For example, count is reputed to be a linear search of any states [22].

But it is a very common conception. More concrete conception is that one, in which count is any sequence of states in increasing or decreasing order where numerical value (number) of the following state differs from the previous in 1.

In this way count is considered in this work. The conception implies that any following code combination can be received by adding or subtracting of 1, that demands the knowledge of special arithmetic rules of addition and subtraction operations on code combinations.

Below procedures of binomial count are being developed, on the basis of which decisions different enumeration tasks are available. The tasks of enumeration have value in the tasks of coding and combinatory optimization, for constructing different digital specialized devices as well.

According to the given in [2] classification there are linear, linear-cyclic and matrix binomial count. The linear binary binomial count are under review only in this work. At that correspondingly linear binomial number systems with a binary alphabet are used.

This number system must decide two tasks in one time: determination of quantities and ordering different objects, first of which is solved by theory of cardinal numbers and the second task is solved by theory of ordinal numbers. Besides, the system must provide the execution of arithmetic operations under numbers.

In the most effective way all these tasks are solved by positional number systems, the simplest of which were and are homogeneous (natural) number systems. But they have become only the first step in theory of positional number systems, because then non-homogeneous number systems have elaborated, numbers of which, on the one hand, differ in superfluous quantities of digits and, on the other hand, allow us to solve some special tasks which could not be solved with the help of homogeneous ones. For example, they can transform numbers from systems of residual classes to positional number systems or generate permutations in the tasks of combinatory optimization.

Next step in the development of positional number systems has connected with the appearance of structural combinatory systems. At present time their amount is not large, but as the analysis shows potentially it is enormous. These systems refer to more complex ones, for their synthesis they demand special theory from author. One of the practical results of the theory is the synthesis of two classes of the binomial number systems with binary and multiciphered alphabets.

The principal peculiarity of structural number systems is the limitations which put the dependence of ciphers not only on their positions in number, but on the values of preceding ciphers as well. This connection, on the one hand, complicates structural number systems, particularly their arithmetic, on the other hand, it puts new positive properties, such as ability of self-finding and self-correcting errors, building complex mathematical objects and doing their enumeration.

The base of the appearance of these properties is the theoretically and practically found out by author fact, that structural number systems represent the structures of mathematical objects. This spreads definition of a number and forms new sight on it.

Let us underline four elements, which constitute the base of any structural finite number system – alphabet of ciphers, formed on the basis of the alphabet set of all possible numbers, restrictions to possible numbers and numerical function.

The first three elements solve internal tasks of a number system: forming its permitted (working) numbers and determing rules of execution of arithmetic operations on numbers.

The forth element is the numerical function, which solves external tasks of enumeration and transformation of a structural number from an initial number system to another one and inversely.

In the work the base theoretic regulations of binary binomial count, based on the positional linear binomial number system with binary alphabet which was proposed by author in 1982, are considered. As often happens, the practice of binary binomial counting has been in advance essentially from the corresponding theory. Nowadays some original binomial units, admitted inventions, are developed. There are binomial integrated circuits, experienced samples of digital units on the basis of binomial number systems, but their full theory is absent. This blank in theory of binomial number systems is filled to a certain degree below.

In the beginning the binary binomial number system played a role of synthesis example of some number system on the basis of theory of structural number systems. Just such a number system is necessary, because, on the one hand, it would be difficult to get such a system without such a theory and, on the other hand, the synthesized number system should be useful in practice.

As theory of positional number systems asserts, any combinatory correlation, for example 2^n , n!, $\boldsymbol{C_n^k}$, etc, can be put at the heart of positional number systems, but the correlations 2^n and n! have been used for building the binary and factorial number systems which are not structural, so a binomial system have been chosen as a structural number system named by author in such way because a binomial coefficient is a base of this system. After synthesizing binomial number systems systematic researches have not been carried out, but episodic practical ones have been executed: creating inventions, developing and taking researches concrete binomial units for master/bachelor degree papers. As a result, despite presence of different binomial automatons and algorithms the finished theory of binomial number systems, which would permitted to build not only the binomial automatons, but binomial computers and electronic systems on their basis, have been absent.

Now starting with the monograph, the attempt is undertaken to create the self-sufficient and completed theory of binomial count both the linear count and the non-linear one: linear-cyclic and matrix count.

The suggested work, on the one hand, presents to a certain degree a finished scientific research in the field of binomial count on the basis of binomial number systems with the binary alphabet, on the other hand, it is a textbook for students of "Electronic systems" and "Informatics" specialties, particularly applying to such subjects as Digital automatons, Information coding, Combinatory optimization.

Author also supposes using suggested material in course and diploma projections, as well as in magister works.

According to the author's opinion, the potential put into the suggested material and ideas has not been completely used in coding theory and practice yet. That is why this work can be used for further scientific researches.

