

І. В. Павленко, В. В. Павленко



# НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

ПІДРУЧНИК



Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет

**І. В. Павленко, В. В. Павленко**

# **НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**

Підручник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми  
Сумський державний університет  
2015

УДК 514.18  
ББК 22.151  
П12

Рецензенти:

*В. І. Симоновський* – доктор технічних наук, професор кафедри загальної механіки і динаміки машин Сумського державного університету;

*В. Б. Тарельник* – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри технічного сервісу Сумського національного аграрного університету;

*В. І. Острик* – доктор фізико-математичних наук, доцент, провідний науковий співробітник лабораторії мікроструктурних досліджень реакторних матеріалів Інституту прикладної фізики НАН України (м. Суми)

*Рекомендовано до видання вченою радою  
Сумського державного університету як підручник  
(протокол № 7 від 9 лютого 2012 року)*

**Павленко І. В.**

П12 Нарисна геометрія : підручник / І. В. Павленко, В. В. Павленко. – Суми : Сумський державний університет, 2015. – 239 с.  
ISBN 978-966-657-554-1

Підручник охоплює весь курс нарисної геометрії, у тому числі матеріал для поглибленого вивчення дисципліни. Теоретичні питання доповнюються великою кількістю прикладів і алгоритмів розв'язування практичних задач. Додатково розглянуті спеціальні розділи нарисної геометрії, що дозволяють застосовувати альтернативні методи розв'язання графічних задач за допомогою способів перетворення комплексного креслення, у тому числі із застосуванням аксонометричного і косокутного проєціювання.

Підручник призначений для студентів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів, які вивчають дисципліну «Нарисна геометрія».

**УДК 514.18**  
**ББК 22.151**

ISBN 978-966-657-554-1 © Павленко І. В., Павленко В. В., 2015  
© Сумський державний університет, 2015

# ЗМІСТ

Вступ .....	С. 7
Система позначень .....	9
<b>Розділ 1 Проеціювання точки, прямої, площини .....</b>	<b>10</b>
1.1 Способи проєціювання .....	10
1.1.1 Центральне проєціювання .....	10
1.1.2 Паралельне проєціювання .....	11
1.1.2.1 Косокутне проєціювання .....	11
1.1.2.2 Ортогональне проєціювання .....	11
1.2 Епюр Монжа .....	11
1.3 Проеціювання точки .....	12
1.3.1 Належність точок чвертям і октантам .....	12
1.3.2 Належність точок площинам проєкцій і осям координат .....	13
1.4 Проеціювання прямої .....	14
1.4.1 Пряма загального положення .....	14
1.4.2 Прямі особливого положення .....	14
1.4.3 Сліди прямої .....	17
1.4.4 Спосіб прямокутного трикутника .....	19
1.4.5 Належність точки прямій .....	20
1.4.6 Взаємне розміщення двох прямих .....	20
1.4.7 Визначення видимості точок і ліній .....	22
1.4.7.1 Видимість зовнішнього контуру .....	22
1.4.7.2 Видимість збіжних ліній .....	22
1.4.7.3 Метод конкуруючих точок .....	23
1.4.8 Перпендикулярність прямих .....	24
1.5 Проеціювання площини .....	25
1.5.1 Способи подання площин .....	25
1.5.2 Сліди площини .....	26
1.5.3 Головні лінії площини .....	27
1.5.4 Кути нахилу площини до площин проєкцій .....	27
1.5.5 Площини особливого положення .....	27
1.5.6 Належність точки площині .....	29
1.5.7 Взаємне розміщення прямої і площини .....	31
1.5.8 Взаємне розміщення двох площин .....	33
1.5.9 Перпендикулярність прямої і площини та двох площин .....	37
1.6 Метричні задачі .....	38
1.6.1 Відстань від точки до прямої і площини .....	38
1.6.1.1 Відстань від точки до прямої особливого положення .....	38
1.6.1.2 Відстань від точки до прямої загального положення .....	39
1.6.1.3 Відстань від точки до площини особливого положення .....	39
1.6.1.4 Відстань від точки до площини загального положення .....	40
1.6.2 Відстань між паралельними площинами, прямою і площиною. Відстань між двома прямими .....	41
1.6.3 Кут між прямою і площиною, двома площинами .....	44

Розділ 2 <b>Способи перетворення комплексного креслення</b> .....	52
2.1 Спосіб заміни площин проєкцій .....	52
2.1.1 Проєціювання точки на допоміжну площину проєкцій .....	52
2.1.2 Довжина відрізка і кути його нахилу до площин проєкцій .....	54
2.1.3 Відстань від точки до прямої і площини .....	55
2.1.4 Відстань між паралельними прямими, прямою і площиною, двома площинами .....	57
2.1.5 Відстань між мимобіжними прямими .....	59
2.1.6 Кут між прямими, прямою і площиною, двома площинами .....	60
2.1.7 Натуральна величина плоскої фігури .....	62
2.1.8 Перетин прямої і площини, двох площин .....	64
2.2 Спосіб обертання навколо проєціювальної осі .....	65
2.2.1 Обертання точки навколо проєціювальної осі .....	65
2.2.2 Довжина відрізка .....	66
2.2.3 Відстань від точки до прямої і площини .....	66
2.2.4 Відстань між паралельними прямими, прямою і площиною, двома площинами .....	67
2.2.5 Відстань між мимобіжними прямими .....	69
2.2.6 Перетин прямої і площини .....	69
2.3 Спосіб плоскопаралельного переміщення .....	70
2.3.1 Плоскопаралельне переміщення тіла .....	70
2.3.2 Відстань між мимобіжними прямими .....	71
2.3.3 Кут між прямими, прямою і площиною, двома площинами .....	71
2.3.4 Натуральна величина плоскої фігури .....	73
2.3.5 Перетин площин .....	74
2.4 Спосіб обертання навколо лінії рівня .....	74
2.4.1 Обертання точки навколо лінії рівня .....	74
2.4.2 Натуральна величина плоскої фігури і плоского кута .....	76
2.4.3 Спосіб суміщення .....	77
2.5 Спосіб косокутного проєціювання .....	78
2.5.1 Косокутне проєціювання на ортогональні площини проєкцій .....	78
2.5.2 Косокутне проєціювання на площину особливого положення .....	80
2.5.3 Косокутне проєціювання на бісекторну площину .....	73
2.6 Комбіновані способи .....	85
 Розділ 3 <b>Криві лінії і поверхні</b> .....	 91
3.1 Криві лінії .....	91
3.1.1 Плоскі криві лінії .....	91
3.1.1.1 Алгебраїчні криві .....	91
3.1.1.1.1 Криві другого порядку .....	91
3.1.1.1.2 Криві вищих порядків .....	94
3.1.1.2 Тригонометричні криві .....	98
3.1.1.3 Циклоїдальні криві .....	99
3.1.1.4 Спіральні криві .....	103
3.1.1.5 Трансцендентні криві .....	107
3.1.1.6 Фігури Ліссажу .....	109
3.1.1.7 Сполучення .....	110
3.1.2 Гвинтові лінії .....	114

3.2 Криві поверхні .....	116
3.2.1 Лінійчаті поверхні .....	116
3.2.1.1 Лінійчаті поверхні з трьома напрямними .....	116
3.2.1.2 Лінійчаті поверхні з двома напрямними .....	119
3.2.1.3 Лінійчаті поверхні з однією напрямною .....	122
3.2.2 Нелінійчаті поверхні .....	123
3.2.2.1 Нелінійчаті поверхні зі змінною твірною .....	123
3.2.2.2 Нелінійчаті поверхні з незмінною твірною .....	125
3.3 Натуральний тригранник .....	128
3.4 Метричні і позиційні задачі .....	132
3.4.1 Довжина дуги кривої лінії .....	132
3.4.2 Центр і радіус кривизни. Еволюта й евольвента кривої .....	133
3.4.3 Еквідистанта кривої .....	135
3.4.4 Відстань від точки до кривої лінії і поверхні .....	135
3.4.5 Перетин прямої лінії із кривою поверхнею .....	137
3.4.6 Перетин кривої лінії із площиною .....	138
<b>Розділ 4 Просторові тіла .....</b>	<b>143</b>
4.1 Проеціювання багатогранників .....	143
4.1.1 Перетин багатогранника площиною особливого положення .....	143
4.1.2 Перетин багатогранника прямою .....	146
4.1.3 Перетин багатогранника площиною загального положення .....	147
4.1.3.1 Спосіб допоміжних січних площин особливого положення .....	147
4.1.3.2 Спосіб допоміжних площин-посередників .....	148
4.1.3.3 Спосіб заміни площин проекцій .....	149
4.1.4 Перетин двох багатогранників .....	151
4.1.4.1 Спосіб допоміжних січних площин особливого положення .....	151
4.1.4.2 Спосіб допоміжних площин-посередників .....	152
4.2 Проеціювання тіл обертання .....	153
4.2.1 Перетин тіла обертання площиною особливого положення .....	153
4.2.2 Перетин тіла обертання лінією .....	157
4.2.2.1 Спосіб допоміжної січної площини особливого положення .....	157
4.2.2.2 Спосіб допоміжної січної площини загального положення .....	159
4.2.2.3 Способи перетворення комплексного креслення .....	162
4.2.2.4 Спосіб допоміжної січної циліндричної поверхні .....	166
4.2.2.5 Метод послідовних наближень .....	167
4.2.3 Перетин тіла обертання площиною загального положення .....	171
4.2.3.1 Спосіб допоміжних січних площин особливого положення .....	171
4.2.3.2 Спосіб заміни площин проекцій .....	173
4.2.4 Перетин тіла обертання із багатогранником .....	175
4.2.4.1 Спосіб допоміжних січних площин рівня .....	175
4.2.4.2 Спосіб допоміжних проєційвальних січних площин .....	177
4.2.5 Перетин двох тіл обертання .....	177
4.2.5.1 Спосіб площин-посередників особливого положення .....	177
4.2.5.2 Спосіб площин-посередників загального положення .....	181
4.2.5.3 Спосіб конічних поверхонь .....	184
4.2.5.4 Способи допоміжних сфер .....	186
4.2.5.4.1 Теорема Монжа .....	186
4.2.5.4.2 Спосіб допоміжних концентричних сфер .....	188
4.2.5.4.3 Спосіб допоміжних ексцентричних сфер .....	191
4.2.5.5 Властивості ліній перетину тіл обертання .....	193

Розділ 5 <b>Розгортання поверхонь</b> .....	197
5.1 Властивості розгорток .....	197
5.2 Розгортання поверхні багатогранника .....	198
5.2.1 Спосіб натуральних граней .....	198
5.2.2 Спосіб нормального перерізу .....	199
5.2.3 Спосіб розкочування .....	200
5.3 Розгортання поверхонь тіл обертання .....	201
5.4 Наближене і умовне розгортання кривих поверхонь .....	203
5.4.1 Спосіб апроксимуючих поверхонь .....	203
5.4.1.1 Спосіб призматичних поверхонь .....	203
5.4.1.2 Спосіб пірамідальних поверхонь .....	203
5.4.1.3 Спосіб циліндричних поверхонь .....	205
5.4.1.4 Спосіб конічних поверхонь .....	207
5.4.2 Метод триангуляції .....	209
 Розділ 6 <b>АксонOMETричне проєціювання</b> .....	215
6.1 Види аксонOMETричного проєціювання .....	215
6.2 Прямокутне аксонOMETричне проєціювання .....	217
6.2.1 Прямокутна ізометрія .....	217
6.2.2 Прямокутна диметрія .....	219
6.3 Косокутне аксонOMETричне проєціювання .....	221
6.3.1 Косокутна ізометрія .....	221
6.3.2 Косокутна диметрія .....	223
6.4 Розв'язання позиційних задач .....	224
6.4.1 Перетин прямої із площиною. Перетин двох площин .....	224
6.4.2 Перетин тіла площиною .....	225
6.4.3 Перетин двох тіл .....	226
6.5 Перетворення аксонOMETричних проєкцій .....	226
 Список додаткової рекомендованої літератури .....	231
 Предметний покажчик .....	232
 Іменний покажчик .....	237
 Додаток А (довідковий). Символи латинського і грецького алфавітів .....	238

## ВСТУП

---

Із давніх часів людство у своєму повсякденному житті намагалося відтворити і зберегти образи елементів навколишнього світу. Це привело до створення живопису, орнаментів, розписів споруд тощо. Із розвитком цивілізації з'явилися потреби у розв'язанні серйозних технічних задач, пов'язаних зі створенням схем знарядь праці, карт місцевостей, креслень споруд.

Багатогранність людської діяльності, розвиток виробництва вимагали від суспільства розроблення загальних правил і стандартів подання просторової інформації на площині. З часів Стародавніх Греції і Риму вчені з математичної точки зору засобами геометрії досліджували живопис. В епоху Відродження, з початком розквіту архітектури і скульптури, італійський вчений Леон Баттіста Альберті заснував теоретичне вчення про *перспективу*, а Леонардо да Вінчі опублікував працю «Про зменшення кольорів і набуття чітких обрисів». Французький математик Жерар Дезарг уперше застосував координатні осі, заклавши основи *аксонометричного проєціювання*. Нарешті, у 1799 році вийшла у світ праця Гаспара Монжа «Нарисна геометрія», у якій узагальнено досвід геометричних побудов. Гаспар Монж по праву вважається основоположником нарисної геометрії. Він перший систематизував *метод проєкцій* і ввів поняття *комплексного креслення*.

*Нарисна геометрія* – наука, що вивчає просторові форми і способи їх зображення на площині. Основним завданням цієї науки є розроблення методів побудови зображень і способів розв'язання просторових задач за допомогою комплексних креслень. Нарисна геометрія відіграє особливе значення у розвитку просторової уяви, необхідної для становлення сучасного інженера у своїй професійній діяльності.

*Прямою задачею* нарисної геометрії є побудова комплексного креслення предмета. *Обернена задача* полягає у відновленні форми, розмірів і взаємного розміщення предметів за їх кресленнями.



(1404 – 1472)

*Леон Баттіста Альберті (Leone Battista Alberti) – італійський учений, гуманіст, письменник, один із засновників нової європейської архітектури, провідний теоретик мистецтва епохи Відродження. Першим ґрунтовно виклав математичні основи вчення про перспективу. Альберті вніс істотний вклад у розвиток криптографії, запропонувавши ідею багатоалфавітного шифру.*



(1452 – 1519)

*Леонардо да Вінчі (Leonardo di ser Piero da Vinci) – видатний італійський художник (живописець, скульптор, архітектор) і вчений, винахідник, письменник, один із найвеличніших представників мистецтва епохи Відродження, яскравий приклад «універсальної людини» (homo universalis) – ідеалу італійського Ренесансу.*



Задачі нарисної геометрії також поділяються на *позиційні* і *метричні*. Позиційні задачі стосуються встановлення взаємного розміщення геометричних об'єктів (належність, перетин, паралельність тощо). Метричні задачі пов'язані з визначенням числових характеристик (відстань, кут, площа, об'єм).

Уміння досконало володіти ґрунтовними знаннями з побудови графічних зображень є показником рівня досвідченості майбутнього фахівця.

Основні знання із природничих наук завжди підкріплюються наочними графічними зображеннями. Методи нарисної геометрії шляхом графічної інтерпретації дозволяють вивчати математичні моделі фізичних, хімічних, біологічних процесів тощо. Використання сучасних комп'ютерних засобів дозволяє виконувати складні геометричні побудови за спрощеною процедурою і з високою точністю.

Оволодіння знаннями з курсу нарисної геометрії забезпечує подальше вивчення таких навчальних дисциплін, як інженерна і комп'ютерна графіка, деталі механізмів і машин, теоретична механіка тощо, сприяє підвищенню якості виконання креслень курсових і дипломного проектів.

Підручник складається із шести розділів, розміщених у логічній послідовності вивчення дисципліни, і містить основні відомості з нарисної геометрії, у тому числі матеріал для поглибленого вивчення. Теоретичні питання підкріплені великою кількістю прикладів і алгоритмів розв'язання практичних задач.

З метою підвищення якості засвоєння матеріалу останній подано не лише за дидактичним принципом «від складного до простого», але і за принципом «від простого до складного». Для кращого сприйняття способів розв'язання практичних задач наведені відповідні алгоритми у текстовій формі з мінімальним використанням формул і операцій булевої алгебри, теорії множин і аналітичної геометрії. Використання аксонометричних зображень покращує виокремлення елементів, підвищує рівень засвоєння алгоритмів геометричних побудов.

У кінці кожного розділу наведені задачі для самостійного опрацювання і запитання для самоперевірки.

Підручник містить спеціальні теми і авторські методи, що дозволяють застосовувати альтернативні способи розв'язання графічних завдань за допомогою способів перетворення координатного креслення, у тому числі із застосуванням аксонометричного і косокутного проєціювання. Це дає змогу використовувати викладений матеріал для підготовки до предметних олімпіад.

Підручник призначений для студентів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів, які вивчають дисципліну «Нарисна геометрія», а також для аспірантів і викладачів, які викладають дисципліни інженерного спрямування.



(1591 – 1661)

*Жерар Дезарг (Gérard Desargues) – відомий французький геометр, засновник перспективної геометрії. Автор праць «Трактат про перспективу», «Трактат про конічні перерізи» тощо.*



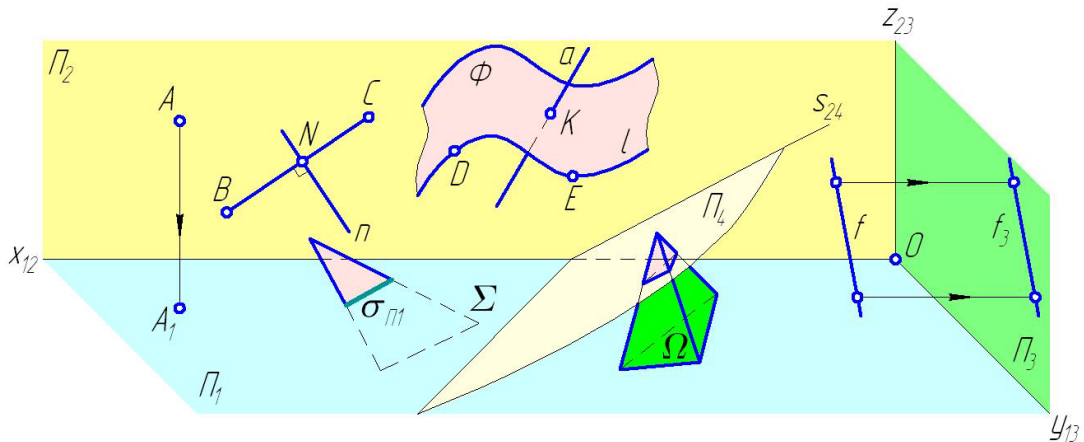
(1746 – 1818)

*Гаспар Монж (Gaspard Monge) – французький математик, геометр, державний діяч. Автор трактату «Нарисна геометрія» і багатьох праць, присвячених теорії поверхонь. Засновник теорії побудови ортогональних проєкцій тривимірних об'єктів.*

## СИСТЕМА ПОЗНАЧЕНЬ

- З метою виокремлення груп геометричних об'єктів уведені такі символні позначення:
- точки позначаються великими літерами латинського алфавіту  $A, B, C, \dots$  або натуральними числами  $1, 2, 3, \dots$ , у тому числі початок відріку  $O$ , основа перпендикуляра  $N$ ; точки перетину лінії з лінією, площиною, поверхнею  $K, M, N$ ; сліди прямої  $H, F, P$ ; вузлові і допоміжні точки  $1, 2, 3, \dots$ ;
  - невидимі точки за необхідності позначаються у круглих дужках:  $(A), (1_2)$  тощо;
  - відрізки прямих і дуги кривих ліній складаються з комбінації двох великих літер, які позначають початок і кінець:  $AB, BC, DE$  тощо;
  - прямі і криві лінії, промені позначаються малими літерами латинського алфавіту  $a, b, c, \dots$ , у тому числі прямі рівня  $h, f, p$ ; проєціювальні прямі  $u, v, w$ ; проєціювальні осі обертання  $i, j, k$ ; пряма, перпендикулярна іншій прямій або площині, –  $n$ ; осі прямокутної системи координат  $x, y, z$ ; осі допоміжної системи координат  $s$ ; осі натурального тригранника  $t, n, b$ ;
  - кути між прямими, прямою і площиною, двома площинами позначаються малими грецькими літерами  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ;
  - площини і їх відрізки, криві поверхні і просторові тіла позначаються великими літерами грецького алфавіту  $\Sigma, \Phi, \Omega, \dots$ , у тому числі площини проєкцій  $\Pi$ , площини проєкцій прямокутної системи координат  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ ; допоміжні площини проєкцій, перпендикулярні до однієї з основних,  $\Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \dots$ ; площини проєкцій при аксонометричному і косокутному проєціюванні  $\Pi'$ ;
  - сліди площини  $\Sigma$  позначаються  $\sigma_{\Pi_1}, \sigma_{\Pi_2}, \sigma_{\Pi_3}$ ;
  - проєкції геометричного об'єкта на площини проєкцій позначаються нижнім або верхнім індексом:  $A_1, l_2, \sigma_3, \dots$  або  $N', h'', \alpha''', \dots$ ;
  - елемент множини однойменних геометричних об'єктів позначається верхнім індексом у круглих дужках:  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \Sigma^{(3)}, \dots$

Символи латинського і грецького алфавітів наведені у додатку А.



# РОЗДІЛ 1 ПРОЕЦІЮВАННЯ ТОЧКИ, ПРЯМОЇ, ПЛОЩИНИ

---

## 1.1 СПОСОБИ ПРОЕЦІЮВАННЯ

### 1.1.1 ЦЕНТРАЛЬНЕ ПРОЕЦІЮВАННЯ

Для зображення геометричних об'єктів на площині застосовують процедуру *проєціювання*, що полягає у проведенні через точку  $A$  променя  $l$  і подальшому визначенні точки  $A_1$  його перетину із *площиною проєціювання*  $\Pi_1$  (рис. 1.1 а). Отримана точка  $A_1$  називається *проєцією точки  $A$  на площину  $\Pi_1$* .

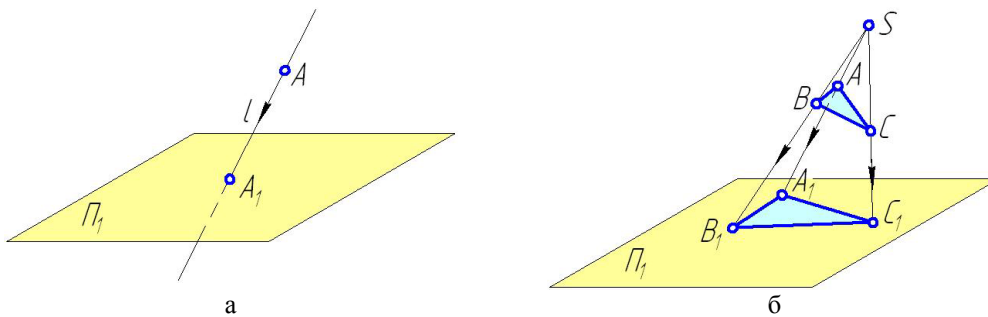


Рисунок 1.1 – Центральне проєціювання

У *центральному проєціюванні* промені, що пронизують точки тіла, «виходять» із однієї точки  $S$  – *центра проєціювання* (рис. 1.1 б). Різновидами центрального проєціювання є *кутова* (рис. 1.2 а) і *фронтальна* (рис. 1.2 б) *перспективи*.

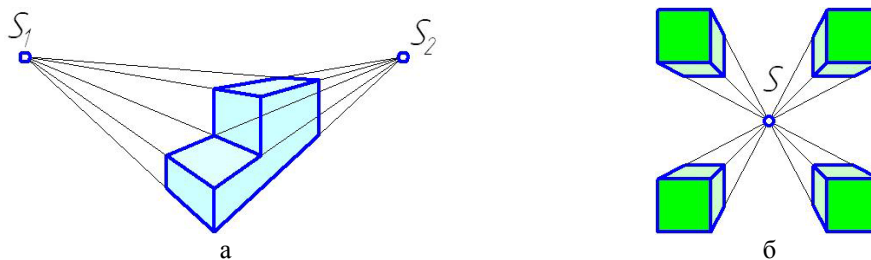


Рисунок 1.2 – Різновиди перспективи

Центральне проєціювання характеризується положенням центра проєціювання

Центральна проєкція предмета схожа на зображення, що сприймає око людини, а також на зображення, отримане фотографуванням. Цей спосіб проєціювання є найбільш наочним (сприяє зоровому сприйняттю предметів), але найскладнішим у своїй реалізації. Він застосовується переважно у живопису, будівництві і архітектурі.

## 1.1.2 ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЄЦІОВАННЯ

### 1.1.2.1 КОСОКУТНЕ ПРОЄЦІОВАННЯ

Паралельне проєціювання можна розглядати як окремий випадок центрального проєціювання, для якого центр  $S$  нескінченно віддалений від площини  $\Pi_1$ . У цьому випадку промені, що пронизують кожену точку тіла, взаємно паралельні (рис. 1.3).

На відміну від центрального паралельне проєціювання характеризується орієнтацією променів стосовно площини проєкцій.

У випадку, коли промені не перпендикулярні до площини  $\Pi_1$ , проєціювання називається *косокутним* (рис. 1.3).

Косокутне проєціювання використовується переважно для розв'язання спеціальних задач на визначення точок і ліній перетину геометричних фігур. При цьому, як правило, площина проєкцій займає особливе положення стосовно системи трьох взаємно перпендикулярних площин (див. п. 2.5).

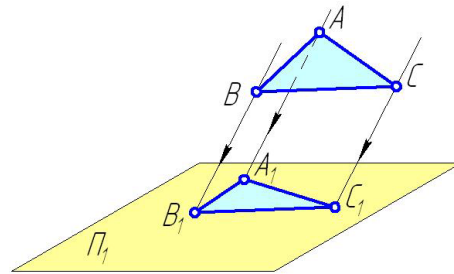


Рисунок 1.3 – Косокутне проєціювання

### 1.1.2.2 ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЄЦІОВАННЯ

Ортогональне проєціювання є окремим випадком паралельного проєціювання, в якому промені перпендикулярні до площини проєкцій (рис. 1.4).

Метод ортогонального проєціювання закладений в основу побудови конструкторської документації, а саме складальних і робочих креслень та ескізів у машинобудуванні.

Основні властивості ортогонального проєціювання будуть розглянуті у міру викладення матеріалу.

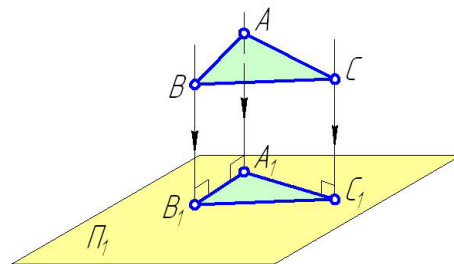


Рисунок 1.4 – Ортогональне проєціювання

## 1.2 ЕНОР МОНЖА

Енор Монжа (від франц. *erige* – креслення) – креслення, в якому просторова фігура зображена із використанням проєціювання на систему двох або трьох взаємно перпендикулярних площин  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  із подальшим умовним суміщенням останніх до однієї площини (рис. 1.5 а).  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  – горизонтальна, фронтальна і профільна площини проєкцій.

Креслення, побудоване методом проєкцій, називається *проєційвальним*, або *комплексним кресленням*. На рис. 1.5 б побудоване комплексне креслення точки  $A$ ,

яке складається з трьох проекцій останньої:  $A_1$  – горизонтальна проекція;  $A_2$  – фронтальна проекція;  $A_3$  – профільна проекція точки  $A$ .

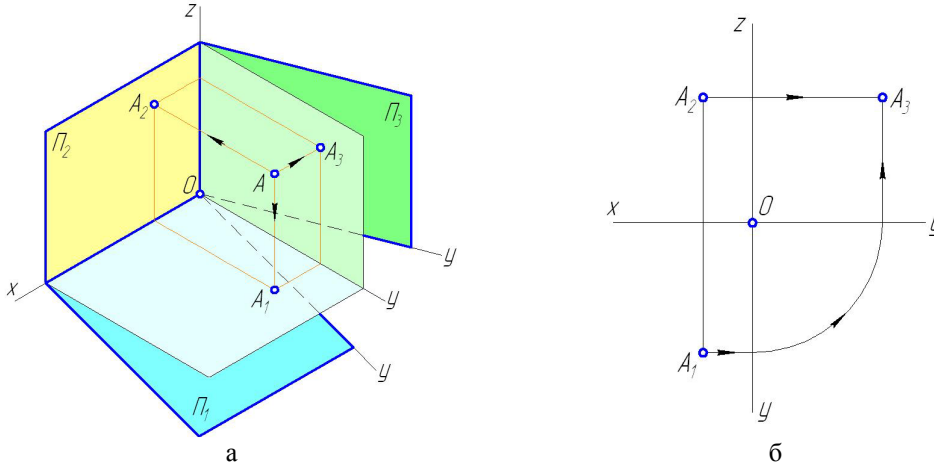


Рисунок 1.5 – Побудова комплексного креслення точки

Лінії, які проходить через пари проекцій  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_2A_3$ , називаються *лініями проекційного зв'язку*. Вони перпендикулярні або паралельні координатним осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

На комплексному кресленні вісь  $y$  дублюється. Це призводить до того, що одну з проекцій точки можна визначати за двома іншими, як це показано стрілками на рис. 1.5 б.

### 1.3 ПРОЕЦІОНАННЯ ТОЧКИ

#### 1.3.1 НАЛЕЖНІСТЬ ТОЧОК ЧВЕРТЯМ І ОКТАНТАМ

Простір умовно можна розмежувати за допомогою площин проекцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  на чотири частини – *чверті* (рис. 1.6 а), а за допомогою площин  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  (рис. 1.6 б) – на вісім частин – *октантів* (від грецького *октo* – вісім).

Кожна з проекцій точки  $A$  (рис. 1.5 б) визначається парою координат:  $A_1(x,y)$ ,  $A_2(x,z)$ ,  $A_3(y,z)$ . Знак «+» або «-» при числовому значенні  $x$ ,  $y$ ,  $z$  дозволяє зробити висновок про належність точки  $A$  тій чи іншій чверті, октанту (табл. 1.1 – 1.2). Приклади комплексних креслень точок, які належать різним чвертям і октантам, наведені на рис. 1.7.

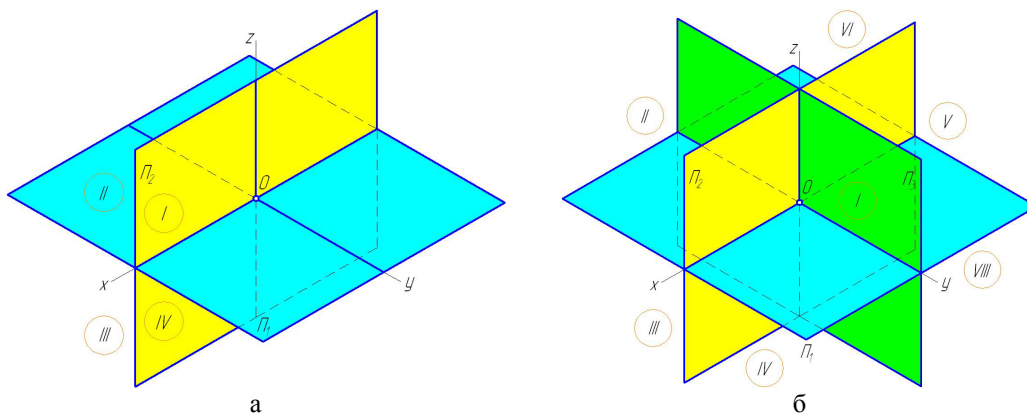


Рисунок 1.6 – Чверті (а) і октанти (б)

Таблиця 1.1 – Належність точок чвертям

Чверті	I	II	III	IV
Координати				
$y$	+	-	-	+
$z$	+	+	-	-

Таблиця 1.2 – Належність точок октантам

Октанти	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Координати								
$x$	+	+	+	+	-	-	-	-
$y$	+	-	-	+	+	-	-	+
$z$	+	+	-	-	+	+	-	-

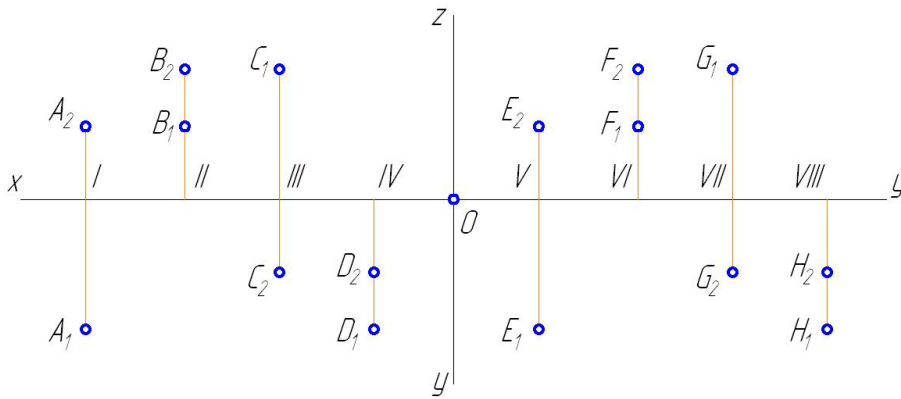


Рисунок 1.7 – Належність точок чвертям і октантам

### 1.3.2 НАЛЕЖНІСТЬ ТОЧОК ПЛОЩИНАМ ПРОЕКЦІЙ І ОСЯМ КООРДИНАТ

Координати точки інколи називають так:  $x$  – ширина;  $y$  – глибина;  $z$  – висота. У випадку, коли висота  $z$  точки дорівнює нулю, точка належить площині  $\Pi_1$  (рис. 1.8, точка  $A$ ). Якщо глибина  $y$  точки дорівнює нулю, точка належить площині  $\Pi_2$  (рис. 1.8, точка  $B$ ). У випадку нульової ширини  $x$  точка належить площині  $\Pi_3$  (рис. 1.8, точка  $C$ ).

Якщо дві координати точки дорівнюють нулю, точка належить осі, яка відповідає за третю (ненульову) координату. Наприклад, точка, яка має координати  $(0;15;0)$ , належить осі  $y$ , оскільки  $y \neq 0, x = z = 0$ .

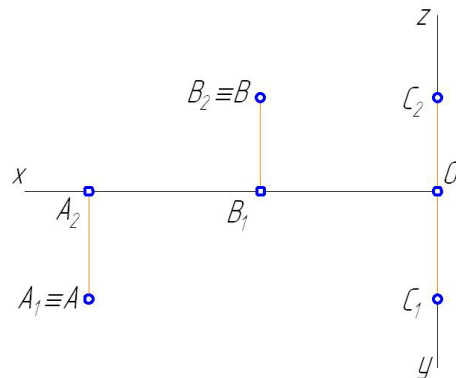


Рисунок 1.8 – Належність точок площинам проєкцій

## 1.4 ПРОЕЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ

### 1.4.1 ПРЯМА ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Пряму  $l$  у просторі можна задати двома точками  $A$  і  $B$ , які їй належать (рис. 1.9 а). Проекцією прямої на будь-яку площину проєкцій є пряма (рис. 1.9) або точка (див. п. 1.4.2, рис. 1.11).

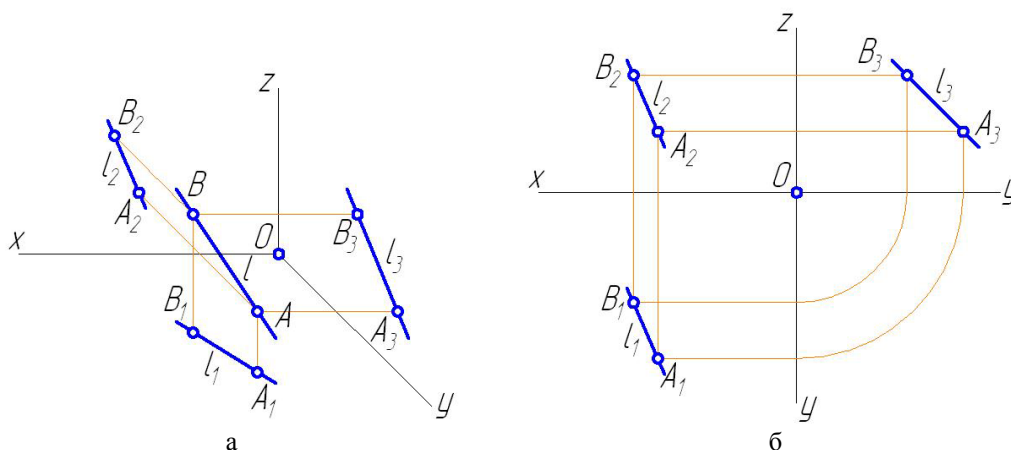


Рисунок 1.9 – Пряма загального положення

Пряма, не паралельна і не перпендикулярна до жодної із площин проєкцій, називається *прямою загального положення*.

### 1.4.2 ПРЯМІ ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

Прямі, паралельні або перпендикулярні до площин проєкцій, називаються *прямими особливого положення*. Їх детальний розгляд обумовлений тим, що ці лінії використовуються для розв'язання більшості задач нарисної геометрії.

Прямі особливого положення поділяються на два види:

а) *пряма рівня* – пряма, паралельна лише одній із площин проєкцій:

- 1) *горизонталь*  $h$  – пряма, паралельна  $\Pi_1$  (рис. 1.10 а);
- 2) *фронталь*  $f$  – пряма, паралельна  $\Pi_2$  (рис. 1.10 б);
- 3) *профільна пряма рівня*  $p$  – пряма, паралельна  $\Pi_3$  (рис. 1.10 в);

б) *проєціювальна пряма* – пряма, перпендикулярна до площини проєкцій:

- 1) *горизонтально-проєціювальна пряма*  $u$  – пряма, перпендикулярна до  $\Pi_1$  (рис. 1.11 а);
- 2) *фронтально-проєціювальна пряма*  $v$  – пряма, перпендикулярна до  $\Pi_2$  (рис. 1.11 б);
- 3) *профільно-проєціювальна пряма*  $w$  – пряма, перпендикулярна до  $\Pi_3$  (рис. 1.11 в).

Довжина відрізка прямої рівня  $h, f, p$  відповідно на площину проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  є дійсною довжиною розміщеного у просторі відрізка. Таким чином, пряма рівня проєціюється на одну із площин проєкцій у *натуральну величину* (аббревіатура  $НВ$ ).

Кути нахилу прямої рівня до площин проєкцій можна визначати як кути нахилу його проєкцій до осей координат (рис. 1.10, табл. 1.3). Наприклад, кут  $\beta$  нахилу горизонталі  $h$  до  $\Pi_2$  визначається як кут між проєкцією  $h_1$  і віссю  $x$ .

Відрізки проєціювальних прямих проєціюються на одну з площин проєкцій у точку, а на дві інші – у натуральну величину (рис. 1.11).

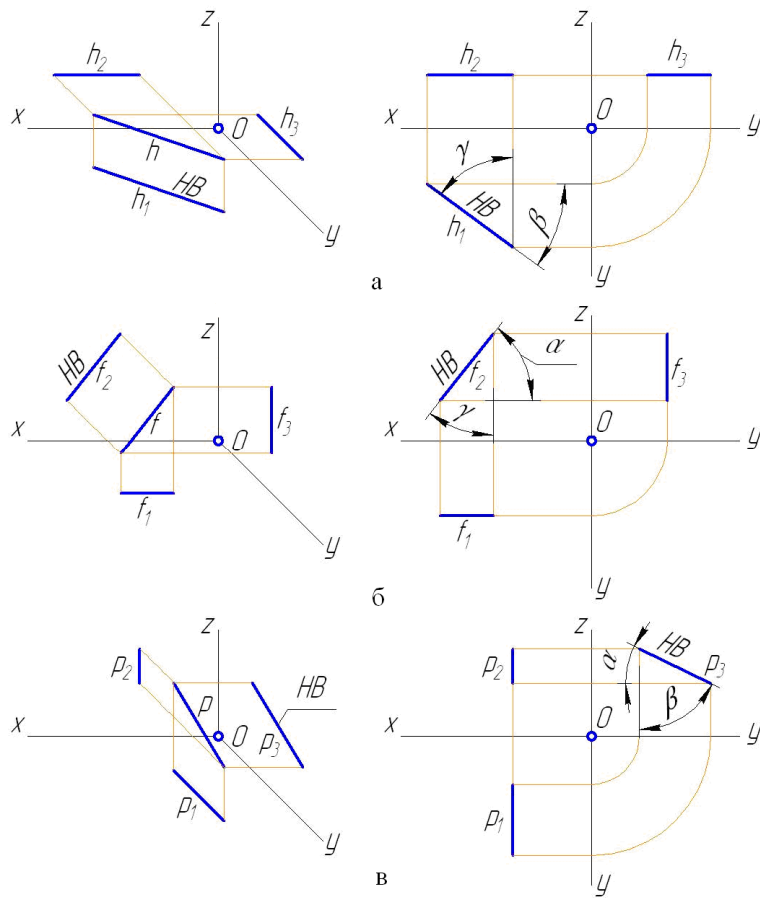


Рисунок 1.10 – Прямі рівня

Таблиця 1.3 – Кути нахилу прямих рівня до площин проекцій

Кут нахилу Пряма рівня	$\alpha$ – до $\Pi_1$	$\beta$ – до $\Pi_2$	$\gamma$ – до $\Pi_3$
$h$	0	кут між $h_1$ і віссю $x$	кут між $h_1$ і віссю $y$
$f$	кут між $f_2$ і віссю $x$	0	кут між $f_2$ і віссю $z$
$p$	кут між $p_3$ і віссю $y$	кут між $p_3$ і віссю $z$	0



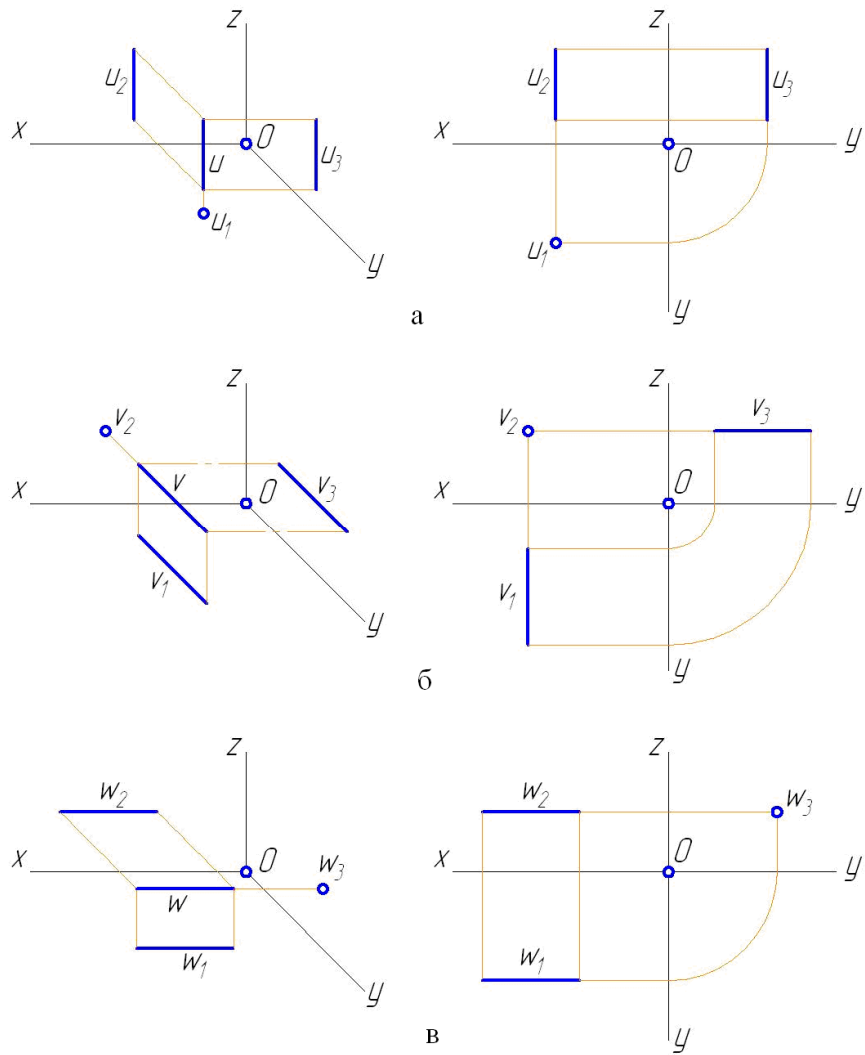


Рисунок 1.11 – Проеціювальні прямі

### 1.4.3 СЛІДИ ПРЯМОЇ

Точки перетину прямої з площинами проекцій називаються *слідами*. Пряма загального положення має три сліди – горизонтальний  $H$ , фронтальний  $F$ , профільний  $P$  (рис. 1.12).

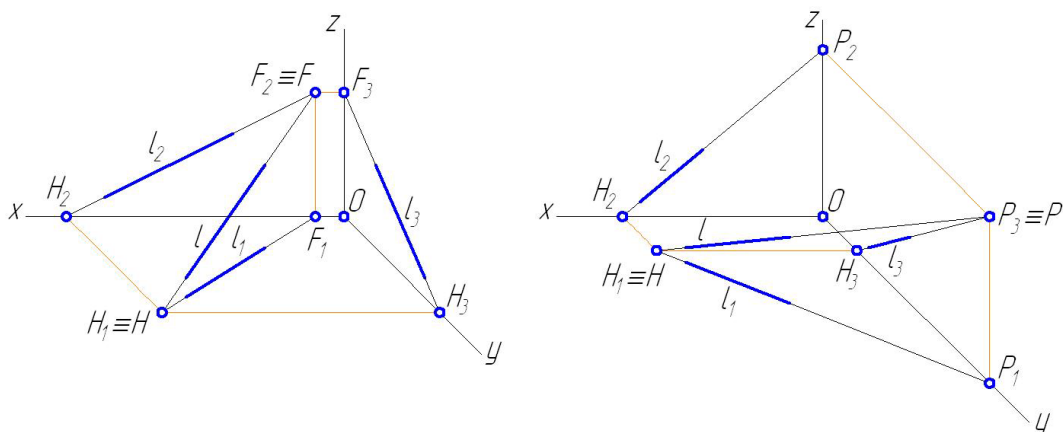


Рисунок 1.12 – Сліди прямих загального положення

*Способи визначення слідів прямої загального положення:*

а) для визначення горизонтального сліду  $H$  прямої  $l$  необхідно продовжити фронтальну проекцію  $l_2$  до перетину з віссю  $x$  (ця точка є фронтальною проекцією  $H_2$  горизонтального сліду) і провести вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину із продовженням горизонтальної проекції  $l_1$ . Отримана точка є горизонтальним слідом  $H$  прямої  $l$  і збігається з його горизонтальною проекцією  $H_1$  (рис. 1.13 а – б);

б) для визначення фронтального сліду  $F$  прямої  $l$  необхідно продовжити горизонтальну проекцію  $l_1$  до перетину з віссю  $x$  (ця точка є горизонтальною проекцією  $F_1$  фронтального сліду) і провести вертикальну лінію проекційного зв'язку до перетину із продовженням фронтальної проекції  $l_2$ . Отримана точка є фронтальним слідом  $F$  прямої  $l$  і збігається з його фронтальною проекцією  $F_2$  (рис. 1.13 а);

в) для визначення профільного сліду  $P$  прямої  $l$  необхідно продовжити фронтальну проекцію  $l_2$  до перетину з віссю  $z$  (ця точка є фронтальною проекцією  $P_2$  профільного сліду) і провести горизонтальну лінію проекційного зв'язку до перетину із продовженням профільної проекції  $l_3$ . Отримана точка є профільним слідом  $P$  прямої  $l$  і збігається з його профільною проекцією  $P_3$  (рис. 1.13 б).

Пряма рівня має лише два сліди, які не належать тій площині, до якої пряма паралельна (рис. 1.14).

Проеційвальна пряма має лише один слід, який збігається з тією проекцією прямої, яка є точкою (рис. 1.15).

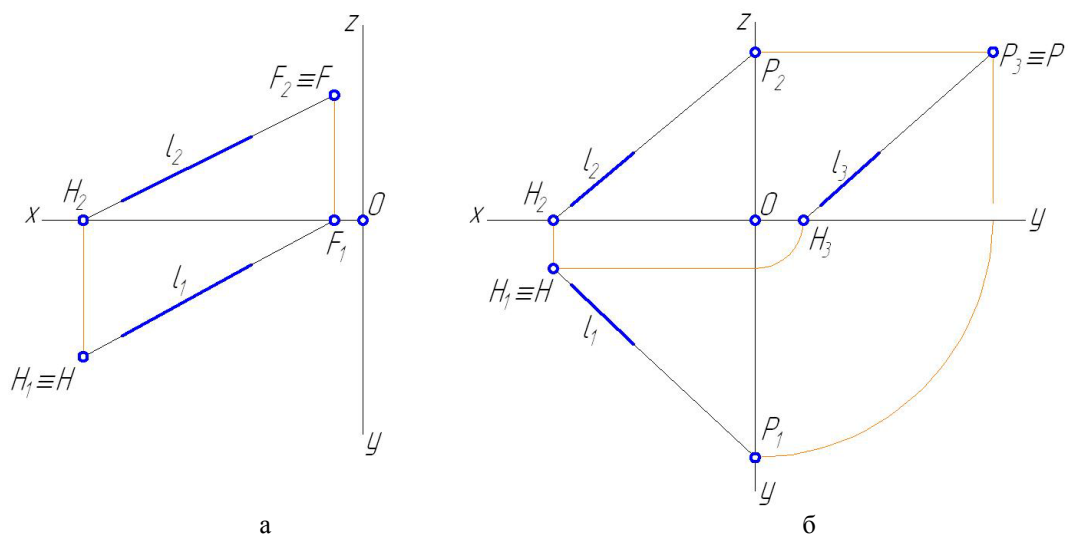


Рисунок 1.13 – Визначення слідів прямої

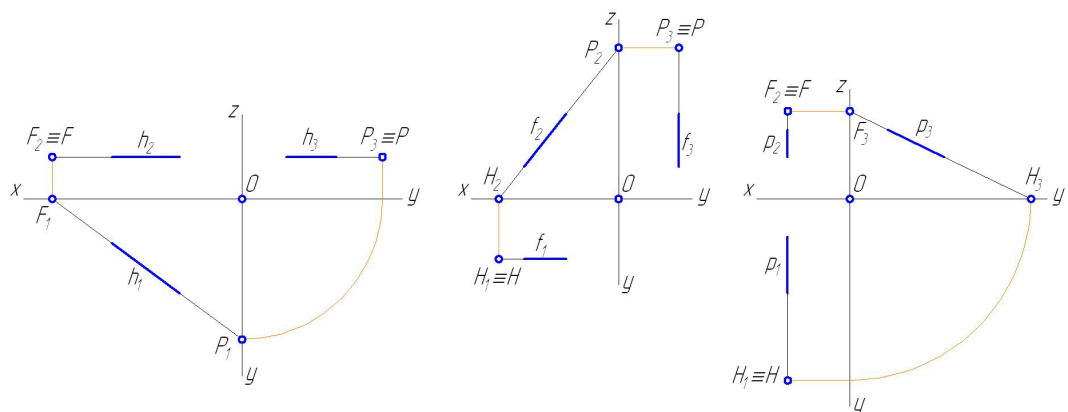


Рисунок 1.14 – Сліди прямих рівня

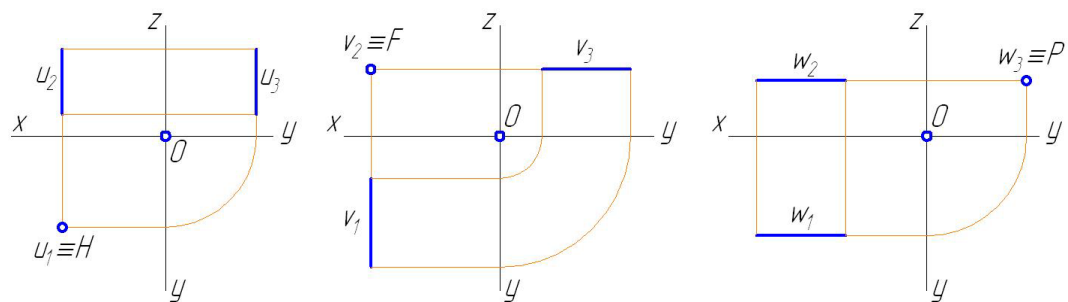


Рисунок 1.15 – Сліди проєціювальних прямих

#### 1.4.4 СПОСІБ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Довжини проєкцій  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$  відрізка  $AB$  прямої загального положення завжди менші за натуральну величину цього відрізка. Тому виникає проблема визначення натуральної величини відрізка за відомими його проєкціями. Ця задача розв'язується за допомогою способу прямокутного трикутника (рис. 1.16), який дозволяє визначати, у тому числі, кути  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  нахилу відрізка до площин проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  відповідно.

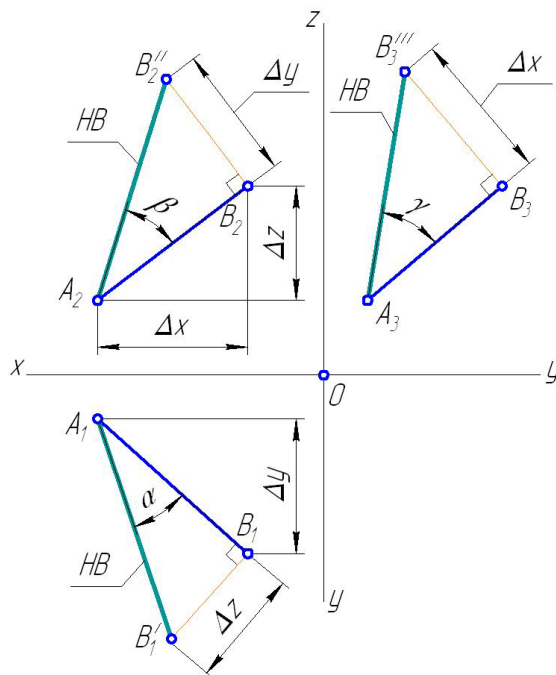


Рисунок 1.16 – Спосіб прямокутного трикутника

*Суть способу прямокутного трикутника:*

а) для визначення на площині  $\Pi_1$  натуральної величини відрізка  $AB$  необхідно визначити різницю  $\Delta z$  висот точок  $A$ ,  $B$  і відкласти відрізок  $B_1B_1'$  довжиною  $\Delta z$  перпендикулярно до горизонтальної проєкції  $A_1B_1$ . Довжина гіпотенузи  $A_1B_1'$  прямокутного трикутника  $A_1B_1B_1'$  є натуральною величиною відрізка  $AB$ . Кут між горизонтальною проєкцією  $A_1B_1$  відрізка і його натуральною величиною  $A_1B_1'$  дорівнює куту  $\alpha$  нахилу відрізка  $AB$  до площини  $\Pi_1$ ;

б) для визначення на площині  $\Pi_2$  натуральної величини відрізка  $AB$  необхідно визначити різницю  $\Delta y$  глибин точок  $A$ ,  $B$  і відкласти відрізок  $B_2B_2''$  довжиною  $\Delta y$  перпендикулярно до фронтальної проєкції  $A_2B_2$ . Довжина гіпотенузи  $A_2B_2''$  прямокутного трикутника  $A_2B_2B_2''$  є натуральною величиною відрізка  $AB$ . Кут між фронтальною проєкцією  $A_2B_2$  відрізка і його натуральною величиною  $A_2B_2''$  дорівнює куту  $\beta$  нахилу відрізка  $AB$  до площини  $\Pi_2$ ;

в) для визначення на площині  $\Pi_3$  натуральної величини відрізка  $AB$  необхідно визначити різницю  $\Delta x$  ширини точок  $A$ ,  $B$  і відкласти відрізок  $B_3B_3'''$  довжиною  $\Delta x$  перпендикулярно до профільної проєкції  $A_3B_3$ . Довжина гіпотенузи  $A_3B_3'''$  прямокутного трикутника  $A_3B_3B_3'''$  є натуральною величиною відрізка  $AB$ . Кут між профільною проєкцією  $A_3B_3$  відрізка і його натуральною величиною  $A_3B_3'''$  дорівнює куту  $\gamma$  нахилу відрізка  $AB$  до площини  $\Pi_3$ .

### 1.4.5 НАЛЕЖНІСТЬ ТОЧКИ ПРЯМІЙ

У нарисній геометрії належність точки  $A$  прямій  $l$  визначається за допомогою проєкцій цих об'єктів.

*Умова належності точки прямій*

Точка  $A$  належить прямій  $l$ , якщо три її ортогональні проєкції  $A_1, A_2, A_3$  належать відповідним проєкціям  $l_1, l_2, l_3$  прямої (рис. 1.17 а).

На рис. 1.17 б показано три проєкції точки  $A$ , яка належить прямій  $l$ . На рис. 1.18 а точка  $B$  не належить прямій  $m$ , оскільки дві її проєкції  $B_1, B_3$  не належать відповідним проєкціям  $m_1, m_3$  прямої. На рис. 1.18 б точка  $C$  не належить прямій  $p$  профільного рівня, оскільки одна з її проєкцій  $C_3$  не належить проєкції  $p_3$  прямої.

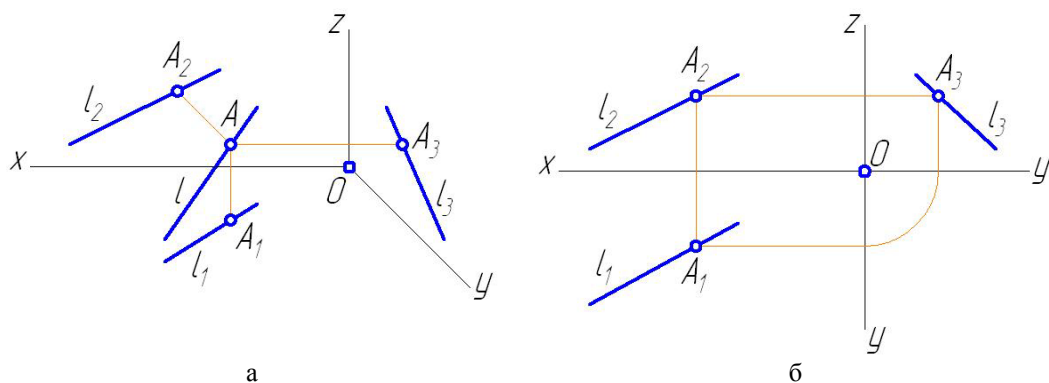


Рисунок 1.17 – Належність точки прямій

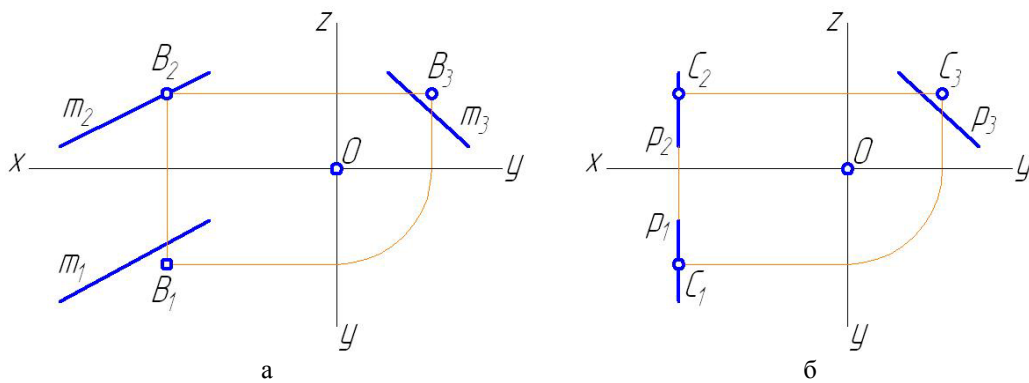


Рисунок 1.18 – Неналежність точки прямій

### 1.4.6 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ

Дві прямі у просторі можуть *перетинатися* (рис. 1.19 а), бути *паралельними* (рис. 1.19 б) або *мимобіжними*.

*Умова перетину двох прямих*

Дві прямі  $l, m$  перетинаються у точці  $A$ , якщо три ортогональні проєкції  $A_1, A_2, A_3$  є точками перетину відповідних проєкцій прямих (рис. 1.20 а).

*Умова паралельності двох прямих*

Дві прямі  $l, m$  паралельні, якщо три їх ортогональні проєкції попарно паралельні (рис. 1.20 б).

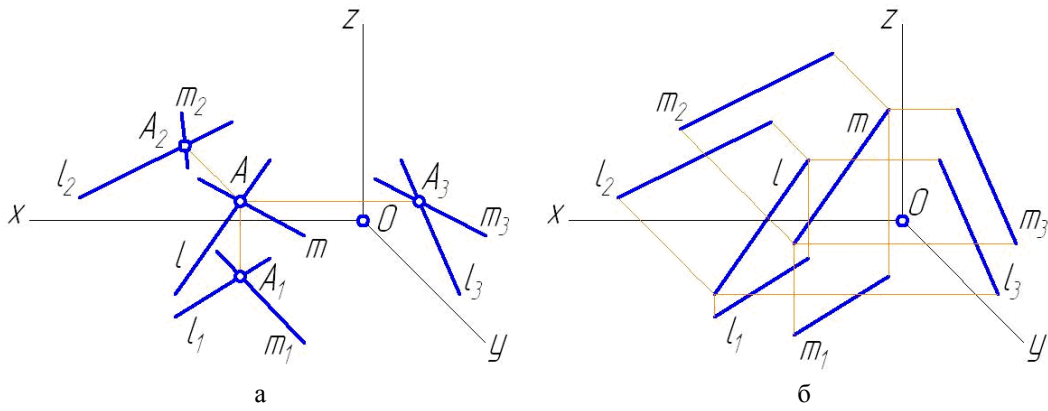


Рисунок 1.19 – Пересічні і паралельні прямі

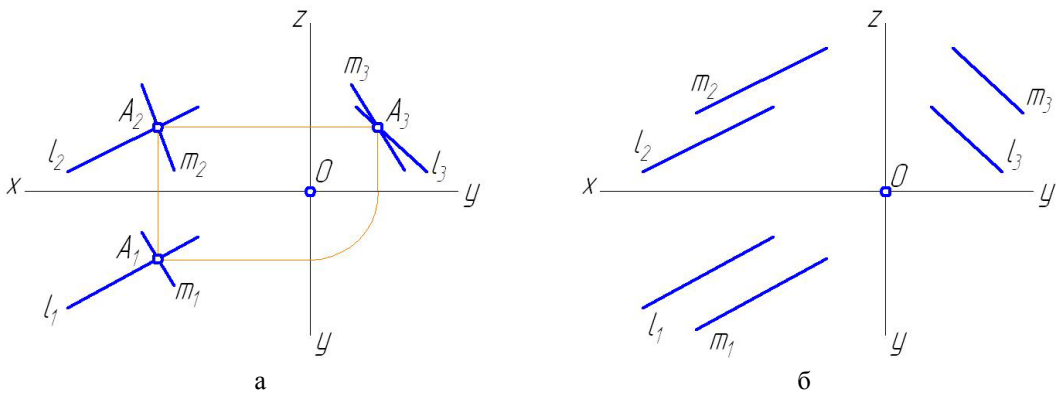


Рисунок 1.20 – Умови перетину і паралельності двох прямих

У випадку, коли прямі не паралельні і не перетинаються, вони є *мимобіжними*. Їх взаємне розміщення розглянуто у п. 1.4.7.3.

Окремий випадок прямих, які перетинаються під прямим кутом, розглянуто у п. 1.4.8.

## 1.4.7 ВИЗНАЧЕННЯ ВИДИМОСТІ ТОЧОК І ЛІНІЙ

### 1.4.7.1 ВИДИМІСТЬ ЗОВНІШНЬОГО КОНТУРУ

При розв'язанні задач нарисної геометрії необхідно враховувати видимість геометричних об'єктів (точок і ліній). Серед сукупності усіх об'єктів необхідно виділяти такі два види (рис. 1.21):

а) *зовнішній контур* – сукупність ліній, які знаходяться за межами усіх інших об'єктів на даній площині проєкцій;

б) *збіжні лінії* – сукупність ліній, які перетинаються в одній точці.

*Правило визначення видимості зовнішнього контуру*

Зовнішній контур на даній площині проєкцій завжди є видимим (рис. 1.21).

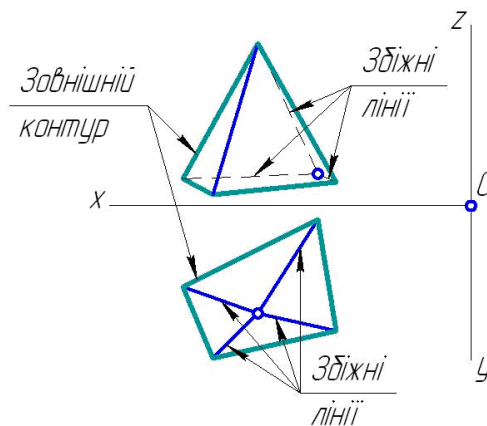


Рисунок 1.21 – Видимість точок і ліній

### 1.4.7.2 ВИДИМІСТЬ ЗБІЖНИХ ЛІНІЙ

Збіжні лінії на різних площинах проєкцій можуть мати різну видимість.

*Правило визначення видимості збіжних ліній*

Видимість збіжних ліній збігається з видимістю точки їх перетину (рис. 1.22):

- а) видимі на  $\Pi_1$ , якщо точка перетину має найбільшу висоту;
- б) видимі на  $\Pi_2$ , якщо точка перетину має найбільшу глибину;
- в) видимі на  $\Pi_3$ , якщо точка перетину має найбільшу ширину.

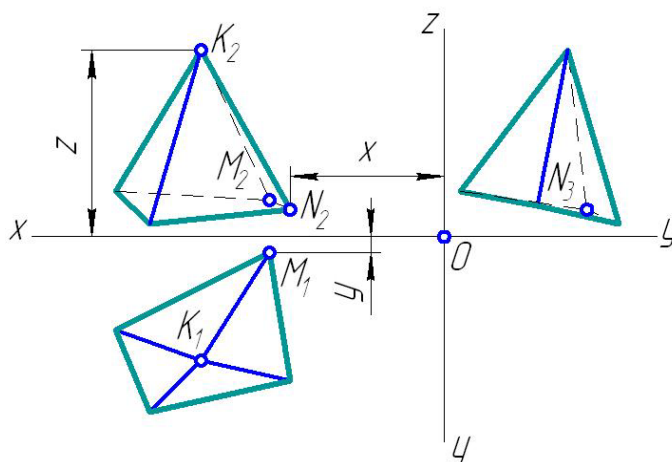


Рисунок 1.22 – Видимість збіжних ліній

На рис. 1.22 чотири збіжні лінії на горизонтальній проекції є видимими, оскільки висота  $z$  точки  $K$  їх перетину найбільша. Три збіжні лінії на фронтальній і профільній проекціях невидимі, оскільки точки  $M, N$  їх перетину є невидимими.

### 1.4.7.3 МЕТОД КОНКУРУЮЧИХ ТОЧОК

Метод конкуруючих точок дозволяє визначити взаємне розміщення точок двох мимобіжних прямих (рис. 1.23).

*Суть методу конкуруючих точок*

а) для визначення, яка з двох мимобіжних прямих  $l, m$  глибше, на них обираються точки 1, 2, розміщені на спільній фронтально-проєкціоувальній прямій  $v$ . На горизонтальній площині проєкцій знаходяться глибини  $y$  обраних точок і робиться висновок про те, яка лінія попереду, яка позаду;

б) для визначення, яка з двох мимобіжних прямих  $l, m$  вище, на них обираються точки 3, 4, розміщені на спільній горизонтально-проєкціоувальній прямій  $u$ . На фронтальній площині проєкцій знаходяться висоти  $z$  обраних точок і робиться висновок про те, яка лінія вище, яка нижче;

в) для визначення того, яка з двох мимобіжних прямих  $l, m$  розміщена зліва, а яка справа, на них обираються точки 5, 6 на спільній профільно-проєкціоувальній прямій  $w$ . На фронтальній площині проєкцій знаходяться широти  $x$  обраних точок і робиться висновок про те, яка лінія зліва, яка справа.

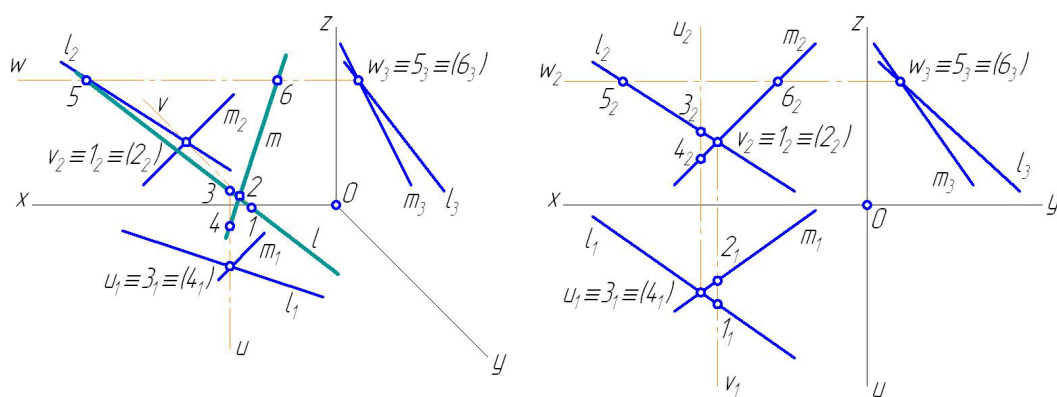


Рисунок 1.23 – Метод конкуруючих точок

На рис. 1.23 точка 2 знаходиться глибше, тому її фронтальна проєкція  $2_2$  є невидимою. У подальшому невидимі точки позначатимуться у круглих дужках, наприклад,  $(2_1)$ . Проєкція  $4_1$  також є невидимою, оскільки точка 4 розміщена нижче від точки 3. Точка 6 знаходиться зліва від точки 5, тому проєкція  $6_3$  є невидимою.

*Метод конкуруючих точок* застосовується, наприклад, для визначення видимості ребер багатогранників (рис. 1.24):

а) на горизонтальній проєкції з пари мимобіжних прямих  $AB, CD$  перша є невидимою, оскільки з фронтальної проєкції видно, що  $A_2B_2$  знаходиться нижче від  $C_2D_2$ ;

б) на фронтальній проєкції з пари мимобіжних прямих  $AC, BD$  перша є невидимою, оскільки з горизонтальної проєкції видно, що  $A_1C_1$  знаходиться ззаду від  $B_1D_1$ ;

в) на профільній проєкції з пари мимобіжних прямих  $AD, BC$  друга є невидимою, оскільки з фронтальної проєкції видно, що  $B_2C_2$  знаходиться справа від  $A_2D_2$ .



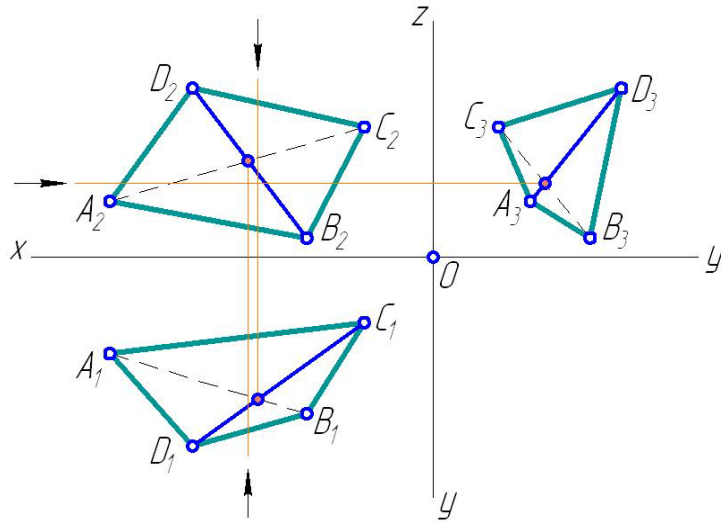


Рисунок 1.24 – Видимість мимобіжних прямих

#### 1.4.8 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ

Ортогональні проекції двох прямих загального положення, які перетинаються під прямим кутом, у загальному випадку не є перпендикулярними. Іншими словами, прямий кут при його проєціюванні на площини проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  спотворюється (рис. 1.25).

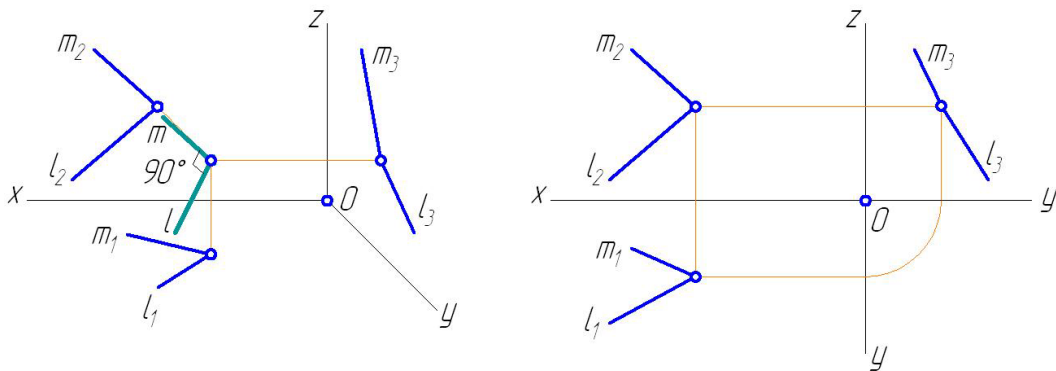


Рисунок 1.25 – Проеціювання прямого кута

Існують окремі випадки, коли прямий кут проєціюється у натуральну величину. Ці випадки описуються *теоремою про проєціювання прямого кута*.

##### *Теорема про проєціювання прямого кута*

Прямий кут проєціюється у натуральну величину на ту площину проєкцій, до якої паралельна одна з його сторін (рис. 1.26 а).

Як наслідок теореми, прямий кут між прямою загального положення  $l$  і горизонталлю  $h$  проєціюється у натуральну величину на площину проєкцій  $\Pi_1$ ; між  $l$  і фронталлю  $f$  – на площину  $\Pi_2$  (рис. 1.26 б).

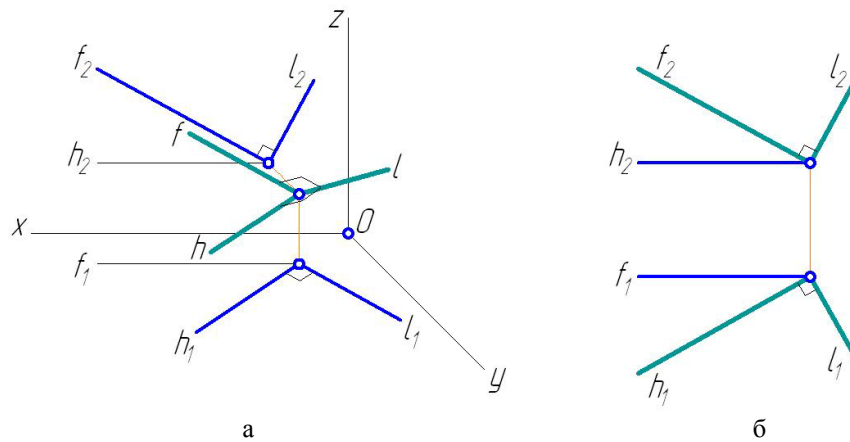


Рисунок 1.26 – Теорема про проєціювання прямого кута

Спосіб побудови прямої загального положення, перпендикулярної до заданої, описано у пп. 1.6.1.1 – 1.6.1.2.

## 1.5 ПРОЕЦІЮВАННЯ ПЛОЩИНИ

### 1.5.1 СПОСОБИ ПОДАННЯ ПЛОЩИН

Площину  $\Sigma$  у просторі можна подати шістьма способами (рис. 1.27):

- трьома точками  $A, B, C$ , які не належать одній прямій;
- прямою  $l$  і точкою  $D$ , яка їй не належить;
- двома паралельними прямими  $a$  і  $b$ ;
- двома прямими  $c, d$ , які перетинаються;
- площиною фігурою  $\Phi$  (трикутник, коло тощо);
- слідами  $\sigma_{\pi 1}, \sigma_{\pi 2}, \sigma_{\pi 3}$  – лініями перетину площини із площинами проєкцій (див. п. 1.5.2).

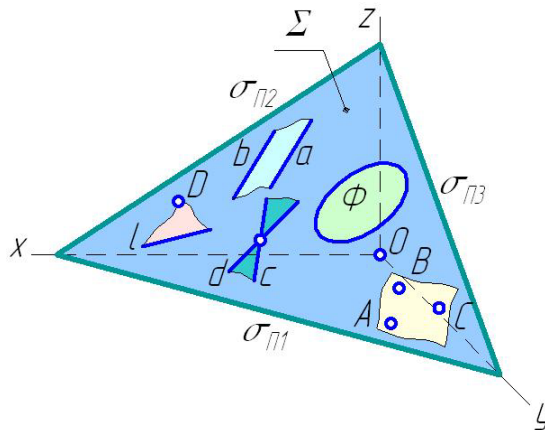


Рисунок 1.27 – Способи подання площин

Різноманітність способів подання площин обумовлює існування у нарисній геометрії великої кількості способів розв'язання задач.

### 1.5.2 СЛІДИ ПЛОЩИНИ

Слідами  $\sigma_{\Pi_1}$ ,  $\sigma_{\Pi_2}$ ,  $\sigma_{\Pi_3}$  площини називаються лінії її перетину з площинами проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ . Кожен слід може бути побудований за двома точками – відповідними слідами двох прямих цієї площини (рис. 1.28).

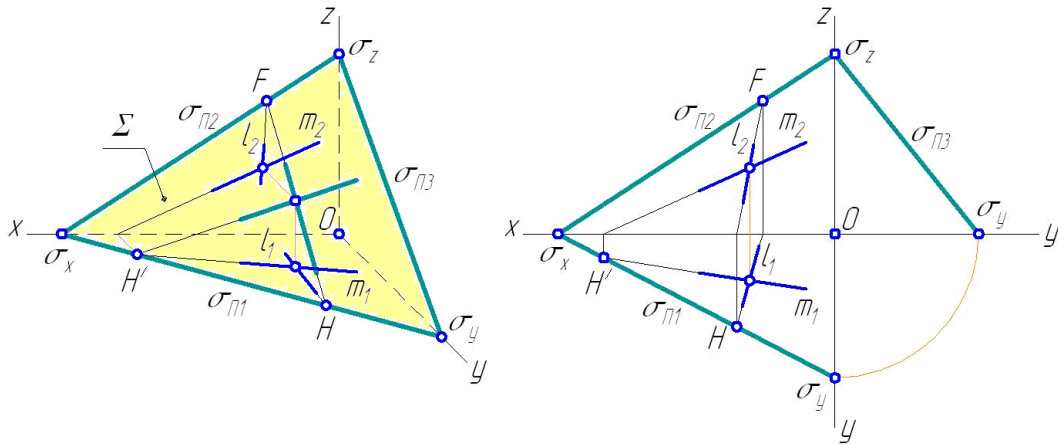


Рисунок 1.28 – Сліди площини загального положення

#### Правило визначення слідів площини:

а) для визначення горизонтального сліду  $\sigma_{\Pi_1}$  площини  $\Sigma$  необхідно обрати на ній дві прямі  $l$ ,  $m$  і визначити горизонтальні сліди  $H$ ,  $H'$  цих прямих (див. п. 1.4.3). Горизонтальний слід  $\sigma_{\Pi_1}$  площини  $\Sigma$  проводиться через точки  $H$ ,  $H'$  до перетину з осями  $x$ ,  $y$ . Отримані точки  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  є точками перетину площини  $\Sigma$  з осями координат  $x$ ,  $y$ ;

б) для визначення фронтального сліду  $\sigma_{\Pi_2}$  площини  $\Sigma$  досить визначити фронтальний слід  $F$  однієї з прямих (наприклад,  $l$ ). Фронтальний слід  $\sigma_{\Pi_2}$  площини  $\Sigma$  проводиться через точки  $\sigma_x$ ,  $F$  до перетину віссю  $z$ . Отримана точка  $\sigma_z$  є точкою перетину площини  $\Sigma$  з віссю  $z$ ;

в) профільний слід  $\sigma_{\Pi_3}$  площини  $\Sigma$  проходить через точки  $\sigma_z$ ,  $\sigma_y$ .

Сукупність параметрів  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  називається *визначником площини*.

#### Властивості слідів площини:

а) кожна пара слідів площини загального положення перетинається на осі координат:  $\sigma_{\Pi_1}$ ,  $\sigma_{\Pi_2}$  – на осі  $x$ ;  $\sigma_{\Pi_2}$ ,  $\sigma_{\Pi_3}$  – на осі  $z$ ;  $\sigma_{\Pi_1}$ ,  $\sigma_{\Pi_3}$  – на осі  $y$ . Ця властивість дає змогу визначити один зі слідів площини за двома іншими;

б) сліди площини є окремим випадком ліній рівня, які належать площинам проєкцій: горизонтальний слід є горизонталлю із нульовою висотою; фронтальний слід є фронталлю із нульовою глибиною; профільний слід є прямою профільного рівня із нульовою шириною;

в) проєкція сліду площини на одну з площин проєкцій є натуральною величиною (НВ), а на дві інші – збігається з осями координат (табл. 1.4);

Зазначені властивості дозволяють використовувати сліди площини для швидкого розв'язання задач нарисної геометрії.

Таблиця 1.4 – Властивості слідів площини

Слід	Проекція на площину		
	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$
$\sigma_{\Pi_1}$	НВ	$x$	$y$
$\sigma_{\Pi_2}$	$x$	НВ	$z$
$\sigma_{\Pi_3}$	$y$	$z$	НВ

### 1.5.3 ГОЛОВНІ ЛІНІЇ ПЛОЩИНИ

Головними лініями площини (рис. 1.29) є:

а) прямі рівня: горизонталь  $h$ , фронталь  $f$ , профільна пряма рівня  $p$ . Лініями рівня площини можна обирати її сліди  $\sigma_{\Pi_1} \equiv h$ ,  $\sigma_{\Pi_2} \equiv f$ ,  $\sigma_{\Pi_3} \equiv p$ ;

б) лінії найбільшого нахилу – прямі лінії, які утворюють найбільший кут із площинами проєкцій.

*Властивості ліній найбільшого нахилу:*

а) лінія  $n^{(1)}$  найбільшого нахилу до  $\Pi_1$  перпендикулярна до будь-якої горизонталі  $h$  площини;

б) лінія  $n^{(2)}$  найбільшого нахилу до  $\Pi_2$  перпендикулярна до будь-якої фронталі  $f$  площини;

в) лінія  $n^{(3)}$  найбільшого нахилу до  $\Pi_3$  перпендикулярна до будь-якої прямої профільного рівня  $p$  площини.

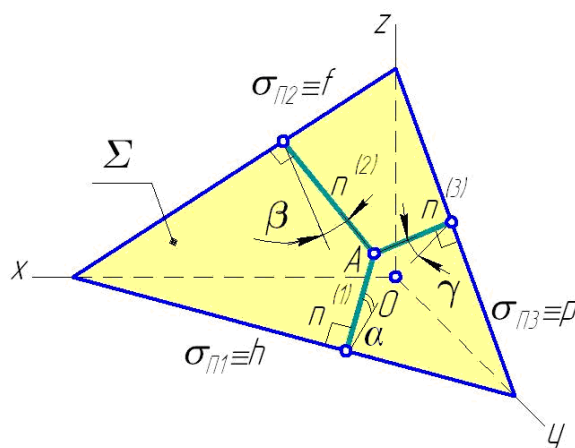


Рисунок 1.29 – Головні лінії площини

### 1.5.4 КУТИ НАХИЛУ ПЛОЩИНИ ДО ПЛОЩИН ПРОЄКЦІЇ

Кути  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  нахилу площини  $\Sigma$  до площин проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  визначаються як кути нахилу ліній найбільшого нахилу  $n^{(1)}$ ,  $n^{(2)}$ ,  $n^{(3)}$  до відповідних площин проєкцій (рис. 1.29). Наприклад, кут  $\beta$  між  $n^{(2)}$  і  $\Pi_2$  є кутом нахилу площини  $\Sigma$  до  $\Pi_2$ .

Натуральна величина кутів нахилу площини  $\Sigma$  до площин проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  визначається способами перетворення комплексного креслення (див. розділ 2), окрім випадків, зазначених у п. 1.5.5.

### 1.5.5 ПЛОЩИНИ ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

У нарисній геометрії розрізняють такі види площин:

а) *площина загального положення* – площина, не паралельна і не перпендикулярна жодній із площин проєкцій (рис. 1.27 – 1.29);

б) *площина рівня* – площина, паралельна площині проєкцій:

- 1) *горизонтальна площина рівня* – площина, паралельна  $\Pi_1$  (рис. 1.30 а);
- 2) *фронтальна площина рівня* – площина, паралельна  $\Pi_2$  (рис. 1.30 б);
- 3) *профільна площина рівня* – площина, паралельна  $\Pi_3$  (рис. 1.30 в);

в) *проєціювальна площина* – площина, перпендикулярна до лише однієї площини проєкцій:

1) *горизонтально-проєціювальна площина* – площина, перпендикулярна до  $\Pi_1$  (рис. 1.31 а);

2) *фронтально-проєціювальна площина* – площина, перпендикулярна до  $\Pi_2$  (рис. 1.31 б);

3) *профільно-проєціювальна площина* – площина, перпендикулярна до  $\Pi_3$  (рис. 1.31 в).

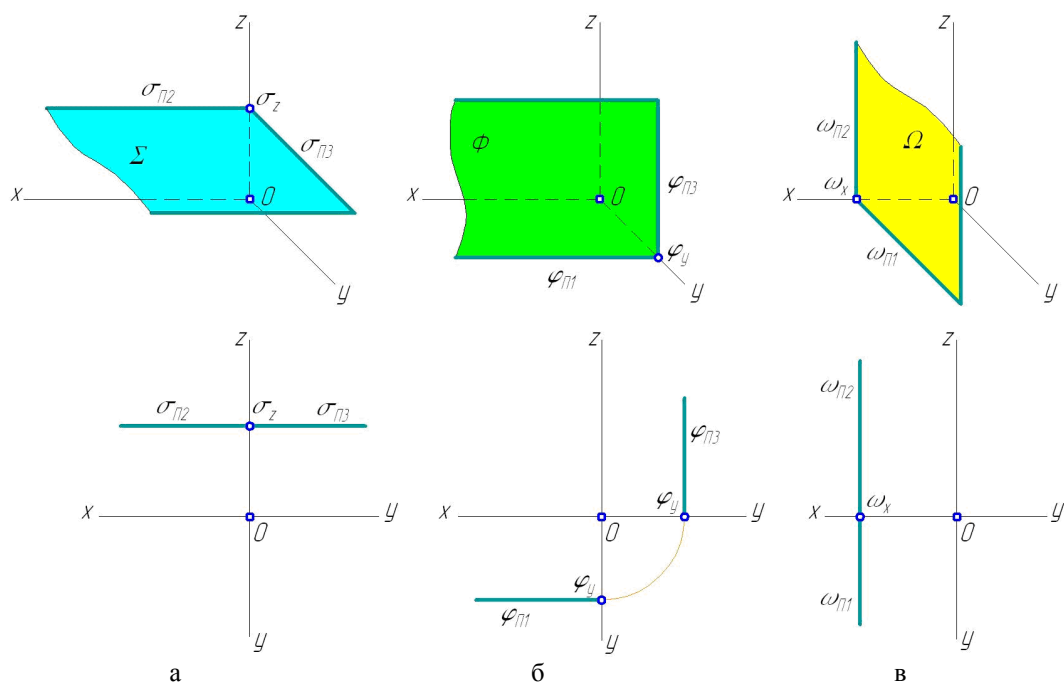


Рисунок 1.30 – Площини рівня

*Властивості площин особливого положення:*

а) горизонтальна площина рівня не має горизонтального сліду, а її фронтальний і профільний сліди перпендикулярні до осі  $z$ ;

б) фронтальна площина рівня не має фронтального сліду, а її горизонтальний і профільний сліди перпендикулярні до осі  $y$ ;

в) профільна площина рівня не має профільного сліду, а її горизонтальний і фронтальний сліди перпендикулярні до осі  $x$ ;

г) фронтальний і профільний сліди горизонтально-проєціювальної площини паралельні осі  $z$ ;

д) горизонтальний і профільний сліди фронтально-проєціювальної площини паралельні осі  $y$ ;

е) горизонтальний і фронтальний сліди профільно-проєціювальної площини паралельні осі  $x$ ;

є) кути  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  нахилу проєціювальних площин до площин проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  є кутами нахилу слідів до осей координат (рис. 1.31).

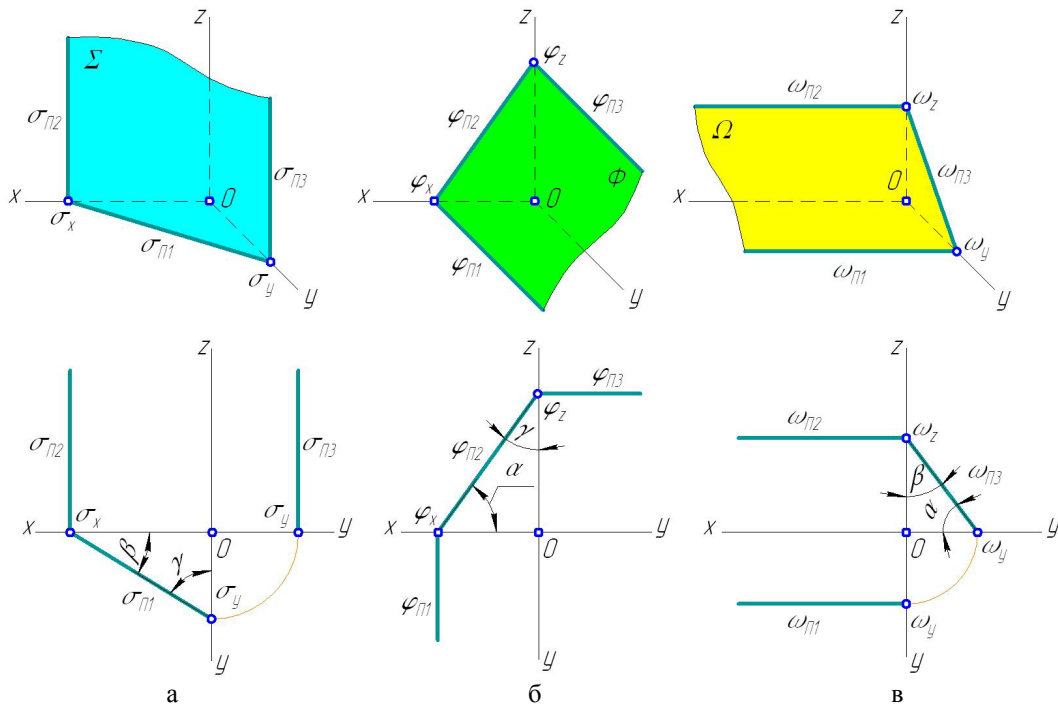


Рисунок 1.31 – Проеціювальні площини

Площини особливого положення широко застосовуються при розв'язанні задач на перетин геометричних об'єктів (див. п. 1.5.8, рис. 1.42 – 1.44; розділ 4; п. 6.4, рис. 6.18, 6.21 – 6.23).

### 1.5.6 НАЛЕЖНІСТЬ ТОЧКИ ПЛОЩИНІ

Точка  $A$  належить площині  $\Sigma$ , якщо вона належить будь-якій лінії  $l$  (наприклад, прямій) цієї площини (рис. 1.32).

Для визначення невідомих проєкцій точки  $A$ , яка належить площині  $\Sigma$ , за однією відомою проєкцією (наприклад,  $A_2$ ) застосовуються такі способи:

а) *спосіб прямої загального положення*: через відому проєкцію  $A_2$  точки проводиться фронтальна проєкція  $l_2$  прямої загального положення; вводяться допоміжні точки  $1_2, 2_2$  прямої і визначаються їх горизонтальні і профільні проєкції, за допомогою яких будуються проєкції  $l_1, l_3$  прямої  $l$ . З умови належності точки  $A$  прямій  $l$  (див. п. 1.4.5, рис. 1.17) визначаються проєкції  $A_1, A_3$  (рис. 1.33);

б) *спосіб прямої особливого положення*:

1) *спосіб горизонталі*: через відому проєкцію  $A_2$  точки проводиться фронтальна проєкція  $h_2$  горизонталі (паралельно осі  $x$ ); вводиться допоміжна точка  $1$  і визначається її

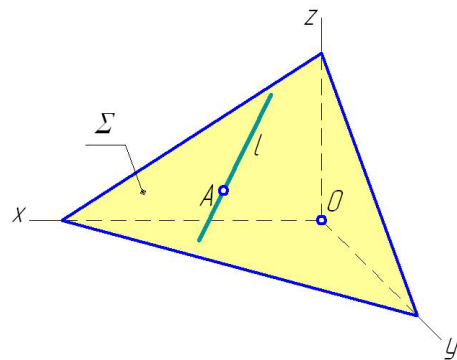


Рисунок 1.32 – Належність точки площині

горизонтальна проекція, через яку проводиться  $h_1$  (паралельно горизонтальному сліду  $\sigma_{\pi 1}$  площини). За допомогою вертикальної лінії проєкційного зв'язку визначається проєкція  $A_1$ . Проєкція  $A_3$  є точкою перетину ліній проєкційного зв'язку, проведених з  $A_1, A_2$  (рис. 1.34 а);

2) *спосіб фронталі*: через відому проєкцію  $A_2$  точки проводиться фронтальна проєкція  $f_2$  фронталі (паралельно  $\sigma_{\pi 2}$ ). Вводиться допоміжна точка 2 і визначається її горизонтальна проєкція, через яку проводиться  $f_1$  (паралельно осі  $x$ ). За допомогою вертикальної лінії проєкційного зв'язку визначається проєкція  $A_1$ ; проєкція  $A_3$  є точкою перетину ліній проєкційного зв'язку, проведених з  $A_1, A_2$  (рис. 1.34 б);

3) *спосіб профільної прямої рівня*: через відому проєкцію  $A_2$  точки проводиться фронтальна проєкція  $p_2$  профільної прямої рівня (паралельно осі  $z$ ). Вводиться допоміжна точка 3 і визначається її профільна проєкція, через яку проводиться  $p_3$  (паралельно  $\sigma_{\pi 3}$ ). За допомогою горизонтальної лінії проєкційного зв'язку визначається проєкція  $A_3$ . Проєкція  $A_1$  є точкою перетину ліній проєкційного зв'язку, проведених із проєкцій  $A_2, A_3$  (рис. 1.34 в).

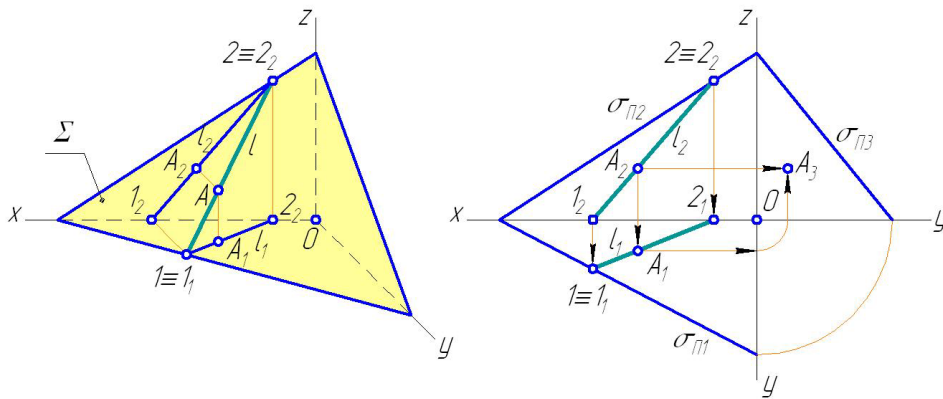


Рисунок 1.33 – Спосіб прямої загального положення

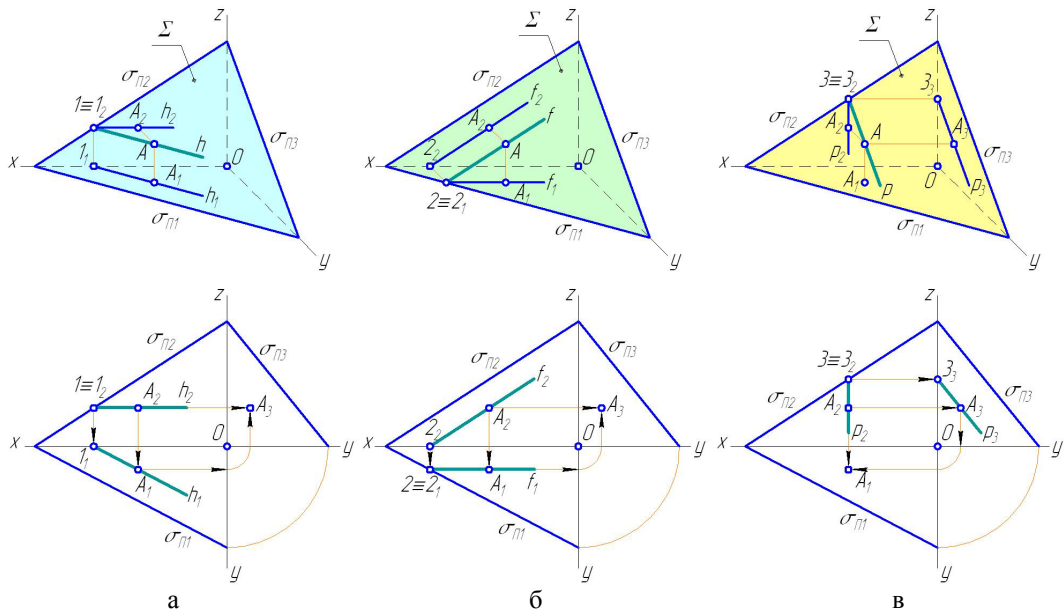


Рисунок 1.34 – Спосіб прямих особливого положення

### 1.5.7 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Пряма  $l$  у просторі може належати площині  $\Sigma$ , бути паралельною їй або перетинати її (рис. 1.35 а – в).

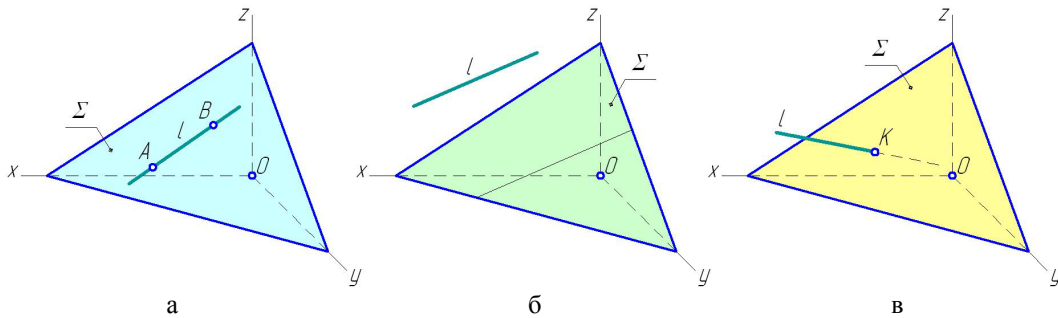


Рисунок 1.35 – Взаємне розміщення прямої і площини

#### Умова належності прямої площині

Пряма  $l$  належить площині  $\Sigma$ , якщо дві її точки  $A, B$  належать цій площині (рис. 1.35 а).

Визначення невідомих проєкцій прямої  $l$ , яка належить площині  $\Sigma$ , полягає у визначенні невідомих проєкцій двох точок  $A, B$  цієї прямої способами, описаними у п. 1.5.6. Наприклад (рис. 1.36), якщо відома фронтальна проєкція відрізка  $AB$ , який належить площині  $\Sigma$ , заданій паралельними прямими  $a, b$ , проводиться фронтальна проєкція прямої  $l$  загального положення через  $A_2, B_2$ . За допомогою двох допоміжних точок  $1, 2$ , які належать прямим  $a, b$  площини, і вертикальних ліній проєкційного зв'язку визначаються горизонтальні проєкції  $A_1 B_1$  точок прямої  $l$ .

На рис. 1.36 осі координат не зазначені, оскільки для розв'язання багатьох позиційних задач нарисної геометрії потреби у їх побудові немає.

#### Умова паралельності прямої і площини

Пряма  $l$  паралельна площині  $\Sigma$ , якщо вона паралельна будь-якій прямій  $m$  цієї площини (рис. 1.35 б).

#### Спосіб побудови прямої, паралельної площині

Для побудови проєкцій прямої  $l$ , яка проходить через точку  $D$  паралельно площині  $\Sigma$ , необхідно побудувати проєкції будь-якої прямої  $m$ , яка належить площині. Проєкції прямої  $l$  будуть проходити через проєкції точки  $D$  паралельно відповідним проєкціям прямої  $m$  (рис. 1.37). Оскільки існує безліч способів проведення прямої  $m$  у площині  $\Sigma$ , задача про паралельність прямої і площини має нескінченну множину розв'язків.

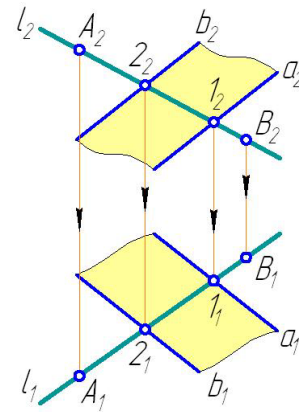


Рисунок 1.36 – Належність прямої площині



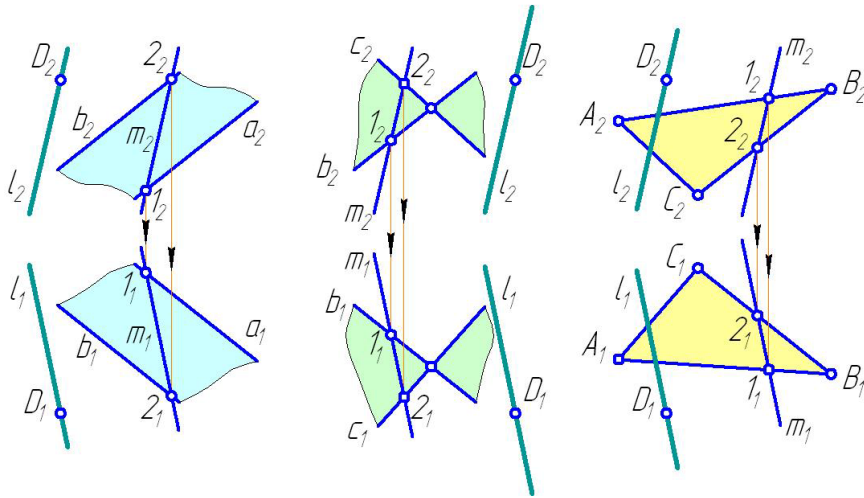


Рисунок 1.37 – Паралельність прямої і площини

Якщо пряма  $l$  не належить і не паралельна площині  $\Sigma$ , вони *перетинаються в точці*  $K$  (рис. 1.35 в), яка визначається способами допоміжної січної площини, заміни площин проєкцій (див. п. 2.1.8, 2.2.6), косокутного проєціювання (див. п. 2.5).

*Суть способу допоміжної січної площини при визначенні точки перетину прямої і площини*

Для визначення точки  $K$  перетину прямої  $l$  і площини  $\Sigma$  (заданої, наприклад, трикутником  $ABC$ ) необхідно провести через пряму  $l$  допоміжну площину  $\Omega$  особливого положення (наприклад, горизонтально-проєціювальну) і визначити лінію  $m$  перетину цієї площини із заданою площиною. Шукана точка  $K$  є точкою перетину прямих  $l, m$  (рис. 1.38). Задача про знаходження точки перетину прямої і площини доповнюється визначенням видимості частин прямої  $l$  методом конкуруючих точок (див. п. 1.4.7.3).

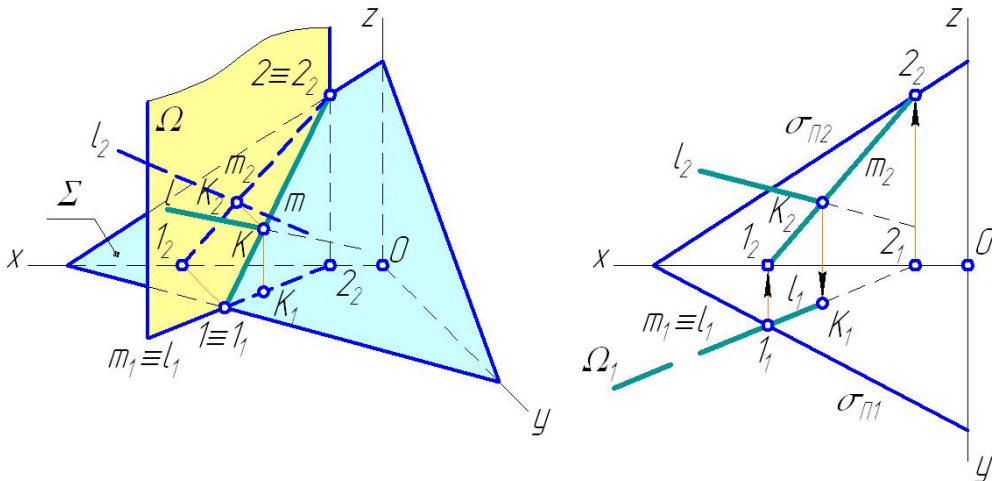


Рисунок 1.38 – Спосіб допоміжної січної площини

У нарисній геометрії допоміжні січні площини особливого положення зазначаються одним із слідів (наприклад, площина  $\Omega$  на рис. 1.38 показана горизонтальним слідом  $\Omega_1$ ).

