CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Electronic Sumy State University Institutional Repository

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

Збірник задач з фізики
з прикладами розв'язання

У двох частинах

Частина 2
Електричний струм. Магнітне поле.
Оптика. Радіоактивність

Навчальний посібник

Суми
Сумський державний університет
2015

УДК 53(076.2)
ББК 28.071я73
З-41

Авторський колектив:
А. В. Дворниченко, кандидат фізико-математичних наук;
Я. О. Ляшенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент;
О. В. Хоменко, доктор фізико-математичних наук, професор;
Г. С. Корнющенко, кандидат фізико-математичних наук

Рецензенти:
В. І. Перекрестов – доктор технічних наук, доцент, головний науковий співробітник кафедри наноелектроніки Сумського державного університету;
О. В. Коропов – кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник відділу моделювання радіаційних ефектів та мікроструктурних перетворень в конструкційних матеріалах Інституту прикладної фізики НАН України (м. Суми)

Рекомендовано вченою радою університету
як навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
(протокол № 6 від 18 грудня 2014 р.)

З-41 **Збірник** задач з фізики з прикладами розв'язання : навч. посіб. : у 2 ч. Частина 2. Електричний струм. Магнітне поле. Оптика. Радіоактивність / А. В. Дворниченко, Я. О. Ляшенко, О. В. Хоменко, Г. С. Корнющенко. – Суми : Сумський державний університет, 2015. – 230 с.
ISBN 978-966-657-457-5
ISBN 978-966-657-545-9 (частина 2)

У навчальному посібнику наведено приклади розв'язання задач із фізики та задачі для самостійного розв'язування з тем, що вивчаються у другому семестрі студентами вищих навчальних закладів зі спеціальностей медичного напряму. Посібник також може бути корисним для студентів спеціальностей, де фізика є загальноосвітньою дисципліною.

УДК 53(076.2)
ББК 28.071я73

ISBN 978-966-657-457-5
ISBN 978-966-657-545-9 (частина 2)

© Дворниченко А. В., Ляшенко Я. О., Хоменко О. В., Корнющенко Г. С., 2015
© Сумський державний університет, 2015

Зміст

13. Постійний струм. Внутрішній опір джерела. Правила Кірхгофа

Основні формули

- Сила струму

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = env S, \qquad (13.1)$$

де I — сила струму (А); $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд електрона; n — концентрація вільних електронів у провіднику; v — швидкість упорядкованого руху електронів (м/с); S — площа поперечного перерізу провідника (м^2).

- Електрорушійна сила (ЕРС) джерела струму

$$\varepsilon = \frac{A}{q}, \qquad (13.2)$$

де A — робота сторонніх сил з переміщення заряду q вздовж контура (Дж); ε — електрорушійна сила (В).

- Густина струму

$$j = \frac{I}{S}. \qquad (13.3)$$

- Закон Ома для однорідної ділянки кола

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{\Delta\varphi_{12}}{R}, \qquad (13.4)$$

де R — опір кола (Ом); $\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ — різниця потенціалів на кінцях ділянки.

- Закон Ома для неоднорідної ділянки кола (див. рис. 13.1)

$$IR = U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon = \Delta\varphi_{12} + \varepsilon, \qquad (13.5)$$

де ε — сума ЕРС, що діють всередині ділянки.

13. Постійний струм. Внутрішній опір джерела. Правила Кірхгофа

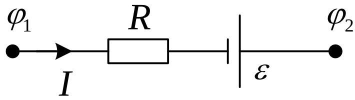


Рисунок 13.1

- Закон Ома для повного кола

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \tag{13.6}$$

де r — внутрішній опір джерела струму (Ом).

- Залежність опору від властивостей провідника та його геометричних розмірів

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{13.7}$$

де ρ — питомий опір матеріалу провідника (Ом·м); l — довжина провідника (м).

- Залежність питомого опору ρ та опору R провідника від температури

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(1 + \alpha t), \\ R &= R_0(1 + \alpha t), \end{aligned} \tag{13.8}$$

де ρ_0 — питомий опір при 0°C; R — опір при 0°C; α — температурний коефіцієнт опору ($К^{-1}$); t — температура в градусах Цельсія (°C).