Two trends can be considered here. This, on the one hand, is using of suggested material for solving information and optimization tasks, and, on the other hand – for getting new scheme decisions of digital automatons of different applications and in the first turn for high-speed and reliable sorting out automatons and counters.

Author hopes to succeed in presenting all his researches in the field of binomial number systems, including multiciphered ones, which can have useful practical applications in solving different tasks in discrete mathematics, informatics and digital schemes techniques. Besides, they can find use in pure mathematics, because they allow us to look at solving some well-known mathematical tasks in a new fashion and to formulate new ones.

It ought to stop at such an aspect of binomial count as its concrete practical usefulness comparing to well-known counting algorithms, for example the binary ones.

This usefulness is based on three distinctive peculiarities of binomial numbers: the first, they are able to generate different combinatory objects such as simple combinations, combinations with repetitions, compositions etc; the second, binomial numbers solve easily the task of transformation of mentioned combinatory objects to their numbers, with that solving the task of information compression; and third, binomial count in its basis is fault-tolerant.

The combination of these three qualities applying to concrete conditions gives a wide range binomial count usage in different, sometimes unexpected, tasks.

Unsuccessful efforts to synthesize binomial number systems on the of existing ideas about positional number systems were undertaken repeatedly. The polynomial number system based on binomial coefficients has been proposed in the work [19]. Indeed the number system in this source was not achieved, only the task of combinations numeration has been solved. The same result has been achieved for a binomial number system in [21]. So it is not surprising that the practical result of count in these number systems has not been achieved. The matter is that in structural number systems numbers limitations are very significant. These limitations form numbers and to receive the limitations the usage of special theory requires.

The elaboration of numeral functions enumerating numbers is not an easy task. Theory of enumeration coding solves the task of enumeration for combinatory configurations without marking out of them numbers as such.

This led to the fact that for every numeral task its own decision is elaborated. The structural approach to combinatorial objects enumeration differs the following: at first with the help of structural number systems their numbers which underlie the given class of objects are found, and then from their transition to the very objects occurs directly. In result a general approach to solving any tasks of enumeration coding is possible. It consists in creating at first a structural number system for objects of the given class which forms structures of these objects; then they are transformed into numbers or objects in dependence on the given task. The specificity for solving enumeration tasks appears only at the second stage of coding when enumerating or forming combinatory objects.

Thus, separation from decisions of enumeration tasks leds to universalization of their solvings at the stage of structural numbers forming and creates independent objects of researches – the structural number systems.

Author

БОРИСЕНКО АЛЕКСЕЙ АНДРЕЕВИЧ

Окончил Харьковский институт радиоэлектроники (1970). С тех пор работал в нём инженером, научным сотрудником, ассистентом, тогда же закончил аспирантуру (1976) и защитил диссертацию на степень кандидата технических наук (1979) и доктора технических наук (1991).

С 1980 – в Сумском государственном университете: старший пре-подаватель, доцент, профессор, с 1992 – заведующий кафедрой электроники и компьютерной техники.

Научные исследования проводил в области электроники и вычислительной техники. Имеет более 100 работ в таких отраслях техники, как электронные системы отображения информации, управляющие системы, системы передачи данных, системы контроля на основе технического зрения и распознавания образов, среди которых около 40 изобретений.

Основное научное направление при этом – повышение надёжности и быстродействия электронных систем и устройств на базе специальных систем кодирования, прежде всего созданной им теории структурных систем счисления, среди которых подробно исследованы биномиальные системы.

Вместе с тем были проведены исследования в области теории информации. При этом исследовал особый класс бернуллиевских источников информации, на основе которых разработал новый метод сжатия информации.

За эти и другие исследования в области дискретной математики был удостоен гранта фонда “Відродження" для учёных и преподавателей среди математиков за 1998 год, основанного Правительством Украины и Институтом открытого общества США.

Награжден знаком Министерства образования и науки Украины: "Відмінник Освіти України".

Наукове видання

Борисенко Олексій Андрійович

Біноміальна лічба
Теорія і практика

Монографія
(російською мовою)

Редактор видавництва В. І. Кочубей
Технічний редактор О.А. Борисенко
Компьютерний набір: І.Є.Бражник
Художнє оформлення О.А. Борисенко

Підписано до друку 28.04.2004.
Формат 60x84 $1/16$. Папір офсетний.
Гарнітура Times. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 8.6. Обл.-вид. арк. 9.2.
Тираж 300 прим. Замовлення № 537.

Видавничо-торговий дім "Університетська книга"
40030, Україна, м. Суми, вул. Кірова, 27
Тел./факс: (0542) 21-13-57; Тел. 27-51-43
E-mail: publish@book.sumy.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК № 489 від 18.06.2001.

Віддруковано відповідно до якості
наданих діапозитивів на ПП "Мусатов"
Україна, 40030, м. Суми, вул. Ковпака, 17, к.35