### 1.5.8 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

Дві площини у просторі можуть збігатися, бути паралельними або перетинатися по лінії (рис. 1.39).

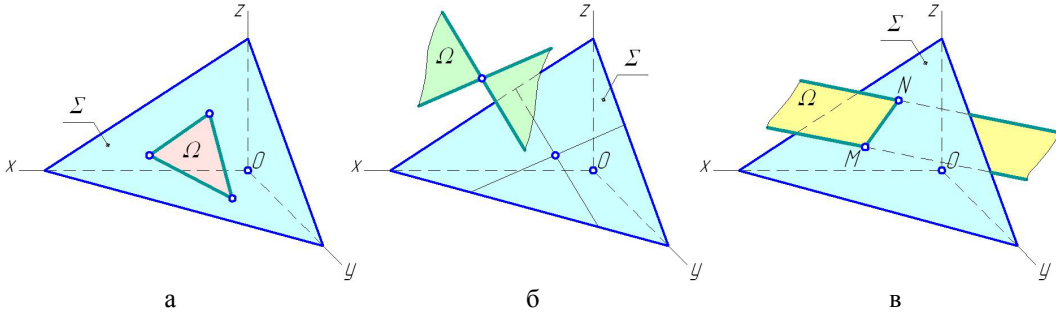


Рисунок 1.39 – Взаємне положення двох площин

#### Умова збігу двох площин

Площина  $\Omega$  належить площині  $\Sigma$ , якщо вони мають три спільні точки  $A, B, C$  (рис. 1.39 а).

Визначення невідомих проєкцій площини  $\Omega$ , яка належить площині  $\Sigma$ , полягає у визначенні невідомих проєкцій трьох точок  $A, B, C$  площини  $\Omega$  способами, описаними у п. 1.5.6 – 1.5.7. Наприклад (рис. 1.40), для знаходження невідомої горизонтальної проєкції трикутника  $ABC$ , який належить площині  $\Sigma$ , застосовано методи прямої  $l$  загального положення і горизонталі  $h$ .

#### Умова паралельності двох площин

Площина  $\Omega$  паралельна площині  $\Sigma$ , якщо пара непаралельних прямих площини  $\Omega$  паралельна парі непаралельних прямих площини  $\Sigma$  (рис. 1.39 б).

#### Спосіб побудови паралельних площин

Для побудови проєкцій площини  $\Omega$ , яка проходить через точку  $D$  паралельно площині  $\Sigma$  (заданій, наприклад, паралельними прямими  $a, b$ ), необхідно побудувати проєкції двох непаралельних прямих  $c, d$ , які належать площині  $\Sigma$ . Шукана площина  $\Omega$  буде подана двома прямими  $l, m$ , проєкції яких проходять через відповідні проєкції точки  $D$  паралельно проєкціям допоміжних прямих  $c, d$  (рис. 1.41).

Якщо площини  $\Omega, \Sigma$  не збігаються і не паралельні, то вони *перетинаються по прямій лінії* (рис. 1.39 в).

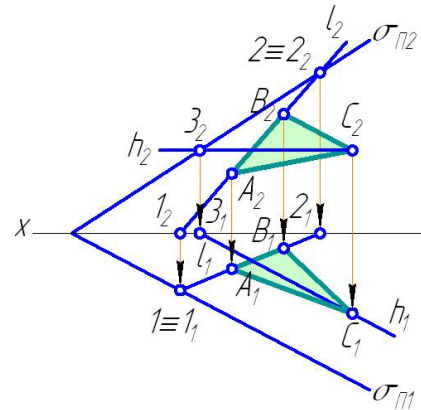


Рисунок 1.40 – Збіг площин

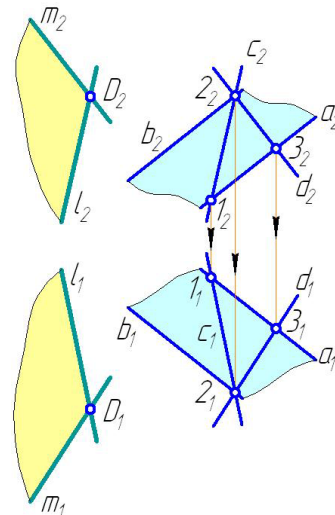


Рисунок 1.41 – Паралельність площин

Лінія перетину двох площин визначається такими способами:

- а) спосіб допоміжних січних площин (рис. 1.42);
- б) спосіб площин-посередників особливого положення (рис. 1.43 – 1.44);
- в) спосіб слідів (рис. 1.45);
- г) способи перетворення комплексного креслення (див. п. 2.1.8, 2.3.5);
- д) спосіб косокутного проєціювання (див. п. 2.5).

*Суть способу допоміжних січних площин при визначенні лінії перетину двох площин*

Лінія  $k$  перетину площин  $\Omega$ ,  $\Sigma$  визначається за двома її точками  $M$ ,  $N$ . Кожна з цих точок є точкою перетину площини  $\Sigma$  із будь-якими двома лініями  $a$ ,  $b$  площини  $\Omega$ . Кожна з точок  $M$ ,  $N$  визначається методом допоміжної січної площини (див. п. 1.5.7, рис. 1.38).

Наприклад, на рис. 1.42 одна із площин задана трикутником  $ABC$ , інша – паралельними прямими  $a$ ,  $b$ . Для визначення точки  $M$  перетину площин через пряму  $a$  проводиться фронтально-проєційувальна площина  $\Psi$ , задана фронтальним слідом  $\Psi_2$ , і знаходиться лінія  $l$  перетину допоміжної площини  $\Psi$  з трикутником  $ABC$ . Точка  $M$  є точкою перетину прямої  $l$  із прямою  $a$ . Для визначення точки  $N$  перетину площин через пряму  $b$  проводиться фронтально-проєційувальна площина  $\Theta$ , задана фронтальним слідом  $\Theta_2$ , і знаходиться лінія  $m$  перетину допоміжної площини  $\Theta$  із трикутником  $ABC$ . Точка  $N$  є точкою перетину прямої  $m$  із прямою  $b$ . Лінія  $k$  перетину двох заданих площин проходить через точки  $M$ ,  $N$ . Задача про знаходження лінії перетину двох площин доповнюється визначенням видимості частин прямих  $a$ ,  $b$  і відрізків  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ . Проєкції  $k_1$ ,  $k_2$  лінії перетину двох площин завжди видимі.

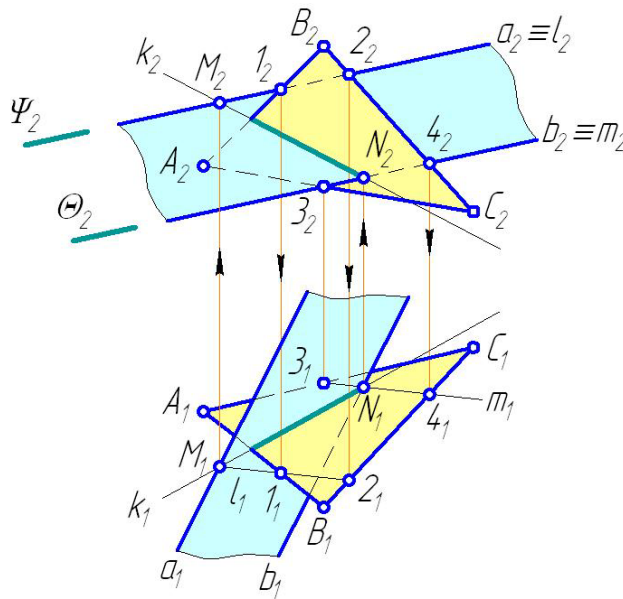


Рисунок 1.42 – Спосіб допоміжних січних площин

*Суть способу площин-посередників при визначенні лінії перетину двох площин*

Лінія  $k$  перетину площин  $\Omega$ ,  $\Sigma$  визначається за двома її точками  $M$ ,  $N$ . Для визначення точки  $M$  вводиться площина  $\Psi$  особливого положення, яка перетинає задані площини по прямих лініях  $a$ ,  $b$ . Точкою перетину цих прямих є точка  $M$ . Для визначення точки  $N$  вводиться площина  $\Theta$  особливого положення, яка перетинає задані площини по прямих

лініях  $c, d$ . Точкою перетину цих прямих є точка  $N$ . Шукана лінія  $k$  перетину площин  $\Omega, \Sigma$  проходить через знайдені точки  $M, N$  (рис. 1.43).

Наприклад, на рис. 1.44 дві площини задані трикутниками  $ABC, DEF$ . Для визначення точки  $M$  перетину площин вводиться фронтально-проєціювальна площина  $\Psi$ , задана фронтальним слідом  $\Psi_2$ , і знаходяться лінії  $a, b$  її перетину із трикутниками  $ABC, DEF$ . Точка  $M$  є точкою перетину прямих  $a, b$ . Для визначення точки  $N$  перетину площин вводиться горизонтальна площина рівня  $\Theta$ , задана фронтальним слідом  $\Theta_2$ , і знаходяться лінії  $c, d$  її перетину із трикутниками  $ABC, DEF$ . Точка  $N$  є точкою перетину прямих  $c, d$ .

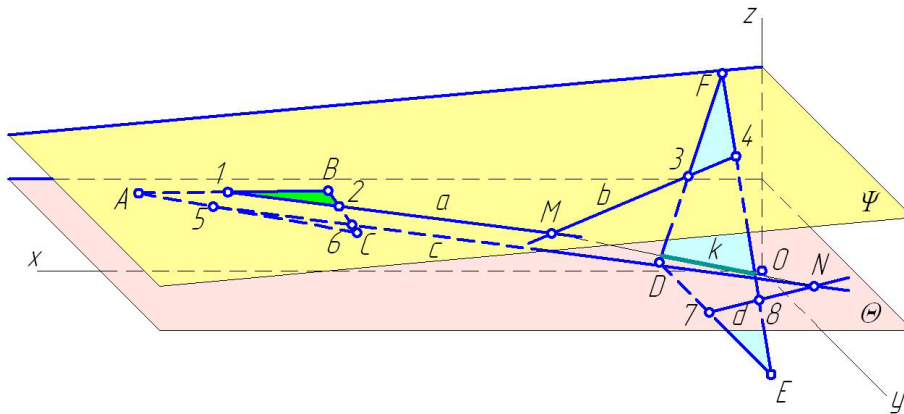


Рисунок 1.43 – Спосіб площин-посередників

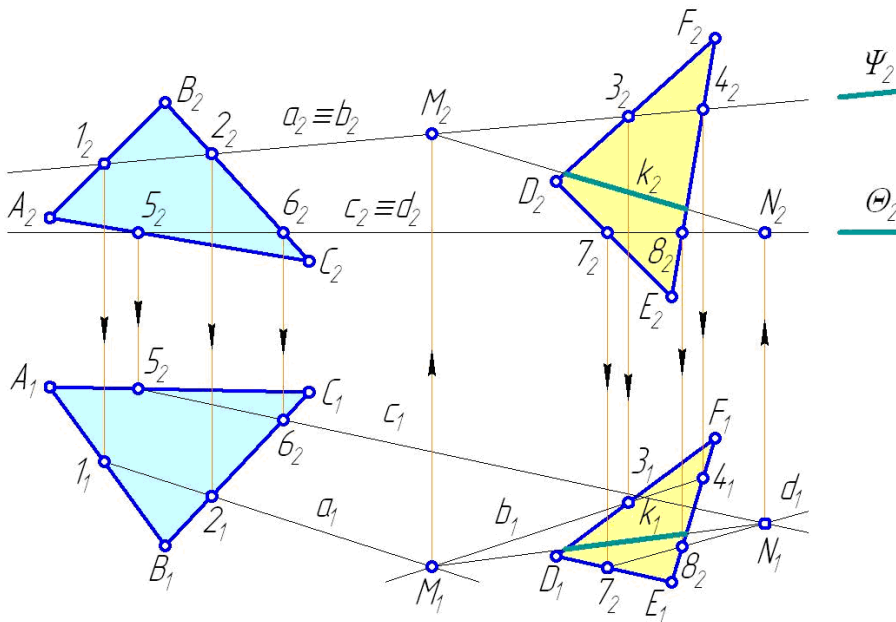


Рисунок 1.44 – Спосіб площин-посередників особливого положення

*Суть способу слідів при визначенні лінії перетину двох площин*

Лінія  $k$  перетину площин  $\Sigma, \Omega$  будується за двома точками  $M, N$ . Будуються сліди площин. Точки  $M, N$  є точками перетину двох пар однойменних слідів площин (рис. 1.45).

Наприклад, на рис. 1.46 площина  $\Sigma$  задана паралельними прямими  $a, b$ , площина  $\Omega$  – трикутником  $ABC$ . Горизонтальний слід  $\sigma_{\Pi 1}$  площини  $\Sigma$  будується за двома слідами  $H, H'$  прямих  $a, b$ . Фронтальний слід  $\sigma_{\Pi 2}$  проходить через точку  $\sigma_x$  і фронтальний слід  $F$  прямої  $a$ . Горизонтальний слід  $\omega_{\Pi 1}$  площини  $\Omega$  будується за двома слідами  $H', H''$  прямих  $AB, BC$ . Фронтальний слід  $\omega_{\Pi 2}$  проходить через точку  $\omega_x$  і фронтальний слід  $F''$  прямої  $AB$ . Точка  $M$ , яка збігається зі своєю горизонтальною проекцією  $M_1$ , є точкою перетину горизонтальних слідів  $\sigma_{\Pi 1}, \omega_{\Pi 1}$ . Точка  $N$ , яка збігається зі своєю фронтальною проекцією  $N_2$ , є точкою перетину фронтальних слідів  $\sigma_{\Pi 2}, \omega_{\Pi 2}$ . Проекції  $M_2, N_1$  знаходяться на осі  $x$ . Горизонтальна проекція  $k_1$  шуканої лінії  $k$  перетину двох площин проходить через точки  $M_1, N_1$ , фронтальна  $k_2$  – через точки  $M_2, N_2$ .

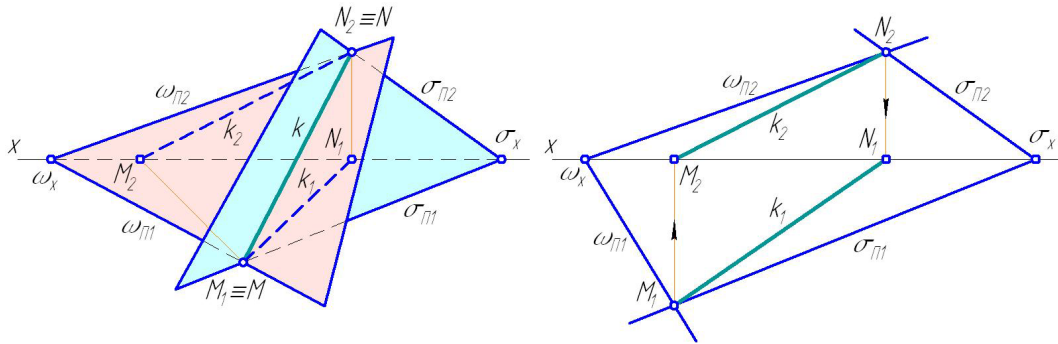


Рисунок 1.45 – Спосіб слідів

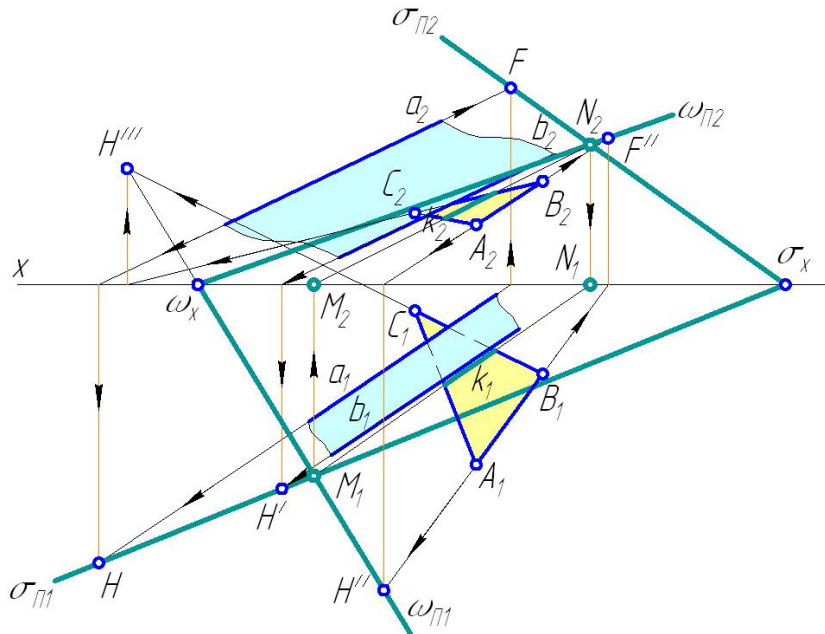


Рисунок 1.46 – Визначення лінії перетину площин способом слідів

Спосіб слідів можна розглядати як окремий випадок способу площин-посередників, у якому площини-посередники є двома площинами проекцій (на рис. 1.46 –  $\Pi_1, \Pi_2$ ).

### 1.5.9 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ ТА ДВОХ ПЛОЩИН

#### Умова перпендикулярності прямої і площини

Пряма  $n$  перпендикулярна площині  $\Sigma$ , якщо вона перпендикулярна до двох не паралельних прямих цієї площини (рис. 1.47).

Як ці прямі зручно обирати лінії рівня площини, наприклад, горизонталь  $h$  і фронталь  $f$ . Лише у цьому випадку прямі кути між  $n$ ,  $h$  і  $f$  проєціюються у натуральну величину на  $\Pi_1, \Pi_2$  (див. п. 1.4.8, рис. 1.26).

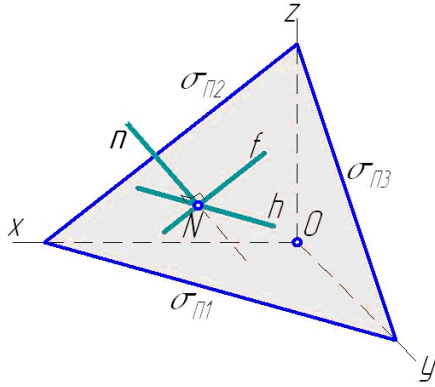


Рисунок 1.47 – Перпендикулярність прямої і площини

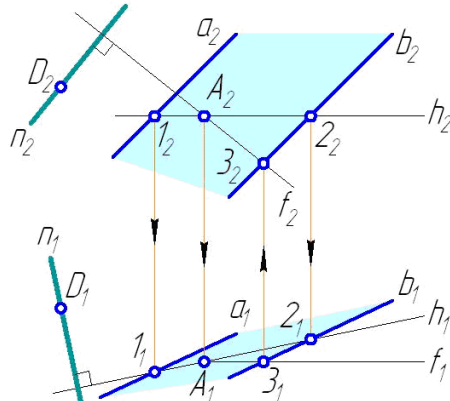


Рисунок 1.48 – Побудова прямої, перпендикулярної до площини

На рис.1.48 побудовані проєкції прямої  $n$ , яка проходить через точку  $D$  перпендикулярно до площини  $\Sigma$ , заданої паралельними прямими  $a, b$ . У площині  $\Sigma$  через довільно обрану її точку  $A$  проведені горизонталь  $h$  і фронталь  $f$ . Із горизонтальної проєкції  $D_1$  точки  $D$  проведена горизонтальна проєкція  $n_1$ , перпендикулярна до проєкції  $h_1$ . Із фронтальної проєкції  $D_2$  проведена фронтальна проєкція  $n_2$ , перпендикулярна до проєкції  $f_2$ .

#### Умова перпендикулярності двох площин

Дві площини  $\Omega, \Sigma$  перпендикулярні, якщо будь-яка пряма  $n$ , яка належить першій площині, перпендикулярна до другої площини (рис. 1.49).

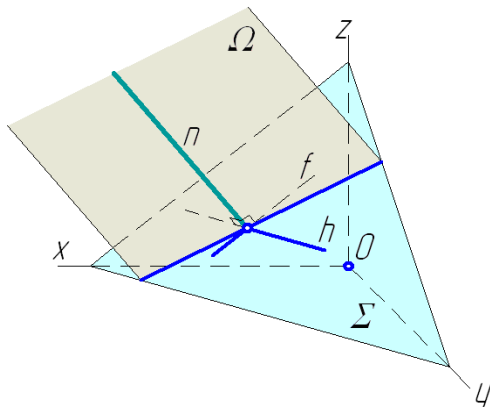


Рисунок 1.49 – Перпендикулярність площин

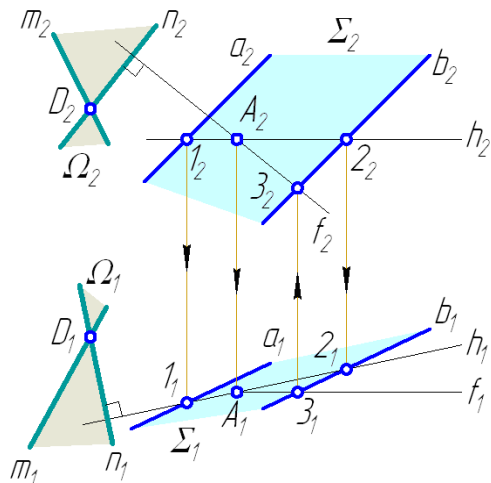


Рисунок 1.50 – Побудова взаємноперпендикулярних площин

На рис. 1.50 побудовані проекції площини  $\Omega$ , яка проходить через точку  $D$  перпендикулярно до площини  $\Sigma$ , заданої паралельними прямими  $a, b$ . Площина  $\Omega$  подана двома прямими  $n, m$ , які перетинаються у точці  $D$ . При цьому пряма  $n$  перпендикулярна до площини  $\Sigma$  (рис. 1.48). Пряма  $m$  має довільну орієнтацію у просторі, тому задача побудови двох взаємно перпендикулярних площин має безліч розв'язків.

Лінія перетину взаємно перпендикулярних площин за необхідності визначається одним із способів, описаних у п. 1.5.8.

## 1.6 МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ

### 1.6.1 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

#### 1.6.1.1 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

Метричні задачі з проєціювання точки, прямої і площини пов'язані із визначенням відстаней, площ, кутів. Усі задачі на визначення відстані від точки до прямої і площини, між паралельними прямою і площиною та двома площинами зводяться до задачі про визначення відстані між двома точками. Задачі про визначення площі плоскої фігури зводяться до знаходження натуральної величини цієї фігури. Визначення кута між двома прямими, прямою і площиною, двома площинами є неможливим без застосування способів перетворення комплексного креслення (див. п. 2.1.6, 2.3.3). Методами, описаними у розділі 1, можна визначити лише проекції цих кутів.

Для визначення відстані від точки  $A$  до прямої  $l$  необхідно провести з даної точки перпендикуляр  $n$  до прямої, визначити точку  $N$  перетину прямих  $n, l$  і знайти довжину відрізка  $AN$ . Остання є шуканою відстанню (рис. 1.51).

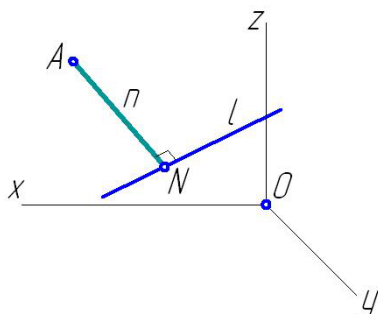


Рисунок 1.51 – Відстань від точки до прямої загального положення

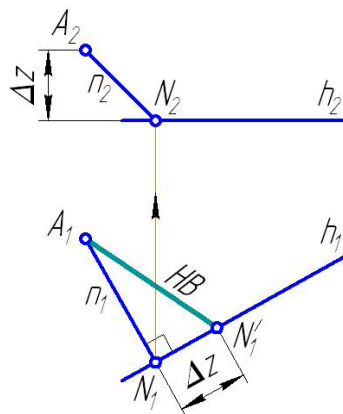


Рисунок 1.52 – Визначення відстані від точки до прямої рівня

При знаходженні відстані від точки до прямої  $l$  особливого положення прямий кут між прямими  $n, l$  проєціюється у натуральну величину на одну із площин проєкцій (див. п. 1.4.8), а натуральна величина відрізка  $AN$  визначається способом прямокутного трикутника (див. п. 1.4.4) або обертанням навколо проєціювальної осі (див. п. 2.2.2).

На рис. 1.52 визначена відстань від точки  $A$  до горизонталі  $h$ . На горизонтальній проєкції побудована проєкція  $A_1N_1$  шуканого відрізка. За допомогою ліній проєкційного зв'язку знайдена фронтальна проєкція  $A_2N_2$ . Натуральна величина відрізка  $AN$  визначена способом прямокутного трикутника.

### 1.6.1.2 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Задача про визначення відстані від точки  $A$  до прямої  $l$  загального положення ускладнюється тим, що проєкції прямого кута між прямою  $l$  і проведеним до неї перпендикуляром  $n$  не дорівнюють  $90^\circ$  (див. п. 1.4.8, рис. 1.25). Для розв'язання цієї задачі застосовуються такі способи:

- спосіб допоміжної нормальної площини (рис. 1.53);
- спосіб заміни площин проєкцій (див. п. 2.1.3);
- спосіб обертання навколо проєціювальної осі (див. п. 2.2.3).

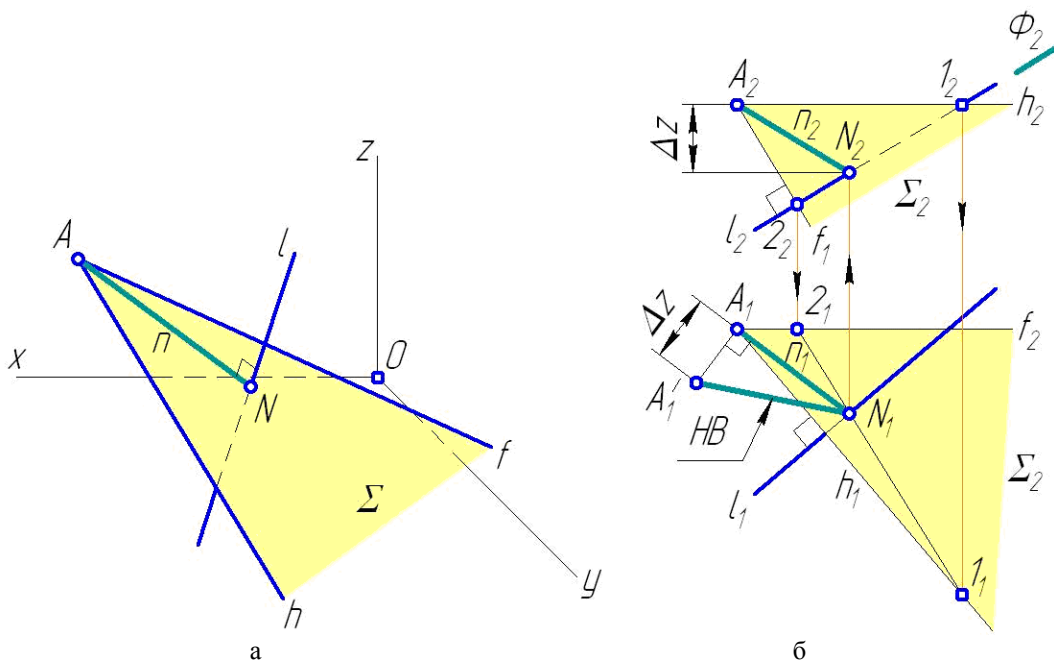


Рисунок 1.53 – Спосіб допоміжної нормальної площини

#### *Суть способу допоміжної нормальної площини*

Через точку  $A$  проводиться площина  $\Sigma$  загального положення, перпендикулярна до прямої  $l$  (рис. 1.53 б). Ця площина задається горизонталлю  $h$  і фронталлю  $f$ , які перетинаються у точці  $A$ . При цьому горизонтальна проєкція горизонталі  $h_1$  і фронтальна проєкція фронталі  $f_2$  перпендикулярні до відповідних проєкцій прямої  $l$ . Основа  $N$  перпендикуляра  $n$  знаходиться як точка перетину прямої  $l$  з перпендикулярною до неї площиною  $\Sigma$  за допомогою фронтально-проєціювальної січної площини  $\Phi$  (див. п. 1.5.7). Натуральна величина відрізка  $AN$  дорівнює шуканій відстані від точки  $A$  до прямої  $l$  загального положення.

### 1.6.1.3 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

Для визначення відстані від точки  $A$  до площини  $\Sigma$  необхідно провести з даної точки перпендикуляр  $n$  до площини, визначити точку  $N$  їх перетину і знайти довжину відрізка  $AN$ .

При знаходженні відстані від точки  $A$  до площини особливого положення прямий кут між прямою  $n$  і одним зі слідів площини  $\Sigma$  проєціюється у натуральну величину



на відповідну площину проєкцій (рис. 1.54).

На рис. 1.55 визначена відстань від точки  $A$  до горизонтально-проєціювальної площини  $\Sigma$ . На горизонтальній площині проєкцій через точку  $A_1$  проведена проєкція  $n_1$  перпендикуляра до горизонтального сліду  $\sigma_{\pi 1}$  площини з основою  $N_1$ . При цьому перпендикуляр  $n$  є горизонтальною прямою рівня. За допомогою лінії проєкційного зв'язку знайдена фронтальна проєкція  $A_2N_2$ . Натуральна величина відрізка  $AN$  дорівнює довжині його горизонтальної проєкції  $A_1N_1$ .

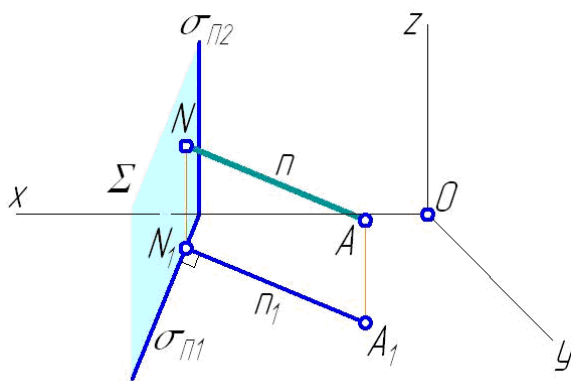


Рисунок 1.54 – Відстань від точки до площини особливого положення

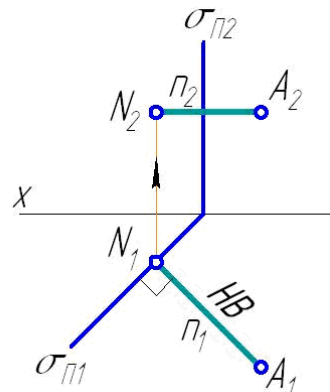


Рисунок 1.55 – Визначення відстані від точки до горизонтально-проєціювальної площини

#### 1.6.1.4 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Задача про визначення відстані від точки  $D$  до площини  $\Sigma$  загального положення визначається у такий спосіб. З точки  $D$  проводиться пряма  $n$ , перпендикулярна до площини  $\Sigma$  (див. п. 1.5.9, рис. 1.47 – 1.48), і визначається точка  $N$  їх перетину (див. п. 1.5.7, рис. 1.38). Натуральна величина відрізка  $DN$  дорівнює відстані від точки  $D$  до заданої площини (рис. 1.56).

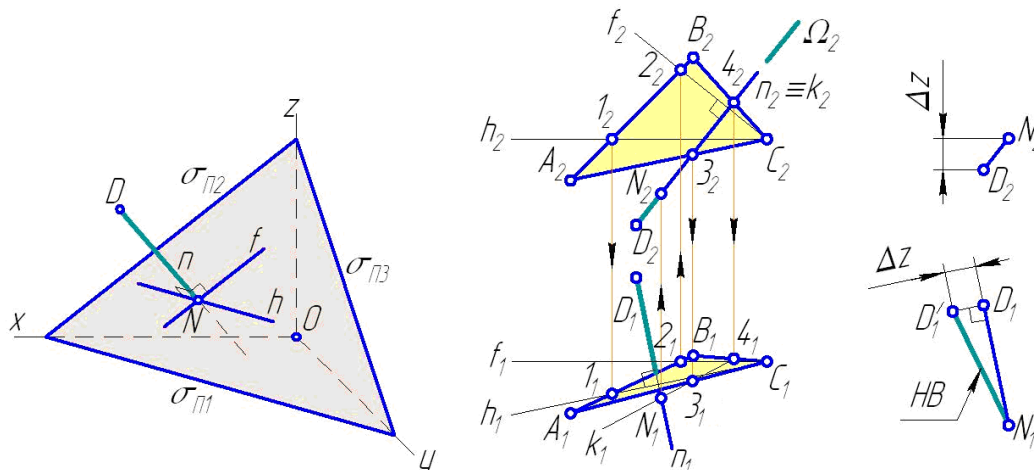


Рисунок 1.56 – Відстань від точки до площини загального положення

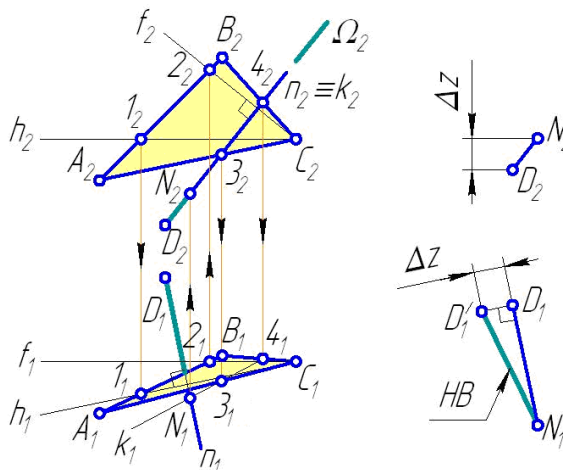


Рисунок 1.57 – Визначення відстані від точки до площини

На рис. 1.57 площина  $\Sigma$  задана трикутником  $ABC$ . Для побудови прямої  $n$ , яка проходить через точку  $D$  перпендикулярно до площини трикутника, у останньому проводяться горизонталь  $h$  і фронталь  $f$ . Горизонтальна проекція  $h_1$  горизонталі перпендикулярна до горизонтальної проекції  $n_1$  прямої, фронтальна проекція  $f_2$  фронталі перпендикулярна до  $n_2$ . Точка  $N$  перетину прямої  $n$  із площиною  $\Sigma$  визначається методом допоміжної січної площини. У даному випадку пряма  $n$  заключається у фронтально-проєціювальну площину  $\Omega$ , задану фронтальним слідом  $\omega_2$ , і визначається лінія  $k$  перетину площин  $\Sigma$ ,  $\Omega$ . Шукана точка  $N$  є точкою перетину прямих  $k$ ,  $n$ . Довжина відрізка  $AN$  визначається способом прямокутного трикутника.

### 1.6.2 ВІДСТАНЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПЛОЩИНАМИ, ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ

Відстань між двома паралельними площинами  $\Sigma$  і  $\Omega$  дорівнює відстані від будь-якої точки  $D$  однієї площини до іншої площини (рис. 1.58).

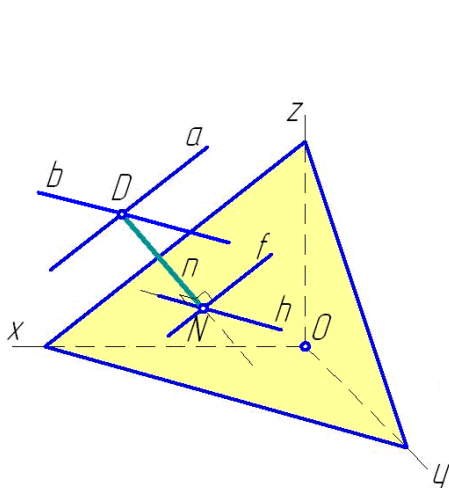


Рисунок 1.58 – Відстань між паралельними площинами

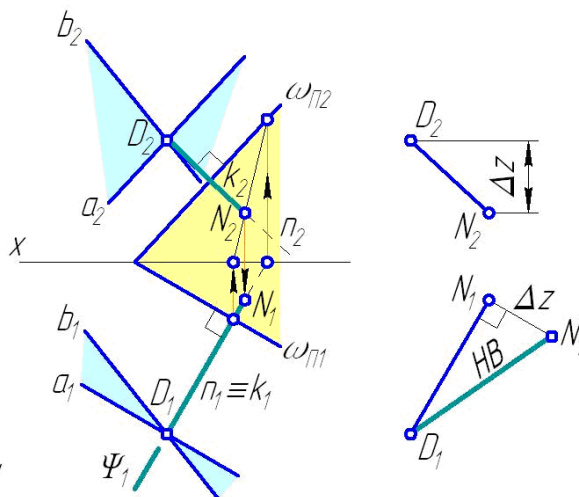


Рисунок 1.59 – Визначення відстані між паралельними площинами

На рис. 1.59 одна із площин  $\Sigma$  задана прямими  $a$ ,  $b$ , які перетинаються у точці  $D$ , інша  $\Omega$  – горизонтальним і фронтальним слідами  $\omega_{\Pi 1}$ ,  $\omega_{\Pi 2}$ . З точки  $D$  опускається перпендикуляр  $n$  на площину  $\Omega$ . При цьому горизонтальна проекція  $n_1$  перпендикулярна до горизонтального сліду  $\omega_{\Pi 1}$  площини, фронтальна проекція  $n_2$  перпендикулярна до фронтального сліду  $\omega_{\Pi 2}$ . Точка  $N$  перетину прямої  $n$  із площиною  $\Omega$  визначається методом допоміжної січної площини. У даному випадку через пряму  $n$  проводиться горизонтально-проєціювальна площина  $\Psi$ , задана горизонтальним слідом  $\psi_1$ , і визначається лінія  $k$  перетину площин  $\Omega$ ,  $\Psi$ . Шукана точка  $N$  є точкою перетину прямих  $k$ ,  $n$ . Довжина відрізка  $DN$  визначається способом прямокутного трикутника.

Відстань між паралельними прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  (рис. 1.60) дорівнює відстані від будь-якої точки  $D$  прямої до площини.

На рис. 1.61 площина  $\Sigma$  задана горизонтальним і фронтальним слідами  $\sigma_{\Pi 1}$ ,  $\sigma_{\Pi 2}$ . Із будь-якої точки  $D$ , яка належить прямій  $l$ , опускається перпендикуляр  $n$  на площину  $\Sigma$  і визначається точка  $N$  їх перетину за допомогою горизонтально-проєціювальної площини  $\Psi$ . Довжина відрізка  $DN$  визначається способом прямокутного трикутника.

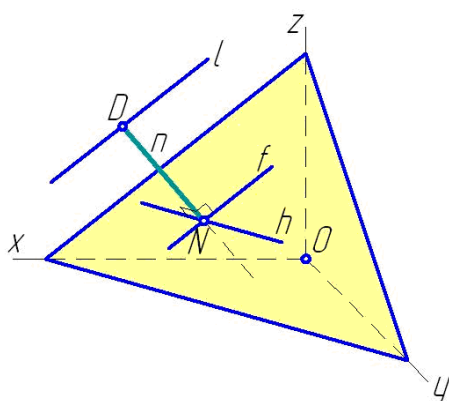


Рисунок 1.60 – Відстань між паралельними прямою і площиною

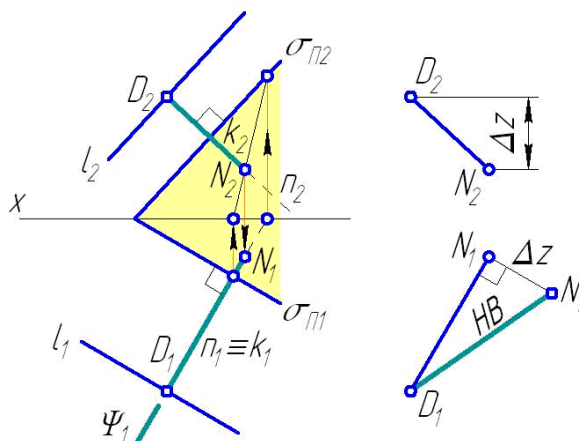


Рисунок 1.61 – Визначення відстані між паралельними прямою і площиною

Відстань між паралельними прямими  $l, m$  дорівнює відстані  $DN$  від будь-якої точки  $D$  однієї прямої до іншої прямої (рис. 1.62) і може бути визначена способом допоміжної нормальної площини (див. п. 1.6.1.2, рис. 1.53).

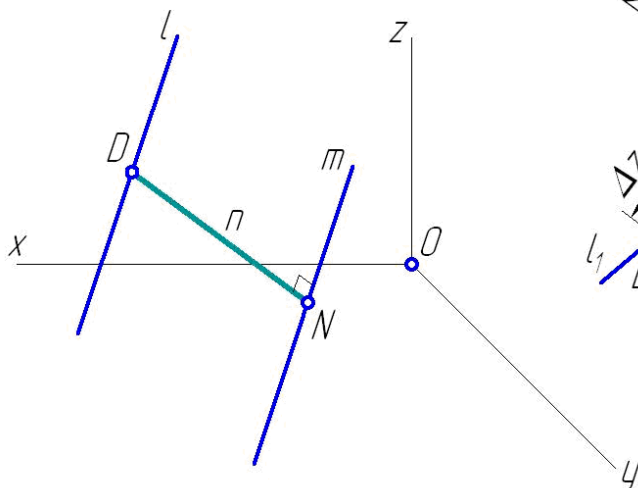


Рисунок 1.62 – Відстань між паралельними прямими

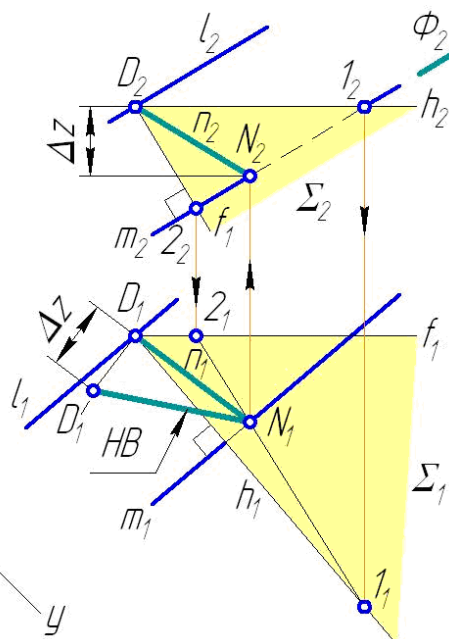


Рисунок 1.63 – Спосіб допоміжної нормальної площини

На рис. 1.63 через точку  $D$  прямої  $l$  проводиться площина  $\Sigma$  загального положення, перпендикулярна прямій  $m$ . Ця площина задається горизонталлю  $h$  і фронталлю  $f$ , які перетинаються в точці  $D$ . При цьому горизонтальна проекція горизонталі  $h_1$  і фронтальна проекція фронталі  $f_2$  перпендикулярні до відповідних проекцій прямої  $m$ . Основа  $N$  перпендикуляра  $n$  знаходиться як точка перетину прямої  $m$  із перпендикулярною до неї

площиною  $\Sigma$  за допомогою фронтально-проєкціувальної січної площини  $\Phi$ . Натуральна величина відрізка  $DN$  дорівнює шуканій відстані між паралельними прямими  $l, m$ .

Відстань між мимобіжними прямими  $l, m$  дорівнює *найменшій* відстані від точок однієї прямої до іншої прямої (рис. 1.64) і визначається такими способами:

- способом допоміжної паралельної площини;
- способами перетворення комплексного креслення (див. п. 2.1.5, 2.2.5, 2.3.2).

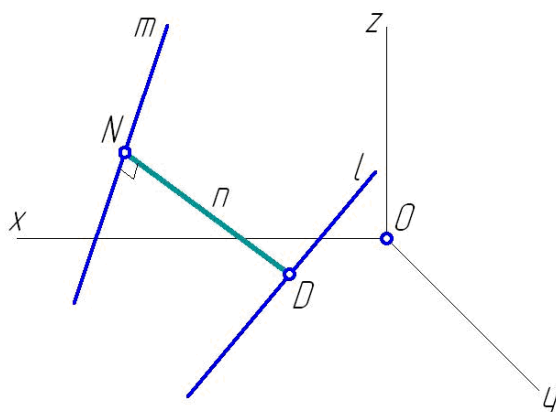


Рисунок 1.64 – Відстань між мимобіжними прямими

*Суть способу допоміжної паралельної площини*

Відстань між мимобіжними прямими  $l, m$  дорівнює відстані від будь-якої точки  $D$  однієї прямої до її паралельної площини  $\Sigma$ , проведеної через другу пряму (рис. 1.65).

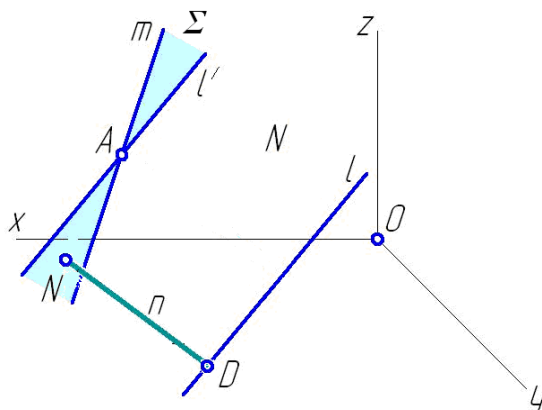


Рисунок 1.65 – Спосіб допоміжної паралельної площини

На рис. 1.66 через пряму  $m$  проведено площину  $\Sigma$  загального положення, задану двома прямими  $m, l'$ , які перетинаються у довільній точці  $A$ . Ця площина паралельна прямій  $l$ , оскільки проєкції прямої  $l'$  паралельні відповідним проєкціям прямої  $l$ . Для побудови прямої  $n$ , яка проходить через точку  $D$  перпендикулярно до площини  $\Sigma$ , в останній проводяться горизонталь  $h$  і фронталь  $f$ . Горизонтальна проєкція  $n_1$  прямої  $n$  перпендикулярна до горизонтальної проєкції  $h_1$  горизонталі, фронтальна проєкція  $n_2$  перпендикулярна до  $f_2$ . Точка  $N$  перетину прямої  $n$  із площиною  $\Sigma$  визначається методом допоміжної січної площини. У даному випадку через пряму  $n$  проводиться горизонтально-проєкціувальна площина  $\Omega$ , задана горизонтальним слідом  $\Omega_2$ , і визначається лінія  $k$  перетину площин  $\Sigma, \Omega$ .

Шукана точка  $N$  є точкою перетину прямих  $k, n$ . Довжина відрізка  $DN$  визначається способом прямокутного трикутника.

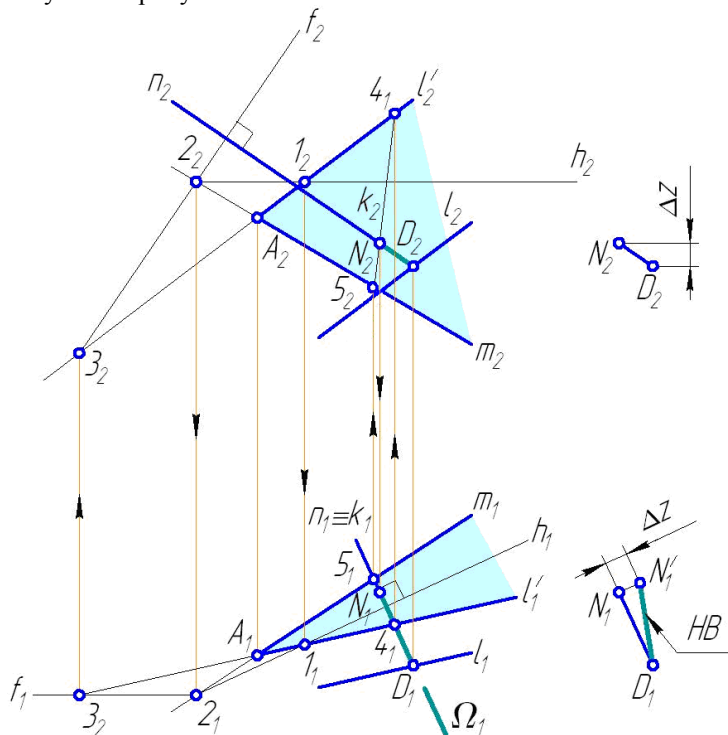


Рисунок 1.66 – Визначення відстані між мимобіжними прямими

### 1.6.3 КУТ МІЖ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ, ДВОМА ПЛОЩИНАМИ

Кут  $\varphi$  між прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  визначається як кут між прямою  $l$  і її проекцією  $l'$  на цю площину (рис. 1.67 а).

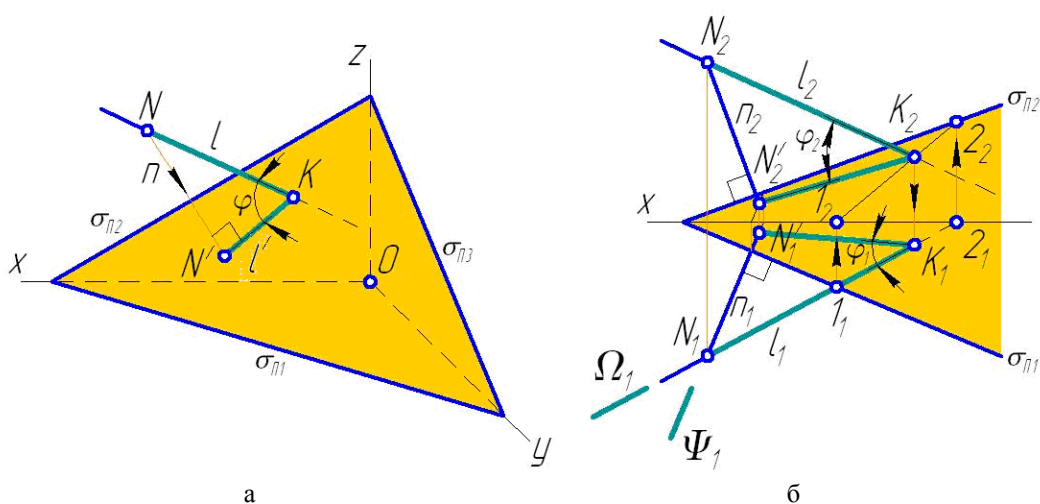


Рисунок 1.67 – Кут між прямою і площиною

На рис. 1.67 б площина  $\Sigma$  задана горизонтальним і фронтальним слідами  $\sigma_{\Pi_1}$ ,  $\sigma_{\Pi_2}$ . Проекція прямої  $l$  на цю площину проходить через відрізок  $KN'$ , один кінець якого (точка  $K$ ) є точкою перетину прямої  $l$  із площиною  $\Sigma$ , інший (точка  $N'$ ) – точка перетину прямої  $n$  із площиною  $\Sigma$ . Пряма  $n$  проходить через будь-яку точку  $N$  прямої  $l$  перпендикулярно до площини  $\Sigma$ . Горизонтальна проекція  $n_1$  перпендикулярна сліду  $\sigma_{\Pi_1}$ , фронтальна проекція  $n_2$  перпендикулярна до  $\sigma_{\Pi_2}$ . Ортогональними проекціями на площини проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  кута  $\varphi$  між прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  є відповідні проєкції кута  $NKN'$ . Натуральна величина кута  $\varphi$  визначається методами перетворення комплексного креслення (див. п. 2.1.6, 2.3.3, 2.4.2).

Кут  $\theta$  між двома площинами  $\Sigma$ ,  $\Omega$  називається *двогранним кутом* (рис. 1.68). Він визначається як кут між перпендикулярами  $n$ ,  $n'$  до лінії  $k$  перетину площин (пряма  $n$  належить площині  $\Sigma$ , пряма  $n'$  – площині  $\Omega$ ).

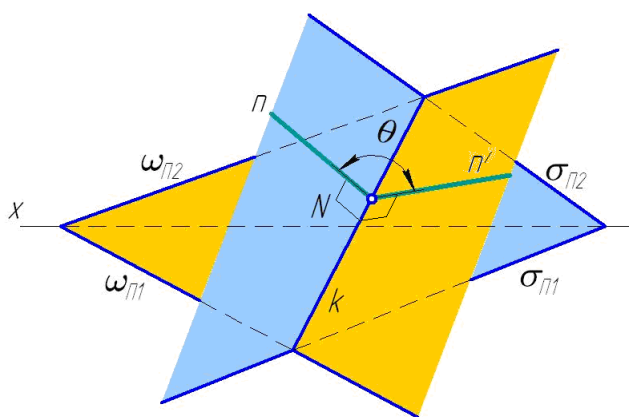


Рисунок 1.68 – Двогранний кут

Вищезазначені способи визначення кутів між прямою і площиною та двома площинами належать до *прямих способів*, що базуються на використанні визначень кутів  $\varphi$ ,  $\theta$ . Прямі способи мають істотний недолік – громіздкість допоміжних побудов.

З метою спрощення практичної реалізації задачі про побудову кутів  $\varphi$ ,  $\theta$  і читання комплексного креслення застосовуються *непрямі способи*, що ґрунтуються на властивостях цих кутів.

*Властивість кута між прямою і площиною*

Кут  $\varphi$  між прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  доповнює допоміжний кут  $\varphi'$  до  $90^\circ$  (рис. 1.69 а):

$$\varphi = 90^\circ - \varphi'. \quad (1.1)$$

*Допоміжний кут  $\varphi'$*  є кутом між прямою  $l$  і перпендикуляром  $n$ , проведеним із будь-якої її точки  $D$  на площину  $\Sigma$ .

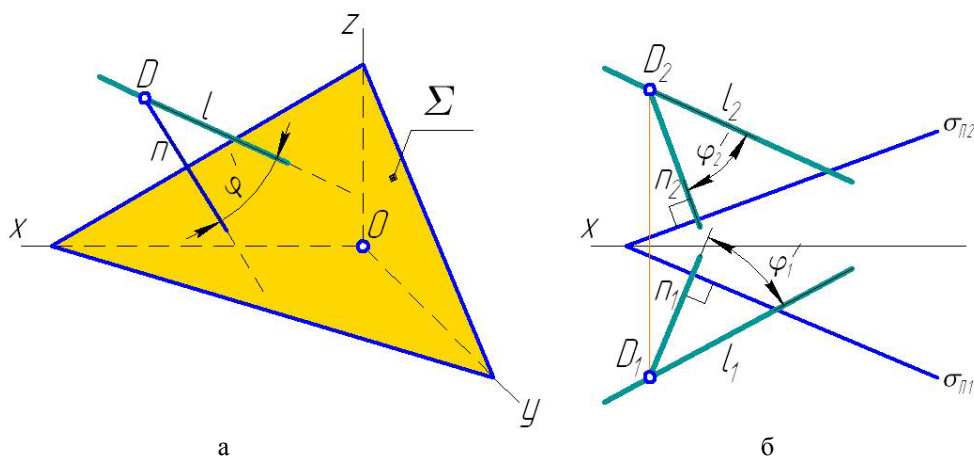


Рисунок 1.69 – Допоміжний кут

На рис. 1.69 б площина  $\Sigma$  задана горизонтальним і фронтальним слідами  $\sigma_{\pi 1}$ ,  $\sigma_{\pi 2}$ . Проекції прямої  $n$ , проведеної через довільну точку  $D$  прямої  $l$  перпендикулярно до площини  $\Sigma$ , перпендикулярні відповідним слідам  $\sigma_{\pi 1}$ ,  $\sigma_{\pi 2}$  цієї площини. Натуральна величина кута  $\phi'$  визначається методами перетворення комплексного креслення (див. п. 2.1.6, 2.3.3, 2.4.2). Кут  $\phi$  визначається за формулою (1.1).

*Властивість двогранного кута*

Кут  $\theta$  між двома площинами  $\Sigma$ ,  $\Omega$  дорівнює куту  $\theta'$  між прямими  $n$ ,  $n'$ , які проходять через довільну точку простору перпендикулярно до цих площин (рис. 1.70 а).

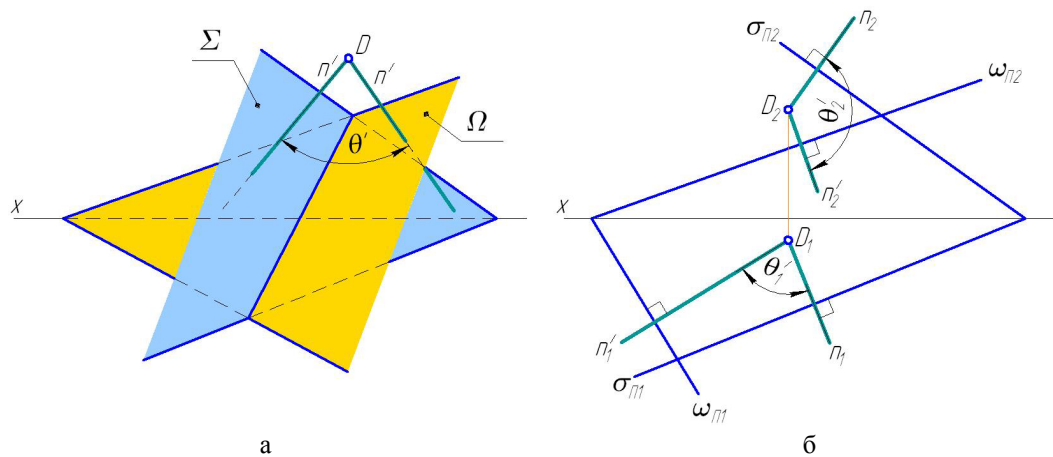
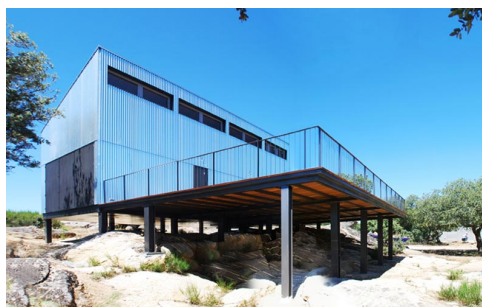


Рисунок 1.70 – Непрямий спосіб визначення двогранного кута

На рис. 1.70 б площини  $\Sigma$ ,  $\Omega$  задані горизонтальними і фронтальними слідами  $\sigma_{\pi 1}$ ,  $\sigma_{\pi 2}$  та  $\omega_{\pi 1}$ ,  $\omega_{\pi 2}$  відповідно. Проекції допоміжних прямих  $n$ ,  $n'$  перпендикулярні до відповідних слів площин  $\Sigma$ ,  $\Omega$ . Натуральна величина кута  $\theta'$  визначається методами перетворення комплексного креслення (див. п. 2.1.6, 2.3.3). Кут  $\theta$  між площинами  $\Sigma$ ,  $\Omega$  дорівнює куту  $\theta'$  між прямими  $n$ ,  $n'$ .

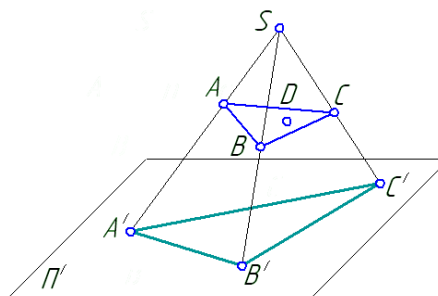
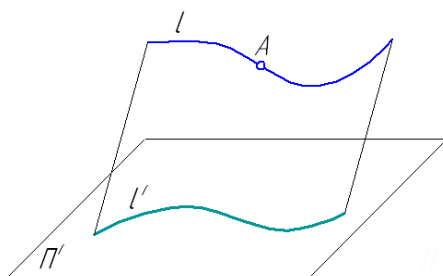
### ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Назвіть види проєціювання, наведені на рисунках.

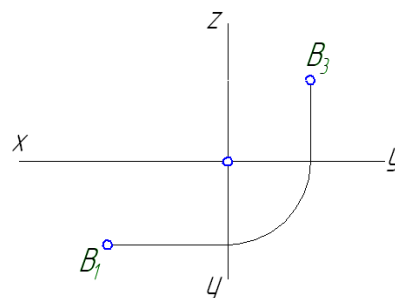
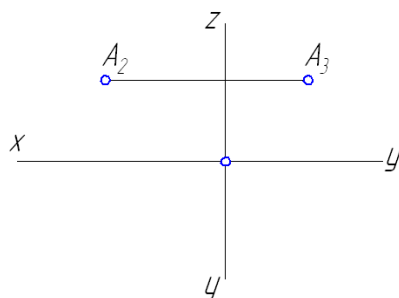


2. Знайдіть паралельну проєкцію  $A'$  точки  $A$ , яка належить кривій  $l$ .

3. Знайдіть центральну проєкцію  $D'$  точки  $D$ , яка належить площині  $ABC$ .



4. Побудуйте горизонтальну проєкцію точки  $A$  і фронтальну проєкцію точки  $B$ .



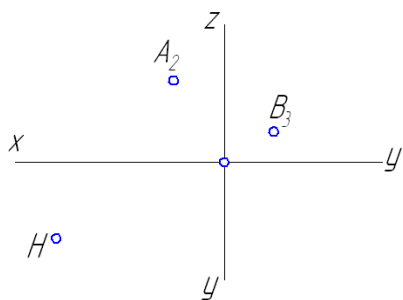
5. Побудуйте комплексні креслення точок  $A(5; 10; 15)$ ,  $B(5; 10; -15)$ ,  $C(-5; -10; -15)$ .

6. Побудуйте комплексне креслення точки  $A$ , яка належить VI октанту і рівновіддалена від площин проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  на відстань 30 мм.

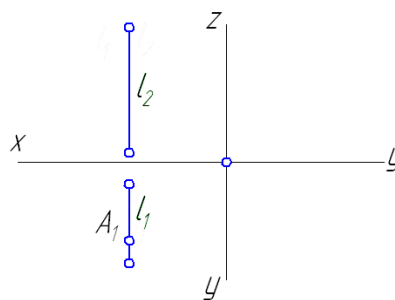
7. Побудуйте комплексне креслення прямої, заданої точками  $A(10; 20; 15)$ ,  $B(40; 10; 15)$ . Визначте її тип, довжину, сліди і кути нахилу до площин проєкцій.



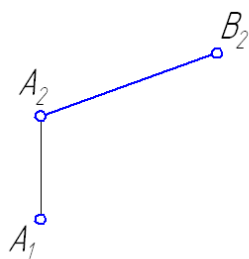
8. Побудуйте три проекції прямої  $l$ , заданої проекціями  $A_2, B_3$  її точок  $A, B$  і горизонтальним слідом  $H$ .



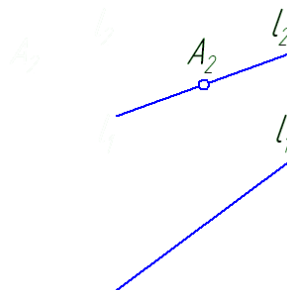
9. Побудуйте фронтальну проекцію точки  $A$ , яка належить відрізку прямої  $l$ . Скільки розв'язків має задача?



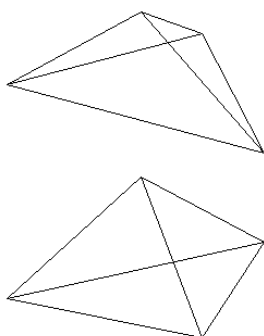
10. Побудуйте горизонтальну проекцію відрізка  $AB$ , нахиленого під кутом  $30^\circ$  до площини  $\Pi_2$ . Скільки розв'язків має задача?



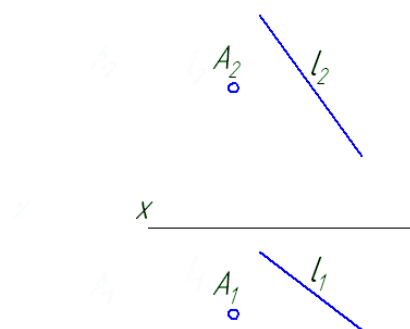
11. Побудуйте проекції горизонталі  $h$ , яка перетинає пряму  $l$  у точці  $A$  під прямим кутом.



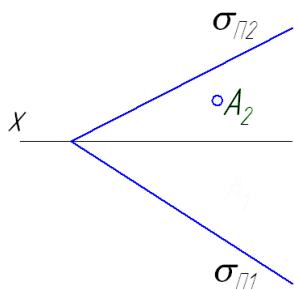
12. Визначте видимість відрізків.



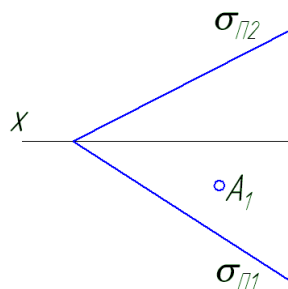
13. Визначте сліди площини, заданої точкою  $A$  і прямою  $l$ .



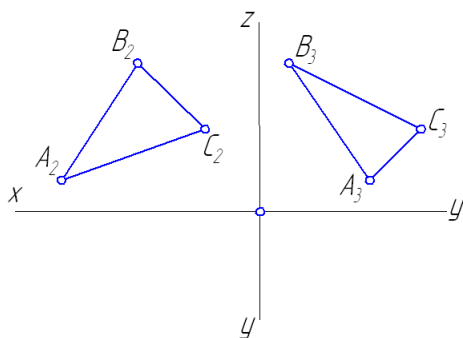
14. Побудуйте проєкції трьох ліній рівня площини  $\Sigma$ , які проходять через точку  $A$ .



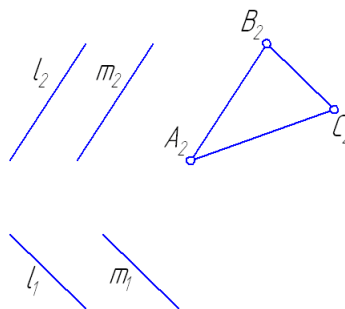
15. Із точки  $A$  площини проведіть перпендикуляр до площини  $\sigma$  і визначте кути його нахилу до площин проєкцій.



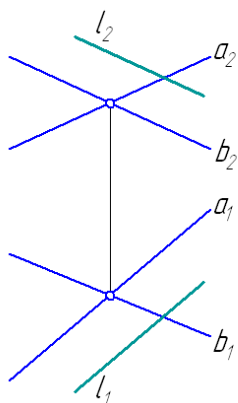
16. Побудуйте горизонтальну проєкцію прямої  $l$  площини  $ABC$ .



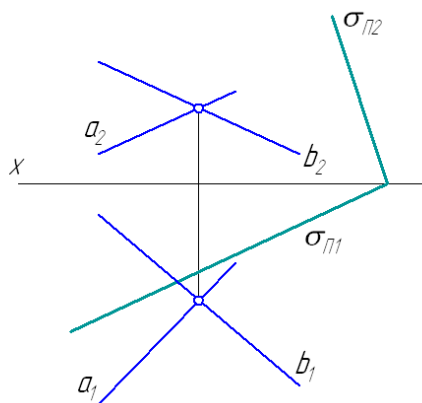
17. Побудуйте горизонтальну проєкцію трикутника  $ABC$ , який належить площині, заданій паралельними прямими  $l, m$ .



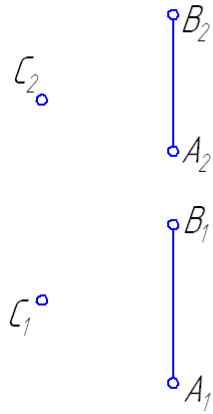
18. Визначте точку перетину прямої  $l$  із площиною, задану прямими  $a, b$ , які перетинаються.



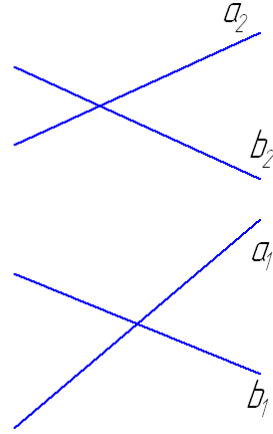
19. Визначте лінію перетину двох площин.



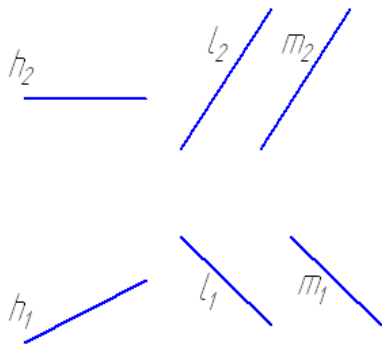
20. Знайдіть відстань від точки  $C$  до прямої  $AB$ .



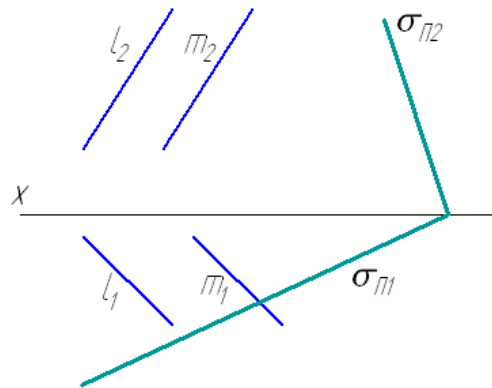
21. Знайдіть відстань між прямими  $a, b$ .



22. Знайдіть проєкції кута між горизонталлю  $h$  і площиною, заданою паралельними прямими  $l, m$ .



23. Знайдіть проєкції двогранного кута між площинами.



### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. У чому полягає процедура проєціювання точки на площину?
2. Чим відрізняються центральне і паралельне проєціювання?
3. Який вид проєціювання називається ортогональним?
4. Що називається епюром Монжа?
5. Що називається лініями проєкційного зв'язку? Як вони розміщені стосовно осей координат?
6. Яка вісь дублюється на комплексному кресленні?
7. Скількома ортогональними проєкціями однозначно визначається положення точки у просторі?
8. Поясніть поняття чверті, октанта.
9. Яким чвертям належать точки  $A(-10; 20; -30)$ ,  $B(15; -10; -10)$ ?
10. Яким октантам належать точки  $C(5; -10; 15)$ ,  $D(-5; 10; -15)$ ?
11. Чи можуть збігатися горизонтальна і фронтальна проєкції точки на комплексному кресленні?
12. Яким площинам проєкцій належать точки  $A(0; -10; 20)$ ,  $B(-20; 5; 0)$ ?
13. Яким осям координат належать точки  $C(0; -10; 0)$ ,  $D(-5; 0; 0)$ ?
14. Як з точок  $A(10; -10; 5)$ ,  $B(5; 20; -10)$  ближча до площини проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ ?
15. Як задається пряма у просторі і на комплексному кресленні?
16. Що називається прямою загального положення?
17. Наведіть класифікацію прямих особливого положення.
18. Як називається пряма, одночасно паралельна двом площинам проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_3$ ?
19. Як визначаються кути нахилу прямих рівня до площин проєкцій?
20. Опишіть алгоритм визначення профільного сліду горизонталі.
21. У чому полягає спосіб прямокутного трикутника? Для розв'язання яких задач він застосовується?
22. Сформулюйте умову належності точки прямій.
23. Сформулюйте умову паралельності двох прямих.
24. Сформулюйте правила визначення видимості точок і ліній на їх проєкціях
25. Сформулюйте теорему про проєціювання прямого кута.
26. Які існують способи подання площини?
27. Що називається слідами площини? Як вони визначаються і які властивості мають?
28. Які лінії площини називаються головними? Які їх властивості?
29. Що називається площиною загального положення?
30. Як називається площина, одночасно перпендикулярна до двох площин  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ ?
31. Які задачі нарисної геометрії називаються позиційними?
32. Сформулюйте умову належності точки і прямої площині.
33. Сформулюйте умову тотожності двох площин.
34. Сформулюйте умову збігу прямої і площини, двох площин.
35. Опишіть спосіб визначення точки перетину прямої і площини.
36. Опишіть способи визначення лінії перетину двох площин.
37. Які задачі нарисної геометрії називаються метричними?
38. Опишіть способи визначення відстані від точки до прямої і площини особливого положення.
39. Опишіть способи визначення відстані від точки до прямої і площини загального положення.
40. Які існують способи визначення відстані між мимобіжними прямими?
41. Яку властивість має кут між прямою і площиною. Як визначаються його проєкції?
42. Що називається двограним кутом? Яку властивість він має? Якими способами визначаються проєкції двогранного кута?

## РОЗДІЛ 2

### СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

---

#### 2.1 СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

##### 2.1.1 ПРОЕЦІЮВАННЯ ТОЧКИ НА ДОПОМІЖНУ ПЛОЩИНУ ПРОЕКЦІЙ

Метричні задачі нарисної геометрії пов'язані з визначенням натуральних величин геометричних об'єктів. Ці величини неможливо побудувати на жодній із площин проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  для довільної орієнтації об'єктів у просторі: проєкції відрізків є коротшими за їх оригінали; проєкції плоских фігур мають спотворену форму і меншу площу; проєкції кутів, у тому числі прямих, не дорівнюють дійсним їх значенням (рис. 2.1).

При розв'язанні позиційних задач прямим способом доводиться вводити множину допоміжних геометричних фігур, що призводить до громіздкості геометричних побудов. Наприклад, для визначення лінії перетину двох площин необхідно вводити допоміжні площини особливого положення; для побудови двох взаємно перпендикулярних прямих необхідно вводити площину загального положення тощо (див. розділ 1). Це ускладнює розв'язання практичних задач і читання комплексного креслення.

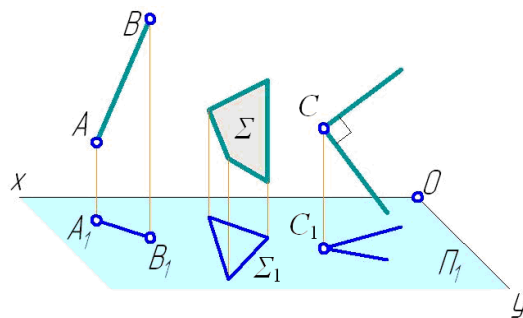


Рисунок 2.1 – Проеціювання геометричних об'єктів

Для усунення вищезазначених проблем застосовуються *способи перетворення комплексного креслення*. Одна група цих способів пов'язана зі зміною орієнтації площин проєкцій щодо даних об'єктів, друга – зі зміною орієнтації геометричних об'єктів стосовно фіксованих площин проєкцій, третя – зі зміною способу проєціювання. До першої групи належать такі способи:

- а) спосіб заміни площин проєкцій;
  - б) спосіб прямокутного аксонометричного проєціювання (див. п. 6.4),
- до другої:
- в) спосіб обертання навколо проєціювальної осі (див. п. 2.2);
  - г) спосіб плоскопаралельного переміщення (див. п. 2.3);
  - д) способи обертання навколо лінії рівня (див. п. 2.4),
- до третьої:
- е) спосіб косокутного проєціювання (див. п. 2.5).

Усі вищезазначені способи застосовуються для переведення геометричних об'єктів із загального положення в особливе (положення рівня або проєціювальне положення) з метою встановлення їх взаємного розташування або для визначення натуральних величин.

*Суть способу заміни площин проєкцій*

Спосіб заміни площин проєкцій полягає у введенні системи додаткових площин особливого положення  $\Pi_4, \Pi_5, \dots$ , паралельних або перпендикулярних до елементів заданих геометричних об'єктів (площин або плоскій ліній) із подальшим проєцюванням на ці площини (рис. 2.2 а, в, д) і суміщенням  $\Pi_4, \Pi_5, \dots$  до однієї площини (рис. 2.2 б, г, е).

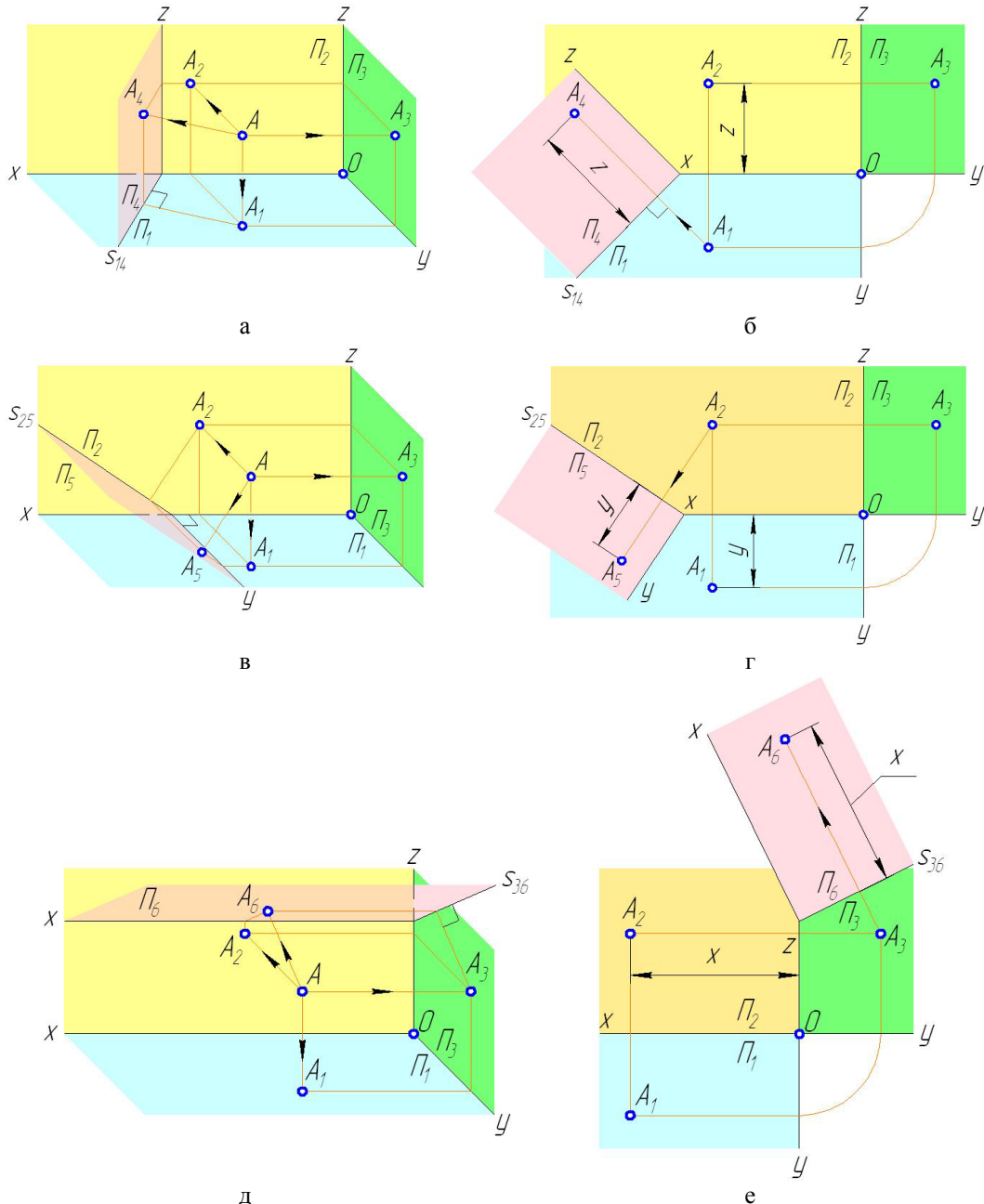


Рисунок 2.2 – Спосіб заміни площин проєкцій

На рис. 2.2 а – б побудовані чотири ортогональні проєкції точки  $A$  на площини проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ . Площина  $\Pi_4$  є горизонтально-проєціювальною. Її горизонтальний слід  $s_{14}$  є однією з осей допоміжної системи координат. Нижній індекс «14» свідчить про те, що пряма  $s_{14}$  є лінією перетину площин  $\Pi_1, \Pi_4$ . Інша вісь – фронтальний слід – за напрямом збігається з віссю  $z$ .

На рис. 2.2 в – г побудовані чотири ортогональні проєкції точки  $A$  на площини проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_5$ . Площина  $\Pi_5$  є фронтально-проєціювальною. Її фронтальний слід  $s_{25}$  є однією з осей допоміжної системи координат. Нижній індекс «25» свідчить про те, що пряма  $s_{25}$  є лінією перетину площин  $\Pi_2, \Pi_5$ . Інша вісь – горизонтальний слід – за напрямом збігається з віссю  $y$ .

На рис. 2.2 д – е побудовані чотири ортогональні проєкції точки  $A$  на площини проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_6$ . Площина  $\Pi_6$  є профільно-проєціювальною. Її профільний слід  $s_{36}$  є однією з осей допоміжної системи координат. Нижній індекс «36» свідчить про те, що пряма  $s_{36}$  є лінією перетину площин  $\Pi_3, \Pi_6$ . Інша вісь – фронтальний слід – за напрямом збігається з віссю  $x$ .

*Правила проєціювання на допоміжні площини проєкцій:*

а) проєкція  $A_4$  точки  $A$  на горизонтально-проєціювальну площину  $\Pi_4$  знаходиться на лінії проєкційного зв'язку  $A_1A_4$ , перпендикулярній до осі  $s_{14}$ , і зберігає висоту (координату  $z$ );

б) проєкція  $A_5$  точки  $A$  на фронтально-проєціювальну площину  $\Pi_5$  знаходиться на лінії проєкційного зв'язку  $A_2A_5$ , перпендикулярній до осі  $s_{25}$ , і зберігає глибину (координату  $y$ );

а) проєкція  $A_6$  точки  $A$  на профільно-проєціювальну площину  $\Pi_6$  знаходиться на лінії проєкційного зв'язку  $A_3A_6$ , перпендикулярній до осі  $s_{36}$ , і зберігає ширину (координату  $x$ ).

### 2.1.2 ДОВЖИНА ВІДРІЗКА І КУТИ ЙОГО НАХИЛУ ДО ПЛОЩИН ПРОЄКЦІЙ

Довжини проєкцій відрізка  $AB$  прямої загального положення на площини проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  менші за дійсну довжину відрізка. Лише прямі особливого положення проєціюються принаймні на одну з площин проєкцій у натуральну величину.

Для визначення натуральної величини відрізка  $AB$  способом заміни площин проєкцій необхідно ввести площину  $\Pi_4$ , паралельну цьому відрізку. Проєкція  $A_4B_4$  є натуральною величиною (рис. 2.3 а). Кут  $\alpha$  нахилу відрізка  $AB$  до площини  $\Pi_1$  дорівнює куту нахилу проєкції  $A_4B_4$  до осі  $s_{14}$ .

На рис. 2.3 б задані горизонтальна і фронтальна проєкції відрізка  $AB$ . Для визначення натуральної величини відрізка і кута його нахилу до площини  $\Pi_1$  вводиться допоміжна горизонтально-проєціювальна площина  $\Pi_4$ , паралельна відрізку  $AB$  (вісь  $s_{14}$  паралельна проєкції  $A_1B_1$ ). За допомогою ліній проєкційного зв'язку і за координатами  $z_A, z_B$  кінців відрізка визначається проєкція  $A_4B_4$ , що є натуральною величиною  $AB$ .

Аналогічно можна визначити натуральну величину відрізка шляхом введення додаткової фронтально- або профільно-проєціювальної площини  $\Pi_5, \Pi_6$ . У цьому випадку можна визначити кути  $\beta, \gamma$  нахилу відрізка до  $\Pi_2, \Pi_3$  (рис. 2.3 в – г).

Необхідно зазначити, що відстань від відрізка до додаткової площини проєкцій обирається довільно. У п. 1.4.4 викладено спосіб прямокутного трикутника для визначення натуральної величини відрізка. Цей спосіб є окремим випадком способу заміни площин проєкцій, у якому відрізок належить допоміжній площині проєкцій (відстань від відрізка до допоміжної площини проєкцій дорівнює нулю).

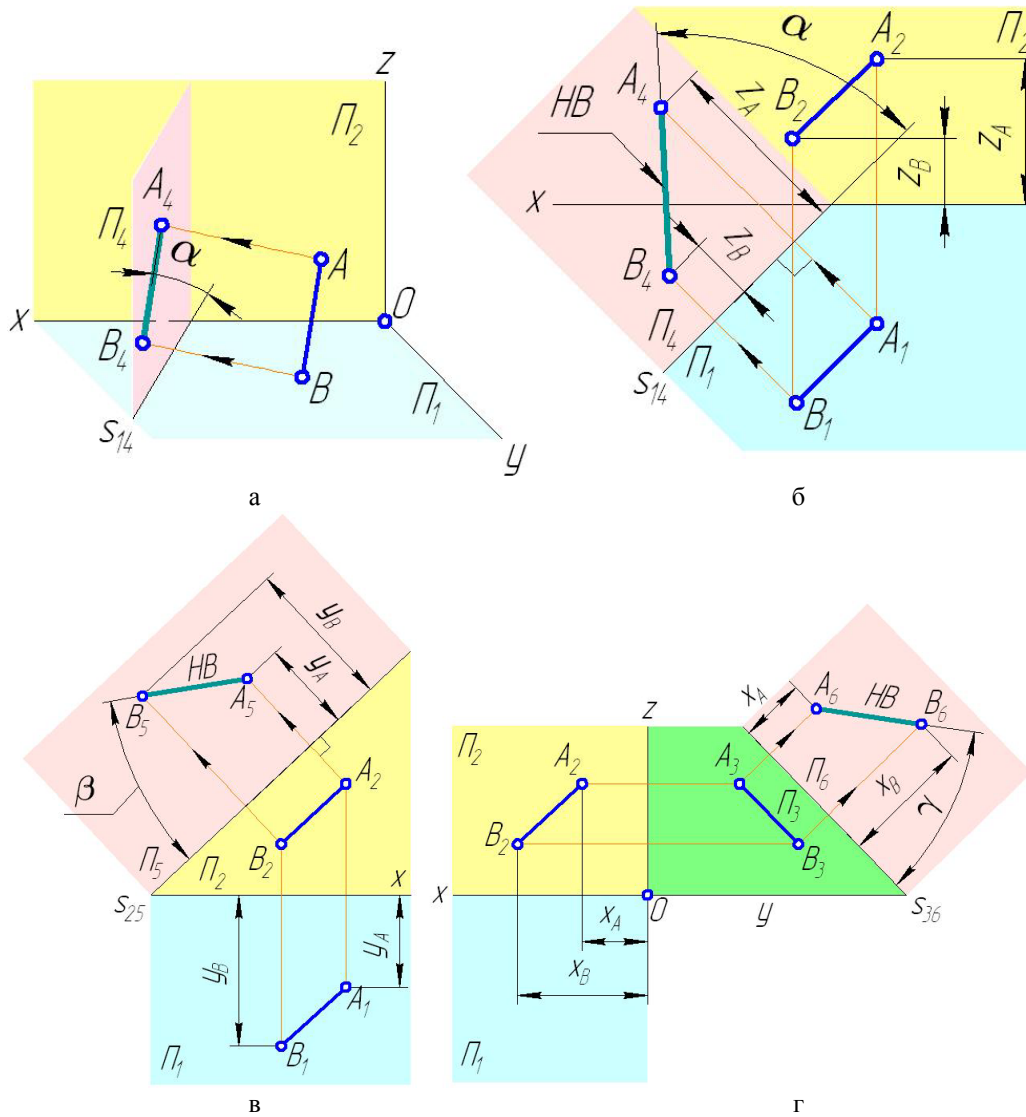


Рисунок 2.3 – Визначення натуральної величини відрізка і кутів його нахилу до площин проєкцій

### 2.1.3 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Для визначення відстані від точки  $D$  до прямої  $l$  загального положення (рис. 2.4 а) необхідно ввести допоміжну площину проєкцій  $\Pi_4$ , паралельну прямій (вісь  $s_{14}$  паралельна проєкції  $l_1$ ), і знайти проєкції  $D_4, l_4$ . У такому випадку пряма  $l$  займає положення рівня стосовно  $\Pi_4$ . При подальшому введенні допоміжної площини проєкцій  $\Pi_5$ , перпендикулярній прямій  $l$  (вісь  $s_{45}$  перпендикулярна до проєкції  $l_4$ ), остання проєціюється у точку  $l_5$ , оскільки пряма  $l$  займає проєціювальне положення стосовно  $\Pi_5$ . Проєкції геометричних об'єктів на площину  $\Pi_5$  будуються за координатами, які визначаються із системи площин  $\Pi_1, \Pi_4$ . Наприклад, відстань  $h$  від осі  $s_{45}$  до  $D_5$  дорівнює відстані від осі  $s_{14}$  до  $D_1$ . Довжина відрізка  $D_5l_5$  дорівнює відстані від точки  $D$  до прямої  $l$ .



Необхідно зазначити, що площину  $\Pi_5$  не можна вводити одразу (без застосування  $\Pi_4$ ), оскільки вона займає особливе положення лише у системі площин  $\Pi_4, \Pi_5$ , а в системі  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  – загальне.

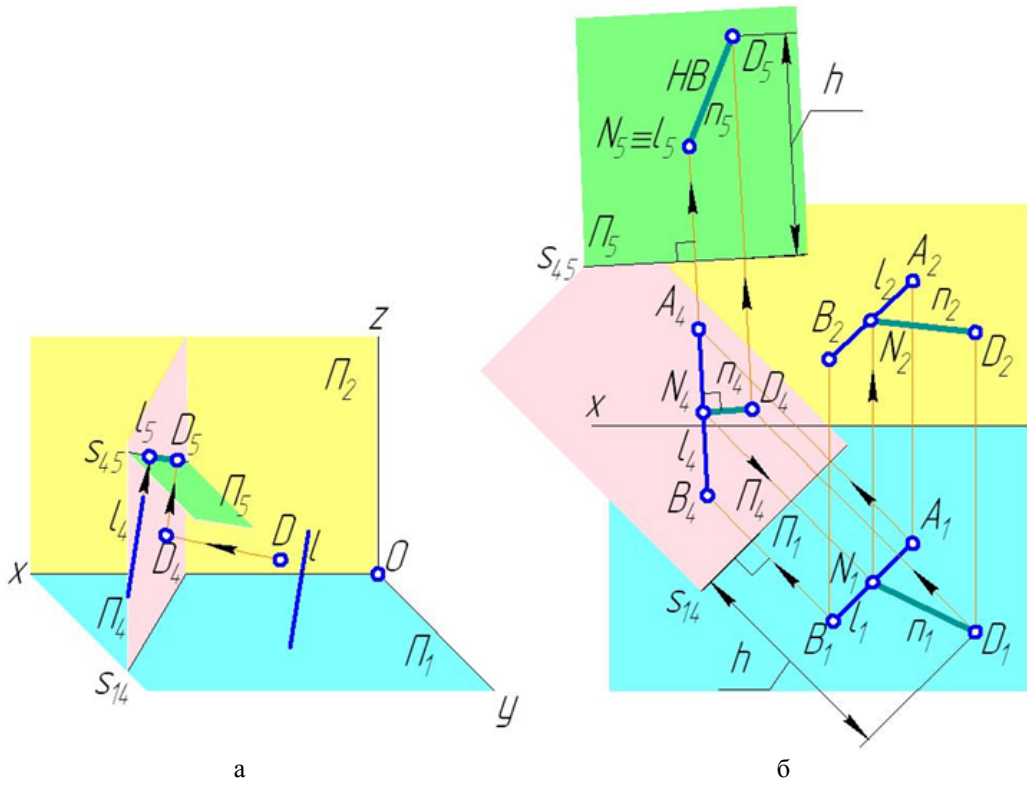


Рисунок 2.4 – Визначення відстані від точки до прямої

На рис. 2.4 б пряма  $l$  задана відрізком  $AB$ . Відрізок  $DN$  належить прямій  $n$ , перпендикулярній до  $l$ . Пряма  $n$  займає положення рівня стосовно  $\Pi_5$  (проекція  $D_4N_4$  паралельна осі  $s_{45}$ ). Точка  $N$  (основа перпендикуляра) є точкою перетину двох взаємно перпендикулярних прямих  $n, l$ . Таким чином, задачу про визначення відстані від точки  $D$  до прямої  $l$  способом заміни площин проєкцій можна доповнити задачею про побудову двох взаємно перпендикулярних прямих  $l, n$ , які перетинаються у точці  $N$ .

Для визначення відстані від точки  $D$  до площини  $\Sigma$  загального положення (рис. 2.5 а) необхідно перевести площину  $\Sigma$  у проєціювальне положення шляхом введення допоміжної площини проєкцій  $\Pi_4$ , перпендикулярної до  $\Sigma$  (вісь  $s_{14}$  перпендикулярна до однієї з ліній рівня площини). У цьому випадку площина  $\Sigma$  проєціюється у пряму  $\Sigma_4$ , а шукана відстань є довжиною перпендикуляра  $D_4N_4$ , проведеного з точки  $D_4$  до прямої  $\Sigma_4$ . Точка  $N$  є основою перпендикуляра і водночас точкою перетину прямої  $n$ , заданої відрізком  $DN$ , із площиною  $\Sigma$ .

На рис. 2.5 б площина  $\Sigma$  задана трикутником  $ABC$ . Його горизонтальна пряма рівня  $h$ , задана двома точками  $A$  і  $1$ , проєціюється на перпендикулярну до неї площину  $\Pi_4$  у точку  $h_4$ . Проекція  $A_4B_4C_4$  трикутника є відрізком, нахиленим під кутом  $\alpha$  до осі  $s_{14}$ . Цей кут дорівнює куту нахилу площини  $\Sigma$  до  $\Pi_1$ . Відстань від точки  $D$  до площини  $ABC$  дорівнює довжині відрізка  $D_4N_4$ . Горизонтальна проєкція  $D_1N_1$  паралельна осі  $s_{14}$  і перпендикулярна до горизонтальної проєкції  $h_1$  горизонталі.

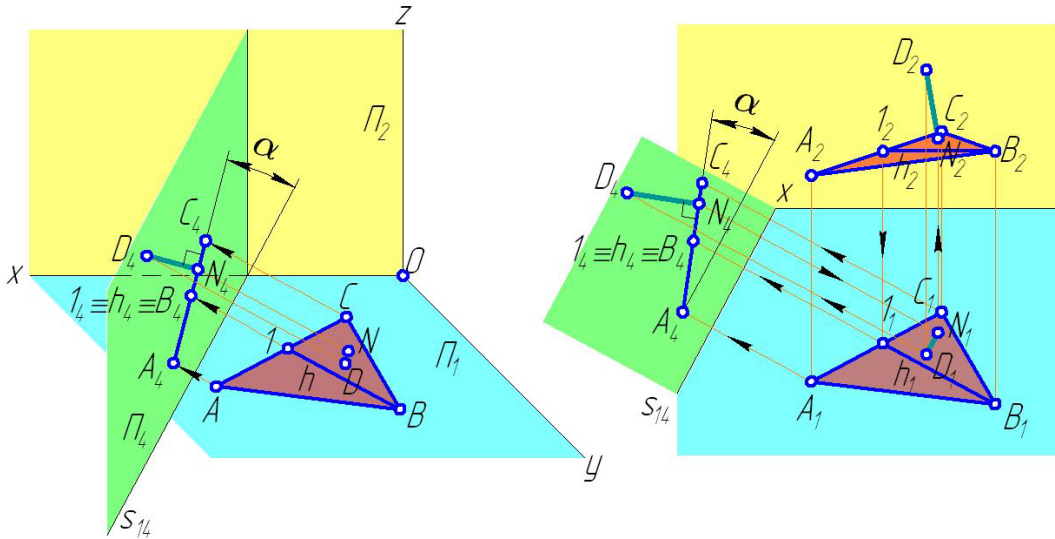


Рисунок 2.5 – Визначення відстані від точки до площини

#### 2.1.4 ВІДСТАНЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПРЯМИМИ, ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ, ДВОМА ПЛОЩИНАМИ

Для визначення відстані між паралельними прямими  $l, m$  способом заміни площин проєкцій (рис. 2.6 а) вводиться система двох допоміжних площин проєкцій  $\Pi_4, \Pi_5$ . Перша з них паралельна заданим прямим, друга – їм перпендикулярна. На площину  $\Pi_4$  прямі проєціюються у натуральні величини, на  $\Pi_5$  – у точки  $l_5, m_5$ . Довжина відрізка  $l_5m_5$  дорівнює відстані між паралельними прямими  $l, m$ .

На рис. 2.6 б прямі  $l, m$  задані відрізками  $AB, CD$ . Відрізок  $NN'$  належить прямій  $n$ , перпендикулярній до прямих  $l, m$ . Пряма  $n$  займає положення рівня стосовно  $\Pi_5$  (проєкція  $N_4N'_4$  паралельна осі  $s_{45}$ ). Довжина відрізка  $NN'$  дорівнює відстані між паралельними прямими  $l, m$ .

Для визначення відстані між паралельною прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  (рис. 2.7 а) вводиться допоміжна площина проєкцій  $\Pi_4$ , перпендикулярна до  $\Sigma$  (вісь  $s_{14}$  перпендикулярна до однієї з ліній рівня площини). Шукана відстань є довжиною відрізка  $N_4N'_4$ , перпендикулярного до проєкцій  $l_4, \Sigma_4$ .

На рис. 2.7 б площина  $\Sigma$  задана трикутником  $ABC$ . Його горизонтальна пряма рівня  $h$ , задана двома точками  $A, 1$ , проєціюється на перпендикулярну до неї площину  $\Pi_4$  у точку  $h_4$ . Проєкція  $A_4B_4C_4$  трикутника є відрізком прямої. Відстань від прямої  $l$  до площини  $ABC$  дорівнює довжині відрізка  $N_4N'_4$ . Горизонтальна проєкція  $N_1N'_1$  паралельна осі  $s_{14}$  і перпендикулярна до горизонтальної проєкції  $h_1$  горизонталі.

Для визначення відстані між паралельними площинами  $\Sigma, \Omega$  (рис. 2.8 а) вводиться допоміжна площина проєкцій  $\Pi_4$ , перпендикулярна до цих площин (вісь  $s_{14}$  перпендикулярна до ліній рівня однієї з площин). Шукана відстань є довжиною відрізка  $N_4N'_4$ , перпендикулярного до проєкцій  $\Sigma_4, \Omega_4$ .

На рис. 2.8 б площини  $\Sigma, \Omega$  задані своїми горизонтальними і фронтальними слідами. Фронтальний слід  $\sigma_{\Pi_2}$  площини  $\Sigma$  проєціюється на її перпендикулярну площину  $\Pi_4$  у точку  $\sigma_s$ . Проєкції  $\Sigma_4, \Omega_4$  площин є прямими – слідами  $\sigma_{\Pi_4}, \omega_{\Pi_4}$ , побудованими за допомогою допоміжних точок 1, 2. Відстань між площинами дорівнює довжині відрізка  $N_4N'_4$ .

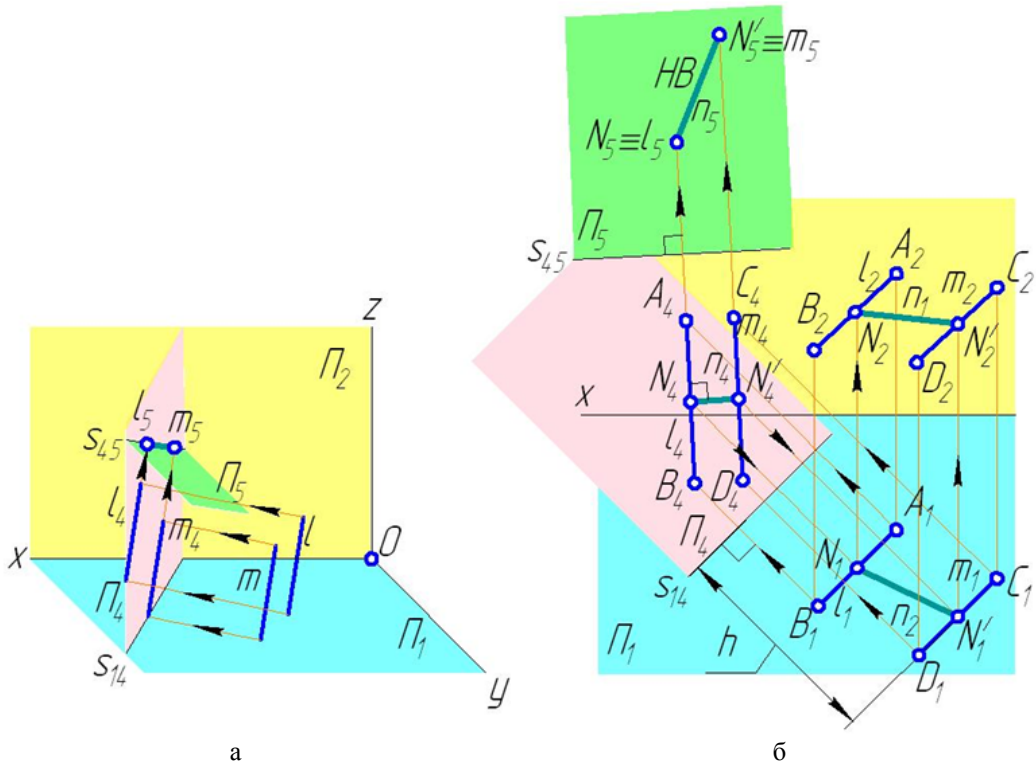


Рисунок 2.6 – Визначення відстані між паралельними прямими

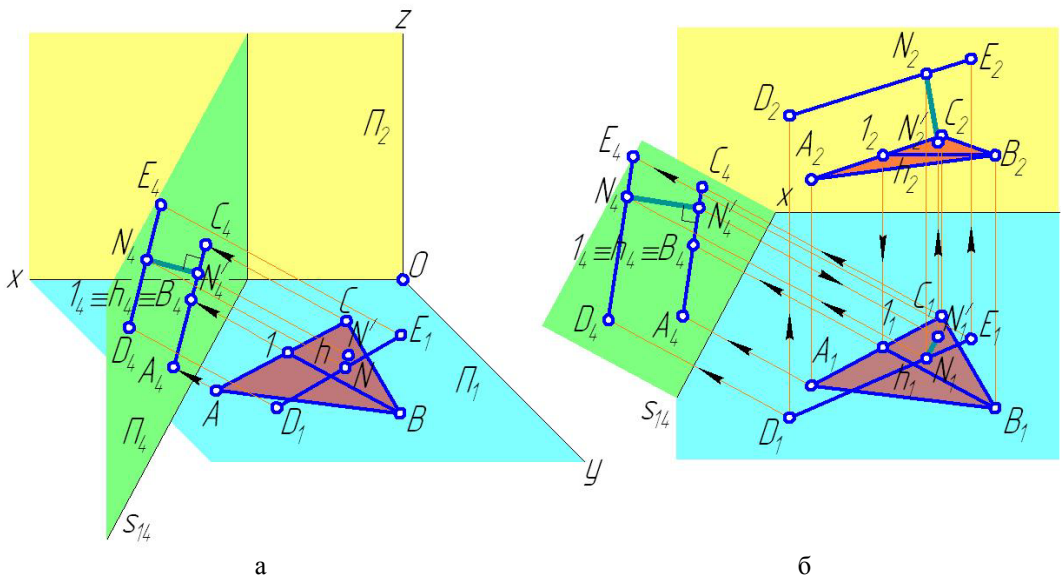


Рисунок 2.7 – Визначення відстані між паралельною прямою і площиною

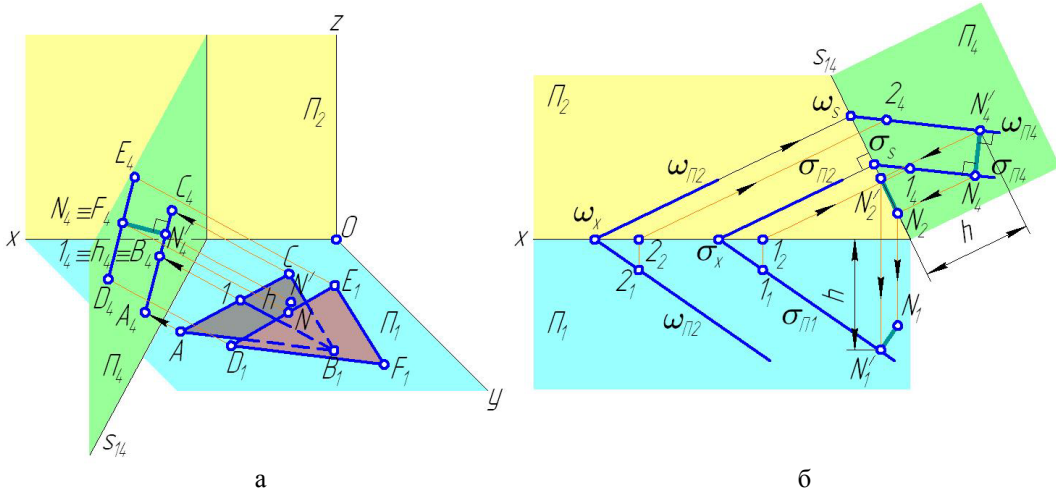


Рисунок 2.8 – Визначення відстані між паралельними площинами

### 2.1.5 ВІДСТАНЬ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Для визначення відстані між мимобіжними прямими  $l$ ,  $m$  способом заміни площин проєкції (рис. 2.9) вводиться система двох допоміжних площин проєкції  $\Pi_4$ ,  $\Pi_5$ . Перша з них паралельна одній із заданих прямих (наприклад,  $l$ ), друга – перпендикулярна до цієї прямої. На площину  $\Pi_4$  пряма  $l$  проєціюється у натуральну величину, на  $\Pi_5$  – у точку. Довжина відрізка  $l_5N_5$  дорівнює відстані між мимобіжними прямими  $l$ ,  $m$ .