- Послідовне з'єднання опорів:

$$\begin{aligned} I &= I_1 = I_2 = \ldots = I_N, \\ U &= U_1 + U_2 + \ldots + U_N = I\left(R_1 + R_2 + \ldots + R_N\right) = IR, \\ R &= R_1 + R_2 + \ldots + R_N. \end{aligned} \tag{13.9}$$

- Паралельне з'єднання опорів:

$$
\begin{aligned}
U &= U_1 = U_2 = \ldots = U_N = U, \\
I &= I_1 + I_2 + \ldots + I_N = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N}\right), \\
\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N}. \qquad (13.10)
\end{aligned}
$$

- Перше правило Кірхгофа встановлює зв'язок між сумою струмів, спрямованих до вузла електричного кола (позитивні струми), і сумою струмів, спрямованих від вузла (негативні струми). Згідно з цим правилом алгебраїчна сума струмів, що сходяться в будь-яку точку розгалуження провідників, дорівнює нулю:

$$\sum_k I_k = 0. \qquad (13.11)$$

- Друге правило Кірхгофа формулюється таким чином: для будь-якого замкненого електричного контура сума електрорушійних сил дорівнює сумі добутків сил струму на кожній ділянці контура на опір ділянки, враховуючи внутрішній опір джерел струму:

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_k I_k R_k. \qquad (13.12)$$

- Коефіцієнт корисної дії (ККД) джерела струму

$$\eta = \frac{R}{R + r} \cdot 100\,\%. \qquad (13.13)$$

Приклади розв'язання задач

13.1. По мідному провіднику з перерізом $S = 1$ мм^2 проходить струм силою $I = 10$ мА. Знайти середню швидкість упорядкованого руху електронів уздовж провідника, якщо вважати, що на кожен атом міді припадає один електрон провідності. Молярна маса міді $\mu = 63,6$ г/моль, густина міді $D = 8,9$ г/см^3.

13. Постійний струм. Внутрішній опір джерела. Правила Кірхгофа

Дано
$S = 10^{-6}$ м^2,
$I = 10^{-2}$ А,
$\mu = 63,6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,
$D = 8900$ кг/м^3,
$N_a = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$,
$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
v–?

Сила струму в провіднику дорівнює заряду, що проходить за одиницю часу через поперечний переріз провідника (13.1):

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = envS,$$

де n – концентрація електронів; e – заряд електрона; v – середня швидкість упорядкованого руху електронів; S – площа поперечного перерізу провідника. Тоді отримаємо такий вираз для середньої швидкості:

$$v = \frac{I}{neS}.$$

Оскільки на кожен атом міді припадає один електрон провідності, то концентрація електронів провідності дорівнюватиме концентрації атомів міді. Концентрація атомів визначається як

$$n = \frac{N}{V},$$

де N – кількість атомів; V – об'єм, що займають атоми. Врахуємо те, що загальна кількість атомів N може бути визначена як відношення маси мідного провідника m до маси одного атома міді m_0:

$$N = \frac{m}{m_0}.$$

Поєднавши два останніх співвідношення, знайдемо концентрацію електронів провідності:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{m}{m_0 V} = \frac{D}{m_0},$$

де враховано те, що відношення маси m до об'єму V – це густина речовини D. З іншого боку, маса атома міді m_0 може бути визначена через кількість молей речовини μ і число Авогадро N_A:

$$m_0 = \frac{m}{N} = \frac{m}{\nu N_A} = \frac{\mu}{N_A},$$

де ν – кількість молей речовини. Підставляючи останній вираз у формулу для визначення концентрації, матимемо

$$n = \frac{DN_A}{\mu}.$$

Тоді швидкість упорядкованого руху електронів матиме вигляд

$$v = \frac{I}{enS} = \frac{I\mu}{DN_A eS},$$

або після підстановки числових значень і підрахунку:

$$v = \frac{10^{-2} \cdot 63,6 \cdot 10^{-3}}{8900 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6}} = 7,417 \cdot 10^{-7} \ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

13.2. При під'єднанні вольтметра з опором $R_V = 200$ Ом безпосередньо до затискачів джерела струму він показує $U_1 = 20$ В. Якщо це джерело замкнути на опір $R = 8$ Ом, тоді струм у колі дорівнюватиме $I_2 = 0,5$ А. Знайти ЕРС та внутрішній опір джерела.

$R_V = 200$ Ом, $U_1 = 20$ В, $R = 8$ Ом, $I_2 = 0,5$ А
ε, r—?