На рис. 2.9 прямі  $l$ ,  $m$  задані відрізками  $AB$ ,  $CD$ . Відрізок  $NN'$  перпендикулярний до прямих  $l$ ,  $m$  і займає положення рівня стосовно  $\Pi_5$  (проєкція  $N_4N_4'$  паралельна осі  $s_{45}$ ). Довжина відрізка  $NN'$  дорівнює відстані між мимобіжними прямими  $l$ ,  $m$ .

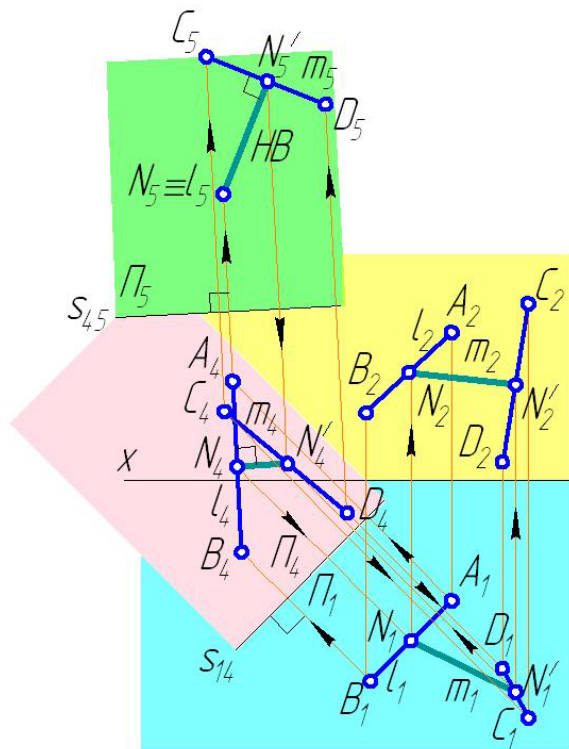


Рисунок 2.9 – Визначення відстані між мимобіжними прямими

### 2.1.6 КУТ МІЖ ПРЯМИМИ, ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ, ДВОМА ПЛОЩИНАМИ

Натуральну величину кутів між прямими, прямою і площиною, двома площинами неможливо визначити графічно за їх проєкціями без застосування способів перетворення комплексного креслення.

Для визначення *плоского кута*  $\chi$  між прямими  $l, m$ , які перетинаються в точці  $K$ , способом заміни площин проєкцій необхідно спроеціювати цей кут у натуральну величину. Потрібно ввести систему двох допоміжних площин проєкцій  $\Pi_4, \Pi_5$ . Перша має бути перпендикулярною площині  $\Sigma$ , утвореній даними прямими, друга – паралельна  $\Sigma$ .

На рис. 2.10 прямі  $l, m$  задані відрізками  $AB, CD$ . Площина  $\Pi_4$  перпендикулярна до фронталі  $f$  (площини  $\Sigma$ ), проведеної через точки  $C, 1$ . Проекція  $\Sigma_4$  є відрізком прямої лінії. Площина  $\Pi_5$  паралельна площині  $\Sigma$  (проекція  $\Sigma_5$  паралельна осі  $s_{45}$ ).

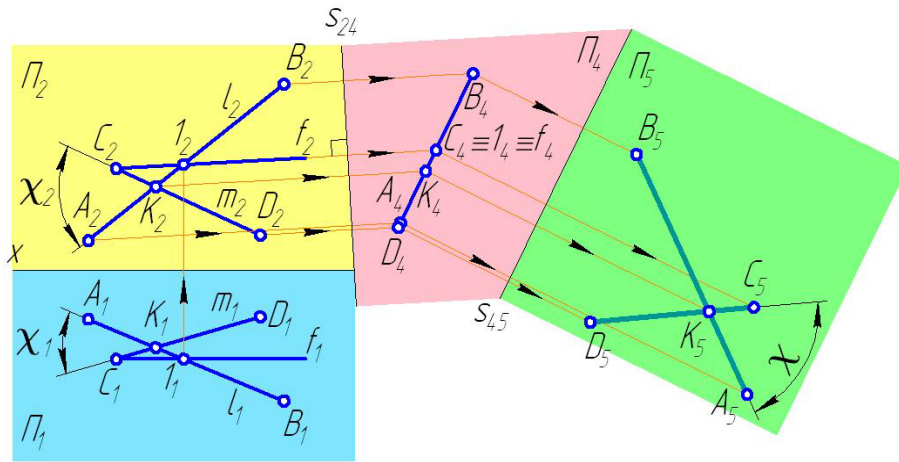
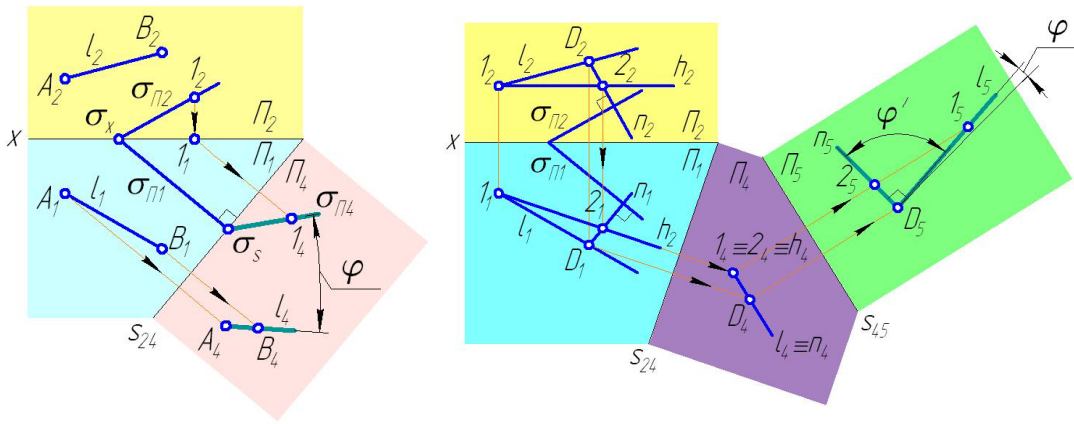


Рисунок 2.10 – Визначення плоского кута

Кут  $\varphi$  між прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  визначається за допомогою введення допоміжної площини проєкцій  $\Pi_4$ , перпендикулярній до заданої площини (рис. 2.11 а). Таким чином, задача про визначення кута  $\varphi$  між прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  зводиться до задачі про визначення кута між проєкцією  $l_4$  прямої і слідом  $\Sigma_4$  площини.

Кут  $\varphi$  між прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  також визначається (рис. 2.11 б) за допомогою допоміжного кута  $\varphi'$  між даною прямою і прямою  $n$ , що проходить через довільну точку  $D$  прямої  $l$  перпендикулярно до площини  $\Sigma$  (див. п. 1.6.3, рис. 1.69). Таким чином, задача про визначення кута  $\varphi$  між прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  зводиться до задачі про визначення допоміжного кута  $\varphi'$  між двома прямими (див. рис. 2.10). З проєкцій  $D_1, D_2$  довільної точки прямої  $l$  проведені проєкції  $n_1, n_2$ , перпендикулярні до відповідних слідів площини  $\Sigma$ . За допомогою допоміжної площини проєкцій  $\Pi_4$ , перпендикулярної до площини  $\Omega$ , утвореної прямими  $n, l$  (вісь  $s_{24}$  перпендикулярна проєкції  $h_1$  площини  $\Omega$ ), остання проєціюється у пряму лінію  $l_4$ . Після введення площини проєкцій  $\Pi_5$ , паралельної площині  $\Omega$  (вісь  $s_{45}$  паралельна сліду  $l_4$ ), визначається натуральна величина допоміжного кута  $\varphi'$ . Шуканий кут  $\varphi$  доповнює допоміжний кут  $\varphi'$  до  $90^\circ$ .



а б  
Рисунок 2.11 – Визначення кута між прямою і площиною

Існують два способи визначення кута  $\theta$  між двома площинами  $\Sigma, \Omega$  (див. п. 1.6.3). *Прямий спосіб* реалізується, у тому числі, за допомогою способу заміни площин проєкцій.

На рис. 2.12 площини  $\Sigma, \Omega$  задані трикутником  $ABC$  і паралельними прямими  $a, b$ . Пряма  $k$  є лінією перетину площин (див. п. 1.5.8, рис. 1.42). За допомогою допоміжної площини проєкцій  $\Pi_4$ , паралельній прямій  $k$ , остання переведена у положення рівня. Введення площини проєкцій  $\Pi_5$ , перпендикулярної до прямої  $k$ , дозволяє визначити кут  $\theta$  між заданими площинами.

За *непрямим способом* кут  $\theta$  між площинами  $\Sigma, \Omega$  дорівнює куту  $\theta'$  між прямими  $n, n'$ , які перетинаються у довільній точці простору і перпендикулярні відповідно до площин  $\Sigma, \Omega$  (див. п. 1.6.3, рис. 1.70).

На рис. 2.13 площини  $\Sigma, \Omega$  задані своїми горизонтальними і фронтальними слідами. З проєкцій  $D_1, D_2$  довільної точки простору проведені прямі  $n_1, n'_1$  і  $n_2, n'_2$ , перпендикулярні до відповідних слідів площин.

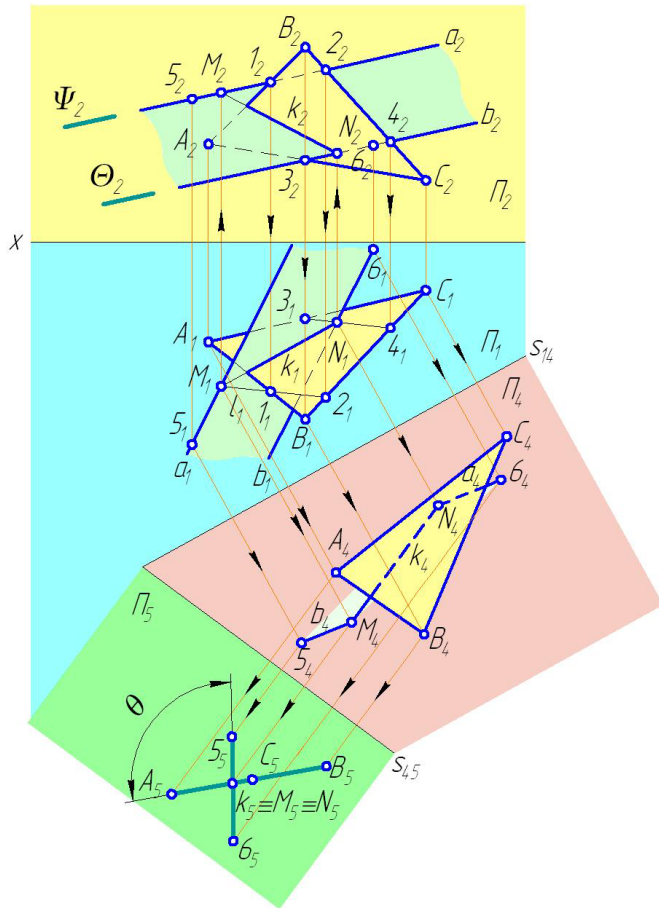


Рисунок 2.12 – Прямий спосіб визначення двогранного кута

За допомогою допоміжної площини проєкцій  $\Pi_4$ , перпендикулярної допоміжній площині  $\Psi$ , заданій прямими  $n, n'$ , площина  $\Psi$  переведена у проєціювальне положення. Після введення площини проєкцій  $\Pi_5$ , паралельної площині  $\Psi$ , визначається кут  $\theta'$ , числове значення якого збігається з шуканим кутом  $\theta$ .

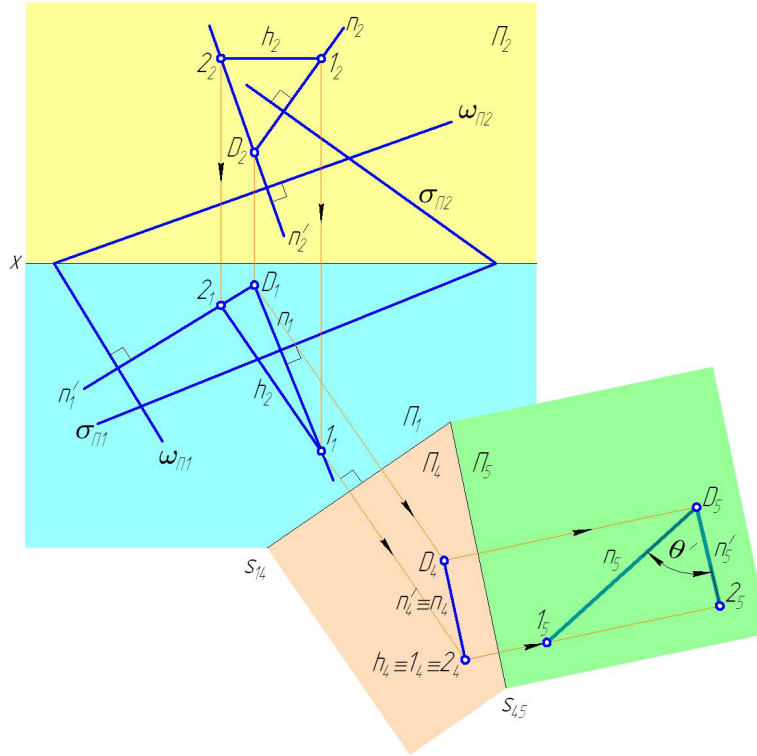


Рисунок 2.13 – Непрямий спосіб визначення двогранного кута

### 2.1.7 НАТУРАЛЬНА ВЕЛИЧИНА ПЛОСКОЇ ФІГУРИ

Натуральна величина плоскої фігури визначається як без застосування способів перетворення комплексного креслення, так і з їх застосуванням.

На рис. 2.14 показано спосіб визначення натуральної величини трикутника  $ABC$  способом прямокутного трикутника (див. п. 1.4.4). Попередньо визначаються натуральні величини сторін  $AB, BC, AC$ . На їх основі будується трикутник  $A_0B_0C_0$ , який тотожний натуральній величині трикутника  $ABC$ .

Для визначення натуральної величини плоскої фігури  $\Phi$  способом заміни площин проєкцій (рис. 2.15 а) необхідно ввести по черзі площину  $\Pi_4$ , перпендикулярну до  $\Phi$ , і  $\Pi_5$ , паралельну  $\Phi$  (вісь  $s_{45}$  паралельна сліду плоскої фігури на площині  $\Pi_4$ ). Проекція  $\Phi_5$  є натуральною величиною фігури  $\Phi$ .

На рис. 2.15 б плоска фігура є трикутником  $ABC$ . Вісь  $s_{24}$  допоміжної системи площин  $\Pi_1, \Pi_4$  перпендикулярна до фронтальної проєкції фронталі  $f$  трикутника. Проекція  $A_4B_4C_4$  є відрізком прямої лінії. Вісь  $s_{45}$  допоміжної системи площин  $\Pi_4, \Pi_5$  паралельна проєкції  $A_4B_4C_4$ . Проекція  $A_5B_5C_5$  є натуральною величиною трикутника  $ABC$ .

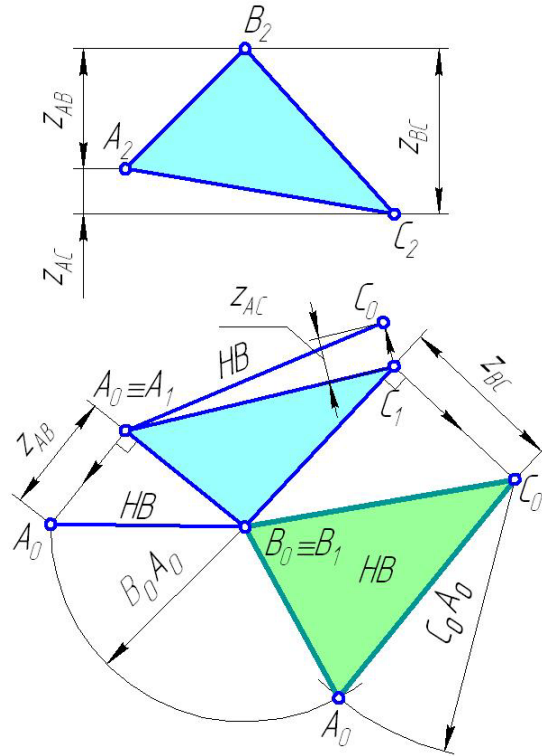


Рисунок 2.14 – Визначення натуральної величини плоскої фігури способом прямокутного трикутника

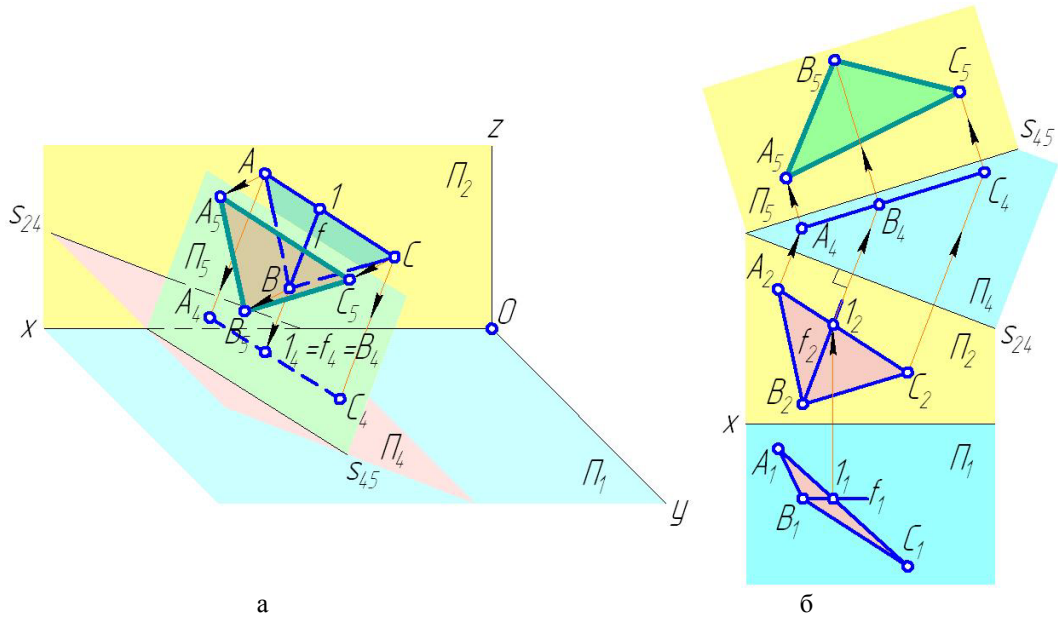


Рисунок 2.15 – Визначення натуральної величини плоскої фігури способом заміни площин проєкцій



### 2.1.8 ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ, ДВОХ ПЛОЩИН

У п. 1.5.7 викладено спосіб визначення точки  $K$  перетину прямої  $l$  і площини  $\Sigma$  за допомогою допоміжної площини  $\Omega$  особливого положення (рис. 1.38).

Для визначення точки  $K$  перетину прямої  $l$  і площини  $\Sigma$  способом заміни площин проєкцій (рис. 2.16) вводиться допоміжна площина  $\Pi_4$ , перпендикулярна до площини  $\Sigma$ . На  $\Pi_4$  остання проєціюється у пряму  $\Sigma_4$ . Точка  $K_4$  перетину  $\Sigma_4$ ,  $l_4$  дозволяє визначити горизонтальну і фронтальну проєкції точки  $K$  перетину прямої  $l$  із площиною  $\Sigma$ .

На рис. 2.16 площина  $\Sigma$  задана трикутником  $ABC$ , пряма  $l$  – точками 2, 3. У площині побудована фронталь  $f$ , до якої перпендикулярна допоміжна площина проєкцій  $\Pi_4$ . Точка  $K$  перетину прямої і площини має проєкцію  $K_4$ , яка є точкою перетину відрізків  $A_4B_4C_4$ ,  $2_43_4$ .

У п. 1.5.8 викладені три способи визначення лінії перетину двох площин (рис. 1.42 – 1.46), не пов'язані із перетвореннями комплексного креслення.

Для визначення лінії перетину двох площин  $\Sigma$ ,  $\Omega$  способом заміни площин проєкцій (рис. 2.17) вводиться допоміжна площина  $\Pi_4$ , перпендикулярна до площини  $\Sigma$ , на яку остання проєціюється у пряму  $\Sigma_4$ . Пряма  $M_4N_4$  перетину  $\Sigma_4$ ,  $\Omega_4$  дозволяє визначити горизонтальну і фронтальну проєкції лінії перетину даних площин.

На рис. 2.17 площини  $\Sigma$ ,  $\Omega$  задані трикутниками  $ABC$ ,  $DEF$ . У першому проведена фронталь  $f$ , до якої перпендикулярна допоміжна площина проєкцій  $\Pi_4$ . Лінія перетину площин  $ABC$ ,  $DEF$  має проєкцію  $M_4N_4$ , що належить проєкції  $A_4B_4C_4$ .

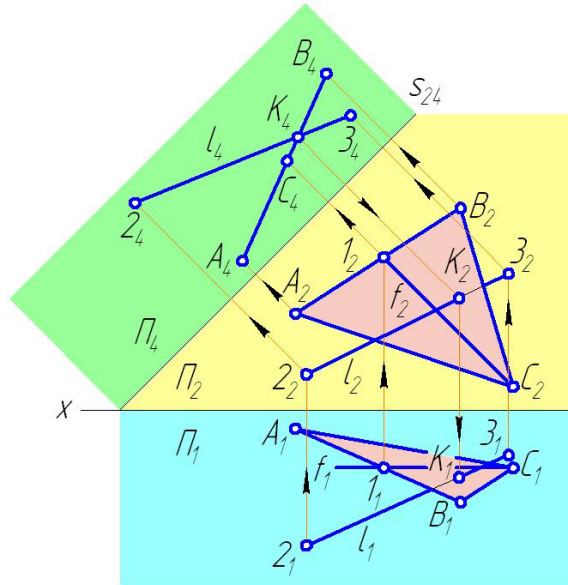


Рисунок 2.16 – Визначення точки перетину прямої і площини

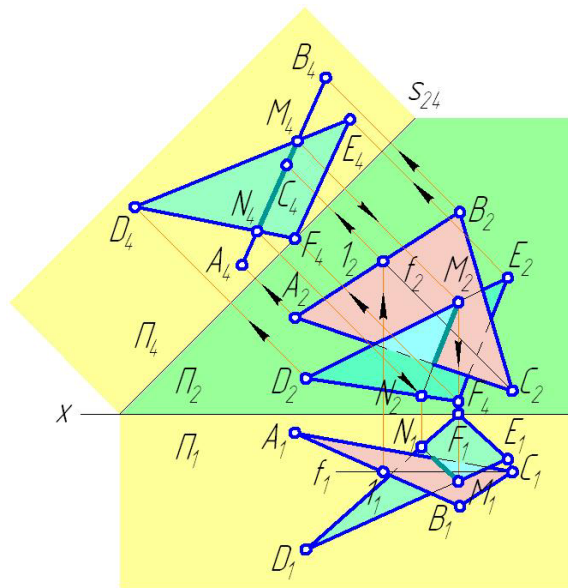


Рисунок 2.17 – Визначення лінії перетину площин

## 2.2 СПОСІБ ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ПРОЄЦІОВАЛЬНОЇ ОСІ

### 2.2.1 ОБЕРТАННЯ ТОЧКИ НАВКОЛО ПРОЄЦІОВАЛЬНОЇ ОСІ

Спосіб обертання навколо проєціювальної осі є одним із способів перетворення комплексного креслення, в якому геометричний об'єкт обертається навколо проєціювальної осі до того часу, поки не займе особливого положення (рис. 2.18).

Оскільки будь-який геометричний об'єкт є сукупністю точок у просторі, для його обертання навколо осі необхідно вміти обертати кожну точку.

На рис. 2.19 показано комплексне креслення точки  $A$  до і після обертання навколо осей  $i, j$  відповідно на кути  $\alpha, \beta$ .

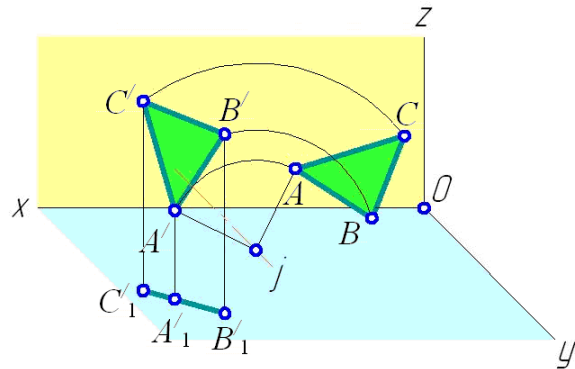


Рисунок 2.18 – Обертання навколо проєціювальної осі

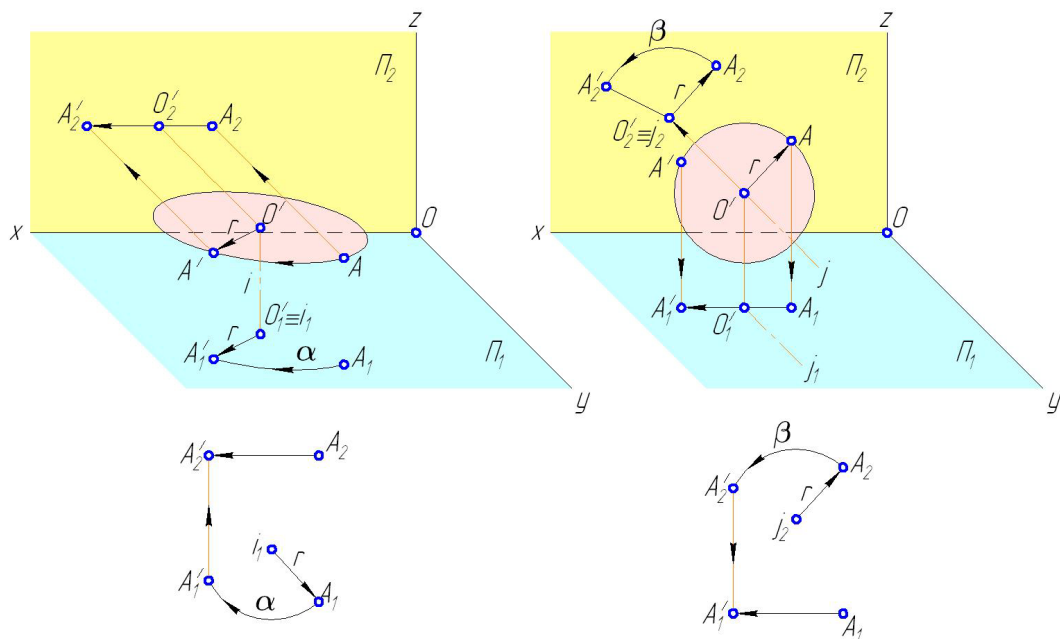


Рисунок 2.19 – Реалізація способу обертання навколо проєціювальної осі

- Для обертання точки  $A$  навколо проєціювальної осі необхідно знати:
- вісь обертання – пряма лінія, яка не змінює свого положення у просторі під час обертального руху точки;
  - центр обертання – точка  $O'$  на осі обертання, для якої виконується умова перпендикулярності до відрізка  $O'A$  осі обертання;
  - радіус обертання  $r$  – відстань від центра обертання  $O'$  до точки  $A$ ;
  - напрямок обертання;
  - кут обертання.

Траєкторією точки  $A$  при її обертанні навколо проєціювальної осі є дуга кола, що належить площині рівня. Проекція траєкторії на одну із площин проєкцій є дугою кола, на дві інші – прямою, паралельною відповідним осям координат (рис. 2.19).

Способом обертання навколо проєціювальної осі можна визначати:

- а) натуральну величину відрізка (див. п. 2.2.2);
- б) відстані між геометричними об'єктами (див. пп. 2.2.3 – 2.2.5);
- в) точку перетину прямої і площини (див. п. 2.2.6);
- г) лінію перетину двох площин (див. п. 2.3.5);
- д) точки перетину прямої лінії з поверхнею тіла обертання (див. п. 4.2.2.3).

### 2.2.2 ДОВЖИНА ВІДРІЗКА

Задача про визначення натуральної величини відрізка має найпростіший спосіб реалізації із використанням способу обертання навколо проєціювальної осі.

На рис. 2.20 наведено приклад визначення довжини відрізка  $AB$  загального положення. Через точку  $A$  проведена фронтально-проєціювальна вісь  $j$ , навколо якої даний відрізок обертається до положення горизонтального рівня (фронтальна проєкція  $A_2B_2$  паралельна осі  $x$ ). Горизонтальна проєкція  $A_1B_1$  є натуральною величиною відрізка  $AB$ .

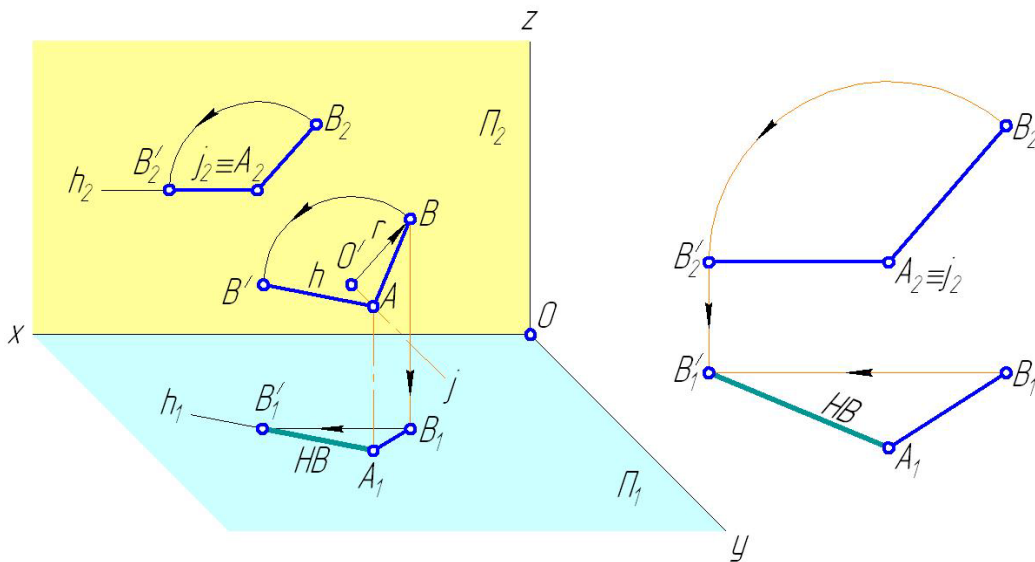


Рисунок 2.20 – Визначення довжини відрізка

### 2.2.3 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Для визначення відстані від точки  $A$  до прямої  $l$  загального положення способом обертання навколо проєціювальної осі необхідно повернути пряму до положення рівня.

На рис. 2.21 пряма  $l$  задана відрізком  $BC$ . Фронтально-проєціювальна вісь обертання  $j$  проходить через точку  $B$ . Точки  $A, C$  обертаються навколо осі на однаковий кут. Після обертання відрізок  $BC$  займає горизонтальне положення рівня  $B_2C_2$ . За теоремою про проєціювання прямого кута (див. п. 1.4.8, рис. 1.26) горизонтальна проєкція  $A_1N_1$  перпендикуляра, проведеного з точки  $A_1$  до відрізка  $B_1C_1$ , проєціюється на  $\Pi_1$  у натуральну

величину. Натуральна величина відрізка  $AN$  визначається шляхом обертання відрізка  $A'N'$  навколо фронтально-проєціювальної осі  $j'$  і дорівнює довжині відрізка  $A_1N_1'$ .

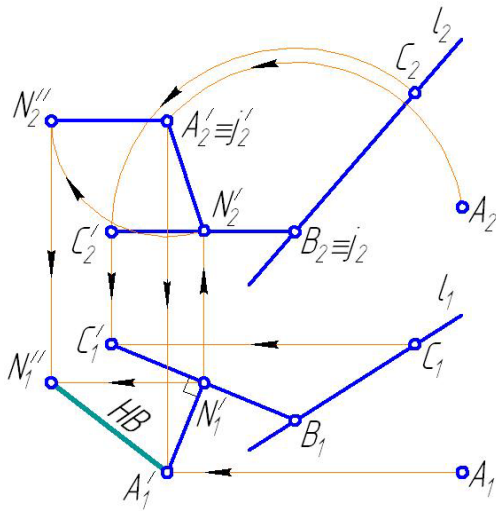


Рисунок 2.21 – Визначення відстані від точки до прямої

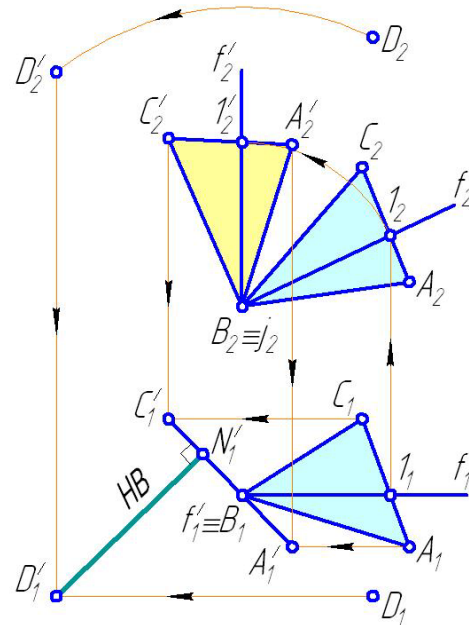


Рисунок 2.22 – Визначення відстані від точки до площини

Для визначення відстані від точки  $D$  до площини  $\Sigma$  загального положення способом обертання навколо проєціювальної осі необхідно повернути площину до проєціювального положення.

На рис. 2.22 площина  $\Sigma$  задана трикутником  $ABC$ . Площині належить фронталь  $f$ , проведена через точки  $B, 1$ . Фронтально-проєціювальна вісь обертання  $j$  проходить через точку  $B$ . Точки  $A, C, D$  обертаються навколо осі  $j$  на однаковий кут. Після обертання пряма  $f$  займає горизонтально-проєціювальне положення, а трикутник  $A'BC'$  проєціюється на  $\Pi_1$  у відрізок прямої. Довжина перпендикуляра  $D_1N_1'$ , проведеного до площини  $A'B'C'$ , дорівнює відстані від точки  $D$  до площини  $\Sigma$ .

#### 2.2.4 ВІДСТАНЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПРЯМИМИ, ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ, ДВОМА ПЛОЩИНАМИ

Для визначення відстані між паралельними прямими  $l, t$  способом обертання навколо проєціювальної осі прямі  $l, t$  обертаються навколо цієї осі до положення рівня.

На рис. 2.23 прямі  $l, t$  задані відрізками  $AB, CD$ . Прямі обертаються навколо фронтально-проєціювальної осі  $j$ , яка проходить через точку  $A$ , до горизонтального положення рівня. На горизонтальній площині проєкції  $\Pi_1$  проєкція  $C_1N_1'$  перпендикулярна до  $A'B', C'D'$  утворює прями кути з проєкціями  $A_1B_1', C_1D_1'$ . Відстань між паралельними прямими дорівнює довжині відрізка  $C_1N_1'$  і визначається способом обертання навколо проєціювальної осі  $j'$  (дорівнює довжині відрізка  $C_1N_1'$ ).

Для визначення відстані між паралельними прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  способом обертання навколо проєціювальної осі площина  $\Sigma$  обертається навколо проєціювальної осі до проєціювального положення.

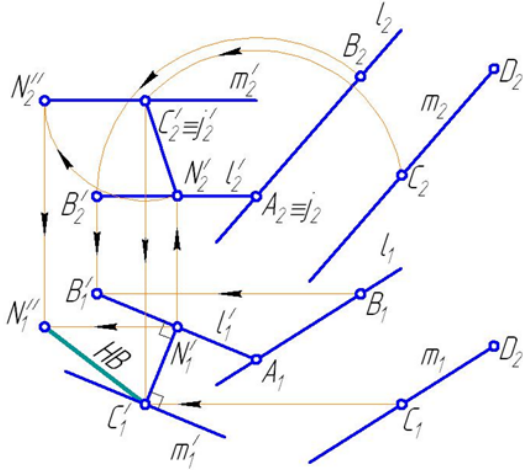


Рисунок 2.23 – Визначення відстані між паралельними прямими

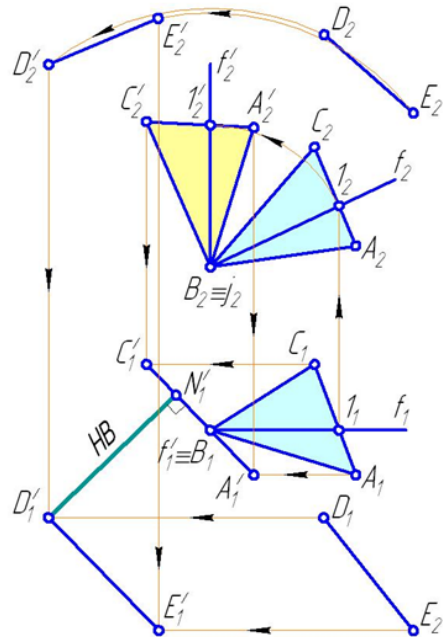


Рисунок 2.24 – Визначення відстані між паралельними прямою і площиною

На рис. 2.24 площина  $\Sigma$  задана трикутником  $ABC$ , пряма  $l$  – відрізком  $DE$ . Фронталь  $f$  площини  $ABC$ , задана двома точками  $B, 1$ , після обертання навколо проєціювальної осі  $j$ , яка проходить через точку  $B$ , проєціюється на площину  $\Pi_1$  у точку  $f_1$ . Проекція  $A_1B_1C_1$  трикутника є відрізком прямої. Відстань від прямої  $l$  до площини  $ABC$  дорівнює довжині відрізка  $D_1N_1'$ .

Для визначення відстані між паралельними площинами  $\Sigma, \Omega$  останні обертаються навколо проєціювальної осі до проєціювального положення.

На рис. 2.25 площини  $\Sigma, \Omega$  задані трикутниками  $ABC, DEF$ . Фронталь  $f$  площини  $ABC$  задана двома точками  $B, 1$ . Після обертання навколо проєціювальної осі  $j$ , яка проходить через точку  $B$ , фронталь  $f$  проєціюється на площину  $\Pi_1$  у точку  $f_1$ . Проекції  $A_1B_1C_1, D_1E_1F_1$  трикутників є відрізками прямих. Відстань між даними площинами дорівнює довжині перпендикуляра  $D_1N_1'$ .

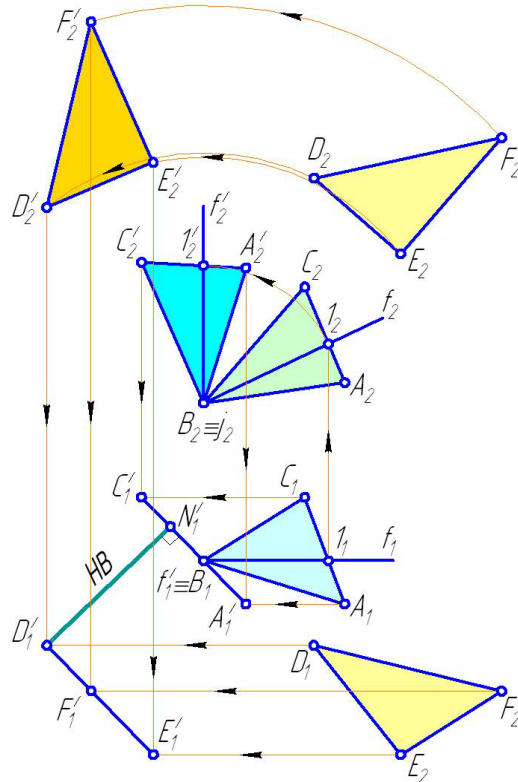


Рисунок 2.25 – Визначення відстані між паралельними площинами

### 2.2.5 ВІДСТАНЬ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Для визначення відстані між мимобіжними прямими  $l$ ,  $m$  застосовується спосіб допоміжної паралельної площини (див. п. 1.6.2, рис. 1.65 – 1.66), для чого вводиться площина  $\Sigma$ , яка проходить через  $m$  паралельно прямій  $l$ . Після обертання навколо проєціювальної осі площина  $\Sigma$  проєціюється у пряму лінію. Відстань між цією лінією і відповідною проєкцією прямої  $l$  дорівнює відстані між мимобіжними прямими.

На рис. 2.26 прямі  $l$ ,  $m$  задані відрізками  $AB$ ,  $CD$ . Допоміжна площина  $\Sigma$ , задана трикутником  $CDE$ , паралельна відрізку  $AB$ . Після обертання навколо горизонтально-проєціювальної осі  $i$ , яка проходить через точку  $D$ , трикутник  $CDE$  займає фронтально-проєціювальне положення  $C_2D_2E_2$ . Довжина перпендикуляра  $E_2N_2$  дорівнює відстані між прямими  $l$ ,  $m$ .

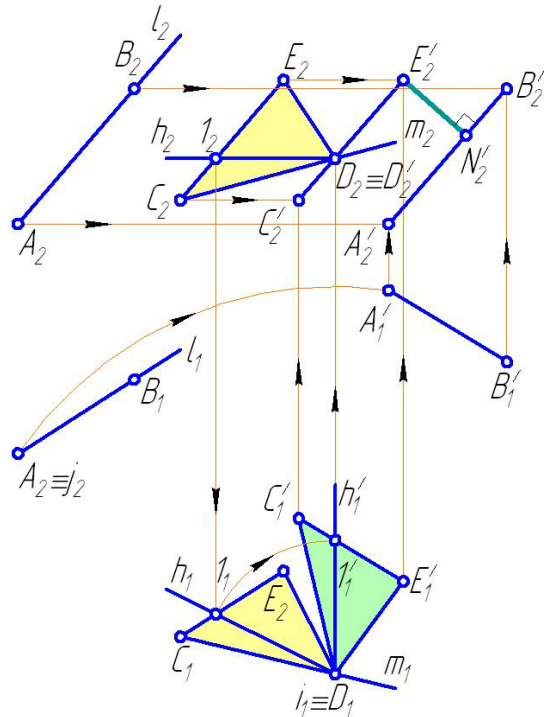


Рисунок 2.26 – Визначення відстані між мимобіжними прямими

### 2.2.6 ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Для визначення точки  $K$  перетину прямої  $l$  і площини  $\Sigma$  остання обертається навколо проєціювальної осі до проєціювального положення.

На рис. 2.27 площина задана трикутником  $ABC$ , пряма – відрізком  $DE$ . У площині побудована фронталь  $f$ , яка після обертання навколо фронтально-проєціювальної осі  $j$  переводиться у горизонтально-проєціювальну пряму  $f'$ . При цьому площина проєціюється у пряму  $A_1B_1C_1$ , що перетинає проєкцію  $l_1$  у точці  $K_1$ . Обертання цієї точки навколо осі  $j$  у зворотному напрямку дозволяє визначити шукані проєкції  $K$ ,  $K_2$ .

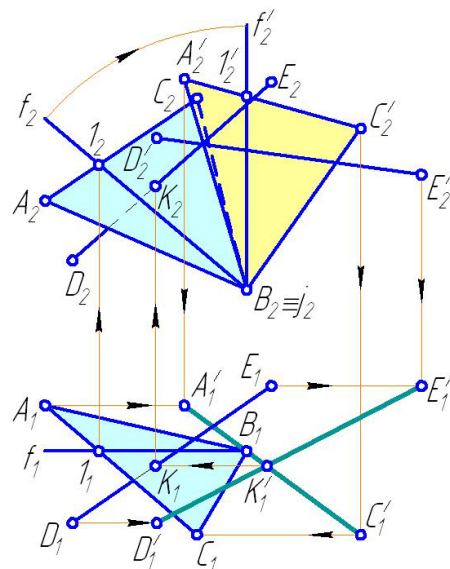


Рисунок 2.27 – Визначення точки перетину прямої і площини

## 2.3 СПОСІБ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ

### 2.3.1 ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕМІЩЕННЯ ТІЛА

Плоскопаралельним рухом тіла називається такий його рух, в якому усі точки тіла мають траєкторії, які належать площинам, паралельним деякій нерухомій площині. Останньою у нарисній геометрії обирають одну з площин проєкцій.

Спосіб плоскопаралельного переміщення кожної точки тіла реалізується за допомогою комбінації двох рухів: поступального руху проєціювальної осі і обертання навколо цієї осі (рис. 2.28). Метою застосування способу плоскопаралельного переміщення є переведення геометричних об'єктів із загального положення в особливе.

Спосіб обертання навколо проєціювальної осі (див. п. 2.2) є окремим випадком способу плоскопаралельного переміщення, в якому вісь обертання є нерухомою.

Реалізація способу плоскопаралельного переміщення тіла  $\Phi$  на його комплексному кресленні наведена на рис. 2.29. Вона аналогічна обертанню навколо проєціювальної осі, але має суттєву перевагу: одну з проєкцій об'єкта (на рис. 2.29 – це фронтальна проєкція) можна переносити на вільне поле комплексного креслення.

*Основне правило плоскопаралельного переміщення*

При плоскопаралельному переміщенні геометричного об'єкта відстані між усіма парами його точок не змінюються.

На рис. 2.29 довжини проєкцій відрізків  $AB$ ,  $A'B'$  однакові так само, як однакові довжини проєкцій відрізків  $BC$ ,  $B'C'$  тощо.

*Правило визначення видимості для способу плоскопаралельного переміщення*

При плоскопаралельному переміщенні геометричного об'єкта видимість його ліній не змінюється на одній із площин проєкцій.

На рис. 2.29 на фронтальній проєкції відрізок  $BD$  невидимий, усі інші – видимі. Після плоскопаралельного переміщення тіла видимість відрізків на фронтальній проєкції не змінилася, на горизонтальній – змінилася для відрізків  $AD$ ,  $CD$ .

Способом плоскопаралельного переміщення розв'язуються усі задачі, описані у п. 2.2, а також ті, які не доцільно розв'язувати способом обертання навколо проєціювальної осі.

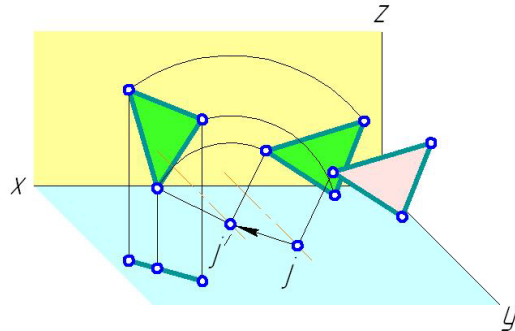


Рисунок 2.28 – Плоскопаралельне переміщення

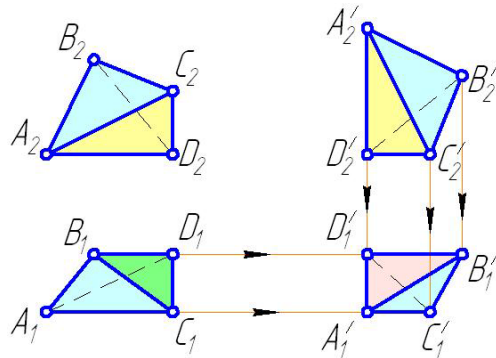


Рисунок 2.29 – Реалізація способу плоскопаралельного переміщення

### 2.3.2 ВІДСТАНЬ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Відстань між мимобіжними прямими визначається такими способами:

- а) допоміжної паралельної площини (див. п. 1.6.2, рис. 1.65 – 1.66);
- б) заміни площин проєкцій (п. 2.1.5, рис. 2.9);
- в) обертання навколо проєціувальної осі (п. 2.2.5, рис. 2.26);
- г) плоскопаралельного переміщення.

Способом паралельного переміщення можна визначити відстань між мимобіжними прямими  $l, m$  шляхом проєціювання однієї із прямих у точку.

На рис. 2.30 прямі  $l, m$  задані відрізками  $AB, CD$ . Їх переміщення, паралельне площині  $\Pi_2$ , дозволяє перевести пряму  $l$  у горизонтальне положення рівня  $l'$  (проєкція  $A'_2B'_2$  паралельна осі  $x$ ; довжина проєкції  $A'_2B'_2$  є натуральною величиною відрізка  $AB$ ). Переміщення відрізків  $A'B', C'D'$ , паралельне площині  $\Pi_1$ , дозволяє спроеціювати пряму  $l'$  у фронтально-проєціувальне положення  $l''$  (проєкція  $A''_1B''_1$  перпендикулярна до осі  $x$ ; проєкція  $l''_2$  є точкою). Відстань між мимобіжними прямими  $l, m$  дорівнює довжині проєкції перпендикуляра  $l''_2N''_2$ .

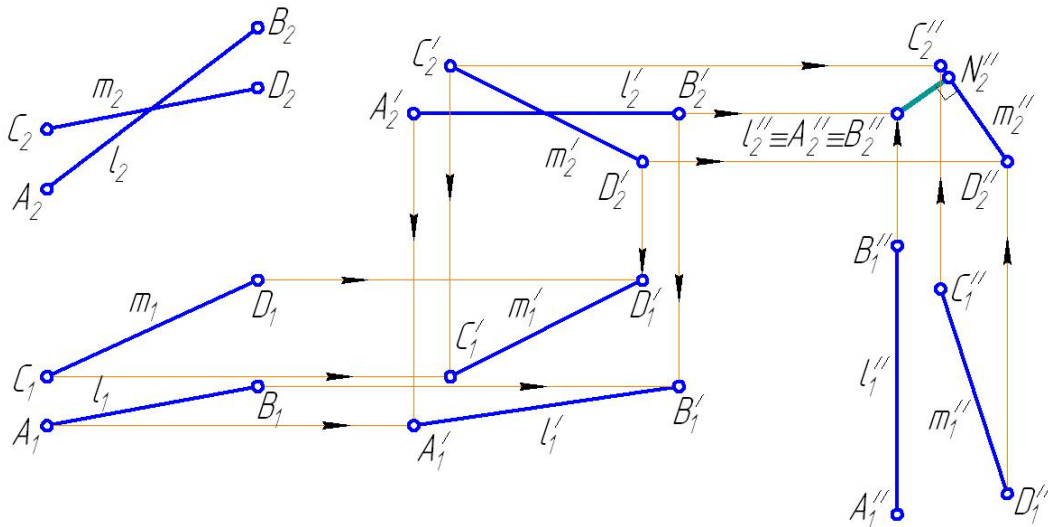


Рисунок 2.30 – Визначення відстані між мимобіжними прямими

### 2.3.3 КУТ МІЖ ПРЯМИМИ, ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ, ДВОМА ПЛОЩИНАМИ

Для визначення кута  $\chi$  між двома прямими  $l, m$ , що перетинаються у точці  $K$ , способом плоскопаралельного переміщення необхідно перевести площину  $\Sigma$ , утворену цими прямими, спочатку у проєціувальне положення, а потім – у положення рівня.

На рис. 2.31 прямі  $l, m$  задані відрізками  $AB, CD$ . У площині  $\Sigma$ , заданій прямими  $l, m$ , вводиться горизонталь  $h$ , яка за допомогою переміщення, паралельного  $\Pi_1$ , переводиться у фронтально-проєціувальне положення  $h'$  (проєкція  $h'_1$  перпендикулярна до осі  $x$ ; проєкція  $h'_2$  є точкою; проєкція  $\Sigma'_2$  є прямою лінією). Переміщення площини  $\Sigma'$  паралельно площині  $\Pi_2$  дозволяє спроеціювати кут  $\chi$  між прямими  $l, m$  у натуральну величину.



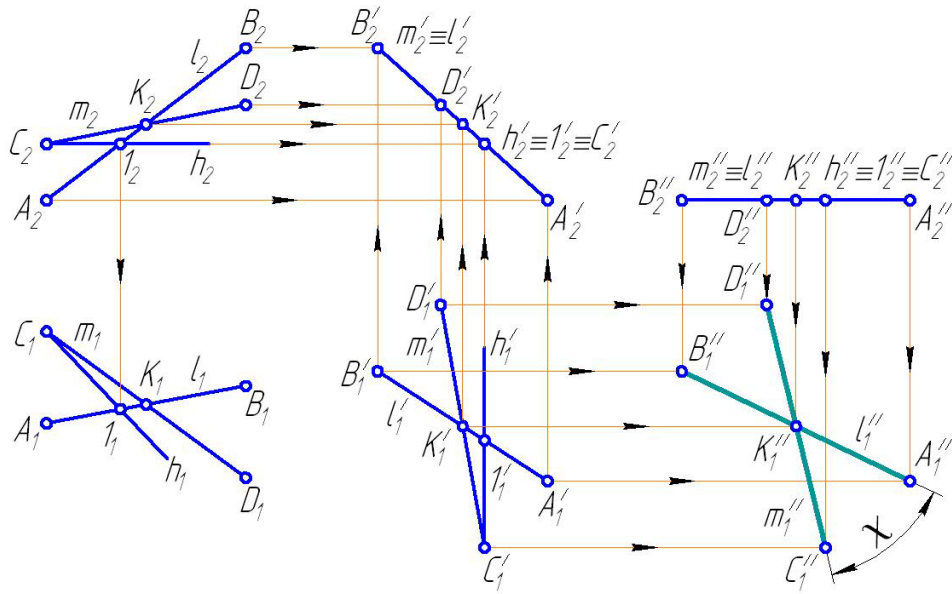


Рисунок 2.31 – Визначення плоского кута

Кут  $\varphi$  між прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$  та між двома площинами визначається за допомогою переміщення площини  $\Sigma$  паралельно одній із площин проекцій до проєціювального положення.

На рис. 2.32 площина  $\Sigma$  задана трикутником  $ABC$ , пряма  $l$  – відрізок  $DE$ . У площині  $\Sigma$  проведена горизонтальна пряма рівня  $h$ , яка після плоскопаралельного переміщення проєціюється у точку  $h'_2$ , а трикутник  $A'B'C'$  – на відрізок прямої. Кут  $\varphi$  між фронтальними проєкціями  $l_2, A'_2B'_2C'_2$  дорівнює шуканому куту  $\varphi$  між прямою  $l$  і площиною  $\Sigma$ .

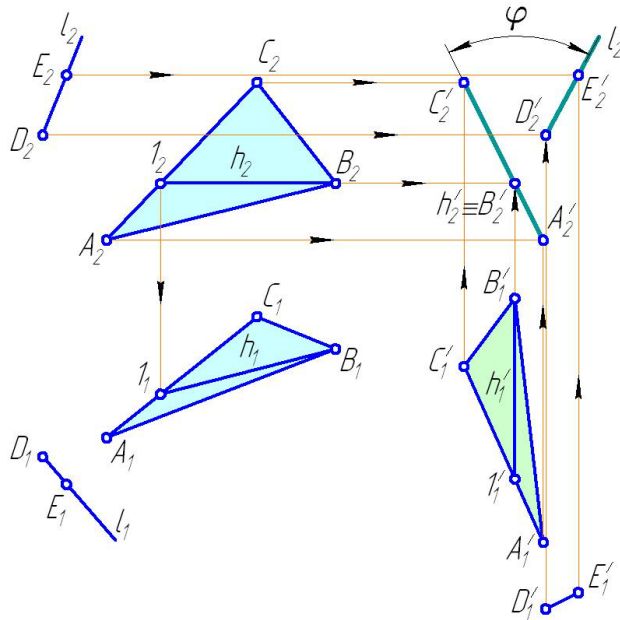


Рисунок 2.32 – Визначення кута між прямою і площиною

На рис. 2.33 площини  $\Sigma, \Omega$  задані трикутниками  $ABC, ABD$ . За допомогою переміщення відрізка  $AB$  (основи двогранного кута) паралельно  $\Pi_2$  даний відрізок проєціюється на  $\Pi_1$  у натуральну величину. Переміщення відрізка  $A'B'$  паралельно  $\Pi_1$  дозволяє спроеціювати задані площини у прямі лінії, які перетинаються у точці, і визначити кут  $\theta$  між ними. Цей кут дорівнює шуканому двогранному куту при ребрі  $AB$ .

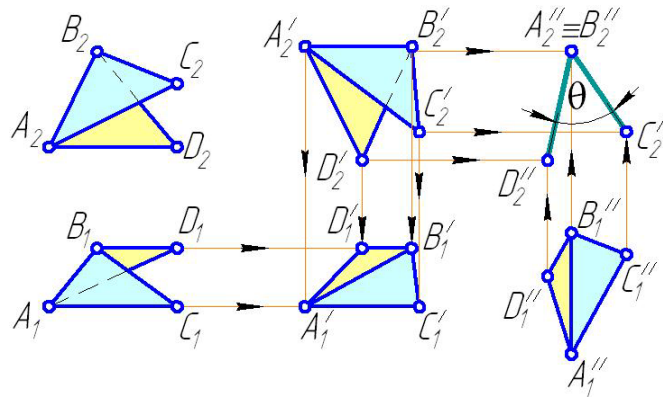


Рисунок 2.33 – Визначення двогранного кута

### 2.3.4 НАТУРАЛЬНА ВЕЛИЧИНА ПЛОСКОЇ ФІГУРИ

Для визначення натуральної величини плоскої фігури  $\Phi$  способом плоскопаралельного переміщення необхідно перевести цю фігуру у положення рівня, попередньо спроеціювавши її на відрізок прямої лінії.

На рис. 2.34 фігура  $\Phi$  є трикутником  $ABC$ . У ньому вводиться горизонталь  $h$ , яка за допомогою переміщення, паралельного  $\Pi_1$ , переводиться у фронтально-проєційвальне положення  $h'$  (проєкція  $h'_1$  перпендикулярна до осі  $x$ ; проєкція  $h'_2$  є точкою; проєкція  $A'_2B'_2C'_2$  є відрізком прямої). Переміщення фігури  $A'B'C'$  паралельно площині  $\Pi_2$  дозволяє визначити натуральну величину трикутника  $ABC$ .

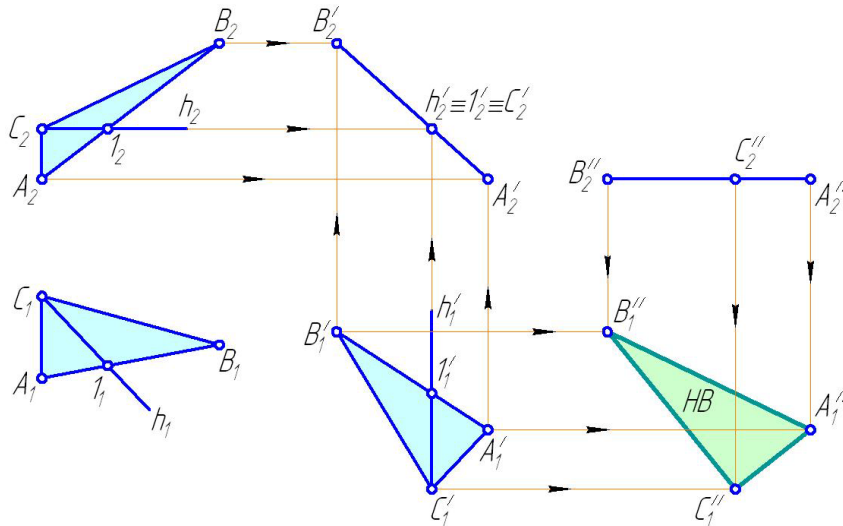


Рисунок 2.34 – Визначення натуральної величини плоскої фігури

### 2.3.5 ПЕРЕТИН ПЛОЩИН

Для визначення лінії  $k$  (відрізка  $MN$ ) перетину двох площин  $\Sigma, \Omega$  способом плоско-паралельного переміщення одна з площин переводиться у проєціювальне положення.

На рис. 2.35 площини задані трикутниками  $ABC, DEF$ . У першому проведена горизонталь  $h$ , яка переміщається паралельно  $\Pi_1$  до фронтально-проєціювального положення (проєкція  $h'_1$  перпендикулярна до осі  $x$ ; проєкція  $h'_2$  є точкою). При цьому трикутник  $A'B'C'$  проєціюється на відрізок  $A'_2B'_2C'_2$ , який збігається з проєкцією  $k'_2$  лінії перетину, що задана точками  $M', N'$ . Шукані горизонтальна і фронтальна проєкції відрізка  $MN$  визначаються за лініями проєкційного зв'язку.

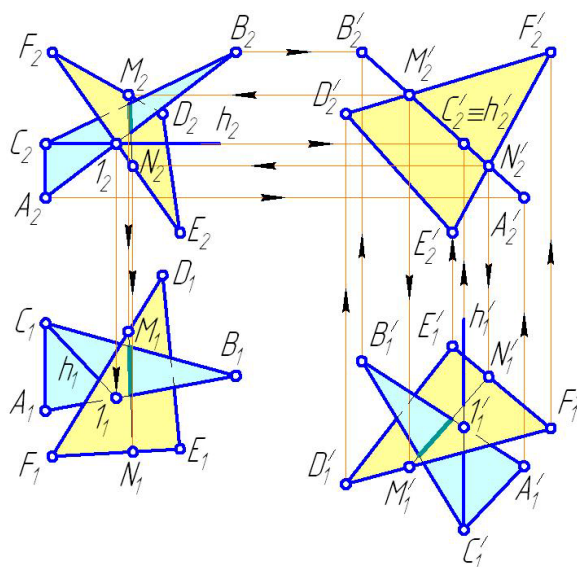


Рисунок 2.35 – Визначення лінії перетину площин

## 2.4 СПОСІБ ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ЛІНІЇ РІВНЯ

### 2.4.1 ОБЕРТАННЯ ТОЧКИ НАВКОЛО ЛІНІЇ РІВНЯ

Спосіб обертання навколо лінії рівня є одним із способів перетворення комплексного креслення, у якому геометричний об'єкт обертається навколо лінії рівня до того часу, поки не займе особливого положення (рис. 2.36).

На рис. 2.37 а показані положення точки  $B$  до і після обертання навколо горизонтальної прямої рівня.

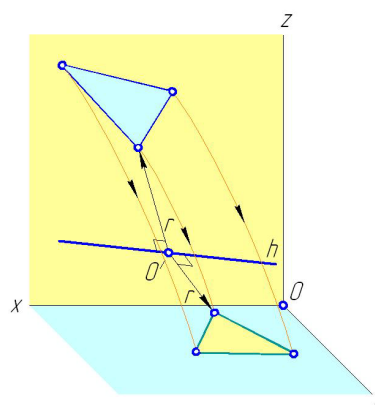


Рисунок 2.36 – Обертання навколо лінії рівня

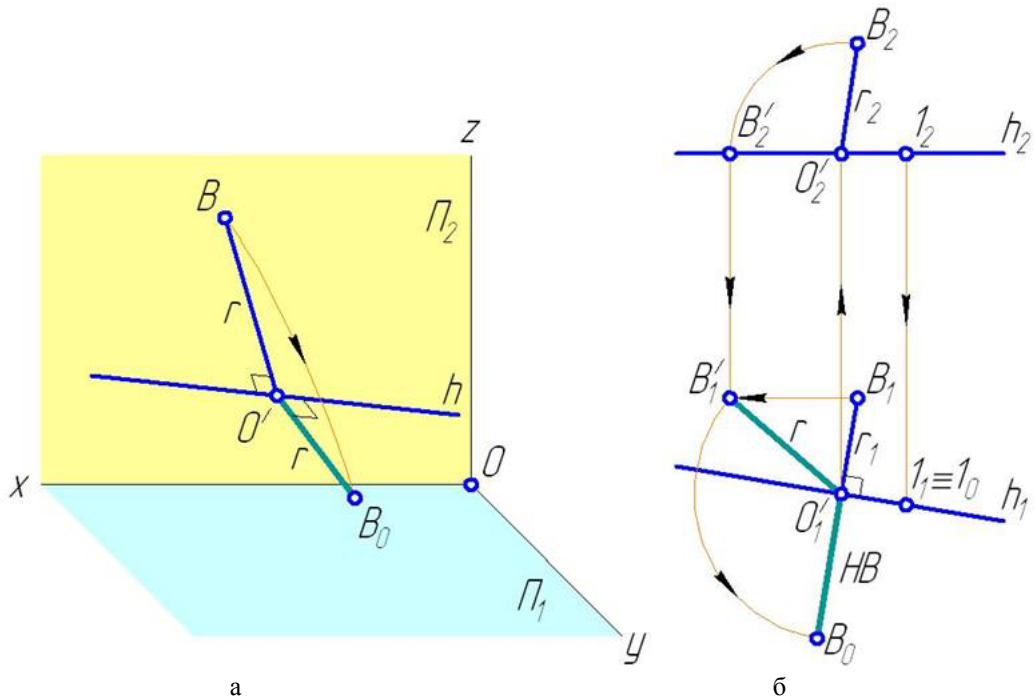


Рисунок 2.37 – Реалізація способу обертання навколо лінії рівня

Для обертання точки  $B$  навколо прямої рівня необхідно знати:

- а) *вісь обертання* – горизонталь, фронталь або профільна пряма рівня;
- б) *центр обертання* – точка  $O'$  на осі обертання, для якої виконується умова перпендикулярності відрізка  $O'B$  до осі обертання;
- в) *радіус обертання*  $r$  – відстань від центра обертання  $O'$  до точки  $B$ ;
- г) *напрямок обертання*.

Траєкторією точки  $B$  при її обертанні навколо лінії рівня є коло, яке належить проєціювальній площині. Проекція траєкторії на одну із площин проєкцій є відрізком, перпендикулярним до відповідної проєкції лінії рівня (рис. 2.37 б).

На рис. 2.37 б відрізок  $O'B$  загального положення обертається навколо горизонталі  $h$  до положення горизонтального рівня. З горизонтальної проєкції точки  $B$  проведена проєкція  $r_1$  радіуса обертання, перпендикулярна до осі  $h$ . На горизонтальній площині проєкцій прямий кут з основою  $O'$  проєціюється у натуральну величину (за теоремою про проєціювання прямого кута, див. п. 1.4.8). Точка  $O'$  є центром обертання точки  $B$ . За допомогою лінії проєкційного зв'язку визначаються фронтальні проєкції центра обертання і радіуса обертання. За допомогою способу обертання навколо фронтально-проєціювальної осі визначається натуральна величина радіуса обертання  $r$  (відрізок  $O'B$ ), яка дорівнює довжині відрізка  $O_1B'_1$ . Нове положення  $B_0$  точки  $B$  (після обертання навколо горизонталі  $h$ ) віддалене від центра обертання  $O'$  на величину радіуса обертання.

Способом обертання навколо лінії рівня доцільно розв'язувати задачу про визначення натуральної величини плоскої фігури і *плоского кута* – кута між двома прямими, які перетинаються у точці.

### 2.4.2 НАТУРАЛЬНА ВЕЛИЧИНА ПЛОСКОЇ ФІГУРИ І ПЛОСКОГО КУТА

Для визначення натуральної величини плоскої фігури  $\Phi$  необхідно повернути її навколо лінії рівня до положення рівня.

На рис. 2.38 задано трикутник  $ABC$ . Визначення його натуральної величини реалізується за допомогою обертання навколо горизонталі  $h$ , яка проходить через його точки  $A$  і  $1$ . З горизонтальної проєкції точки  $B$  проведена проєкція  $r_1$  радіуса обертання, перпендикулярна до осі  $h$ . На горизонтальній площині проєкцій прямий кут з основою  $O'$  проєціюється у натуральну величину. Точка  $O'$  є центром обертання точки  $B$ . За допомогою лінії проєкційного зв'язку визначаються фронтальні проєкції центра і радіуса обертання. За допомогою способу обертання навколо фронтально-проєціовальної осі визначається натуральна величина відрізка  $O'B$ , яка дорівнює довжині відрізка  $O_1B'_1$ . Положення  $B_0$  точки  $B$  (після обертання навколо горизонталі  $h$ ) віддалене від центра обертання  $O'$  на величину радіуса обертання  $r$ . Оскільки точки  $A$  і  $1$  належать осі обертання, вони залишаються нерухомими. Точка  $C_0$  є точкою перетину променів  $B_01_1$ ,  $C_1O''_1$  (точка  $O''$  є центром обертання точки  $C$ ; відрізок  $C_1O''_1$  перпендикулярний до  $h_1$ ).

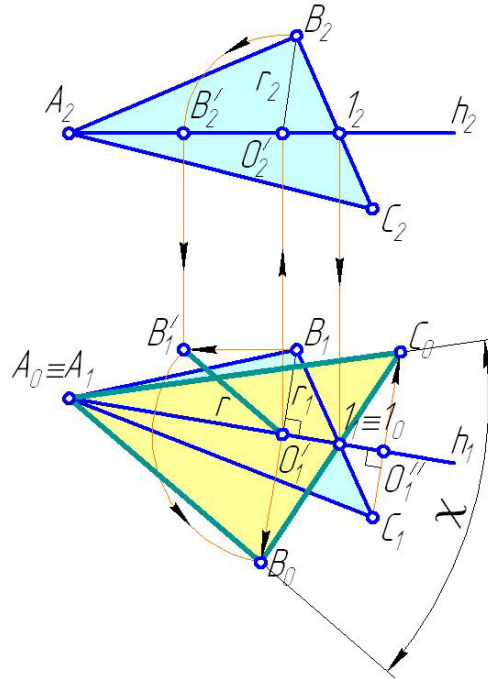


Рисунок 2.38 – Визначення натуральної величини плоскої фігури

На рис. 2.38 показана натуральна величина плоского кута  $\chi$  при вершині  $A$ .

### 2.4.3 СПОСІБ СУМІЩЕННЯ

Спосіб суміщення є окремим випадком способу обертання навколо лінії рівня. Віссю обертання у ньому є слід площини, якій належить плоска фігура.

Спосіб суміщення використовується для знаходження натуральної величини плоскої фігури. У результаті обертання остання суміщається з однією із площин проєкцій (рис. 2.39 а).

На рис. 2.39 б показана реалізація способу суміщення площини  $\Sigma$  загального положення з горизонтальною площиною проєкцій  $\Pi_1$ . На фронтальному сліді  $\sigma_{\Pi_2}$  довільно обрана точка  $1_2$ . Горизонтальна проєкція  $1_1$  точки 1 належить осі  $x$ . Висота точки 1 дорівнює  $z_1$ . Центром обертання точки 1 навколо горизонтального сліду  $\sigma_{\Pi_1}$  площини  $\Sigma$  є точка  $O'$ . Натуральна величина  $r$  радіуса обертання дорівнює довжині відрізка  $O'_11'_1$ . Величина радіуса обертання відкладається уздовж напрямку обертання  $O'_11_0$ . Через точки  $\sigma_x, 1_0$  будується нове положення  $\sigma'_{\Pi_2}$  фронтального сліду. Таким чином, після обертання навколо горизонтального сліду  $\sigma_{\Pi_1}$  площина  $\Sigma$  суміщається із горизонтальною площиною проєкцій  $\Pi_1$ .

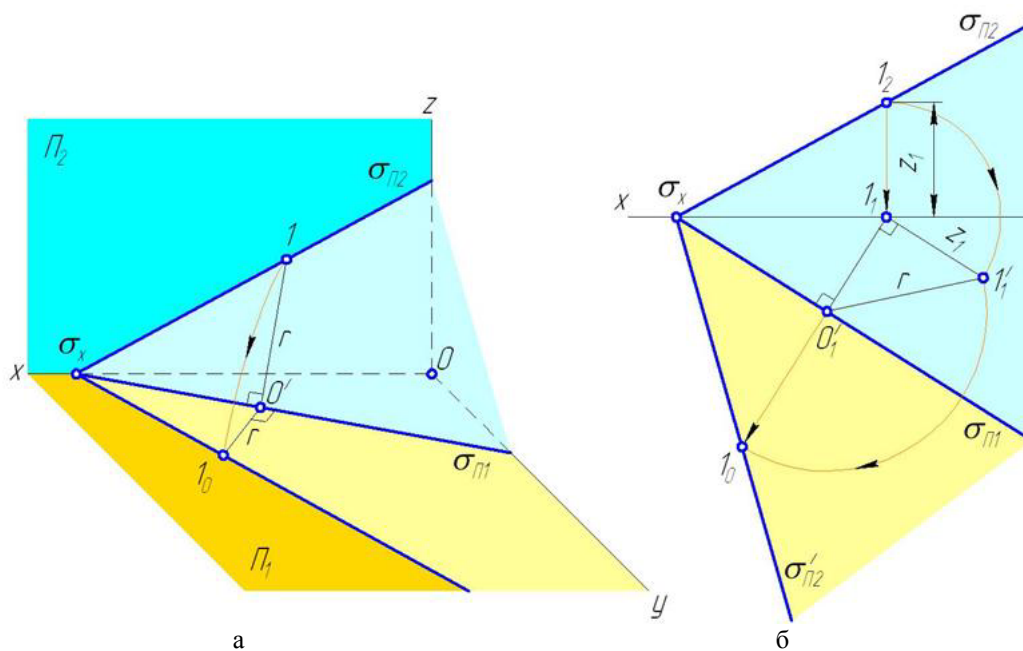


Рисунок 2.39 – Спосіб суміщення

На рис. 2.40 визначена натуральна величина чотирикутника  $ABCD$ , який належить площині  $\Sigma$ , заданій горизонтальним і фронтальним слідами  $\sigma_{\Pi_1}, \sigma_{\Pi_2}$ . Точки  $A, B, C, D$  обертаються навколо горизонтального сліду  $\sigma_{\Pi_1}$ . Для визначення нового положення  $A_0$  з точки  $A$  проводиться горизонталь  $h$  і визначаються точки  $A'_2, A'_0$ . Точка  $A_0$  належить новому положенню  $h_0$  горизонталі. Аналогічно визначаються точки  $B_0, C_0, D_0$ . Після обертання натуральна величина  $A_0B_0C_0D_0$  чотирикутника належить площині проєкцій  $\Pi_1$ .

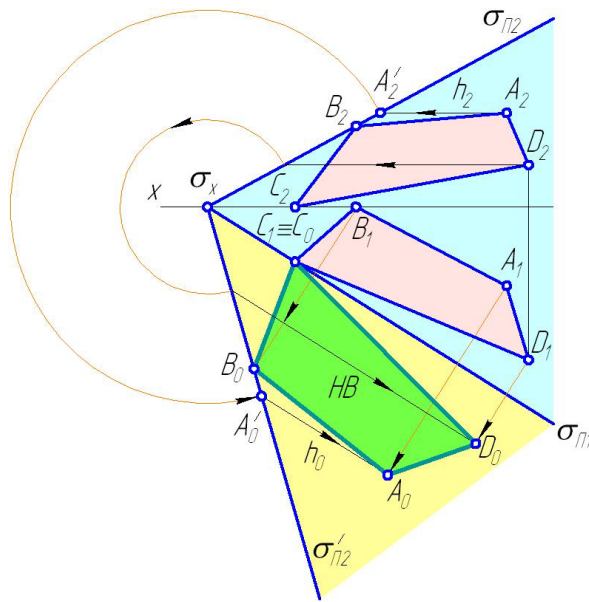


Рисунок 2.40 – Визначення натуральної величини плоскої фігури способом суміщення

## 2.5 СПОСІБ КОСОКУТНОГО ПРОЄЦІЮВАННЯ

### 2.5.1 КОСОКУТНЕ ПРОЄЦІЮВАННЯ НА ОРТОГОНАЛЬНІ ПЛОЩИНИ ПРОЄКЦІЙ

Косокутне проєціювання є одним із видів паралельного проєціювання (див. п. 1.1.2.1, рис. 1.3), в якому проєціювальні промені не перпендикулярні до площин проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ .

Косокутне проєціювання задається напрямом проєціювання  $i$ , який у загальному випадку спрямований уздовж лінії загального положення.

У нарисній геометрії використовуються три види косокутного проєціювання:

- на ортогональні площини проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ ;
- на площину особливого положення (див. п. 2.5.2);
- на бісекторну площину (див. п. 2.5.3).

Застосування косокутного проєціювання спрямоване на спотворення зображення геометричного об'єкта з метою спрощення його форми (пряма проєціюється в точку, площина – у пряму тощо).

*Правило косокутного проєціювання точки на ортогональні площини проєкцій*

При косокутному проєціюванні точки  $A$  на одну з площин проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  косокутна проєкція  $A'$  збігається із відповідним слідом (див. п. 1.4.3, рис. 1.12) проєціювального променя  $i$  (рис. 2.41 а). Горизонтальна проєкція  $A'_1$  точки  $A'$  належить осі  $x$ , фронтальна  $A'_2$  – збігається із косокутною проєкцією  $A'$ . Лінії косокутного проєціювання паралельні відповідним проєкціям проєціювального променя  $i$ .

На рис. 2.41 б побудоване комплексне креслення точки  $A$  і її косокутної проєкції  $A'$  на фронтальну площину проєкцій  $\Pi_2$ .

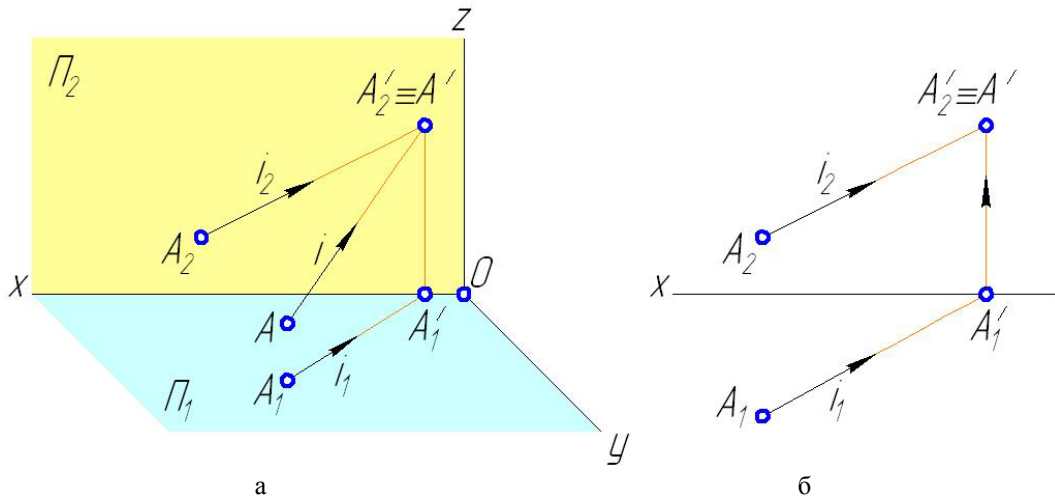


Рисунок 2.41 – Косокутне проєціювання на площину проєкцій

Спосіб косокутного проєціювання дозволяє відносно швидко розв'язувати позиційні задачі на перетин геометричних об'єктів (прямої і площини, двох площин тощо).

На рис. 2.42 побудована точка  $K$  перетину прямої  $l$  із площиною  $\Sigma$ , заданою паралельними прямими  $a, b$ . Уведено проєціювальний промінь  $i$ , паралельний заданій площині. Косокутна проєкція площини  $\Sigma$  на площину проєкцій  $\Pi_2$  (пряма  $a'b'$ ) є фронтальним слідом площини  $\Sigma$  і перетинається з косокутною проєкцією  $l'$  у точці  $K'$ . За допомогою ліній проєкційного зв'язку визначаються фронтальна і горизонтальна проєкції шуканої точки  $K$ .

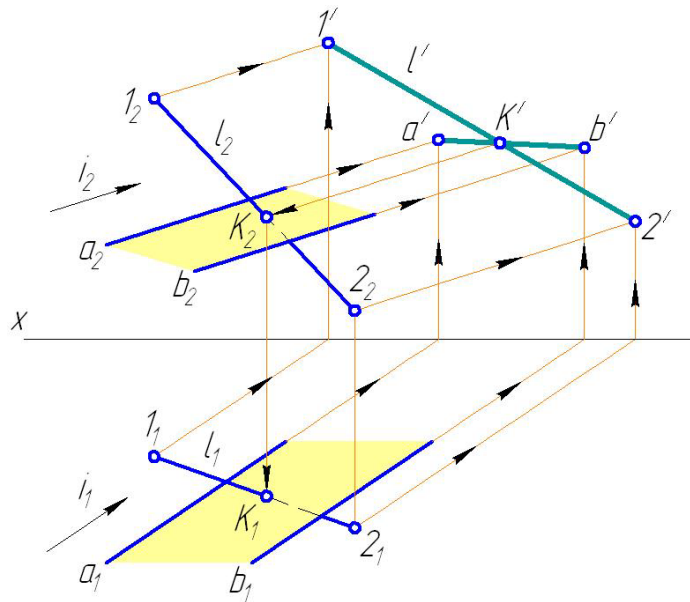


Рисунок 2.42– Визначення точки перетину прямої і площини



На рис. 2.42 з метою спрощення горизонтальні проєкції площини  $\Sigma'$  і прямої  $l'$  не позначені (вони збігаються з віссю  $x$ ). Їх фронтальні проєкції збігаються із косокутними проєкціями, тому нижній індекс «2» також не позначений.

На рис. 2.43 побудована лінія  $k$  перетину площини  $\Sigma$ , заданої паралельними прямими  $a, b$ , із площиною  $\Omega$ , заданою трикутником  $ABC$ . Уведено проєціювальний промінь  $i$ , паралельний площині  $\Sigma$ . Косокутна проєкція площини  $\Sigma$  на площину проєкцій  $\Pi_2$  (пряма  $a'b'$ ) є фронтальним слідом площини  $\Sigma$  і перетинається із косокутною проєкцією  $A'B'C'$  по прямій  $k'$ , заданій відрізком  $M'N'$ . За допомогою ліній проєкційного зв'язку визначаються фронтальна і горизонтальна проєкції шуканої прямої  $k$ .

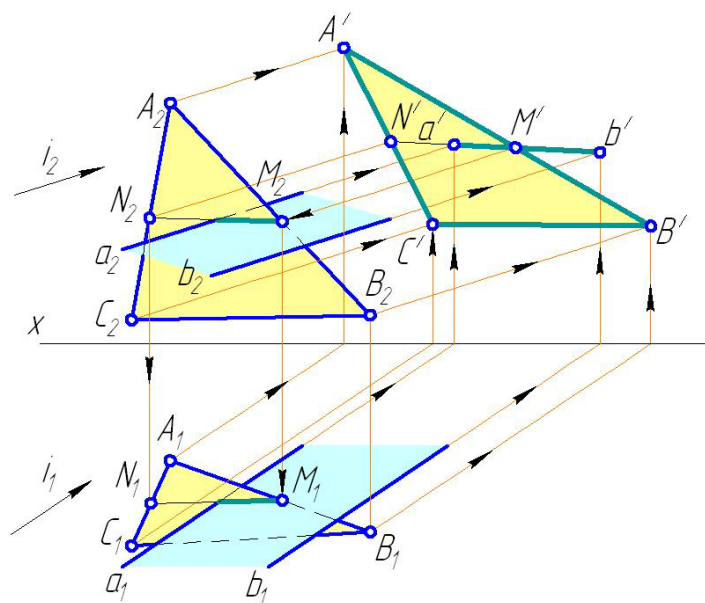


Рисунок 2.43 – Визначення лінії перетину площин

### 2.5.2 КОСОКУТНЕ ПРОЄЦІЮВАННЯ НА ПЛОЩИНУ ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

При косокутному проєціюванні на площину особливого положення (площину рівня або проєціювальну площину) вводиться допоміжна площина  $\Pi'$  за допомогою одного із своїх слідів  $s'$ .

На рис. 2.44 а показано спосіб косокутного проєціювання на горизонтально-проєціювальну площину  $\Pi'$ . На рис. 2.44 б побудовано комплексне креслення точки  $A$ , косокутно спроєційованої на цю площину. Горизонтальна проєкція  $A'_1$  є точкою перетину осі  $s'$  із горизонтальною проєкцією  $i_1$  проєціювального променя. Фронтальна проєкція  $A'_2$  є точкою перетину фронтальної проєкції  $i_2$  проєціювального променя із вертикальною лінією проєкційного зв'язку, проведеною з точки  $A'_1$ .

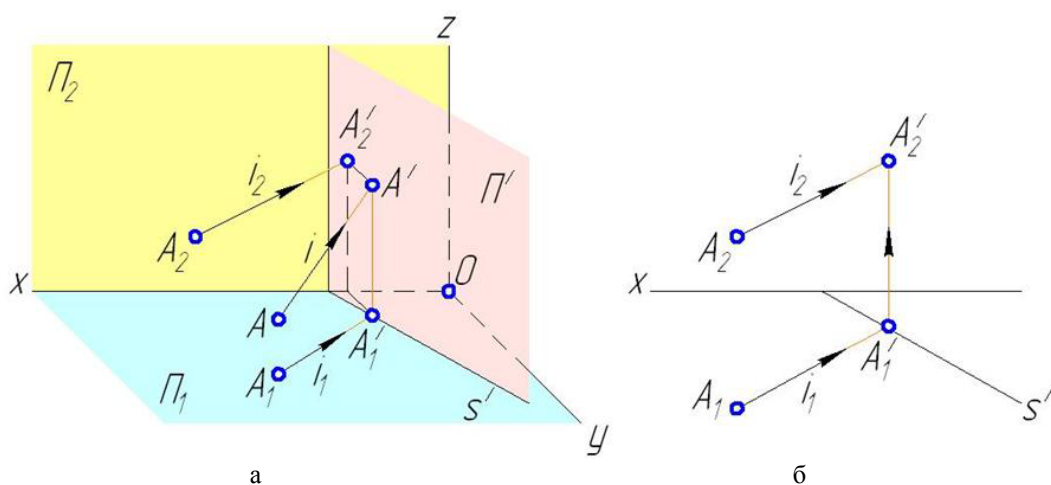


Рисунок 2.44 – Косокутне проєціювання на проєціовальну площину

На рис. 2.45 побудована точка  $K$  перетину прямої  $l$  із площиною  $\Sigma$ , заданою паралельними прямими  $a, b$ . Уведені горизонтально-проєціовальна площина  $\Pi'$  і проєціовальний промінь  $i$ , паралельний площині  $\Sigma$ . Косокутна проєкція площини  $\Sigma$  на площину проєкцій  $\Pi_2$  є прямою  $a'b'$ , яка перетинається із косокутною проєкцією  $l'$  у точці  $K'$ . За допомогою ліній проєкційного зв'язку визначаються фронтальна і горизонтальна проєкції шуканої точки  $K$ .

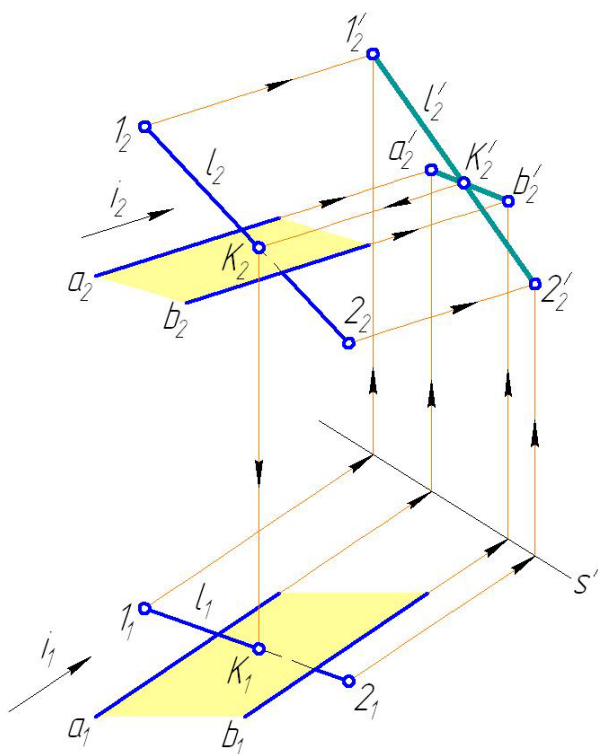


Рисунок 2.45 – Визначення точки перетину прямої і площини

На рис. 2.45 для спрощення горизонтальні проєкції площини  $\Sigma'$  і прямої  $l'$  не позначені (вони збігаються із віссю  $s'$ ). Їх фронтальні проєкції не збігаються із проєкціями на площину  $\Pi'$ , тому нижній індекс «2» є обов'язковим.

На рис. 2.46 побудована лінія  $k$  перетину площини  $\Sigma$ , заданої паралельними прямими  $a, b$ , із площиною  $\Omega$ , заданою трикутником  $ABC$ . Введені горизонтально-проєціювальна площина  $\Pi$  і проєціювальний промінь  $i$ , паралельний площині  $\Sigma$ . Косокутна проєкція площини  $\Sigma$  на площину проєкцій  $\Pi_2$  перетинається із косокутною проєкцією  $A'B'C'$  площини  $\Omega$  по прямій  $k'$ , заданій відрізком  $M'N'$ . За допомогою ліній проєкційного зв'язку визначаються фронтальна і горизонтальна проєкції шуканої прямої  $k$ .

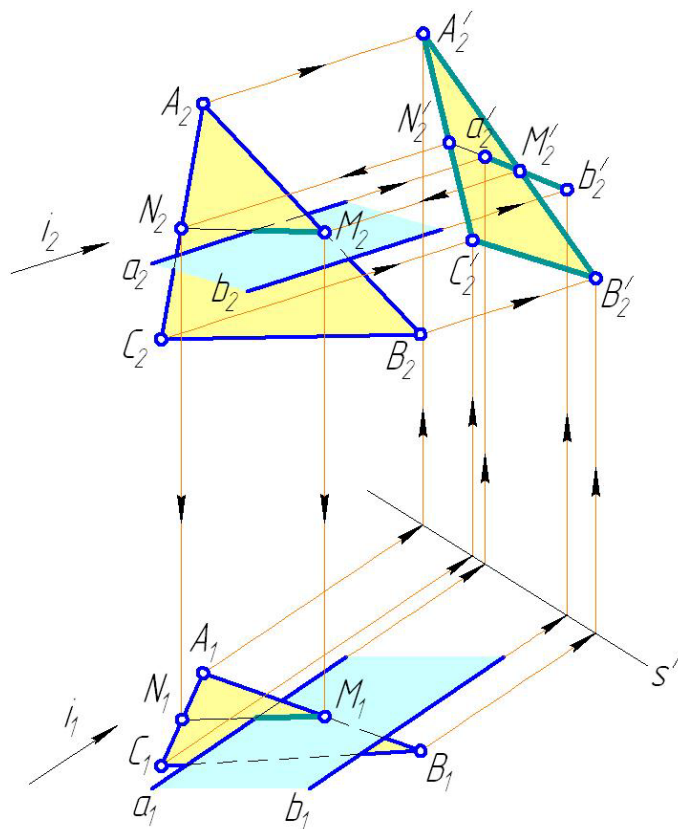


Рисунок 2.46 – Визначення лінії перетину площин

### 2.5.3 КОСОКУТНЕ ПРОЄЦІЮВАННЯ НА БІСЕКТОРНУ ПЛОЩИНУ

*Бісекторна площина* – це площина, рівнонахилена до двох площин проєкцій.

При розв’язанні позиційних задач на перетин геометричних об’єктів використовуються способи косокутного проєціювання, у тому числі на бісекторну площину  $\Pi'$ , яка проходить через вісь  $x$ , належить  $II$  і  $IV$  чвертям (див. п. 1.3.1, рис. 1.6) та нахилена до площин проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2$  під кутом  $45^\circ$  (рис. 2.47 а).

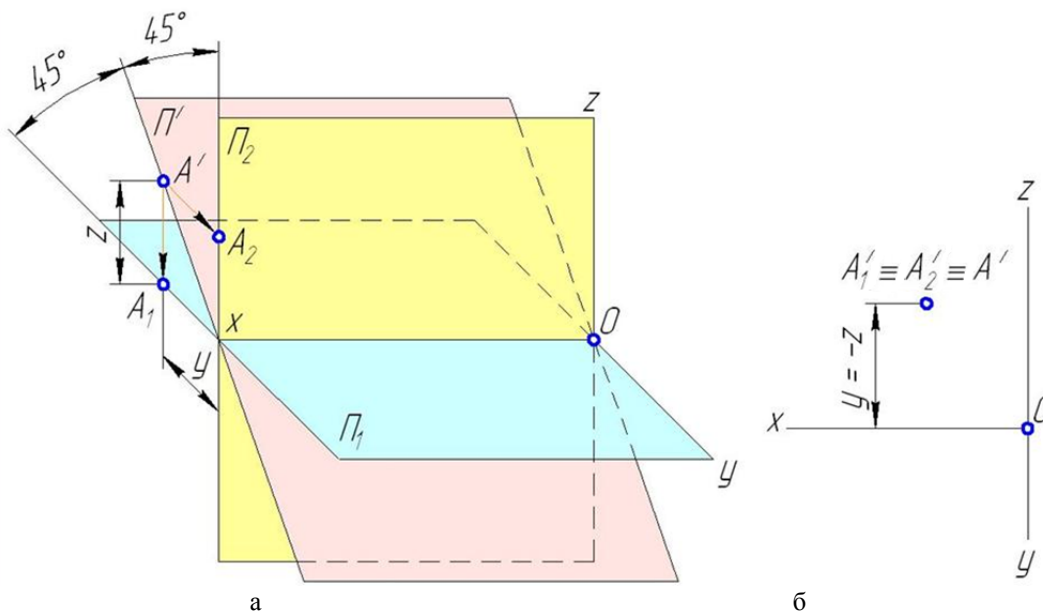


Рисунок 2.47 – Бісекторна площина

#### *Основна властивість точок бісекторної площини*

Будь-яка точка  $A$  бісекторної площини  $\Pi'$  має однакові за модулем і протилежні за знаком висоту  $z$  і глибину  $y$  (рис. 2.47).

На рис. 2.47 б побудоване комплексне креслення точки  $A$  і її косокутної проєкції  $A'$  на бісекторну площину  $\Pi'$ .

Згідно з основною властивістю бісекторної площини на комплексному кресленні замість позначення косокутних проєкцій  $A'_1, A'_2, A'$ , які збігаються, спрощено позначається лише  $A'$  (рис. 2.48).

#### *Правило визначення косокутної проєкції точки на бісекторну площину*

Косокутна проєкція  $A'$  точки  $A$  на бісекторну площину  $\Pi'$  є точкою перетину горизонтальної і фронтальної проєкцій  $i_1, i_2$  проєціювального променя  $i$  (рис. 2.48).

На рис. 2.49 побудована точка  $K$  перетину прямої  $l$  з площиною  $\Sigma$ , заданою паралельними прямими  $a, b$ . Уведено проєціювальний промінь  $i$ , паралельний заданій площині. Косокутна проєкція площини  $\Sigma$  на бісекторну площину  $\Pi_2$  є прямою  $a'b'$ , яка перетинається із косокутною проєкцією  $l'$  у точці  $K'$ . За допомогою ліній проєкційного зв'язку визначаються фронтальна і горизонтальна проєкції точки  $K$ .

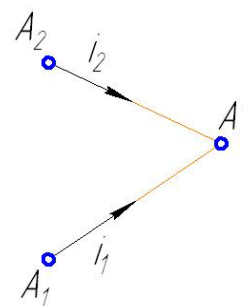


Рисунок 2.48 – Косокутне проєціювання точки на бісекторну площину

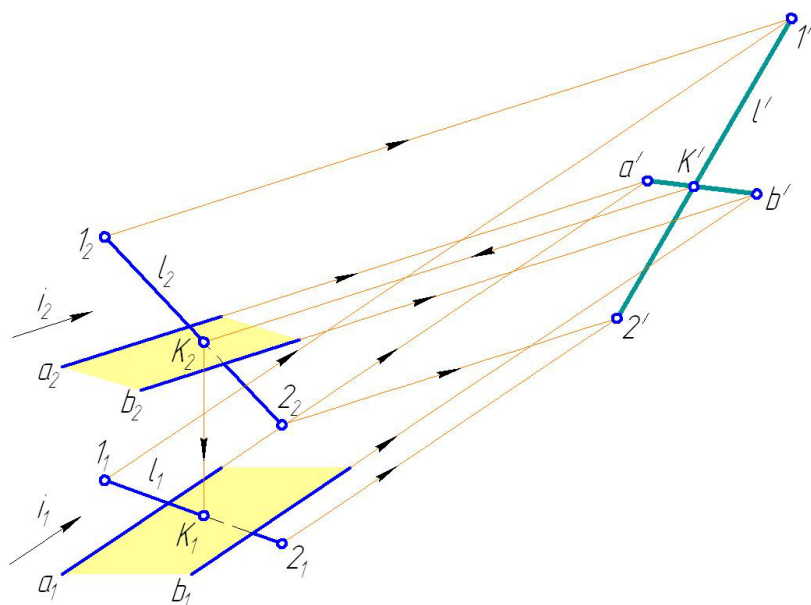


Рисунок 2.49 – Визначення точки перетину прямої і площини

На рис. 2.50 побудована лінія  $k$  перетину площини  $\Sigma$ , заданої паралельними прямими  $a, b$ , із площиною  $\Omega$ , заданою трикутником  $ABC$ . Уведено проєціювальний промінь  $i$ , паралельний площині  $\Sigma$ . Косокутна проєкція площини  $\Sigma$  на бісекторну площину  $\epsilon$  прямою  $ab'$ , яка перетинається із косокутною проєкцією  $A'B'C'$  площини  $\Omega$  по прямій  $k'$ , заданій відрізком  $M'N'$ . За допомогою ліній косокутного проєкційного зв'язку визначаються фронтальна і горизонтальна проєкції шуканої прямої  $k$ .

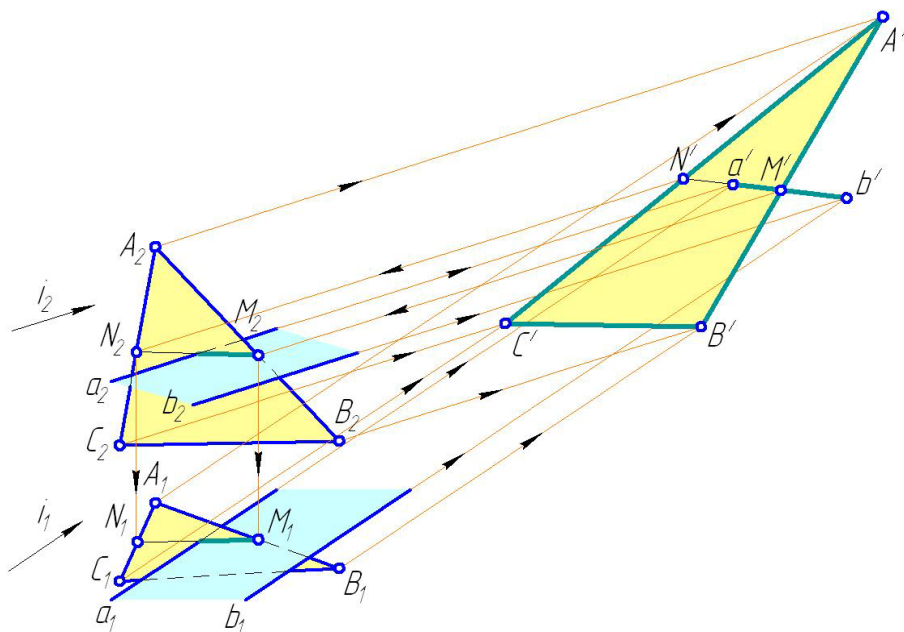


Рисунок 2.50 – Визначення лінії перетину площин

## 2.6 КОМБІНОВАНІ СПОСОБИ

Описані у розділах 1, 2 способи дозволяють розв'язувати велику кількість позиційних і метричних задач нарисної геометрії. При цьому одну задачу можна розв'язати різними способами, які відрізняються складністю реалізації. Тому перш ніж розв'язувати ту чи іншу задачу, необхідно проаналізувати і порівняти між собою різні способи за критерієм їх складності. Суб'єктивна думка авторів із цього приводу наведена у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Способи розв'язання задач нарисної геометрії

Задача \ Спосіб	Без застосування перетворення комплексного креслення	Спосіб заміни площин проєкцій	Спосіб обертання навколо проєкційно-вальної осі	Спосіб плоско-паралельного переміщення	Спосіб обертання навколо лінії рівня	Спосіб косокутного проєціювання	Спосіб аксонометричного проєціювання	Метод послідовних наближень
Сліди прямої	■						■	
Сліди площини	■						■	
Натуральна величина відрізка	■	■	■					
Натуральна величина плоскої фігури	■	■	■	■	■			
Кути нахилу прямої до площин проєкцій	■	■						
Кути нахилу площини до площин проєкцій		■						
Точка перетину прямої і площини	■	■	■	■	■	■	■	■
Лінія перетину двох площин	■	■	■	■	■	■	■	■
Точки перетину лінії і кривої поверхні	■							■
Лінія перетину площини і кривої поверхні	■	■	■	■				■
Лінії перетину двох кривих поверхонь	■							■
Відстань від точки до прямої	■	■	■	■	■			
Відстань від точки до площини	■	■	■	■	■			
Відстань між паралельними прямими	■	■	■	■	■			
Відстань між паралельними прямою і площиною	■	■	■	■	■			
Відстань між паралельними площинами	■	■	■	■	■			
Відстань між мимобіжними прямими	■	■	■	■	■			
Плоский кут		■	■	■	■			
Кут між прямою і площиною		■	■	■	■			
Двогранний кут		■	■	■	■			

■ – найпростіша реалізація    ■ – спосіб середньої складності    ■ – складна реалізація    □ – недоцільне або неможливе застосування

Із табл. 2.1 бачимо, що універсальним способом розв'язання майже всіх задач нарисної геометрії є спосіб заміни площин проєкцій.

При розв'язанні комплексних задач спосіб заміни площин проєкцій можна доповнювати іншими способами (наприклад, обертання навколо проєкційно-вальної осі, плоско-паралельного переміщення тощо). Вміння поєднувати різні способи свідчить про високий рівень досвідченості майбутнього інженера.

На рис. 2.51 визначена натуральна величина трикутника  $ABC$  із використанням комбінації двох способів – заміни площин проєкцій і плоскопаралельного переміщення. На рис. 2.52 комбінацією двох зазначених способів визначено двогранний кут  $\theta$  при ребрі  $AB$ .

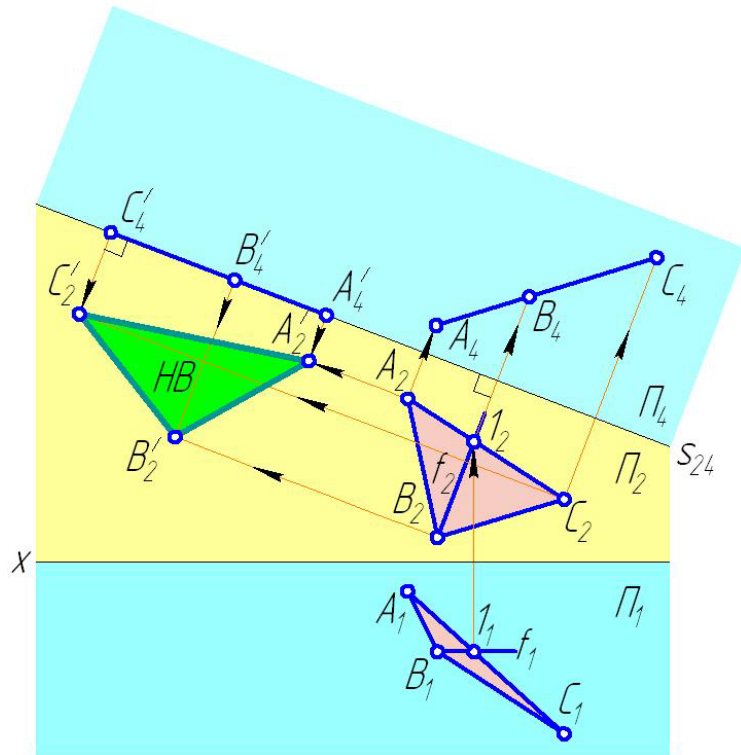


Рисунок 2.51 – Визначення натуральної величини плоскої фігури

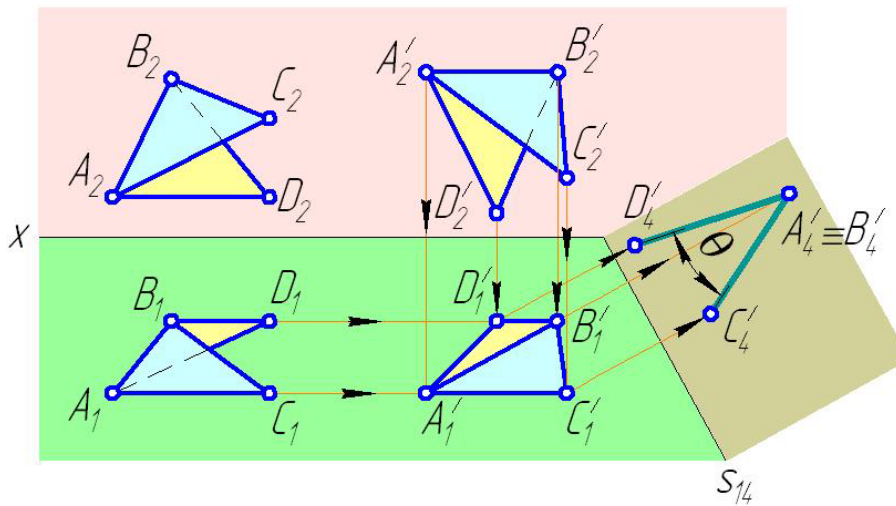
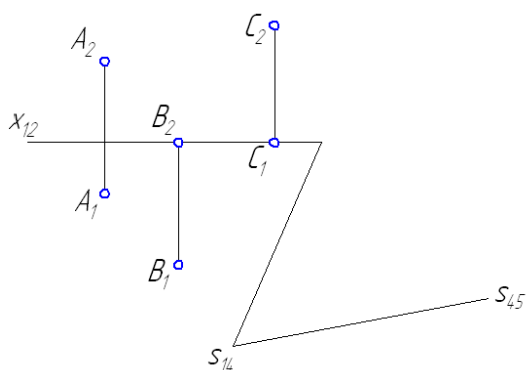


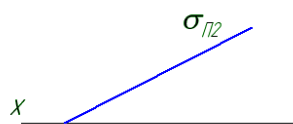
Рисунок 2.52 – Визначення двогранного кута

### ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

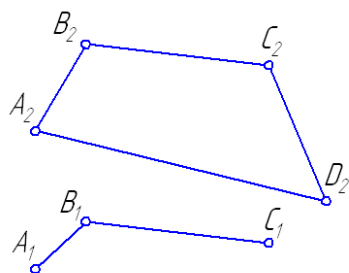
1. Знайдіть проєкції точок  $A, B, C$  на площини проєкцій  $\Pi_4, \Pi_5$ .