Розглянемо перший випадок. За законом Ома для замкненого кола (13.6) в ньому проходить струм

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_V + r}.$$

У другому випадку

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

Оскільки в обох випадках ЕРС однакова, матимемо

$$I_1(R_V + r) = I_2(R + r).$$

Виразимо звідси внутрішній опір r:

$$I_1 R_V + I_1 r = I_2 R + I_2 r; \quad I_2 r - I_1 r = I_1 R_V - I_2 R;$$

$$r(I_2 - I_1) = I_1 R_V - I_2 R; \quad r = \frac{I_1 R_V - I_2 R}{I_2 - I_1}.$$

Вольтметр показує спад напруги U_1 на його опорі R_V:

$$U_1 = I_1 R_V; \quad I_1 = \frac{U_1}{R_V}.$$

Підставимо останні вирази в рівність для внутрішнього опору джерела струму:

$$r = \frac{I_1 R_V - I_2 R}{I_2 - I_1} = \frac{U_1 - I_2 R}{I_2 - U_1/R_V} = \frac{(U_1 - I_2 R)R_V}{I_2 R_V - U_1}.$$

Розрахуємо шукане значення внутрішнього опору:

$$r = \frac{(20 - 0,5 \cdot 8) \cdot 200}{0,5 \cdot 200 - 20} = 40 \text{ (Ом)}.$$

Знайдемо електрорушійну силу ε:

$$\varepsilon = I_2(R + r) = 0,5 \cdot (8 + 40) = 24 \text{ (В)}.$$

13.3. Знайти струми в кожному замкненому контурі кола, зображеного на рис. 13.2, якщо $\varepsilon = 120$ В, $R_1 = R_2 = 0,5$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $R_4 = R_6 = 1$ Ом, $R_5 = 6$ Ом, $R_7 = 2$ Ом.

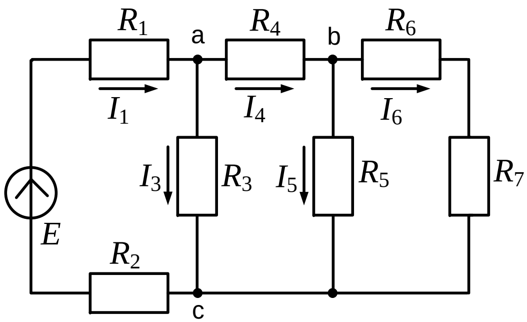


Рисунок 13.2

$\varepsilon = 120$ В,
$R_1 = R_2 = 0,5$ Ом,
$R_3 = 6$ Ом,
$R_4 = R_6 = 1$ Ом,
$R_5 = 6$ Ом,
$R_7 = 2$ Ом
I_1, I_3, I_4, I_5, I_6—?

Спростимо схему, замінивши опори R_6 та R_7 еквівалентним опором R_{67}. Оскільки вони з'єднані послідовно, матимемо

$$R_{67} = R_6 + R_7 = 1 + 2 = 3 \text{ (Ом)}.$$

Далі спростимо схему, проводячи заміну паралельно з'єднаних R_5 та R_{67} на еквівалентний резистор R_{567}, як це показано на рис. 13.3 а:

$$R_{567} = \frac{R_5 R_{67}}{R_5 + R_{67}} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2 \text{ (Ом)}.$$

Тепер можна послідовно з'єднати опори R_4 і R_{567}, замінивши їх на еквівалентний опір R_{4567}:

$$R_{4567} = R_4 + R_{567} = 1 + 2 = 3 \text{ (Ом)}.$$

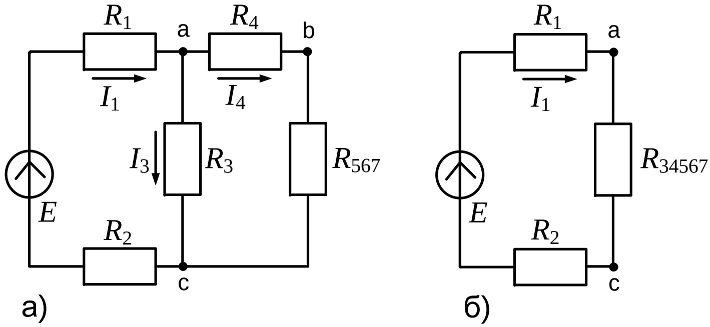


Рисунок 13.3

Далі зробимо заміщення R_3 і R_{4567}, що з'єднані паралельно, на еквівалентний опір R_{34567} та перейдемо до одноконтурної схеми (рис. 13.3 б):

$$R_{34567} = \frac{R_3 R_{4567}}{R_3 + R_{4567}} = \frac{6 \cdot 3}{6+3} = 2 \text{ (Ом)}.$$