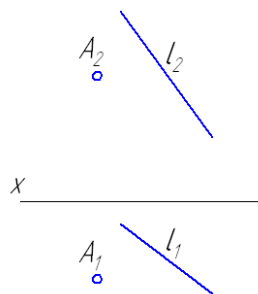
2. Побудуйте горизонтальний слід площини, нахиленої під кутом  $30^\circ$  до площини проєкцій  $\Pi_2$ .



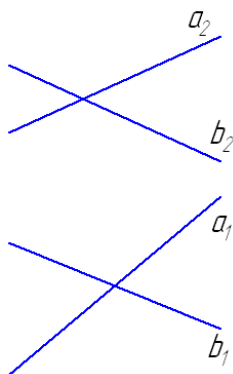
3. Визначте натуральну величину плоского чотирикутника  $ABCD$  способом заміни площин проєкцій.



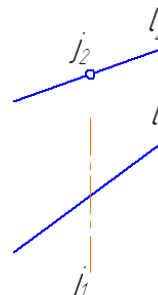
4. Знайдіть відстань від точки  $A$  до прямої  $l$  способом заміни площин проєкцій.



5. Знайдіть відстань між прямими  $a, b$  способом заміни площин проєкцій.

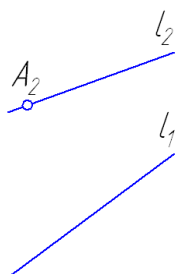


6. Поверніть пряму  $l$  навколо фронтально-проєціувальної осі  $j$  на кут  $60^\circ$  у напрямі руху годинникової стрілки.

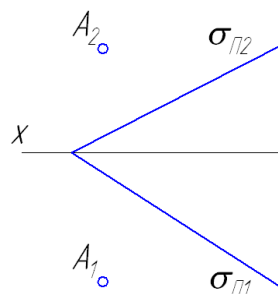




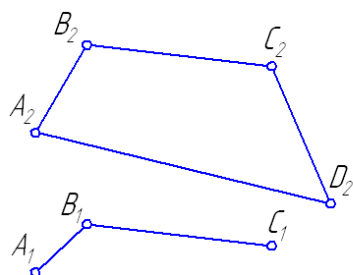
7. На прямій  $l$  побудуйте відрізок  $AB$  довжиною 25 мм.



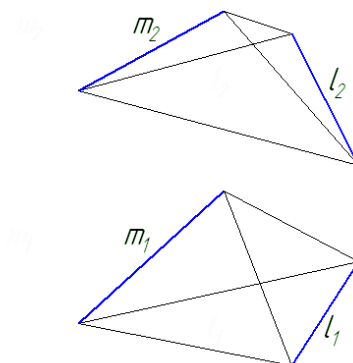
8. Визначте відстань від точки  $A$  до площини способом обертання навколо проєціювальної осі.



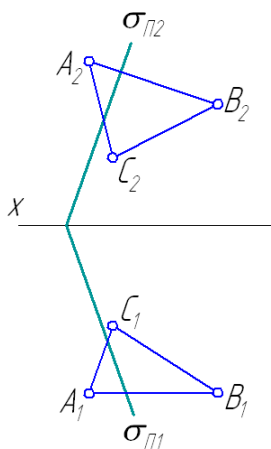
9. Знайдіть натуральну величину плоского чотирикутника  $ABCD$  способом плоскопаралельного переміщення.



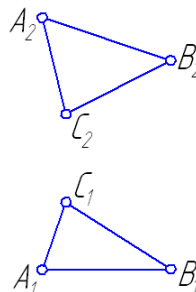
10. Знайдіть двогранний кут при ребрі  $l$  і відстань між прямими  $l, m$  способом плоскопаралельного переміщення. Визначте видимість ліній.



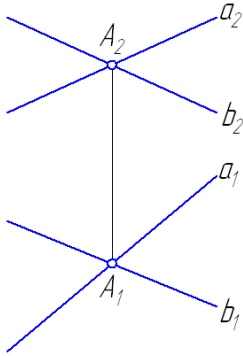
11. Визначте лінію перетину двох площин способом плоскопаралельного переміщення.



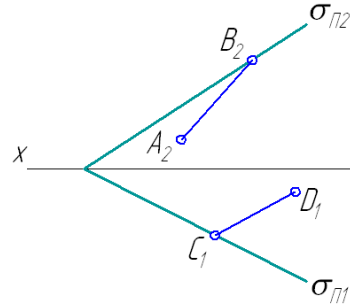
12. Визначте натуральну величину трикутника способом обертання навколо фронталі.



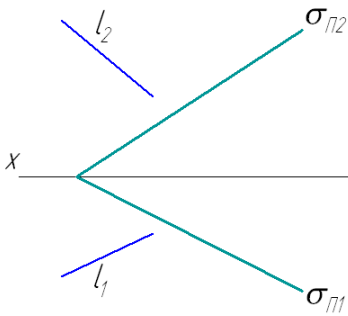
13. Знайдіть кут між прямими  $a$ ,  $b$  способом обертання навколо горизонталі.



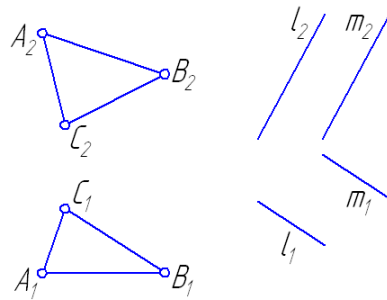
14. Способом суміщення визначте натуральну величину чотирикутника  $ABCD$ , який належить площині  $\Sigma$ .



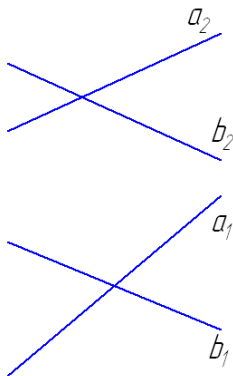
15. Знайдіть точку перетину прямої  $l$  із площиною  $\Sigma$  способом косокутного проєціювання.



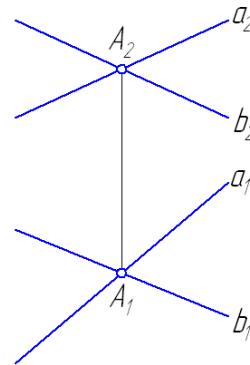
16. Знайдіть лінію перетину площин способом косокутного проєціювання.



17. Визначте відстань між мимобіжними прямими комбінацією способів заміни площин проєкцій і плоскопаралельного переміщення.



18. Знайдіть кут між прямими  $a$ ,  $b$  комбінацією способів заміни площин проєкцій і плоскопаралельного переміщення.



### ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які існують способи перетворення комплексного креслення?
2. З якою метою використовуються способи перетворення комплексного креслення?
3. У чому полягає спосіб заміни площин проєкцій? Для розв'язання яких задач він застосовується?
4. Опишіть правила проєціювання точки на допоміжну площину проєкцій.
5. Опишіть алгоритм визначення натуральної величини плоскої фігури способом заміни площин проєкцій.
6. Як визначається кут нахилу площини загального положення до площини проєкцій?
7. Як визначається кут між прямою і площиною способом заміни площин проєкцій?
8. Як визначається двогранний кут способом заміни площин проєкцій?
9. Опишіть алгоритм визначення відстані між мимобіжними прямими способом заміни площин проєкцій.
10. У чому полягає спосіб обертання навколо проєціювальної осі? Для розв'язання яких задач він застосовується?
11. Опишіть алгоритм визначення натуральної величини відрізка способом обертання навколо проєціювальної осі.
12. Як визначається відстань від точки до прямої і площини способом обертання навколо проєціювальної осі?
13. Який рух тіла називається плоскопаралельним? За допомогою комбінації яких рухів він реалізується?
14. У чому полягає спосіб плоскопаралельного переміщення? Для розв'язання яких задач він застосовується?
15. Сформулюйте основне правило плоскопаралельного переміщення.
16. Опишіть правило визначення видимості проєкцій точок і ліній тіла при його плоскопаралельному переміщенні.
17. Як визначається кут між прямою і площиною способом плоскопаралельного переміщення?
18. Як визначається двогранний кут способом плоскопаралельного переміщення?
19. Опишіть алгоритм визначення натуральної величини фігури способом плоскопаралельного переміщення.
20. У чому полягає спосіб обертання навколо лінії рівня? Для розв'язання яких задач він застосовується?
21. Як визначається натуральна величина плоскої фігури способом обертання навколо лінії рівня?
22. У чому полягає спосіб суміщення?
23. Опишіть алгоритм суміщення площини загального положення з горизонтальною площиною проєкцій.
24. Які види косокутного проєціювання використовуються у нарисній геометрії?
25. Опишіть правило косокутного проєціювання точки на площину  $\Pi_2$ .
26. Опишіть правило косокутного проєціювання точки на горизонтально-проєціювальну площину.
27. Яка площина називається бісекторною? Назвіть властивість проєкцій точок бісекторної площини.
28. Опишіть правило косокутного проєціювання точки на бісекторну площину.
29. Опишіть алгоритм визначення точки перетину прямої і площини та двох площин способом косокутного проєціювання.
30. З якою метою застосовуються комбіновані способи нарисної геометрії?
31. Які задачі нарисної геометрії можна розв'язати комбінацією способів заміни площин проєкцій і плоскопаралельного переміщення?

## РОЗДІЛ 3

### КРИВІ ЛІНІЇ І ПОВЕРХНІ

---

#### 3.1 КРИВІ ЛІНІЇ

##### 3.1.1 ПЛОСКІ КРИВІ ЛІНІЇ

###### 3.1.1.1 АЛГЕБРАЇЧНІ КРИВІ

###### 3.1.1.1.1 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Будь-яку криву лінію можна розглядати з двох підходів:

- геометричний підхід* – лінія є упорядкованою сукупністю точок (рис. 3.1 а);
- кінематичний підхід* (від грецького *κινεμα* – рух) – лінія є траєкторією точки (рис. 3.1 б).

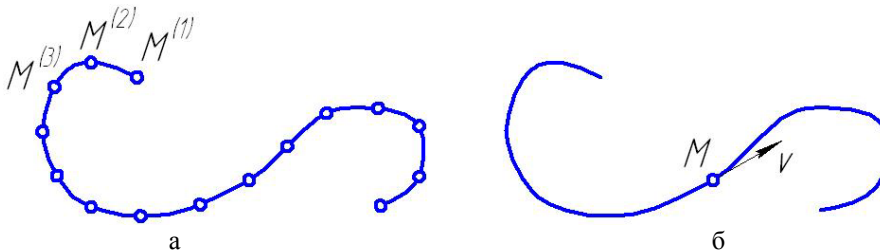


Рисунок 3.1 – Способи подання кривих ліній

Нескінченну сукупність кривих можна поділити на такі види:

а) за математичною формою запису:

1) *алгебраїчні* – криві, які задаються алгебраїчними рівняннями у даній системі координат. Наприклад,  $x^2 + 3y^2 = 2$ ;

2) *неалгебраїчні* – криві, що задаються системою параметричних рівнянь (див. п. 3.1.1.2–3.1.1.6, 3.1.2). Наприклад:  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = t$  ( $t$  – змінний параметр);

б) за розміщенням у просторі:

1) *плоскі* – криві, усі точки яких належать площині;

2) *просторові* – криві, точки яких не належать одній площині (див. п. 3.1.2).

Алгебраїчні криві залежно від ступеня рівняння, яким вони описані, поділяються на криві другого порядку і криві вищих порядків (див. п. 3.1.1.1.2). Алгебраїчні криві зручно подавати у геометричний спосіб.

До плоских алгебраїчних кривих другого порядку належать лінії, що описуються таким алгебраїчним рівнянням:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0. \quad (3.1)$$

Форма кривої залежить від співвідношень коефіцієнтів  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  цього рівняння.

Усі плоскі криві другого порядку є контурами *конічних перерізів* – плоских перерізів прямого кругового конуса (див. п. 4.2.1, табл. 4.1, рис. 4.13). Конічні перерізи (рис. 3.2) були відомі за часів Стародавньої Греції. Найбільш повним твором, присвяченим цим кривим, є твір Аполлонія Пергського «Конічні перерізи».

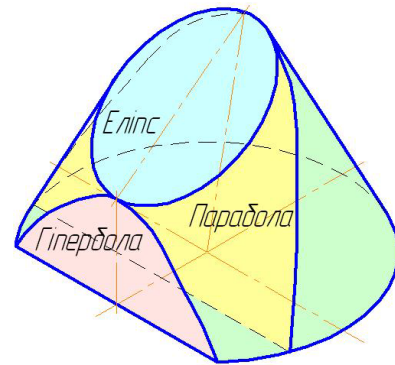


Рисунок 3.2 – Конічні перерізи

Існують три основні види конічних перерізів: еліпс, гіпербола, парабола. Крім того, існують їх окремі і вироджені форми: коло як окремий випадок еліпса; дві прямі як крайній випадок гіперболи; пряма як крайній випадок параболи; точка як крайній випадок кола.

*Еліпс* (від грецького *έλλειψις* – *недолік*) – геометричне місце точок  $M$  площини, сума відстаней від яких до двох заданих точок  $F_1, F_2$  (фокусів) є незмінною (рис. 3.3 а). Еліпс є контуром перерізу конуса площиною, не паралельною його осі і твірній лінії та не перпендикулярною до його осі (рис. 3.2).

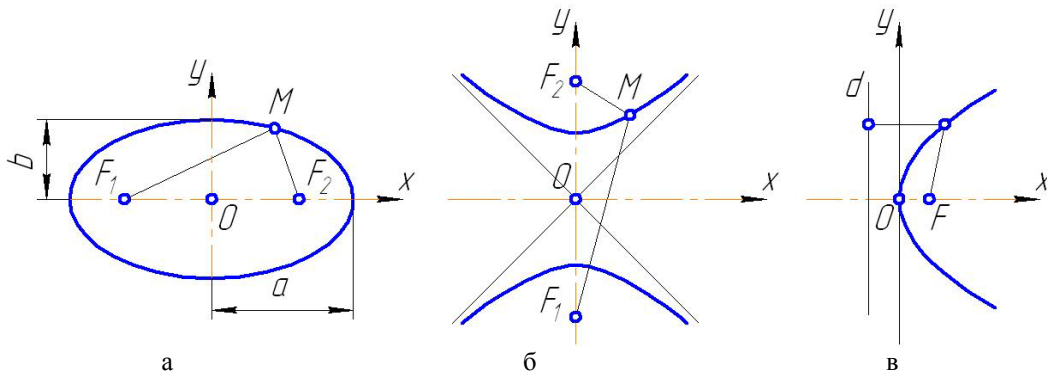


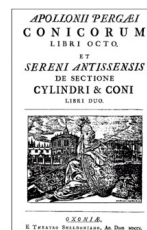
Рисунок 3.3 – Плоскі алгебраїчні криві другого порядку

Еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, які перетинаються у його центрі  $O$ . У випадку, коли більша і менша півосі  $a, b$  еліпса однакові, еліпс вироджується у *коло*. Еліпсом є прямокутна, косокутна, аксонометрична проекції кола, яке належить площині загального положення (див. рис. 4.14; пп. 6.2 – 6.3, рис. 6.5 а – в, рис. 6.9 а – в).



(262 – 190 до н. е.)

*Аполлоній Пергський* (‘Απολλώνιος ό Περγαίος) – математик Стародавньої Греції, один із трьох (поряд з Евклідом і Архімедом) великих геометрів античності. У творі «Конічні перерізи» увів поняття «еліпс», «гіпербола», «парабола». Один із дослідників нерівномірного руху планет.



*Гіпербола* (від грецького *ύπερβολή* – надлишок) – геометричне місце точок  $M$  площини, різниця відстаней від яких до двох заданих фокусів  $F_1, F_2$  є незмінною (рис. 3.3 б). Гіпербола має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії  $x, y$ , які перетинаються у точці, рівновіддаленій від його фокусів  $F_1, F_2$ . Парабола має дві гілки, з боку кожної з якої є фокус. Гіпербола є контуром перерізу конуса площиною, паралельною його осі.

*Парабола* (від грецького *παράβολή* – додаток) – геометричне місце точок  $M$ , рівновіддалених від його фокуса  $F$  і прямої  $d$  – директриси (рис. 3.3 в). Парабола має одну вісь симетрії, яка проходить через фокус  $F$  перпендикулярно до директриси  $d$ . Парабола є контуром перерізу конуса площиною, паралельною його твірній лінії (див. п. 4.2.1, рис. 4.15).

З кінематичної точки зору плоскі криві другого порядку є можливими траєкторіями космічних тіл. Наприклад, за *першим законом Кеплера* усі планети Сонячної системи рухаються по еліпсах, одним із фокусів яких є Сонце.

Плоскі алгебраїчні криві будують як *лекальні криві* – лінії, побудовані за допомогою спеціального креслярського інструмента – *лекала*.



Для побудови еліпса будуються два концентричні кола з радіусами, які дорівнюють півосям  $a, b$  еліпса. Поділ кіл на рівну кількість  $N$  частин (як правило,  $N=12$ ) дозволяє визначити допоміжні точки  $1', 2', 3', \dots, N', 1'', 2'', 3'', \dots, N''$ .

Шукані точки  $1, 2, \dots, N$  еліпса є точками перетину допоміжних горизонтальних і вертикальних ліній, проведених із відповідних допоміжних точок (рис. 3.4 а).

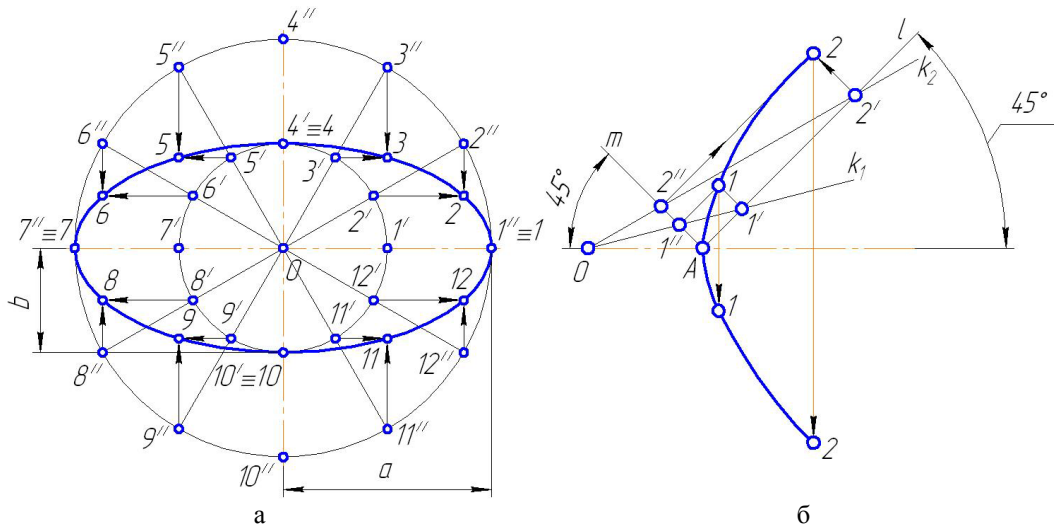


Рисунок 3.4 – Побудова еліпса (а) і гіперболи (б)



(1571 – 1633)

*Йоганн Кеплер (Johannes Kepler)* – німецький математик, астроном, оптик. Один із засновників сучасної астрономії. Відкрив закони руху планет, ґрунтуючись на численних спостереженнях датського вченого астронома Тіхо Браге.



Для побудови гіперболи обираються дві точки  $O$ ,  $A$  (рис. 3.4 б). З точки  $A$  проводяться два взаємно перпендикулярні промені  $l$ ,  $m$  під кутом  $45^\circ$  до горизонту. З точки  $O$  будуються промені  $k_1, k_2, \dots$  і визначаються точки  $1', 2', \dots, 1'', 2'', \dots$  їх перетину з променями  $l, m$ . З отриманих точок проводяться лінії, паралельні  $l, m$ , до перетину. Точки  $1, 2, \dots$  перетину належать гіперболі. Вони симетрично відображаються стосовно горизонтальної осі. Шукана гіпербола проходить через точки  $\dots, 2, 1, A, 1, 2, \dots$

Для побудови параболи (рис. 3.5) посередині між заданим фокусом  $F$  і директрисою  $d$  будується точка  $O$  перегину параболи. Будується множина концентричних кіл (з центром у фокусі  $F$  радіусами  $r_1, r_2, \dots$ ) і множина паралельних директрисі  $d$  прямих, віддалених від неї на відстані  $r_1, r_2, \dots$ . Точки  $1, 2, \dots$  параболи є точками перетину побудованих паралельних прямих із відповідними концентричними колами. Парабола будується за точками  $\dots, 2, 1, O, 1, 2, \dots$

Існують й інші способи побудови еліпса, гіперболи і параболи. Засобами комп'ютерної техніки плоскі криві будуються за допомогою інтерполяційних процедур, у тому числі за допомогою кривої Бернштейна-Без'є, числових методів сплайн-інтерполяції тощо.

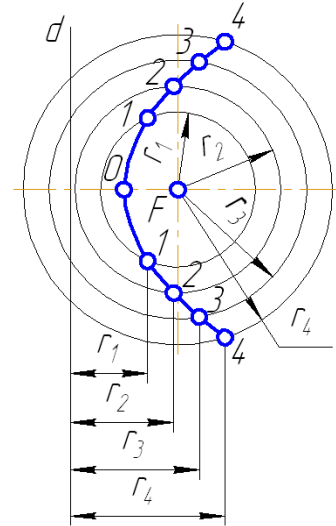


Рисунок 3.5 – Побудова параболи

### 3.1.1.1.2 КРИВІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

До плоских алгебраїчних кривих вищих порядків належать лінії, які описуються алгебраїчними рівняннями третього і вищого порядків. Існує незліченна кількість таких кривих. Проте для їх вивчення досить розглянути лише основні види.

*Кубічна парабола* – плоска крива третього порядку, яка описується рівнянням  $y = ax^3$  (рис. 3.6 а).

*Парабола Нейла* – плоска крива третього порядку, яка описується рівнянням  $y^2 = a^2x^3$  (рис. 3.6 б). Вона є траєкторією точки, яка за рівні проміжки часу опускається на однакові вертикальні відрізки. Цю криву дослідив *Вільям Нейл* (1637 – 1670) – англійський математик, астроном, член Королівського товариства. Він розв'язав задачу про визначення довжини дуги цієї кривої.

*Лист Декарта* – плоска крива третього порядку, для якої сума об'ємів кубів, побудованих на координатах  $x, y$ , дорівнює об'єму прямокутного паралелепіпеда зі сторонами  $x, y, a$  (рис. 3.7):  $x^3 + y^3 = axu$ . Ця крива названа на честь Рене Декарта, який надіслав поштового листа П'єру Ферма зі сформульованою задачею про об'єми зазначених тіл.

*Локон Ан'єзі* – плоска крива третього порядку, яка будується у такий спосіб (рис. 3.8). Будується коло діаметром  $OC$ . Із точки  $O$  проводяться відрізки  $OA_1, OA_2, \dots$ , кінці яких знаходяться на лінії  $a$ , перпендикулярній до діаметра  $OC$ . Знаходяться точки  $B_1, B_2, \dots$  перетину відрізків  $OA_1, OA_2, \dots$  з колом. Точки  $1, 2, \dots$  кривої

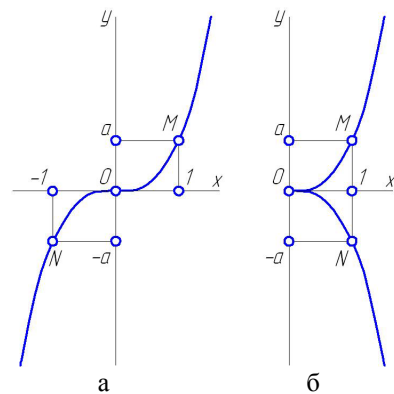


Рисунок 3.6 – Кубічна парабола (а) і парабола Нейла (б)

є точками перетину горизонтальних і вертикальних ліній, проведених із точок  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$

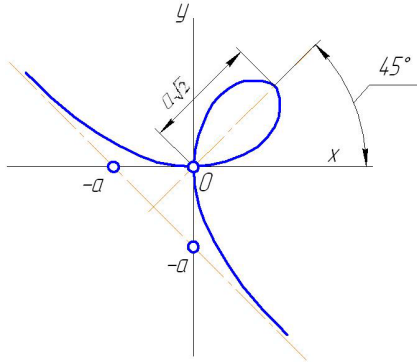


Рисунок 3.7 – Лист Декарта

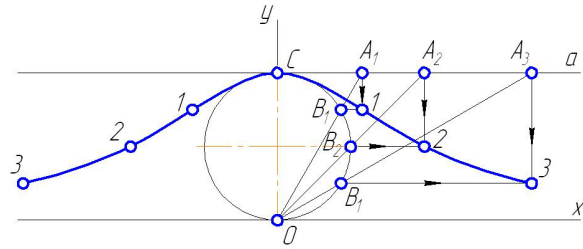


Рисунок 3.8 – Локон Ан'єзі

*Циссоїда Діокла* (від грецького *χισσος* – *плющ*) – плоска крива третього порядку, яка будується у такий спосіб (рис. 3.9). Із точки  $O$  кола діаметром  $OC$  проводяться відрізки  $OA_1, OA_2, \dots$ , кінці яких знаходяться на лінії  $a$ , перпендикулярній до  $OC$ . Знаходяться точки  $B_1, B_2, \dots$  перетину цих відрізків із колом. Із точок  $A_1, A_2, \dots$  відкладаються відрізки  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ , довжини яких дорівнюють довжинам відрізків  $OB_1, OB_2, \dots$ . За точками  $\dots, 2, 1, O, 1, 2, \dots$  будується шукана лінія.

Уперше циссоїда була досліджена Діоклом (246 до н. е. –180 до н. е.) – математиком Старо-давньої Греції часів Аполлонія Пергського. У його творі «Про запальні дзеркала» за допомогою цієї кривої розв'язані задачі про подвоєння об'єму куба і про побудову пропорційних відрізків.

*Строфоїда* (від грецького *στροφή* – *оберт*) – плоска крива третього порядку, яка будується у такий спосіб (рис. 3.10). Із точки  $C$  осі  $y$  проводяться промені  $CA_1, CA_2, \dots$ . Точки  $A_1, A_2, \dots$  належать осі  $x$ . На побудованих променях по обидва боки від точок  $A_1, A_2, \dots$

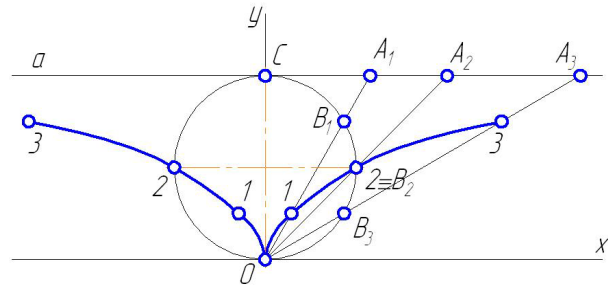


Рисунок 3.9 – Циссоїда Діокла



(1596 – 1650)

*Рене Декарт (René Descartes)* – французький філософ, фізик, математик, фізіолог. Створив аналітичну геометрію і ввів сучасну алгебраїчну символіку. Автор філософського методу радикального сумніву. Засновник механіцизму у фізиці. Започаткував рефлексологію.



(1718 – 1799)

*Марія Гаєтана Ан'єзі (Maria Gaetana Agnesi)* – італійський математик, професорка Болонського університету. Автор праць із диференціального числення і аналітичної геометрії. Автор твору «Основи аналізу для італійського юнацтва».



відкладаються відрізки  $A_11, A_22, \dots$  і  $A_11', A_22', \dots$  з довжинами, які дорівнюють довжинам  $A_1O, A_2O, \dots$ . Шукана лінія проходить через точки  $\dots, 2', 1', O, 1, 2, \dots, C, \dots, 2, 1, O, 1', 2', \dots$

Дослідженнями строфоїди займався Ж. Роберваль у 1645 р. Першою назвою строфоїди була *птеройда* (від грецького *πτερος* – крило). Лінія отримала теперішню назву у 1849 р.

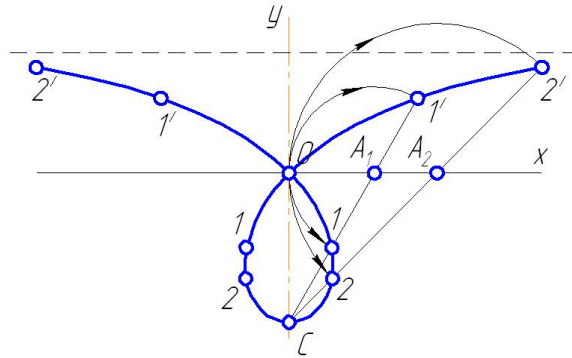


Рисунок 3.10 – Строфоїда

*Овал Кассіні* – геометричне місце точок  $M$  площини, добуток  $a$  відстаней від яких до двох заданих фокусів  $F_1, F_2$  є незмінним (рис. 3.11).

Овал Кассіні в дійсності не є овалом у звичному його розумінні (див. п. 3.1.1.7, рис. 3.38 а), а є алгебраїчною кривою четвертого порядку, яка має різні форми. Однією з таких форм є *лемніската Бернуллі* (від грецького *λεμνίσκος* – стрічка). У Стародавній Греції лемніскатою називали стрічку, якою закріплювали вінок переможця на спортивних змаганнях.

Для лемніскати Бернуллі добуток  $a$  у чотири рази менший за квадрат відстані  $F_1F_2$  між фокусами.

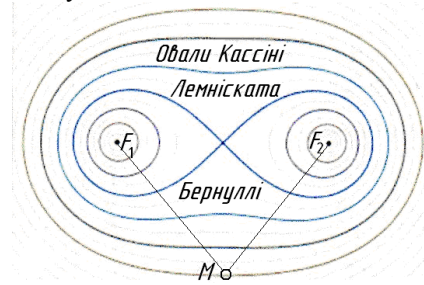


Рисунок 3.11 – Овали Кассіні



(1602 – 1675)

*Жиль Роберваль (Персон'є) (Gilles Personne de Roberval)* – видатний французький математик, фізик, астроном, член Паризької академії наук. Займався проблемами нескінченно малих величин. Винайшов оригінальні способи визначення об'ємів тіл. Автор кінематичного способу побудови дотичної до кривої лінії. Вніс значний вклад у теорію тригонометричних функцій.



(1625 – 1712)

*Джованні Доменіко Кассіні (Giovanni Domenico Cassini)* – італійський і французький астроном, інженер. Автор теорії атмосферної рефракції. Відкрив чотири супутники Сатурна. Автор великої карти Місяця. Визначив відстань від Землі до Марса. Помилково вважав, що орбітами планет є побудовані ним овали.

*Крива Персея* – плоска крива четвертого порядку, яка є лінією перетину відкритого тора (див. п. 4.2.1, табл. 4.1, рис. 4.13) площиною  $\Sigma$ , паралельною його осі (рис. 3.12).

Ця лінія названа на честь давньогрецького геометра Персея (II ст. до н. е.), який провів дослідження різних способів подання кривих ліній.

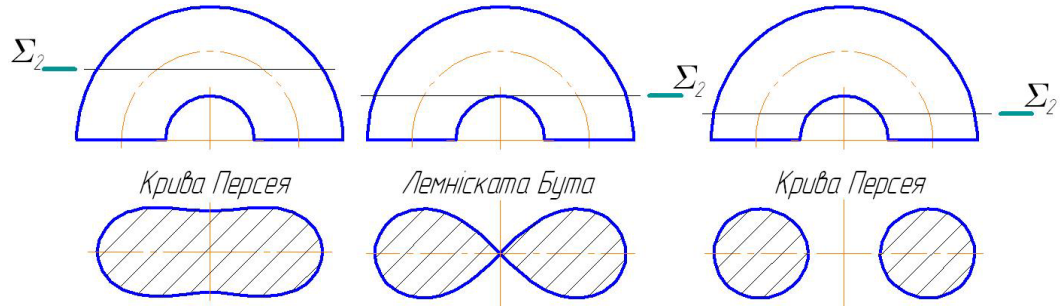


Рисунок 3.12 – Плоскі алгебраїчні криві четвертого порядку

Окремим випадком кривої Персея є *лемніската Бута*, названа на честь англійського математика Джеймса Бута. Ця лінія утворюється, коли січна площина  $\Sigma$  є дотичною до внутрішньої твірної лінії тора (див. п. 4.2.1, рис. 4.16).

*Конхоїда Нікомедя* (від грецького *κωνχος* – раковина, *εἶδος* – вид) – лінія, яка утворюється зміною (збільшенням або зменшенням) на постійну величину  $a$  відстаней від початку відріку  $O$  до кожної точки  $M$  прямої  $l$  (рис. 3.13).

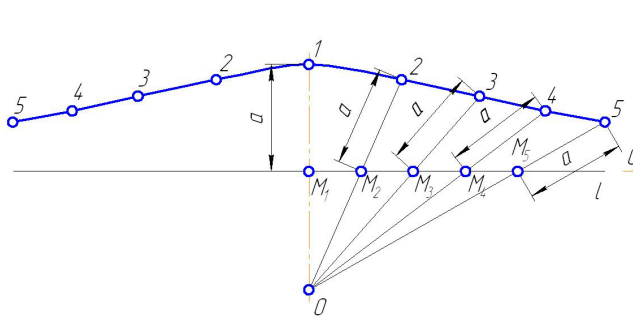


Рисунок 3.13 – Конхоїда Нікомедя

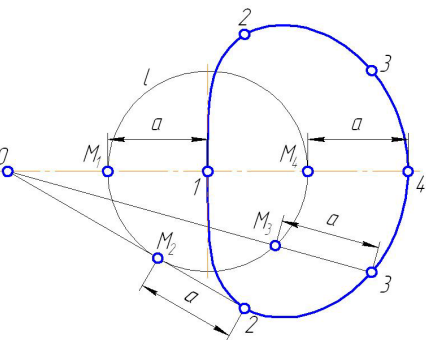


Рисунок 3.14 – Равлик Паскаля

Конхоїда Нікомедя є плоскою кривою четвертого порядку і названа на честь давньогрецького математика, який жив у III ст. до н. е. і займався проблемою квадратури кола і трисекції кута.



(1654 – 1705)

*Якоб Бернуллі (Jacob Bernoulli)* – швейцарський математик, професор Базельського університету. Вніс значний вклад у розвиток аналітичної геометрії і зародження варіаційного числення. Значних досягнень здобув у теорії чисел і рядів, теорії імовірностей. Автор терміна «інтеграл». Заклав основи вивчення лемніскаат.

*Равлик Паскаля* – лінія, яка утворюється зміною (збільшенням або зменшенням) на постійну величину  $a$  відстані від початку відріку  $O$  до кожної точки  $M$  кола.

Ця лінія присвячена Етьєну Паскалю (1623 – 1662) – королівському чиновнику, батьку видатного вченого Блеза Паскаля.

На рис. 3.14 побудований равлик Паскаля для випадку, коли початок відріку  $O$  віддалений від кола на величину радіуса. Значення  $a$  дорівнює радіусу кола.

*Овал Декарта* – геометричне місце точок площини, відстані  $MF_1$ ,  $MF_2$  від кожної точки  $M$  якої до двох фокусів  $F_1$ ,  $F_2$  пов'язані лінійним співвідношенням  $a \cdot MF_1 + b \cdot MF_2 = c$  (рис. 3.15), де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – незмінні параметри.

Овал Декарта не є овалом за означенням (див. п. 3.1.1.7, рис. 3.38 а), а є кривою четвертого порядку. За певних значень  $a$ ,  $b$ ,  $c$  він вироджується в еліпс або коло, гіперболу, параболу, равлик Паскаля.

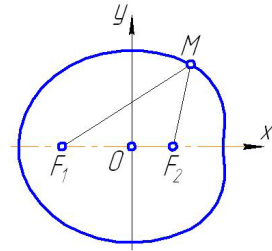


Рисунок 3.15 – Овал Декарта

### 3.1.1.2 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ КРИВИ

До *тригонометричних кривих* відносять плоскі криві лінії, які описуються тригонометричними рівняннями  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ , або рівняннями на їх основі. Оскільки усі тригонометричні функції можна виразити через функцію, наприклад, синуса, розглянемо лише синусоїду.

*Синусоїда* – траєкторія точки  $M$ , яка рівномірно рухається по колу радіусом  $a$ , яке ковзає без кочення по плоскій поверхні.

Для побудови синусоїди (рис. 3.16) будується коло радіусом  $a$ . Останнє ділиться на рівну кількість  $N$  частин (як правило,  $N = 12$ ). Із крайньої правої точки 1 кола будується горизонтальний відрізок  $1''1$ , довжина якого дорівнює довжині кола  $2\pi a$ . Відрізок  $1''1$  ділиться на  $N$  рівних частин. Із точок 1, 2, ...,  $N$  кола і  $1$ ,  $2'$ ,  $3'$ , ...,  $1''$  відрізків  $1''1$  проводяться вертикальні і горизонтальні лінії до їх взаємного перетину. Точки 1, 2, ... перетину цих ліній є точками шуканої синусоїди.

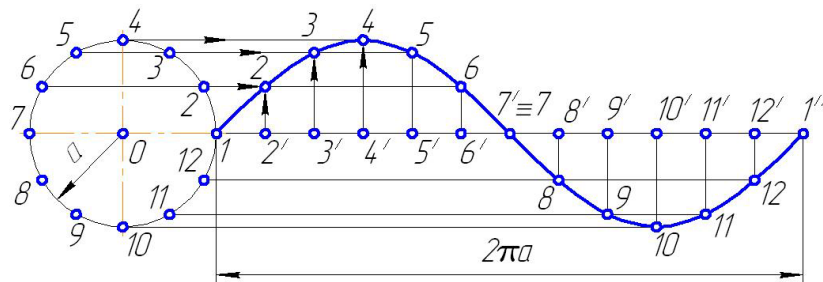


Рисунок 3.16 – Синусоїда

Перші дослідження синусоїди почались у Стародавній Індії. Спочатку ця крива називалась «арха-джива», що означає «напівтягива». Пізніше слово трансформувалось у «джайб» – «впадина». Європейський термін «sinus» був застосований австрійським математиком Георгом фон Поїєрбахом (1423 – 1461), який склав таблицю значень цієї функції. Значний вклад у розвиток тригонометричних функцій вніс видатний французький математик Ж. Роберваль. Він уперше у 1634 р. побудував синусоїду.

### 3.1.1.3 ЦИКЛОЇДАЛЬНІ КРИВІ

До класу циклоїдальних кривих належать траєкторії точки кола, яке рухається по нерухомій поверхні без проковзування.

*Циклоїда* (від грецького *κυκλοειδής* – *круглий*) – траєкторія точки кола, яке котиться по прямій без проковзування.

Для побудови циклоїди (рис. 3.17) коло заданого радіуса  $a$  ділиться на  $N$  рівних частин (наприклад,  $N = 12$ ). Це коло рівномірно дублюється  $N$  разів (із кроком  $2\pi a/N$ ) у напрямку променя, який виходить із центра  $O$  кола. Із точок  $1', 2', \dots$  кола проводяться горизонтальні промені до перетину із побудованими колами. У результаті за отриманими точками 1, 2, ... будується циклоїда.

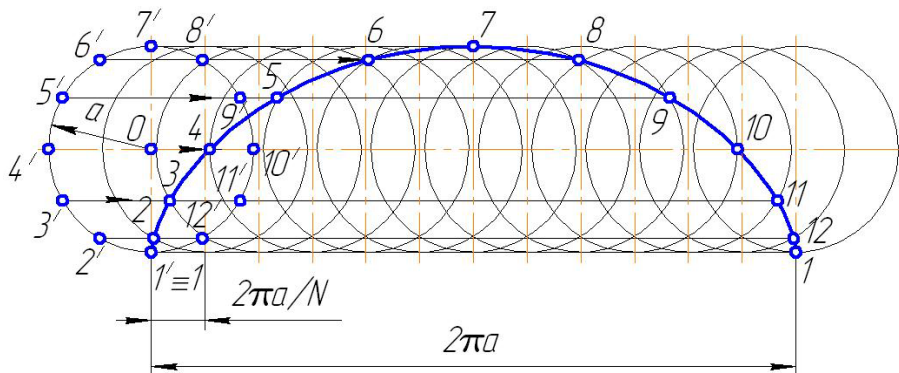


Рисунок 3.17 – Циклоїда

Першою назвою циклоїди була «рулетта». Термін «циклоїда» ввів Галілео Галілей, сучасники якого вивчали цю криву. Ґрунтовні дослідження циклоїди належать Я. Бернуллі.

Перевернута циклоїда називається *брахістохроною* – кривою найшвидшого спуску матеріальної точки.

Х. Гюйгенс виявив властивість точки зберігати період власних коливань під час руху по перевернутій циклоїді. Ця властивість була використана ним при створенні точних годинників.



(1564 – 1642)

*Галілео Галілей (Galileo Galilei) – італійський фізик, механік, астроном, філософ, математик, який зробив значний внесок у науку свого часу. Він уперше використав телескоп для дослідження небесних тіл і зробив численні астрономічні відкриття. Галілей є засновником експериментальної фізики. Своїми експериментами він «знищив» метафізику Аристотеля і заклав фундамент класичної механіки.*



(1629 – 1695)

*Христіан Гюйгенс (Christiaan Huygens) – нідерландський фізик, механік, математик, астроном, винахідник, президент Паризької академії наук. Винайшов маятниковий годинник, а також точний кишеньковий годинник. Відкрив кільця Сатурна і один із його супутників. Відкрив теорію евольвент і еволют. Заклав основи теорії імовірностей. Його «Книга світогляду» є першою переведеною на Русі книгою, де викладена геліоцентрична теорія Коперника.*



*Епіциклоїда* (від грецького *ἐπί* – над, *κύκλος* – коло) – траєкторія точки кола радіусом  $r$ , яке котиться по зовнішній стороні кола радіусом  $R$  без проковзування.

Існує незліченна кількість епіциклоїд, форма яких залежить від співвідношення  $a = R/r$  радіусів кіл. При  $a = 1$  епіциклоїда називається *кардіоїдою* (від грецького *καρδιοειδής* – *серцеподібний*). На рис. 3.18 а побудована кардіоїда. Коло заданого радіуса котиться по центральному колу такого самого радіуса. Кочення умовно моделюється дванадцятьма положеннями кола. За допомогою допоміжних точок  $1', 2', \dots, 12'$  і дуг кіл, які виходять із цих точок, знаходяться точки  $1, 2, \dots, 12$  перетину дуг із сукупністю побудованих кіл. За точками  $1, 2, \dots, 12$  будується кардіоїда.

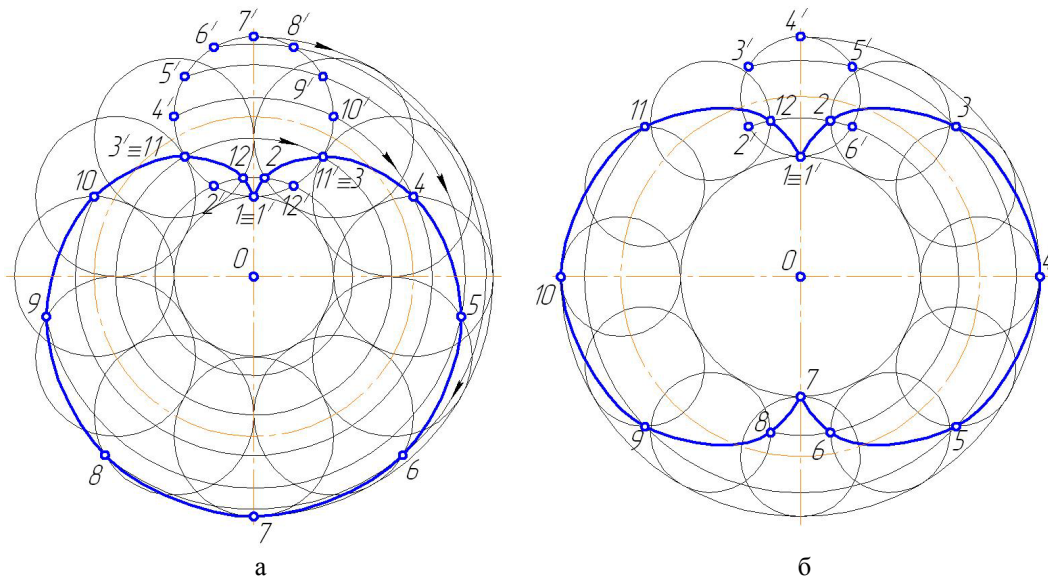


Рисунок 3.18 – Епіциклоїди

Перші згадки про кардіоїду зустрічаються у праці французького вченого Луї Карре (1705 р.). Назву цієї лінії у 1741 р. дав італійський вчений Джованні Кастіллоне. Кардіоїда, крім того, що належить класу циклоїдальних кривих, також є окремим випадком равлика Паскаля (див. п. 3.1.1.1.2, рис. 3.14).

У випадку, коли  $a = 2$ , епіциклоїда називається *нефроїдою* (від грецького *νεφροειδής* – *ниркоподібний*). На рис. 3.18 б побудована нефроїда. Коло заданого радіуса котиться по центральному колу удвічі більшого радіуса. Кочення умовно моделюється дванадцятьма положеннями меншого кола. За допомогою допоміжних точок  $1', 2', \dots, 6'$  і дуг кіл, які виходять із цих точок, знаходяться точки  $1, 2, \dots, 12$  перетину дуг із сукупністю побудованих кіл. За точками  $1, 2, \dots, 12$  будується нефроїда.

*Гіпоциклоїда* (від грецького *ὑπό* – під, *κύκλος* – коло) – траєкторія точки кола радіусом  $r$ , яке котиться по внутрішній стороні кола радіусом  $R$  без проковзування.

Серед незліченної кількості гіпоциклоїд, форма яких залежить від співвідношення радіусів кіл  $a = R/r$ , необхідно виділити такі. При  $a = 3$  гіпоциклоїда називається *кривою Штейнера*, або *дельтоїдою* (від грецького *δελτοειδής* – *дельтоподібний*). На рис. 3.19 а побудована дельтоїда. Коло заданого радіуса котиться по внутрішній стороні кола утричі більшого радіуса. Кочення умовно моделюється вісімнадцятьма положеннями меншого кола. За допомогою точок  $1', 2', \dots, 6'$  і дуг кіл, які виходять із цих точок, знаходяться точки  $1, 2, \dots, 18$  перетину дуг із сукупністю побудованих кіл. За точками  $1, 2, \dots, 18$  будується крива Штейнера (дельтоїда).

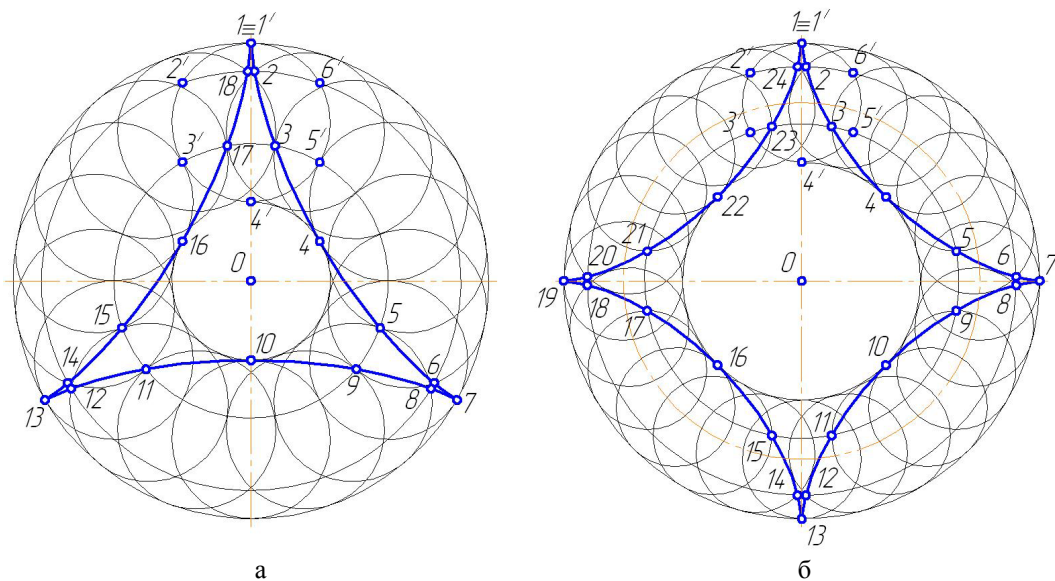


Рисунок 3.19 – Гіпоциклоїди

У випадку, коли  $a = 4$ , гіпоциклоїда називається *астроїдою* (від грецького *αστέριειδής* – *зіркоподібний*). На рис. 3.19 б побудована астроїда. Коло заданого радіуса котиться по внутрішній стороні кола учетверо більшого радіуса. Кочення умовно моделюється двадцятьма чотирма положеннями меншого кола. За допомогою допоміжних точок  $1', 2', \dots, 6'$  і дуг кіл, які виходять із цих точок, знаходяться точки  $1, 2, \dots, 24$  перетину дуг із сукупністю побудованих кіл. За точками  $1, 2, \dots, 24$  будується астроїда.

Лінії класу циклоїд є одними із найбільш поширених кривих у машинобудуванні, оскільки є траєкторіями точок деталей механізмів і машин. Наприклад, точки автомобільних коліс рухаються по циклоїдальних і трохоїдальних траєкторіях; точки зчеплення зубчастих коліс планетарних і диференціальних передач рухаються по епі- і гіпоциклічних траєкторіях.

*Трохоїда* (від грецького *τροχαιδής* – *колесоподібний*) – траєкторія непериферичної точки кола, яке котиться по прямій без проковзування.

Для побудови трохоїди (рис. 3.20) коло заданого радіуса  $r$  ділиться на  $N$  рівних частин (наприклад,  $N = 12$ ). Це коло разом із колом радіусом  $R$  рівномірно (із кроком  $2\pi/N$ ) дублюється  $N$  разів у напрямку променя, який виходить із центра  $O$ . Із точок  $1', 2', \dots$  кола радіусом  $r$  проводяться промені до перетину із побудованими колами. У результаті за отриманими точками  $1, 2, \dots$  будується трохоїда.

На практиці трохоїда використовується в електровакуумних приладах для переміщення електронів. Трохоїдальне зчеплення використовується у шестеренних гідромашинах.



(1796 – 1863)

*Якоб Штейнер (Jacob Steiner) – швейцарський математик, член Берлінської академії наук. Засновник синтетичної геометрії кривих ліній і поверхонь.*

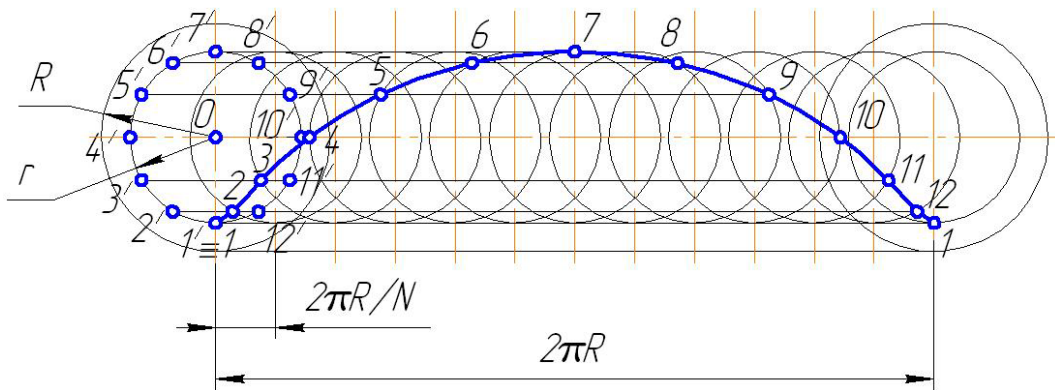


Рисунок 3.20 – Трохоїда

*Епітрохоїда* (від грецького *επί* – над, *τροχός* – колесо) – траєкторія непериферичної точки круга радіусом  $r$ , який котиться по зовнішній стороні кола радіусом  $R$  без проковзування.

На рис. 3.21 а наведено найпростіший вид епітрохоїди. Для її побудови круг заданого радіуса котиться по центральному колу того ж радіуса. Кочення умовно моделюється вісьмома положеннями круга. Кругу належить точка, яка знаходиться на половині радіуса від його центра. За допомогою допоміжних точок  $1', 2', \dots, 8'$  і дуг кіл, які виходять із цих точок, знаходяться точки  $1, 2, \dots, 8$  перетину дуг із сукупністю побудованих кіл. За точками  $1, 2, \dots, 8$  будується епітрохоїда.

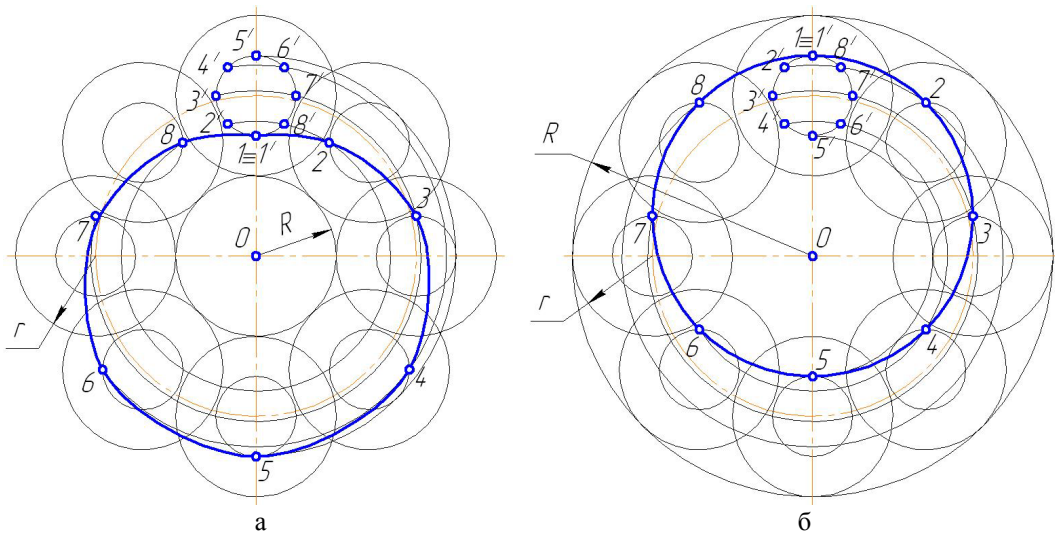


Рисунок 3.21 – Епі- та гіпотрохоїда

Побудована на рис. 3.21 а епітрохоїда є равником Паскаля (див. п. 3.1.1.1.2, рис. 3.14).

*Гіпотрохоїда* – (від грецького *υπό* – під, *τροχός* – колесо) – траєкторія непериферичної точки круга радіусом  $r$ , який котиться по внутрішній стороні кола радіусом  $R$  без проковзування.

На рис. 3.21 б наведено найпростіший вид гіпотрохоїди. Для її побудови круг заданого радіуса котиться по внутрішній поверхні кола удвічі більшого радіуса. Кочення умовно моделюється вісьмома положеннями круга. Кругу належить точка, яка знаходиться

на половині радіуса від його центра. За допомогою допоміжних точок  $1', 2', \dots, 8'$  і дуг кіл, які виходять із цих точок, знаходяться точки  $1, 2, \dots, 8$  перетину дуг із сукупністю побудованих кіл. За точками  $1, 2, \dots, 8$  будується гіпотрохоїда.

Побудована на рис. 3.21 б гіпотрохоїда є еліпсом (див. п. 3.1.1.1.1, рис. 3.4 а).

### 3.1.1.4 СПІРАЛЬНІ КРИВІ

Будь-яка спіральна крива (від латинського *spira* – вигин) є траєкторією точки, яка рухається по прямій, що обертається навколо нерухомого центра. Серед великої кількості спіральних кривих необхідно виділити такі.

*Спіраль Архімеда* – траєкторія точки, яка рівномірно рухається по прямій, яка рівномірно обертається навколо нерухомої точки.

Для побудови спіралі Архімеда (рис. 3.22) коло заданого діаметра ділиться на  $N$  рівних частин  $1''2'', 2''3'', \dots$  (як правило,  $N=12$ ). Із центра  $O$  кола будуються  $N$  відрізків  $O-1, O-2, \dots$ , один з яких  $O-12$  ділиться на  $N$  рівних частин точками  $1', 2', \dots$ . За допомогою дуг кіл знаходяться точки  $1, 2, \dots$ . Спіраль Архімеда будується за точками  $O, 1, 2, \dots$

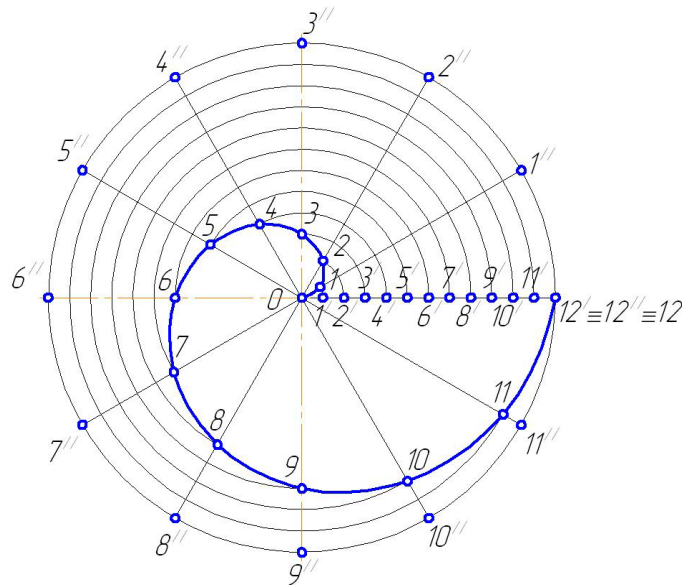


Рисунок 3.22 – Спіраль Архімеда

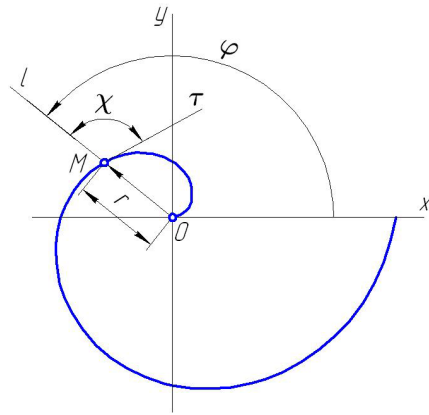


(287 – 212 до н. е.)

Архімед із Сіракуз (Архіμήδης) – давньогрецький математик, фізик, механік і інженер-винахідник. Зробив численні відкриття в геометрії. Заклав основи механіки і гідростатики.



*Ізогональна спіраль* (від грецького *ίσος* – рівний, *γωνία* – кут) – траєкторія точки  $M$ , яка нерівномірно рухається по прямій лінії  $l$ , яка рівномірно обертається навколо нерухомої точки  $O$ , причому кут  $\chi$  між дотичною  $\tau$  (див. п. 3.3) і *радіусом-вектором*  $r$  (вектором, початок якого збігається з початком відріку  $O$ , кінець – із даною точкою  $M$ ) не змінюється (рис. 3.23).



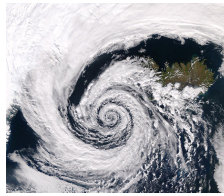
Ізогональна спіраль є *логіарифмічною*, оскільки кут  $\varphi$  між радіусом-вектором  $r$  точки  $M$  і горизонтальною віссю  $x$  пропорційний натуральному логарифму від модуля  $r$ :  $\varphi = \ln(r)$ . Дослідженнями логарифмічної спіралі займався швейцарський математик Я. Бернуллі.

Логарифмічна крива є лінією, якою можуть бути описані будова Всесвіту, природні явища, живі істоти тощо. Наприклад, на рис. 3.24 а показана галактика Вир; на рис. 3.24 б – зона низького тиску над Ісландією; на рис. 3.24 в – раковина моллюска.

Рисунок 3.23 – Логарифмічна спіраль



а



б



в

Рисунок 3.24 – Прояви логарифмічних спіралей

*Клотоїда* (від грецького *κλωθεοειδής* – *ниткоподібний*) – лінія, радіус кривизни якої (див. п. 3.4.2) пропорційний довжині дуги (рис. 3.25).

Інша назва клотоїди – *спіраль Корню* – присвячена французькому фізику, який використав цю криву у дослідженнях дифракції світла.

Клотоїда використовується як перехідна дуга у дорожньому будівництві. Форма дороги у формі клотоїди дозволяє долати повороти без істотного зниження швидкості і з рівномірним обертанням керма.

Для наближеної побудови клотоїди (рис. 3.26) із точок  $O, 1$  проводяться два кола заданого радіуса  $a = 1'O = 1'1$ . Проводиться коло радіусом  $2a$ , дотичне до відрізка  $O1$  (у точці 1) із центром у точці  $2'$ . Із точки 1 будується коло радіусом  $a$  до перетину із колом радіусом  $2a$ . Проводиться коло радіусом  $3a$ , дотичне до відрізка 1 – 2

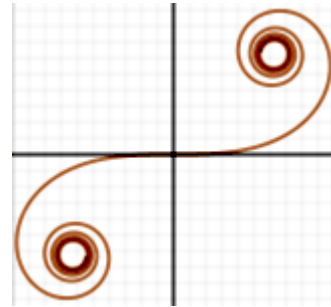


Рисунок 3.25 – Спіраль Корню



(1841 – 1902)

*Марі Альфред Корню (Marie Alfred Cornu)* – французький фізик, президент Паризької академії наук. Виміряв середню густину Землі. Удосконалив метод визначення швидкості світла. Наукові праці стосуються оптики, кристалофізики, спектроскопії.

(у точці 2) із центром у точці 3'. Із точки 2 будується коло радіусом  $a$  до перетину із колом радіусом  $3a$  ... Наближеною клотоїдою є лінія, яка проходить через точки 1, 2, ...

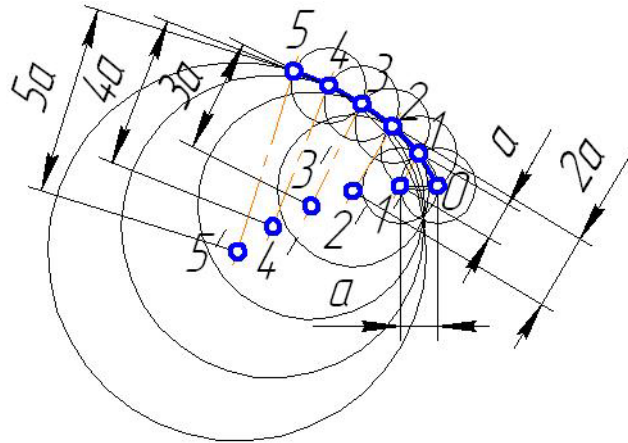


Рисунок 3.26 – Побудова клотоїди

*Спіраль Ферма* – траєкторія точки  $M$ , яка нерівномірно рухається по прямій  $l$ , що обертається навколо нерухомого центра  $O$ , причому кут  $\varphi$  між радіусом-вектором  $r$  і горизонтальною віссю пропорційний квадрату довжини  $r$ :  $\varphi = r^2$  (рис. 3.27 а).

Спіралі Ферма у природі трапляються як лінія у візерунках квіток рослин, наприклад, соняшника (рис. 2.28 а).

Спіраль Ферма є різновидом *параболічної спіралі*, для якої кут  $\varphi$  між радіусом-вектором  $r$  і горизонтальною віссю дорівнює  $\varphi = (r - a)^2$ , де  $a$  – задана відстань (рис. 3.27 б).

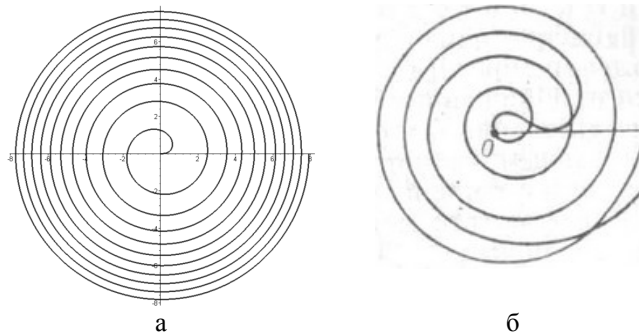


Рисунок 3.27 – Спіраль Ферма (а) і параболічна спіраль (б)



(1601 – 1665)

*П'єр де Ферма (Pierre de Fermat) – французький математик, юрист, поліглот. Один із засновників аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей і теорії чисел. Автор Великої теореми Ферма. Радник Тулузького парламенту.*

Параболічна спіраль часто трапляється у природі (рис. 3.28 а) і техніці (рис. 3.28 б), наприклад, визначає профіль твердосплавних свердел по бетону, цеглі і кераміці.



Рисунок 3.28 – Прояви і застосування спіральних кривих

Окрім вищезазначених, існує також велика кількість інших видів спіралей:

а) гіперболічна:  $\varphi = 1/r$  (рис. 3.29 а);

б) спіраль Галілея:  $r = \varphi^2 - a^2$  (рис. 3.29 б);

в) жезл:  $\varphi = 1/r^2$  (рис. 3.29 в) тощо.

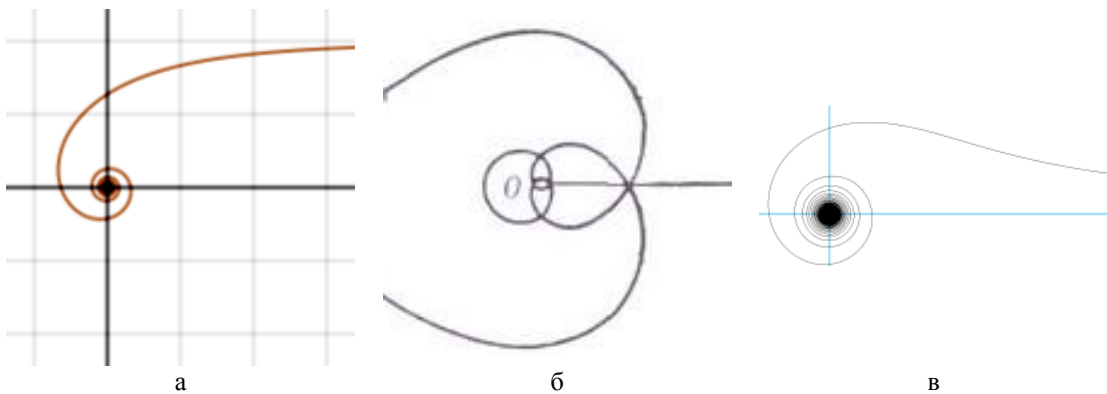


Рисунок 3.29 – Спіральні криві

### 3.1.1.5 ТРАНСЦЕНДЕНТНІ КРИВІ

Плоскою трансцендентною кривою (від латинського *transcendo* – *переступати*) є лінія, яку неможливо описати рівнянням, яке прямо пов'язує координати  $x$ ,  $y$  кожної точки  $M$ . Як правило, трансцендентні криві задаються системою параметричних рівнянь (див. с. 21).

Серед великої різноманітності трансцендентних кривих виділяють такі.

*Квадратриса Динострата* (від латинського *quadro* – *площа*) – траєкторія точки  $M$  перетину двох прямих  $h$ ,  $r$ , перша з яких рівномірно опускається по вертикалі, друга – рівномірно обертається навколо нерухомої точки  $O$  (рис. 3.30 а).

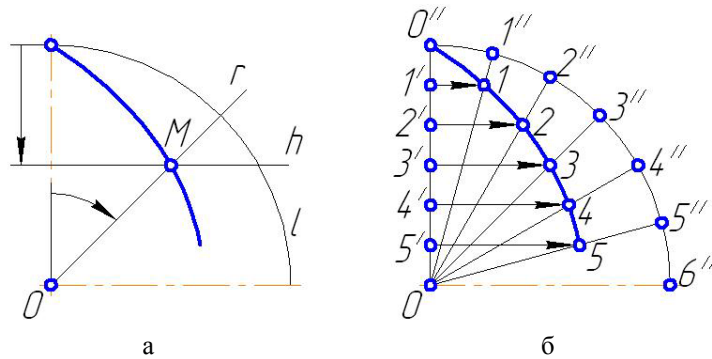


Рисунок 3.30 – Квадратриса Динострата

Для побудови квадраттриси (рис. 3.30 б) чверть кола ділиться на  $N$  рівних частин (наприклад,  $N = 6$ ) точками  $1'', 2'', \dots$ . З центра  $O$  кола проводяться відрізки  $O1'', O2'', \dots$ . Радіус  $OO''$  ділиться на  $N$  рівних частин точками  $1', 2', \dots$ . Точки  $1, 2, \dots$  перетину відрізків  $O1'', O2'', \dots$  із горизонтальними променями, проведеними із точок  $1', 2', \dots$ , є точками квадраттриси.

*Трактриса* (від латинського *trahere* – *волочити*) – плоска крива, будь-яка точка  $M$  якої віддалена від осі  $x$  у напрямку дотичної  $\tau$  (див. п. 3.3) на однакову відстань  $a$  (рис. 3.31 а).

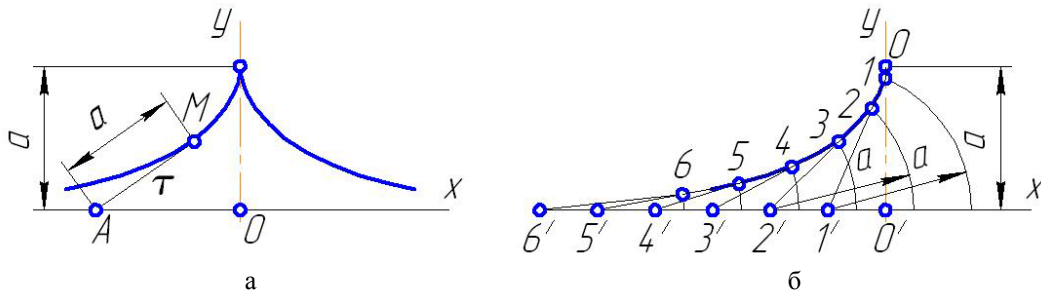


Рисунок 3.31 – Трактриса

Перші згадки про квадратрису належать Паппу Олександрійському і Ямвліху і датуються кінцем III ст. Крива відкрита софістом Гіппієм з Елліди у V ст. до н. е. і застосована ним для розв'язання задачі про трисекцію кута – поділ кута на три рівні частини. Динострат у кінці IV ст. до н. е. за допомогою квадраттриси розв'язував задачу про квадратуру круга – побудову квадрата, площа якого дорівнює площі даного круга.

Трактриса винайдена у 1670 р. К. Перро. Властивості трактриси досліджували Ісаак Ньютон, Христіан Гюйгенс, Готфрід Вільгельм фон Лейбніц.

П. Бугер розв'язав задачу Леонардо да Вінчі про визначення форми мотузки, якою волочать предмет по горизонтальній поверхні, і встановив, що ця лінія є трактрисою.

Трактриса також є *кривою погоні* – розв'язком такої задачі. Нехай точка  $A$  рухається рівномірно прямолінійно. Необхідно знайти лінію, по якій повинна рухатися точка  $M$  так, щоб пряма  $AM$  була до неї дотичною (рис. 3.31 а).

Для наближеної побудови трактриси (рис. 3.31 б) на осі  $y$  відкладається відрізок  $OO'$  заданої довжини  $a$ . Уздовж осі  $x$  послідовно відкладаються однакові відрізки  $O'1', 1'2', \dots$ , довжина яких значно менша за величину  $a$ . З точки  $1'$  будується коло радіусом  $a$  і визначається точка 1 його перетину з віссю  $y$ . З точки  $2'$  будується коло радіусом  $a$  і визначається точка 2 його перетину з відрізком  $1'1$ . З точки  $3'$  будується коло радіусом  $a$  і визначається точка 3 його перетину з відрізком  $2'2$  ... Трактриса наближено будується за точками  $O, 1, 2, \dots$

*Ланцюгова лінія* – лінія, форму якої набуває ланцюг із закріпленими кінцями (рис. 3.32 а).

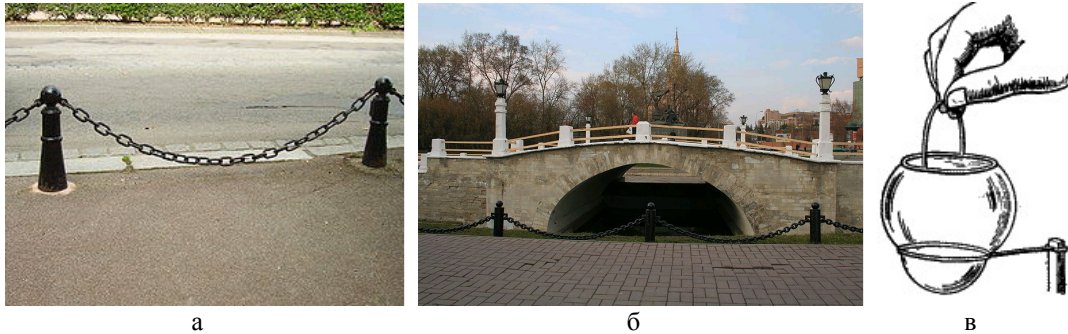


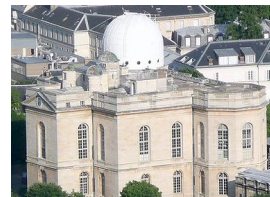
Рисунок 3.32 – Застосування і прояви ланцюгової лінії

Ланцюгова лінія використовується в архітектурі як форма арок, мостів (рис. 2.32 б) тощо. Форми ланцюгової лінії набуває мильна плівка, натягнута на кільце (рис. 2.32 в).



(1613 – 1688)

*Клод Перро (Claude Perrault) – французький інженер, механік, архітектор, лікар і математик. Брат відомого казкаря Шарля Перро. Один із перших членів Французької академії наук. Автор Паризької обсерваторії, Триумфальної арки, колонади східної частини Лувра.*



(1698 – 1758)

*П'єр Бугер (Pierre Bouguer) – французький фізик і астроном, засновник фотометрії. Відомі його праці з теорії кораблебудування, геодезії.*

*Ім'я Бугера внесене до переліку сімдесяти двох найвеличніших вчених Франції.*

### 3.1.1.6 ФІГУРИ ЛІССАЖУ

*Фігури Ліссажу* – траєкторії точки, яка одночасно здійснює два гармонічних коливання із різними частотами у взаємно перпендикулярних напрямках (рис. 3.33).

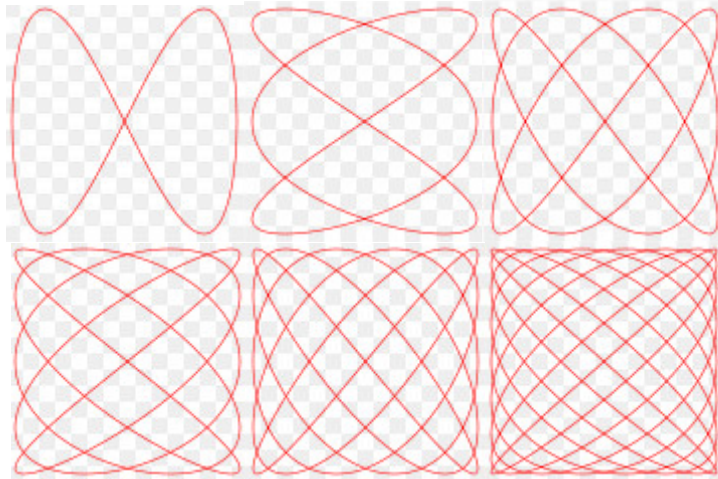


Рисунок 3.33 – Фігури Ліссажу

Уперше ці криві були вивчені Ж. Ліссажу.

Фігури Ліссажу будуються на моніторі електронного *осцилографа* (від латинського *oscillo* – *коливатися* – і грецького *γραφω* – *писати*) – пристрою для дослідження часових і амплітудних параметрів електричних сигналів, що подаються на його входи (рис. 3.34).

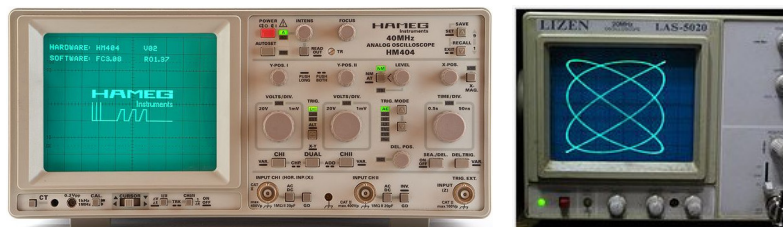
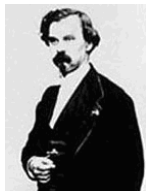


Рисунок 3.34 – Прояви фігур Ліссажу

Одним із найпростіших видів фігур Ліссажу є *лемніската Жероно* – траєкторія точки, яка одночасно здійснює два гармонічних коливання у взаємно перпендикулярних напрямках із частотами, які удвічі відрізняються (рис. 3.35 а). Ця лінія названа на честь Каміля-Кристофа Жероно (1799 – 1891) – французького математика, професора Паризької політехнічної школи. Його наукова діяльність присвячена проблемам геометрії



(1822 – 1880)

*Жуль Антуан Ліссажу (Jules Antoine Lissajous) – французький математик, член-кореспондент Паризької академії наук. Його наукова праця присвячена вібраційній акустиці граток.*

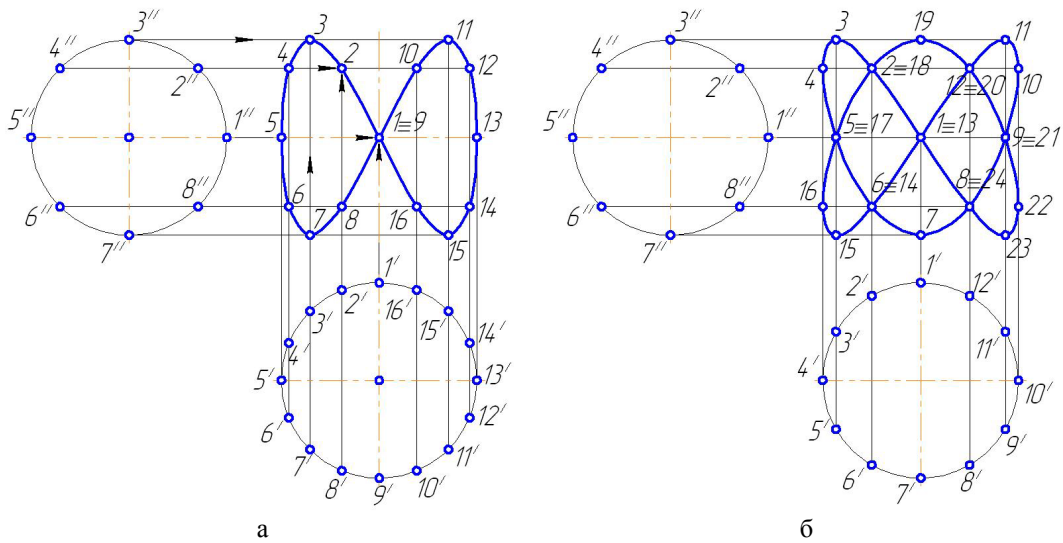


Рисунок 3.35 – Побудова фігур Ліссажу

і діофантового аналізу. Він є автором підручників з аналітичної геометрії і тригонометрії та співзасновником наукового журналу “Nouvelles Annales de Mathématiques”.

Для побудови лемніскати Жероно (рис. 3.35 а) будуються два кола (необов'язково однакових діаметрів) із різними центрами. Одне коло ділиться на  $N$  однакових частин (наприклад, на вісім) точками  $1'', 2'', \dots$ , інше – на  $2N$  частин точками  $1', 2', \dots$ . За допомогою вертикальних і горизонтальних ліній, проведених із побудованих однойменних точок, послідовно визначаються точки  $1, 2, \dots$  перетину. За знайденими точками будується плоска крива – лемніската Жероно.

На рис. 3.35 б побудована фігура Ліссажу для точки, яка одночасно здійснює два коливання, частоти яких відрізняються у півтора рази. Будуються два кола (не обов'язково однакових діаметрів) із різними центрами. Одне коло ділиться на  $N$  однакових частин (наприклад, на вісім) точками  $1'', 2'', \dots$ , інше – на  $1,5N$  частин точками  $1', 2', \dots$ . За допомогою вертикальних і горизонтальних ліній, проведених із побудованих однойменних точок, визначаються точки  $1, 2, \dots$  перетину. За знайденими точками будується фігура Ліссажу.

### 3.1.1.7 СПОЛУЧЕННЯ

*Сполученням* називається плавний перехід від однієї лінії  $l$  до іншої  $m$ , виконаний за допомогою дуги кола (рис. 3.36).

Будь-яке сполучення характеризується такими параметрами:

а) *центр сполучення* – центр  $O$  кола, за допомогою дуги якого будується сполучення;

б) *точки сполучення* – точки  $A, B$  початку і кінця дуги, якою виконується сполучення;

в) *радіус сполучення* – радіус  $R$  дуги, якою виконується сполучення.

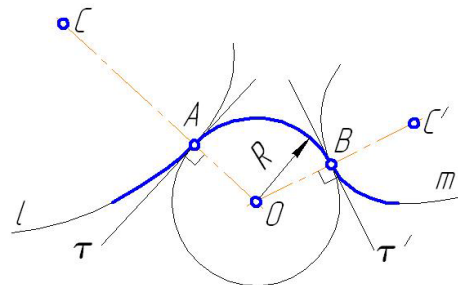


Рисунок 3.36 – Сполучення

**Властивості елементів сполучення:**

- а) центр  $O$  сполучення рівновіддалений від точок  $A, B$  сполучення, причому відстані  $OA, OB$  дорівнюють радіусу  $R$  сполучення;  
 б) прямі  $\tau, \tau'$ , перпендикулярні до відрізків  $OA, OB$ , є дотичними (див. п. 3.3) до ліній  $l, m$ , що сполучаються;  
 в) прямі  $OA, OB$  проходять через центри  $C, C'$  кривизни (див. п. 3.4.2) ліній  $l, m$  відповідно.

Існують десять класичних типів сполучень:

- а) сполучення двох кіл (рис. 3.37 а – е);  
 б) сполучення двох прямих ліній (рис. 3.37 ж);  
 в) сполучення кола і прямої (рис. 3.37 з – к).

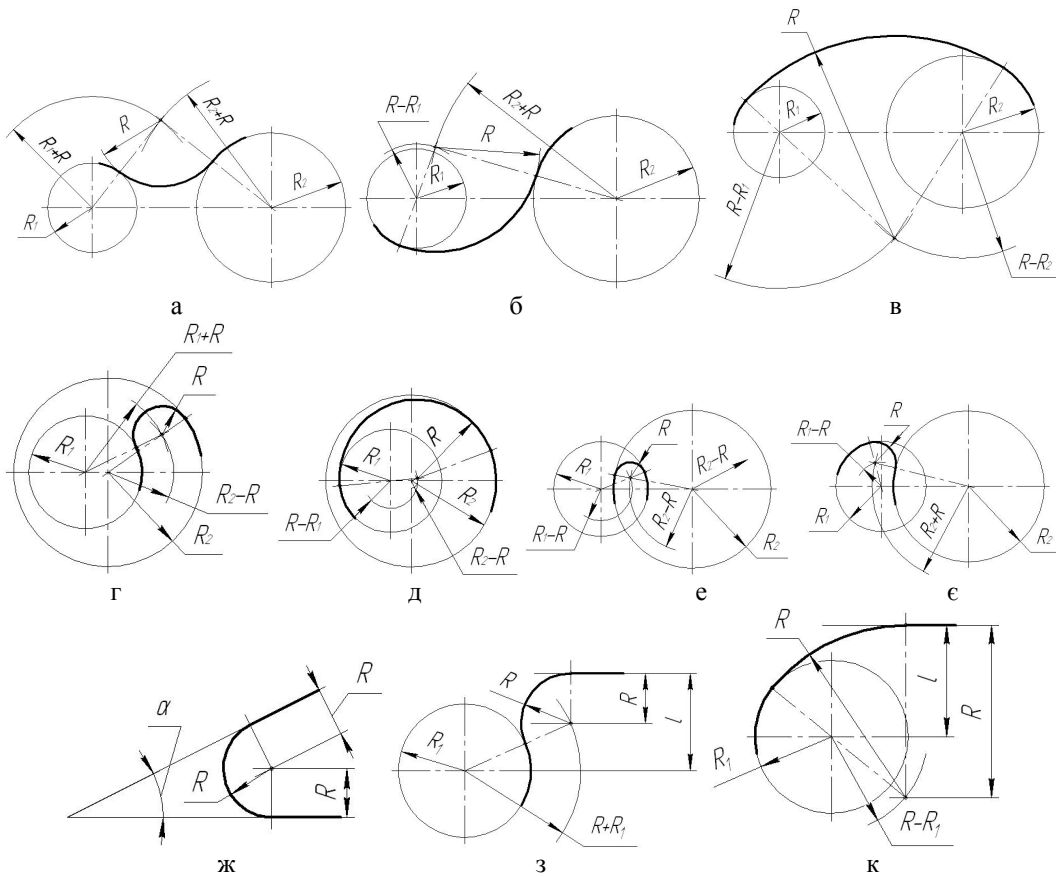


Рисунок 3.37 – Види сполучень

Для побудови сполучення двох кіл (рис. 3.37 а – е) необхідно з центрів цих кіл провести дуги кіл радіусами  $R', R''$  до їх перетину. Отримана точка є центром сполучення. Значення радіусів  $R', R''$  залежно від типу сполучення наведені у табл. 3.1. З центра  $O$  сполучення будеться дуга кола радіусом  $R$  і знаходяться точки  $A, B$  сполучення.

Для побудови сполучення двох прямих (рис. 3.37 ж) проводяться лінії, їм паралельні і розташовані на відстані  $R$ . Точкою перетину прямих є центр сполучення, з якого проводиться дуга кола радіусом  $R$ , і визначаються точки  $A, B$  сполучення.



Для побудови сполучення кола і прямої (рис. 3.37 з – к) з центра кола проводиться коло радіусом  $R'$  (табл. 3.1). Будується лінія, паралельна заданій прямій, на відстані  $R$ . З центра сполучення, який є точкою перетину побудованих кола і прямої, будується дуга кола радіусом  $R$  і визначаються точки  $A, B$  сполучення.

Таблиця 3.1 – Допоміжні радіуси для визначення центра сполучення

Тип сполучення (рис. 3.37)	Радіуси допоміжних дуг кіл	
	$R'$	$R''$
а	$R_1 + R$	$R_2 + R$
б	$R - R_1$	$R_2 + R$
в	$R - R_1$	$R - R_2$
г	$R_1 + R$	$R_2 - R$
д	$R - R_1$	$R_2 - R$
е	$R_1 - R$	$R_2 - R$
є	$R_1 - R$	$R_2 + R$
ж	–	–
з	$R_1 + R$	–
к	$R - R_1$	–

До окремого класу сполучень належать *коробові криві* – сукупності дуг кіл (із кривизною одного напрямку), які у точках переходу мають спільні дотичні (рис. 3.38).

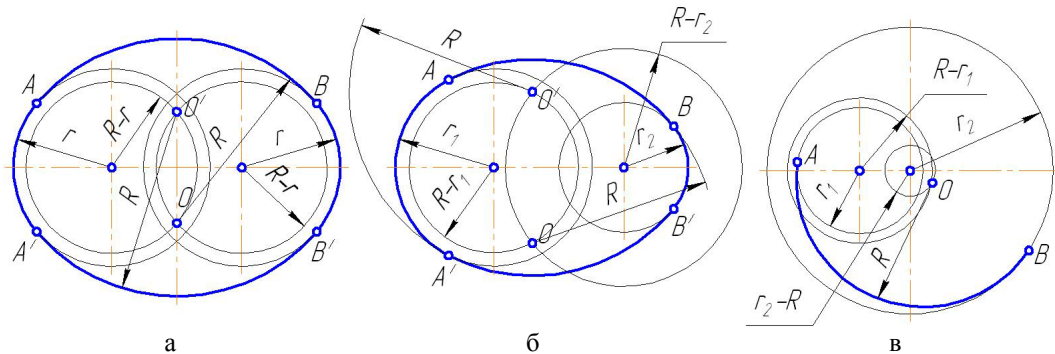


Рисунок 3.38 – Коробові криві

До коробових кривих належать такі лінії:

а) *овал* (від французького *ovale* – яйце) – замкнута лінія, отримана однаковими за радіусами сполученнями двох однакових ексцентричних кіл (рис. 3.38 а);

б) *овоїд* (від латинського *ovum* – яйце, грецького *εἶδος* – вид) – замкнута лінія, отримана однаковими за радіусами сполученнями двох різних ексцентричних кіл (рис. 3.38 б);

в) *завиток* – крива, яка виконується за допомогою сполучення двох кіл різних діаметрів, одне з яких повністю знаходиться всередині іншого (рис. 3.38 в).

Для побудови овала (рис. 3.38 а) необхідно з центрів двох кіл провести дуги радіусами  $R - r$  до їх перетину. Отримані точки  $O, O'$  є центрами сполучень. Із центрів  $O, O'$  будуються дуги кіл радіусом  $R$  і знаходяться точки  $A, B, A', B'$  сполучень.

Для побудови овоїда (рис. 3.38 б) необхідно з центрів двох кіл провести дуги радіусами  $R - r_1$ ,  $R - r_2$  до їх перетину. Отримані точки  $O$ ,  $O'$  є центрами сполучень. Із центрів  $O$ ,  $O'$  будуються дуги кіл радіусом  $R$  і знаходяться точки  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$  сполучень.

Для побудови завитка (рис. 3.38 в) необхідно з центрів двох кіл провести дуги радіусами  $R - r_1$ ,  $r_2 - R$  до їх перетину. Отримана точка  $O$  є центром сполучення. З центра  $O$  будуються дуга кола радіусом  $R$  і знаходяться точки  $A$ ,  $B$  сполучення.

Коробові криві поширені у природі. Форму овала і овоїда мають магматичні породи, вапняні зерна, заготівельні вироби комах (рис. 3.39 а – б); у формі завитка трапляються суцвіття рослин, раковини равликів (рис. 3.39 в) тощо.

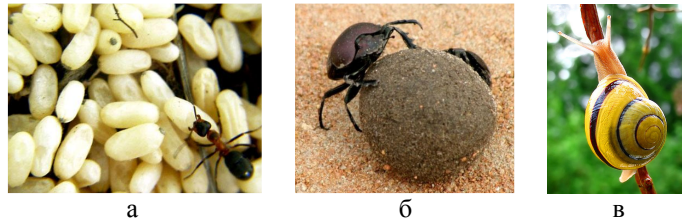


Рисунок 3.39 – Прояви коробових кривих

Коробовими кривими умовно можна замінити плоскі криві лінії. Наприклад, еліпс спрощено будується у формі овала (рис. 3.40 а), спіраль Архімеда – у формі завитка (рис. 3.40 б) тощо.

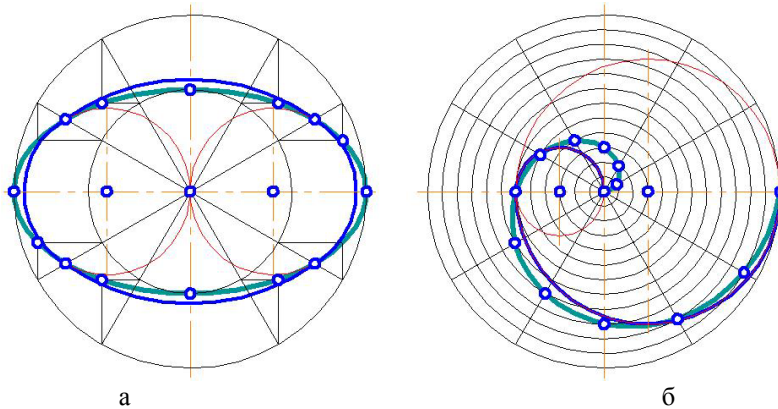


Рисунок 3.40 – Порівняння коробових кривих з плоскими кривими лініями

Із розвитком сучасних засобів комп'ютерного моделювання сполучення може бути виконане не лише за допомогою дуги кола, а й іншою кривою, наприклад, еліпсом (рис. 3.41).

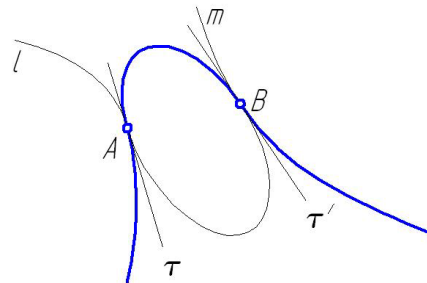


Рисунок 3.41 – Сполучення довільною плоскою кривою

### 3.1.2 ГВИНТОВІ ЛІНІЇ

*Гвинтова лінія* – траєкторія кінця  $M$  відрізка  $OM$ , який подовжується або вкорочується і рухається уздовж до його перпендикулярної осі  $i$ , рівномірно обертаючись при цьому навколо цієї осі (рис. 3.42).

Горизонтальна проекція гвинтової лінії (рис. 3.42 а) у загальному випадку є спіральною кривою, фронтальна – тригонометричною кривою.

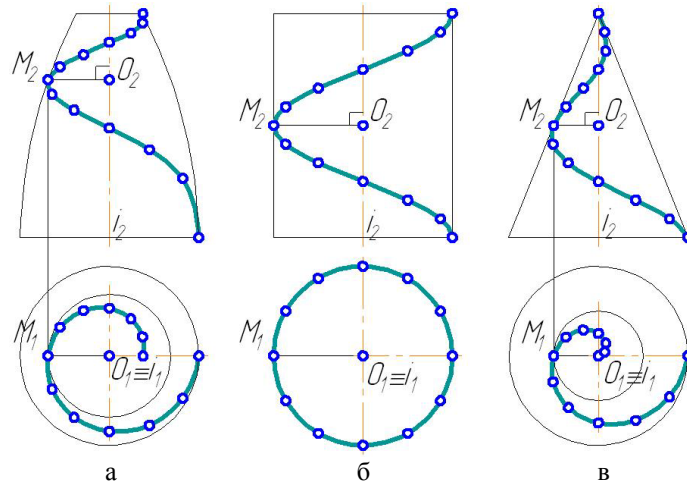


Рисунок 3.42 – Гвинтові лінії

Найпростішими випадками гвинтових ліній є циліндрична і конічна гвинтові лінії.

*Циліндрична гвинтова лінія* – траєкторія кінця  $M$  відрізка  $OM$ , який рівномірно рухається уздовж до його перпендикулярної осі  $i$ , рівномірно обертаючись при цьому навколо цієї осі (рис. 3.42 б).

Горизонтальна проекція циліндричної гвинтової лінії є колом, фронтальна – синусоїдою.

*Конічна гвинтова лінія* – траєкторія кінця  $M$  відрізка  $OM$ , який рівномірно подовжується або вкорочується і рівномірно рухається уздовж до його перпендикулярної осі  $i$ , рівномірно обертаючись при цьому навколо цієї осі (рис. 3.42 в).

Горизонтальна проекція конічної гвинтової лінії є спіраллю Архімеда, фронтальна – тригонометричною кривою.

Гвинтові лінії поширені у природі. Наприклад, форму гвинтових ліній мають молекула ДНК (рис. 3.43 а), вус рослини (рис. 3.43 б).

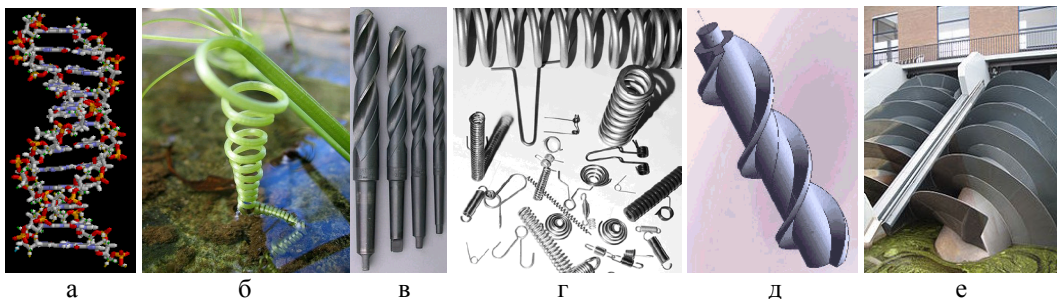


Рисунок 3.43 – Прояви і застосування гвинтових ліній

Гвинтові лінії знайшли своє використання у техніці. У формі гвинтових ліній виготовляють свердлувальний інструмент (рис. 3.43 в), пружини (рис. 3.43 г), шнеки м'ясорубок (рис. 3.43 д). Гвинт Архімеда, винайдений близько 250 р. до н. е., використовується і дотепер як робочий орган машини для осушування затоплених низовин сільськогосподарських угідь (рис. 3.43 е).

Гвинтові лінії можна також будувати за їх розгортками (див. п. 5.3). Наприклад, циліндрична гвинтова лінія має розгортку у формі прямої лінії (рис. 3.44).

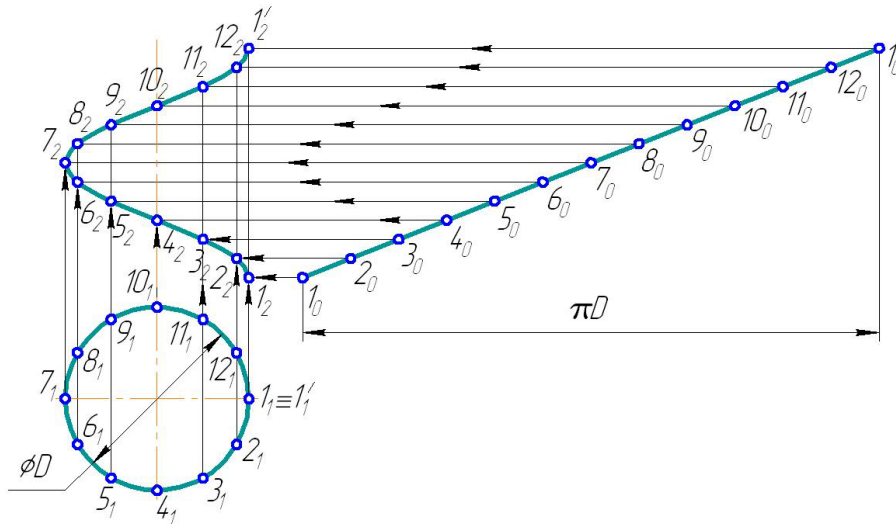


Рисунок 3.44 – Побудова рівномірної гвинтової лінії за її розгорткою

На рис. 3.45 за заданими горизонтальною проекцією нерівномірної циліндричної гвинтової лінії і її розгорткою у формі довільної кривої побудована фронтальна проекція гвинтової лінії.

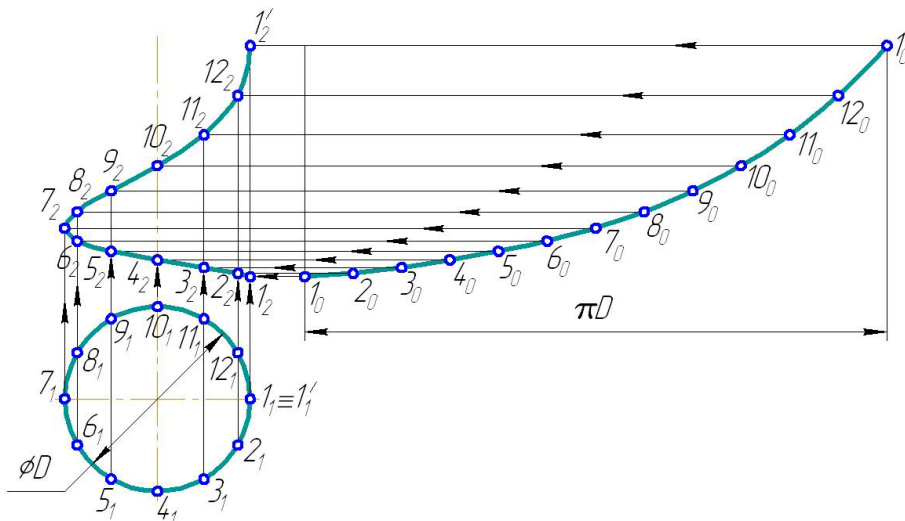


Рисунок 3.45 – Побудова нерівномірної гвинтової лінії за її розгорткою

## 3.2 КРИВІ ПОВЕРХНІ

### 3.2.1 ЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ

#### 3.2.1.1 ЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ З ТРЬОМА НАПРЯМНИМИ

Першими відомими людству поверхнями були площина (рис. 3.46 а), циліндр (рис. 3.46 б), конус (рис. 3.46 в) і сфера (рис. 3.46 г). Архімед приєднав до цього переліку «коноїди» (рис. 3.46 д) і «сфероїди» (рис. 3.46 е).

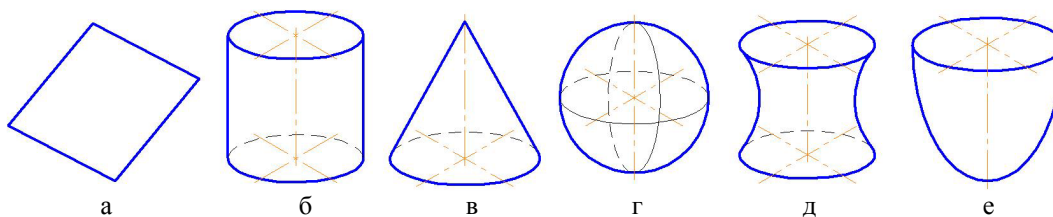


Рисунок 3.46 – Види поверхонь

Лише П. Ферма у 1643 р. зробив істотний крок у теорію поверхонь. Він розглядав будь-яку поверхню як упорядковану сукупність точок і ліній простору і дав класифікацію поверхонь за їх характерними ознаками.

У 1655 р. Дж. Уолліс визначив об'єми і центри ваги тіл, обмежених кривими поверхнями.

Найбільш застосовуваними є такі способи подання поверхонь:

а) *аналітичний*, у якому поверхня задається рівнянням  $f(x,y,z) = 0$ , яке пов'язує координати  $x, y, z$  кожної точки поверхні;

б) *кінематичний*, згідно з яким поверхня утворюється неперервним рухом однієї лінії  $l$  (твірної) уздовж нерухомої лінії  $t$  (напрямної);

в) *каркасний* – за допомогою множини характерних точок  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$  і ліній  $l^{(1)}, l^{(2)}, \dots$  поверхні.

Приклади геометричного, кінематичного і каркасного способів подання поверхні  $\Phi$  наведені на рис. 3.47 а – в.

Комплексне креслення поверхні  $\Phi$  вважається заданим, якщо одночасно виконуються такі умов:

а) можна побудувати три проекції  $l_1, l_2, l_3$  твірної лінії  $l$ ;

б) за однією проекцією  $M_1$  точки  $M$  поверхні можна визначити інші дві її проекції;

в) за двома проекціями  $A_1, A_2$  точки  $A$  на комплексному кресленні можна визначити, чи належить вона поверхні  $\Phi$ , чи не належить.



(1616 – 1703)

Джон Уолліс (John Wallis) – англійський математик, один із попередників математичного аналізу, тригонометрії, теорії чисел. У 1655 р. видав трактат «Арифметика нескінченного», де ввів символ нескінченності  $\infty$  і розрахував інтегральні суми (ще до існування поняття про інтеграл). Увів сучасне поняття математичної операції логарифмування.

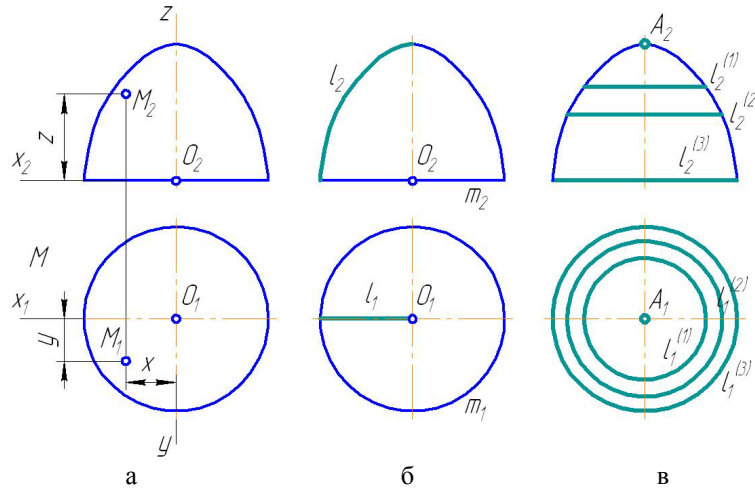


Рисунок 3.47 – Способи подання поверхонь

Наприклад, на рис. 3.48 можна встановити проєкції твірної  $l$ , визначити фронтальну проєкцію  $M_2$  точки  $M$  за відомою проєкцією  $M_1$ . За комплексним кресленням точки  $A$  однозначно визначається, що вона не належить поверхні. Таким чином, задовольнивши усі умови, робиться висновок про те, що на рис. 3.48 побудоване креслення поверхні  $\Phi$ .

Різноманітність форм поверхонь створює труднощі при їх вивченні. Тому доцільно зробити систематизацію поверхонь. Сучасний розвиток теорії поверхонь дозволяє класифікувати поверхні за багатьма критеріями. З позиції нарисної геометрії класифікація поверхонь така:

а) *лінійчаті* – поверхні, утворені прямолінійною твірною  $l$ :

1) із трьома напрямними – утворені рухом твірної  $l$ , яка одночасно перетинає три напрямні  $m^{(1)}, m^{(2)}, m^{(3)}$ :

- лінійчата поверхня загального вигляду;
- конусоїд;
- косий циліндр;
- однопорожнинний гіперболоїд;

2) із двома напрямними (див. п. 3.2.1.2):

- циліндроїд;
- коноїд;
- гіперболічний параболоїд;
- гелікоїд;

3) з однією напрямною (див. п. 3.2.1.3):

- площина;
- циліндр і призма;
- конус і піраміда;
- торс;

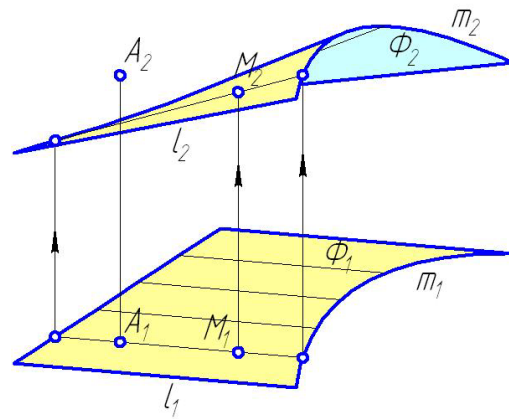


Рисунок 3.48 – Комплексне креслення поверхні

б) нелінійчаті:

- 1) зі змінною твірною (див. п. 3.2.2.1);
  - поверхня загального вигляду;
  - каналова поверхня;
- 2) з незмінною твірною (див. п. 3.2.2.2):
  - трубчата поверхня;
  - поверхня перенесення;
  - поверхня обертання.

Лінійчата поверхня загального вигляду – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні перетинає три криві напрямні  $m^{(1)}$ ,  $m^{(2)}$ ,  $m^{(3)}$  (рис. 3.49 а).

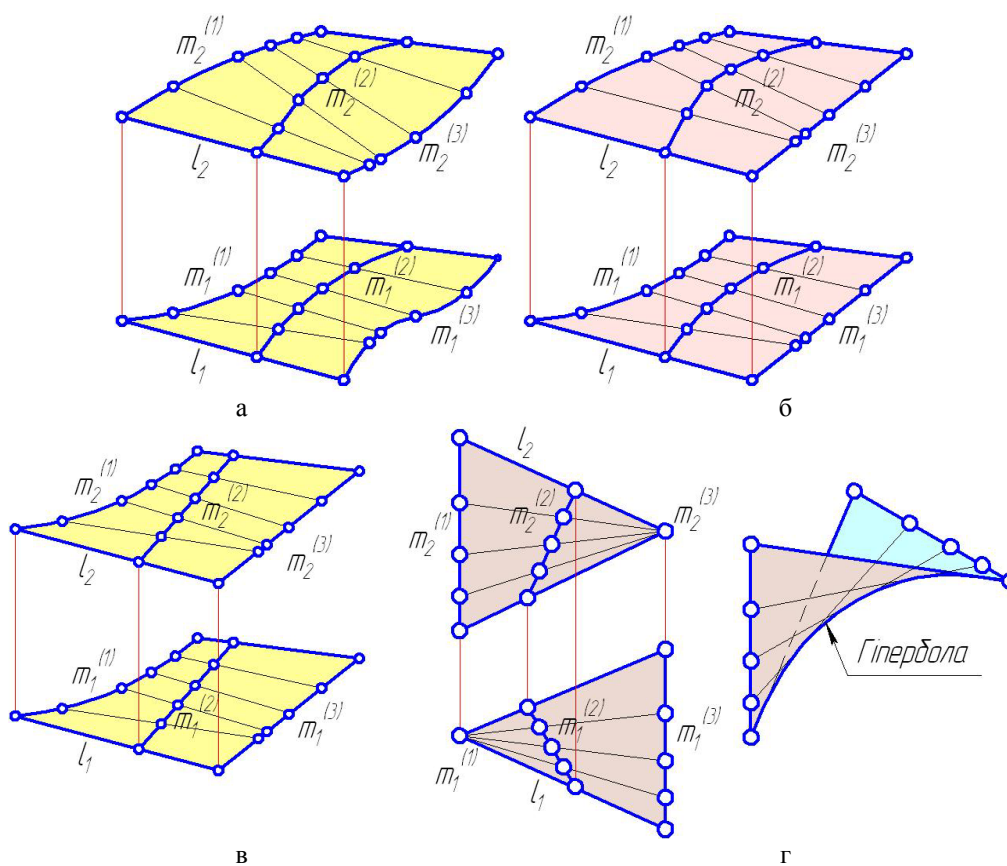


Рисунок 3.49 – Лінійчаті поверхні із трьома напрямними

Конусоїд – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні перетинає дві криві напрямні  $m^{(1)}$ ,  $m^{(2)}$  і одну прямолінійну напрямну  $m^{(3)}$  (рис. 3.49 б).

Косий циліндр – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні перетинає одну криву напрямну  $m^{(1)}$  і дві прямолінійні напрямні  $m^{(2)}$ ,  $m^{(3)}$  (рис. 3.49 в).

Однопорожнинний гіперболоїд – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні перетинає три прямолінійні напрямні  $m^{(1)}$ ,  $m^{(2)}$ ,  $m^{(3)}$  (рис. 3.49 г).

Лінійчаті поверхні широко застосовуються у проектуванні архітектурних споруд: башт, павільйонів, каркасів дахів будівель тощо.

На рис. 3.50 наведені приклади споруд, які побудовані за методом В. Г. Шухова – вченого, який уперше запропонував будувати каркаси споруд у формі однопорожнинного гіперболоїда.



Рисунок 3.50 – Споруди, побудовані за методом В. Г. Шухова

### 3.2.1.2 ЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ З ДВОМА НАПРЯМНИМИ

Для побудови лінійчатих поверхонь із двома напрямними твірна лінія паралельна нерухомій площині – *площині паралелізму*. Як правило, ця площина займає особливе положення.

Лінійчаті поверхні з двома напрямними і площиною паралелізму також називаються поверхнями Каталана на честь видатного бельгійського математика XIX століття.

*Циліндроїд* – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні перетинає дві криві напрямні  $m^{(1)}$ ,  $m^{(2)}$ , залишаючись паралельною заданій нерухомій площині  $\Sigma$  (рис. 3.51 а).

*Коноїд* – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні перетинає одну криву напрямну  $m^{(1)}$  і одну прямолінійну напрямну  $m^{(2)}$ , залишаючись паралельною заданій нерухомій площині  $\Sigma$  (рис. 3.51 б).



(1853 – 1939)

*Володимир Григорович Шухов – радянський інженер, архітектор, винахідник і вчений, член-кореспондент Академії наук СРСР. Автор проектів і керівник перших нафтопроводів (1878 р.) і нафтопереробного підприємства (1939 р.). Перший у світі застосував сталеві сітчасті оболонки для будівництва споруд. Методи Шухова широко застосовуються у практиці будівництва авангардних hi-tech-споруд XXI століття.*



(1814 – 1894)

*Ежен-Шарль Каталан (Eugène-Charles Catalan) – бельгійський математик, професор Шалонської колегії, ренетитор у Паризькій політехнічній школі і в колегії святої Варвари, професор у колегії Карла і Святого Людовика. Один із найкращих геометрів XIX століття.*



Гіперболічний параболоїд – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні перетинає дві прямолінійні напрямні  $m^{(1)}$ ,  $m^{(2)}$ , залишаючись паралельною заданій нерухомій площині  $\Sigma$  (рис. 3.51 в).

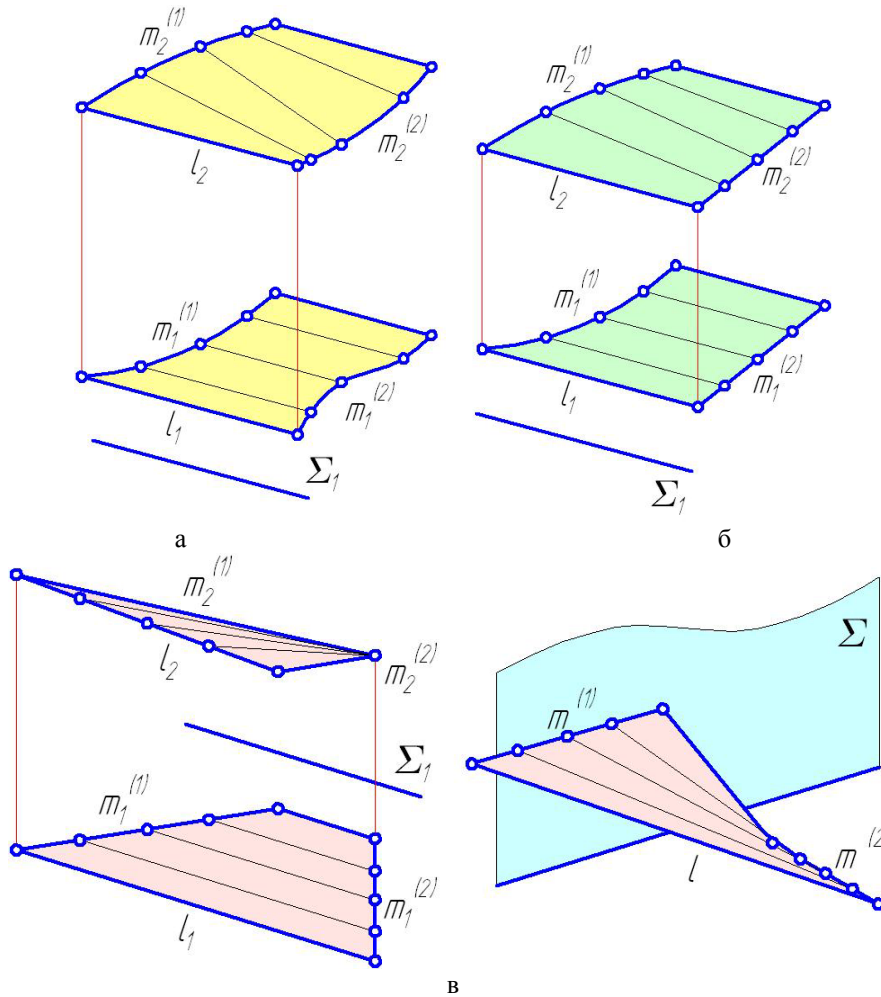


Рисунок 3.51 – Лінійчаті поверхні із двома напрямними

Одним із різновидів лінійчатих поверхонь із двома напрямними є *гвинтові поверхні*, або *гелікоїди* (від грецького *ελκοειδής* – *гвинтовий*). Гелікоїди поділяють на закритий і відкритий, прямий і косий.

*Закритий гелікоїд* – коноїд, у якого криволінійна напрямна  $m^{(1)}$  є гвинтовою лінією, а прямолінійна напрямна  $m^{(2)}$  збігається з віссю  $m^{(2)}$  цієї гвинтової лінії.

*Прямий закритий гелікоїд* – закритий гелікоїд, у якого існує площина паралелізму  $\Sigma$ , перпендикулярна до осі  $m^{(2)}$  гвинтової лінії. Як правило, площина паралелізму  $\Sigma$  є площиною рівня.

*Косий закритий гелікоїд* – закритий гелікоїд, твірна лінія  $l$  якого утворює незмінний гострий кут  $\chi$  із віссю  $m^{(2)}$  гвинтової лінії  $m^{(1)}$ . Косий закритий гелікоїд не має площини паралелізму.

На рис. 3.52 а побудоване комплексне креслення прямого закритого гелікоїда, на рис. 3.52 б – косоного закритого гелікоїда.

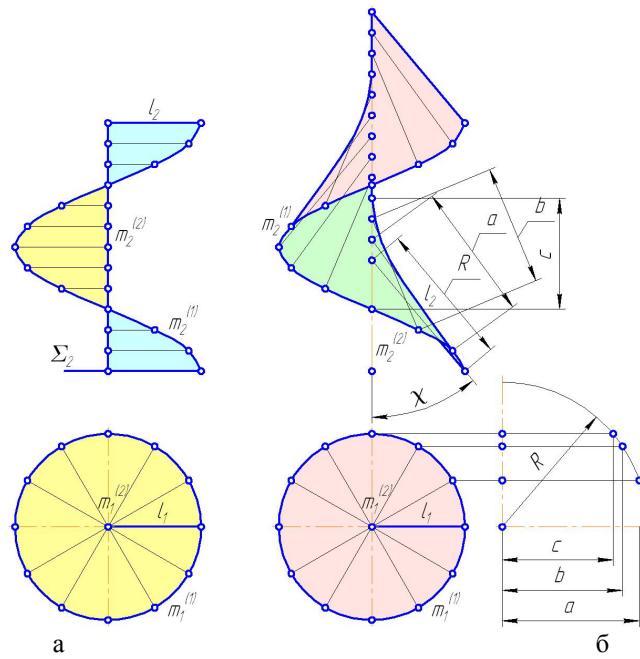


Рисунок 3.52 – Закриті гелікоїди

*Відкритий гелікоїд* – циліндроїд, у якого обидві напрямні  $m^{(1)}$ ,  $m^{(2)}$  є співвісними гвинтовими лініями.

На рис. 3.53 а – б наведені комплексні креслення відкритого прямого і косоного гелікоїдів.

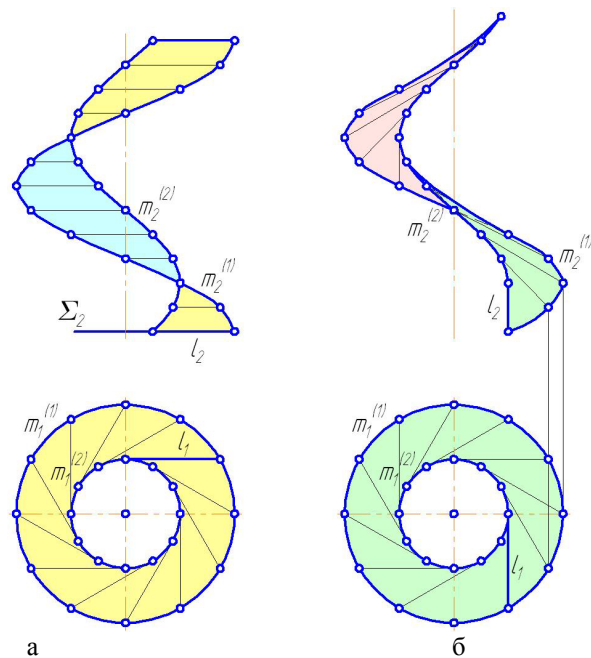


Рисунок 3.53 – Відкриті гелікоїди

*Прямий відкритий гелікоїд* – відкритий гелікоїд, у якого існує площина паралелізму  $\Sigma$ , перпендикулярна до спільної осі гвинтових ліній. Як правило, площина паралелізму  $\Sigma$  є площиною рівня.

*Косий відкритий гелікоїд* – відкритий гелікоїд, твірна лінія  $l$  якого утворює незмінний гострий кут  $\chi$  із гвинтовою лінією  $m^{(2)}$ . Косий закритий гелікоїд не має площини паралелізму.

Гелікоїди широко застосовуються у машинобудуванні як робочі поверхні гвинтів, шнеків, свердел, пружин, лопатей турбін і вентиляторів, черв'яків редукторів тощо. Вони також застосовуються у проектуванні транспортних розв'язок автомагістралей. На рис. 3.54 поверхня дороги у зоні спуску є прямим закритим гелікоїдом, поверхня земельного насипу із зовнішнього боку є косим відкритим гелікоїдом.

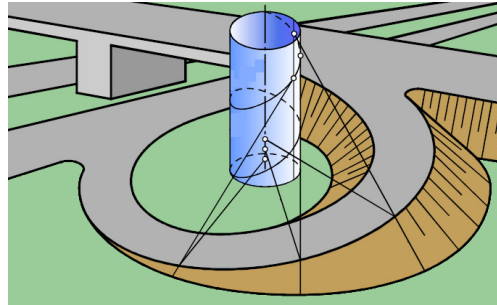


Рисунок 3.54 – Застосування гелікоїдів

### 3.2.1.3 ЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ З ОДНІЄЮ НАПРЯМНОЮ

Найпростішим видом лінійчатої поверхні з однією напрямною є *площина* – поверхня, утворена поступальним рухом прямолінійної твірної  $l$  по прямолінійній напрямній  $m$  (рис. 3.55 а).

Під *поступальним рухом* прямої  $l$  розуміють рух, у якому усі положення цієї прямої залишаються паралельними один одному (рис. 3.55 а – б).

*Циліндр* (від грецького *κβλινδρος* – каток, валик) – поверхня, утворена поступальним рухом прямолінійної твірної  $l$  по криволінійній напрямній  $m$  (рис. 3.55 б).

*Конус* (від латинського *conus* – кіл, вістря) – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні проходить через нерухому точку  $S$  (вершину) і перетинає криволінійну напрямну  $m$  (рис. 3.55 в).

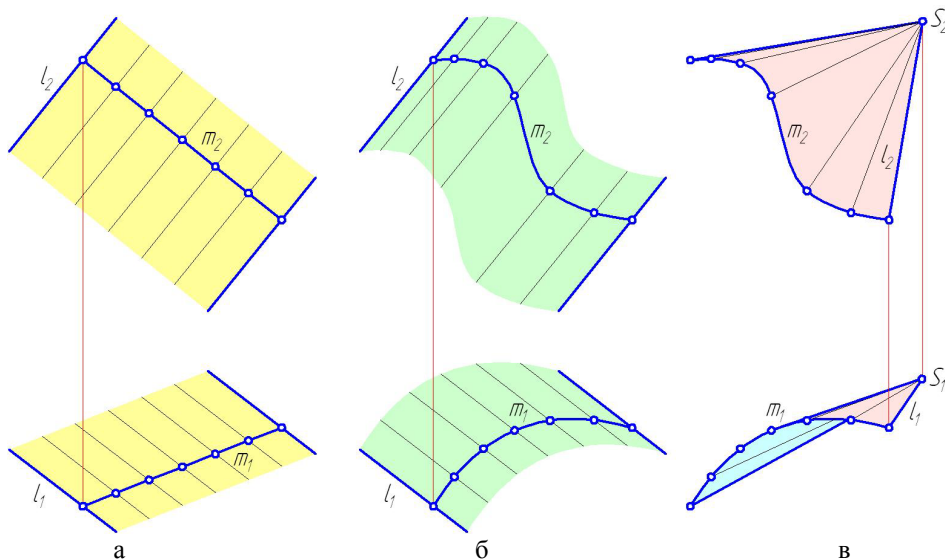


Рисунок 3.55 – Лінійчаті поверхні з однією напрямною

*Призма* (від грецького *πρίσμα* – світло) – поверхня, утворена поступальним рухом прямолінійної твірної  $l$  по ламаній напрямній  $m$  (рис. 3.56 а).

*Піраміда* (від грецького *πυρα* – відпил) – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у всіх своїх положеннях проходить через нерухому точку  $S$  (вершину) і перетинає ламану напрямну  $m$  (рис. 3.56 б).

До окремої групи лінійчатих поверхонь з однією напрямною належать *поверхні з ребром повернення*, які мають назву *торсів*.

*Торс* (від латинського *torso* – повертати) – поверхня, утворена рухом прямолінійної твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні дотикається до криволінійної напрямної  $m$  (рис. 3.57). Ця напрямна називається *ребром повернення*.

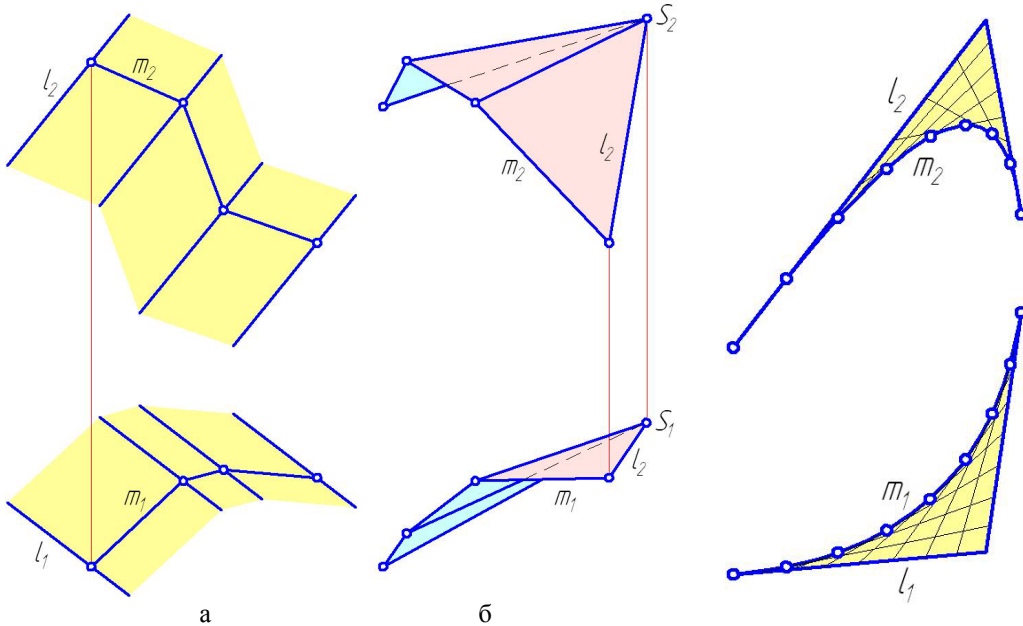


Рисунок 3.56 – Лінійчаті поверхні із ламаною напрямною

Рисунок 3.57 – Торс

## 3.2.2 НЕЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ

### 3.2.2.1 НЕЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ ЗІ ЗМІННОЮ ТВІРНОЮ

*Нелінійчатими поверхнями* називаються поверхні, утворені рухом криволінійної твірної  $l$  по напрямній  $m$ . Нелінійчаті поверхні поділяють на поверхні зі змінною твірною  $l$  і незмінною твірною.

До нелінійчатих поверхонь зі змінною твірною належать поверхня загального вигляду і каналова поверхня.

*Поверхня загального вигляду* – поверхня, утворена рухом кривої твірної  $l$ , яка у кожному своєму положенні перетинає три криві напрямні  $m^{(1)}, m^{(2)}, m^{(3)}$  (рис. 3.58).

*Каналова поверхня* (від латинського *canalis* – труба, жолоб) – поверхня, утворена рухом замкнутої плоскої лінії  $l$  змінного розміру і форми, геометричний центр  $O$  якої рухається по криволінійній напрямній  $m$  за визначеним законом.

Як правило, твірною  $l$  є коло або контур будь-якої плоскої симетричної або правильної геометричної фігури (квадрат, прямокутник, еліпс тощо). Напрямною  $m$  може бути

просторова або плоска крива. В останньому випадку криву  $m$  зручно подати як таку, що належить площині рівня. Побудова каналової поверхні здійснюється каркасним способом.

Каналові поверхні поділяють на прямі і з площиною паралелізму.

*Пряма каналова поверхня* – каналова поверхня, твірні лінії  $l$  якої належать площині  $\Sigma$ , перпендикулярній до напрямної  $m$  (рис. 3.59 а).

Необхідно зауважити, що площина  $\Sigma$  перпендикулярна до лінії  $m$ , якщо дотична  $\tau$  (див. п. 3.3), проведена у точці  $O$  перетину  $m, \Sigma$ , перпендикулярна до площини  $\Sigma$ .

*Каналова поверхня із площиною паралелізму* – каналова поверхня, твірні лінії  $l$  якої належать площині  $\Sigma$ , паралельній заданій площині  $\Omega$  (рис. 3.59 б).

Як правило, площина паралелізму  $\Omega$  є площиною рівня.

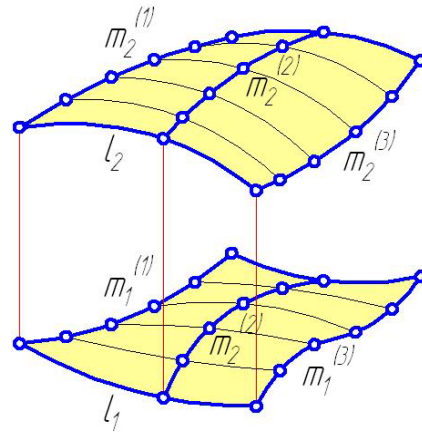


Рисунок 3.58 – Поверхня загального вигляду

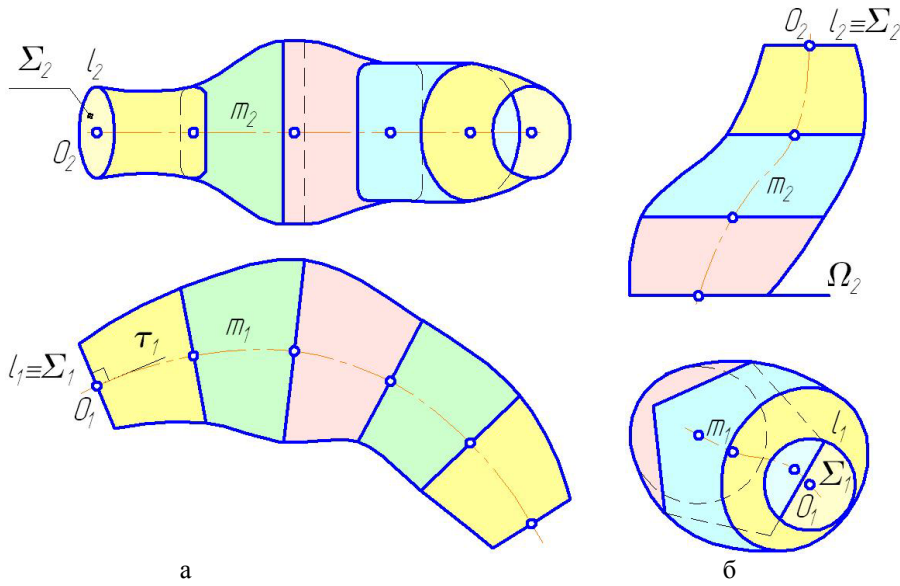


Рисунок 3.59 – Каналові поверхні

У випадку, коли твірною  $l$  каналової поверхні є коло змінного діаметра, ця поверхня називається *циклічною* (рис. 3.60).

На рис. 3.60 а побудоване комплексне креслення прямої циклічної поверхні, на рис. 3.60 б – циклічної поверхні із площиною паралелізму  $\Omega$ .

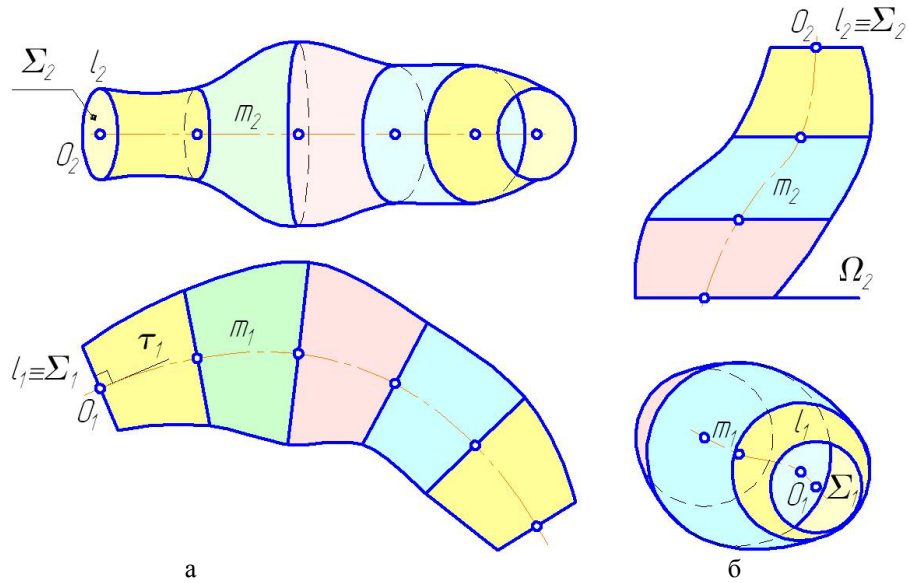


Рисунок 3.60 – Циклічні поверхні

### 3.2.2.2 НЕЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ З НЕЗМІННОЮ ТВІРНОЮ

До нелінійчатих поверхонь із незмінною твірною належать трубчаста поверхня, поверхня перенесення і поверхня обертання.

*Трубчаста поверхня* – циклічна поверхня із твірною  $l$  незмінного діаметра (рис. 3.61).

На рис. 3.61 а наведена пряма трубчаста поверхня, на рис. 3.61 б – трубчаста поверхня із площиною паралелізму  $\Omega$ .

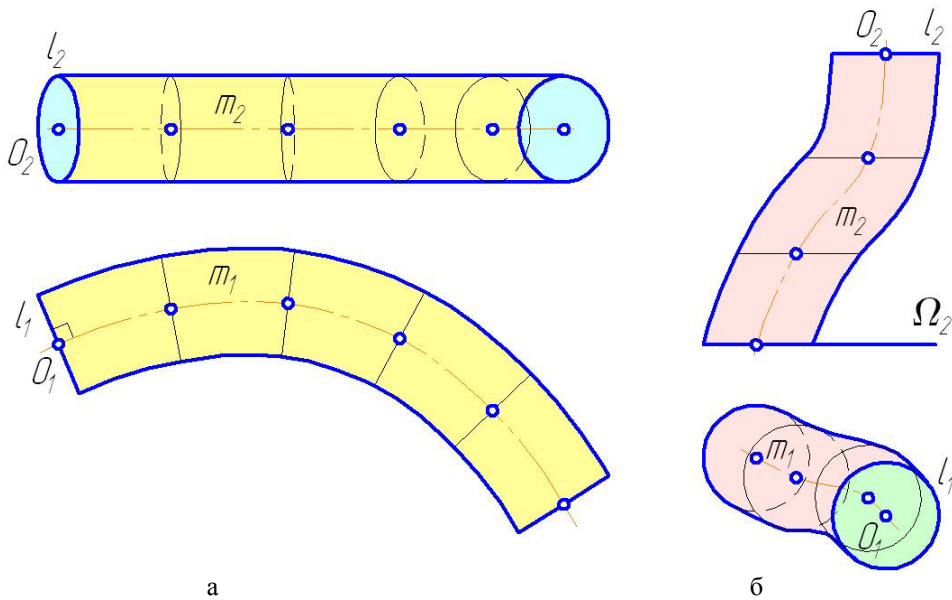


Рисунок 3.61 – Трубчасті поверхні

*Поверхня перенесення* – поверхня, утворена поступальним рухом незмінної криволінійної твірної  $l$  по криволінійній напрямній  $m$  (рис. 3.62).

*Поверхня обертання* – поверхня, утворена обертанням плоскої криволінійної твірної  $l$  навколо нерухомої осі  $i$  обертання (рис. 3.62).

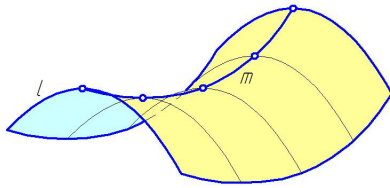


Рисунок 3.62 – Поверхня перенесення

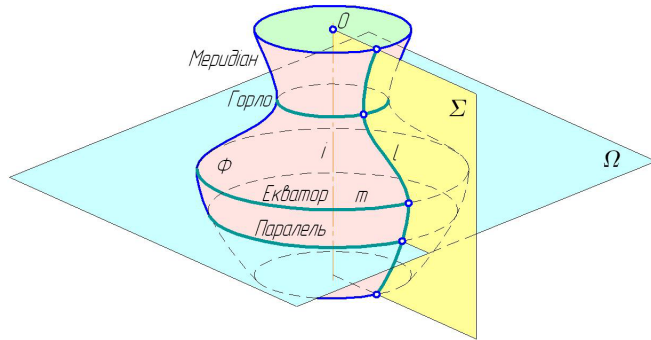


Рисунок 3.63 – Поверхня обертання

Поверхня обертання  $\Phi$  має такі геометричні елементи:

а) *меридіан* (від латинського *meridies* – *південь*) – лінія перетину поверхні  $\Phi$  площиною  $\Sigma$ , яка перетинає вісь обертання  $i$ . Меридіан є твірною  $l$ , обертанням якої утворена ця поверхня;

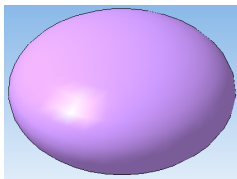
б) *паралель* – лінія перетину поверхні площиною  $\Omega$ , перпендикулярною до осі обертання  $i$ . Паралель є напрямною – колом  $m$ ;

в) *екватор* – паралель найбільшого діаметра;

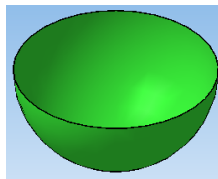
г) *горло* – паралель найменшого діаметра.

Існує незліченна кількість поверхонь обертання, класифікація яких подібна до класифікації кривих ліній (див. п. 3.1). Наприклад, до алгебраїчних поверхонь обертання другого порядку належать прямий круговий циліндр (рис. 3.46 б), прямий круговий конус (рис. 3.46 в), сфера (від грецького *σφαῖρα* – *м'яч*), еліпсоїд (рис. 3.64 а), параболоїд (рис. 3.46 е), одно- і двопорожнинний гіперболоїди (рис. 3.46 д, рис. 3.64 б).

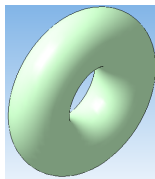
До поверхонь обертання вищих порядків можна віднести, наприклад, *тор* – поверхню четвертого порядку, утворену обертанням кола навколо осі, яка належить площині цього кола. На рис. 3.65 а зображений відкритий тор, на рис. 3.65 б – закритий тор.



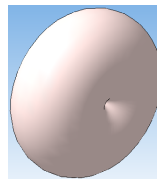
а



б



а



б

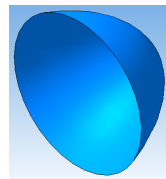


Рисунок 3.64 – Еліпсоїд (а)  
і однопорожнинний гіперболоїд (б)

Рисунок 3.65 – Відкритий (а)  
і закритий (б) тор

Рисунок 3.66 –  
Псевдосфера

До трансцендентних поверхонь обертання належать ті, що утворені обертанням трансцендентної кривої навколо нерухомої осі. Наприклад, *псевдосфера* (від грецького *ψευδο* – *брехня*) – поверхня, утворена обертанням половини трактиси (див. п. 3.1.1.5, рис. 3.31) навколо осі, яка проходить через особливу точку трактиси перпендикулярно до осі симетрії (рис. 3.66).

Геометричні тіла, обмежені поверхнями обертання, докладно розглянуті у п. 4.2.

Поверхні обертання широко застосовуються у побуті: більшість існуючого посуду має форму тіл обертання. У машинобудуванні поверхні обертання використовуються як поверхні осей і валів (рис. 3.67 а), корпусів (рис. 3.67 б), мембран тощо. У формі поверхонь обертання будують споруди атомних електростанцій (рис. 3.67 в). В архітектурі у формі поверхонь обертання будують споруди різного призначення і їх елементи: куполи, перекриття (рис. 3.67 г) тощо. Форму тіл обертання мають параболічні і тороїдальні антени (рис. 3.67 д – е) за рахунок властивості цих поверхонь фокусувати пучок радіохвиль.



Рисунок 3.67 – Застосування поверхонь обертання



### 3.3 НАТУРАЛЬНИЙ ТРИГРАННИК

Найбільш застосованим способом подання кривих ліній і поверхонь є кінематичний спосіб, який ґрунтується на побудові траєкторії точки за параметрично заданим законом її руху. Рух точки  $M$  можна розглядати у *натуральний спосіб*, який характеризується такими параметрами (рис. 3.68):

а) *траєкторія* – лінія  $m$ , по якій рухається точка  $M$ ;

б) *початок відліку* – початкове положення  $M_0$  точки  $M$  на траєкторії  $m$ ;

в) *додатний напрямок руху* – напрямок, в якому рухається точка  $M$ ;

г) *дужева координата* – довжина  $s$  частини траєкторії від початкового положення  $M_0$  до поточного положення точки  $M$  (див. п. 3.4.1).

Основними характеристиками руху точки  $M$  є швидкість  $v$  і прискорення  $a$ . Кожне положення точки  $M$  на траєкторії характеризується орієнтацією у просторі системи трьох взаємно перпендикулярних осей (рис. 3.68):

а) *дотична вісь* – вісь  $\tau$ , що перетинає дану криву  $m$  лише в одній точці  $M$ . Вектор швидкості  $v$  точки  $M$  у будь-якому її положенні на траєкторії  $m$  спрямований по дотичній  $\tau$  до траєкторії;

б) *нормальна вісь* – вісь  $n$ , перпендикулярна до дотичної  $\tau$  і спрямована у просторі так, що площині, утвореній осями  $\tau, n$ , належить вектор  $a$  прискорення точки. Нормальній осі  $n$  належить центр  $C$  кривизни траєкторії  $m$  у даному положенні точки  $M$  (див. п. 3.4.2);

в) *бінормальна вісь* – вісь  $b$ , одночасно перпендикулярна до дотичної  $\tau$  і нормальній  $n$  осей.

*Тригранний кут*, утворений дотичною, нормальною і бінормальною осями, називається *натуральним тригранником*. Він має іншу назву – *тригранник Френе* – на честь Жана Фредеріка Френе (1816 – 1900) – французького математика, астронома і метеоролога, професора математики Ліонського факультету наук, автора творів «Аналітична теорія поверхонь», «Криві двоякої кривизни» тощо.

Кожна пара осей натурального тригранника утворює відповідну площину (рис. 3.68):

а) *дотична площина* – площина, утворена осями  $\tau, n$ . Вектор прискорення  $a$  точки  $M$  у будь-якому її положенні на траєкторії  $m$  належить дотичній площині  $\tau$ - $n$ ;

б) *нормальна площина* – площина, утворена осями  $n, b$ . Ця площина перпендикулярна до траєкторії  $m$  у кожному положенні точки  $M$ ;

в) *випрямна площина* – площина, утворена осями  $\tau, b$ . Ця площина дотична до траєкторії  $m$  у кожному положенні точки  $M$ .

Грані натурального тригранника у будь-якій точці  $M$  кривої поверхні будуються по осях  $\tau, n, b$ , проведених до твірної  $l$  або напрямної  $m$  цієї поверхні (рис. 3.70 – 3.73). При цьому використовуються теореми про проєціювання прямого кута (див. п. 1.4.8) і дотичної.

*Теорема про проєціювання дотичної*

Дотична  $\tau$  до кривої  $m$  у точці  $M$  проєціюється у дотичну до відповідної проєкції кривої  $m$  на площині проєкцій (рис. 3.69).

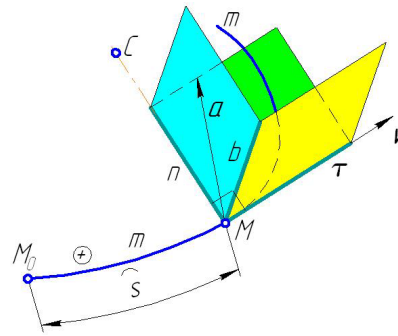


Рисунок 3.68 – Натуральний тригранник

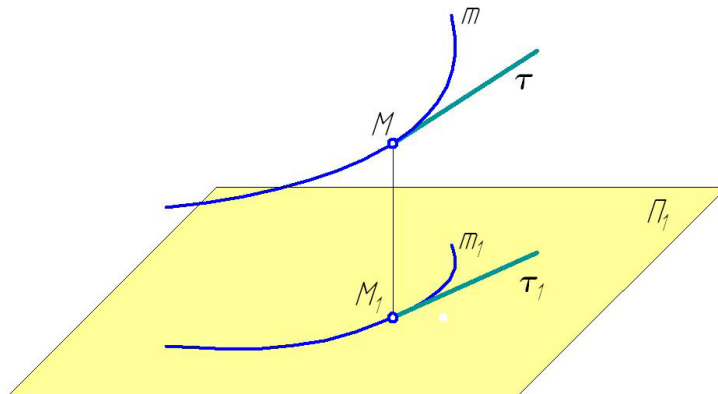


Рисунок 3.69 – Теорема про проєціювання дотичної

На рис. 3.70 побудоване комплексне креслення тригранника Френе для довільної точки  $M$  циліндра. Побудована твірна  $l$ , яка проходить через точку  $M$ . Вісь  $\tau$  спрямована по дотичній до напрямної  $m$ , нормаль  $n$  – уздовж радіуса циліндра, бінормаль  $b$  – уздовж твірної  $l$ . Дотична  $\tau$  є горизонтальною прямою рівня, тому на площині проєкцій  $\Pi_1$  кут між  $\tau_1, n_1$  прямих.

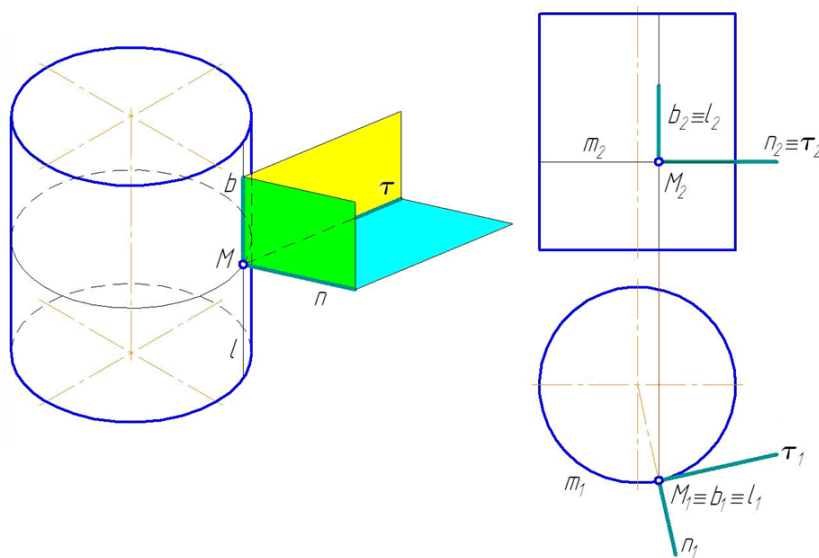


Рисунок 3.70 – Натуральний тригранник на поверхні циліндра

На рис. 3.71 побудоване комплексне креслення тригранника Френе для довільної точки  $M$  конуса. Вісь  $\tau$  спрямована по дотичній до напрямної  $m$ , бінормаль  $b$  – уздовж твірної  $l$  конуса (твірна визначена відрізком  $SA$ , який проходить через задану точку  $M$ ). Нормаль  $n$  займає загальне положення, тому проєкції прямого кута між нею й іншими осями натурального тригранника є сплотореними. Для визначення осі  $n$  використовується спосіб обертання навколо горизонтально-проєційовальної осі  $i$ , яка збігається з віссю конуса. Проєкція  $b_1$  бінормалі і проєкція  $n_1$  нормалі, які збігаються, обертаються разом із точкою  $M_1$  і допоміжною точкою  $I_1$  до положення, паралельного осі  $x$ . Пряма  $n'$  є фронталлю, яка

проходить через точки  $M'$ ,  $1'$ , тому прямий кут між  $n'$ ,  $b'$  проєціюється у натуральну величину на  $\Pi_2$ . За допомогою обертання точки  $1'$  у зворотному напрямку визначаються проєкції точки 1, через яку проходить шукана нормаль  $n$ .

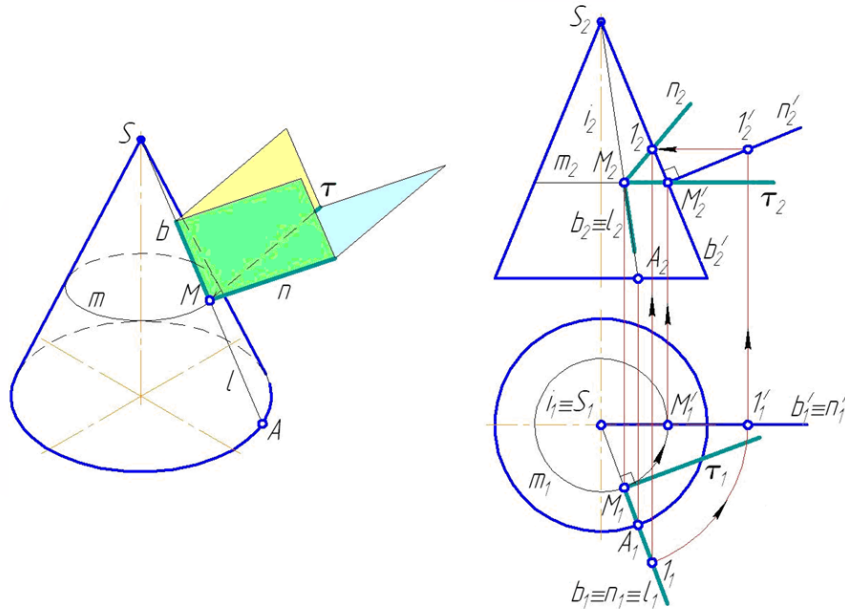


Рисунок 3.71 – Натуральний тригранник на поверхні конуса

На рис. 3.72 побудоване комплексне креслення тригранника Френе для довільної точки  $M$  сфери. Дотична  $\tau$  спрямована уздовж паралелі  $m$ , яка проходить через задану точку  $M$ . Нормаль  $n$  спрямована по радіусу  $OM$  сфери. Бінормаль  $b$  займає загальне положення, тому проєкції прямого кута між нею й іншими осями натурального тригранника є спотвореними. Для визначення осі  $b$  використовується спосіб обертання навколо горизонтально-проєціювальної осі  $i$ , яка проходить через центр  $O$  сфери. Проекція  $n_1$  нормалі і проєкція  $b_1$  бінормалі обертаються разом із точкою  $M_1$  і допоміжною точкою  $1_1$  до положення, паралельного осі  $x$ . Пряма  $b'$  є фронталлю, яка проходить через точки  $M'$ ,  $1'$ , тому прямий кут між  $b'$ ,  $n'$  проєціюється у натуральну величину на  $\Pi_2$ . За допомогою обертання точки  $1'$  у зворотному напрямку визначаються проєкції точки 1, через яку проходить шукана бінормаль  $b$ .

На рис. 3.73 побудоване комплексне креслення тригранника Френе для довільної точки  $M$  тора. Побудована дотична  $\tau$  спрямована уздовж напрямної  $m$ , яка проходить через задану точку  $M$ . Нормаль  $n$  спрямована по радіусу твірної  $l$  – кола із центром у точці  $O$ . Бінормаль  $b$  спрямована по дотичній до твірної  $l$ . Нормаль  $n$  і бінормаль  $b$  займають загальне положення, тому горизонтальні проєкції прямого кута між ними і дотичною  $\tau$  є спотвореними. Для визначення осей  $n$ ,  $b$  використовується спосіб обертання навколо фронтально-проєціювальної осі  $j$ , яка є віссю тора. Проекція  $n_2$  нормалі і проєкція  $b_2$  бінормалі, які збігаються з  $n_2$ , обертаються разом із точкою  $M_2$  і допоміжною точкою  $1_2$  до положення, паралельного осі  $x$ . Пряма  $n'$  спрямована по радіусу  $OM'$  кола з центром у точці  $O'$ , пряма  $b'$  – по дотичній до цього кола перпендикулярно до  $n'$ . За допомогою обертання точок  $1'$ ,  $2'$  у зворотному напрямку визначаються точка 1 нормалі  $n$  і точка 2 бінормалі  $b$ .

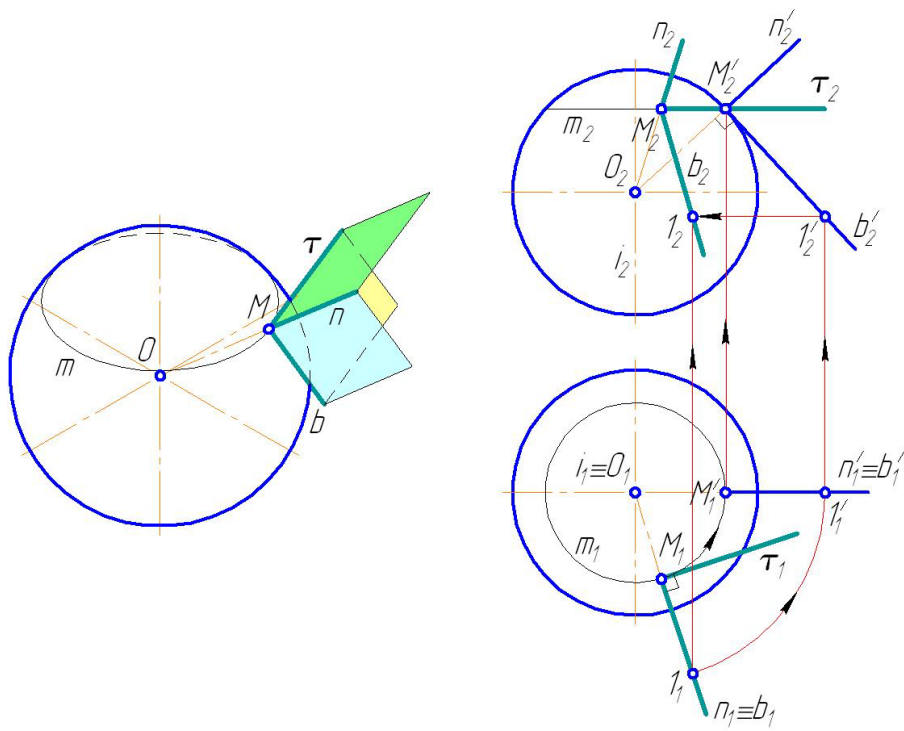


Рисунок 3.72 – Натуральний тригранник на поверхні сфери

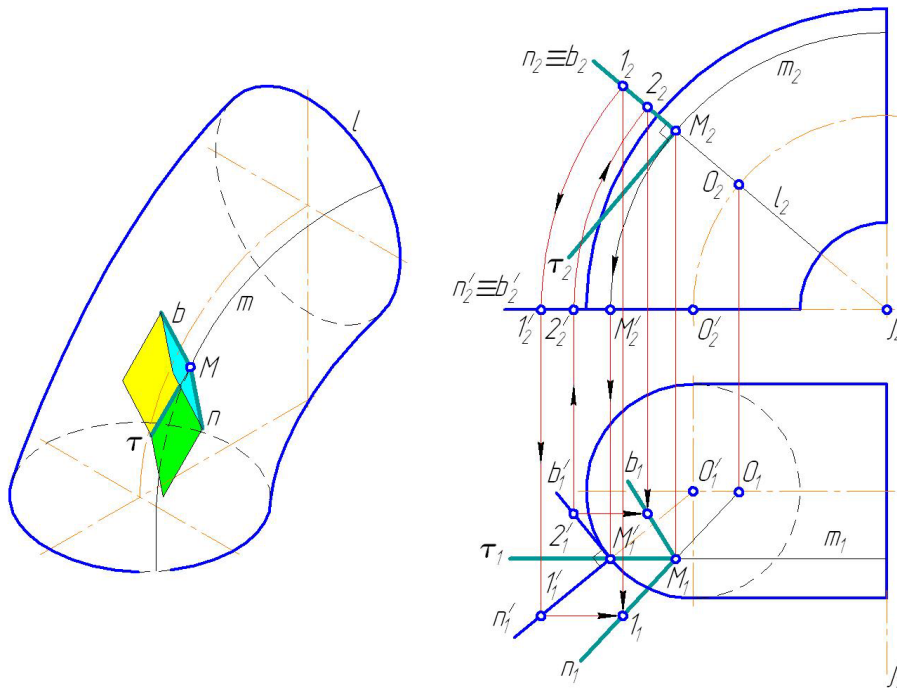


Рисунок 3.73 – Натуральний тригранник на поверхні тора

### 3.4 МЕТРИЧНІ І ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ

#### 3.4.1 ДОВЖИНА ДУГИ КРИВОЇ ЛІНІЇ

Задача про визначення довжини дуги  $s$  кривої лінії є досить складною. У нарисній геометрії вона розв'язується наближено *способом лінійної інтерполяції*: дуга  $OM$  лінії  $l$  розбивається на  $N$  ділянок  $OA^{(1)}$ ,  $A^{(1)}A^{(2)}$ , ...,  $A^{(N-1)}M$ , які умовно замінюються однойменними відрізками прямих. Довжина кривої  $OM$  визначається як сума довжин побудованих відрізків із застосуванням способів прямокутного трикутника (рис. 3.74 а) або обертання навколо проєціювальних осей (рис. 3.74 б).

Від кількості  $N$  обраних ділянок залежить точність визначення довжини дуги.

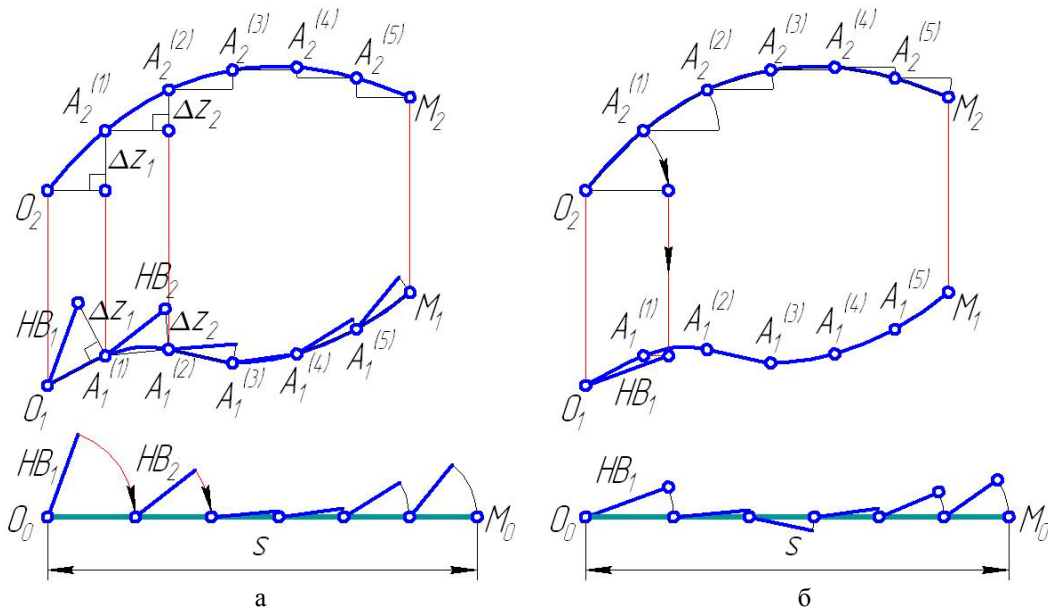


Рисунок 3.74 – Визначення довжини дуги кривої лінії

Задача про визначення довжини кривої лінії набагато складніша за розрахунок площ геометричних фігур і об'ємів тіл. В античні часи єдина вдала спроба визначення довжини кривої лінії була виконана для кола.

Декарт висловлював хибну думку, що «відношення між прямим і кривим невідоме та не може бути пізнане людством».

Першим досягненням було визначення довжини дуги параболи Нейла у 1657 р. Пізніше К. Рен і Х. Гюйгенс знайшли довжину дуги циклоїди. Незадовго до відкриття математичного аналізу Дж. Грегорі створив загальну теорію знаходження дуги кривої лінії.



(1632 – 1723)

*Кристофер Рен (Christopher Wren) – англійський математик і архітектор, професор математики в Оксфорді, член Королівського товариства. Займався питаннями кораблебудування, опору рідини, механікою весел і парусів тощо. Автор величних архітектурних споруд, у тому числі Собору святого Павла.*



### 3.4.2 ЦЕНТР І РАДІУС КРИВИЗНИ. ЕВОЛЮТА Й ЕВОЛЬВЕНТА КРИВОЇ

Кривизна будь-якої лінії  $l$  у точці  $M$  характеризується двома основними параметрами: центром і радіусом кривизни.

Центр і радіус кривизни – центр  $C$  і радіус  $\rho$  кола  $m$ , яке є найточнішим наближенням даної кривої  $l$  в околі її точки  $M$  (рис. 3.75 а).

Центр кривизни  $C$  знаходиться на внутрішній нормалі  $n$  кривої  $l$  у даній точці  $M$ .

На рис. 3.75 б показано спосіб визначення центра кривизни  $C$  плоскої кривої  $l$  у точці  $M$ . У точці  $M$  і близько розташованій до неї точці  $N$  проведені дотичні  $\tau, \tau'$ . Центр кривизни  $C$  є точкою перетину перпендикулярів  $n, n'$  до дотичних. Радіус  $CM$  побудованого кола  $m$  із центром у точці  $C$  є радіусом  $\rho$  кривизни лінії  $l$  у точці  $M$ .

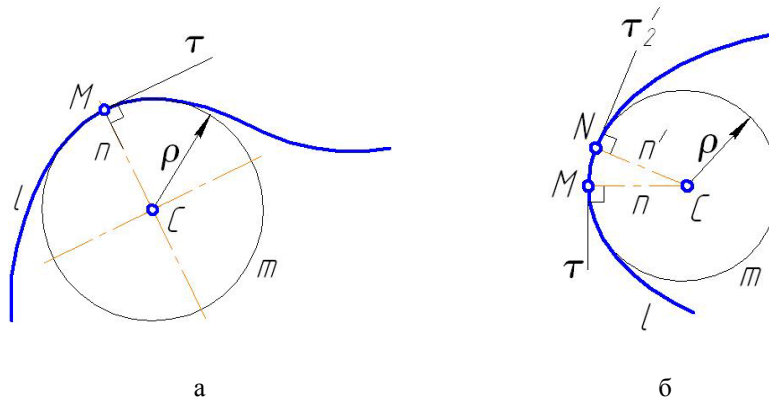


Рисунок 3.75 – Центр і радіус кривизни

Поняття центра і радіуса кривизни введені Лейбніцем.

Геометричне місце центрів кривизни лінії  $l$  для усіх її точок називається *еволютою* (від латинського *evolute* – розвинений). На рис. 3.76 показані еволюти еліпса, дуги синусоїди і циклоїди. Для їх побудови



(1638 – 1675)

Джеймс Грегорі (James Gregory) – шотландський математик і астроном, член Королівського товариства. Один із засновників математичного аналізу. Грегорі є автором дзеркального телескопа, методу визначення відстані від Землі до Сонця, способу числового інтегрування і розкладання функцій у нескінченні ряди.



(1646 – 1716)

Готфрід Вільгельм фон Лейбніц (Gottfried Wilhelm von Leibniz) – видатний німецький філософ, математик, фізик, юрист, історик, дипломат, винахідник, мовознавець; засновник і перший президент Берлінської академії наук, іноземний член Французької академії наук. Автор диференціального й інтегрального числення, вчення про аналіз і синтез, проектів наукових досліджень магнітного поля Землі. Лейбніц уперше ввів термін «модель»



у математичних дослідженнях і висказав думку про можливість машинного моделювання функцій людини. Лейбніц є автором механічного арифмометра, пристрою використання енергії вітру, креслення підводного човна, ідеї створення парової машини тощо.

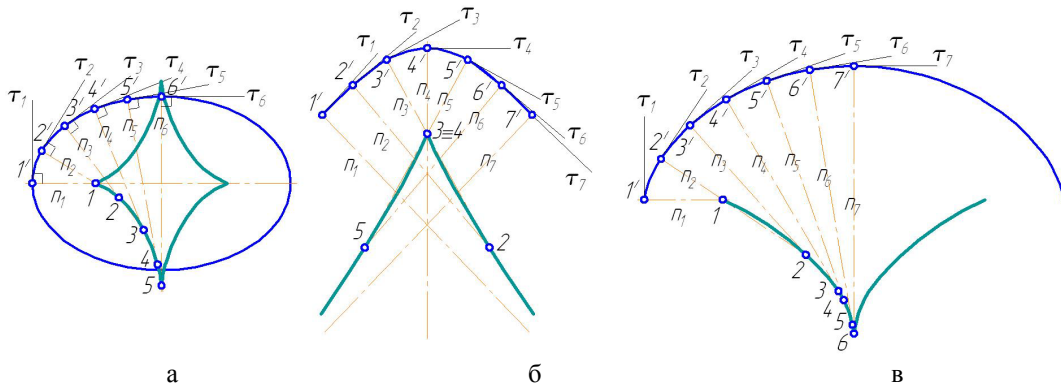


Рисунок 3.76 – Еволюти плоских кривих

на цих кривих обирається сукупність точок  $1', 2', \dots$  і проводяться дотичні  $\tau_1, \tau_2, \dots$  та нормалі  $n_1, n_2, \dots$ . Точки  $1, 2, \dots$  перетину послідовних пар нормалей є точками, які належать еволюті даної кривої. Наприклад, еволюта еліпса (рис. 3.76 а) має форму зірки із двома осями симетрії; еволюта половини дуги синусоїди (рис. 3.76 б) має дві асимптоти й одну вісь симетрії; еволюта гілки циклоїди (рис. 3.76 в) має одну вісь симетрії.

Лінія  $m$ , до якої задана крива  $l$  є еволютою, називається *евольвентою* (від латинського *evolvens – розгортаючий*). Наприклад, на рис. 3.76 а еліпс є евольвентою фігури у формі зірки.

Еволюти й евольвенти широко застосовуються у проектуванні машин і механізмів. Наприклад, зубчасті колеса (рис. 3.77) мають профіль у формі кривої, еволюта якої є колом. Іншими словами, такі зубчасті колеса мають форму евольвенти кола.



Рисунок 3.77 – Застосування евольвенти кола

Для побудови евольвенти кола (рис. 3.78) останнє ділиться на  $N$  рівних частин (як правило,  $N=12$ ) точками  $1', 2', \dots$ . Із цих точок проводяться відрізки  $1'1, 2'2, \dots$ , дотичні до кола і з рівномірно зростаючою довжиною (від нуля до довжини кола). Евольвента кола проходить через точки  $1, 2, \dots$

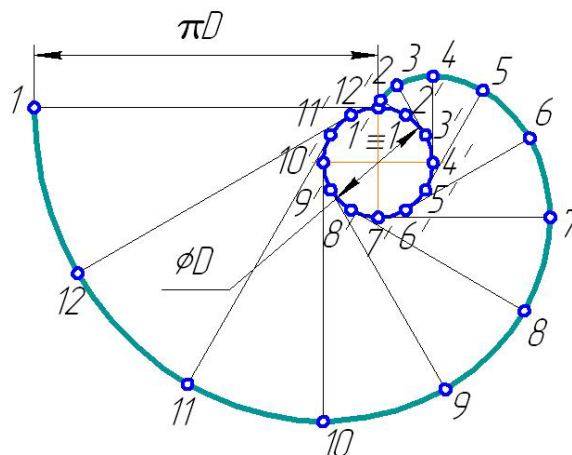


Рисунок 3.78 – Евольвента кола

### 3.4.3 ЕКВІДИСТАНТА КРИВОЇ

Еквідистанта кривої (від латинського *aequidistans* – рівновіддалений) – геометричне місце  $m$  кінців  $N$  відрізків однакової довжини  $r$ , відкладених на нормалях  $n$  до заданої кривої  $l$  (рис. 3.79 а).

На рис. 3.79 б побудована еквідистанта  $m$  кривої  $l$ . У точках  $1', 2', \dots$  кривої  $l$  проводяться дотичні  $\tau_1, \tau_2, \dots$ . По один бік кривої  $l$  уздовж нормалей  $n_1, n_2, \dots$  відкладаються відрізки  $1'1, 2'2, \dots$  однакової довжини  $r$ , кінці  $1, 2, \dots$  яких належать шуканій еквідистанті.

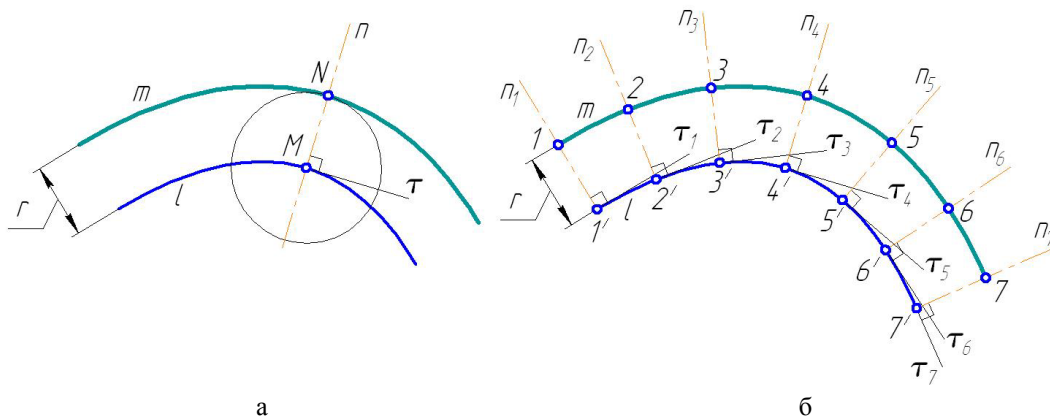


Рисунок 3.79 – Еквідистанта кривої

У металообробці еквідистантою до траєкторії центра кінцевої фрези є контур поверхні, яка отримується у результаті фрезерування. У системах автоматичного розкрою плоских виробів (пластин, тканин тощо) еквідистанта є контуром, яким обмежується припуск на обробку.

### 3.4.4 ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО КРИВОЇ ЛІНІЇ І ПОВЕРХНІ

Відстань від точки  $A$  до кривої лінії  $m$  є найменшою з усіх відстаней  $l$  від цієї точки до усіх точок кривої  $m$ .

У нарисній геометрії відстань  $l$  від точки  $A$  до кривої  $m$  визначається способом конічної поверхні (рис. 3.80).

*Суть способу конічної поверхні*

Будується конічна поверхня  $\Phi$  із напрямною  $m$ , яка збігається із даною кривою, і вершиною  $A$ , яка збігається із даною точкою. Серед сукупності прямолінійних твірних обирається твірна  $l$  найменшої довжини.

На рис. 3.80 побудоване комплексне креслення точки  $A$  і кривої  $m$ . Будуються проєкції твірних  $l^{(1)}, l^{(2)}, \dots$ , які задані відрізками  $A-1, A-2, \dots$ . Довжини цих відрізків визначаються способом обертання навколо фронтально-проєціувальної осі, яка проходить через точку  $A$ . Натуральні величини  $A_11_0, A_12_0, \dots$  обертаються навколо горизонтально-проєціувальної осі, яка проходить через точку  $A$ , до спільного фронтального положення рівня.

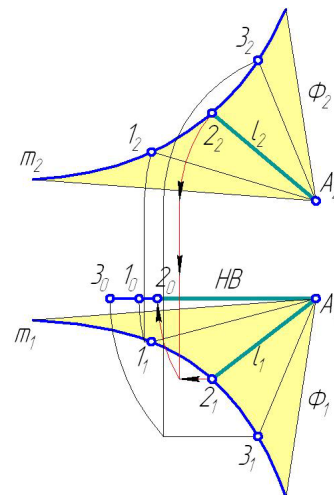


Рисунок 3.80 – Спосіб конічної поверхні



Серед сукупності відрізків  $A_11_0, A_12_0, \dots$  обирається найменший, довжина якого дорівнює шуканій відстані від точки  $A$  до кривої  $m$ .

Відстань від точки  $A$  до кривої поверхні  $\Omega$  є найменшою з усіх відстаней  $l$  від цієї точки до усіх точок поверхні  $\Omega$ .

У нарисній геометрії відстань  $l$  від точки  $A$  до поверхні  $\Omega$  визначається способом конічних поверхонь.

*Суть способу конічних поверхонь*

Будуються конічні поверхні  $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots$  з вершиною  $A$ , яка збігається з даною точкою, і напрямними  $m^{(1)}, m^{(2)}, \dots$  які збігаються із напрямними поверхні  $\Omega$ . Серед сукупності прямолінійних твірних кожної конічної поверхні обираються твірні  $l^{(1)}, l^{(2)}, \dots$  найменших довжин. За точками отриманих твірних  $l^{(1)}, l^{(2)}, \dots$ , які належать поверхні  $\Omega$ , будується крива  $n$ . Відстань від точки  $A$  до поверхні  $\Omega$  дорівнює відстані від цієї точки до лінії  $n$ . Вона знаходиться способом конічної поверхні (рис. 3.80).

На рис. 3.81 побудоване комплексне креслення точки  $A$  і поверхні  $\Omega$ . Способом конічних поверхонь (див. рис. 3.80) визначаються найменші відстані  $l^{(1)}, l^{(2)}, \dots$  від точки  $A$  до напрямних  $m^{(1)}, m^{(2)}, \dots$ . За точками  $1, 2, \dots$  будуються проекції лінії  $n$ . Відстань від точки  $A$  до кривої  $n$  визначається способом конічної поверхні (рис. 3.80).

Описані вище графічні способи конічних поверхонь є наближеними і вимагають громіздких побудов. Точне, аналітичне визначення відстані від точки до кривої лінії і

поверхні є надскладною задачею пошуку екстремуму функції декількох змінних параметрів, що може бути розв'язана методами варіаційного числення.

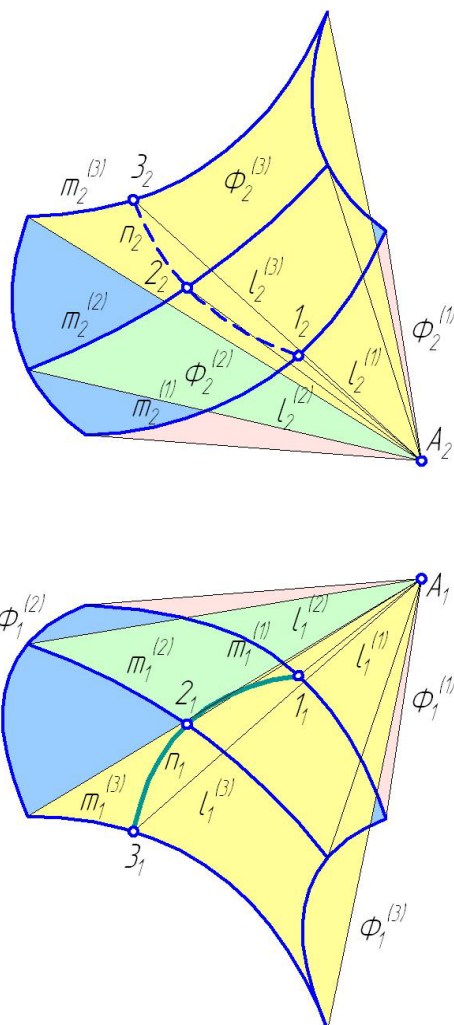


Рисунок 3.81 – Спосіб конічних поверхонь

### 3.4.5 ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ ЛІНІЇ ІЗ КРИВОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Пряма лінія  $l$  і крива поверхня  $\Omega$  можуть мати такі види взаємного розташування:

- а) пряма і поверхня не перетинаються (рис. 3.82 а);
- б) пряма дотична до поверхні (див. п. 3.3, рис. 3.70 – 3.73);
- в) пряма перетинає поверхню (рис. 3.82 б), у тому числі перпендикулярна до неї (див. п. 3.3, рис. 3.70 – 3.73).

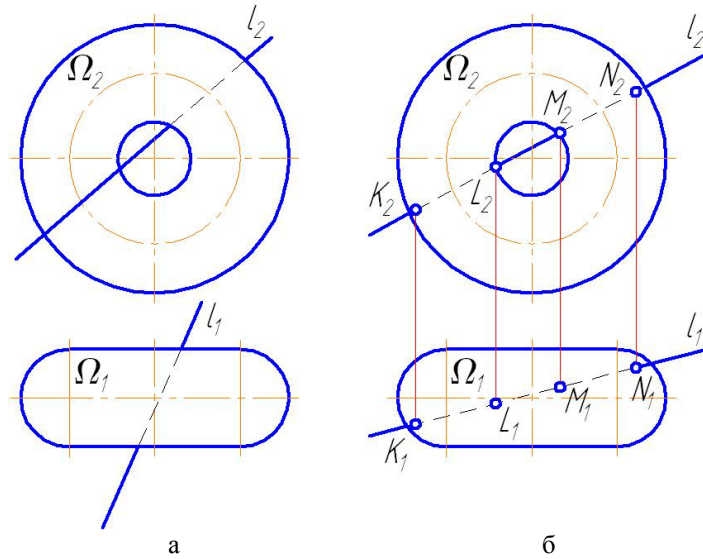


Рисунок 3.82 – Взаємне розташування прямої лінії і кривої поверхні

З п. 1.5.7 відомо, що пряма перетинає поверхню першого порядку (площину) в одній точці. У випадку поверхні другого і вищих порядків пряма може перетинати поверхню у точках, кількість яких не перевищує порядку поверхні. Наприклад, пряма може перетинати тор (поверхня четвертого порядку) максимум у чотирьох точках (рис. 3.82 б).

Для визначення точок перетину прямої  $l$  із поверхнею  $\Omega$  застосовуються такі способи:

- а) спосіб допоміжної січної площини особливого положення (див. п. 4.2.2.1, рис. 4.17 – 4.19);
- б) спосіб допоміжної січної площини загального положення (див. п. 4.2.2.2, рис. 4.20 – 4.23);
- в) спосіб заміни площин проєкцій (див. п. 4.2.2.3, рис. 4.24);
- г) спосіб обертання навколо проєціювальної осі (див. п. 4.2.2.3, рис. 4.25 – 4.27);
- д) метод послідовних наближень (див. п. 4.2.2.5);
- е) спосіб косокутного проєціювання.

Усі способи, окрім останнього, докладно описані у п. 4.1.2, 4.2.2 на прикладі гранних тіл і поверхонь обертання.

Спосіб косокутного проєціювання є універсальним, тобто може бути застосованим для визначення точок перетину прямої  $l$  з будь-якою кривою поверхнею.

На рис. 3.83 визначена точка  $K$  перетину прямої  $l$  з гіперболічним параболоїдом  $\Omega$ . Застосовано спосіб косокутного проєціювання на бісекторну площину  $\Pi$ . Напрямок проєціювання  $i$  збігається із прямою  $l$ , тому проєкція  $l'$  є точкою. Усі точки і лінії поверхні  $\Omega$  також проєціюються на бісекторну площину. Проєкція  $K'$  точки перетину прямої  $l$  з поверхнею  $\Omega$  збігається із проєкцією  $l'$ . Через точку  $K'$  проводиться твірна  $l'2'$ , яка належить

поверхні  $\Omega'$ . За допомогою ліній проєкційного зв'язку визначаються проєкція  $1_1 2_1$  і проєкції  $K_1, K_2$  шуканої точки  $K$  перетину прямої  $l$  з гіперболічним параболоїдом.

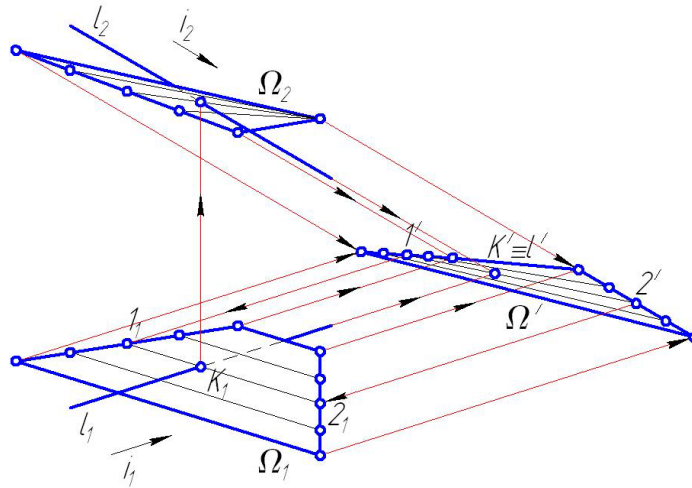


Рисунок 3.83 – Визначення точки перетину прямої лінії із кривою поверхнею

### 3.4.6 ПЕРЕТИН КРИВОЇ ЛІНІЇ ІЗ ПЛОЩИНОЮ

Крива лінія  $l$  і площина  $\Sigma$  можуть мати такі види взаємного розташування:

- а) лінія і площина не перетинаються (рис. 3.84 а);
- б) площина дотична до лінії (див. п. 3.3, рис. 3.70 – 3.73);
- в) лінія перетинає площину (рис. 3.84 б), у тому числі перпендикулярна до неї (див. п. 3.3, рис. 3.70 – 3.73).

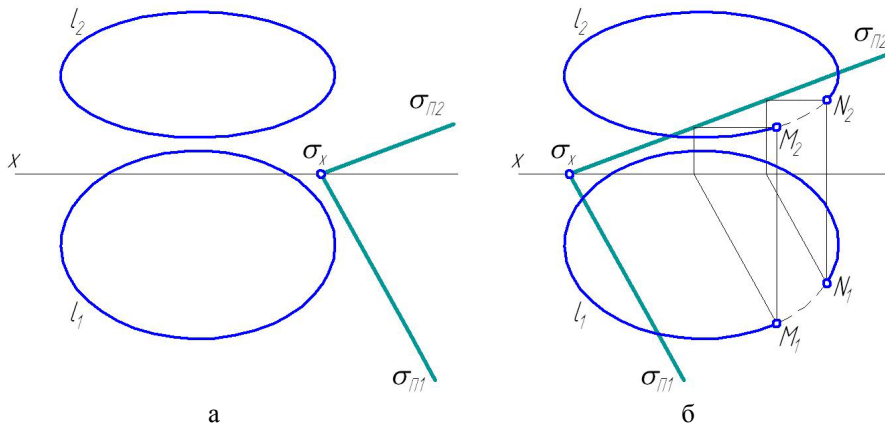


Рисунок 3.84 – Взаємне розташування кривої лінії і площини

Крива лінія може перетинати площину у точках, кількість яких не перевищує порядку кривої. Наприклад, еліпс (крива другого порядку) перетинає площину максимум у двох точках (рис. 3.84 б).

Для визначення точок перетину лінії  $l$  із площиною  $\Sigma$  застосовуються такі способи:  
 а) спосіб допоміжної січної циліндричної поверхні (див. п. 4.2.2.4, рис. 4.29 – 4.30);  
 б) метод послідовних наближень (див. п. 4.2.2.5);  
 в) спосіб косокутного проєціювання.

Спосіб косокутного проєціювання може бути застосований для визначення точок перетину площини  $\Sigma$  з будь-якою кривою лінією  $l$ .

На рис. 3.85 визначені точки  $M, N$  перетину кривої лінії  $l$  із площиною  $\Sigma$ , заданою паралельними прямими  $a, b$ , із застосуванням способу косокутного проєціювання на бісекторну площину  $\Pi'$ . Напрямок проєціювання  $i$  збігається з прямими  $a, b$ , тому проєкція  $\Sigma'$  є прямою. Усі точки лінії  $l$  також проєціюються на бісекторну площину. Проекції  $M', N'$  точок перетину лінії  $l$  із площиною  $\Sigma$  належать проєкції  $\Sigma'$ . За допомогою ліній проєкційного зв'язку визначаються горизонтальна і фронтальна проєкції шуканих точок  $M, N$ .

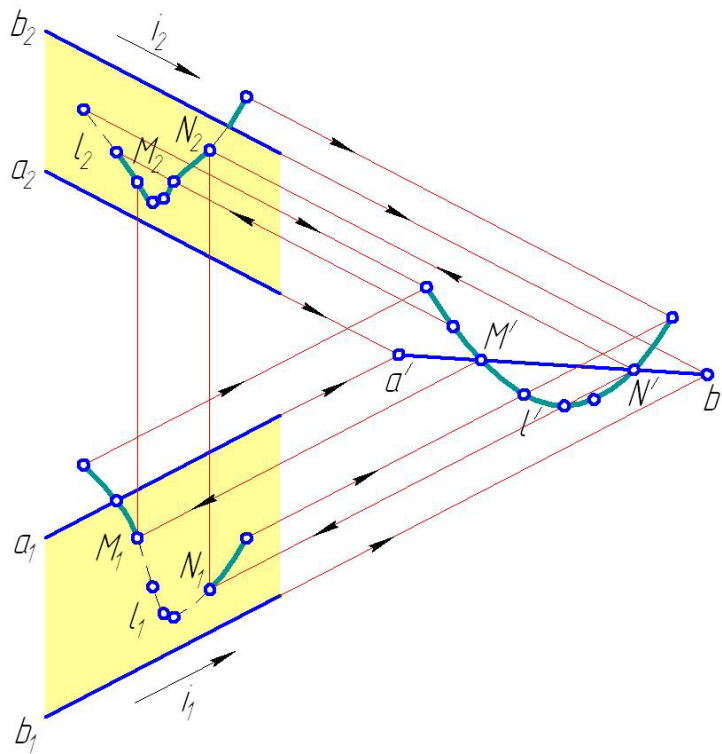
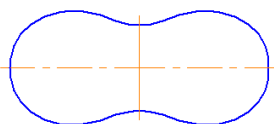


Рисунок 3.85 – Визначення точок перетину кривої лінії із площиною

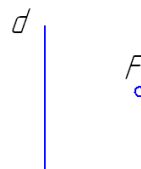
Задачі про перетин кривої лінії із поверхнею, а також про перетин поверхні площиною або іншою поверхнею докладно розглянуті у розділі 4.

### ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

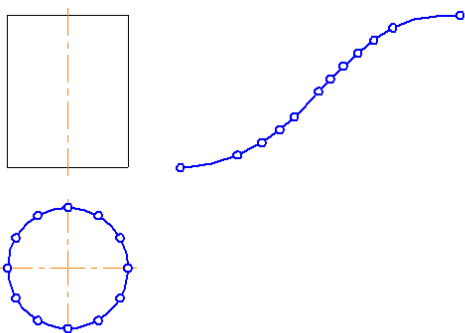
1. Чи може крива, показана на рисунку, мати третій алгебраїчний порядок. Відповідь обґрунтуйте.



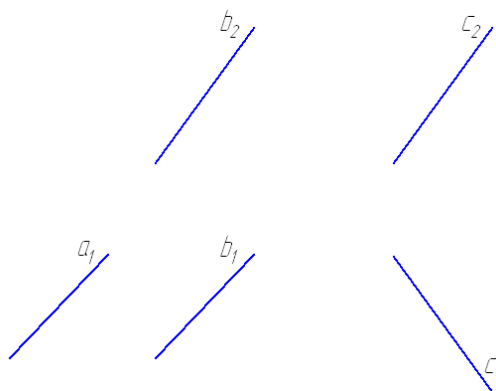
2. Побудуйте параболу за відомими фокусом  $F$  і директрисою  $d$ .



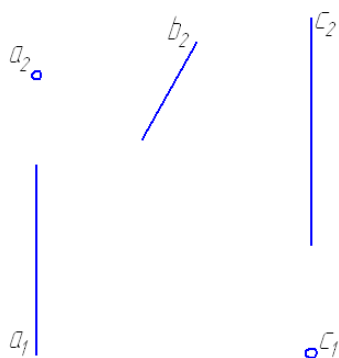
3. Побудуйте фронтальну проекцію циліндричної гвинтової лінії за відомою її розгорткою.



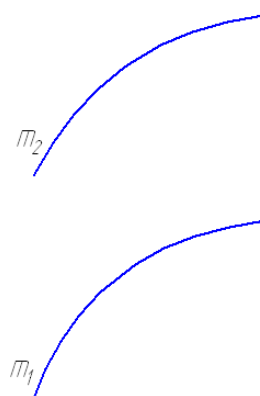
4. Побудуйте косий циліндр, заданий своїми твірними  $a, b, c$ .



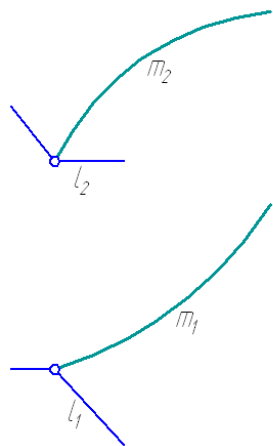
5. Побудуйте однопорожнинний гіперболоїд, заданий напрямними  $a, b, c$ .



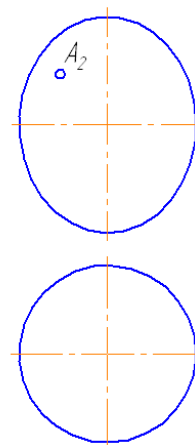
6. Побудуйте торс з напрямною  $m$ .



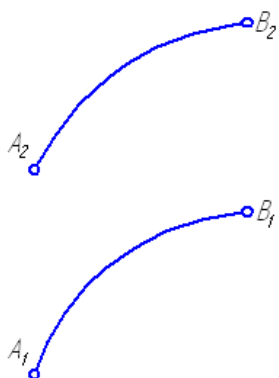
7. Побудуйте поверхню перенесення з ламаною твірною  $l$  і напрямною  $m$ .



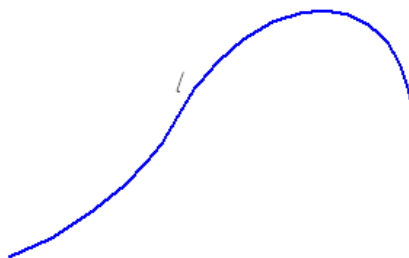
8. Побудуйте осі натурального тригранника у точці  $A$  еліпсоїда.



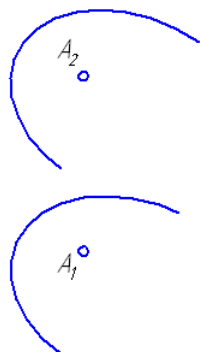
9. Визначте довжину дуги  $AB$ .



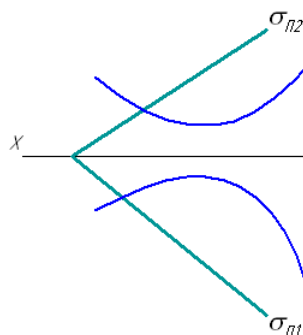
10. Побудуйте еквідистанту кривої  $l$  на відстані 20 мм.



11. Знайдіть відстань від точки  $A$  до дуги еліпса  $l$ .



12. Знайдіть точки перетину кривої  $l$  із площиною  $\Sigma$ .



### **ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ**

1. Зробіть загальну класифікацію кривих ліній.
2. Дайте визначення і характеристику конічних перерізів.
3. Опишіть способи побудови еліпса, гіперболи, параболи.
4. Опишіть плоскі криві третього порядку.
5. Опишіть плоскі криві четвертого порядку.
6. Опишіть алгоритм побудови синусоїди.
7. Зробіть класифікацію циклоїдальних кривих.
8. Опишіть алгоритми побудови циклоїди, трохоїди.
9. Які існують види спіральних кривих? Які властивості вони мають?
10. Опишіть алгоритм побудови спіралі Архімеда.
11. Які існують види трансцендентних кривих? Які властивості вони мають?
12. Опишіть алгоритм побудови трактриси.
13. Опишіть алгоритм побудови квадратриси Динострата.
14. Які криві називаються фігурами Ліссажу? Які існують найпростіші види цих фігур?
15. Опишіть алгоритм побудови лемніскати Жероно.
16. Що називається сполученням? Які його основні параметри і властивості? Скільки існує класичних видів сполучень.
17. Які криві називаються коробовими? Опишіть способи їх побудови.
18. Якими коробовими кривими умовно можна замінити еліпс, спіраль Архімеда?
19. Яка лінія називається гвинтовою? Наведіть класифікацію гвинтових ліній і сфери їх застосування.
20. Зробіть загальну класифікацію поверхонь.
21. Які існують види лінійчатих поверхонь?
22. Назвіть сфери застосування однопорожнинного гіперболоїда.
23. Прокласифікуйте гелікоїди. Наведіть приклади їх застосування.
24. Які існують види нелінійчатих поверхонь?
25. Прокласифікуйте каналові поверхні. Назвіть сфери їх застосування.
26. Що називається поверхнею обертання? Які основні геометричні елементи вона має?
27. Опишіть усі види поверхонь обертання другого порядку.
28. Що називається натуральним тригранником? Які осі і площини він має? Де застосовується натуральний тригранник?
29. Сформулюйте теорему про проєціювання дотичної.
30. У чому полягає процедура спрямлення кривої? Якими способами вона реалізується?
31. Що називається центром і радіусом кривизни лінії?
32. Що називається еволютою кривої? Наведіть приклади.
33. Що називається евольвентою кривої. Опишіть алгоритм побудови евольвенти кола. Назвіть сфери її застосування.
34. Що називається еквідистантою кривої? Опишіть спосіб побудови еквідистант і сфери їх застосування.
35. Що називається відстанню від точки до кривої лінії? Як вона визначається?
36. Що називається відстанню від точки до кривої поверхні? Як вона визначається?
37. Опишіть способи визначення точок перетину прямої лінії із кривою поверхнею.
38. Опишіть способи визначення точок перетину кривої лінії із площиною.

## РОЗДІЛ 4 ПРОСТОРОВІ ТІЛА

---

### 4.1 ПРОЕЦІЮВАННЯ БАГАТОГРАННИКІВ

#### 4.1.1 ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКА ПЛОЩИНОЮ ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

Просторове тіло можна розглядати як неперервну сукупність точок простору, обмежених поверхнею або сукупністю поверхонь. Тому вивчення просторових тіл неможливе без розуміння теорії поверхонь (див. п. 3.2.1 – 3.2.2).

Серед нескінченної різноманітності просторових тіл одними з найбільш простих і водночас найбільш поширених є *багатогранники* – тіла, обмежені сукупністю площин (рис. 4.1). Форму багатогранників мають споруди (рис. 4.1 а), природні і штучні кристали (рис. 4.1 б) та їх кристалічні ґратки (рис. 4.1 в), ювелірні вироби (рис. 4.1 г), вироби нанотехнології (рис. 4.1 д) тощо.

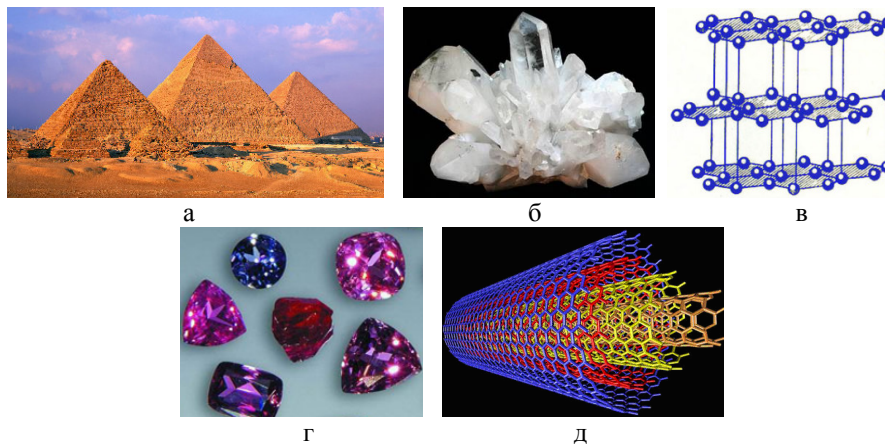


Рисунок 4.1 – Застосування і прояви багатогранників

Багатогранники поділяють на правильні (рис. 4.2 а) і неправильної форми (рис. 4.2 б), випуклі (рис. 4.2 а) і увігнуті (рис. 4.2 в), зіркоподібні (рис. 4.2 г) тощо.

*Правильні багатогранники* – багатогранники з однаковими за формою і розмірами гранями. Вони також мають назву *платонієських тіл*.

Існують такі правильні багатогранники (рис. 4.2 а):

а) *тетраедр* (від грецького *тетράεδρον* – *чотиригранник*) – геометричне тіло, обмежене чотирма гранями у формі правильних трикутників;

б) *куб* – геометричне тіло, обмежене шістьма гранями у формі квадратів. Інша назва куба – *гексаедр* (у перекладі з грецького – *шестигранник*);



в) *октаедр* (від грецького *οκτάεδρο* – *восьмигранник*) – тіло, обмежене вісьмома гранями у формі правильних трикутників;

г) *додекаедр* (від грецького *δωδεκάεδρο* – *дванадцятигранник*) – тіло, обмежене дванадцятьма гранями у формі правильних п'ятикутників;

д) *ікосаедр* (у перекладі з грецького – *двадцятигранник*) – тіло, обмежене двадцятьма гранями у формі правильних трикутників.

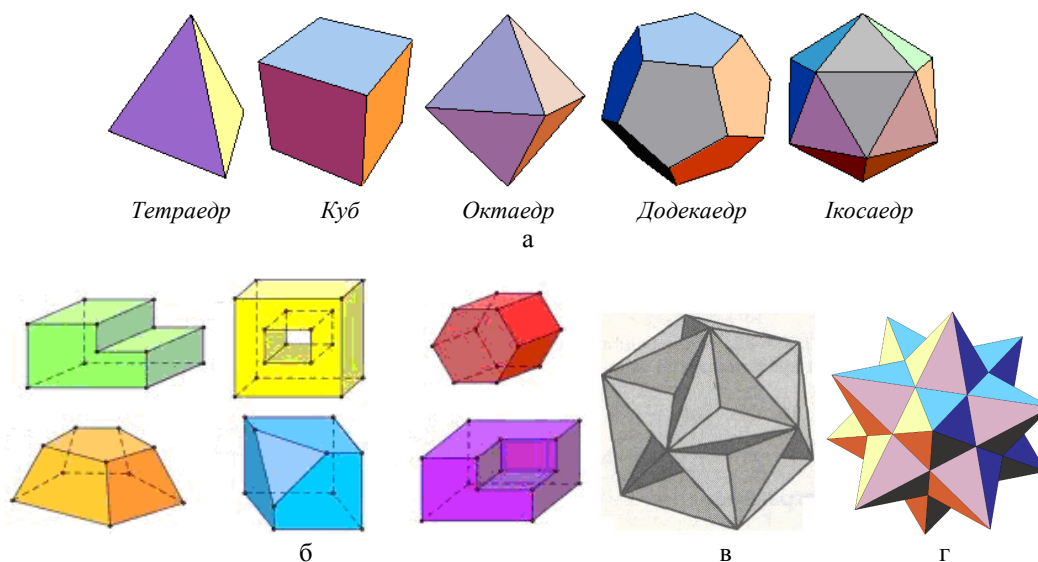


Рисунок 4.2 – Види багатогранників

Основними геометричними елементами багатогранників є:

а) *грані* – площини, якими обмежене тіло;

б) *ребра* – лінії перетину граней;

в) *вершини* – точки перетину ребер.

Зв'язок між кількістю граней  $\Gamma$ , ребер  $P$  і вершин  $B$  установлює *формула Ейлера*:

$$\Gamma - P + B = 2. \quad (4.1)$$

Наприклад, для куба  $\Gamma = 6, P = 12, B = 8$  ( $6 - 12 + 8 = 2$ ).



(428 – 347 до н. е.)

*Платон* (у перекладі з грецького *Πλάτων* – *широкоплечий*) – давньогрецький філософ, учень Сократа і вчитель Аристотеля. Справжнє ім'я – *Аристокл* (у перекладі з грецького *Αριστοκλής* – *найбільш славетний*). Платон є засновником ідеалізму у світовій філософії.



(1707– 1783)

*Леонард Ейлер* (*Leonhard Euler*) – швейцарський, німецький і російський математик, фізик, астроном, почесний член Петербурзької академії наук, автор понад 800 наукових праць із різних галузей природознавства. Засновник теорії комплексних чисел, варіаційного числення, диференціальної геометрії тощо.



Проекцією багатогранника є плоска замкнута фігура. На рис. 4.3 а – б побудовані комплексні креслення прямої чотирикутної призми і прямої п'ятикутної піраміди.

Будь-який багатогранник  $\Phi$  перетинається площиною  $\Sigma$  по плоскій лінії – багатокутнику  $k$ , елементи якого визначаються двома способами:

а) *спосіб ребер*, згідно з яким точки багатокутника  $k$  є точками перетину площини  $\Sigma$  з ребрами тіла  $\Phi$  (рис. 4.4 а);

б) *спосіб граней*, згідно з яким сторони багатокутника  $k$  є лініями перетину площини  $\Sigma$  із гранями тіла  $\Phi$  (рис. 4.4 б).

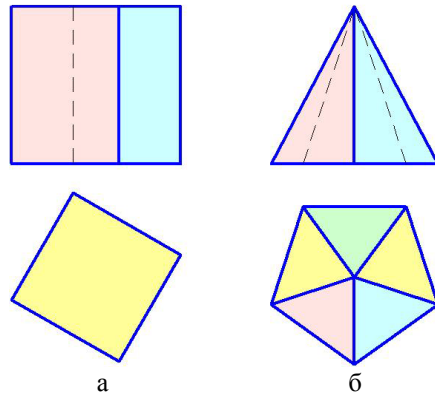


Рисунок 4.3 – Креслення багатогранників

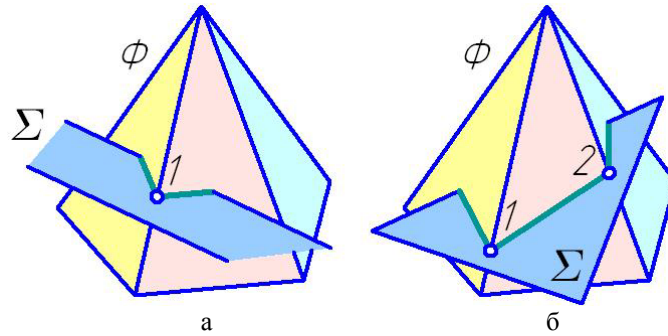


Рисунок 4.4 – Способи ребер (а) і граней (б)

На рис. 4.5 пряма трикутна піраміда  $SABC$  перерізана фронтально-проеційовальною площиною  $\Sigma$ . Точки 1, 2 фігури перерізу 1–2–3–4 є точками перетину площини  $\Sigma$  із ребрами  $SA$ ,  $SB$  (спосіб ребер). Сторона 3–4 фігури перерізу 1–2–3–4 є лінією перетину площини  $\Sigma$  із гранню  $ABC$  (спосіб граней). Фронтальна проекція  $1_2 2_2 3_2 4_2$  фігури перерізу збігається із фронтальним слідом  $\Sigma_2$  січної площини; горизонтальна проекція  $1_1 2_1 3_1 4_1$  є чотирикутником. Для визначення натуральної величини  $1_0 2_0 3_0 4_0$  чотирикутника 1–2–3–4 застосовується спосіб плоско-паралельного переміщення (див. п. 2.3.4, рис. 2.34).

На рис. 4.5 для визначення проекції  $2_1$  застосовано спосіб допоміжної горизонталі  $h$ , паралельної горизонтальній прямій рівня  $AB$ .

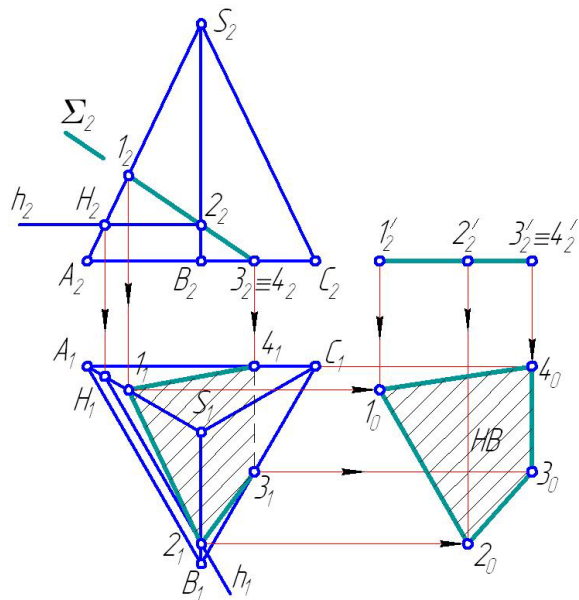


Рисунок 4.5 – Переріз багатогранника площиною особливого положення

#### 4.1.2 ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКА ПРЯМОЮ

Для визначення точок перетину багатогранника  $\Phi$  прямою  $l$  застосовується спосіб допоміжної січної площини  $\Sigma$  особливого положення.

*Суть способу допоміжної січної площини особливого положення*

Через пряму  $l$  проводиться площина  $\Sigma$  особливого положення, і визначається лінія  $k$  перетину багатогранника  $\Phi$  цією площиною. Шукані точки перетину є точками перетину багатокутника  $k$  заданою прямою  $l$ .

На рис. 4.6 а трикутна призма перетинається прямою  $l$ . Для визначення точок перетину через пряму  $l$  проводиться горизонтально-проєціювальна площина  $\Sigma$ , і визначається контур 1–2–3–4 перерізу призми цією площиною. Шукані точки  $M, N$  є точками перетину контура 1–2–3–4 прямою  $l$ . Видимість частин прямої  $l$  на її горизонтальній і фронтальній проєкціях визначається із використанням методів, описаних у п. 1.4.7.

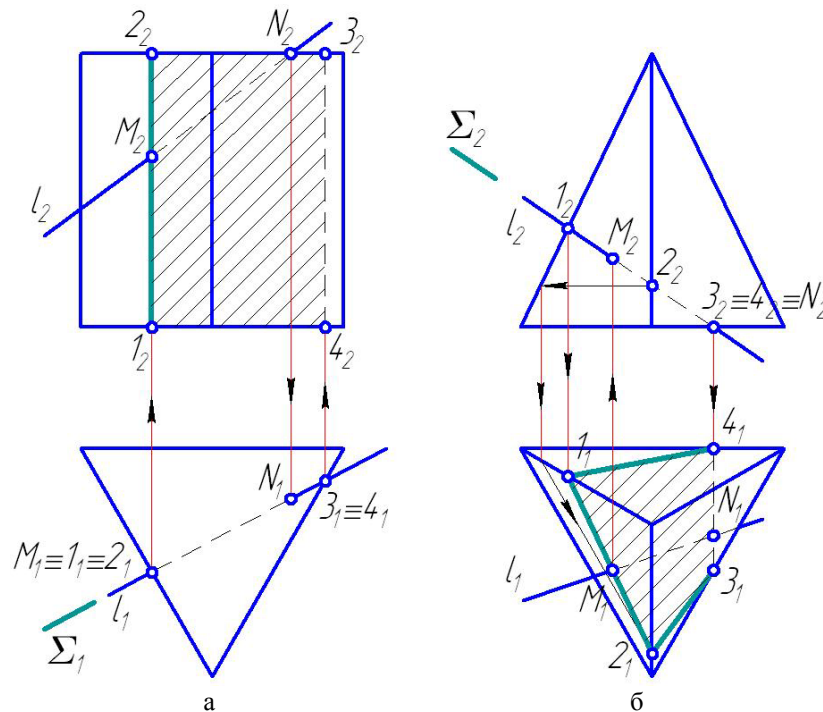


Рисунок 4.6 – Спосіб допоміжної січної площини особливого положення

На рис. 4.6 б трикутна піраміда перетинається прямою  $l$ . Для визначення точок перетину через пряму  $l$  проводиться фронтально-проєціювальна площина  $\Sigma$ , і визначається контур 1–2–3–4 перерізу піраміди цією площиною. Шукані точки  $M, N$  є точками перетину контура 1–2–3–4 прямою  $l$ . Видимість частин прямої  $l$  на її горизонтальній і фронтальній проєкціях визначається із використанням методів, описаних у п. 1.4.7.

### 4.1.3 ПЕРТИН БАГАТОГРАННИКА ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

#### 4.1.3.1 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ СІЧНИХ ПЛОЩИН ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

При визначенні лінії  $k$  перетину багатогранника  $\Phi$  площиною  $\Sigma$  загального положення переважно застосовуються такі способи:

- а) спосіб допоміжних січних площин особливого положення;
- б) спосіб допоміжних площин-посередників;
- в) спосіб заміни площин проєкцій.

*Суть способу допоміжних січних площин особливого положення*

Уводиться множина площин  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots$  особливого положення, які проходять через ребра (або грані) тіла  $\Phi$ , і визначаються лінії перетину цих площин із площиною  $\Sigma$ . Отримані лінії проходять через точки (або сторони) шуканого багатокутника  $k$ .

На рис. 4.7 а трикутна піраміда перетинається площиною, заданою трикутником  $ABC$ .

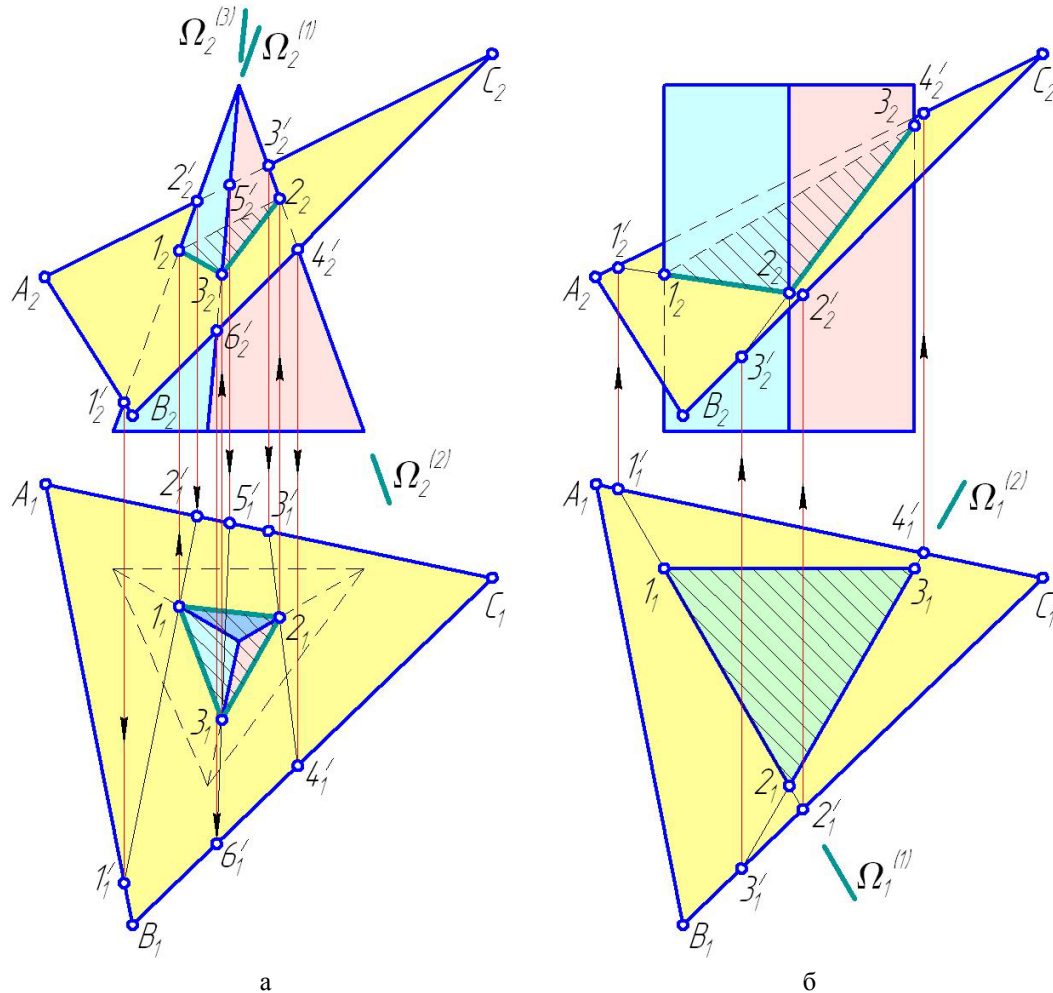


Рисунок 4.7 – Перетин багатогранника площиною загального положення

Уводяться фронтально-проєційвальні січні площини  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$ ,  $\Omega^{(3)}$ , що проходять через ребра піраміди. Визначаються лінії  $1'2'$ ,  $3'4'$ ,  $5'6'$  перетину січних площин із площиною  $ABC$ , а також точки 1, 2, 3 перетину ліній  $1'2'$ ,  $3'4'$ ,  $5'6'$  із відповідними ребрами піраміди. Будуються проєкції шуканої лінії 1–2–3 перетину піраміди площиною  $ABC$ , і визначається видимість усіх ліній на двох проєкціях.

На рис. 4.7 б трикутна призма перетинається площиною, заданою трикутником  $ABC$ . Уводяться горизонтально-проєційвальні січні площини  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$ , що проходять через грані призми. Визначаються лінії  $1'2'$ ,  $3'4'$  перетину січних площин із площиною  $ABC$ . Відрізки 1–2, 2–3 перетину призми площиною  $ABC$  належать відповідно лініям  $1'2'$ ,  $3'4'$ . Будуються проєкції шуканої лінії 1–2–3 перетину призми площиною  $ABC$ , і визначається видимість усіх ліній на двох проєкціях.

#### 4.1.3.2 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ ПЛОЩИН-ПОСЕРЕДНИКІВ

У способі допоміжних площин-посередників використовуються, як правило, площини особливого положення.

*Суть способу допоміжних площин-посередників*

Уводиться множина площин  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$ , ... особливого положення, які одночасно перетинають тіло  $\Phi$  і січну площину  $\Sigma$ . Визначаються лінії перетину площин-посередників із тілом  $\Phi$  і площиною  $\Sigma$ . Точки перетину отриманих ліній належать шуканому багатокутнику  $k$  – контуру перерізу тіла  $\Phi$  площиною  $\Sigma$ .

На рис. 4.8 а трикутна призма перетинається площиною, заданою трикутником  $ABC$ . Уводяться площини-посередники  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$  фронтального рівня. Вони перетинають призму і площину  $ABC$  по лініях, які перетинаються у точках  $1'$ ,  $2'$ ,  $F$ , які належать фронталям  $f^{(1)}$ ,  $f^{(2)}$  площини  $ABC$ . Продовження відрізків  $1'F$ ,  $2'F$  до ребер призми дозволяють визначити точки  $D$ ,  $E$  шуканого контуру  $DEF$  перерізу призми площиною  $ABC$ .

На рис. 4.8 б трикутна призма перетинається площиною, заданою трикутником  $ABC$ . Уводяться площини-посередники  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$  горизонтального рівня. Вони перетинають призму і площину  $ABC$  по лініях, які проходять через точки  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ ,  $4'$  і належать горизонталям  $h^{(1)}$ ,  $h^{(2)}$  площини  $ABC$ . Продовження відрізків 1–3, 2–4 до ребер призми дозволяють визначити точки  $D$ ,  $E$ ,  $F$  шуканого контуру  $DEF$  перерізу призми площиною  $ABC$ .

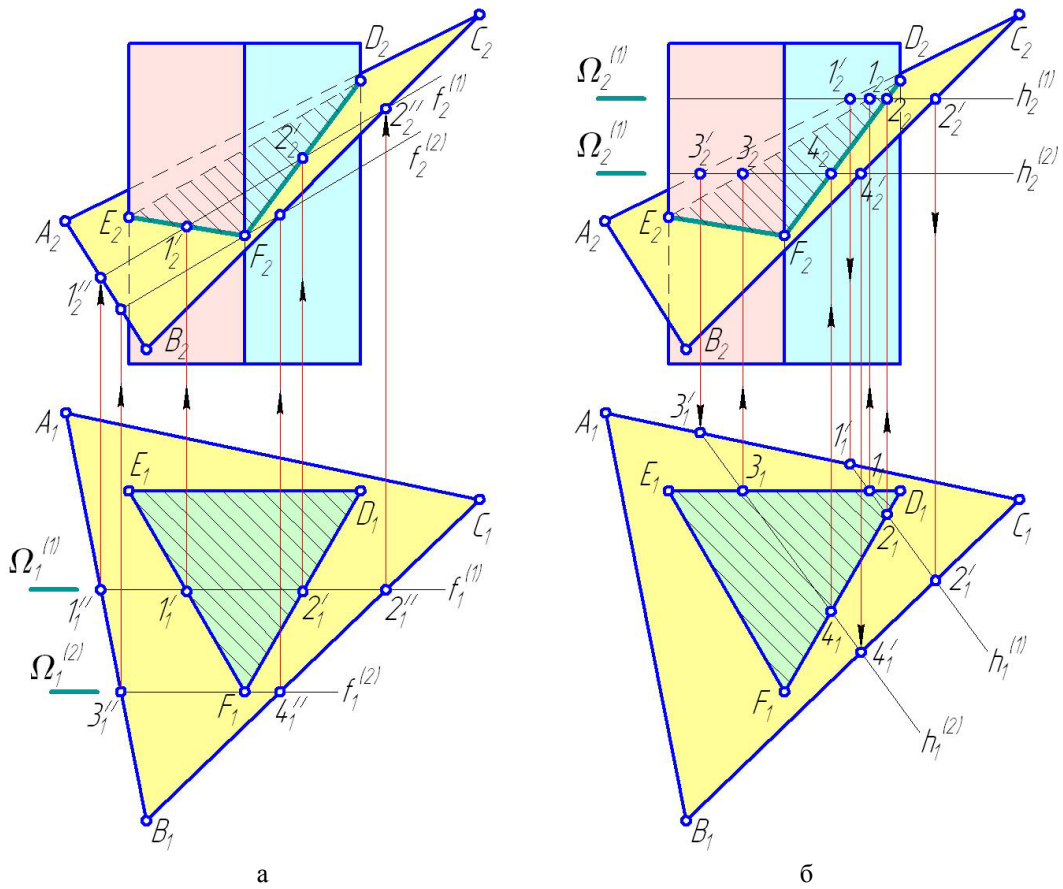


Рисунок 4.8 – Спосіб допоміжних площин-посередників

#### 4.1.3.3 СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

Для визначення лінії  $k$  перетину  $\Phi$  багатогранника із площиною  $\Sigma$  способом заміни площин проєкцій вводиться додаткова площина проєкцій  $\Pi_4$ , перпендикулярна до січної площини  $\Sigma$ .

На рис. 4.9 трикутна піраміда  $SABC$  перетинається площиною  $\Sigma$  загального положення, заданою слідами  $\sigma_{\Pi 1}$ ,  $\sigma_{\Pi 2}$ . Додаткова площина проєкцій  $\Pi_4$  перпендикулярна до горизонтального сліду січної площини (вісь  $s_{14}$  перпендикулярна до проєкції  $\sigma_{\Pi 1}$ ). Проєкція  $\sigma_{\Pi 4}$  визначається за допоміжними точками  $\sigma_x, 1'$ . За визначеними проєкціями на  $\Pi_4$  піраміди  $SABC$  і січної площини  $\Sigma$  знаходяться проєкції  $1_4, 2_4, 3_4, 4_4$  контуру шуканого перерізу. За допомогою ліній проєкційного зв'язку визначаються горизонтальна і фронтальна проєкції лінії  $1-2-3-4$  перетину піраміди  $SABC$  площиною  $\Sigma$ . Уведення площини проєкцій  $\Pi_5$ , паралельної січній площині  $\Sigma$  (вісь  $s_{45}$  паралельна  $\sigma_{\Pi 4}$ ), дозволяє визначити натуральну величину  $1_5 2_5 3_5 4_5$  фігури перерізу.

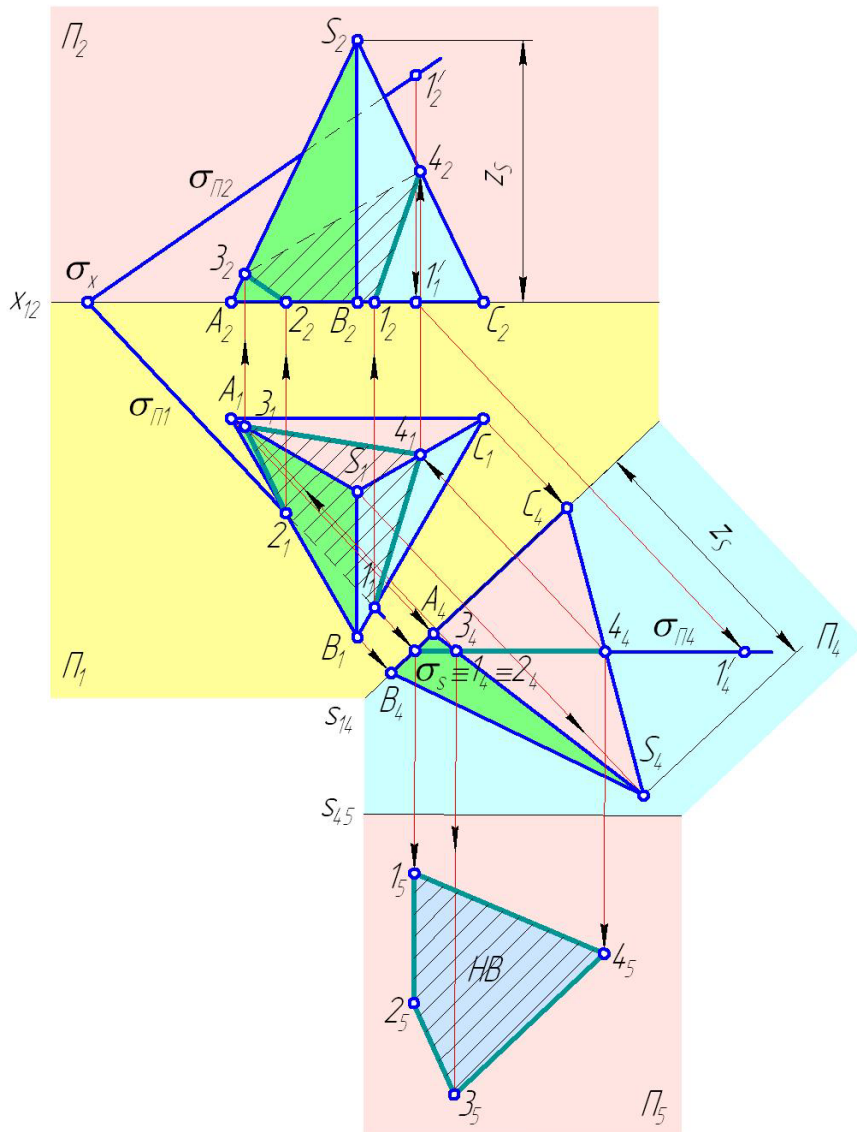


Рисунок 4.9 – Спосіб заміни площин проєкцій

#### 4.1.4 ПЕРЕТИН ДВОХ БАГАТОГРАННИКІВ

##### 4.1.4.1 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ СІЧНИХ ПЛОЩИН ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

Два багатогранники  $\Phi$ ,  $\Psi$  можуть перетинатися по одній або декількох ламаних лініях, які визначаються двома способами:

а) *спосіб ребер*, згідно з яким точки ламаної лінії є точками перетину ребер тіла  $\Phi$  із гранями тіла  $\Psi$  (рис. 4.10 а);

б) *спосіб граней*, згідно з яким відрізки ламаної лінії належать лініям перетину граней тіла  $\Phi$  із гранями тіла  $\Psi$  (рис. 4.10 б).

Названі способи реалізуються за допомогою введення допоміжних січних площин особливого положення або площин-посередників.

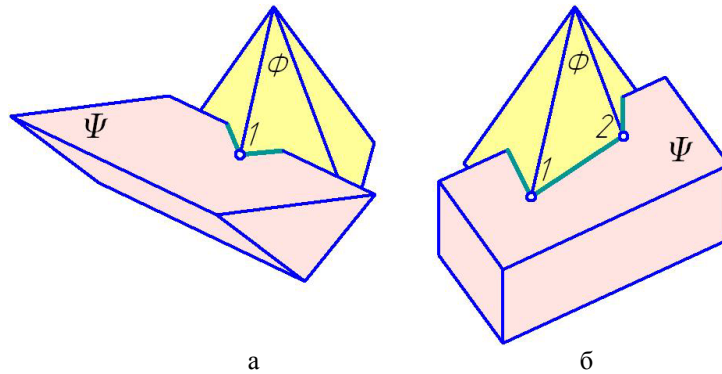


Рисунок 4.10 – Способи ребер (а) і граней (б)

##### *Суть способу допоміжних січних площин особливого положення*

Уводиться множина площин  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$ , ... особливого положення, які проходять через ребра (або грані) тіла  $\Phi$  і визначаються лінії перетину цих площин із тілом  $\Psi$ . Отримані лінії проходять через точки (або сторони) шуканої ламаної лінії перетину фігур  $\Phi$ ,  $\Psi$ .

На рис. 4.11 визначена лінія перетину піраміди з призмою. Через ребра призми, а також ребра і грані піраміди проводяться фронтальні площини рівня і фронтально-проєційвальні площини  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$ . Лінії перетину цих площин із гранями протилежних фігур дозволяють визначити точки 1 – 8, за якими будуються горизонтальна і фронтальна проєкції шуканої лінії перетину піраміди із призмою, яка є просторовим восьмикутником 1 – 2 – ... – 8.



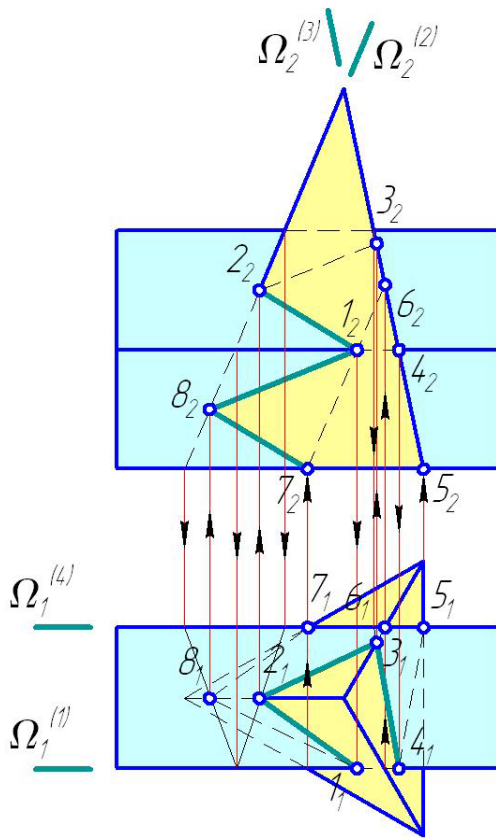


Рисунок 4.11 – Спосіб допоміжних січних площин

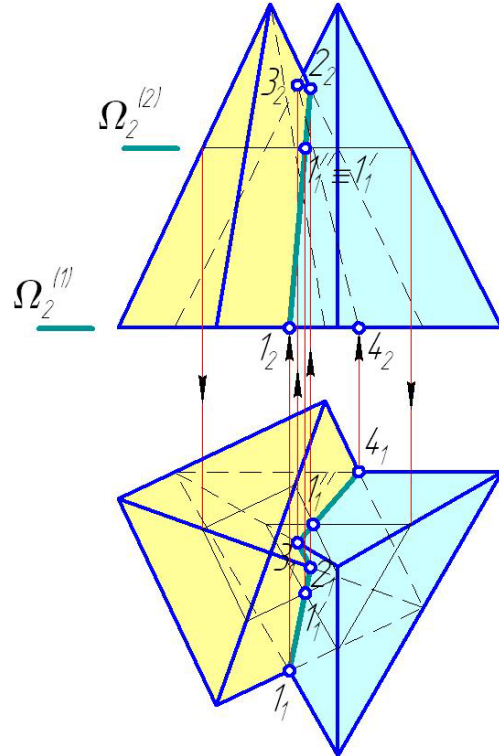


Рисунок 4.12 – Спосіб допоміжних площин-посередників

#### 4.1.4.2 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ ПЛОЩИН-ПОСЕРЕДНИКІВ

У способі допоміжних площин-посередників використовуються площини особливого положення, які одночасно перетинають два тіла, лінію перетину яких потрібно знайти.

*Суть способу допоміжних площин-посередників*

Уводиться множина площин  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots$  особливого положення, які одночасно перетинають багатогранники  $\Phi, \Psi$ . Визначаються лінії перетину площин-посередників із цими тілами. Точки перетину отриманих ліній належать шуканій лінії перетину двох багатогранників  $\Phi, \Psi$ .

На рис. 4.12 побудовано лінію перетину двох пірамід. Для визначення проєкцій її точок 1, 2, 3, 4 уведені площини-посередники  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$  горизонтального рівня, які перетинають обидві піраміди по трикутнику і чотирикутнику. Точки 1, 4, 1', 1'' перетину цих трикутників із відповідними чотирикутниками належать шуканій лінії 1 – 2 – 3 – 4 перетину двох пірамід. Точки 2, 3 є точками перетину прямих 1'1, 1''4 з ребрами відповідних пірамід.

## 4.2 ПРОЕЦІЮВАННЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

### 4.2.1 ПЕРЕТИН ТІЛА ОБЕРТАННЯ ПЛОЩИНОЮ ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

Тіла обертання є тілами, обмеженими поверхнями обертання (див. п. 3.2.2.2, рис. 3.63).

Лінія  $k$  перетину тіла обертання  $\Phi$  площиною  $\Sigma$  має алгебраїчний порядок, який дорівнює алгебраїчному порядку поверхні тіла  $\Phi$ . Наприклад, тор (поверхня четвертого порядку) перетинається площиною  $\Sigma$  по кривій максимум четвертого порядку (рис. 4.16). У деяких випадках лінія  $k$  розкладається на дві і більше ліній.

Лінія  $k$  перетину тіла обертання  $\Phi$  площиною  $\Sigma$  будується наближено за точками 1, 2, ..., які є точками перетину січної площини  $\Sigma$  із твірними і напрямними (меридіанами і паралелями) тіла  $\Phi$ . При цьому обов'язково потрібно зазначити особливі точки і лінії фігури перерізу: осі симетрії, точки перегинів, точки переходу від видимого контуру до невидимого тощо.

Деякі фігури перетину тіл обертання січними площинами наведені у табл. 4.1. Відповідні комплексні креслення зображені на рис. 4.13.

Таблиця 4.1 – Фігури плоских перерізів тіл обертання

Тіло	Січна площина				
	$\Sigma$	$\Psi$	$\Omega$	$\Theta$	$\Xi$
Сфера	коло	–			
Циліндр		прямокутник	еліпс	–	
Конус		трикутник		гіпербола	парабола
Тор		лемніската Бута	крива Персея	–	

Необхідно зазначити, що лінії, наведені у табл. 4.1, проєціюються на площини проєкцій у спотвореному вигляді. Наприклад, коло може проєціюватися в еліпс або відрізок.

У випадку, коли січна площина  $\Sigma$  є проєціювальною (рис. 4.13), одна із проєкцій шуканої фігури  $k$  перерізу є відрізком, який належить відповідному сліду січної площини. Невідомі проєкції точок 1, 2, ... фігури  $k$  перерізу знаходяться із використанням допоміжних ліній  $l^{(1)}, l^{(2)}, \dots$ , які належать поверхні тіла обертання  $\Phi$ . Для сфери, циліндра, конуса і тора такими лініями є кола, які належать площині рівня (рис. 4.14 – 4.16). Крім того, на поверхні циліндра і конуса такими лініями можуть бути прямі лінії (рис. 4.15).

На рис. 4.14 сфера  $\Phi$  перерізана фронтально-проєціювальною площиною  $\Sigma$ . Лінією перетину є коло, яке проєціюється на  $\Pi_2$  у відрізок, на  $\Pi_1, \Pi_3$  – в еліпс. Для побудови горизонтальної проєкції лінії перетину на її фронтальній проєкції обираються точки 1<sub>2</sub> – 8<sub>2</sub>. Для уточнення форми кривої на  $\Pi_1$  можна обирати додаткові точки. Точки 1 – 8 є обов'язковими для обрання, оскільки є характерними:

- а) точки 1, 5 – точки перигею (найближчі до його центра) на  $\Pi_1$ ;
- б) точки 3, 7 – точки апогею (найбільш віддалені від його центра) на  $\Pi_1$ . Їх фронтальні проєкції збігаються з основою перпендикуляра, проведеного з центра сфери  $O_2$  до січної площини;
- в) точки 2, 8 – точки переходу від видимого контуру до невидимого на  $\Pi_1$ ;
- г) точки 4, 6 – точки переходу від видимого контуру до невидимого на  $\Pi_3$ .

Для визначення горизонтальної проєкції точок 2, 8 уводиться площина  $\Omega^{(2)}$  горизонтального рівня, яка проходить через дані точки і перетинає сферу по колу, яке проєціюється у натуральну величину на  $\Pi_1$ . За допомогою вертикальної лінії проєкційного зв'язку, проведеної з проєкції 2<sub>2</sub>, 8<sub>2</sub>, визначаються проєкції 2<sub>1</sub>, 8<sub>1</sub>. Аналогічно визначаються проєкції 1<sub>1</sub>, 3<sub>1</sub> – 7<sub>1</sub>. Профільна проєкція лінії перетину визначається за допомогою ліній проєкційного зв'язку.

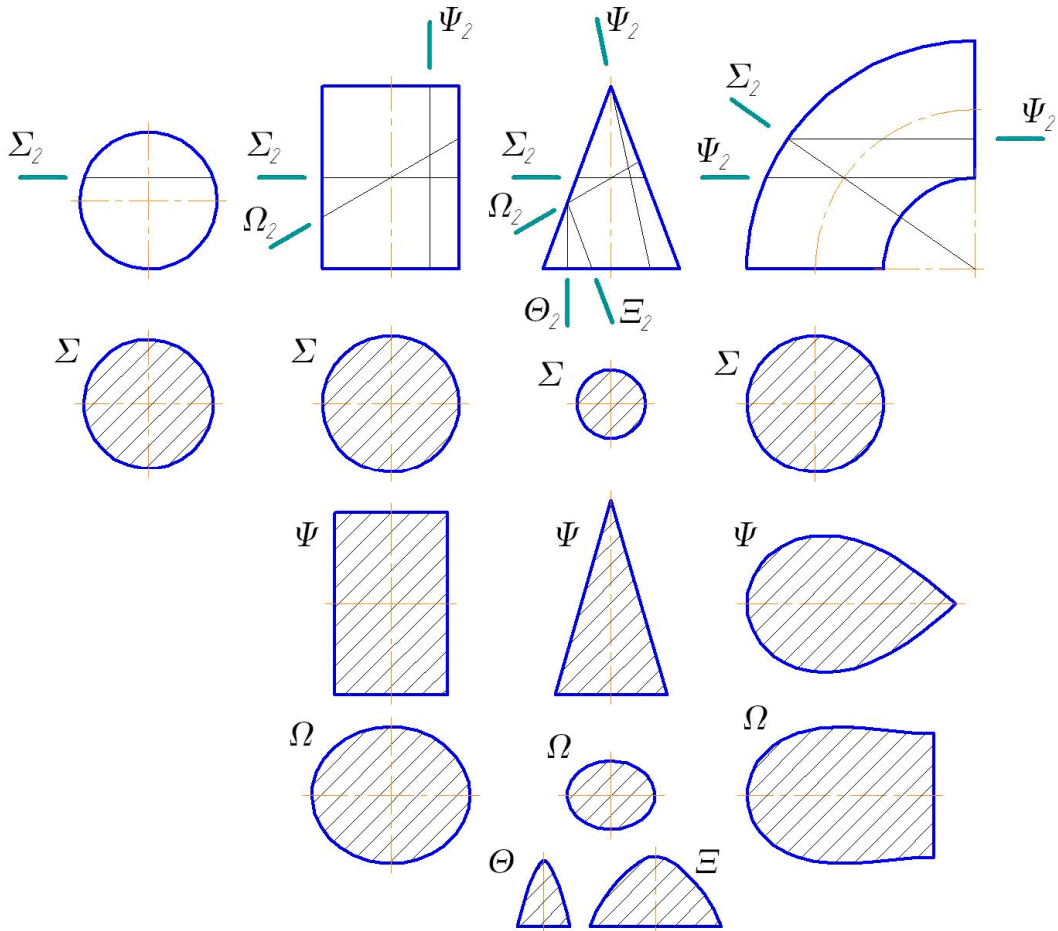


Рисунок 4.13 – Фігури плоских перерізів тіл обертання

На рис. 4.15 конус перерізаний фронтально-проєкційною площиною  $\Sigma$ , паралельною її твірній лінії. Лінією перетину є парабола, яка проєціюється на  $\Pi_2$  у відрізок, а на  $\Pi_1, \Pi_3$  – у параболи. Для побудови горизонтальної проєкції лінії перетину на її фронтальній проєкції обираються точки  $1_2 - 7_2$ . Характеристики точок параболи:

- а) точки 1, 7 – точки, які належать основі конуса;
- б) точки 2, 6 – точки переходу від видимого контуру до невидимого на  $\Pi_3$ ;
- в) точка 4 – точка перегину (найвища точка параболи);
- г) точки 3, 5 – допоміжні, які уточнюють форму параболи на її ділянках 2 – 4, 4 – 6.

Для визначення горизонтальної проєкції точок 2, 6 уводиться площина  $\Omega^{(2)}$  горизонтального рівня, яка проходить через дані точки і перетинає конус по колу, яке проєціюється в натуральну величину на  $\Pi_1$ . За допомогою вертикальної лінії проєкційного зв'язку, проведеної з проєкції  $2_2, 6_2$ , визначаються проєкції  $2_1, 6_1$ . Аналогічно визначаються проєкції  $1_1, 4_1$ . Для визначення горизонтальної проєкції точок 3, 5 уводиться фронтально-проєкційна площина  $\Omega^{(3)}$ , яка проходить через дані точки і вершину  $S$  конуса, перетинаючи конус по трикутнику  $SAB$ , горизонтальна проєкція  $S_1A_1B_1$  якого знаходиться за допомогою ліній проєкційного зв'язку. Проєкції  $3_1, 5_1$  належать відрізкам  $S_1A_1, S_1B_1$ . Профільна проєкція лінії перетину визначається за допомогою ліній проєкційного зв'язку.

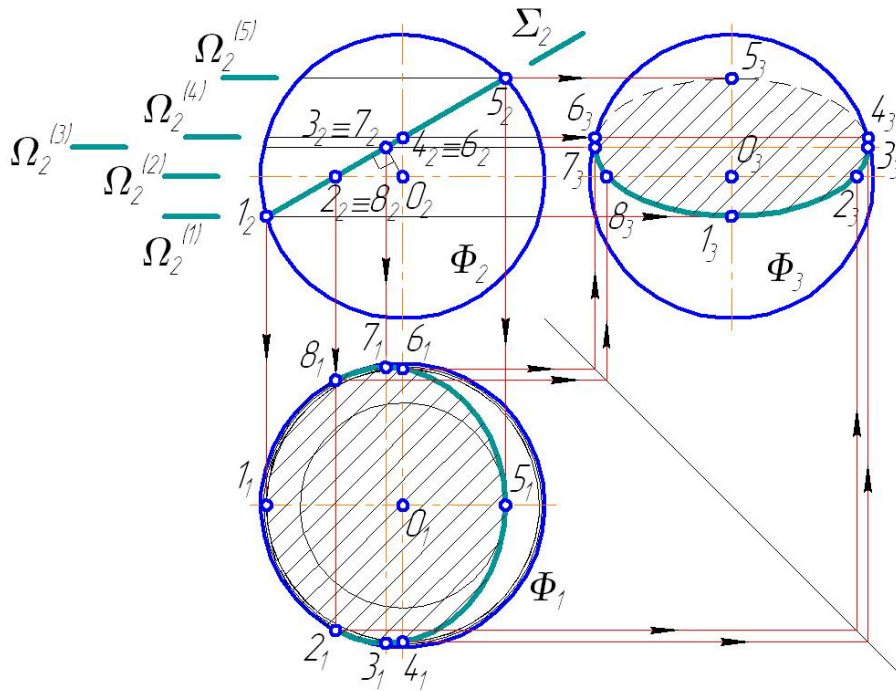


Рисунок 4.14 – Плоский переріз сфери

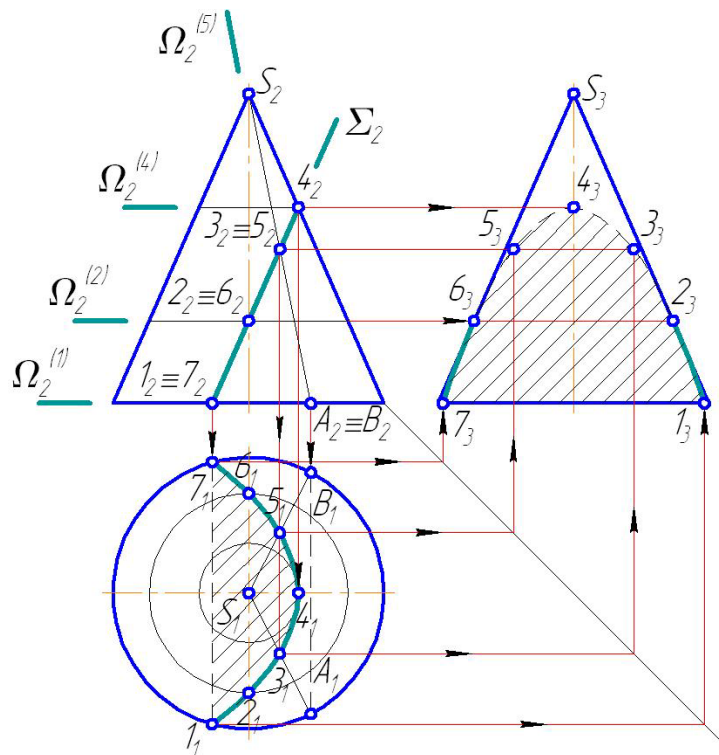


Рисунок 4.15 – Плоский переріз конуса

На рис. 4.16 тор перерізаний площиною  $\Sigma$  горизонтального рівня. Лінією перетину є гілка лемніскати Бута, яка проєціюється на  $\Pi_2$  у відрізок, на  $\Pi_1$  – у натуральну величину. Для побудови горизонтальної проєкції лінії перетину вводять сім'ю площин  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  фронтального рівня, яка перетинає тор по концентричних колах  $l^{(1)} - l^{(8)}$  із центром  $O$ . Ці кола перетинають січну площину  $\Sigma$  у точках 1 – 8, які належать шуканій кривій. За допомогою вертикальних ліній проєкційного зв'язку, проведених із проєкцій  $1_2 - 8_2$ , визначаються горизонтальні проєкції  $1_1 - 8_1$ , що належать горизонтальним проєкціям ліній  $l^{(1)} - l^{(8)}$ .

Характеристики точок шуканої кривої:

- а) точка 1 є точкою перегину (крайня ліва точка);
- б) точки 3, 7 – точки переходу від видимого контуру до невидимого на  $\Pi_1$ ;
- в) точка 5 є особливою точкою лемніскати Бута;
- г) точки 4, 6 – допоміжні точки.

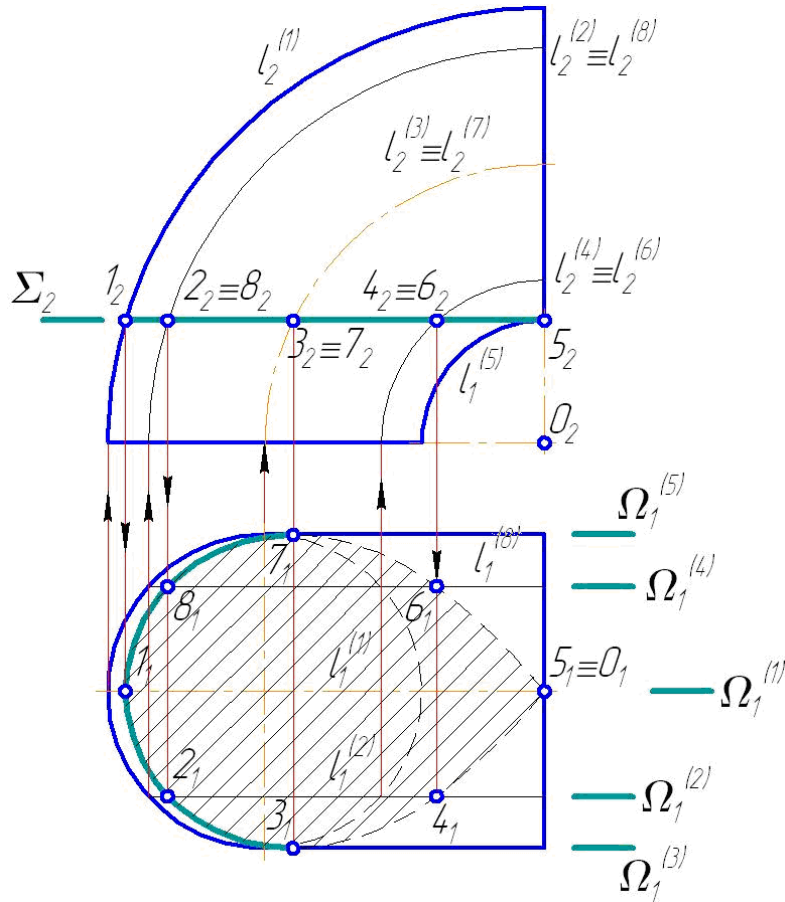


Рисунок 4.16 – Плоский переріз тора

## 4.2.2 ПЕРЕТИН ТІЛА ОБЕРТАННЯ ЛІНІЄЮ

### 4.2.2.1 СПОСІБ ДОПОМІЖНОЇ СІЧНОЇ ПЛОЩИНИ ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

Для визначення точок перетину тіла обертання прямою використовується спосіб допоміжної січної площини особливого положення.

На рис. 4.17 а прямий круговий циліндр перетинається прямою  $l$  загального положення. Для визначення точок  $M, N$  перетину прямої  $l$  з циліндром через цю пряму проводиться горизонтально-проєціювальна площина  $\Sigma$ . Лінія перетину цієї площини із циліндром є прямокутником (заштрихована фігура), фронтальна проєкція якого перетинається з  $l_2$  у точках  $M_2, N_2$ , які є фронтальними проєкціями шуканих точок  $M, N$ . Видимість відрізків прямої  $l$  визначається способами, описаними у п. 1.4.7.

На рис. 4.17 б для визначення точок  $M, N$  перетину прямої  $l$  із циліндром через пряму проводиться фронтально-проєціювальна площина  $\Omega$ . Лінія перетину цієї площини з циліндром є еліпсом, який проєціюється на  $\Pi_1$  у коло (заштрихована фігура). Горизонтальна проєкція отриманої фігури перерізу перетинається з  $l_1$  у точках  $M_1, N_1$ , які є горизонтальними проєкціями шуканих точок  $M, N$ . Фронтальні проєкції  $M_2, N_2$  визначаються за допомогою ліній проєкційного зв'язку.

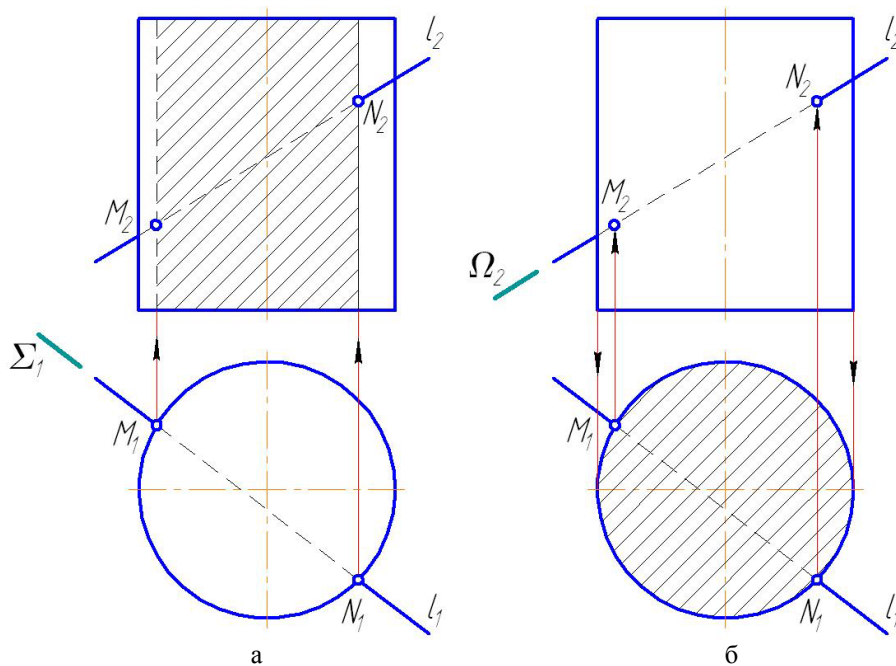


Рисунок 4.17 – Визначення точок перетину прямої загального положення із циліндром

На рис. 4.18 а конус перетинається із горизонталлю  $h$ . Для визначення точок  $M, N$  перетину прямої  $h$  із конусом через горизонталь проводиться площина  $\Sigma$  горизонтального рівня. Лінія перетину цієї площини із конусом є колом (заштрихована фігура), горизонтальна проєкція якого перетинається з  $h_1$  у точках  $M_1, N_1$ , які є горизонтальними проєкціями шуканих точок  $M, N$ . Фронтальні проєкції  $M_2, N_2$  визначаються за допомогою ліній проєкційного зв'язку.

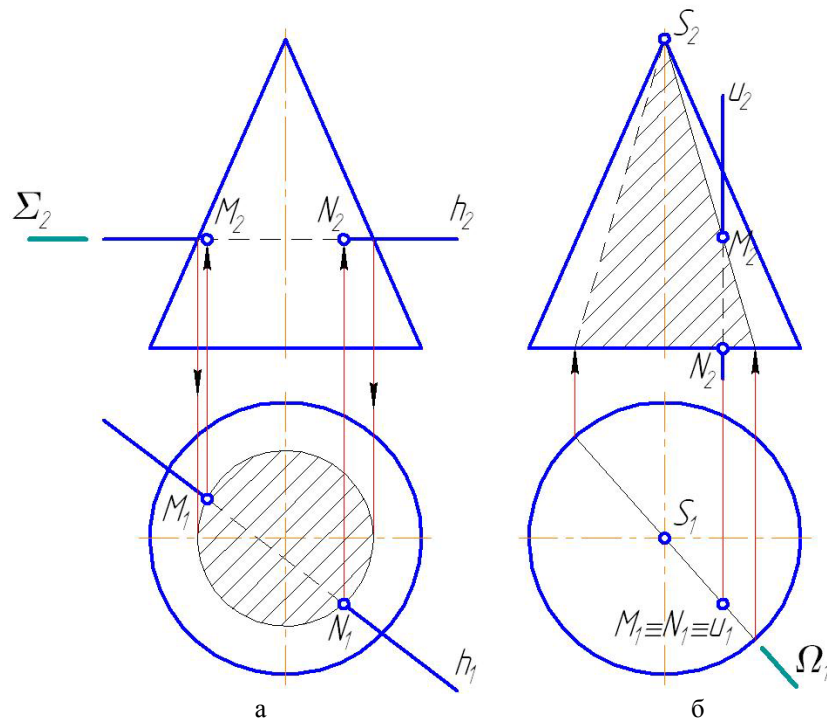


Рисунок 4.18 – Визначення точок перетину прямої особливого положення із конусом

На рис. 4.18 б конус перетинається із горизонтально-проєціювальною прямою  $u$ . Для визначення точок  $M, N$  перетину прямої  $u$  із конусом через цю пряму проводиться горизонтально-проєціювальна площина  $\Omega$ , яка проходить через вершину  $S$  конуса. Лінія перетину цієї площини із конусом є трикутником (заштрихована фігура), фронтальна проєкція якого перетинається з  $u_2$  у точках  $M_2, N_2$ , які є фронтальними проєкціями шуканих точок  $M, N$ . Горизонтальні проєкції  $M_1, N_1$  збігаються з  $u_1$ .

На рис. 4.19 тор перетинається із горизонтально-проєціювальною прямою  $u$ . Для визначення точок  $M, N$  перетину прямої  $u$  з тором через цю пряму проводиться площина  $\Sigma$  фронтального рівня. Лінія перетину цієї площини з тором є круговим кільцем (контур заштрихованої фігури) із центром у точці  $O$ . Фронтальна проєкція кільця перетинається з  $u_2$  у точках  $M_2, N_2$ , які є фронтальними проєкціями шуканих точок  $M, N$ . Горизонтальні проєкції  $M_1, N_1$  збігаються з  $u_1$ .

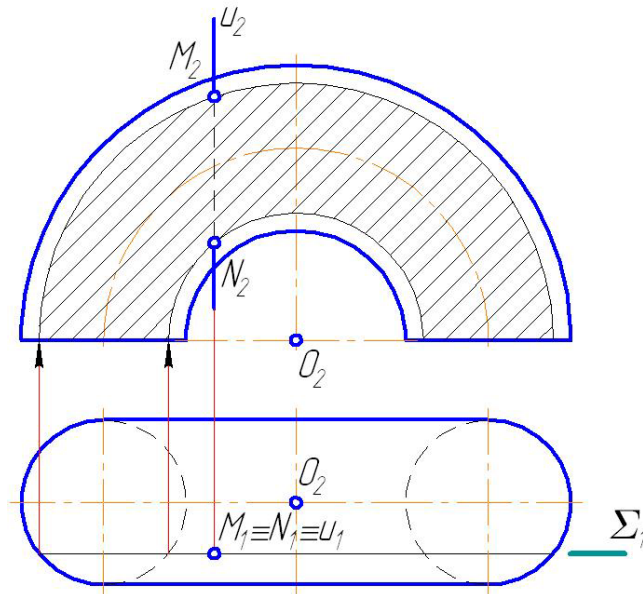


Рисунок 4.19 – Визначення точок перетину тора із проєкціовальною прямою

#### 4.2.2.2 СПОСІБ ДОПОМІЖНОЇ СІЧНОЇ ПЛОЩИНИ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Для визначення точок перетину тіла обертання прямою загального положення можуть бути застосовані способи допоміжної січної площини загального положення, перетворення комплексного креслення (див. п. 4.2.2.3), метод послідовних наближень (див. п. 4.2.2.5).

На рис. 4.20 конус перетинається прямою  $l$  загального положення. Для визначення точок  $M, N$  їх перетину через пряму  $l$  вершину  $S$  конуса проводиться площина  $\Sigma$  загального положення. Знаходиться горизонтальний слід  $\sigma_{\Pi}$  цієї площини  $\Sigma$ , для чого на прямій  $l$  довільно обираються допоміжні точки 1, 2, через які проходять прямі  $a, b$ . По горизонтальних слідах прямих  $a, b$  будується горизонтальний слід  $\sigma_{\Pi}$  січної площини  $\Sigma$ . Цей слід перетинає основу конуса у точках  $A, B$ . Трикутник  $SAB$  є лінією перетину конуса площиною  $\Sigma$ . Точки  $M, N$  перетину прямої  $l$  із цим трикутником є шуканими точками перетину конуса прямою  $l$ .

На рис. 4.21 наведена інша, спрощена реалізація способу допоміжної січної площини загального положення на прикладі еліптичного конуса. Вводиться січна площина  $\Sigma$ , яка проходить через вершину  $S$  і пряму  $l$ . У цій площині вводяться дві взаємно паралельні горизонталі  $h, h'$ , і визначається горизонтальний слід  $\sigma_{\Pi}$  за допомогою допоміжних точок 1, 2 перетину  $l$  із цими горизонталями. Слід  $\sigma_{\Pi}$ , паралельний  $h_1$ , перетинає основу конуса у точках  $A, B$ . Трикутник  $SAB$  є лінією перетину конуса площиною  $\Sigma$ . Точки  $M, N$  перетину прямої  $l$  із цим трикутником є шуканими точками перетину конуса прямою  $l$ .



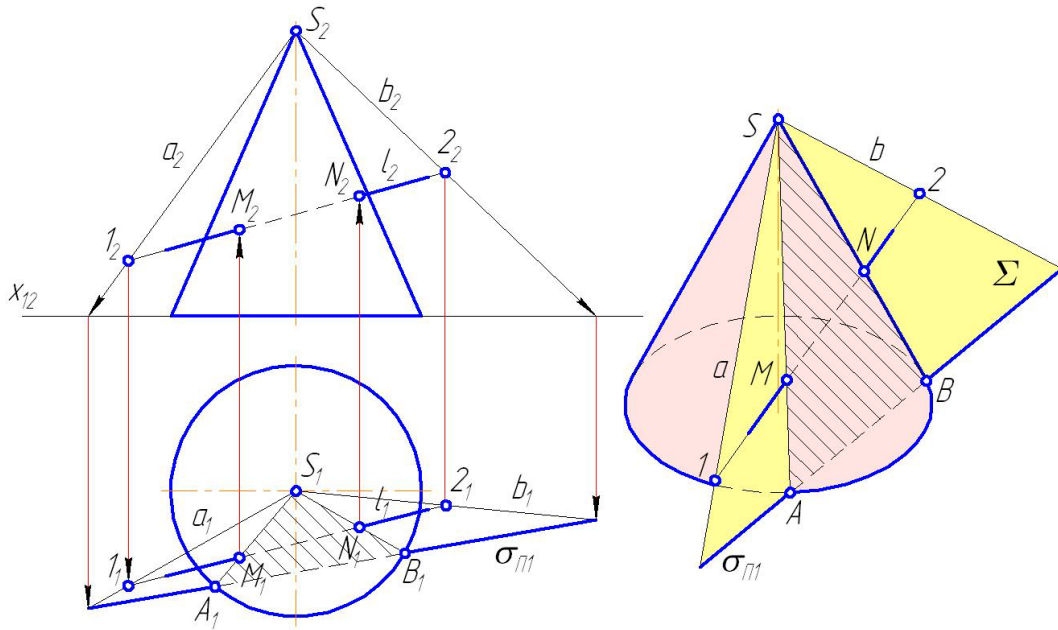


Рисунок 4.20 – Спосіб допоміжної січної площини загального положення

На рис. 4.22 еліптичний циліндр перетинається прямою  $l$  загального положення. Для визначення точок  $M, N$  їх перетину через пряму  $l$  паралельно осі  $i$  циліндра проводиться площина  $\Sigma$  загального положення. Знаходиться горизонтальний слід  $\sigma_{\Pi 1}$  цієї площини  $\Sigma$ , для чого на прямій  $l$  довільно обираються допоміжні точки 1, 2, через які проходять промені  $a, b$ , паралельні осі  $i$  циліндра. По горизонтальних слідах цих променів будується горизонтальний слід  $\sigma_{\Pi 1}$  площини  $\Sigma$ . Цей слід перетинає основу циліндра у точках  $A, B$ . Прямокутник  $ABCD$  є лінією перетину циліндра площиною  $\Sigma$ . Точки  $M, N$  перетину прямої  $l$  із цим прямокутником є шуканими точками перетину циліндра прямою  $l$ .

На рис. 4.23 наведена інша, спрощена реалізація способу допоміжної січної площини загального положення. Вводиться січна площина  $\Sigma$ , яка проходить через пряму  $l$  паралельно осі  $i$  циліндра. Ця площина задана прямими  $l, t$  (пряма  $t$  паралельна осі  $i$ ). Визначається горизонтальний слід  $\sigma_{\Pi 1}$  як лінія, яка проходить через горизонтальні сліди прямих  $l, t$ . Слід  $\sigma_{\Pi 1}$  перетинає основу циліндра у точках  $A, B$ . Прямокутник  $ABCD$  є лінією перетину циліндра площиною  $\Sigma$ . Точки  $M, N$  перетину прямої  $l$  із цим прямокутником є шуканими точками перетину циліндра прямою  $l$ .

*Конус або циліндр називається еліптичним, якщо його нормальний переріз (переріз площиною, перпендикулярною до осі тіла) є еліпсом. Еліптичні конус і циліндр не є тілами обертання.*

*Методи нарисної геометрії, описані для еліптичних конуса і циліндра, застосовуються і для випадку прямих кругових конуса та циліндра.*

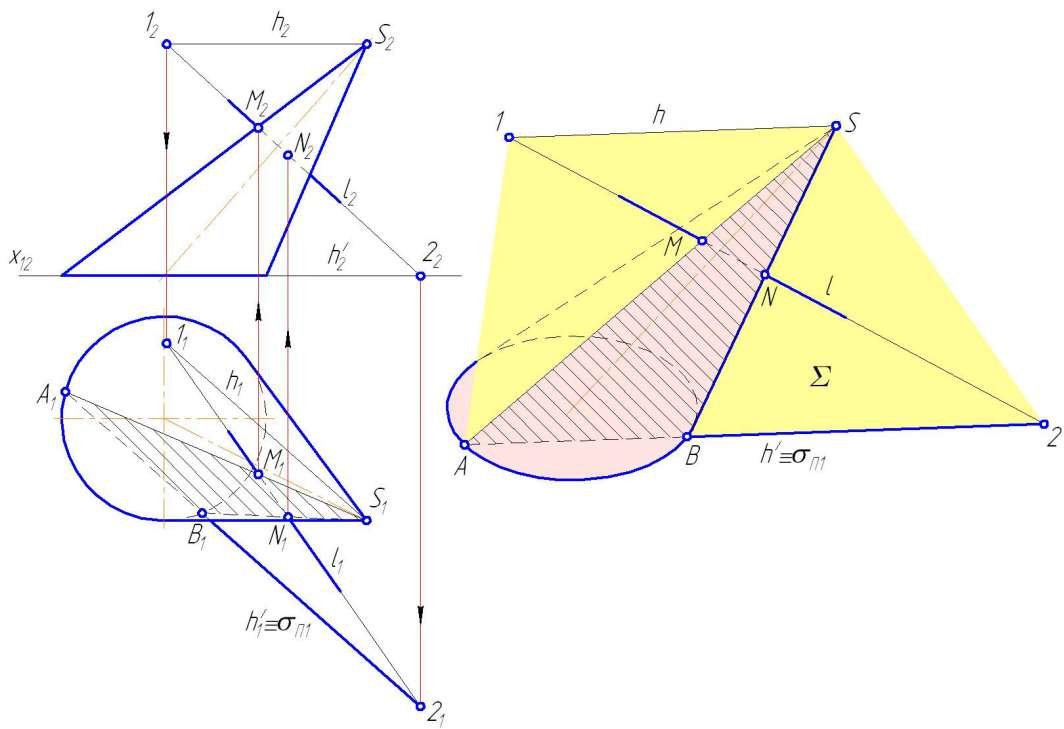


Рисунок 4.21 – Визначення точок перетину еліптичного конуса із прямою загального положення

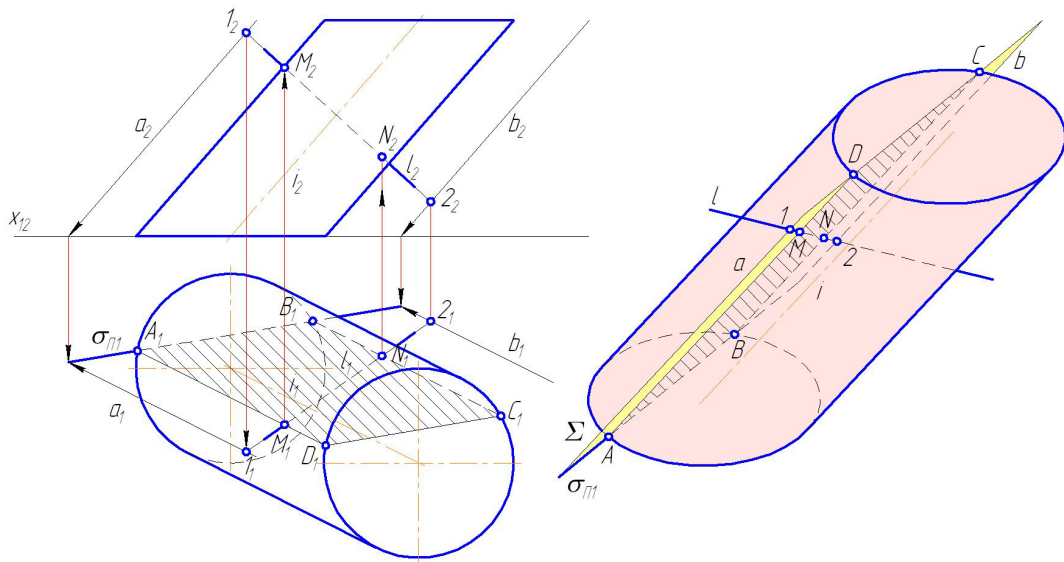


Рисунок 4.22 – Визначення точок перетину еліптичного циліндра із прямою загального положення

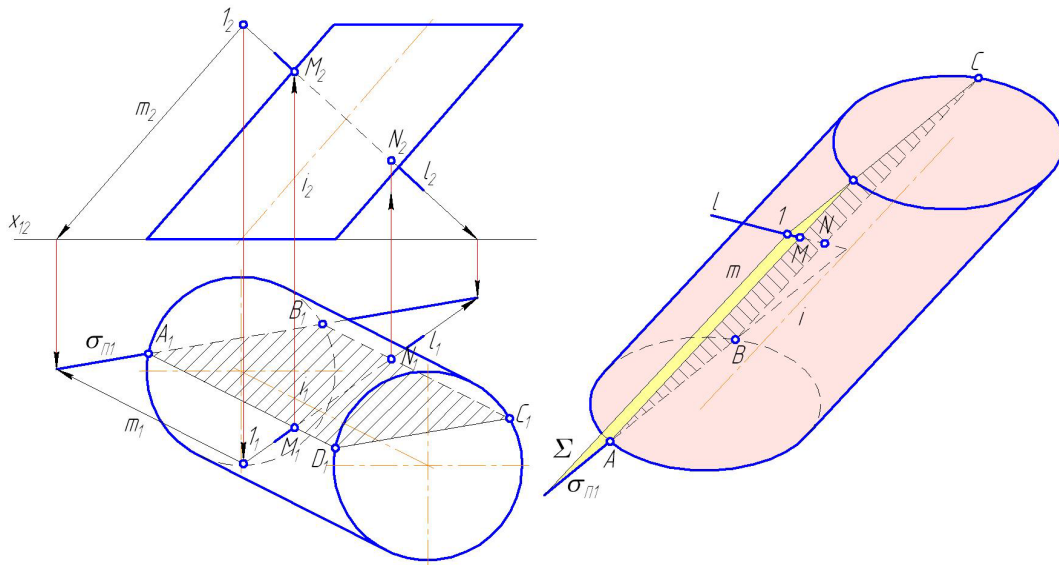


Рисунок 4.23 – Спрощена реалізація способу допоміжної січної площини загального положення

#### 4.2.2.3 СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

Спосіб допоміжної січної площини особливого положення є досить громіздким, тому складний у графічній реалізації. Для деяких тіл (наприклад, для сфери) він є неприпустимим.

Способи перетворення комплексного креслення призначені для спрощення процедури визначення точок перетину прямої з тілом. Як правило, застосовуються способи заміни площин проєкцій і обертання навколо проєціювальної осі. Вони дозволяють перевести задану пряму із загального положення в особливе для подальшого застосування способу допоміжної січної площини особливого положення.

На рис. 4.24 визначені точки  $M$ ,  $N$  перетину сфери прямою  $l$  загального положення із застосуванням способу заміни площин проєкцій. Введено допоміжну площину проєкцій  $\Pi_4$ , паралельну прямій  $l$  (вісь  $s_{14}$  паралельна  $l_1$ ). Пряма  $l$  займає положення рівня у системі площин  $\Pi_1$ ,  $\Pi_4$ . Для визначення проєкції  $l'$  вводяться допоміжні точки 1, 2. Через пряму  $l$  проводиться площина  $\Sigma$ , паралельна площині  $\Pi_4$ , і визначається проєкція на  $\Pi_4$  лінії (кола) перетину сфери площиною  $\Sigma$  (заштрихована область). Проєкції  $M_4$ ,  $N_4$  шуканих точок  $M$ ,  $N$  є точками перетину проєкції  $l_4$  з отриманим колом.

На рис. 4.25 визначені точки  $M$ ,  $N$  перетину сфери прямою  $l$  загального положення із застосуванням способу обертання навколо проєціювальної осі. Вводиться горизонтально-проєціювальна вісь  $i$ , яка проходить через центр  $O$  сфери. Пряма  $l$  обертається навколо цієї осі до фронтального положення рівня  $l'$  разом зі сферою. При цьому проєкції сфери не змінюються. Для визначення проєкцій нового, фронтального положення  $l'$  прямої  $l$  вводяться допоміжні точки 1, 2. Через пряму  $l'$  проводиться площина  $\Sigma$  фронтального рівня, і визначається фронтальна проєкція лінії (кола) перетину сфери площиною  $\Sigma$  (заштрихована область). За проєкціями  $M'_2$ ,  $N'_2$  визначаються проєкції шуканих точок  $M$ ,  $N$  перетину прямої  $l$  зі сферою.

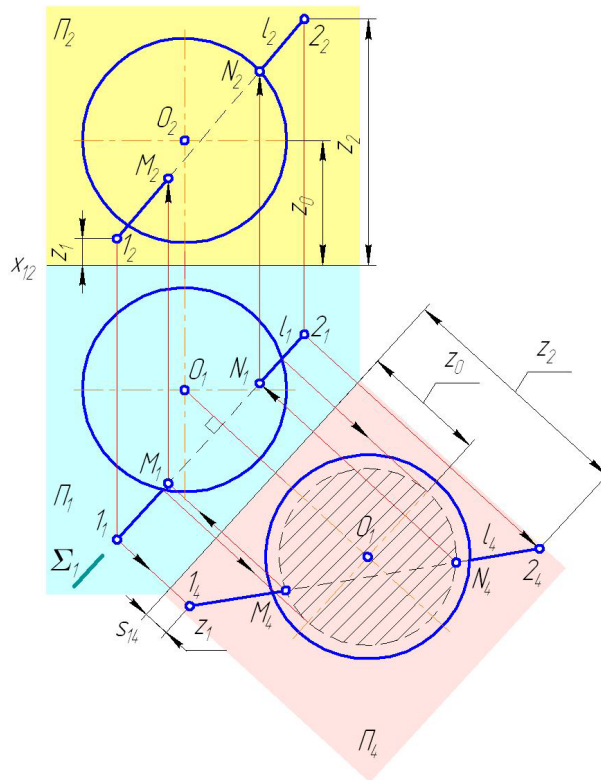


Рисунок 4.24 – Спосіб заміни площин проєкцій

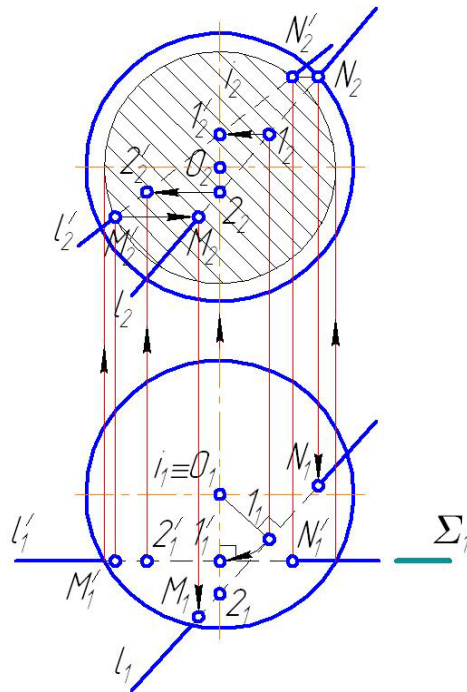


Рисунок 4.25 – Спосіб обертання навколо проєціювальної осі

На рис. 4.26 визначені точки  $K, L, M, N$  перетину тора прямою  $l$  загального положення із застосуванням способу обертання навколо проєціювальної осі. Пряма  $l$  обертається навколо фронтально-проєціювальної осі  $j$  тора до горизонтального положення  $l'$  разом із тором. При цьому проєкції тора не змінюються. Для визначення проєкцій нового, горизонтального положення  $l'$  прямої  $l$  вводяться допоміжні точки 1, 2. Через пряму  $l'$  проводиться площина  $\Sigma$  горизонтального рівня, і визначається фронтальна проєкція ліній (двох кіл) перетину тора площиною  $\Sigma$  (заштриховані області). За проєкціями  $K', L', M', N'$  знаходяться проєкції шуканих точок  $K, L, M, N$  перетину прямої  $l$  із тором. Треба зазначити, що для реалізації наведеного способу необхідно, щоб пряма  $l$  перетинала вісь  $j$  тора (проєкція  $l_2$  проходить через точку  $O_2$ ).

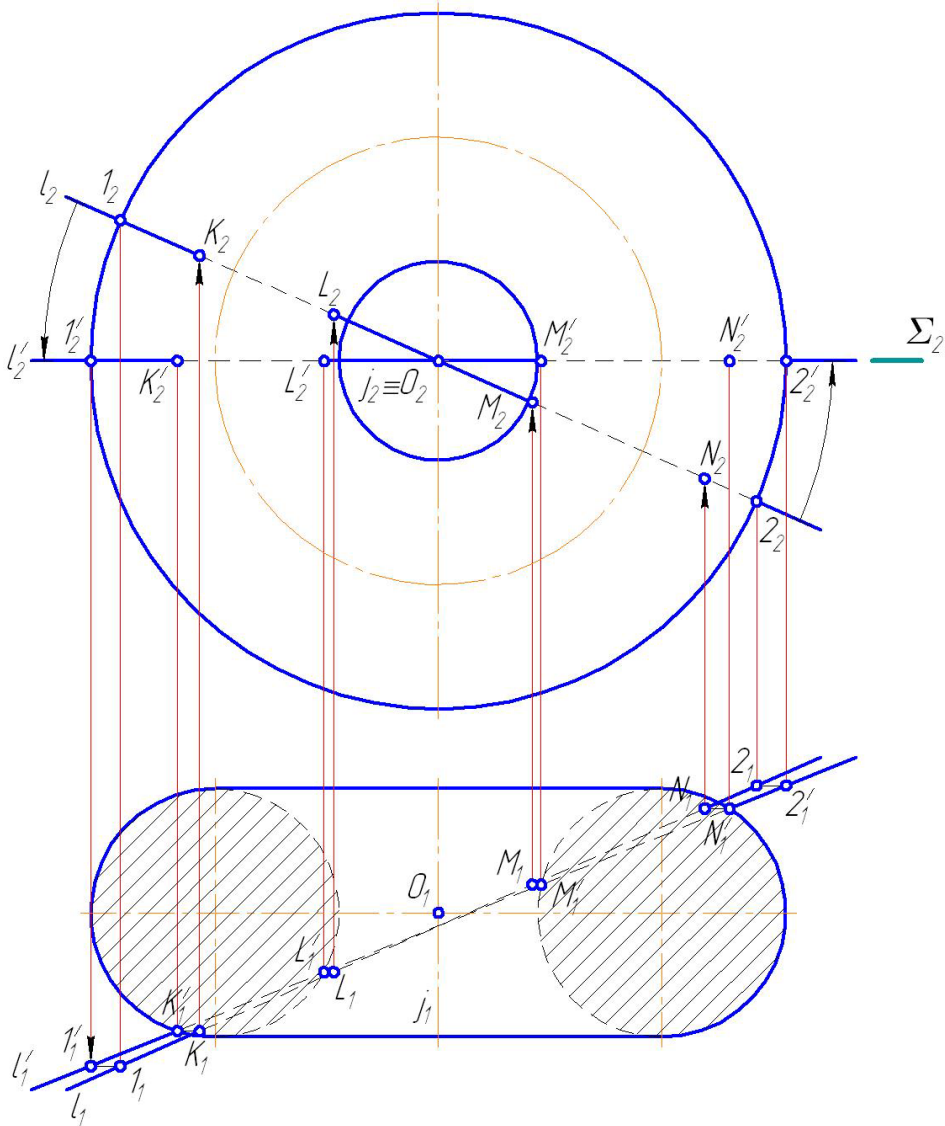


Рисунок 4.26 – Визначення точок перетину тора із прямою загального положення

На рис. 4.27 визначені точки  $M, N$  перетину еліпсоїда прямою  $l$  загального положення із застосуванням способу обертання навколо проєціювальної осі. Пряма  $l$  обертається навколо горизонтально-проєціювальної осі  $i$  еліпсоїда до фронтального положення  $l'$  разом із тілом. При цьому проєкції еліпсоїда не змінюються. Для визначення проєкцій нового фронтального положення  $l'$  прямої  $l$  вводяться допоміжні точки 1, 2. Через пряму  $l'$  проводиться площина  $\Sigma$  фронтального рівня, і визначається фронтальна проєкція лінії (еліпса) перетину тіла площиною  $\Sigma$  (заштрихована область). За проєкціями  $M'_2, N'_2$  визначаються проєкції шуканих точок  $M, N$  перетину прямої  $l$  з еліпсоїдом. Необхідно зазначити, що для реалізації наведеного способу необхідно, щоб пряма  $l$  перетинала вісь  $i$  (проєкція  $l_1$  проходить через точку  $O_1$ ).

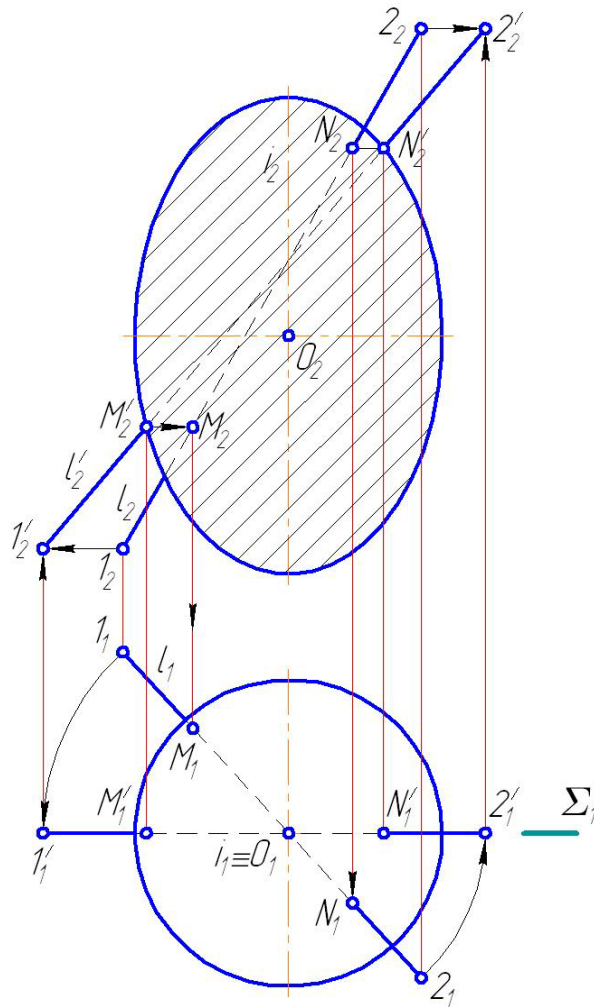


Рисунок 4.27 – Визначення точок перетину еліпсоїда із прямою загального положення

#### 4.2.2.4 СПОСІБ ДОПОМІЖНОЇ СІЧНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПОВЕРХНІ

Для визначення точок перетину тіла обертання просторовою кривою лінією використовуються спосіб допоміжної січної циліндричної поверхні особливого положення і метод послідовних наближень (див. п. 4.2.2.5).

Спосіб допоміжної січної циліндричної поверхні базується на тому, що через будь-яку просторову криву  $l$  можна провести циліндричну поверхню  $\Omega$ , яка проєціюється на одну із площин проєкцій (наприклад,  $\Pi_1$ ) у лінію  $\Omega_1$ , яка збігається із відповідною проєкцією  $l_1$  кривої  $l$  (рис. 4.28). Іншими словами, циліндрична поверхня є проєціовальною.

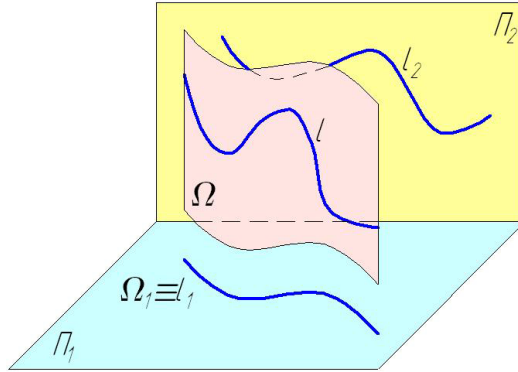


Рисунок 4.28 – Спосіб допоміжної січної циліндричної поверхні

##### *Суть способу допоміжної січної циліндричної поверхні*

Для визначення точок  $M, N, \dots$  перетину тіла обертання  $\Phi$  просторовою кривою  $l$  через останню проводиться проєціовальна циліндрична поверхня  $\Omega$ , одна з проєкцій якої збігається із відповідною проєкцією лінії  $l$ . Визначається лінія  $k$  перетину тіла  $\Phi$  із поверхнею  $\Omega$ . Точки  $M, N, \dots$  перетину ліній  $k, l$  є шуканими точками перетину тіла  $\Phi$  просторовою кривою  $l$ .

На рис. 4.29 визначені точки  $M, N, P, Q$  перетину тіла обертання  $\Phi$  просторовою кривою  $l$ . Через лінію  $l$  проводиться фронтально-проєціовальна циліндрична поверхня  $\Omega$ , фронтальна проєкція  $\Omega_2$  якої збігається із фронтальною проєкцією  $l_2$  лінії  $l$ . Лінія  $k$  перетину тіла  $\Phi$  циліндричною поверхнею  $\Omega$  будується за точками 1, 2, ..., 7 за допомогою способу допоміжних січних площин  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(4)}$  горизонтального рівня, які перетинають тіло  $\Phi$  по концентричних колах. Проєкції шуканих точок  $M, N, P, Q$  є проєкціями точок перетину ліній  $k, l$ .

Спосіб допоміжної січної циліндричної поверхні також може бути застосованим для визначення точок перетину просторової кривої із багатогранником.

На рис. 4.30 застосовано спосіб допоміжної січної циліндричної поверхні для визначення точок перетину кривої  $l$  із трикутною пірамідою  $\Phi$ . Через лінію  $l$  проводиться фронтально-проєціовальна циліндрична поверхня  $\Omega$ , фронтальна проєкція  $\Omega_2$  якої збігається із фронтальною

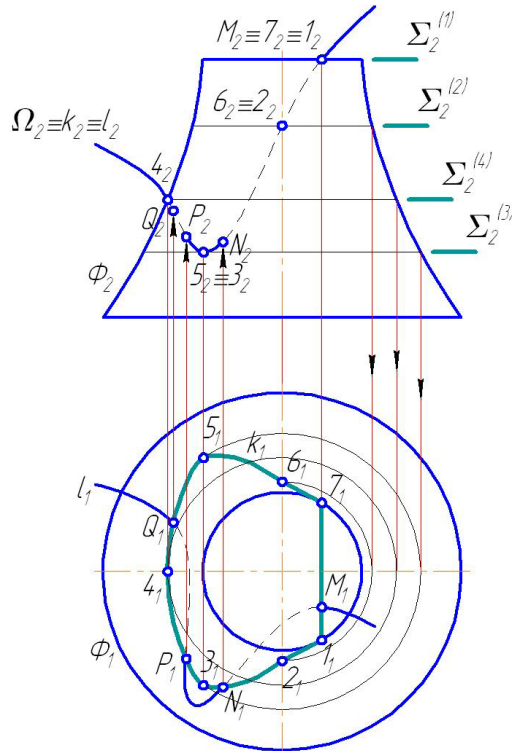


Рисунок 4.29 – Перетин кривої із тілом обертання

проекцією  $l_2$  лінії  $l$ . Лінія  $k$  перетину піраміди циліндричною поверхнею  $\Omega$  будується за точками 1–8 за допомогою способу допоміжних січних площин  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(4)}$  горизонтального рівня, які перетинають піраміду по трикутниках. Проекції шуканих точок  $M, N, P, Q$  є проекціями точок перетину ліній  $k, l$ .

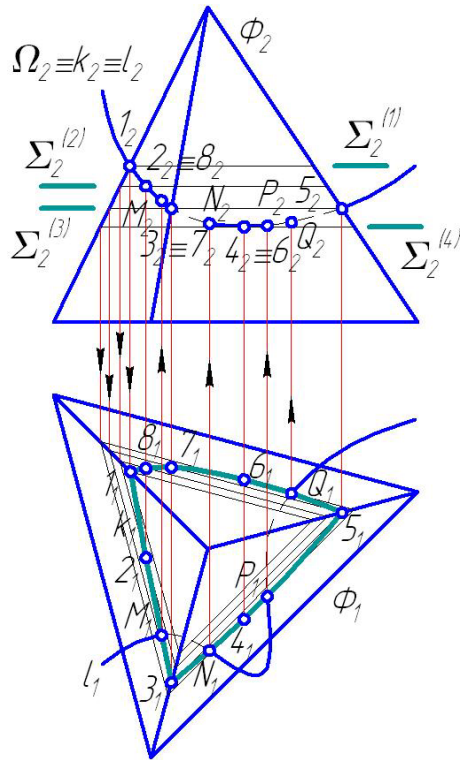


Рисунок 4.30 – Перетин кривої із багатогранником

#### 4.2.2.5 МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Високий рівень розвитку сучасного машинобудування завдячує використанню інноваційних технологій, у тому числі застосуванню систем автоматизованого проектування на основі ЕОМ. Існуючі комп'ютерні програми базуються на тривимірному моделюванні елементів конструкцій і створенні на їх основі проекційної документації.

Найбільш складними елементами конструкцій із точки зору проекційного креслення є лінії перетину і переходу двох і більше тривимірних геометричних об'єктів – поверхонь, їх твірних і напрямних (рис. 4.31). Побудова цих об'єктів належить до позиційних задач нарисної геометрії, які розв'язуються шляхом знаходження геометричного місця точок перетину ліній однієї поверхні з іншою поверхнею.

Задачі на знаходження точок перетину просторової кривої  $l$  із поверхнею  $\Phi$  займає особливе місце серед задач проекційного креслення. Для їх розв'язання використовують переважно методи перетворення комплексного креслення і методи, пов'язані із введенням допоміжних площин або поверхонь  $\Sigma$  (рис. 4.32).





Рисунок 4.31 – Застосування ліній перетину і переходу

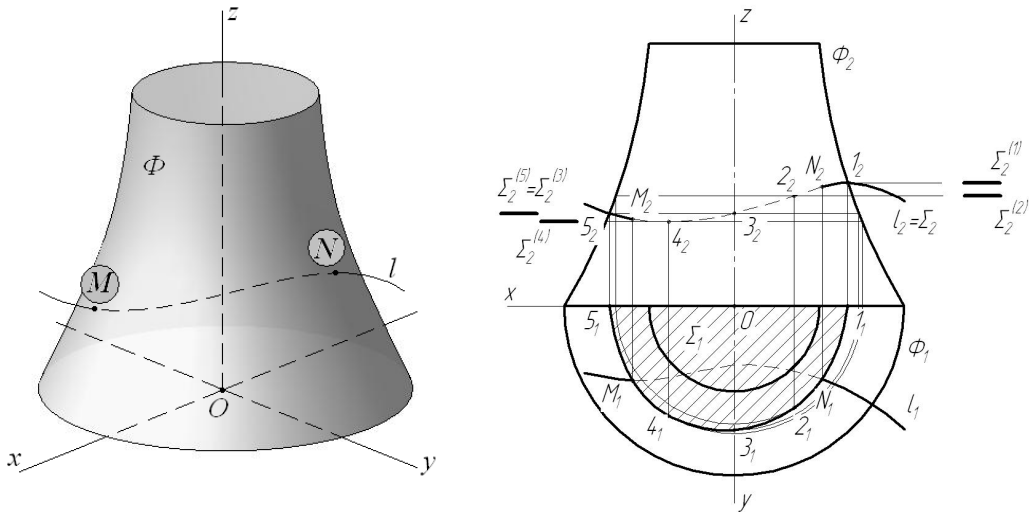


Рисунок 4.32 – Спосіб допоміжної січної поверхні

Головним недоліком існуючих способів є пряма залежність точності побудови контуру  $m$  перерізу поверхонь  $\Phi$ ,  $\Sigma$  від кількості точок контуру. Унаслідок цього для побудови проєкцій лінії  $m$  необхідно вводити значну кількість допоміжних точок, що ускладнює поставлену задачу нагромадженням додаткових побудов. Крім того, ділянки лінії  $m$  між допоміжними точками будуються наближено шляхом інтерполяції (рис. 4.33).

Стандартні методи не надають можливості створення універсальної процедури розв'язання задачі про визначення точок перетину лінії з поверхнею, а містять лише сукупність алгоритмів для розв'язання переважно тривіальних задач. Ці недоліки свідчать про необхідність пошуку і обґрунтування нового методу, який би суттєво спрощував геометричні побудови, не поступаючись точністю останніх.

Розглянемо загальний випадок задачі про знаходження множини  $M_1, M_2, \dots$  точок перетину кривої лінії  $l$  із поверхнею  $\Phi$  тіла обертання

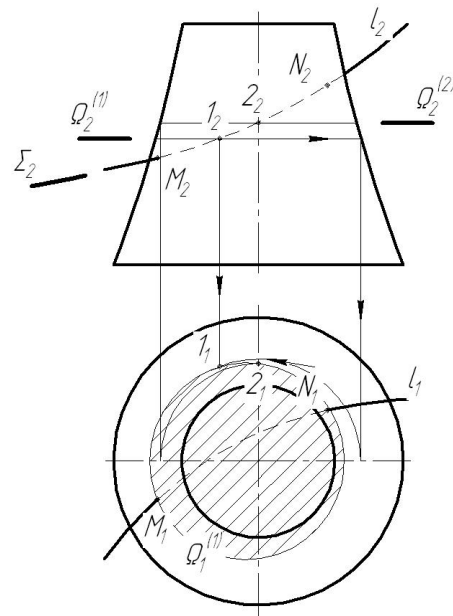


Рисунок 4.33 – Застосування способу допоміжної січної поверхні

методом послідовних наближень. Кількість  $N$  точок перетину обумовлена алгебраїчним порядком зазначених геометричних об'єктів. У подальшому будемо розглядати задачу про визначення однієї з таких точок  $M$ .

Для викладення суті методу послідовних наближень введемо ортогональну прямокутну систему координат  $Oxyz$ , у якій вісь  $z$  збігається з віссю тіла обертання (рис. 4.34). На початку геометричних побудов вважатимемо, що точка  $M$  знаходиться у площині  $\Sigma$  горизонтального рівня. Точка  $M$  визначається як точка перетину площини  $\Sigma$  з лінією  $l$ . Також точка  $M$  належить колу  $m$ . За отриманою (із застосуванням умови належності точки  $M$  колу  $m$ ) горизонтальною проекцією  $M_1$  уточнюється положення шуканої точки. Таким чином, довільно обравши положення шуканої точки, шляхом простої ітераційної процедури знаходиться шукане положення.

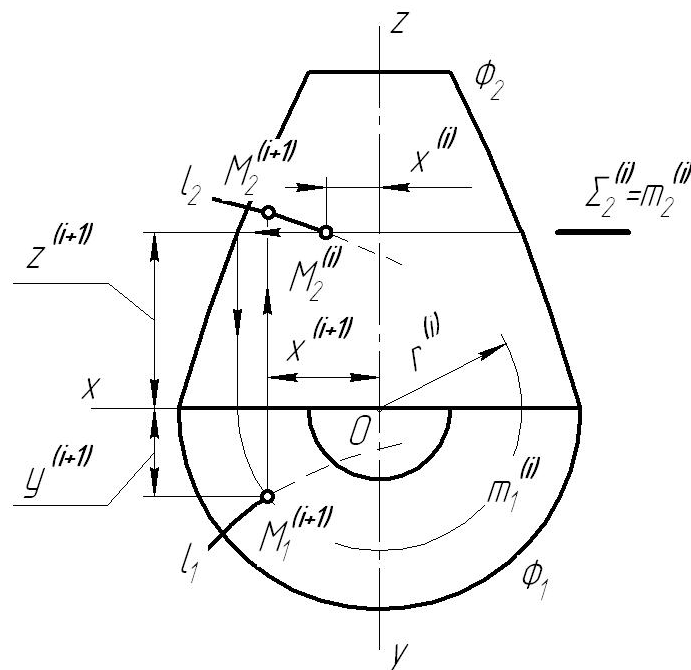


Рисунок 4.34 – Метод послідовних наближень

Перевагами методу послідовних наближень є:

- а) точність розв'язання задачі контролюється на кожній ітерації;
- б) відносно невелика кількість геометричних побудов;
- в) можливість числової реалізації на ЕОМ;
- г) інваріантність алгоритму до типу кривої і поверхні тіла обертання.

На рис. 4.35 – 4.37 наведені розв'язки задач про перетин кривої зі сферою, тором і довільним тілом обертання. Ці задачі, як правило, розв'язуються за допомогою спеціальних методів, а саме проведення через криву проєкціоувальної циліндричної поверхні. На наведених рисунках задачі розв'язані за допомогою методу послідовних наближень.

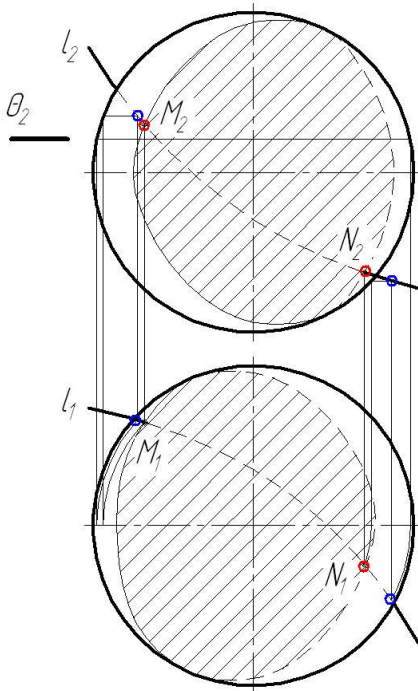


Рисунок 4.35 – Перетин кривої лінії зі сферою

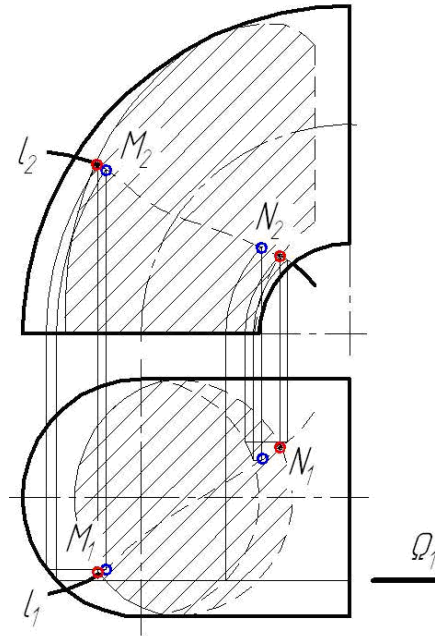


Рисунок 4.36 – Перетин кривої лінії з тором

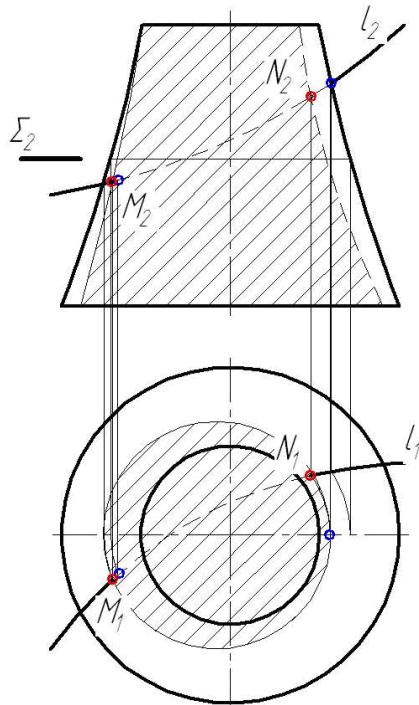


Рисунок 4.37 – Перетин кривої лінії із довільним тілом обертання

### 4.2.3 ПЕРЕТИН ТІЛА ОБЕРТАННЯ ПЛОЩИНОЮ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

#### 4.2.3.1 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ СІЧНИХ ПЛОЩИН ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

Лінію перетину тіла обертання  $\Phi$  площиною  $\Sigma$  загального положення можна визначити без застосування спеціальних методів лише для обмежених випадків взаємного розташування цих геометричних об'єктів.

На рис. 4.38 конус  $\Phi$  перетинається площиною  $\Sigma$ , яка задана трикутником  $ABC$  і проходить через вершину  $S$ . Площина  $\Sigma$  перетинає конус по трикутнику  $SDE$ , точки  $D, E$  якого є точками перетину горизонтального сліду  $\sigma_{\Pi 1}$  площини  $ABC$  з основою конуса. Слід  $\sigma_{\Pi 1}$  будується за двома точками  $H, H'$  – горизонтальними слідами прямих  $AB, AC$  січної площини  $ABC$ . Лінія перетину конуса  $\Phi$  площиною  $ABC$  розпадається на два відрізки  $1-4, 2-3$ , що належать твірним  $SD, SE$  конуса  $\Phi$ . У загальному випадку лінія  $k$  перетину тіла обертання  $\Phi$  площиною  $\Sigma$  загального положення будується за точками  $1, 2, \dots$ , кожна з яких визначається такими способами:

- а) спосіб допоміжних січних площин особливого положення;
- б) спосіб заміни площин проєкцій тощо.

*Суть способу допоміжних січних площин особливого положення*

Уводиться сукупність площин  $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots$  особливого положення і визначаються лінії перетину цих площин із тілом обертання  $\Phi$  і площиною  $\Sigma$  загального положення. Точки перетину отриманих пар ліній є точками шуканої лінії  $k$  перетину тіла обертання  $\Phi$  площиною  $\Sigma$ .

На рис. 4.39 циліндр  $\Phi$  перетинається площиною  $\Sigma$ , заданою горизонтальним  $\sigma_{\Pi 1}$  і фронтальним  $\sigma_{\Pi 2}$  слідами. Уводяться січні площини  $Q^{(1)} - Q^{(4)}$  горизонтального рівня і визначаються лінії перетину цих площин із циліндром і площиною  $\Sigma$ . При цьому горизонтальні проєкції ліній перетину площин  $Q^{(1)} - Q^{(4)}$  із циліндром  $\Phi$  збігаються із проєкцією  $\Phi_1$  (колом). Лінії перетину площин  $Q^{(1)} - Q^{(4)}$  із площиною  $\Sigma$  є горизонтальними прямими рівня  $h^{(1)} - h^{(4)}$ . Проєкції  $1_1 - 7_1$  шуканих точок  $1 - 7$  лінії  $k$  є точками перетину  $\Phi_1$  із горизонталями  $h_1^{(1)} - h_1^{(4)}$ . За допомогою ліній проєкційного зв'язку визначаються проєкції  $1_2 - 7_2$ . Отримана фігура  $k$  перерізу є частиною еліпса, на проєкціях якого обов'язково зазначається точка  $A$  переходу від видимого контуру до невидимого на  $\Pi_2$ . Натуральна величина  $1_0 2_0 \dots 7_0$  фігури перерізу  $k$  визначається комбінацією способів заміни проєкцій і плоскопаралельного переміщення.

На рис. 4.40 конус  $\Phi$  перетинається площиною  $\Sigma$ , заданою горизонтальним  $\sigma_{\Pi 1}$  і фронтальним  $\sigma_{\Pi 2}$  слідами. Уводяться січні площини  $Q^{(1)} - Q^{(4)}$  горизонтального рівня і визначаються лінії перетину цих площин із конусом та площиною  $\Sigma$ . При цьому

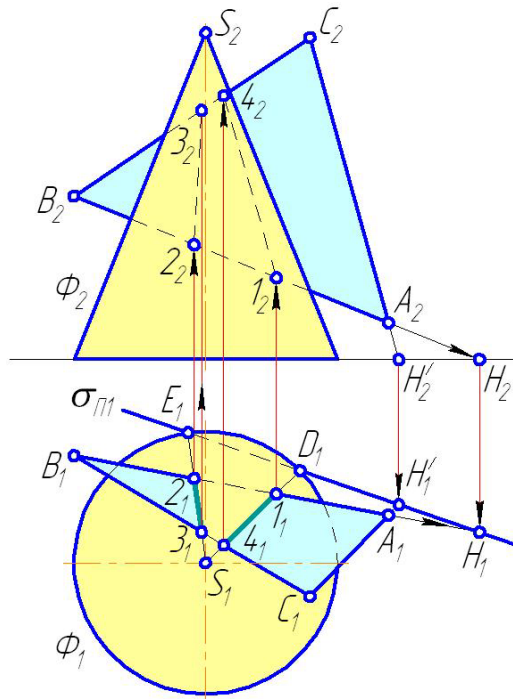


Рисунок 4.38 – Перетин конуса площиною

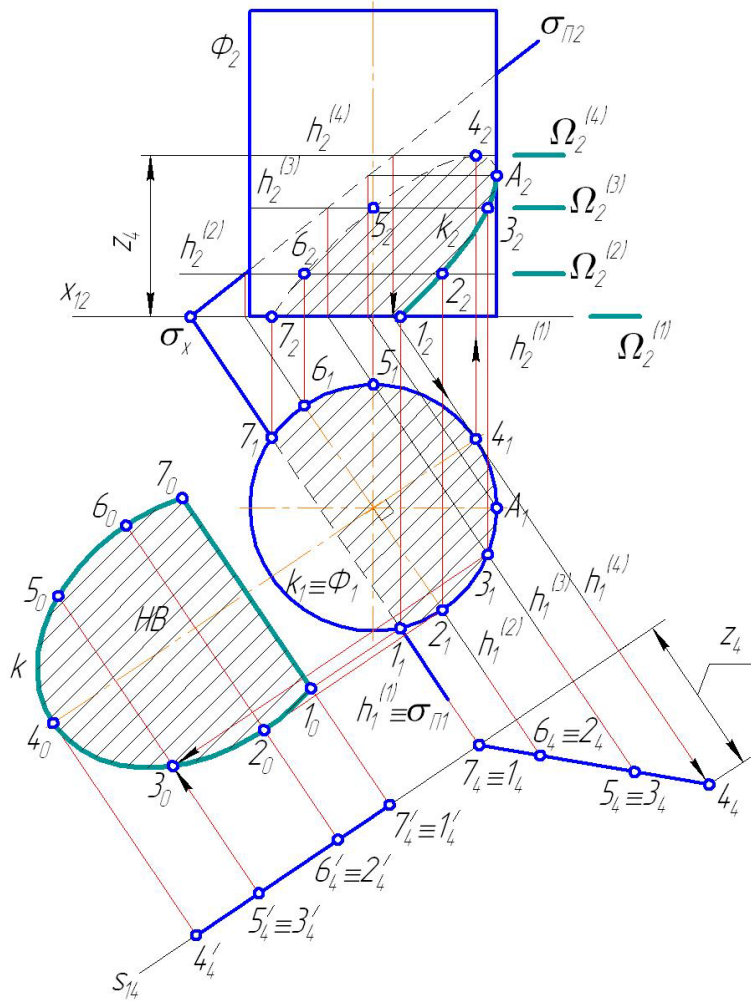


Рисунок 4.39 – Перетин циліндра площиною загального положення

горизонтальні проекції лінії перетину площин  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  з конусом  $\Phi$  є концентричними колами. Лінії перетину площин  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  із площиною  $\Sigma$  є горизонтальними прямими рівня  $h^{(1)} - h^{(4)}$ . Проекції  $1_1 - 7_1$  шуканих точок  $1 - 7$  лінії  $k$  є точками перетину  $\Phi_1$  із горизонталями  $h_1^{(1)} - h_1^{(4)}$ . За допомогою ліній проекційного зв'язку визначаються проекції  $1_2 - 7_2$ . Отримана фігура  $k$  перерізу є параболою (січна площина  $\Sigma$  паралельна твірній лінії конуса), на проекціях якої обов'язково зазначається точка  $A$  переходу від видимого контуру до невидимого на  $\Pi_2$ . Натуральна величина  $1_0 2_0 \dots 7_0$  фігури перерізу  $k$  визначається комбінацією способів заміни площин проекцій і плоскопаралельного переміщення.

Недоліками способу січних площин особливого положення є:

- а) складність або неможливість визначення особливих точок фігури перерізу;
- б) необхідність додаткового застосування способів перетворення комплексного креслення для визначення натуральної величини фігури перерізу.

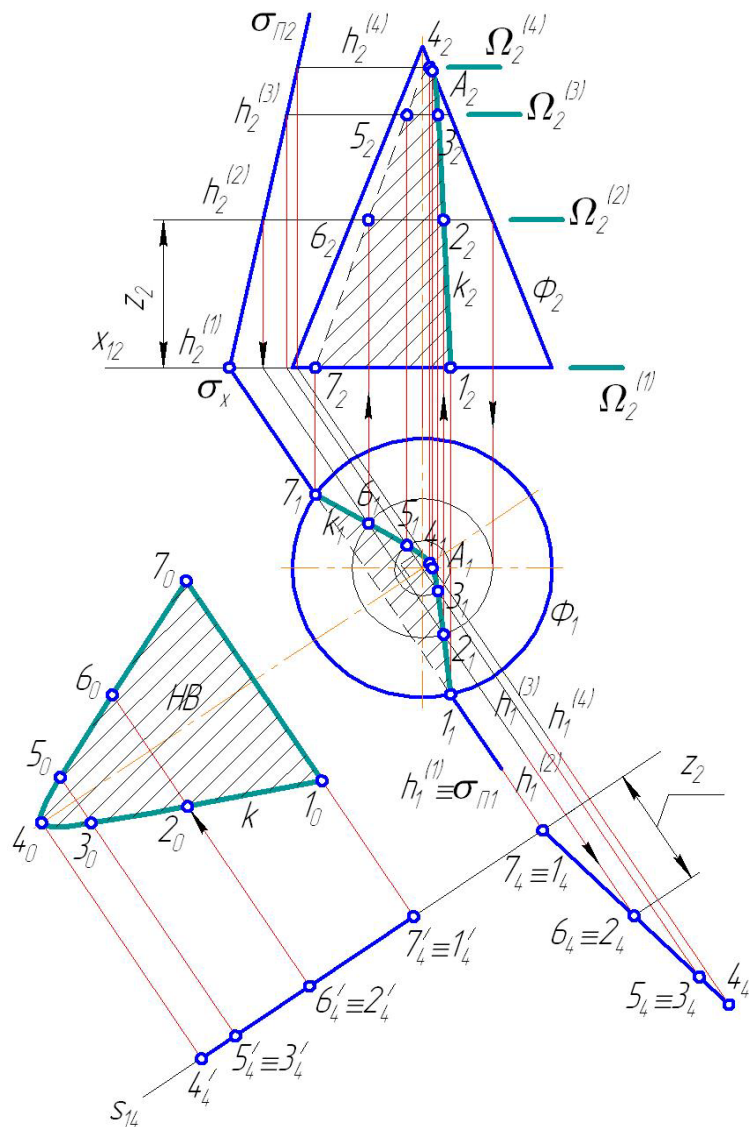


Рисунок 4.40 – Перетин конуса площиною загального положення

#### 4.2.3.2 СПОСІБ ЗАМІНИ ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

Вищезазначені недоліки способу допоміжних січних площин для визначення перерізу тіла обертання площиною усуваються при застосуванні способу заміни площин проєкцій. Цей спосіб базується на введенні допоміжної площини проєкцій  $\Pi_4$ , стосовно якої січна площина буде проєціювальною.

На рис. 4.41 циліндр  $\Phi$  перетинається площиною  $\Sigma$  загального положення, заданою горизонтальним  $\sigma_{\Pi 1}$  і фронтальним  $\sigma_{\Pi 2}$  слідами. Визначаються проєкції циліндра  $\Phi$  і площини  $\Sigma$  на допоміжну площину проєкцій  $\Pi_4$ , перпендикулярну до площини  $\Sigma$  (вісь  $s_{14}$  перпендикулярна до сліду  $\sigma_{\Pi 1}$ ). Проєкція площини  $\Sigma$  на площину проєкцій  $\Pi_4$  визначається



## 4.2.4 ПЕРЕТИН ТІЛА ОБЕРТАННЯ ІЗ БАГАТОГРАННИКОМ

### 4.2.4.1 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ СІЧНИХ ПЛОЩИН РІВНЯ

Лінія  $k$  перетину будь-якого тіла обертання  $\Omega$  із багатогранником  $\Psi$  є однією просторовою лінією або їх сукупністю. Окремі ланки цих ліній є плоскими кривими – лініями перетину граней багатогранника  $\Psi$  із тілом обертання  $\Omega$  (рис. 4.42).

Лінія  $k$  перетину тіла обертання  $\Omega$  із багатогранником  $\Psi$  визначається, як правило, без застосування способів перетворення комплексного креслення, але із використанням допоміжних січних площин  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \dots$  особливого положення – так званих *площин-посередників*.

*Суть способу допоміжних січних площин-посередників*

Уводиться сім'я січних площин особливого положення  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \dots$  і знаходяться лінії їх перетину із тілом обертання  $\Omega$  і багатогранником  $\Psi$ . Точки 1, 2, ... перетину пар побудованих ліній є точками шуканої лінії перетину тіла обертання  $\Omega$  із багатогранником  $\Psi$ .

Площинами-посередниками можуть бути:

- а) сім'я паралельних площин рівня;
- б) сім'я проєціювальних площин, які перетинаються по одній прямій;
- в) комбінація сімей площин рівня і проєціювальних площин.

На рис. 4.43 конус перетинається із трикутною призмою. Уводяться допоміжні січні площини горизонтального рівня  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$ , які перетинають конус по колах, а призму – по трикутнику. Точки 1 – 10 перетину цих кіл із трикутником є точками, які належать шуканій лінії перетину конуса із призмою. Лінії 1 – 3, 3 – 10 (дві гіперболи) є двома плоскими ланками однієї просторової лінії.

На рис. 4.44 циліндр перетинається із трикутною пірамідою. Вводяться допоміжні січні площини фронтального рівня  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(6)}$ , які перетинають циліндр по прямокутниках, а піраміду – по трикутниках. Точки 1 – 6 перетину цих прямокутників із відповідними трикутниками є точками, які належать шуканій лінії перетину циліндра із пірамідою. Лінії 1 – 3, 3 – 6 (дві дуги еліпсів) є двома плоскими ланками однієї просторової лінії.

На рис. 4.45 тор перетинається із трикутною призмою. Уводяться допоміжні січні площини фронтального рівня  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(8)}$ , які перетинають тор по дугах кіл, а призму – по прямокутниках. Точки 1 – 12 перетину цих дуг кіл із відповідними прямокутниками є точками, які належать шуканій лінії перетину тора із призмою. Лінії 1 – 3, 3 – 10, 10 – 12 є трьома плоскими кривими четвертого порядку – ланками шуканої просторової кривої.

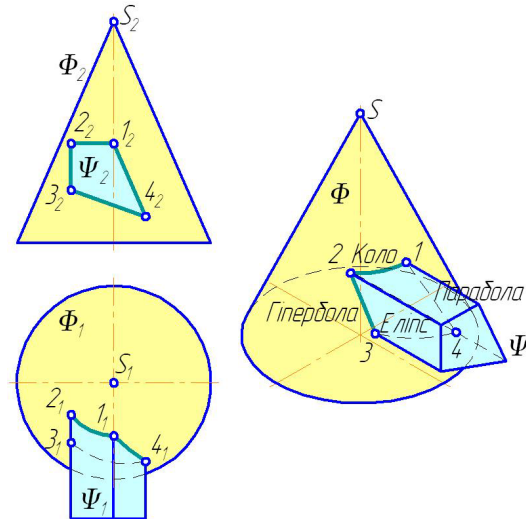


Рисунок 4.42 – Лінії перетину конуса із багатогранником



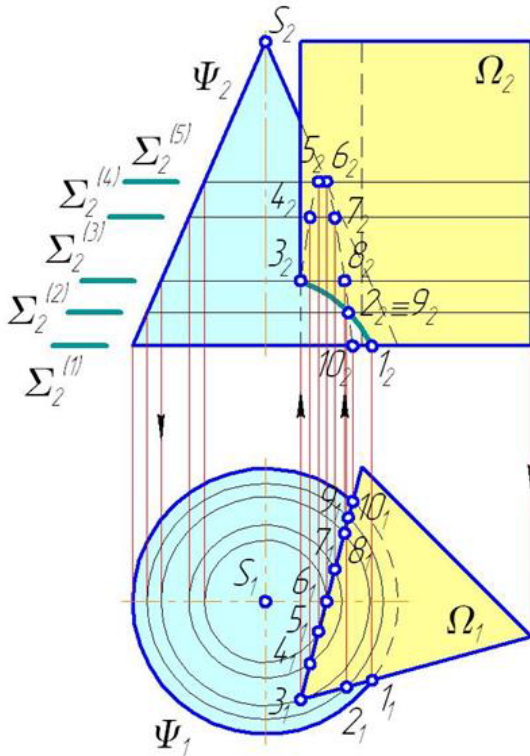


Рисунок 4.43 – Перетин конуса із призмою

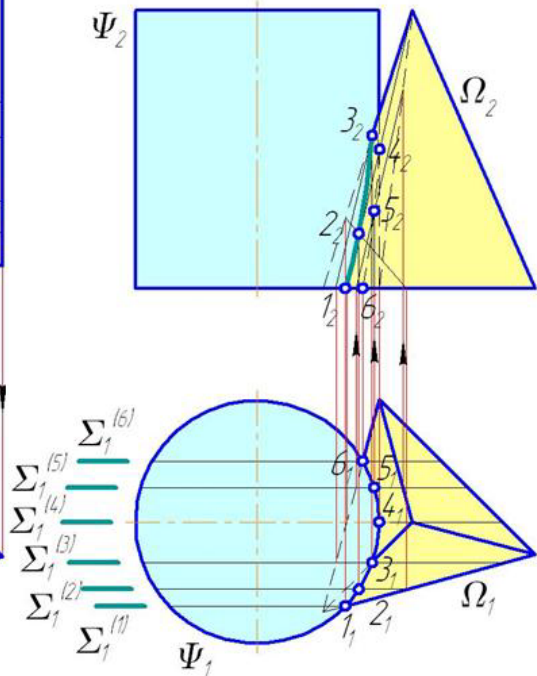


Рисунок 4.44 – Перетин циліндра із пірамідою

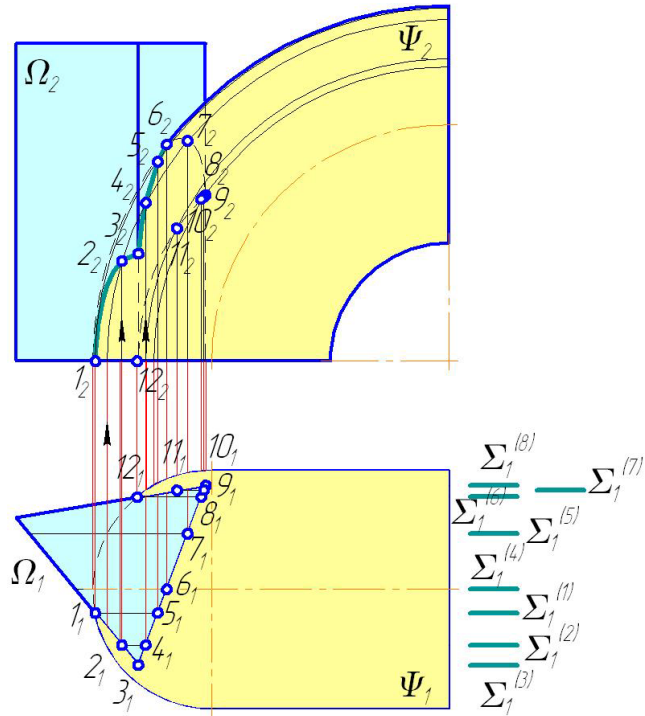


Рисунок 4.45 – Перетин тора із призмою

#### 4.2.4.2 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ ПРОЕЦІОНАЛЬНИХ СІЧНИХ ПЛОЩИН

На рис. 4.46 конус перетинається із трикутною призмою. Уводяться допоміжні січні горизонтально-проеційвальні площини  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(6)}$ , які проходять через вершину  $S$  конуса і перетинають конус по трикутниках, а призму – по прямокутниках. Точки 1–8 перетину цих трикутників із відповідними прямокутниками є точками, які належать шуканій лінії перетину конуса із призмою. Лінії 1–3, 3–10 (дві гіперболи) є двома плоскими ланками шуканої просторової кривої.

Необхідно зауважити, що січні площини-посередники обираються так, щоб вони перетинали тіло обертання по прямій лінії або по колу (табл. 4.1, рис. 4.13). У будь-якому випадку ці січні площини перетнуть багатогранник по плоскому багатокутнику, який будується способами, описаними у п. 4.1.1 (рис. 4.4 – 4.5).

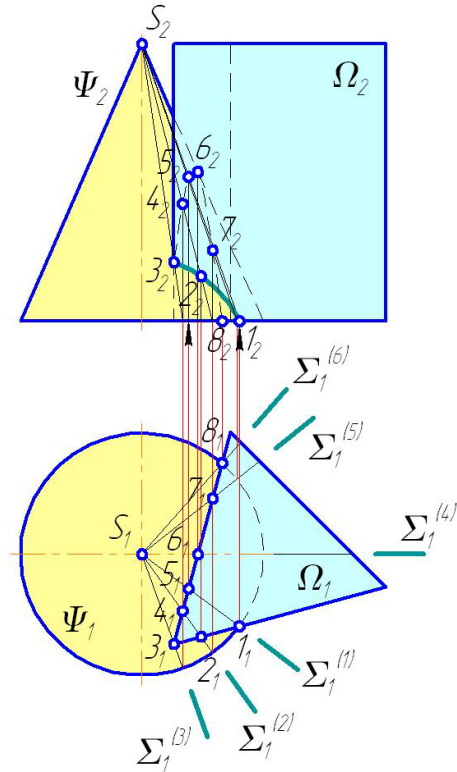


Рисунок 4.46 – Спосіб допоміжних проєційвальних січних площин

#### 4.2.5 ПЕРЕТИН ДВОХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

##### 4.2.5.1 СПОСІБ ПЛОЩИН-ПОСЕРЕДНИКІВ ОСОБЛИВОГО ПОЛОЖЕННЯ

Два тіла обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$  можуть перетинатися по просторовій кривій  $k$ , яка може розкладатися на декілька окремих ліній. Існує обмежена кількість способів визначення цієї лінії:

- а) площин-посередників особливого положення;
- б) площин-посередників загального положення (див. п. 4.2.5.2);
- в) конічних поверхонь (див. п. 4.2.5.3);
- г) сфер:
  - 1) концентричних (див. п. 4.2.5.4.2);
  - 2) ексцентричних (див. п. 4.2.5.4.3).

Правильно обраний спосіб є запорукою успішного розв'язання поставленої задачі про визначення лінії  $k$  перетину двох тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$ . Обрання певного способу залежить від виду тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$  і взаємного розташування їх осей  $i$ ,  $i'$ .

Спосіб допоміжних площин-посередників особливого положення використовується у випадках, коли два тіла обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$  мають осі  $i$ ,  $i'$ , паралельні (рис. 4.47) або такі, що перетинаються під прямим кутом (рис. 4.48). Крім того, ці осі  $i$ ,  $i'$  повинні бути прямими

особливого положення. Для мимобіжних осей  $i, i'$  особливого положення спосіб допоміжних площин-посередників прийнятний у випадку, якщо кут між проєкціями цих осей на площину, їм паралельну, прямий (рис. 4.49 – 4.50)

Описані умови є необхідними, але недостатніми. Наприклад, спосіб допоміжних площин-посередників не застосовується для визначення лінії перетину двох конусів (рис. 4.51 а), осі яких перетинаються навіть під прямим кутом. У таких випадках використовуються спосіб допоміжних січних площин загального положення і способи допоміжних сфер.

На рис. 4.47 перетинаються два конуси  $\Phi, \Psi$  з паралельними осями  $i, i'$ , які є горизонтально-проєціювальними прямими. Уводяться допоміжні площини-посередники  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(4)}$  горизонтального рівня, які перетинають конуси по двох сім'ях концентричних кіл. Точки 1–7 перетину пар цих кіл є точками, які належать шуканій лінії  $k$  перетину конусів  $\Phi, \Psi$ . Найвища точка 4 лінії  $k$  визначається способом обертання навколо горизонтально-проєціювальної осі  $i'$ : обидва конуси обертаються до положення, яке відповідає фронтальному рівню площини, утвореної осями  $i, i'$ . Твірні лінії двох конусів перетинаються у точці  $4'$ , за проєкціями якої визначаються фронтальна і горизонтальна проєкції точки 4. Обов'язково позначаються особливі точки  $A, B$ , перша з яких є точкою переходу від видимої частини кривої  $k$  до невидимої на  $\Pi_2$ .

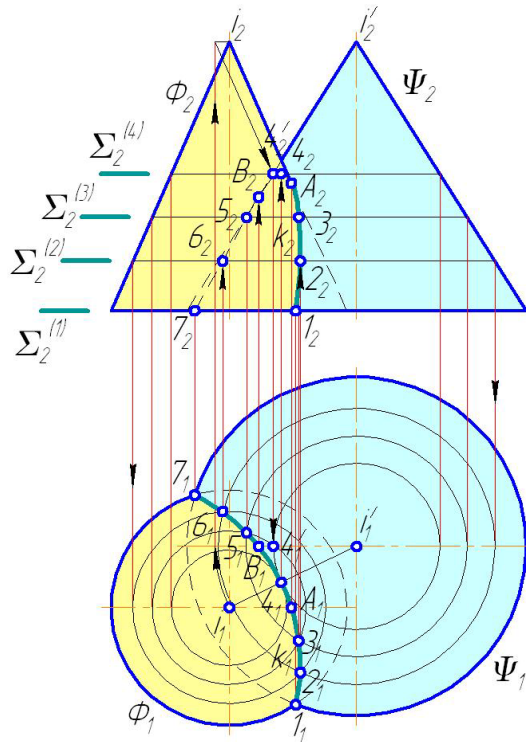


Рисунок 4.47 – Перетин двох конусів

На рис. 4.48 конус  $\Phi$  перетинається з півциліндром  $\Psi$ . Їх осі  $i, i'$  перетинаються у точці  $O$  і взаємно перпендикулярні. Вводяться допоміжні площини-посередники  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$  горизонтального рівня, які перетинають конус по концентричних колах, а півциліндр – по прямокутниках. Горизонтальні проєкції прямокутників визначаються за допомогою профільної проєкції півциліндра. Точки 1–9,  $1' - 9'$  перетину кіл з відповідними прямокутниками є точками, які належать шуканій лінії  $k, k'$  перетину конуса  $\Phi$  з циліндром  $\Psi$ .

На рис. 4.49 конус  $\Phi$  перетинається із півциліндром  $\Psi$ . Їх осі  $i, i'$  мимобіжні і взаємно перпендикулярні. Вводяться допоміжні площини-посередники  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(6)}$  горизонтального рівня, які перетинають конус по концентричних колах, а півциліндр – по прямокутниках. Горизонтальні проєкції прямокутників визначаються за допомогою профільної проєкції півциліндра. Точки 1–16 перетину кіл із відповідними прямокутниками є точками, які належать шуканій лінії  $k$  перетину конуса  $\Phi$  із циліндром  $\Psi$ . Особливими точками кривої  $k$  є точки 6, 10 (точки переходу від видимої частини лінії  $k$  до невидимої) і точки 5, 11. Точка 16 є відокремленою і належить дузі кола 1 – 16 – 15.

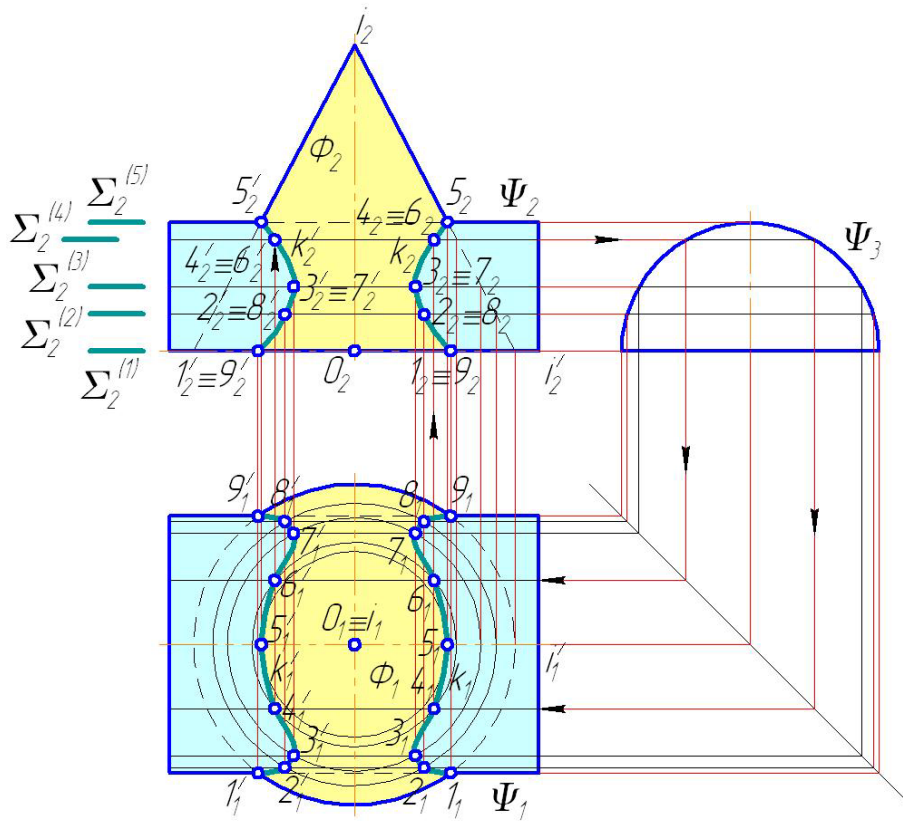


Рисунок 4.48 – Визначення ліній перетину тіл обертання способом площин-посередників особливого положення

На рис. 4.50 циліндр  $\Phi$  перетинається з тором  $\Psi$ . Їх осі  $i, i'$  мимобіжні і взаємно перпендикулярні. Вводяться допоміжні площини-посередники  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(8)}$  фронтального рівня, які перетинають тор по дугах концентричних кіл, а циліндр – по прямокутниках. Точки 1 – 8 перетину цих дуг кіл із відповідними прямокутниками є точками, які належать шуканій лінії  $k$  перетину циліндра  $\Phi$  з тором  $\Psi$ . Особливими точками кривої  $k$  є точки 4, 5, перша з яких є точкою переходу від видимої частини лінії  $k$  до невидимої на  $P_2$ .

Існують випадки, коли способами допоміжних січних площин неможливо визначити лінію перетину двох тіл обертання (рис. 4.51 б). У цьому разі, як правило, застосовуються метод послідовних наближень.

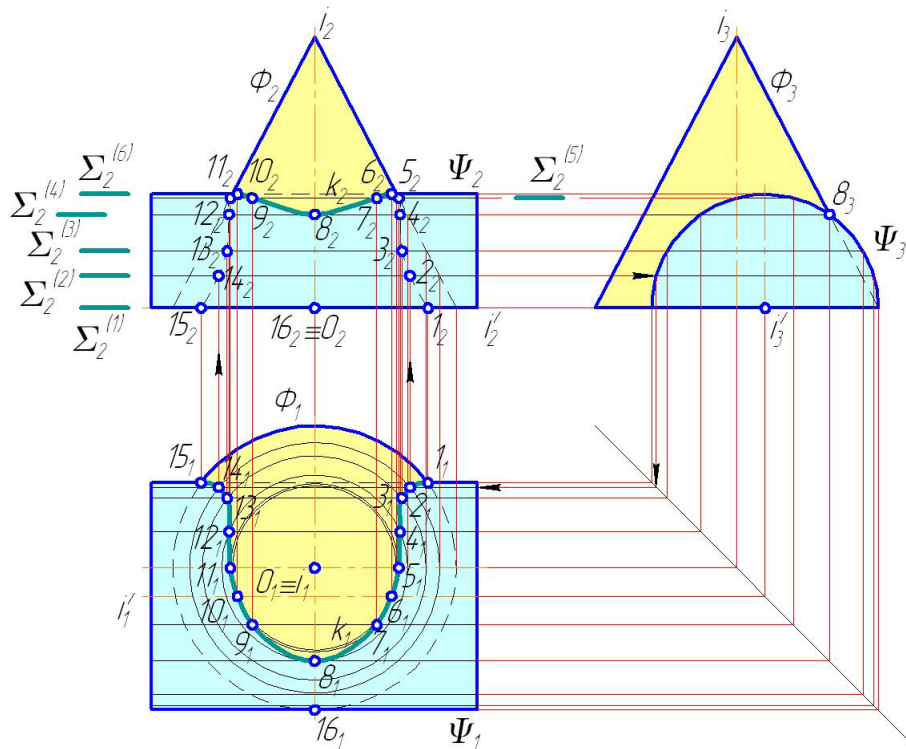


Рисунок 4.49 – Визначення лінії перетину конуса з півциліндром

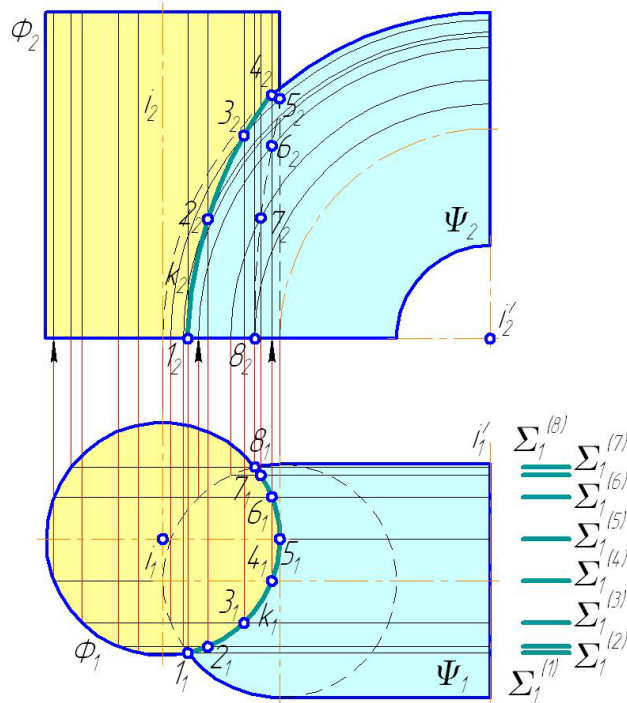


Рисунок 4.50 – Визначення лінії перетину тора з циліндром

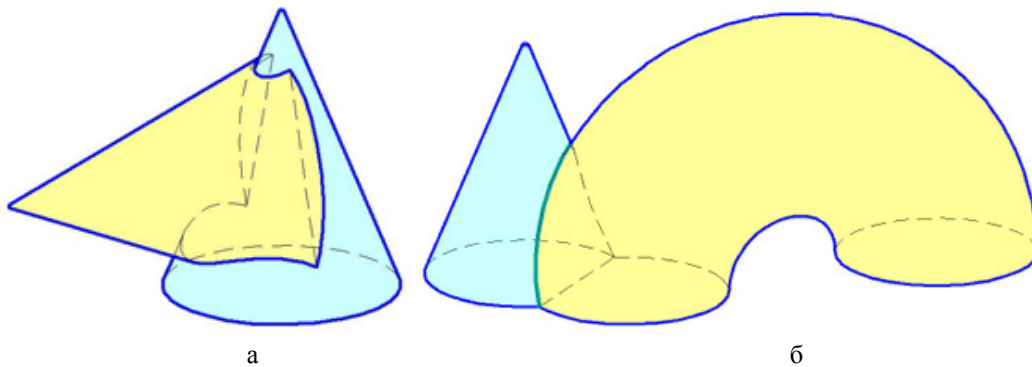


Рисунок 4.51 – Випадки неможливості визначення лінії перетину тіл обертання способами допоміжних січних площин особливого положення

#### 4.2.5.2 СПОСІБ ПЛОЩИН-ПОСЕРЕДНИКІВ ЗАГАЛЬНОГО ПОЛОЖЕННЯ

Спосіб допоміжних площин-посередників загального положення використовується у випадках, коли два тіла обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$  є прямими або еліптичними конусами (інколи – циліндрами або конусом і циліндром). Цей спосіб застосовується для будь-якого взаємного розташування осей тіл.

*Суть способу допоміжних площин-посередників загального положення*

Уводиться сім'я січних площин  $\Sigma^{(1)}$ ,  $\Sigma^{(2)}$ , ... загального положення, які перетинають тіла  $\Phi$ ,  $\Psi$  по трикутниках (у випадку конусів) або прямокутниках (у випадку циліндрів). Січні площини-посередники  $\Sigma^{(1)}$ ,  $\Sigma^{(2)}$ , ... повинні проходити через вершини конусів (у випадку конусів) або паралельно осям циліндрів (у випадку циліндрів). Точки 1, 2, ... перетину отриманих трикутників або прямокутників є точками шуканої лінії  $k$  перетину тіл  $\Phi$ ,  $\Psi$ .

На рис. 4.52 перетинаються два конуси. Уводиться сім'я площин  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$  загального положення, заданих фронталлю  $f$ , яка проходить через вершини  $S$ ,  $S'$  конусів, і горизонталями  $h^{(1)} - h^{(5)}$ , які збігаються із горизонтальними слідами площин-посередників  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$ . Площини-посередники  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$  перетинають конуси по трикутниках, які попарно перетинаються у точках 1 – 17, що належать двом шуканим лініям 1 – 7, 8 – 17 перетину конусів.

На рис. 4.53 перетинаються конус і циліндр. Уводиться сім'я площин  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$  загального положення, заданих фронталлю  $f$ , що проходить через вершину  $S$  конуса паралельно осі циліндра, і горизонталями  $h^{(1)} - h^{(5)}$ , які збігаються із горизонтальними слідами площин-посередників  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$ . Площини-посередники  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$  перетинають конус по трикутниках, а циліндр – по прямокутниках. Ці трикутники і прямокутники попарно перетинаються у точках 1 – 15, які належать двом шуканим лініям 1 – 8, 9 – 15 перетину конуса з циліндром.

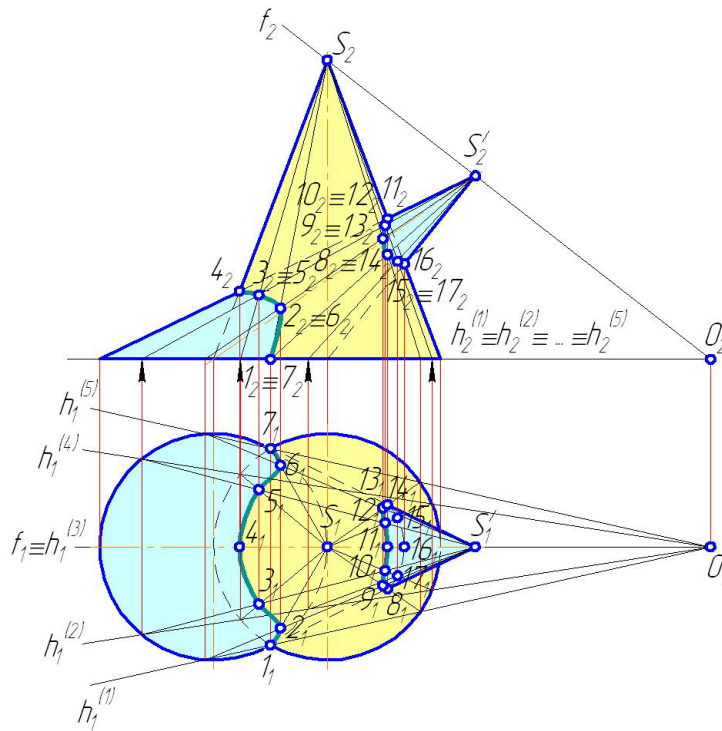


Рисунок 4.52 – Визначення ліній перетину двох конусів

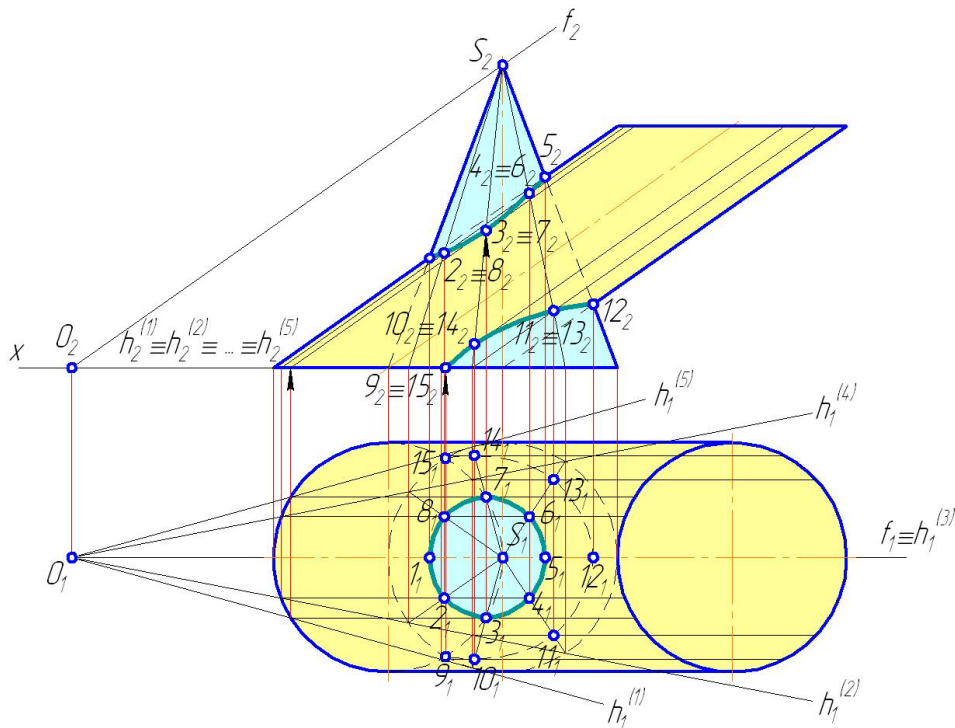


Рисунок 4.53 – Визначення ліній перетину конуса із циліндром

На рис. 4.54 перетинаються два циліндри. Уводиться сім'я площин  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(6)}$  загального положення, паралельних осям двох циліндрів. Для побудови площин-посередників у просторі довільно обирається точка  $A$ , і будується площина  $\Sigma$ , задана прямими  $l, m$ , паралельними осям циліндрів. По горизонтальних слідах  $H, H'$  площини  $\Sigma$  будується горизонтальний слід  $\sigma_{\Pi 1}$  площини  $\Sigma$ . Площини-посередники  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(6)}$  мають горизонтальні сліди, паралельні  $\sigma_{\Pi 1}$ , тому перетинають обидва циліндри по прямокутниках. Ці прямокутники попарно перетинаються у точках 1 – 18, які належать шуканій лінії перетину циліндрів.

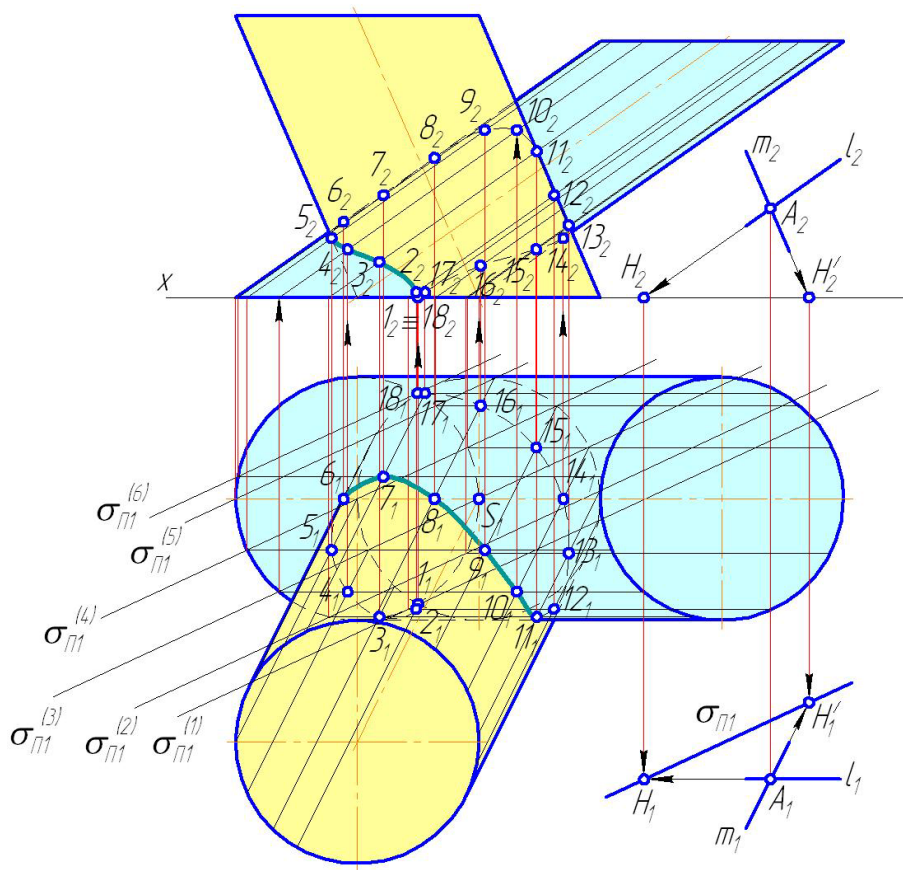


Рисунок 4.54 – Визначення лінії перетину двох циліндрів



### 4.2.5.3 СПОСІБ КОНІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Спосіб конічних поверхонь застосовується для визначення лінії  $k$  перетину конуса  $\Phi$  (не обов'язково прямого кругового) із довільним тілом обертання  $\Psi$ . Цей спосіб базується на тому, що дві конічні поверхні зі спільною вершиною перетинаються по прямих лініях (рис. 4.55).

*Суть способу конічних поверхонь*

Тіло обертання  $\Psi$  перетинається сім'єю площин  $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \dots$  горизонтального рівня по колах  $m^{(1)}, m^{(2)}, \dots$ , які обираються напрямними конічних поверхонь  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots$ . Вершиною конічних поверхонь  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots$  є вершина заданого конуса  $\Phi$ . Визначаються сліди  $\omega_{\Pi}, \omega_{\Pi}, \dots$  конічних поверхонь – кола із центрами у точках  $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots$ , які є горизонтальними слідами осей  $i^{(1)}, i^{(2)}, \dots$  конічних поверхонь  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots$ . За точками  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, B^{(1)}, B^{(2)}, \dots$  перетину кіл  $\omega^{(1)}_{\Pi}, \omega^{(2)}_{\Pi}, \dots$  з основою конуса  $\Phi$  будуються твірні лінії  $SA^{(1)}, SA^{(2)}, \dots, SB^{(1)}, SB^{(2)}, \dots$ . Точки перетину цих твірних із колами  $m^{(1)}, m^{(2)}, \dots$  є точками 1, 2, ... шуканої лінії  $k$  перетину конуса  $\Phi$  з тілом обертання  $\Psi$ .

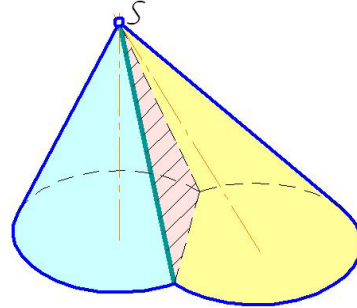


Рисунок 4.55 – Спосіб конічних поверхонь

На рис. 4.56 конус  $\Phi$  з еліптичною основою перетинається зі сферою  $\Psi$ . Будується сім'я площин  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(3)}$  горизонтального рівня. Останні перетинають сферу  $\Psi$  по горизонтальних колах  $m^{(1)} - m^{(3)}$ , які обираються напрямними конічних поверхонь  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(3)}$  із вершиною  $S$ . Визначаються сліди  $\omega^{(1)}_{\Pi} - \omega^{(3)}_{\Pi}$  конічних поверхонь – кола із центрами у точках  $H^{(1)} - H^{(3)}$ , які є горизонтальними слідами осей  $i^{(1)} - i^{(3)}$  конічних поверхонь  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(3)}$ . За точками  $A^{(1)} - A^{(3)}, B^{(1)} - B^{(3)}$  перетину кіл  $\omega^{(1)}_{\Pi} - \omega^{(3)}_{\Pi}$  з основою конуса  $\Phi$  будуються твірні лінії  $SA^{(1)} - SA^{(3)}, SB^{(1)} - SB^{(3)}$ . Точки 2-4, 6-8 перетину цих твірних із колами  $m^{(1)} - m^{(3)}$  належать шуканій лінії  $k$  перетину конуса  $\Phi$  зі сферою  $\Psi$ . Лінія  $k$  будується за точками 1-8. Точки 1, 5 визначається способом допоміжної січної площини-посередника  $\Theta$  фронтального рівня.

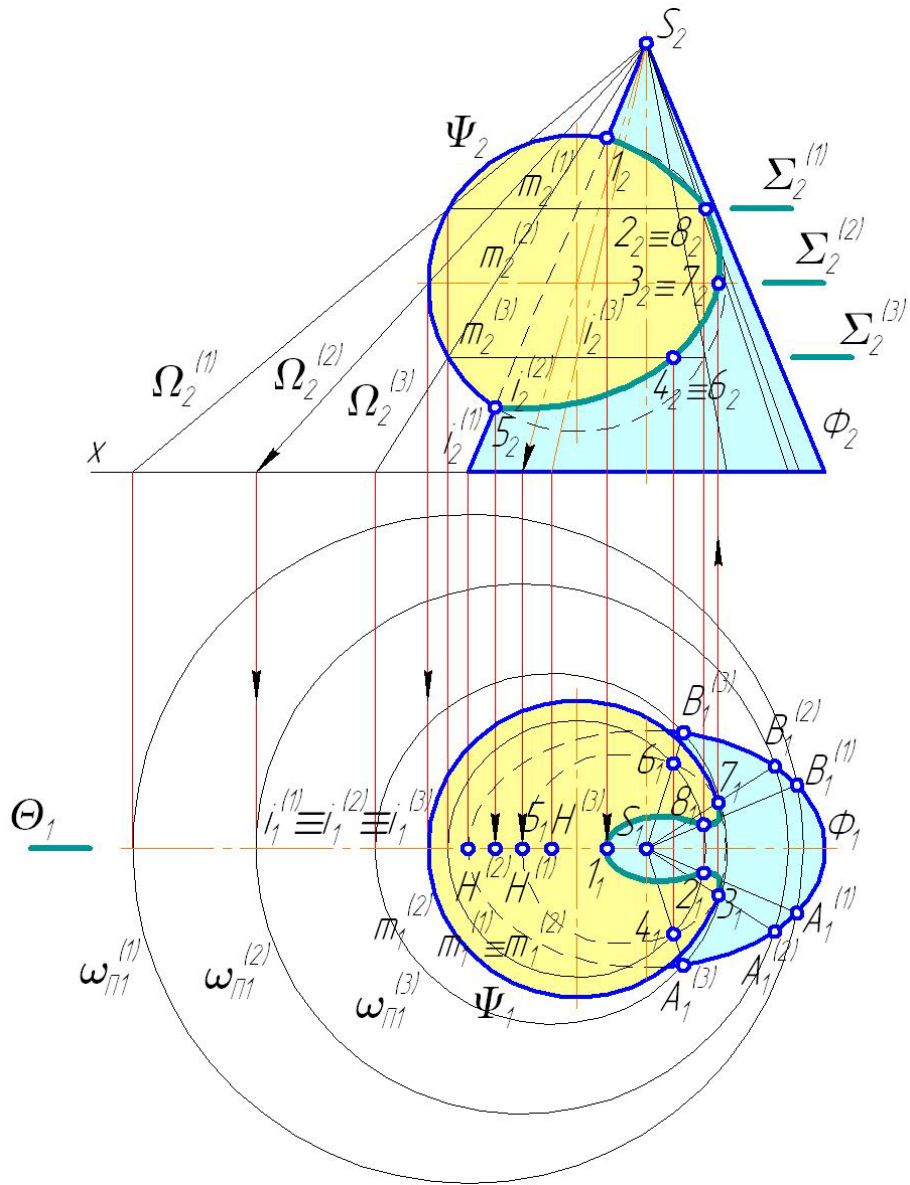


Рисунок 4.56 – Визначення лінії перетину еліптичного конуса зі сферою способом кінцевих поверхонь

#### 4.2.5.4 СПОСОБИ ДОПОМІЖНИХ СФЕР

##### 4.2.5.4.1 ТЕОРЕМА МОНЖА

Алгебраїчний порядок лінії  $k$  перетину двох поверхонь  $\Phi$ ,  $\Psi$  дорівнює добутку алгебраїчних порядків цих поверхонь. За певних умов лінія  $k$  розпадається на декілька ліній.

Наприклад, лінія перетину двох прямих кругових циліндрів (поверхонь другого порядку), циліндра з конусом або двох конусів має четвертий алгебраїчний порядок. У деяких випадках лінія перетину цих поверхонь розпадається на два кола (рис. 4.57 – 4.59).

*Теорема Монжа*

Якщо дві поверхні  $\Phi$ ,  $\Psi$  другого порядку описані навколо третьої поверхні  $\Omega$  другого порядку (або у неї вписані), то лінія їх перетину розпадається на дві криві  $k$ ,  $k'$  другого порядку, площини яких проходять через пряму  $l$ , що з'єднує точки  $A$ ,  $B$  дотику ліній  $k$ ,  $k'$ .

На рис. 4.57 – 4.59 два циліндри, циліндр і конус та два конуси  $\Phi$ ,  $\Psi$  описані навколо сфери  $\Omega$ . Лінії їх перетину розпадаються на пари еліпсів  $k$ ,  $k'$ , площини яких проходять через спільний відрізок  $AB$ .

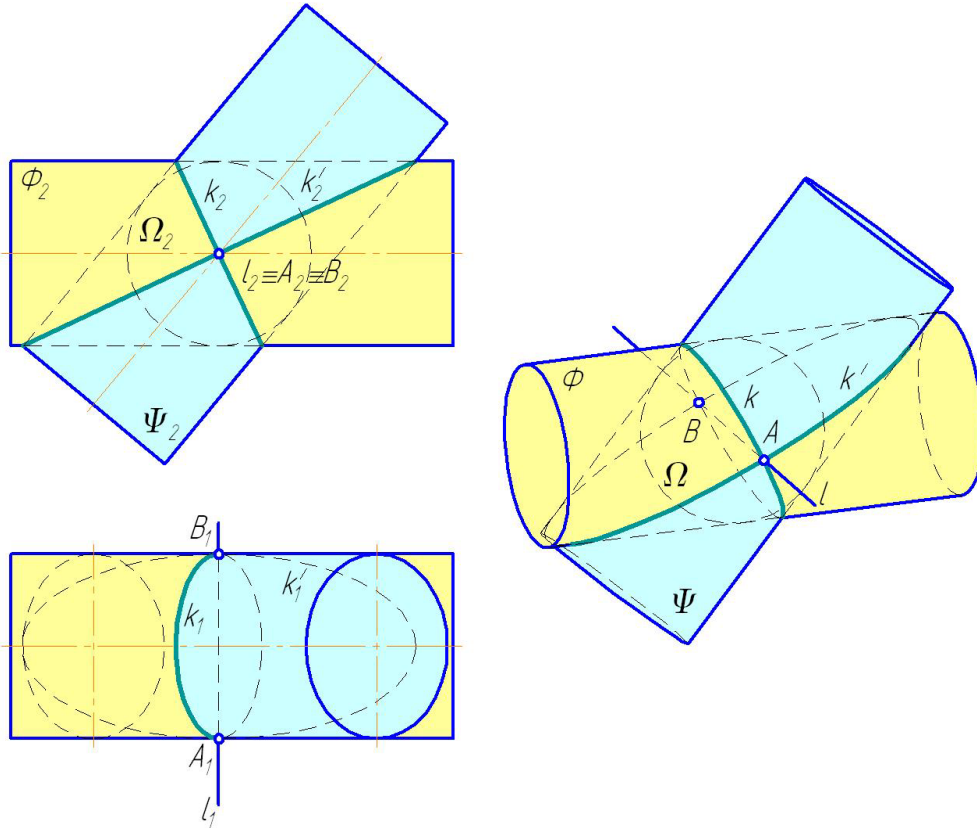


Рисунок 4.57 – Застосування теореми Монжа для визначення лінії перетину двох циліндрів

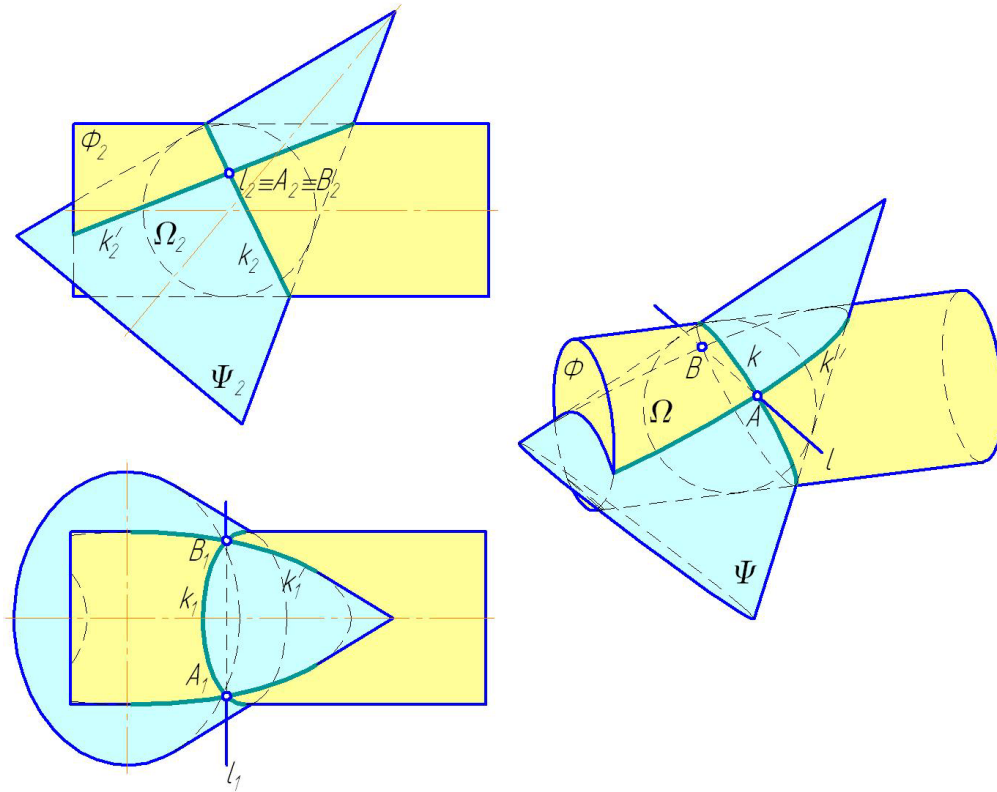
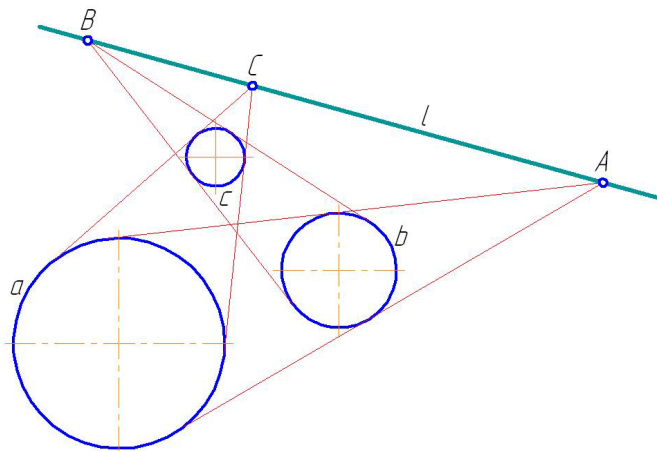


Рисунок 4.58 – Застосування теореми Монжа для визначення лінії перетину циліндра з конусом

Існує також теорема Монжа на площині, сформульована Ж. Д'Аламбером. Згідно з цією теоремою для трьох довільних кіл  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , кожне з яких не знаходиться цілком усередині інших двох, точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  перетину трьох пар спільних зовнішніх дотичних належать одній прямій  $l$ :



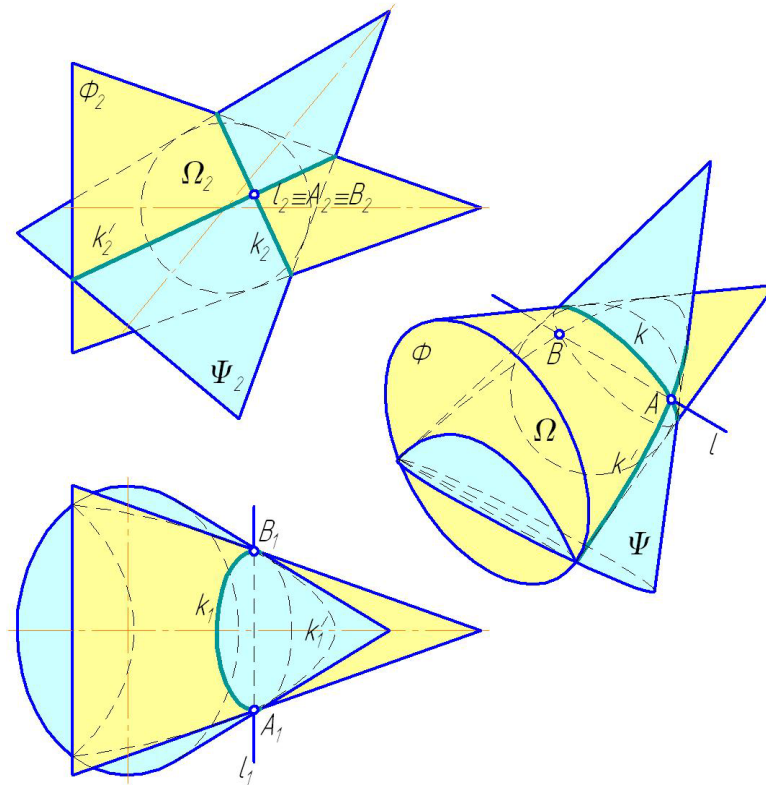


Рисунок 4.59 – Застосування теореми Монжа для визначення лінії перетину двох конусів

#### 4.2.5.4.2 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ КОНЦЕНТРИЧНИХ СФЕР

Спосіб допоміжних концентричних сфер (сфер із незмінним центром) застосовується для визначення лінії  $k$  перетину двох тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$ , осі  $i$ ,  $i'$  яких перетинаються. Цей спосіб ґрунтується на такій *властивості тіл обертання*: два тіла обертання  $\Phi$ ,  $\Omega$  зі спільною віссю  $i$  перетинаються по колах із центром на осі обертання (рис. 4.60 а). У способі сфер тіло  $\Omega$  є сферою (рис. 4.60 б).

*Суть способу концентричних сфер*

Уводиться множина  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$ , ... концентричних сферичних поверхонь із центром у точці  $O$  перетину осей  $i$ ,  $i'$  двох тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$ . Сфери  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$ , ... перетинають тіла обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$  по колах (рис. 4.60 б). Точки 1, 2, ... перетину цих кіл є точками шуканої лінії  $k$  перетину тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$ .

На рис. 4.61 перетинаються циліндр  $\Phi$  із конусом  $\Psi$ . Їх осі  $i$ ,  $i'$  перетинаються у точці  $O$ , яка обирається центром концентричних сфер. Уводиться сім'я концентричних сфер  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  із радіусами у діапазоні від  $R_{min}$  до  $R_{max}$ . Сфера найменшого радіуса  $R_{min}$  вписана у конус  $\Psi$ . Сфера найбільшого радіуса  $R_{max}$  проходить через точку 5, найбільш віддалену від центра  $O$ . Сфери  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  перетинають циліндр по колах, які мають однаковий радіус і належать площинам профільного рівня. Сфери  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  перетинають конус по колах, які належать площинам горизонтального рівня. Точки 1 – 8, 9 – 16 перетину кіл на поверхні циліндра із відповідними колами на поверхні конуса належать шуканій лінії перетину циліндра  $\Phi$  із конусом  $\Psi$ . Ця лінія розпадається на дві замкнуті просторові криві:  $k$  – побудована за точками 1 – 8,  $k'$  – побудована за точками 9 – 16. Горизонтальні проєкції

ліній  $k, k'$  визначаються за допомогою ліній проєкційного зв'язку і напрямних ліній (кіл) конуса  $\Psi$ .

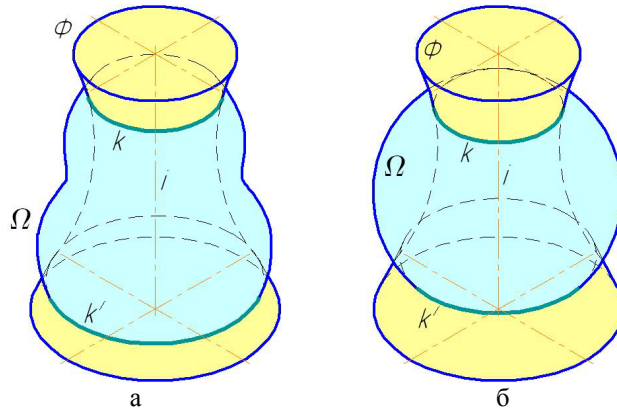


Рисунок 4.60 – Перетин тіл обертання зі спільною віссю

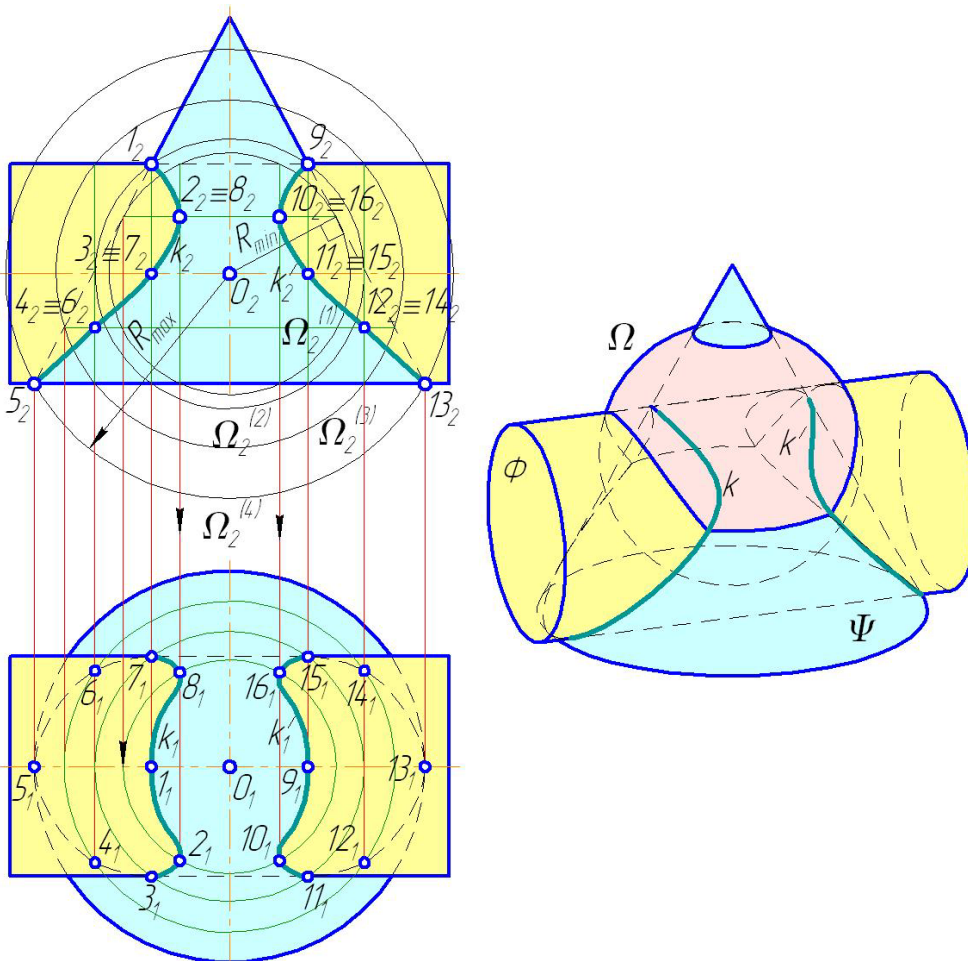


Рисунок 4.61 – Визначення лінії перетину конуса з циліндром

На рис. 4.62 перетинаються конус  $\Phi$  і сфера  $\Psi$ . Оскільки у сфері  $\Psi$  можна провести безліч осей обертання  $i'$ , то існує безліч точок перетину осі  $i'$  сфери  $\Psi$  з віссю  $i$  конуса  $\Phi$ . У даному випадку центром концентричних сфер обрана вершина  $O$  конуса. Уводиться сім'я концентричних сфер  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(6)}$  із радіусами у діапазоні від  $R_{min}$  до  $R_{max}$ , які відповідають найвищій точці 1 і найнижчій точці 6 лінії перетину. Сфери  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(6)}$  перетинають конус  $\Phi$  по колах, які належать площинам горизонтального рівня. Сфери  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(6)}$  перетинають сферу  $\Psi$  по колах, які належать фронтально-проєкційним площинам. Точки 1 – 10 перетину кіл на поверхні конуса  $\Phi$  із відповідними колами на поверхні сфери  $\Psi$  належать шуканій лінії  $k$  перетину циліндра  $\Phi$  із конусом  $\Psi$ . Горизонтальна проєкція лінії  $k$  визначається за допомогою ліній проєкційного зв'язку і напрямних ліній (кіл) конуса  $\Psi$ .

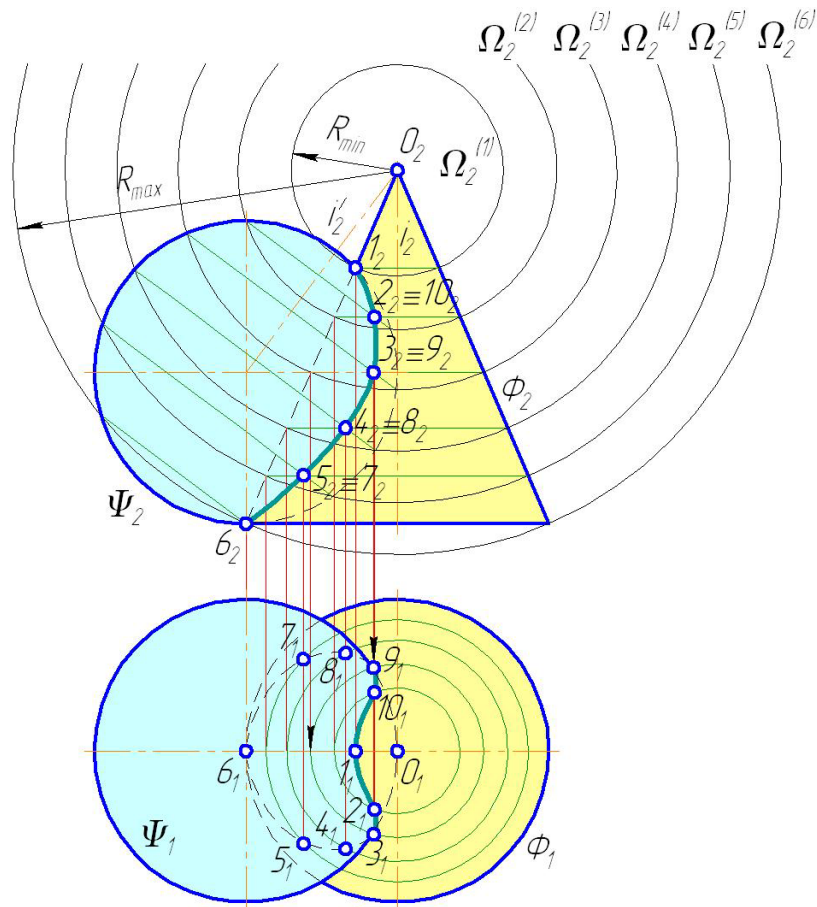


Рисунок 4.62 – Визначення лінії перетину конуса зі сферою способом допоміжних концентричних сфер

#### 4.2.5.4.3 СПОСІБ ДОПОМІЖНИХ ЕКСЦЕНТРИЧНИХ СФЕР

Спосіб допоміжних ексцентричних сфер (сфер із різними центрами) застосовується для визначення лінії  $k$  перетину двох тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$ , осі  $i$ ,  $i'$  яких перетинаються або мимобіжні. Крім того, тіла обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$  повинні мати принаймні одну спільну площину симетрії. Відмінність цього способу від способу концентричних сфер полягає у зміні центрів сферичних поверхонь.

*Суть способу ексцентричних сфер*

Уводиться множина  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots$  сферичних поверхонь із центрами  $O^{(1)}, O^{(2)}, \dots$ . Сфери  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots$  перетинають тіла обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$  по колах (рис. 4.60 б). Точки 1, 2, ... перетину цих кіл є точками шуканої лінії  $k$  перетину тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$ .

Складність способу ексцентричних сфер полягає у правильному визначенні їх центрів  $O^{(1)}, O^{(2)}, \dots$ , спосіб визначення яких залежить від форми тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$ .

*Правило визначення центрів ексцентричних сфер*

Центри  $O^{(1)}, O^{(2)}, \dots$  ексцентричних сфер  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots$  знаходяться у спільній площині симетрії тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$ . Побудовані сфери  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots$  повинні перетинати тіла обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$  по колах.

Головною перевагою способів допоміжних сфер (концентричних або ексцентричних) над іншими існуючими способами визначення лінії  $k$  перетину двох тіл обертання  $\Phi$ ,  $\Psi$  є те, що лінія  $k$  перетину визначається лише за допомогою однієї проєкції, наприклад, фронтальної.

На рис. 4.63 а конус  $\Phi$  перетинається зі сферою  $\Psi$ . Центрами  $O^{(1)} - O^{(4)}$  ексцентричних сфер  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  є довільні точки осі конуса  $\Phi$ . Радіуси ексцентричних сфер обираються довільно. Сфери  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  перетинають конус  $\Phi$  по колах, які належать площинам горизонтального рівня. Сфери  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  перетинають сферу  $\Psi$  по колах, які належать фронтально-проєціювальним площинам. Точки 1 – 6 перетину кіл на поверхні конуса  $\Phi$  із відповідними колами на поверхні сфери  $\Psi$  належать шуканій лінії  $k$  перетину циліндра  $\Phi$  із конусом  $\Psi$ .

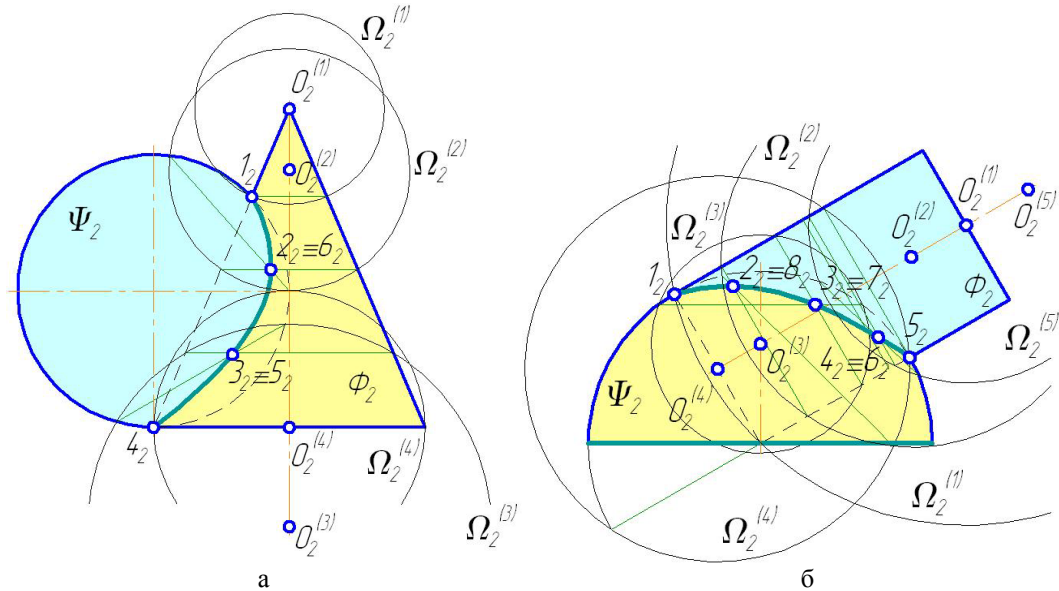


Рисунок 4.63 – Спосіб ексцентричних сфер із довільними центрами і радіусами



На рис. 4.63 б циліндр  $\Phi$  перетинається з півсферою  $\Psi$  удвічі більшого радіуса. Центрами  $O^{(1)} - O^{(4)}$  ексцентричних сфер  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  є довільні точки осі циліндра  $\Phi$ . Радіуси ексцентричних сфер обираються довільно. Сфери  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  перетинають циліндр  $\Phi$  по колах однакового радіусів, які належать фронтально-проєціювальним площинам. Сфери  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  перетинають півсферу  $\Psi$  по колах різних радіусів, які належать фронтально-проєціювальним площинам. Точки 1–8 перетину кіл на поверхні півсфери  $\Psi$  належать шуканій лінії  $k$  перетину циліндра  $\Phi$  із півсферою  $\Psi$ . Ця лінія називається кривою Вівіані.

На рис. 4.64 тор  $\Phi$  перетинається із циліндром  $\Psi$ . Уводиться сім'я фронтально-проєціювальних січних площин  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(4)}$ , що проходять через фронтально-проєціювальну вісь  $j$  тора і перетинають лінію центрів твірних ліній тора  $\Phi$  у точках  $A^{(1)} - A^{(4)}$ . Із цих точок проводяться перпендикуляри до площин  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(4)}$  до перетину із горизонтально-

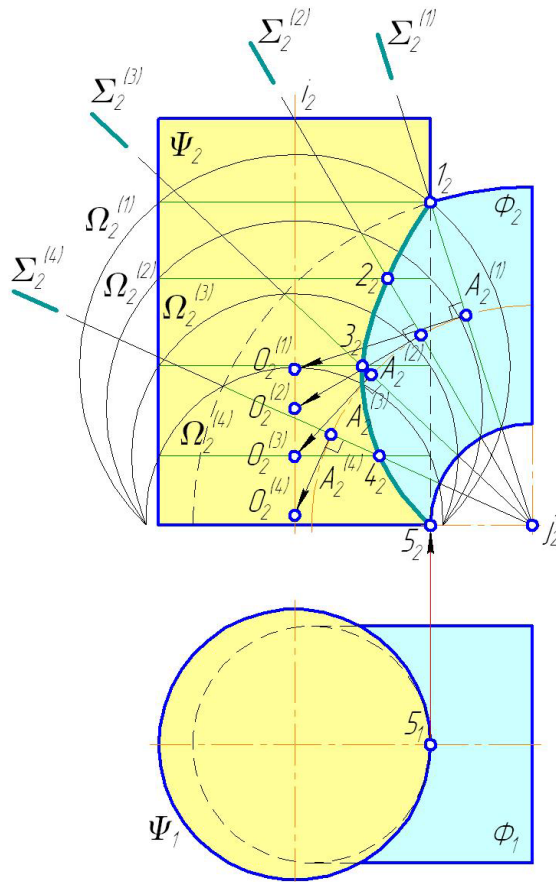


Рисунок 4.64 – Спосіб ексцентричних сфер із визначеними центрами і радіусами



(1622 – 1703)

*Вінченцо Вівіані (Vincenzo Viviani) – італійський математик і архітектор, учень Галілея і Торічеллі, член Лондонського королівського товариства. Автор трактатів із теоретичної механіки і опору матеріалів. Застосував біквдратні просторові криві для будівництва вікон у сферичних куполах.*

проеціювальною віссю  $i$  циліндра. Отримані точки  $O^{(1)} - O^{(4)}$  є центрами ексцентричних сфер  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$ . Будується сім'я сфер  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  із такими радіусами, щоб ці сфери перетинали тор по колах, які належать фронтально-проеціювальним площинам  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(4)}$ . Сфери  $\Omega^{(1)} - \Omega^{(4)}$  перетинають циліндр по колах однакових радіусів, які належать площинам горизонтального рівня. Точки 1 – 4 перетину кіл на поверхні тора  $\Phi$  із відповідними колами на поверхні циліндра  $\Psi$  належать шуканій лінії 1 – 5 перетину тора  $\Phi$  із циліндром  $\Psi$ . Точка 5 є точкою перетину (дотику) основ тора і циліндра (див. горизонтальну проекцію).

#### 4.2.5.5 ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙ ПЕРЕТИНУ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

У випадку перетину двох тіл обертання другого порядку  $\Phi, \Psi$  зі спільною площиною симетрії  $\Sigma$  лінія  $k$  перетину є *біквдратною просторовою кривою*, яка є окремим випадком кривої четвертого порядку (рис. 4.65 а – б).

*Властивості біквдратних просторових кривих:*

а) біквдратна просторова крива  $k$  має площину симетрії  $\Sigma$ , яка збігається зі спільною площиною симетрії двох тіл обертання, що перетинаються.

б) проекція біквдратної просторової кривої  $k$  на власну площину симетрії  $\Sigma$  є плоскою кривою другого порядку (табл. 4.2).

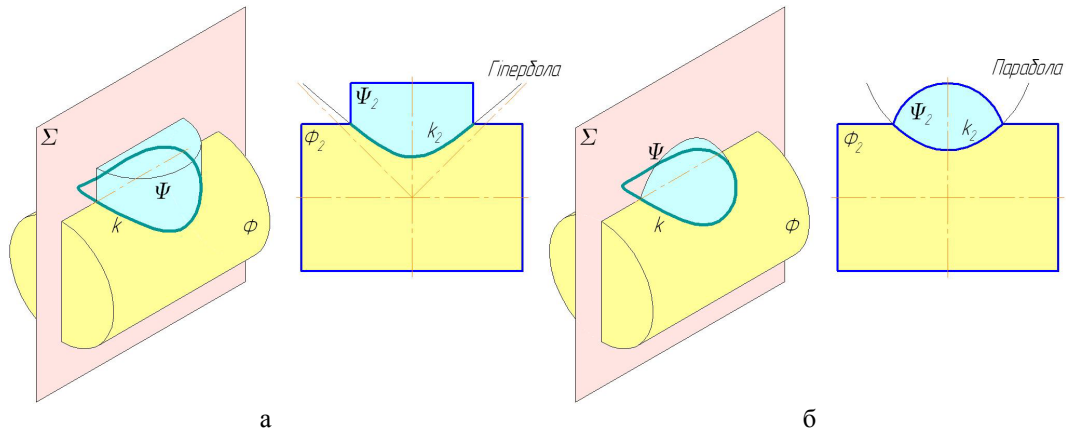


Рисунок 4.65 – Біквдратні просторові криві

Таблиця 4.2 – Проекції біквдратних просторових кривих

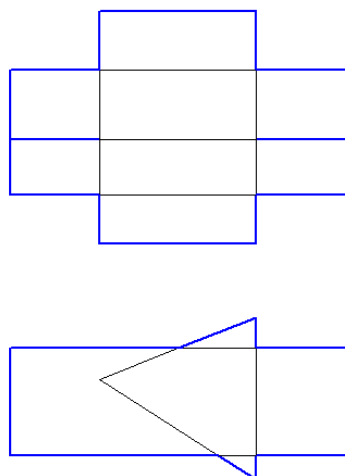
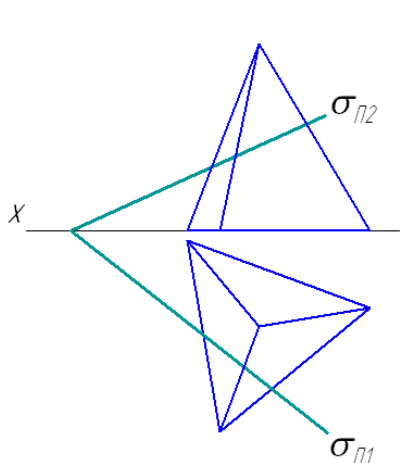
Тіло $\Phi$	Тіло $\Psi$					
	Циліндр	Конус	Сфера	Еліпсоїд	Гіперболоїд	Параболоїд
Циліндр	гіпербола	парабола	гіпербола/еліпс	гіпербола		
Конус						
Сфера	парабола	–	парабола			
Еліпсоїд	гіпербола/еліпс	парабола	Гіпербола/еліпс	гіпербола/еліпс		
Гіперболоїд	гіпербола			гіпербола		
Параболоїд						

Наприклад, лінія  $k$  перетину двох циліндрів  $\Phi, \Psi$  різних діаметрів (рис. 4.65 а) є біквдратною просторовою кривою  $k$ , що проєціюється на площину  $P_2$  у гіперболу.

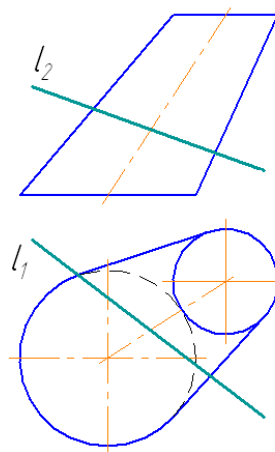
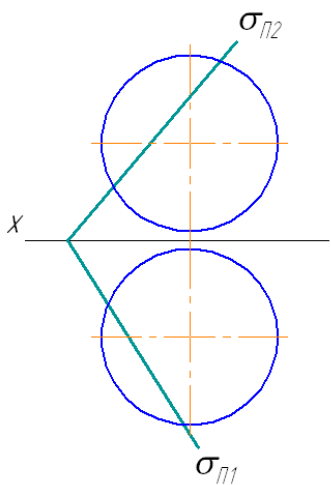
На рис. 4.65 б показана лінія  $k$  перетину циліндра  $\Phi$  зі сферою  $\Psi$ . Ця лінія є біквдратною просторовою кривою, яка проєціюється на площину  $P_2$  у параболу.

### ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

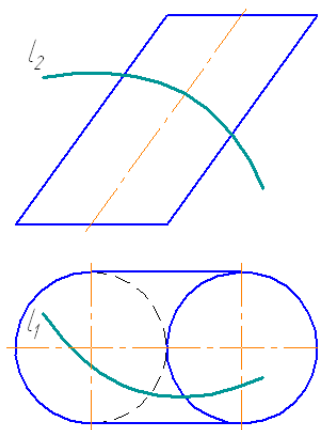
1. Перевірте, чи справедлива формула Ейлера для октаедра?
2. Побудуйте три проекції тетраедра з ребрами довжиною 40 мм.
3. Визначте лінію перетину піраміди площиною.
4. Знайдіть лінію перетину двох призм.



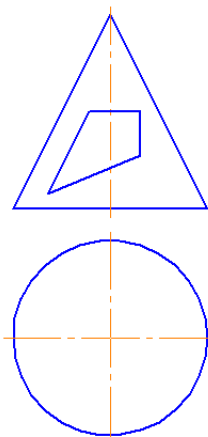
5. Побудуйте проекції лінії перетину сфери площиною.
6. Визначте точки перетину зрізаного конуса прямою  $l$ .



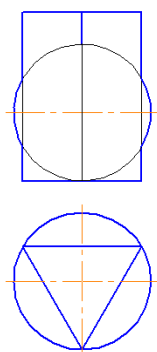
7. Знайдіть точки перетину циліндра кривою  $l_2$ .



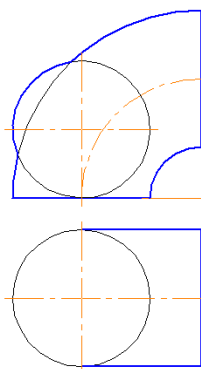
8. Побудуйте горизонтальну проекцію контуру призматичного отвору в конусі.



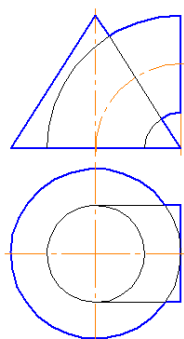
9. Побудуйте лінію перетину сфери із призмою.



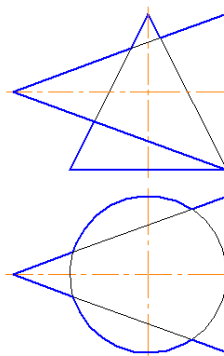
10. Знайдіть лінію перетину сфери із тором.



11. Визначте лінію перетину конуса із тором.



12. Побудуйте проєкції лінії перетину двох конусів.



### ***ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ***

1. Наведіть загальну класифікацію багатогранників.
2. Які існують види платонівських тіл?
3. Сформулюйте і охарактеризуйте формулу Ейлера для багатогранників.
4. Якими способами визначається лінія перетину багатогранника площиною особливого положення?
5. Опишіть спосіб визначення точок перетину багатогранника прямою.
6. Якими способами визначається лінія перетину багатогранника площиною загального положення?
7. Якими способами визначається лінія перетину двох багатогранників?
8. Що називається тілом обертання?
9. Як визначається лінія перетину тіла обертання площиною особливого положення?
10. Назвіть можливі види лінії перетину конуса площиною.
11. Назвіть можливі види лінії перетину тора площиною.
12. Якими способами визначається лінія перетину тіла обертання площиною загального положення?
13. Опишіть спосіб визначення точок перетину тіла обертання прямою особливого положення.
14. Опишіть способи визначення точок перетину циліндра прямою загального положення.
15. Опишіть способи визначення точок перетину конуса прямою загального положення.
16. Опишіть способи визначення точок перетину сфери прямою загального положення.
17. У чому полягає спосіб допоміжної січної циліндричної поверхні? Для розв'язання яких задач він застосовується?
18. Опишіть алгоритм методу послідовних наближень для визначення точок перетину тіла обертання із кривою лінією.
19. Наведіть алгоритм визначення лінії перетину тіла обертання із багатогранником.
20. Якими способами визначається лінія перетину двох тіл обертання?
21. Сформулюйте теорему Монжа у просторі. Наведіть приклади застосування.
22. Охарактеризуйте спосіб допоміжних сфер. Як визначаються їх центри?
23. Опишіть властивості ліній перетину тіл обертання.

## РОЗДІЛ 5

### РОЗГОРТАННЯ ПОВЕРХОНЬ

---

#### 5.1 ВЛАСТИВОСТІ РОЗГОРТОК

Розгорткою криволінійної поверхні  $\Phi$  називається плоска фігура  $\Phi_0$ , отримана шляхом суміщення поверхні  $\Phi$  із площиною  $\Sigma$  (рис. 5.1). У нарисній геометрії площиною  $\Sigma$  є одна із площин проєкцій.

Розгортання поверхонь тіл широко застосовується в техніці, оскільки велика кількість технічних конструкцій виготовляється із листового матеріалу. Заготовки таких конструкцій, які є розгортками, використовуються для виготовлення тонкостінних ємностей, повітродувок, промислової вентиляції і пневмотранспорту, фасонних частин пиловловлювачів, деталей підйомно-транспортних пристроїв тощо (рис. 5.2).

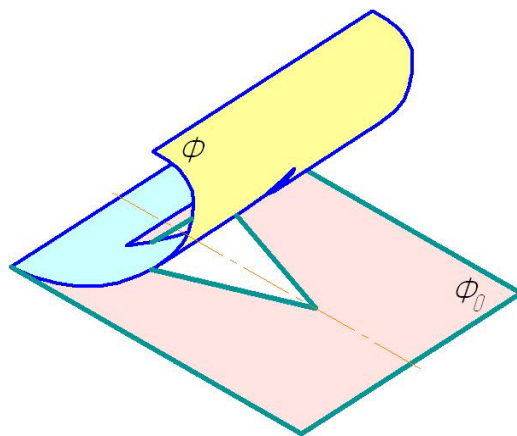


Рисунок 5.1 – Розгортання поверхні

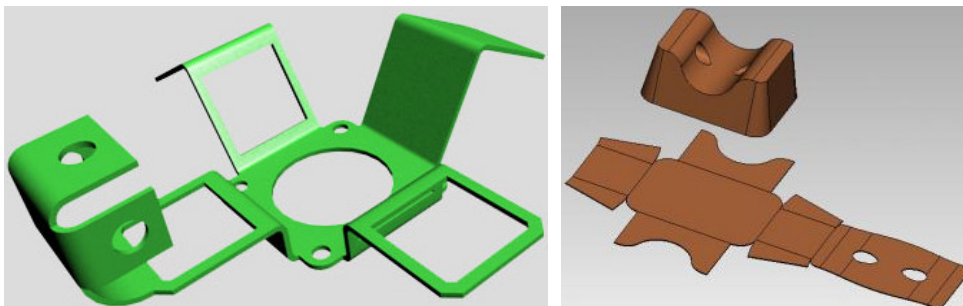


Рисунок 5.2 – Застосування розгорток

Поверхні  $\Phi$ , які можна сумістити із площиною  $\Sigma$  без розривів і складок, є такими, що *розгортаються*. До них належать усі багатогранники (див. п. 4.1), циліндричні і конічні поверхні (див. п. 3.2.1.3, рис. 3.55 б – в), торси (див. п. 3.2.1.3, рис. 3.57). Усі інші криві поверхні не розгортаються на площину, тому при їх виготовленні з листового матеріалу вони наближено замінюються поверхнями, які розгортаються (призмами, пірамідами, циліндрами, конусами). У цих випадках мають місце так звані *умовні розгортки* (див. п. 5.4.1.3 – 5.4.1.4).

**Основні властивості розгортки:**

- а) пряма  $l$  на поверхні  $\Phi$  відповідає прямій  $l_0$  на розгортці  $\Phi_0$ ;
- б) паралельні прямі  $l, m$  на поверхні  $\Phi$  відповідають паралельним прямим  $l_0, m_0$  на розгортці  $\Phi_0$ ;
- в) довжина (натуральна величина) будь-якої лінії  $s$  на поверхні  $\Phi$  дорівнює довжині лінії  $s_0$  на розгортці  $\Phi_0$ ;
- г) кут  $\alpha$  між лініями  $r, s$  на поверхні  $\Phi$  дорівнює куту між лініями  $r_0, s_0$  на розгортці  $\Phi_0$ ;
- д) площа  $S$  фігури на поверхні  $\Phi$  дорівнює площі відповідної фігури на розгортці  $\Phi_0$ ;
- е) якщо пряма  $s_0$  на розгортці  $\Phi_0$  відповідає кривій лінії  $s$  на поверхні  $\Phi$ , то крива  $s$  є *геодезичною лінією* поверхні  $\Phi$ . Довжина дуги  $MN$  геодезичної лінії є найменшою з усіх можливих дуг  $MN$  на поверхні  $\Phi$ .

Описані властивості геометрично інтерпретовані на рис. 5.3.

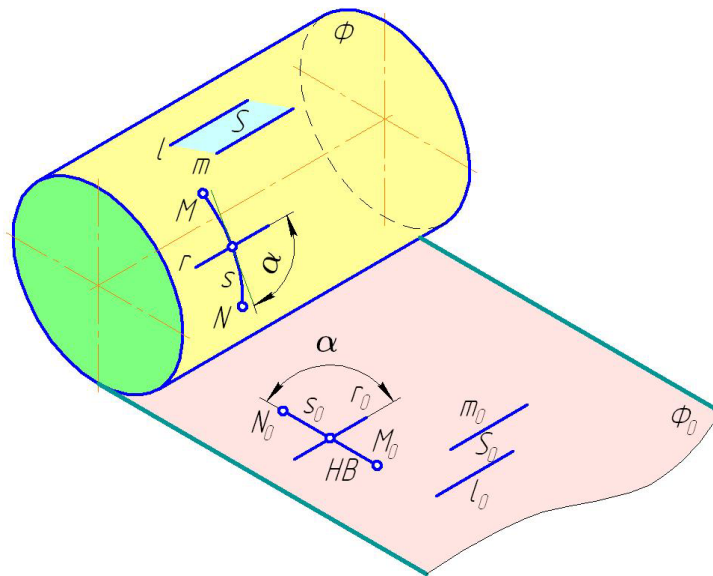


Рисунок 5.3 – Властивості розгортки

## 5.2 РОЗГОРТАННЯ ПОВЕРХНІ БАГАТОГРАННИКА

### 5.2.1 СПОСІБ НАТУРАЛЬНИХ ГРАНЕЙ

Згідно із властивостями розгортки (див. п. 5.1) усі грані багатогранника  $\Phi$  зберігають на розгортці свою довжину, для визначення якої застосовуються способи нарисної геометрії.

На рис. 5.4 побудовані горизонтальна і фронтальна проєкції трикутної піраміди  $SABC$ . Основа  $ABC$  є площиною горизонтального рівня, тому проєціюється на  $\Pi_1$  у натуральну

---

*Геодезична лінія (від грецького γεωδαισία – поділ Землі) – лінія мінімальної довжини, проведена через дві точки криволінійної поверхні. На розгортці поверхні ця лінія є прямою.*

*Геодезична лінія широко застосовується у неевклідовій геометрії, теоретичних і практичних задачах геодезії – науки, яка вивчає виміри простору, у тому числі розміри і форму Землі, її гравітаційне поле тощо.*

величину  $A_1B_1C_1$ . Для визначення натуральних величин граней  $SAB$ ,  $SBC$ ,  $SCA$  використовується спосіб обертання навколо горизонтально-проєціювальної осі  $i$ , яка проходить через вершину  $S$  піраміди. Відрізки  $S_2A_2$ ,  $S_2B'_2$ ,  $S_2C'_2$  є натуральними величинами ребер  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  піраміди. За цими ребрами будується розгортка піраміди. Вирізавши плоску заготовку з контуру розгортки і склавши її по лініях згинання та суміщаючи однойменні ребра, можна отримати поверхню даної піраміди  $SABC$ .

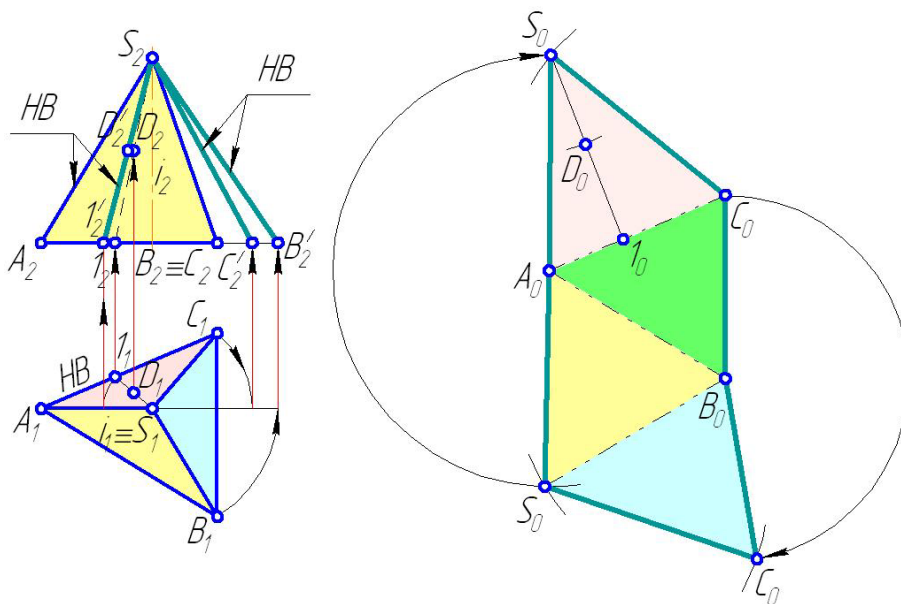


Рисунок 5.4 – Спосіб натуральних граней

Для визначення на розгортці довільної точки  $D$  піраміди застосовується спосіб допоміжного відрізка. Точка  $D$  належить грані  $SAC$ . Через вершину  $S$  і точку  $D$  проводиться відрізок  $S-1$ , точка  $1$  якого належить основі  $ABC$  піраміди. Визначається натуральна величина  $S_21_2$  відрізка  $S-1$ , на ньому визначається проєкція  $D'_2$ . На відрізку  $S_01_0$  розгортки будується відрізок  $S_0D_0$ , довжина якого дорівнює довжині проєкції  $S_2D'_2$ .

### 5.2.2 СПОСІБ НОРМАЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ

Спосіб нормального перерізу застосовується для побудови розгортки призм, ребра яких є прямими рівня.

*Суть способу нормального перерізу*

Призма перетинається у довільному місці площиною  $\Sigma$ , перпендикулярною до ребер. Визначається натуральна величина лінії  $1-2-\dots$  нормального перерізу. Ця лінія є плоским багатокутником, кількість сторін якого дорівнює кількості граней призми. Лінія  $1-2-\dots$  розгортається до форми прямого відрізка  $1_02_0 \dots$ . На перпендикулярах, проведених по обидва боки від точок  $1_0, 2_0, \dots$ , будуються частини натуральних величин ребер піраміди, які знаходяться по різні боки від січної площини  $\Sigma$ .

На рис. 5.5 задані дві проєкції трикутної призми  $ABCDEF$  із ребрами  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  горизонтального рівня. Уводиться січна площина  $\Sigma$ , перпендикулярна до ребер призми (горизонтальний слід  $\Sigma_1$  перпендикулярний до горизонтальних проєкцій ребер призми). Площина  $\Sigma$  перетинає призму по трикутнику  $1-2-3$ , точки якого належать відповідно ребрам  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ . Способом заміни площин проєкцій визначається натуральна



величина  $1_42_43_4$  нормального перерізу (вісь  $s_{14}$  паралельна сліду  $\Sigma_1$ ). Трикутник  $1_42_43_4$  розгортається до форми прямого відрізка  $1_02_03_01_0$ , довжини частин  $1_02_0, 2_03_0, 3_01_0$  якого дорівнюють відповідним сторонам трикутника  $1_42_43_4$ . На перпендикулярах, проведених по обидва боки від точок  $1_0, 2_0, 3_0$ , будуються відрізки  $1_0A_0, 1_0D_0, 1_0B_0, 1_0E_0, 1_0C_0, 1_0F_0$ , довжини яких дорівнюють довжинам проєкцій  $1_1A_1, 1_1D_1, 1_1B_1, 1_1E_1, 1_1C_1, 1_1F_1$ . На розгортці добудовуються натуральні величини основ  $ABC, DEF$  призми.

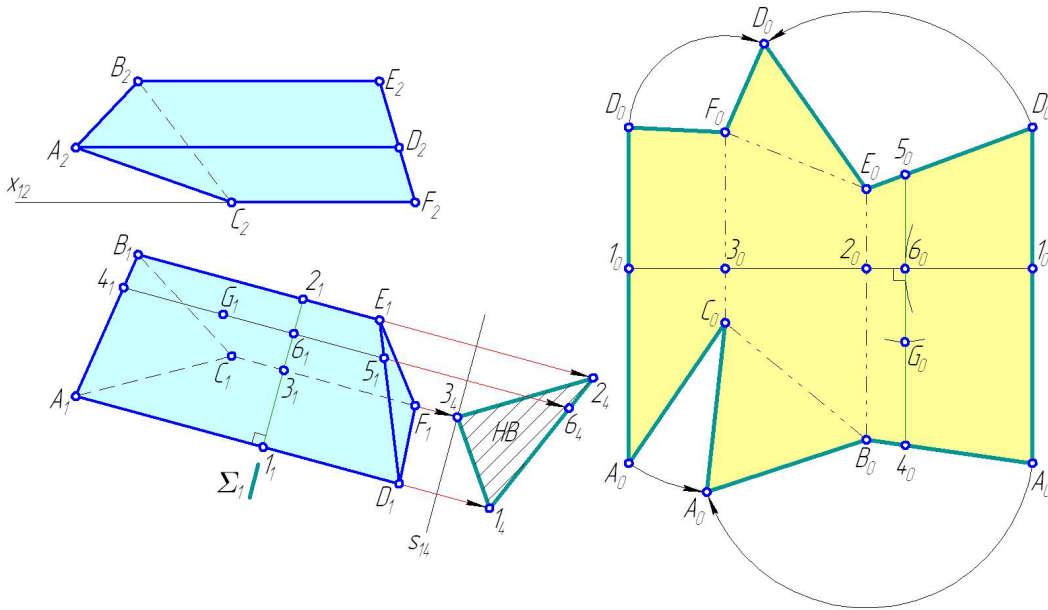


Рисунок 5.5 – Спосіб нормального перерізу

Для визначення на розгортці довільної точки  $G$  призми застосовується спосіб допоміжних відрізків. Точка  $G$  належить грані  $ABDE$ . Через точку  $G$  проводиться відрізок  $4-5$ , паралельний ребрам призми. Точка  $4$  належить відрізку  $AB$ , точка  $5$  – відрізку  $DE$ . Визначається точка  $6$  перетину відрізка  $4-5$  із площиною  $\Sigma$ . Точка  $6$  належить відрізку  $1-2$ . Визначається проєкція  $G_4$ . На відрізку  $1_02_0$  розгортки будуються відрізок  $1_06_0$ , довжина якого дорівнює довжині проєкції  $1_46_4$ . З точки  $6_0$  розгортки призми проводиться відрізок  $6_0G_0$  у напрямку, перпендикулярному до відрізка  $1_02_0$  у бік точки  $4_0$ . Довжина відрізка  $6_0G_0$  дорівнює довжині проєкції  $6_1G_1$ .

### 5.2.3 СПОСІБ РОЗКОЧУВАННЯ

Спосіб розкочування застосовується для розгортання призми, основа якої паралельна одній площині проєкцій, а бокові ребра паралельні іншій площині проєкцій.

#### Суть способу розкочування

Із точок  $1, 2, \dots$  основи і  $1', 2', \dots$  верхньої грані призми проводяться промені, перпендикулярні до бокових ребер  $1'1, 2'2, \dots$ . На цих променях будуються точки  $1_0, 2_0, \dots, 1'_0, 2'_0, \dots$  так, що довжини відрізків  $1_02_0, 2_03_0, \dots, 1'_02'_0, 2'_03'_0, \dots$  дорівнюють натуральним величинам відрізків  $1-2, 2-3, \dots, 1'2', 2'3', \dots$ .

На рис. 5.6 задані дві проєкції трикутної призми  $1-2-3-1'2'3'$  з основою  $1-2-3$  і верхньою гранню  $1'2'3'$  горизонтального рівня та ребрами  $1'1, 2'2, 3'3$  фронтального рівня. Із фронтальних проєкцій  $1_2, 2_2, 3_2, 1'_2, 2'_2, 3'_2$  проводяться промені, перпендикулярні до фронтальних проєкцій  $1_21'_2, 2_22'_2, 3_23'_2$ . На цих променях по черзі відкладаються

точки  $1_0, 2_0, 3_0, 1'_0, 2'_0, 3'_0$  так, що довжини відрізків  $1_0 2_0, 2_0 3_0, 3_0 1_0, 1'_0 2'_0, 2'_0 3'_0, 3'_0 1'_0$  дорівнюють натуральним величинам відрізків  $1-2, 2-3, 3-1, 1'2', 2'3', 3'1'$ .

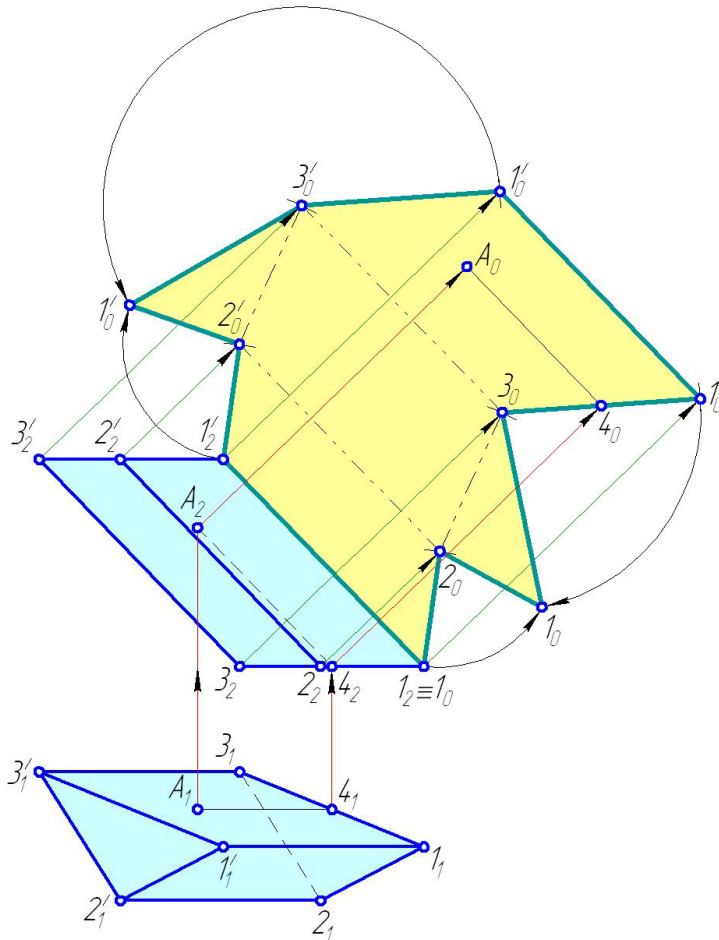


Рисунок 5.6 – Спосіб розкочування

Для визначення на розгортці довільної точки  $A$  призми застосовується спосіб допоміжного променя. Точка  $A$  належить грані  $1-3-3'1'$ . Через точку  $A$  проводиться відрізок  $A-4$ , паралельний ребрам призми, точка  $4$  якого належить відрізку  $1-3$  основи. З проєкції  $4_2, A_2$  проводяться промені  $4_2 A_0, A_2 A_0$ , перпендикулярні до фронтальних проєкцій ребер призми. З точки  $4_0$ , яка належить відрізку  $1_0 3_0$  розгортки, проводиться відрізок  $4_0 A_0$ , паралельний відрізку  $1_0 1'_0$ , до перетину із променем  $A_2 A_0$ .

### 5.3 РОЗГОРТАННЯ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Із усієї різноманітності поверхонь тіл обертання точне розгортання здійснюється лише для прямих кругових циліндра і конуса (рис. 5.7 – 5.8).

Поверхня прямого кругового циліндра розгортається у прямокутник, одна сторона якого дорівнює довжині  $\pi d$  нормального перерізу (кола діаметром  $d$ ), інша – висоті  $h$  циліндра (рис. 5.7). Розгортка циліндра за необхідності доповнюється нижньою і верхньою основами – колами діаметром  $d$ . Для визначення точки  $A$  на розгортці прямого кругового

циліндра застосовується *спосіб твірної лінії*. Визначається кут  $\alpha$ , і будується твірна лінія на розгортці. Вона розміщена на відстані  $l = \pi d \alpha / 360^\circ$ . Висота точки  $A_0$  дорівнює висоті точки  $A$ .

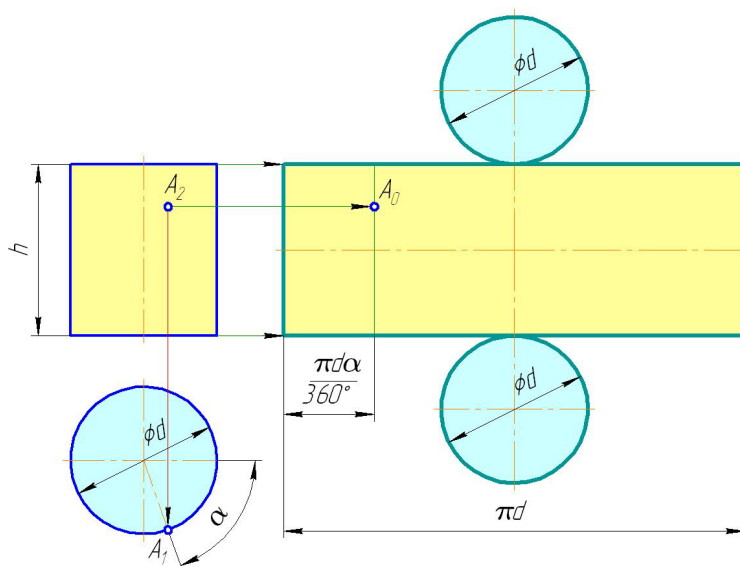


Рисунок 5.7 – Розгортка циліндра

Поверхня прямого кругового конуса розгортається у сектор кола із центром у вершині  $S$  конуса. Радіус сектора дорівнює довжині  $l$  твірної лінії конуса; кут  $\varphi = 180^\circ \cdot d/l$ , де  $d$  – діаметр основи конуса (рис. 5.8). Розгортка конуса за необхідності доповнюється основою – колом діаметром  $d$ . Для визначення точки  $A$  на розгортці прямого кругового конуса застосовується *спосіб твірної лінії*. Визначається кут  $\alpha$  і будується твірна лінія на розгортці, положення якої визначається кутом  $\beta = 0,5\alpha d/l$ . Точка  $A_0$  розташована на відстані  $S_0A_0$ , яка дорівнює натуральній величині  $S_2A_2$  відрізка  $SA$ .

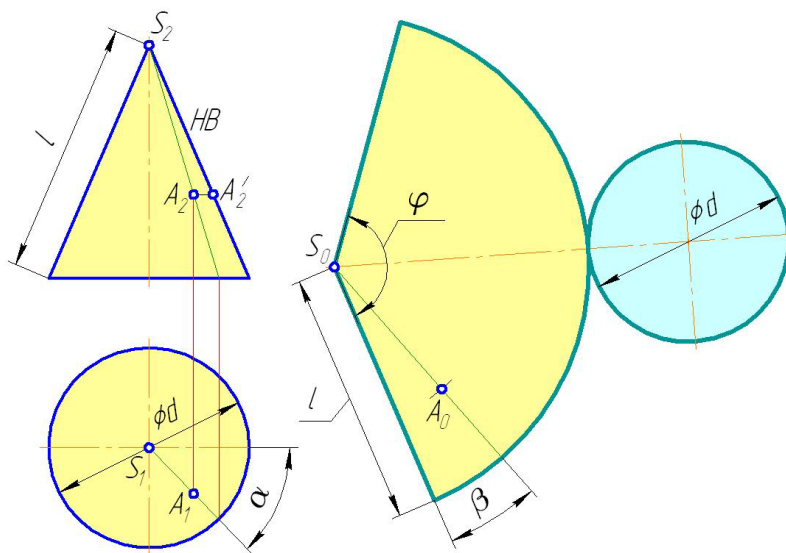


Рисунок 5.8 – Розгортка конуса

## 5.4 НАБЛИЖЕНЕ І УМОВНЕ РОЗГОРТАННЯ КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

### 5.4.1 СПОСІБ АПРОКСИМУЮЧИХ ПОВЕРХОНЬ

#### 5.4.1.1 СПОСІБ ПРИЗМАТИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Розгортка будь-якої поверхні, яка розгортається (окрім прямих кругових конуса і циліндра) будується наближено. Це відбувається унаслідок того, що при розгортанні кривої поверхні її апроксимують гранями вписаних багатогранників (рис. 5.9). Наприклад, циліндрична поверхня умовно замінюється призмою (рис. 5.9 а), конічна поверхня – пірамідою (рис. 5.9 б).

Для побудови наближеної розгортки циліндричної поверхні застосовується спосіб призматичних поверхонь.

#### *Суть способу призматичних поверхонь*

У циліндричну поверхню вписується призма, кількість граней якої прямо впливає на точність побудови розгортки циліндра. Будується розгортка цієї призми способом нормального перерізу або розкочування (див. п. 5.2.2 – 5.2.3). Через точки на розгортці призми проводяться плавні криві, які є контуром наближеної розгортки циліндра. За необхідності розгортка циліндра доповнюється нижньою і верхньою основами.

На рис. 5.10 зображене комплексне креслення еліптичного циліндра, поверхня якого апроксимується дванадцятигранною призмою. Розгортка останньої будується способом розкочування. Через точки  $1_0 - 12_0$ ,  $1'_0 - 12'_0$  проводяться плавні криві (синусоїди), які утворюють контур розгортки циліндра. Розгортка доповнюється нижньою і верхньою основами циліндра.

#### 5.4.1.2 СПОСІБ ПІРАМІДАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

Спосіб пірамідальних поверхонь застосовується для побудови розгортки бокової поверхні конуса.

#### *Суть способу пірамідальних поверхонь*

У конічну поверхню вписується піраміда. Будується наближена розгортка цієї піраміди способом натуральних граней (див. п. 5.2.1). Через точки на розгортці піраміди проводиться плавна крива, яка є контуром розгортки конуса. За необхідності розгортка конуса доповнюється його основою.

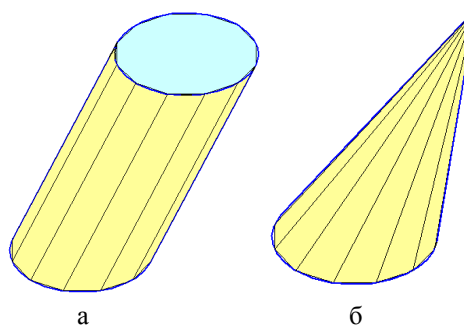


Рисунок 5.9 – Апроксимація тіла обертання багатогранником

---

*Апроксимація (від англ. approximation – наближення) – науковий метод, який полягає у заміні одних об'єктів іншими, більш простими, наближеними до оригіналу.*

*Необхідно розрізняти такі поняття, як наближена і умовна розгортка. Наближена розгортка стосується поверхонь, які розгортаються. Умовна розгортка будується для поверхонь, які не розгортаються.*

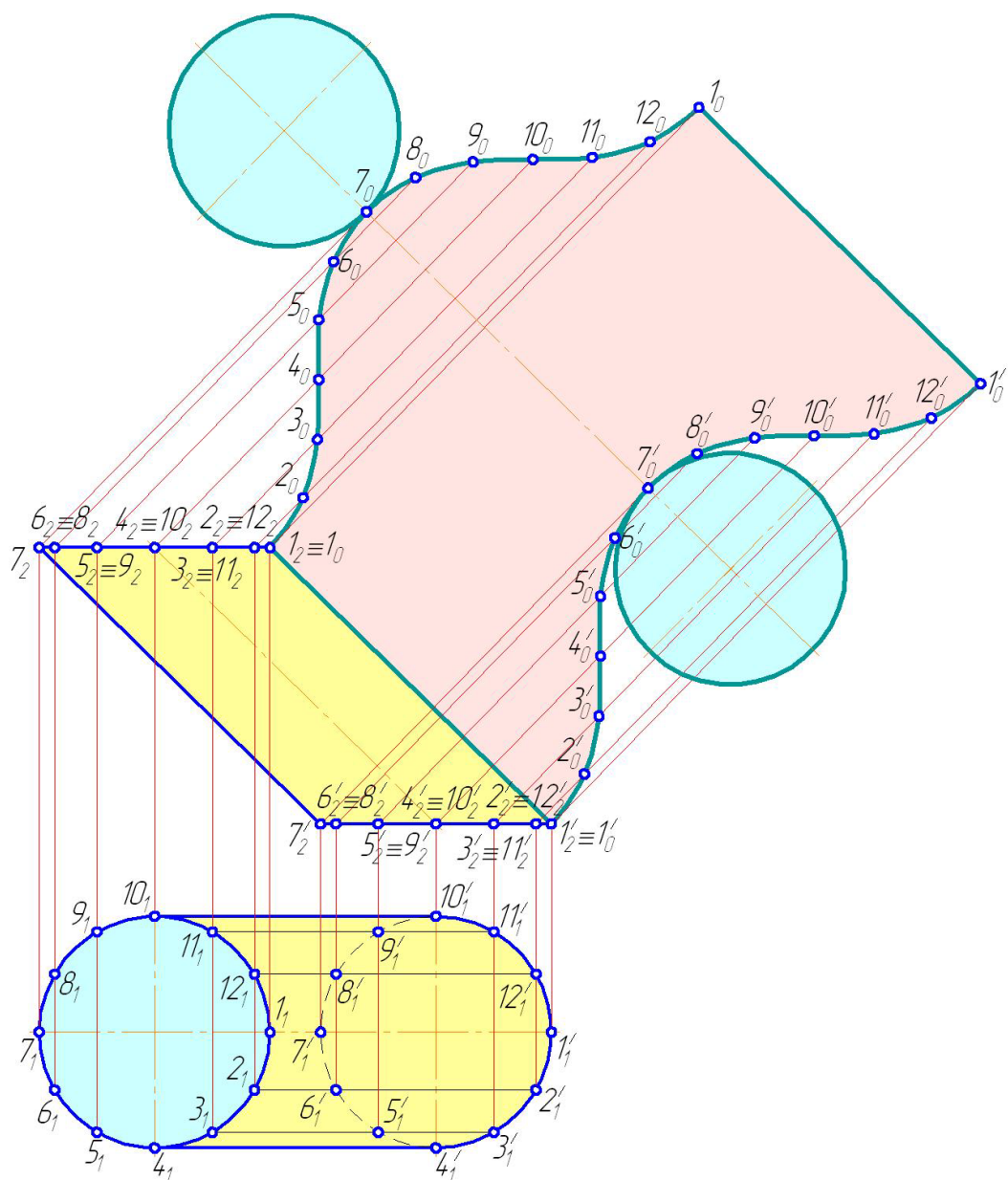


Рисунок 5.10 – Розгортка еліптичного циліндра

На рис. 5.11 зображене комплексне креслення еліптичного конуса, поверхня якого апроксимується дванадцятигранною пірамідою. Розгортка останньої будується способом натуральних граней. Через точки  $1_0 - 12_0$  проводиться плавна крива, яка утворює контур розгортки конуса. Розгортка доповнюється основою конуса.

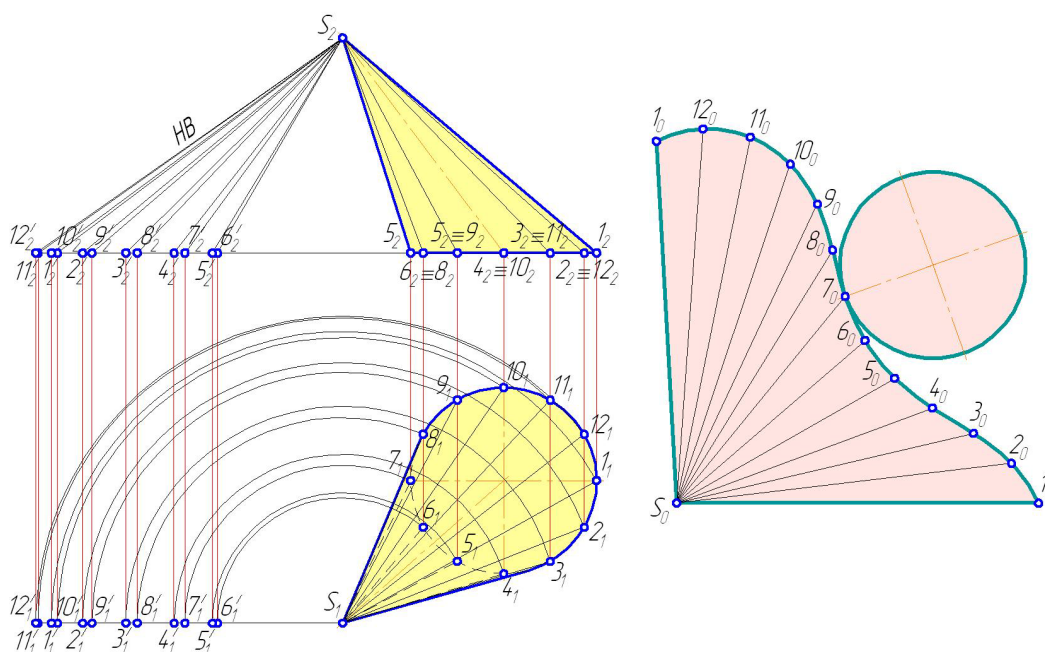


Рисунок 5.11 – Розгортка еліптичного конуса

### 5.4.1.3 СПОСІБ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Для поверхонь, які не розгортаються, у тому числі нелінійчатих, будуються умовні розгортки. Основні способи побудови умовних розгортки такі:

- а) спосіб циліндричних поверхонь;
- б) спосіб конічних поверхонь;
- в) метод триангуляції.

*Суть способу циліндричних поверхонь*

Крива поверхня описується сукупністю циліндричних поверхонь, які у подальшому розгортаються і суміщаються за точками і лініями. Отримана розгортка є умовною розгорткою кривої поверхні.

На рис. 5.12 побудована умовна розгортка сфери. Навколо її поверхні описуються шість однакових циліндричних поверхонь. Одна з таких поверхонь має твірні лінії  $1^1-5^5$ . Довжини цих твірних дорівнюють довжинам їх горизонтальних проєкцій  $1^1_1-5^5_1$ . Відстані між твірними однакові і дорівнюють довжині дуги  $SA$ , тобто довжині фронтальної проєкції  $S_2A_2$ . Розгорткою однієї із шести циліндричних поверхонь є фігура у формі пелюстки, контур якої проходить через кінці  $1_0-5_0, 1^1_0-5^5_0$  твірних ліній, віддалених одна від одної на однакову відстань, яка дорівнює довжині дуги  $S_2A_2$ . Додаючи до отриманої частини ще п'ять, будується умовна розгортка сфери.

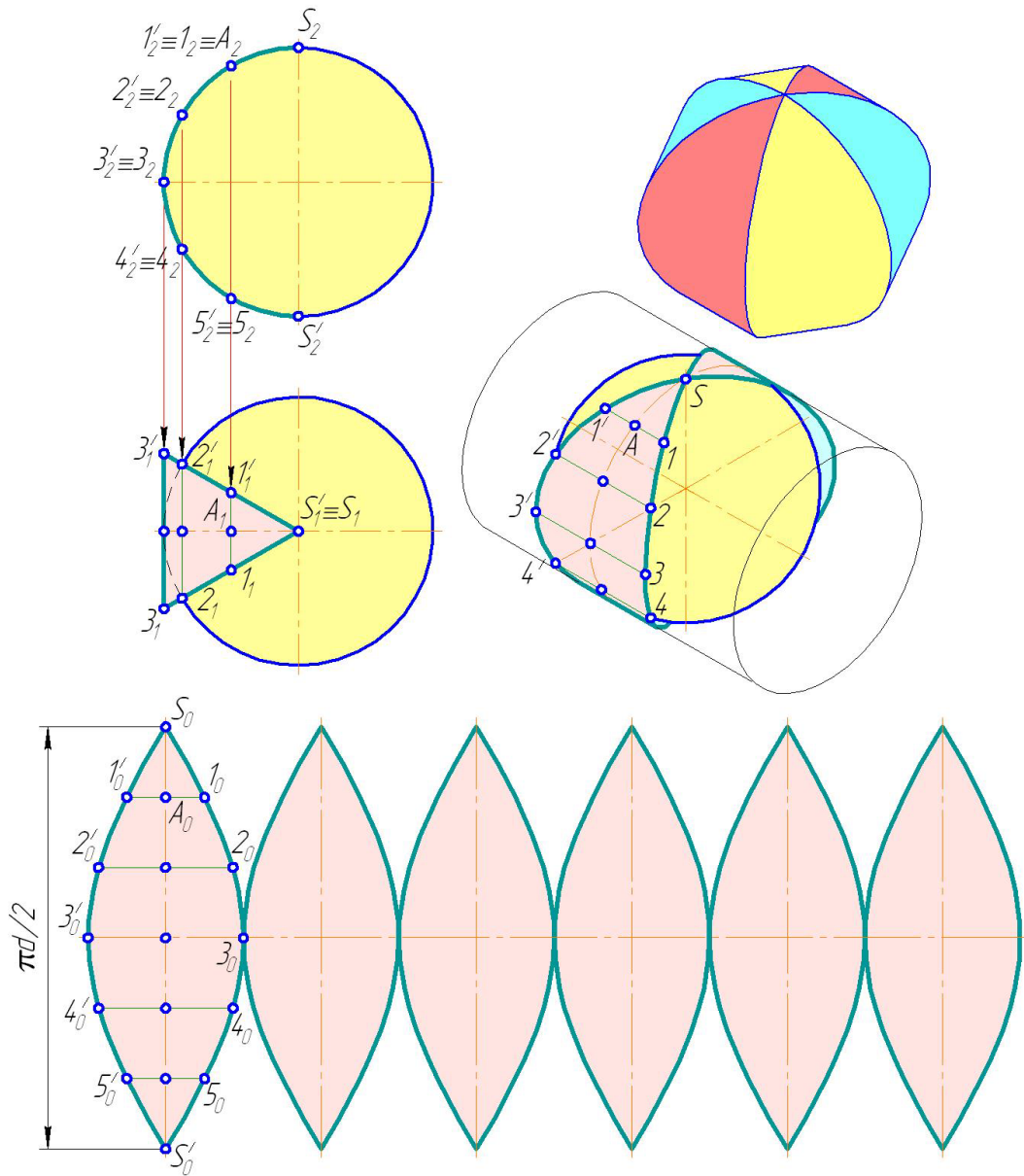


Рисунок 5.12 – Умовна розгортка сфери

На рис. 5.13 побудована умовна розгортка відкритого тора. Навколо його поверхні описуються дванадцять однакових циліндричних поверхонь. Одна з таких поверхонь має твірні лінії  $1^1 - 8^8$ . Довжини цих твірних дорівнюють довжинам їх фронтальних проєкцій  $1^2_2 - 8^2_2$ . Відстані між твірними однакові і дорівнюють довжині дуги  $SA$ , тобто довжині горизонтальної проєкції  $S_1A_1$ . Розгорткою однієї із дванадцяти циліндричних поверхонь є фігура, контур якої проходить через кінці  $1_0 - 8_0$ ,  $1'_0 - 8'_0$  твірних ліній, віддалених одна від одної на однакову відстань, яка дорівнює довжині дуги  $S_1A_1$ . Додаючи до отриманої частини ще одинадцять, будувється умовна розгортка тора.

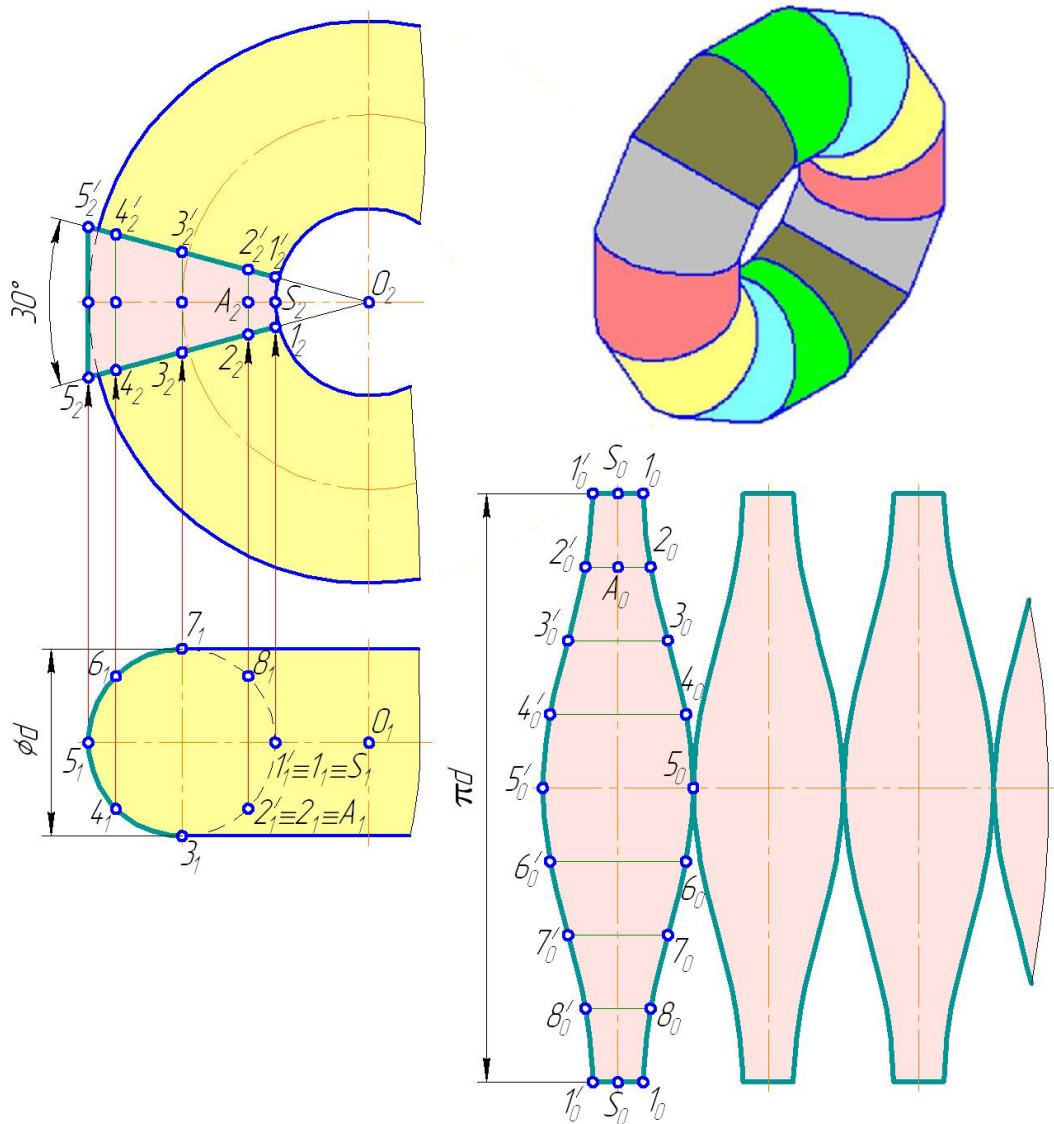


Рисунок 5.13 – Умовна розгортка відкритого тора

#### 5.4.1.4 СПОСІБ КОНІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Спосіб конічних поверхонь застосовується для побудови умовних розгорток закритих тіл обертання (еліпс, параболоїд, еліпсоїд, двопорожнинний гіперболоїд, закритий тор тощо).

*Суть способу конічних поверхонь*

Сегменти поверхні описуються сукупністю конічних поверхонь, які розгортаються і суміщаються за точками і лініями. Отримана розгортка є умовною розгорткою кривої поверхні.



На рис. 5.14 побудована умовна розгортка сфери. Навколо її поверхні описуються одна циліндрична і шість конічних поверхонь із різними вершинами  $S^{(1)} - S^{(6)}$ . Довжини твірних ліній  $1'1, 1-2, 2-3, 3-4, 1'2', 2'3', 3'4'$  однакові і дорівнюють довжині проекції  $1'2_2$ . Кути і радіуси розгортання конусів визначаються, як зазначено у п. 5.3.

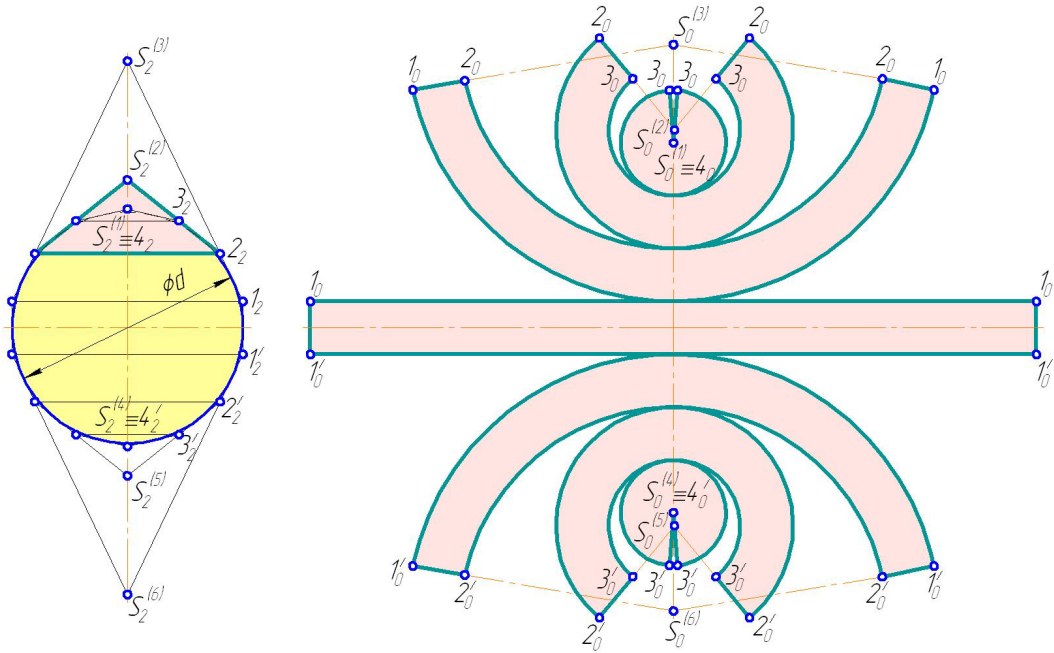


Рисунок 5.14 – Умовна розгортка сфери

На рис. 5.15 побудована умовна розгортка еліпсоїда. Навколо його поверхні описуються одна циліндрична і шість конічних поверхонь із різними вершинами  $S^{(1)} - S^{(6)}$ . Довжини твірних ліній  $1'1, 1-2, 2-3, 3-4, 1'2', 2'3', 3'4'$  можуть бути різними і визначаються за їх фронтальними проекціями. Кути і радіуси розгортання конусів визначаються, як зазначено у п. 5.3.

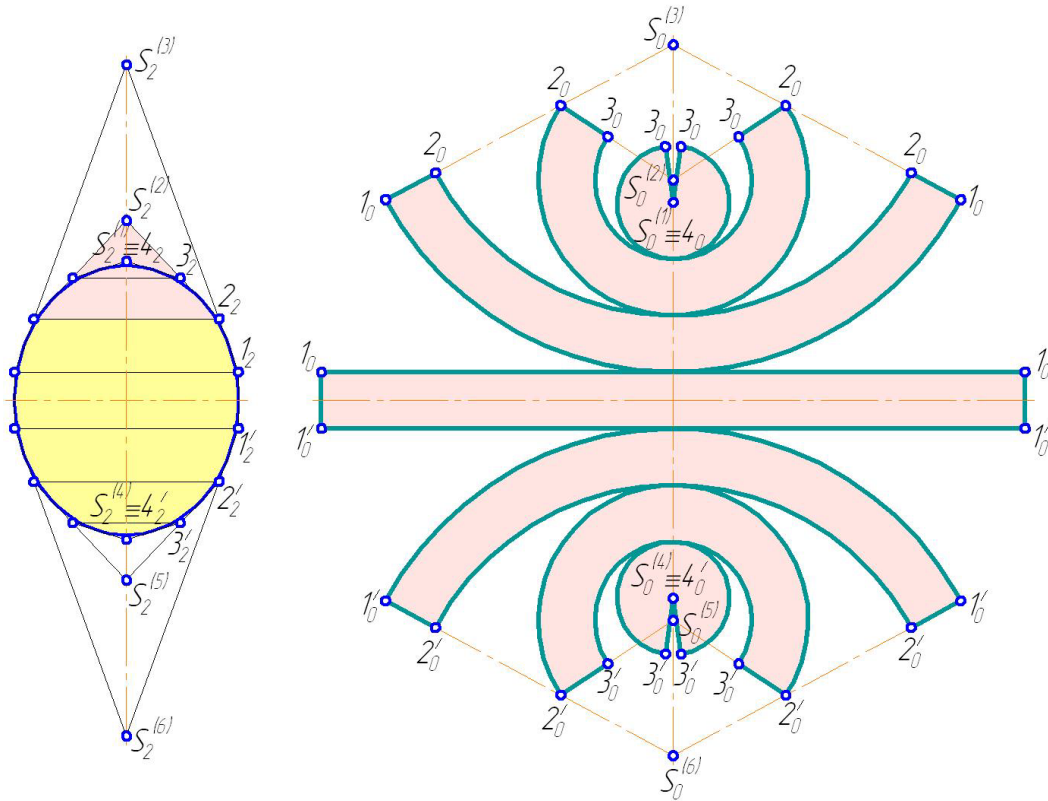


Рисунок 5.15 – Умовна розгортка еліпсоїда

### 5.4.2 МЕТОД ТРИАНГУЛЯЦІЇ

Метод триангуляції (від англ. *triangle* – трикутник) застосовується для розгортання багатогранників, наближеного розгортання циліндричних і конічних поверхонь та поверхонь із ребром повернення (торсів), а також умовного розгортання поверхонь, які не розгортаються.

#### Суть методу триангуляції

Крива поверхня розбивається на трикутники зі спільними сторонами. Натуральні величини цих трикутників сполучаються за спільними сторонами. Зовнішній контур отриманої плоскої фігури є наближеною або умовною розгорткою заданої кривої поверхні.

На рис. 5.16 побудована наближена розгортка торса  $\Phi$ . Останній розбивається сукупністю трикутників із вершинами 1, 2, ..., які належать ребру повернення  $m$  і одній із ліній  $l$  поверхні  $\Phi$ . Натуральні величини сторін 1–2, 2–3, ... трикутників визначаються способом обертання навколо проєкціовальної осі. За знайденими відрізками будуються натуральні величини трикутників 1–2–3, 2–3–4, ..., що сполучаються за спільними сторонами. Контур отриманої плоскої фігури є наближеною розгорткою торса  $\Phi$ .

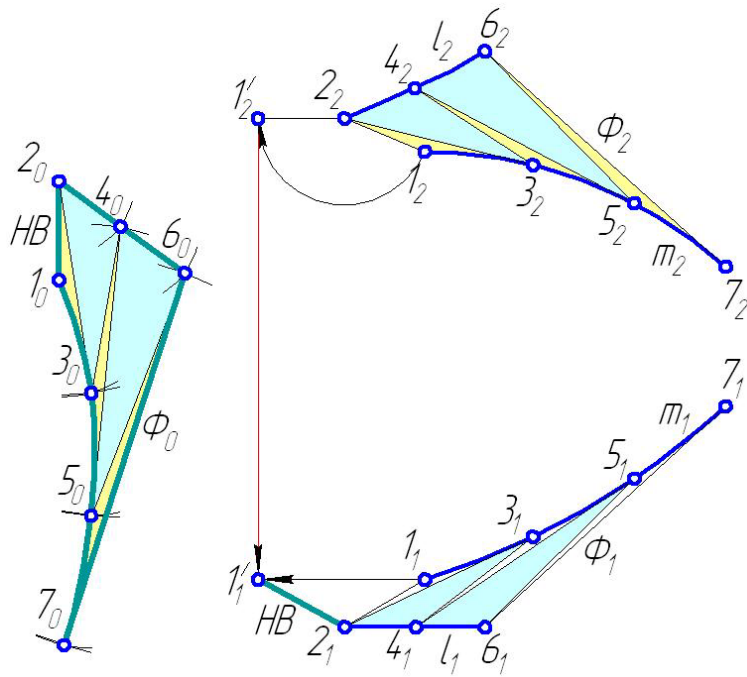


Рисунок 5.16 – Наближена розгортка тора

На рис. 5.17 побудована наближена розгортка поверхні довільного просторового тіла. Його поверхня розбивається на трикутники, сторони яких побудовані за точками 1, 2, ..., A, B, ..., які належать відповідно верхній і нижній основам тіла. Натуральні величини сторін трикутників визначаються способом обертання навколо горизонтально-проєціювальних осей, які проходять через точки B, C. За знайденими відрізками будуються натуральні величини трикутників, що сполучаються за спільними сторонами. Контур отриманої плоскої фігури є наближеною розгорткою поверхні тіла.

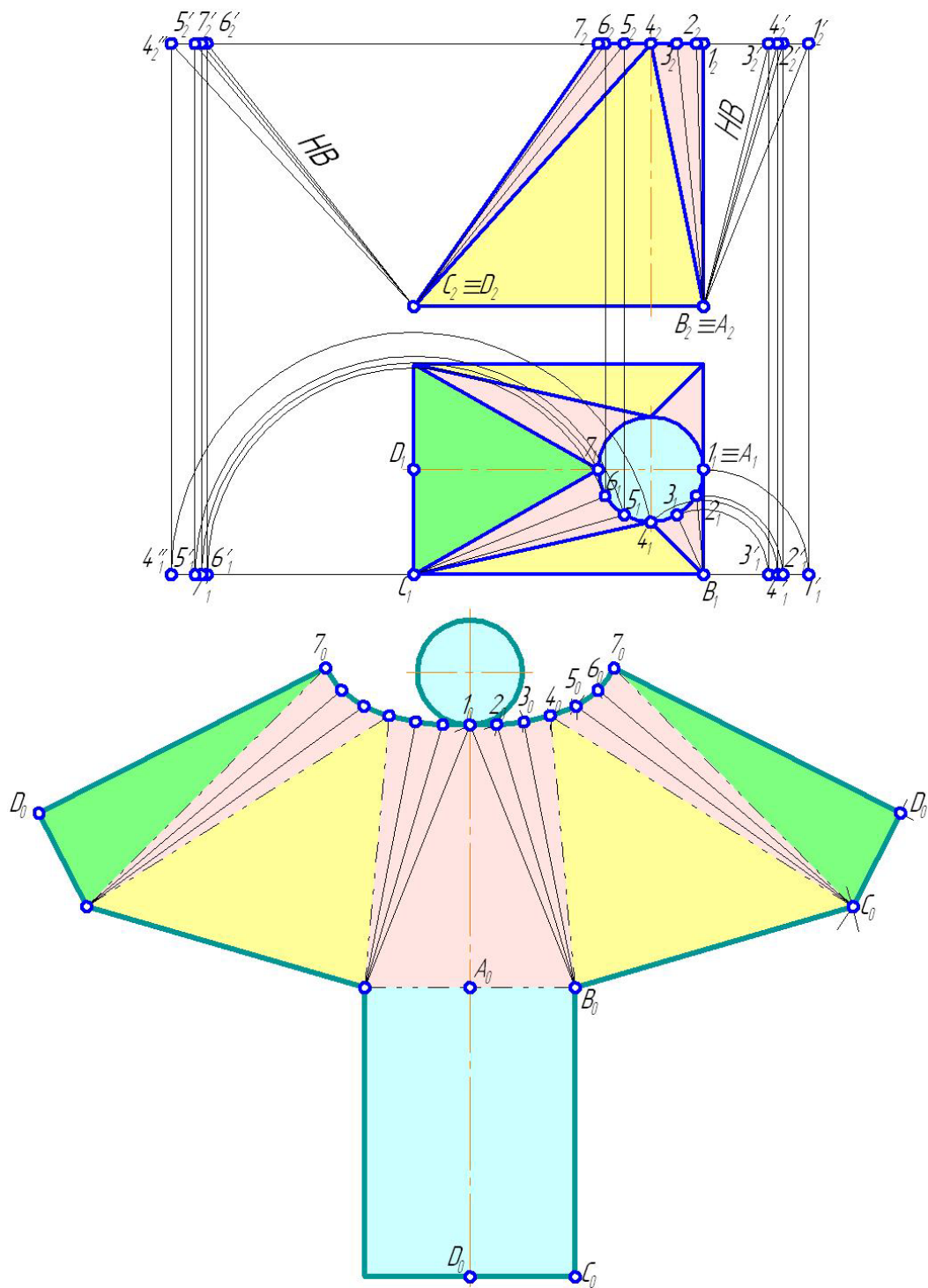
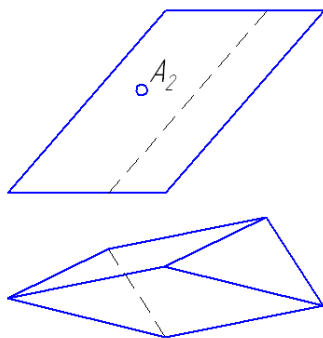


Рисунок 5.17 – Розгортка поверхні тіла методом триангуляції

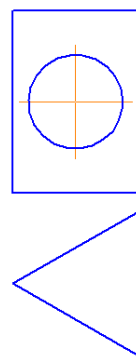
### ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Побудуйте розгортку тетраедра з ребрами довжиною 40 мм.



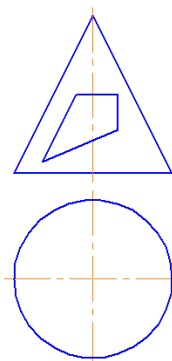
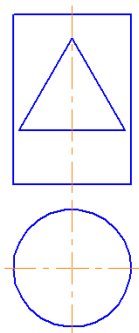
2. Побудуйте розгортку призми. Позначте на розгортці точку  $A$ .

3. Побудуйте розгортку призми із круглим отвором.



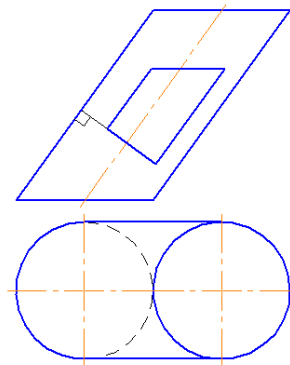
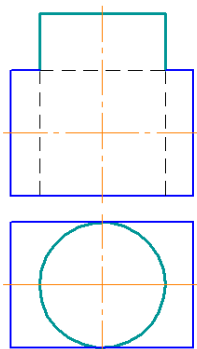
4. Побудуйте розгортку циліндра із призматичним отвором.

5. Побудуйте розгортку конуса із призматичним вирізом.

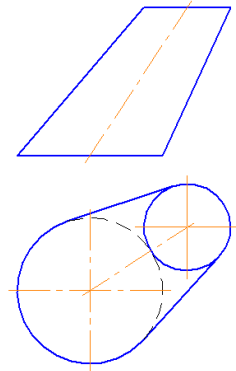


6. Побудуйте розгортку верхньої частини вертикального циліндра, який перетинається з іншим циліндром.

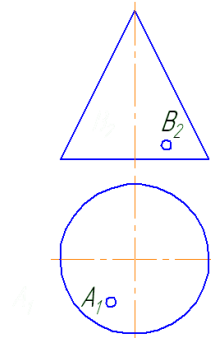
7. Побудуйте наближену розгортку циліндра із призматичним отвором.



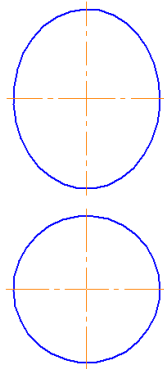
8. Побудуйте наближену розгортку зрізаного конуса.



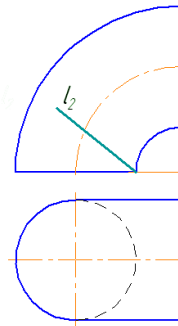
9. Побудуйте наближену розгортку конуса і проєкції геодезичної лінії  $AB$ .



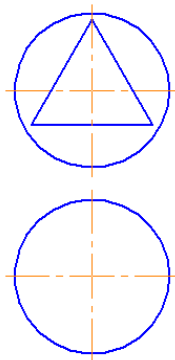
10. Побудуйте умовну розгортку еліпсоїда способом конічних поверхонь.



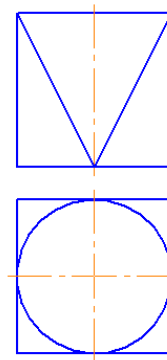
11. Побудуйте умовну розгортку чверті тора. Позначте на розгортці лінію  $l$ , яка належить поверхні тора.



12. Побудуйте умовну розгортку сфери із призматичним отвором.



13. Побудуйте наближену розгортку тіла.



### ***ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ***

1. Що називається розгорткою поверхні?
2. Які поверхні розгортаються?
3. Які властивості має розгортка поверхні?
4. Яка лінія називається геодезичною? Яка її властивість і сфера застосування?
5. Якими способами розгортається поверхня багатогранника?
6. У яких випадках застосовується спосіб нормального перерізу при розгортанні багатогранника?
7. У яких випадках застосовується спосіб розкочування при розгортанні багатогранника?
8. Як будується розгортка прямого кругового циліндра?
9. Як будується розгортка прямого кругового конуса?
10. Якими способами визначається положення точки поверхні на її розгортці?
11. Якими способами будуються наближені розгортки поверхонь, що розгортаються? Наведіть приклади.
12. Опишіть алгоритм способу призматичних поверхонь.
13. Опишіть алгоритм способу пірамідальних поверхонь.
14. Якими способами будуються умовні розгортки поверхонь, які не розгортаються?
15. Опишіть алгоритм способу циліндричних поверхонь.
16. Опишіть алгоритм способу конічних поверхонь.
17. Опишіть алгоритм способу тріангуляції?
18. Для яких поверхонь спосіб тріангуляції дозволяє будувати наближені розгортки?
19. Для яких поверхонь спосіб тріангуляції дозволяє будувати умовні розгортки?

## РОЗДІЛ 6 АКСОНОМЕТРИЧНЕ ПРОЕЦІЮВАННЯ

### 6.1 ВИДИ АКСОНОМЕТРИЧНОГО ПРОЕЦІЮВАННЯ

Метод ортогонального проєціювання на взаємно перпендикулярні площини проєкцій  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  має суттєвий недолік, який полягає у тому, що уявлення просторового образу предмета можливе лише за умови одночасного вивчення принаймні двох його проєкцій. Спосіб аксонометричного проєціювання усуває зазначений недолік, даючи можливість одночасно бачити зображення предмета з двох або трьох сторін.

Аксонометричне проєціювання (від грецького *ἀξονας* – вісь і *μετρο* – міра) – спосіб зображення геометричних предметів за допомогою паралельного проєціювання на площину  $\Pi'$  загального положення. Ця площина називається *картинною*.

При аксонометричному проєціюванні предмет проєціюється на картинну площину  $\Pi'$  разом з осями  $x, y, z$  ортогональної системи координат. Останні проєкуються на картинну площину  $\Pi'$  в осі аксонометричного проєціювання  $x', y', z'$  (рис. 6.1 а).

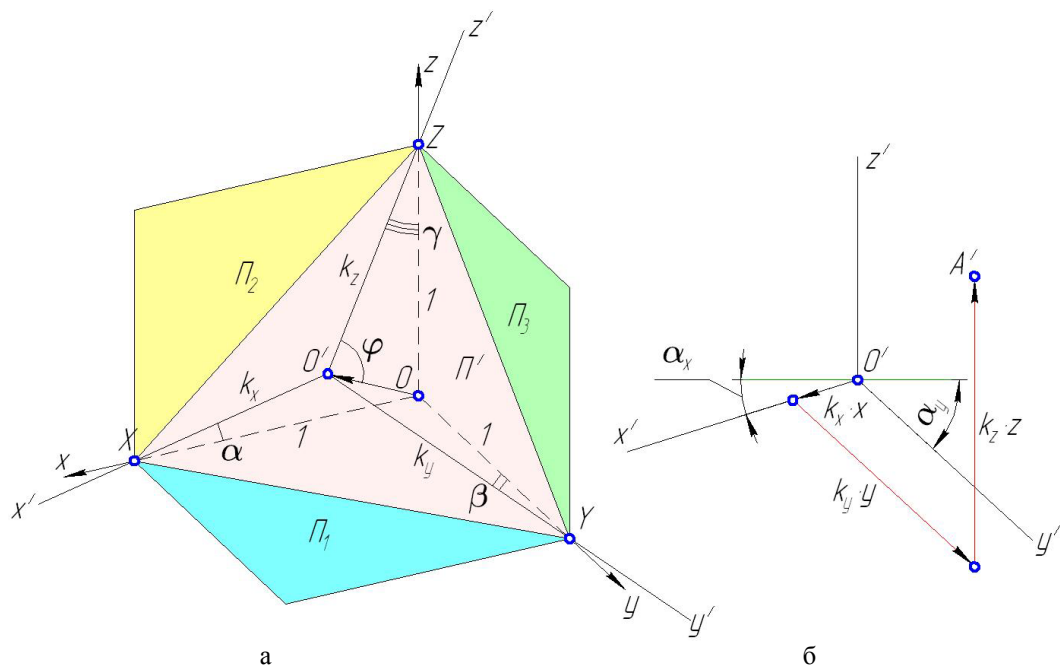


Рисунок 6.1 – Спосіб аксонометричного проєціювання

Одиничні відрізки  $OX, OY, OZ$  проєкуються на  $\Pi'$  у відрізки  $O'X', O'Y', O'Z'$ , довжина яких менша за одиницю, тому аксонометрична проєкція будь-якого об'єкта є спотвореною



за трьома координатними осями. Ступінь зменшення характеризується *коефіцієнтами спотворення*  $k_x, k_y, k_z$ , числові значення яких дорівнюють довжинам проєкцій  $O'X, O'Y, O'Z$  одиничних відрізків  $OX, OY, OZ$  на картинну площину. Коефіцієнти  $k_x, k_y, k_z$  є основними параметрами аксонометричного проєціювання. Вони дорівнюють косинусам кутів  $\alpha, \beta, \gamma$  нахилу осей  $x, y, z$  до площини  $\Pi'$ . Крім того, коефіцієнти спотворення пов'язані між собою співвідношенням

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi, \quad (6.1)$$

де  $\varphi$  – кут аксонометричного проєціювання.

Кути  $\alpha_x, \alpha_y$  нахилу осей  $x', y'$  до горизонту (рис. 6.1 б) залежать від кута  $\varphi$  і коефіцієнтів  $k_x, k_y, k_z$  (див. п. 6.2 – 6.3).

Види аксонометричного проєціювання обумовлені числовим значенням кута  $\varphi$  проєціювання і співвідношеннями коефіцієнтів спотворення  $k_x, k_y, k_z$  (рис. 6.2).

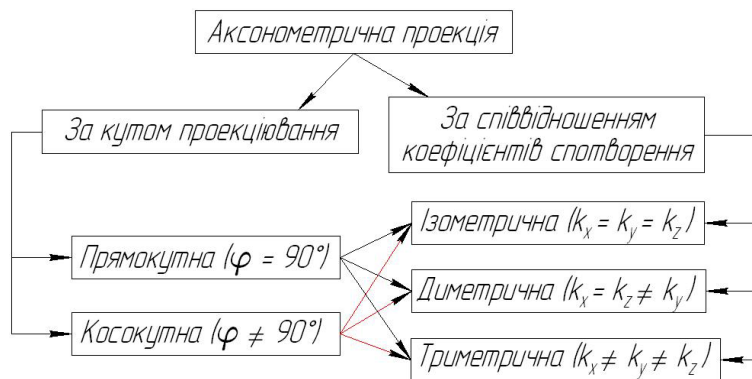


Рис. 6.2 – Класифікація аксонометричних проєкцій

На рис. 6.1 б показано спосіб побудови аксонометричної проєкції точки  $A$  із координатами  $x, y, z$ . Для її побудови з початку відріку  $O'$  уздовж осі  $x'$  відкладається відрізок довжиною  $k_x \cdot x$ . З отриманої точки паралельно осі  $y'$  проводиться відрізок довжиною  $k_y \cdot y$ . З отриманої точки проводиться вертикальний відрізок довжиною  $k_z \cdot z$ . Отримана точка  $A'$  є шуканою аксонометричною проєкцією точки  $A$ .

З усієї множини аксонометричних проєкцій на практиці застосовуються переважно такі:

- прямокутна ізометрія (див. п. 6.2.1);
- прямокутна диметрія (див. п. 6.2.2);
- косокутна горизонтальна ізометрія (див. п. 6.3.1);
- косокутна фронтальна ізометрія (див. п. 6.3.1);
- косокутна фронтальна диметрія (див. п. 6.3.2).

Ці види аксонометричного проєціювання широко застосовуються у машинобудуванні, будівництві й архітектурі.

## 6.2 ПРЯМОКУТНЕ АКСОНОМЕТРИЧНЕ ПРОЄЦІЮВАННЯ

### 6.2.1 ПРЯМОКУТНА ІЗОМЕТРІЯ

Для прямокутних аксонометричних проєкцій ( $\varphi = 90^\circ$ ) із формули (6.1) маємо основне співвідношення

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2. \quad (6.2)$$

Кути  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  нахилу осей  $x'$ ,  $y'$  до горизонту (рис. 6.1 б) визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= 90^\circ - \arccos[(1 - k_x^2)^{1/2}(1 - k_z^2)^{1/2}/(k_y k_z)], \\ \alpha_y &= 90^\circ - \arccos[(1 - k_y^2)^{1/2}(1 - k_z^2)^{1/2}/(k_x k_z)]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

*Прямокутна ізометрія* (від грецького *ізоμετρία* – сумірність) – вид прямокутного аксонометричного проєціювання, в якому коефіцієнти спотворення  $k$  за осями однакові.

Із формули (6.2) для випадку  $k_x = k_y = k_z = k$  маємо  $3k^2 = 2$ , звідки  $k = (2/3)^{1/2} \approx 0,816$ . При цьому за формулами (6.3) кути  $\alpha_x = \alpha_y = 30^\circ$  (рис. 6.3).

На практиці з метою спрощення коефіцієнти  $k$  умовно вважають такими, що дорівнюють одиниці ( $k = 1$ ). Це призводить до того, що всі дійсні розміри геометричних об'єктів збільшуються на 23 % ( $1/0,816 = 1,23$ ).

На рис. 6.4 б побудована прямокутна ізометрія призми, комплексне креслення якої подане на рис. 6.4 а.

Для побудови аксонометричної проєкції геометричного об'єкта зручно ввести *локальну систему координат* (від англ. *local – місцевий*) – систему координат, пов'язану із заданим тілом. Наприклад, на рис. 6.4 а обрана локальна ортогональна система координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  із центром  $O$ , який збігається із геометричним центром основи (п'ятикутника) призми.

На рис. 6.5 а–е побудовані точні і наближені прямокутні ізометричні проєкції кіл горизонтального, фронтального і профільного рівнів. Наприклад, прямокутною ізометрією кола горизонтального рівня діаметром  $d$  є еліпс із горизонтальною віссю  $AA'$  довжиною  $1,22d$  і вертикальною віссю  $BB'$  довжиною  $0,71d$ . Цей еліпс вписаний у ромб із кутами при вершинах  $60^\circ, 120^\circ$ .

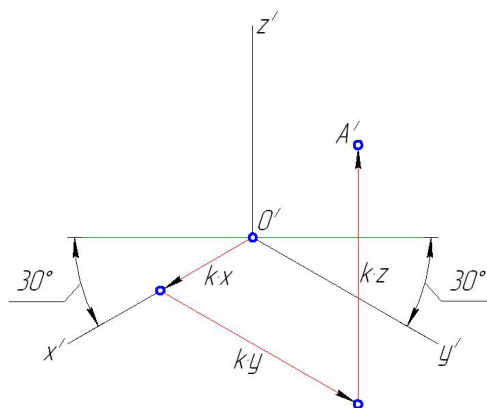


Рисунок 6.3 – Прямокутна ізометрія

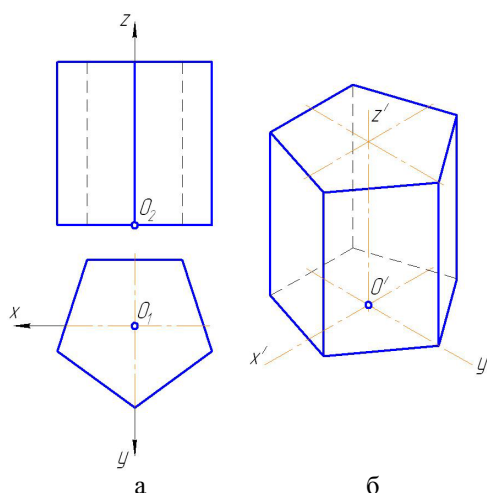


Рисунок 6.4 – Прямокутна ізометрія призми

Довжини усіх сторін ромба дорівнюють діаметру  $d$  заданого кола. На практиці шуканий еліпс замінюється овалом (рис. 6.5 г), побудованим так. Будується коло діаметром  $d$  із центром на початку відріку  $O'$ . Визначаються точки  $C, C', D, D'$  перетину цього кола із осями  $x', y'$  аксонометричної системи координат. Визначаються точки  $E, E'$  перетину кола із віссю  $z'$ . Будуються точки  $F, F'$  перетину відрізків  $CE, DE$  із горизонтальною лінією, яка проходить через центр  $O'$  кола. Із точок  $E, E'$  проводяться дуги  $CD, C'D'$  радіусом  $ED'$ . Із точок  $F, F'$  проводяться дуги  $CC', DD'$  радіусом  $FD'$ . Отриманий овал  $CDD'C$  є наближеною ізометричною проєкцією кола горизонтального рівня. Довжина горизонтальної осі овала менша за відповідну вісь  $AA'$  еліпса на 6 %. Довжина вертикальної осі овала більша за відповідну вісь  $BB'$  еліпса на 4 %.

На рис. 6.5 б – в, д – е наведені точні і наближені прямокутні ізометричні проєкції кола фронтального і профільного рівнів. Відмінність цих проєкцій від проєкцій кола горизонтального рівня полягає у тому, що більша вісь еліпса (або овала) розміщена під кутом  $60^\circ$  до горизонту.

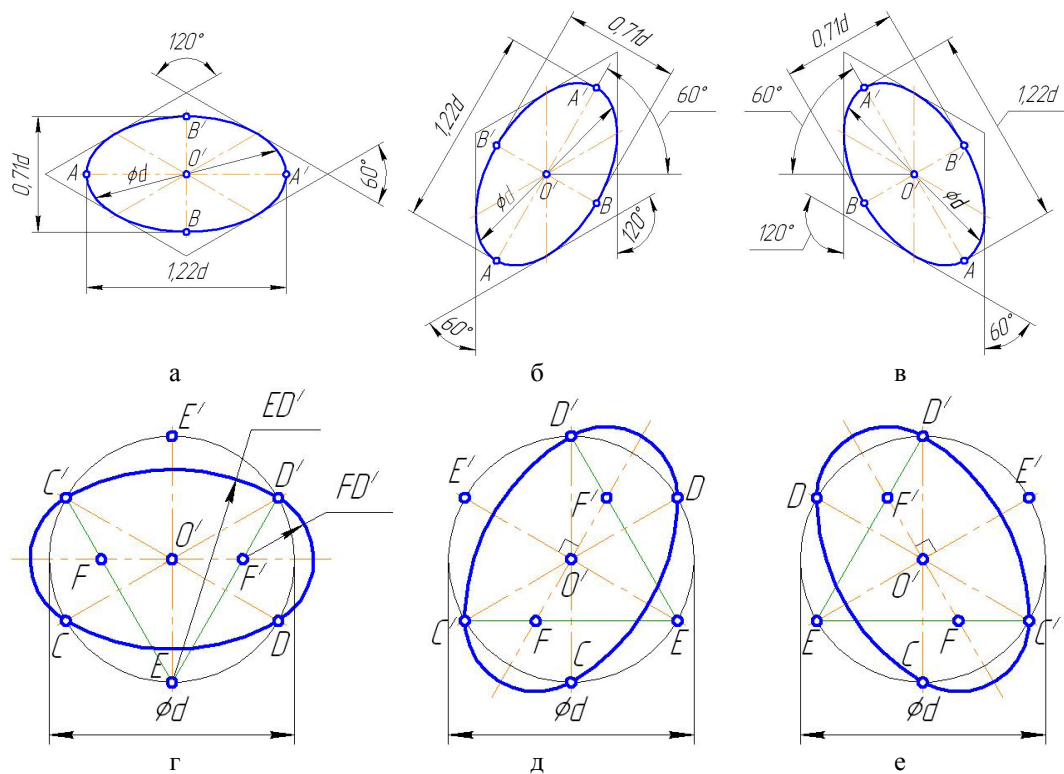


Рисунок 6.5 – Прямокутна ізометрія кола

### 6.2.2 ПРЯМОКУТНА ДИМЕТРІЯ

Прямокутна диметрія (від грецького *δυο* – два, *μετρο* – міра) – вид прямокутного аксонометричного проєціювання, в якому коефіцієнти спотворення  $k_x, k_z$  за осями  $x, z$  однакові ( $k_x = k_z = k$ ), а  $k_y$  по осі  $y$  удвічі менший ( $k_y = 0,5k$ ).

Із формули (6.2) для випадку  $k_x = 2k_y = k_z = k$  маємо  $2,25k^2 = 2$ , звідки  $k_x = k_z = k = (8/9)^{1/2} \approx 0,943$ ;  $k_y = 0,5k \approx 0,471$ . При цьому за формулами (6.3) кути  $\alpha_x = 7^\circ 11'$ ,  $\alpha_y = 41^\circ 25'$  (рис. 6.6). Ці кути зручно будувати так. Із точки  $O'$  вліво відкладається відрізок довжиною  $8l$ , де  $l$  – умовна довжина (довільне значення). Від отриманої точки вниз відкладається відрізок довжиною  $l$ . Через отриману точку і початок відріку  $O'$  проходить вісь  $x$ . Для побудови осі  $z$  із точки  $O'$  вправо відкладається відрізок довжиною  $8l$ . Від отриманої точки вниз відкладається відрізок довжиною  $7l$ . Через отриману точку і початок відріку  $O'$  проходить вісь  $z$  (рис. 6.7).

На практиці з метою спрощення коефіцієнти  $k$  умовно вважають такими, що дорівнюють одиниці за осями  $x, z$  і  $0,5$  по осі  $y$ . Це приводить до того, що всі дійсні розміри геометричних об'єктів збільшуються на 6% ( $1/0,943 = 1,06$ ;  $0,5/0,471 = 1,06$ ).

На рис. 6.8 б побудована прямокутна диметрія піраміди, комплексне креслення якої подане на рис. 6.8 а.

На рис. 6.9 а – е побудовані наближені прямокутні ізометричні проєкції кіл горизонтального, фронтального і профільного рівнів. Наприклад, прямокутною ізометрією кола горизонтального рівня діаметром  $d$  є еліпс із взаємно перпендикулярними осями  $AA', BB'$  довжиною відповідно  $1,06d, 0,35d$ . Цей еліпс вписаний у паралелограм зі сторонами  $d, 0,5d$ , нахиленими під кутами  $7^\circ 11', 41^\circ 25'$  до горизонту. На практиці шуканий еліпс замінюється овалом (рис. 6.9 г), побудованим у такий спосіб. Будується коло діаметром  $d$  із центром на початку відріку  $O'$ . Визначаються точки  $C, D'$  перетину цього кола із віссю  $x'$  аксонометричної системи координат. Точки  $C', D'$  відображаються симетрично щодо горизонтальної осі. Визначаються точки  $E, E'$  осі  $z'$ , віддалені від точок  $C, D'$  на відстань  $d$ . Будується точки  $F, F'$  перетину відрізків  $CE', DE'$  із горизонтальною лінією, яка проходить через центр  $O'$  кола.

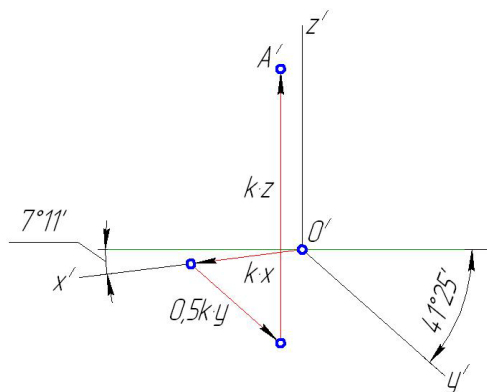


Рисунок 6.6 – Прямокутна диметрія

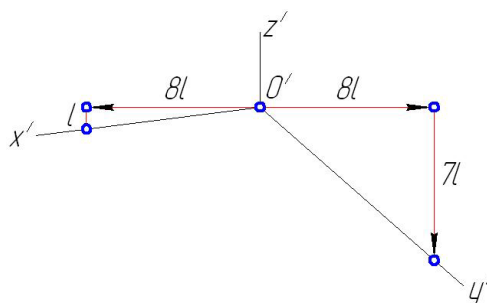


Рисунок 6.7 – Побудова осей координат

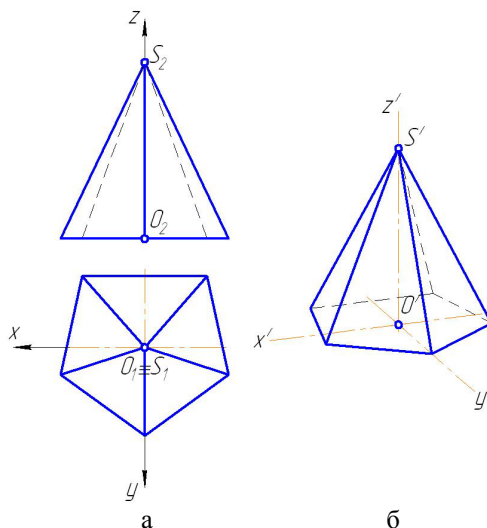


Рисунок 6.8 – Прямокутна диметрія піраміди

Із точок  $E, E'$  проводяться дуги  $CD, C'D'$  радіусом  $ED'$ . Із точок  $F, F'$  проводяться дуги  $CC', DD'$  радіусом  $FD'$ . Отриманий овал  $CDD'C$  є наближеною диметричною проєкцією кола горизонтального рівня. Довжина горизонтальної осі овала більша за відповідну вісь  $AA'$  еліпса на 4 %. Довжина вертикальної осі овала більша за відповідну вісь  $BB'$  еліпса на 10 %.

На рис. 6.9 б – в, д – е наведені прямокутні диметричні проєкції кола фронтального і профільного рівнів. Відмінність прямокутної диметрії кола фронтального рівня від проєкції кіл горизонтального і профільного рівнів полягає у тому, що паралелограм має однакові сторони довжиною  $d$ . Більша вісь овала на 1 % менша за більшу вісь еліпса; менша вісь овала більша за меншу вісь еліпса на 1 %.

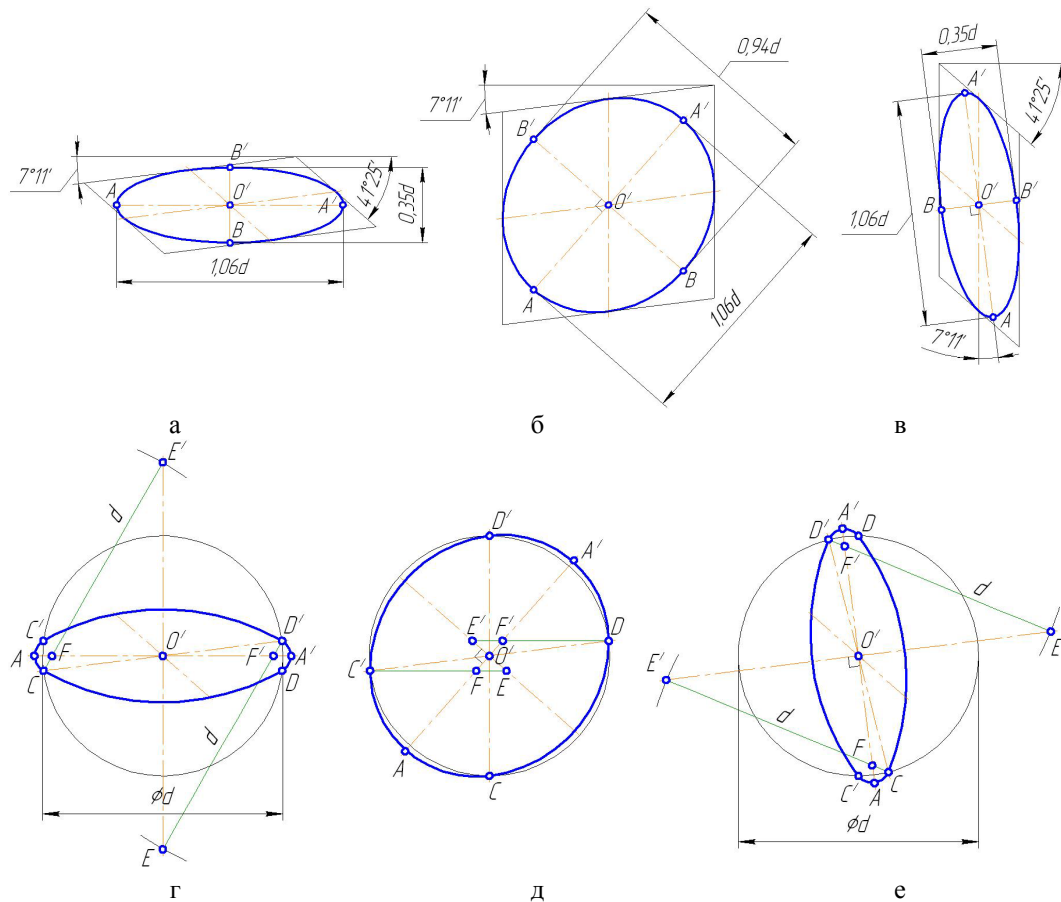


Рисунок 6.9 – Прямокутна диметрія кола

## 6.3 КОСОКУТНЕ АКСОНОМЕТРИЧНЕ ПРОЄЦІЮВАННЯ

### 6.3.1 КОСОКУТНА ІЗОМЕТРІЯ

Косокутна ізометрія – вид косокутного аксонометричного проєціювання, в якому коефіцієнти спотворення  $k$  за осями однакові. На практиці застосовують коефіцієнти  $k = 1$ .

Застосовуються такі види косокутної ізометрії:

а) горизонтальна ізометрія, для якої кути  $\alpha_x = 60^\circ$ ;  $\alpha_y = 30^\circ$ ;

б) фронтальна ізометрія, для якої кут  $\alpha_x = 0^\circ$ ,  $\alpha_y = 45^\circ$ .

На рис. 6.10 а – б показана косокутна горизонтальна ізометрія точки і призми, на рис. 6.11 а – в – кіл горизонтального, фронтального і профільного рівнів.

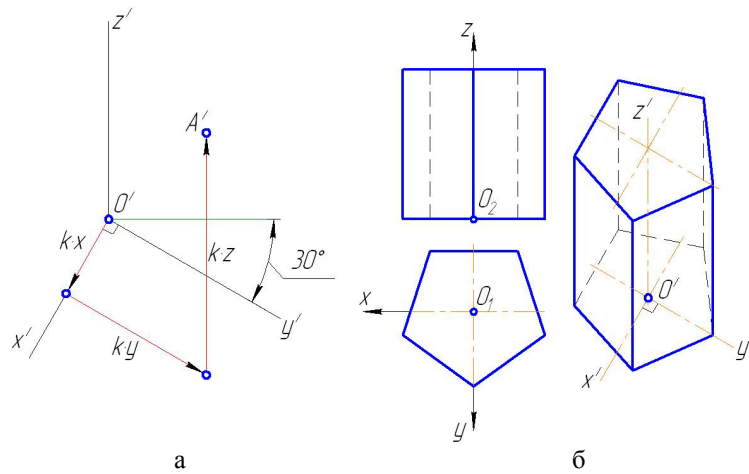


Рисунок 6.10 – Косокутна горизонтальна ізометрія

Косокутна горизонтальна ізометрія кола діаметром  $d$  горизонтального рівня є колом такого самого діаметра (рис. 6.11 а). Косокутні горизонтальні ізометрії кіл діаметром  $d$  фронтального і профільного рівнів є еліпсами, вписаними у ромби зі сторонами  $d$  (рис. 6.11 б – в).

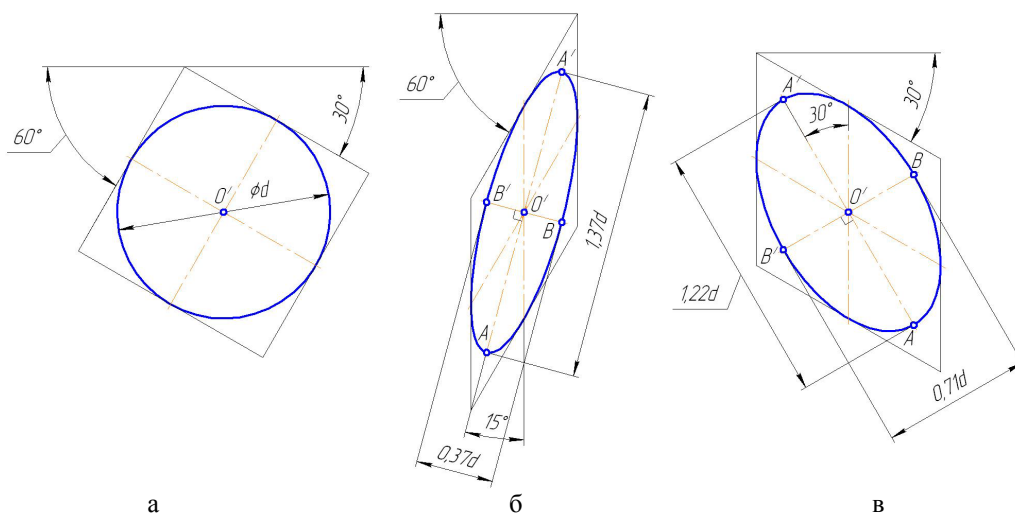
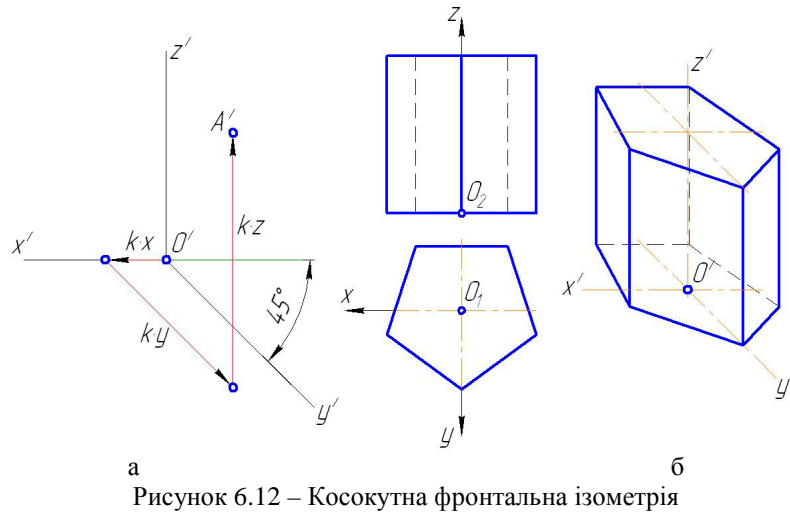


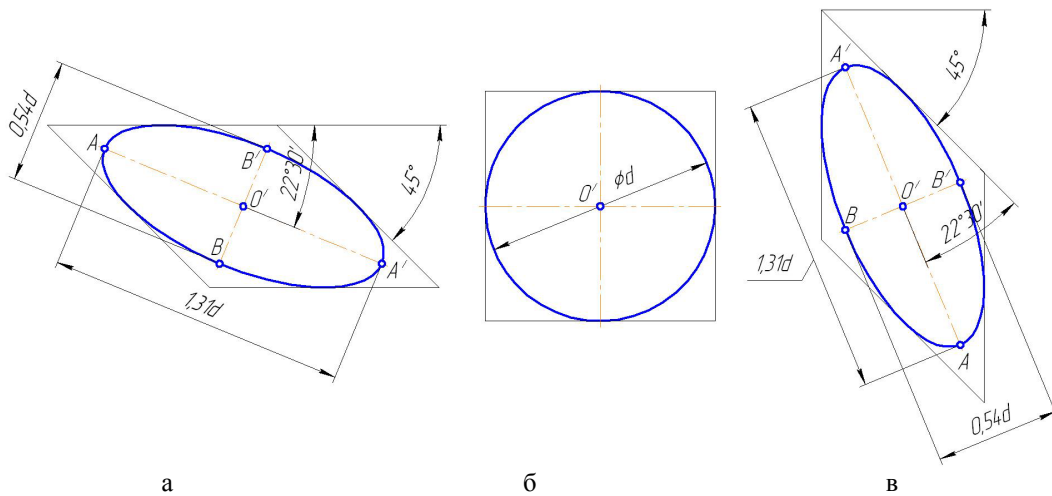
Рисунок 6.11 – Косокутна горизонтальна ізометрія кола

На рис. 6.12 а – б показана косокутна фронтальна ізометрія точки і призми, на рис. 6.13 а – в – кіл горизонтального, фронтального і профільного рівнів.

Косокутна фронтальна ізометрія кола діаметром  $d$  фронтального рівня є колом такого самого діаметра (рис. 6.13 б). Косокутні фронтальні ізометрії кіл діаметром  $d$  горизонтального і профільного рівнів є еліпсами, вписаними у ромби, сторони яких дорівнюють  $d$  (рис. 6.13 а, в).



а б  
Рисунок 6.12 – Косокутна фронтальна ізометрія



а б в  
Рисунок 6.13 – Косокутна фронтальна ізометрія кола

### 6.3.2 КОСОКУТНА ДИМЕТРІЯ

Косокутна диметрія – вид косокутного аксонометричного проєціювання, в якому коефіцієнти спотворення  $k$  по осях  $x, z$  однакові, а по осі  $y$  – удвічі менший ( $0,5k$ ). На практиці застосовують фронтальну диметрію, для якої  $k = 1$ , а кути  $\alpha_x = 0^\circ$ ;  $\alpha_y = 45^\circ$ .

На рис. 6.14 а – б показана косокутна фронтальна диметрія точки і призми, на рис. 6.15 а – в – кіл горизонтального, фронтального і профільного рівнів.

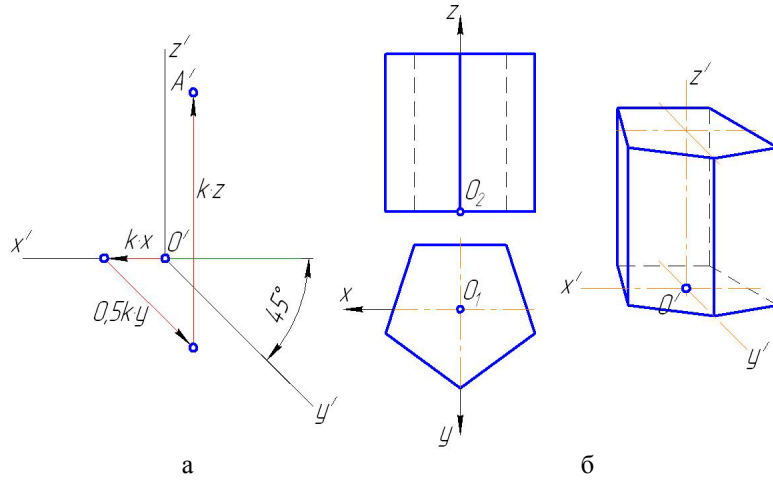


Рисунок 6.14 – Косокутна диметрія

Косокутна фронтальна диметрія кола діаметром  $d$  фронтального рівня є колом такого самого діаметра (рис. 6.15 б). Косокутні фронтальні диметрії кіл діаметром  $d$  горизонтального і профільного рівнів є еліпсами, вписаними у паралелограми зі сторонами  $d, d/2$  (рис. 6.15 а, в).

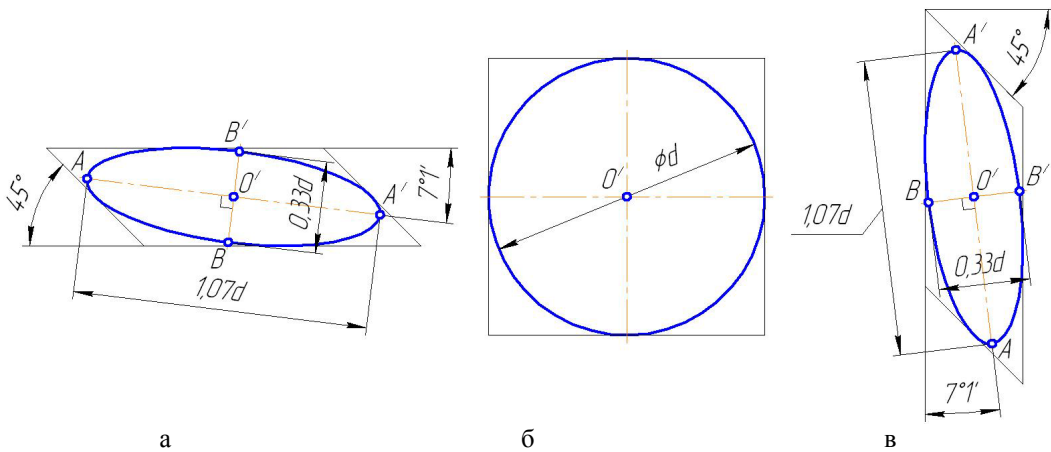


Рисунок 6.15 – Косокутна диметрія кола

Допускається побудова фронтальної диметрії із кутом  $\alpha_y = 30^\circ$ . На рис. 6.16 а – б показаний цей різновид косокутної фронтальної диметрії точки і призми, на рис. 6.17 а – в – кіл горизонтального, фронтального і профільного рівнів.



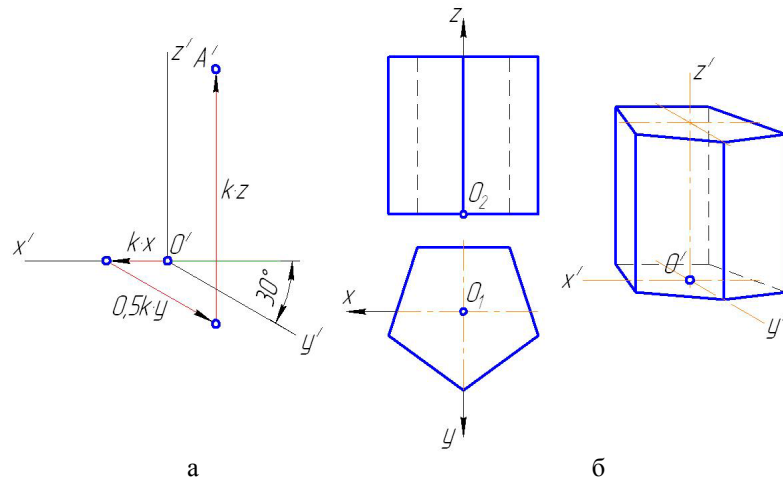


Рисунок 6.16 – Різновид косокутної фронтальної диметрії

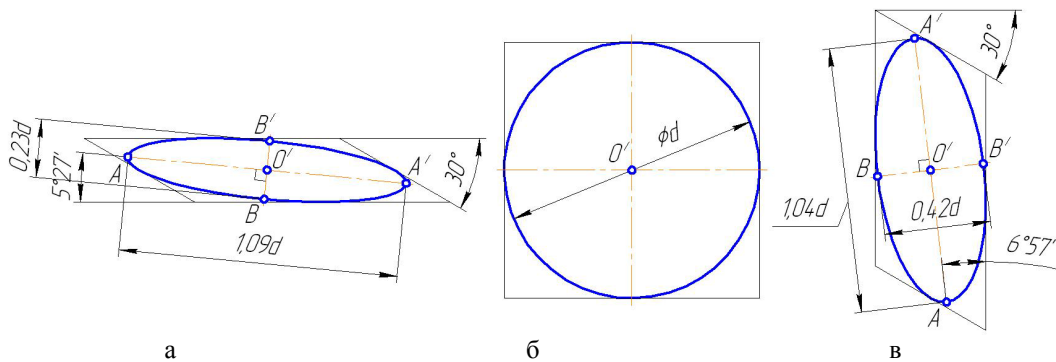


Рисунок 6.17 – Різновид косокутної фронтальної диметрії кола

## 6.4 РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЗИЦІЙНИХ ЗАДАЧ

### 6.4.1 ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ ІЗ ПЛОЩИНОЮ. ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН

Спосіб аксонометричного проєціювання можна застосовувати для розв'язання задач нарисної геометрії.

*Переваги способу аксонометричного проєціювання:*

- а) розв'язання позиційних задач супроводжується наочними зображеннями предметів;
- б) задачі розв'язуються за допомогою лише однієї аксонометричної проєкції.

*Недоліки способу аксонометричного проєціювання:*

- а) складність побудови аксонометричних проєкцій геометричних об'єктів;
- б) складність або неможливість розв'язання метричних задач;
- в) необхідність у деяких випадках доповнення аксонометричного зображення іншою проєкцією.

Для розв'язання задач способом аксонометричного проєціювання використовується, як правило, прямокутна ізометрія.

На рис. 6.18\* за допомогою прямокутної ізометрії розв'язана задача про визначення

\* У подальшому верхній індекс «'» не зазначається з метою спрощення позначень.

перетину прямої  $l$  із площиною  $\Sigma$ , заданою слідами  $\sigma_{\pi 1}$ ,  $\sigma_{\pi 2}$ ,  $\sigma_{\pi 3}$ . Через пряму  $l$  проводиться горизонтально-проєціювальна площина  $\Omega$  (слід  $\omega_{\pi 3}$  паралельний осі  $z$ , слід  $\omega_{\pi 1}$  збігається із горизонтальною проєкцією  $l_1$  прямої  $l$ ). За допоміжними точками 1, 2 будується пряма  $k$  перетину площин  $\Sigma$ ,  $\Omega$ . Точка  $K$  перетину прямих  $l$ ,  $k$  є шуканою точкою перетину прямої  $l$  із площиною  $\Sigma$ .

На рис. 6.19 способом аксонометричного проєціювання визначена лінія перетину площин  $\Sigma$ ,  $\Omega$ , заданих слідами. Визначені точки 1, 2 перетину двох пар однойменних слідів. Шукана лінія  $k$  перетину проходить через точки 1, 2.

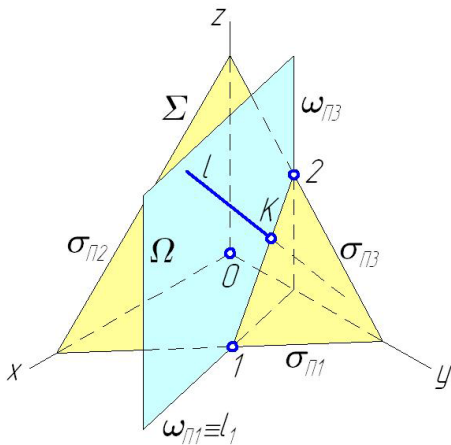


Рисунок 6.18 – Перетин прямої з площиною

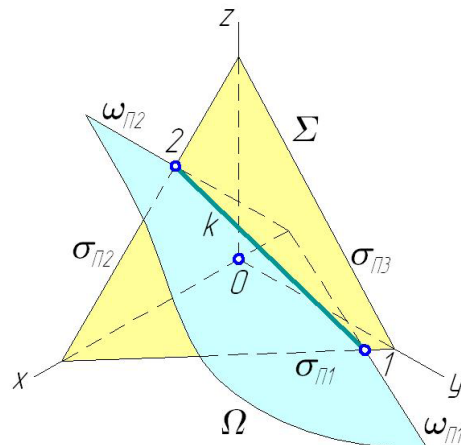


Рисунок 6.19 – Перетин двох площин

#### 6.4.2 ПЕРЕТИН ТІЛА ПЛОЩИНОЮ

На рис. 6.20 побудована лінія перетину трикутної призми площиною загального положення, заданою слідами. Визначаються точки 1–5 перетину слідів площини з ребрами (точка 1) і гранями (точки 2–5) призми. Точки 4, 5 визначені за допомогою допоміжних вертикальних ліній, які належать граням призми.

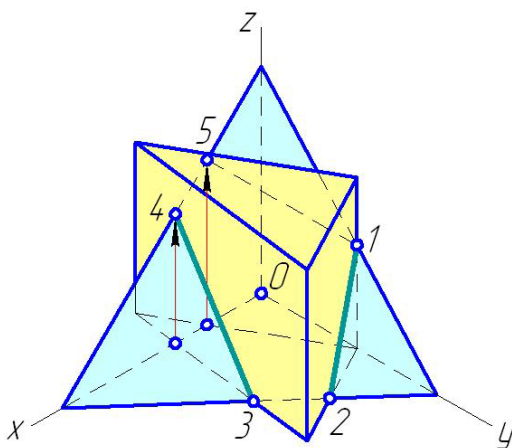


Рисунок 6.20 – Перетин багатогранника площиною

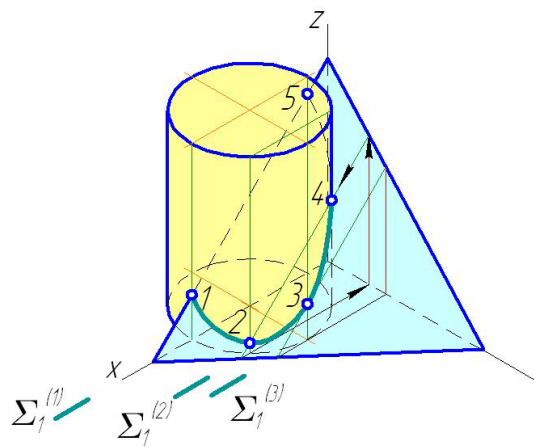


Рисунок 6.21 – Перетин тіла обертання площиною

На рис. 6.21 побудована лінія перетину циліндра площиною загального положення. Для її визначення вводяться допоміжні січні площини  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(3)}$  фронтального рівня, які перетинають циліндр по прямокутниках, а площину – по прямих лініях. Точки 1 – 5 перетину цих прямокутників з відповідними прямими є точками шуканої лінії перетину циліндра площиною.

### 6.4.3 ПЕРЕТИН ДВОХ ТІЛ

На рис. 6.22 побудована лінія перетину циліндра із призмою. Для її визначення застосовуються січні площини  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$  профільного рівня, які перетинають циліндр і призму по прямокутниках. Точки 1 – 6 перетину пар прямокутників належать шуканій лінії перетину даних тіл.

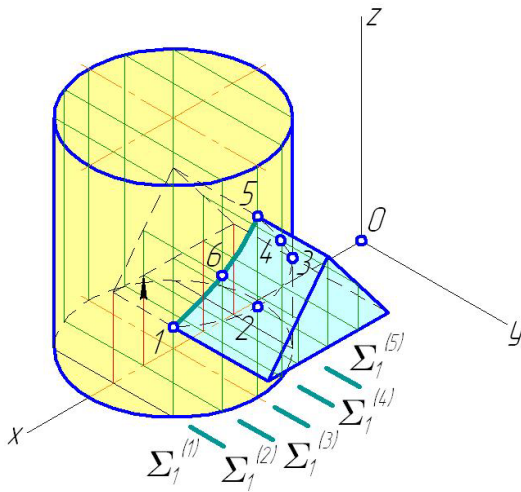


Рисунок 6.22 – Перетин тіла обертання з багатогранником

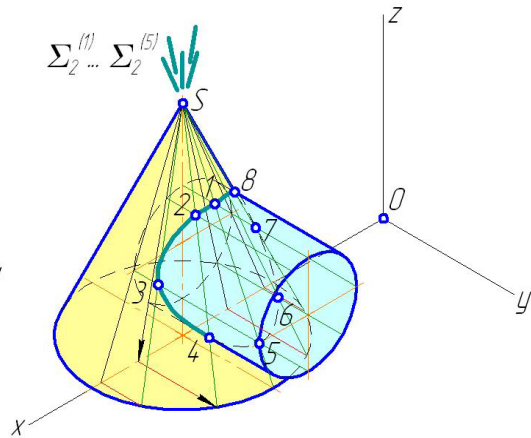


Рисунок 6.23 – Перетин двох тіл обертання

На рис. 6.23 побудована лінія перетину конуса із циліндром. Для її визначення застосовуються фронтально-проєціювальні січні площини  $\Sigma^{(1)} - \Sigma^{(5)}$ , які проходять через вершину  $S$  конуса. Ці площини перетинають конус по трикутниках, а циліндр – по прямокутниках. Точки 1 – 8 перетину цих трикутників із відповідними прямокутниками належать шуканій лінії перетину конуса із циліндром.

### 6.5 ПЕРЕТВОРЕННЯ АКСОНОМЕТРИЧНИХ ПРОЄКЦІЙ

Між аксонометричними і ортогональними проєкціями існує зв'язок, який дозволяє переходити від одного способу проєціювання до іншого і визначати напрям проєціювання. Процедура такого переходу здійснюється за допомогою побудови трикутника слідів картинної площини  $\Pi'$ .

На рис. 6.24 а побудована система осей  $x', y', z'$  прямокутної ізометрії із центром у точці  $O'$ . На осі  $x'$  довільно обирається точка  $X'$ , через яку проводяться відрізки  $X'Y'$ ,  $X'Z'$ , перший із яких перпендикулярний до осі  $z'$ , другий – до осі  $y'$ . Точки  $Y', Z'$  належать відповідно осям  $y', z'$ . Отриманий трикутник  $X'Y'Z'$  є трикутником слідів  $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3$  картинної площини  $\Pi'$ . Для визначення натуральної величини трикутника  $X'Y'Z'$  останній суміщається

із горизонтальною площиною проєкцій  $\Pi_1$  (див. п. 2.4.3, рис. 2.39 – 2.40). При цьому точка  $O'$  обертається навколо горизонтального сліду  $\pi'_1$  до положення  $O$ . Уздовж відрізків  $OX'$ ,  $OY'$  проводяться осі  $x$ ,  $y$  горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$  із центром у точці  $O$  (кут  $xOy$  прямий). Центром обертання є точка  $C'$ , радіусом – довжина відрізка  $C'X'$ .

Для визначення проєкції  $A_1$  довільної точки  $A$  за її аксонометричною проєкцією  $A'$  у картинній площині  $\Pi'$  будується промінь  $O'A'$  і знаходиться точка  $1'$  його перетину з віссю обертання  $X'Y'$ . Проєкція  $A_1$  є точкою перетину відрізка  $1'O$  з лінією  $AA$  напрямку обертання, перпендикулярною до осі обертання  $X'Y'$ .

Положення площин проєкцій  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  знаходяться аналогічно, шляхом обертання картинної площини  $\Pi'$  навколо слідів  $\pi'_2$ ,  $\pi'_3$  відповідно (рис. 6.24 б – в).

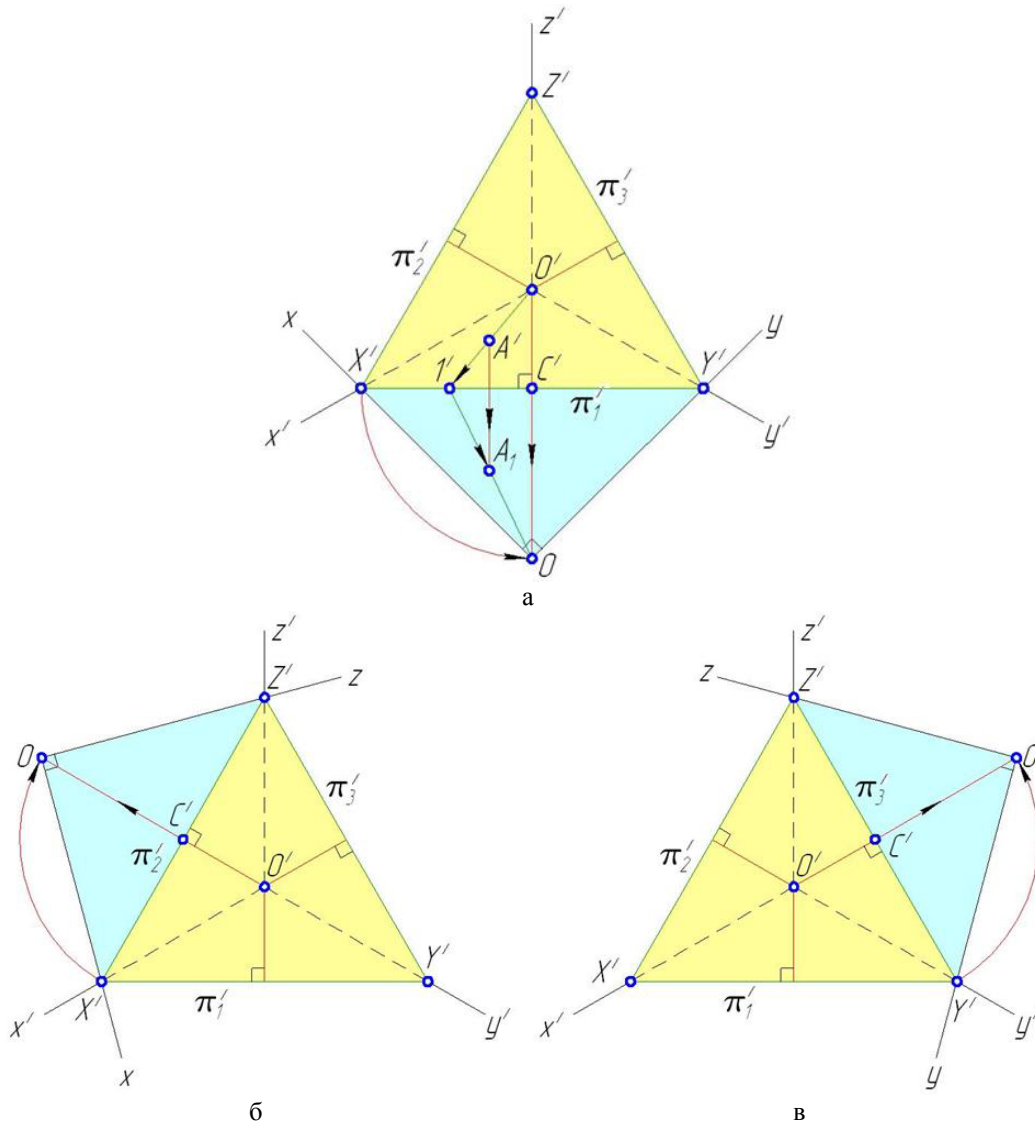


Рисунок 6.24 – Суміщення картинної площини із площинами проєкцій

### ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

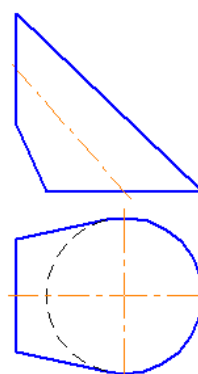
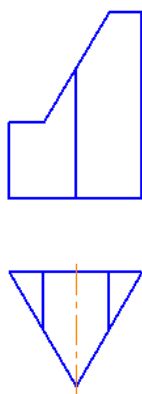
1. Чи може бути прямокутною аксонометрична проекція із коефіцієнтами  $k_x = 0,9$ ,  $k_y = 0,742$ ,  $k_z = 0,8$ . Відповідь обґрунтуйте.

2. Визначте кути  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  прямокутної триметрії із коефіцієнтами  $k_x = 0,9$ ,  $k_z = 0,8$ . Побудуйте аксонометричну проекцію точки  $A(25; 30; 15)$ .

3. Визначте кут  $\varphi$  косокутного аксонометричного проєціювання, якщо коефіцієнти спотворення за осями  $k_x = k_y = k_z = 0,7$ .

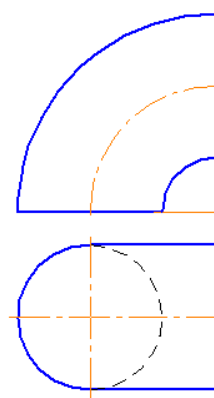
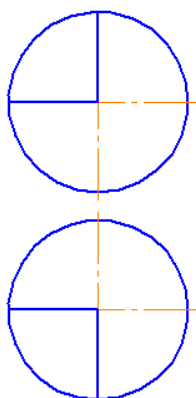
4. Побудуйте прямокутні ізометрію і диметрію зрізаної призми.

5. Побудуйте прямокутні ізометрію і диметрію зрізаного конуса.

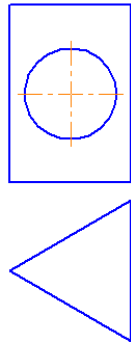


6. Побудуйте прямокутні ізометрію і диметрію кулі з вирізом 1/8 частини.

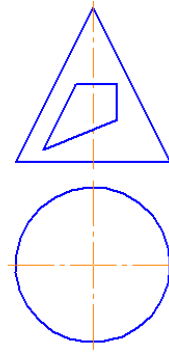
7. Побудуйте прямокутну ізометрію чверті тора.



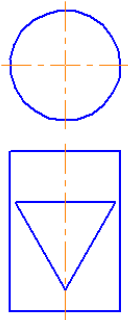
8. Побудуйте прямокутну диметрію призми із циліндричним отвором.



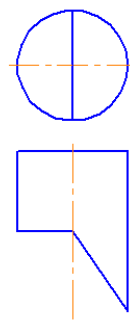
9. Побудуйте косокутну горизонтальну ізометрію конуса із призматичним отвором.



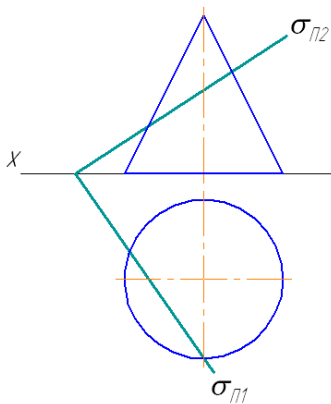
10. Побудуйте косокутну фронтальну ізометрію циліндра із призматичним отвором.



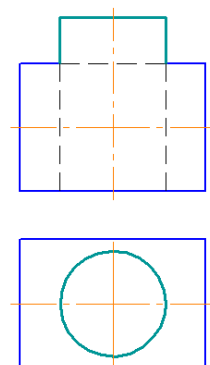
11. Побудуйте косокутну фронтальну диметрію зрізаного конуса.



12. Знайдіть плоский переріз конуса способом аксонометричного проєціювання.



13. Знайдіть лінію перетину двох циліндрів способом аксонометричного проєціювання.



### **ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ**

1. Який спосіб проєціювання називається аксонометричним? У чому він полягає?
2. Опишіть переваги і недоліки способу аксонометричного проєціювання.
3. Яка площина називається картинною?
4. Які існують види аксонометричного проєціювання? Чим вони відрізняються?
5. Що називається коефіцієнтами спотворення по осях в аксонометричному проєціюванні?
6. Сформулюйте основну тотожність аксонометричного проєціювання, яка пов'язує коефіцієнти спотворення по осях і кут проєціювання.
7. Які види прямокутного аксонометричного проєціювання застосовуються на практиці?
8. Що називається прямокутною аксонометричною проєкцією?
9. Які існують види прямокутної ізометрії? Чим вони відрізняються.
10. Які коефіцієнти спотворення і кути між осями мають основні види прямокутної аксонометрії?
11. Як будується прямокутна ізометрія кола, яке належить площині рівня?
12. Як будується прямокутна диметрія кола, яке належить площині рівня?
13. Що називається косокутною аксонометричною проєкцією?
14. Які види косокутного аксонометричного проєціювання застосовуються на практиці?
15. Які коефіцієнти спотворення і кути між осями мають основні види косокутної аксонометрії?
16. Як будуються косокутні ізометрії кола, яке належить площині рівня?
17. Як будується косокутна диметрія кола, яке належить площині рівня?
18. Опишіть алгоритм переходу від комплексного креслення геометричного об'єкта до його аксонометричної проєкції.
19. Опишіть алгоритм переходу від аксонометричної проєкції геометричного об'єкта до його комплексного креслення. Чи однозначний цей перехід?
20. Опишіть процедуру суміщення картинної площини із площинами проєкцій  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ .
21. Для розв'язання яких задач нарисної геометрії застосовується спосіб аксонометричного проєціювання?

## СПИСОК ДОДАТКОВОЇ РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

---

1. Михайленко В. Е. Нарисна геометрія: підручник / В. Е. Михайленко, М. Ф. Євстіїєєв, С. М. Ковальов, О. В. Кашченко. – 2-ге вид., перероблене. – К. : Вища школа, 2004. – 303 с.
2. Хмеленко О. С. Нарисна геометрія: теорія і приклади розв'язання задач: підручник / О. С. Хмеленко. – К. : Кондор, 2008. – 440 с.
3. Антонович Є. А. Нарисна геометрія. Практикум: навч. посіб. / Є. А. Антонович, Я. В. Васишин, О. В. Фольта та ін. // за ред. Є. А. Антоновича. – Львів : Світ, 2004. – 528 с.
4. Павленко І. В. Нарисна геометрія [електронний ресурс] / І. В. Павленко. – Суми : Сумський державний університет, 2013. – <http://ocw.sumdu.edu.ua/content/767>
5. Короев Ю. И. Начертательная геометрия: учебник / Ю. И. Короев.– 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Архитектура-С, 2007. – 424 с.
6. Локтев О. В. Краткий курс начертательной геометрии: учебник / О. В. Локтев. – 3-е изд., испр. – М. : Высшая школа, 1999. – 136 с.
7. Бубенников А. В. Начертательная геометрия: учебник / А. В. Бубенников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1985. – 288 с.
8. Фролов С. А. Начертательная геометрия: учебник / С. А. Фролов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1983. – 240 с.
9. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия: учебник / Н. С. Кузнецов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1981. – 501 с.
10. Начертательная геометрия : учебник / Н. Ф. Четверухин, В. С. Левицкий, З. И. Прянишникова и др. // под ред. Н. Ф. Четверухина. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1963. – 418 с.
11. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии: учеб. пособ. / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский // под ред. В. О. Гордона, Ю. Б. Иванова. – 24-е изд., стереотипное. – М. : Высшая школа, 2000. – 272 с.
12. Посвянский А. Д. Краткий курс начертательной геометрии / А. Д. Посвянский. – 4-е изд. – М. : Высшая школа, 1974. – 192 с.



## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

---

### ***А***

Астроїда 101

### ***Б***

Багатогранник

випуклий 143

зіркоподібний 143

неправильної форми 143

правильний 143

увігнутий 143

Біномаль 128 – 130

Брахістохрона 99

### ***В***

Вершина 122, 144

Види проєціювання 10

Видимість

збіжних ліній 22

зовнішнього контуру 22

мимобіжних ліній 23

Висота 13

Відстань

від точки

до кривої лінії 135

до кривої поверхні 136

до площини 39 – 40, 85

до прямої 38 – 39, 55 – 66, 85

між мимобіжними прямими 43, 59, 69,  
71, 85

між паралельними

площинами 41, 85

прямими 42, 57, 67, 85

прямою і площиною 41, 57, 67

Вісь

обертання 65, 75

симетрії 93, 134

Властивість

двогранного кута 46

елемента сполучення 111

просторової лінії

біквдратної 193

перетину тіл обертання 193

розгортки 198

точок бісекторної площини 83

### ***Г***

Гексаедр 143

Гелікоїд

відкритий 121 – 122

закритий 120, 122

косий 120, 122

прямий 120, 122

Геометрія нарисна 7 – 8

Гіпербола 92 – 94, 153, 193

Гіперболоїд

двопорожнинний 126, 207

однопорожнинний 117 – 119

Гіпотрохоїда 102 – 103

Гіпоциклоїда 100 – 101

Глибина 13

Горло 126

Грань 144

### ***Д***

Дельтоїда 100

Диметрія

косокутна 216, 223

прямокутна 219

фронтальна 216, 223

Директриса 93

Довжина

відрізка 14, 54, 66

дуги кривої 132, 198

Додекаедр 144

Дотична 124, 128

### ***Е***

Евольвента 99, 133 – 134

Еволюта 99, 133 – 134

Еквідистанта кривої 135

Еліпс 92 – 94, 98, 103, 113, 134, 138, 153

Еліпсоїд 126, 165, 193, 207 – 208

Епітрохоїда 102

Епіциклоїда 100

Епюр Монжа 11

### ***Ж***

Жезл 106

- З**  
 Завиток 112  
 Задача нарисної геометрії  
   метрична 8, 38, 52, 132  
   обернена 7  
   позиційна 8, 79, 132  
   пряма 7  
 Збіг площин 33
- I**  
 Ізометрія  
   горизонтальна 216, 221  
   косокутна 216, 221 – 222  
   прямокутна 216 – 217, 224  
   фронтальна 216, 221 – 222  
 Ікосаедр 144
- К**  
 Кардіоїда 100, 233  
 Квадратриса Динострата 107  
 Клотоїда 104  
 Коефіцієнт спотворення 216 – 217, 219,  
   221, 223, 228  
 Коноїд 117, 120  
 Конус  
   еліптичний 159 – 160, 181, 203 – 204  
   круговий 92, 126, 202  
   прямий 92, 126, 202  
 Конусоїд 117 – 118  
 Конхоїда Нікомеда 97  
 Креслення  
   комплексне 7 – 8, 11 – 12  
   проєціювальне 11  
 Крива  
   алгебраїчна  
     вищого порядку 94  
     другого порядку 91 – 93, 126, 138, 186  
   біквдратна 192 – 193  
   Вівіані 192  
   коробова 112 – 113  
   неалгебраїчна  
     гвинтова 114 – 115  
     спіральною 103, 114  
     трансцендентна 107, 126  
     тригонометрична 98, 114  
     циклоїдальна 99 – 101  
   Персея 97, 153  
   плоска 91 – 94, 113  
   погоні 108  
   просторова 188, 192 – 193  
   Штейнера 100
- Куб 143 – 144  
 Кут  
   допоміжний 45 – 46, 60  
   обертання 65  
   плоский 60, 75 – 76, 85  
   тригранний 128
- Л**  
 Лекало 93  
 Лемніската  
   Бернуллі 96  
   Бута 97, 153, 156  
   Жероно 109 – 110  
 Лист Декарта 94  
 Лінія  
   головна 27  
   контуру  
     видимого 153 – 154, 156, 171 – 172  
     невидимого 153 – 154, 156, 171 – 172  
   крива 9, 85, 91  
   ланцюгова 108  
   найбільшого нахилу 27  
   напрямна 116 – 117  
   проєкційного зв'язку 12, 40  
   пряма 14 – 15  
   твірна 92 – 93, 97, 116 – 118  
 Локон Ан'єзі 94
- М**  
 Меридіан 126, 153  
 Метод  
   послідовних наближень 85, 137, 139, 159,  
     166 – 167, 179  
   проєкцій 7  
   тріангуляції 205, 209
- Н**  
 Належність  
   прямої площині 31  
   точки  
     площині 29  
     прямій 20  
 Напрямок обертання 65, 75  
 Натуральна величина  
   відрїзка 14, 19, 26, 39 – 40  
   кута 24, 27, 37  
   плоскої фігури 38  
 Нефроїда 100  
 Нормаль 128

**О**

Обертання 38, 52, 64, 74, 85, 118, 126  
Овал  
Декарта 98  
Кассіні 96  
Овоїд 112 – 113  
Октаедр 144  
Октант 12 – 13  
Осцилограф 109

**П**

Парабола  
квадратична 92, 94, 153, 193  
кубічна 94  
Нейла 94  
Параболоїд  
гіперболічний 117, 120, 137 – 138  
обертання 126 – 127, 193, 207  
Паралель 126  
Паралельність  
площин 33  
прямих 20  
прямої і площини 31  
Переміщення плоскопаралельне 70  
Переріз конічний 8, 92  
Перетин  
площин 74  
поверхні і площини 126  
поверхонь 153, 188, 191, 193  
прямих 32, 111  
прямої і площини 17, 32, 85  
прямої і поверхні 137  
Перпендикулярність  
площин 37  
прямих 24  
прямої і площини 37  
Перспектива  
кутова 10  
центральна 10  
Піраміда 123  
Площина  
бісекторна 83  
загального положення 27  
картинна 215 – 216, 226 – 227  
особливого положення 27 – 29  
паралелізму 119 – 120, 122, 124 – 125  
проекцій  
горизонтальна 11  
профільна 11  
фронтальна 11  
проеціювальна 28

рівня 27 – 28  
січна 97, 153  
Площина-посередник 34, 36, 147, 152, 175  
Поверхня  
із ребром повернення 123, 209  
каналова 118, 123 – 124  
конічна 135, 203  
лінійчата  
загального вигляду 117  
із двома напрямними 117, 119  
із однією напрямною 117, 122  
із трьома напрямними 117  
нелінійчата  
загального вигляду 118, 123  
зі змінною твірною 118, 123, 125  
із незмінною твірною 118, 123, 125  
обертання 118, 125, 126  
перенесення 118, 125, 126  
сферична 188, 191  
трубчаста 118, 125  
циклічна 125  
циліндрична 139, 166, 203  
Призма 117, 123  
Проеціювання  
аксонометричне 7, 85, 215  
диметричне 216, 219, 223  
ізометричне 216 – 217, 221  
косокутне 216, 221  
ортогональне 8, 11, 20  
паралельне 11  
центральне 10  
Проекція  
горизонтальна 12  
профільна 12  
фронтальна 12  
Пряма  
загального положення 14  
особливого положення 14 – 27  
проеціювальна 14, 17  
рівня 14 – 15, 17, 27  
Псевдосфера 126  
Птероїда 96

**P**

Равлик Паскаля 98, 100, 102, 113  
Радіус  
кривизни 104, 133  
обертання 65, 75  
сполучення 110  
Радіус-вектор 104 – 105  
Ребро  
багатогранника 23, 144 – 145, 151  
повернення 123, 209  
Розгортання  
наближене 203, 209  
точне 197 – 198, 201  
умовне 203, 205 – 206, 210  
Рулетта 99  
Рух  
обертальний 65  
плоскопаралельний 70  
поступальний 122 – 123, 126

**C**

Синусоїда 98, 114, 133 – 134, 203  
Система координат  
аксонометрична 215  
локальна 217  
Слід  
площини 26, 85  
прямої 17, 85  
Спіраль  
Архімеда 103, 113  
Галілея 106  
гіперболічна 106  
ізогональна 104  
Корню 104  
логарифмічна 104  
параболічна 106  
Ферма 105  
Сполучення  
кіл 111 – 112  
прямих 112  
прямої і кола 112

**Спосіб**

граней  
багатогранника 145, 151  
натуральних 198, 203 – 204  
допоміжної площини  
нормальної 39  
паралельної 43, 69, 71  
заміни площин проекцій 39, 52, 85, 147, 173  
інтерполяції 94, 132, 168  
конкуруючих точок 23, 32, 43, 71  
непрямий 45, 61  
нормального перерізу 199  
обертання навколо  
лінії рівня 52, 74, 77, 85  
проєціювальної осі 85, 132, 137, 162, 209  
площин-посередників 34, 177, 181  
подання  
кривої  
геометричний 91  
кінематичний 91  
площини 25  
поверхні  
аналітичний 116  
каркасний 116  
кінематичний 116  
проєціювання  
аксонометричного 7, 85, 215  
косокутного 216, 221  
прямокутного 8, 11, 20  
прямий 61  
прямокутного трикутника 19, 38, 62, 132  
ребер 145, 151  
розкочування 200  
січних  
площин  
загального положення 178  
особливого положення 147, 151, 171  
поверхонь  
конічних 177, 184, 205, 207  
пірамідальних 203  
призматичних 203  
сферичних  
ексцентричних 177, 191 – 193  
концентричних 177, 188, 190 – 191  
циліндричних 205  
слідів 34 – 36  
суміщення 4, 77, 90  
твірної лінії 202  
Спрямлення кривої 132  
Строфоїда 95 – 96  
Сфера 116, 126, 153, 188, 190, 193

**T**

Теорема

Монжа

на площині 187

у просторі 186

про проєціювання

дотичної 128

прямого кута 24

Тетраedr 143 – 144

Тіло

обертання 177, 184

платонівське 194

Тор

відкритий 126

закритий 126, 207

Торс 117, 123, 197, 209

Точка

особлива 153, 156, 178

перетину

кривої і площини 138

кривої і поверхні 166

прямих 32, 111

прямої і площини 17, 32, 85

прямої і поверхні 137

сполучення 110

характерна 116, 153

Траєкторія точки 102 – 107, 109, 114, 128

Трактриса 107 – 108, 126

Трохоїда 101

Тригранник

натуральний 128

Френе 128 – 130

**У**

Умова

збігу площин 33

паралельності

площин 33

прямих 20

прямої і площини 31

перпендикулярності

площин 37

прямих 24

прямої і площини 37

**Ф**

Фігура

Ліссажу 110

плоска 62, 77, 197

Фокус 92 – 94, 96, 98, 140

формула

аксонометричного проєціювання 216 – 217

Ейлера 144

**Ц**

Центр

кривизни 133

обертання 65, 75

проєціювання 10

сполучення 111

Циклоїда 99, 132 – 134

Циліндр

еліптичний 160

косий 117, 118

круговий 126, 157

прямий 126, 157

Циліндроїд 117, 119, 121

Цисоїда Діокла 95

**Ч**

Чверть 12 – 13, 83

## ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

---

- A**  
Альберті Леон Баттіста (Alberti Leone Battista) 7  
Ан'єзі Марія Гаєтана (Agnesi Maria Gaetana) 94, 95  
Аполлоній Пергський ('Απολλώνιος ό Περγαῖος) 92  
Аристокл (Αριστοκλής) 114  
Аристотель 99, 144  
Архімед із Сіракуз ('Αρχιμήδης) 92, 103
- B**  
Бернуллі Якоб (Bernoulli Jacob) 96 – 97, 99, 104  
Браго Тіхе 93  
Бугер П'єр (Bouguér Pierre) 108  
Бут Джеймс 97
- B**  
Вівіані Вінченцо (Viviani Vincenzo) 192  
Вінчі Леонардо да (Vinci Leonardo di ser Piero da) 7, 108
- G**  
Галілей Галілео (Galilei Galileo) 99, 192  
Гіппій з Елліди 107  
Грегорі Джеймс (Gregory James) 132 – 133  
Гюйгенс Хрiстіан (Huygens Christiaan) 99, 108, 132
- D**  
Дезарг Жерар (Desargues Gérard) 7, 8  
Декарт Рене (Descartes René) 94 – 95, 132  
Динострат 107  
Діокл 95
- E**  
Ейлер Леонард (Euler Leonhard) 144
- J**  
Жероно Каміль-Кристоф 109
- K**  
Карре Луї 100  
Кассіні Джованні Доменіко (Cassini Giovanni Domenico) 96  
Кастіллоне Джованні 100  
Каталан Ежен-Шарль (Catalan Eugéne-Charles) 119
- Кеплер Іоганн (Kepler Johannes) 93  
Корню Марі Альфред (Cornu Marie Alfred) 104
- L**  
Лейбніц Готфрід Вільгельм фон (Leibniz Gottfried Wilhelm von) 108, 133  
Ліссажу Жюль Антуан (Lissajous Jules Antoine) 109
- M**  
Монж Гаспар (Monge Gaspard) 7 – 8
- N**  
Нейл Вільям 94  
Нікомед 97  
Ньютон Ісаак 108
- P**  
Папп Олександрійський 107  
Паскаль Блез 98  
Паскаль Етьєн 98  
Перро Клод 108  
Персей 97  
Платон (Πλάτων) 144  
Пойєрбах Георг фон 98
- R**  
Рен Кристофер (Wren Christopher) 132  
Роберваль (Персон'є) Жіль (Roberval Gilles Personne de) 96, 98
- S**  
Сократ 144
- U**  
Уолліс Джон (Wallis John) 116
- F**  
Ферма П'єр де (Fermat Pierre de) 94, 105, 116  
Френе Жан Фредерік 128
- S**  
Штейнер Якоб (Steiner Jacob) 101  
Шухов Володимир Григорович 119
- Y**  
Ямвліх 107

## ДОДАТОК А (ДОВІДКОВИЙ)

### СИМВОЛИ ЛАТИНСЬКОГО І ГРЕЦЬКОГО АЛФАВІТІВ

---

#### ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ ROMAN ALPHABETI

<b>A a</b> a	<b>B b</b> бе	<b>C c</b> це	<b>D d</b> де	<b>E e</b> е	<b>F f</b> еф	<b>G g</b> же	<b>H h</b> аи	<b>I i</b> і	<b>J j</b> йот	<b>K k</b> ка	<b>L l</b> ель	<b>M m</b> ем
<b>N n</b> ен	<b>O o</b> о	<b>P p</b> пе	<b>Q q</b> ку	<b>R r</b> ер	<b>S s</b> ес	<b>T t</b> те	<b>U u</b> у	<b>V v</b> ве	<b>W w</b> дубль ве	<b>X x</b> ікс	<b>Y y</b> ігрек	<b>Z z</b> зет

#### ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΛΦΑΒΗΤΟ

<b>A α</b> альфа	<b>B β</b> бета	<b>Γ γ</b> гамма	<b>Δ δ</b> дельта	<b>E ε</b> епсилон	<b>Z ζ</b> дзета	<b>H η</b> ета	<b>Θ θ</b> тета	<b>I ι</b> йота	<b>K κ</b> каппа	<b>Λ λ</b> лямбда	<b>M μ</b> мю
<b>N ν</b> ню	<b>Ξ ξ</b> ксі	<b>O ο</b> омікрон	<b>Π π</b> пі	<b>P ρ</b> ро	<b>Σ σ ς</b> сигма	<b>T τ</b> тау	<b>Υ υ</b> іпсилон	<b>Φ φ</b> фі	<b>X χ</b> хі	<b>Ψ ψ</b> псі	<b>Ω ω</b> омега

Навчальне видання

**Павленко Іван Володимирович,  
Павленко Віта Володимирівна**

# **НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**

Підручник

Художнє оформлення обкладинки І. В. Павленка  
Редактор Н. В. Лисогуб  
Комп'ютерне верстання І. В. Павленка

Формат 60×84/8. Ум. друк. арк. 27,9. Обл.-вид. арк. 24,6. Тираж 500 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.





**Павленко Іван Володимирович** – кандидат технічних наук із спеціальності «Динаміка та міцність машин», старший викладач кафедри загальної механіки і динаміки машин факультету технічних систем і енергоефективних технологій Сумського державного університету.

Сертифікований фахівець зі званням міжнародного інженера-педагога "ING PAED IGIP", член Міжнародної асоціації інженерів IAENG.

Має близько 50 наукових публікацій у виданнях України, Польщі, Словаччини і Швейцарії, а також близько 20 навчально-методичних видань.

Викладач дисциплін «Нарисна геометрія», «Інженерна і комп'ютерна графіка». Розробник атестованого дистанційного курсу із дисципліни «Нарисна геометрія». Загальний науково-педагогічний стаж – 9 років.



**Павленко Віта Володимирівна** – викладач вищої категорії Машинобудівного коледжу Сумського державного університету.

Викладач дисциплін «Нарисна геометрія», «Інженерна і комп'ютерна графіка». Має близько 20 наукових і навчально-методичних публікацій. Загальний педагогічний стаж – 12 років.

<http://teset.sumdu.edu.ua>

<http://mk.sumdu.edu.ua>

<http://ocw.sumdu.edu.ua/content/767>

<http://personal.sumdu.edu.ua/pavlenko/ua>