Для отриманої одноконтурної схеми застосуємо закон Ома та знайдемо значення струму I_1:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_{34567} + R_2} = \frac{120}{0,5 + 2 + 0,5} = 40 \text{ (A)}.$$

Визначимо напругу між вузлами електричного кола a та c:

$$U_{\text{ac}} = I_1 R_{34567} = 40 \cdot 2 = 80 \text{ (B)}.$$

Використовуючи рис. 13.3 а, можна визначити значення струмів I_3 та I_4:

$$I_3 = \frac{U_{\text{ac}}}{R_3} = \frac{80}{6} = 13,33 \text{ (A)},$$

$$I_4 = \frac{U_{\text{ac}}}{(R_4 + R_{567})} = \frac{80}{1+2} = 26,67 \text{ (A)}.$$

Для подальших розрахунків необхідно обчислити значення напруги між вузлами b і c:

$$U_{\text{bc}} = I_4 R_{567} = 26,67 \cdot 2 = 53,34 \text{ (B)}.$$

Тепер з'явилася можливість визначити значення двох останніх струмів I_5 та I_6 (див. рис. 13.2):

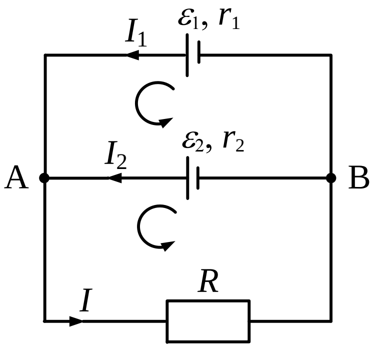


Рисунок 13.4

$$I_5 = \frac{U_{\rm bc}}{R_5} = \frac{53,34}{6} = 8,89 \text{ (A)},$$

$$I_6 = \frac{U_{\rm bc}}{(R_6 + R_7)} = \frac{53,34}{1+2} = 17,78 \text{ (A)}.$$

13.4. Розрахувати струми у кожному контурі кола, що зображене на рис.13.4, якщо $\varepsilon_1 = 2$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В, $r_1 = r_2 = 2$ Ом, $R = 9$ Ом.

$\varepsilon_1 = 2$ В,
$\varepsilon_2 = 4$ В,
$r_1 = r_2 = 2$ В,
$R = 9$ Ом
I_1, I_2, I—?

Виберемо напрямок струмів, як це показано на рис. 13.4. Кількість незалежних рівнянь, що можна записати за першим правилом Кірхгофа (13.11), дорівнює кількості вузлів у колі мінус один. Оскільки в нашому випадку вузлів лише два, ми можемо записати тільки одне рівняння. Запишемо перше правило Кірхгофа для вузла А:

$$I_1 + I_2 - I = 0.$$

Розглянемо замкнений контур АRВε_1, напрям обходу контура – проти годинникової стрілки. Відповідно до (13.12) запишемо друге правило Кірхгофа:

$$I_1 r_1 + IR = \varepsilon_1.$$

Аналогічно для контура АRВε_2 маємо

$$I_2 r_2 + IR = \varepsilon_2.$$

Вищезаписані рівняння – система трьох рівнянь відносно трьох невідомих. Розв'яжемо цю систему. Для цього з останніх двох рівнянь виразимо струми I_1 і I_2 та підставимо в перше рівняння:

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - IR}{r_1}; \quad I_2 = \frac{\varepsilon_2 - IR}{r_2};$$

$$\frac{\varepsilon_1 - IR}{r_1} + \frac{\varepsilon_2 - IR}{r_2} - I = 0;$$

$$r_2(\varepsilon_1 - IR) + r_1(\varepsilon_2 - IR) - Ir_1r_2 = 0;$$

$$r_2\varepsilon_1 - r_2IR + r_1\varepsilon_2 - r_1IR - Ir_1r_2 = 0;$$

$$r_2IR + r_1IR + Ir_1r_2 = r_2\varepsilon_1 + r_1\varepsilon_2;$$

$$I(r_2R + r_1R + r_1r_2) = r_2\varepsilon_1 + r_1\varepsilon_2;$$

$$I = \frac{r_2\varepsilon_1 + r_1\varepsilon_2}{r_2R + r_1R + r_1r_2} = \frac{\varepsilon_1r_2 + \varepsilon_2r_1}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Підставляючи числові дані, отримаємо значення сил струмів I, I_1 та I_2:

$$I = \frac{2\cdot 2 + 4\cdot 2}{2\cdot 2 + 9\cdot(2+2)} = 0,3 \text{ (А)},$$

$$I_1 = \frac{2 - 0,3\cdot 9}{2} = -0,35 \text{ (А)},$$

$$I_2 = \frac{4 - 0,3\cdot 9}{2} = 0,65 \text{ (А)}.$$

Знак "–" означає, що струм I_1 проходить у напрямку, протилежному до початково обраного. Для перевірки отриманих результатів обчислимо потенціал $\varphi_A - \varphi_B$, розраховуючи його окремо для кожної з трьох гілок кола. Для нижньої гілки

$$\varphi_A - \varphi_B = IR = 0,3\cdot 9 = 2,7 \text{ (В)}.$$

Для гілки, що містить ε_1, запишемо закон Ома (13.5):

$$I_1r_1 = \varepsilon_1 - (\varphi_A - \varphi_B),$$

звідки

$$\varphi_A - \varphi_B = \varepsilon_1 - I_1r_1 = 2 - (-0,35\cdot 2) = 2,7 \text{ (В)}.$$

Для гілки, що містить ε_2, закон Ома для неоднорідної ділянки кола (13.5) має вигляд

$$I_2 r_2 = \varepsilon_2 - (\varphi_A - \varphi_B),$$

звідки

$$\varphi_A - \varphi_B = \varepsilon_2 - I_2 r_2 = 4 - 0,65 \cdot 2 = 2,7 \text{ (В)}.$$

Як бачимо, знайдені значення $\varphi_A - \varphi_B$ для всіх гілок збігаються.

13.5. У схемі, зображеній на рис. 13.5, знайти струм I_2, що проходить через опір R_2, та спад напруги U_2 на ньому. ЕРС батареї $\varepsilon = 100$ В, опори $R_1 = R_3 = 40$ Ом, $R_2 = 80$ Ом, $R_4 = 34$ Ом. Внутрішнім опором батареї r знехтувати.

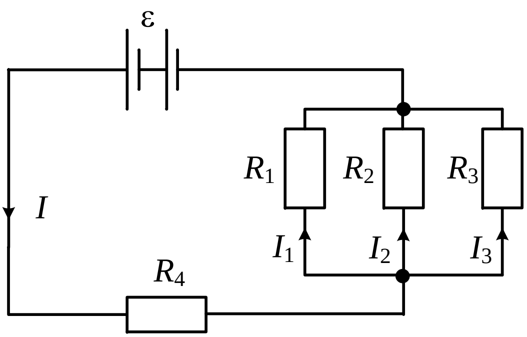


Рисунок 13.5

$\varepsilon = 100$ В,
$R_1 = 40$ Ом,
$R_2 = 80$ Ом,
$R_3 = 40$ Ом,
$R_4 = 34$ Ом,
$r \to 0$
I_2, U_2–?

Для паралельної ділянки кола

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

За формулою (13.10) знайдемо еквівалентний опір R_{123} паралельної ділянки:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{40} + \frac{1}{80} + \frac{1}{40} = \frac{1}{16} \text{ (Ом}^{-1}),$$

тобто $R_{123} = 16$ Ом. Повний опір кола знайдемо як

$$R = R_{123} + R_4 = 16 + 34 = 50 \text{ (Ом)}.$$

За законом Ома для повного кола (13.6):

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{100}{50} = 2 \text{ (А)}.$$

Напруга на затисках джерела

$$U = \varepsilon - I \cdot r,$$

але оскільки за умовою $r \to 0$, то $U = \varepsilon$. Спад напруги на опорі R_4

$$U_4 = IR_4 = 2 \cdot 34 = 68 \text{ (В)},$$

але $U = U_{123} + U_4$, звідки випливає, що

$$U_{123} = U_2 = U - U_4 = 100 - 68 = 32 \text{ (В)}.$$

Тобто шукана сила струму:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{32}{80} = 0,4 \text{ (А)}.$$

13.6. Реостат із залізного дроту, амперметр та генератор постійного струму ввімкнені послідовно, причому опір амперметра $R_{A0} = 20$ Ом. При температурі $t_0 = 0$ °C опір реостата $R_0 = 120$ Ом, амперметр показує струм $I_0 = 22$ мА. Який струм I покаже амперметр, якщо реостат нагріється до температури $t_1 = 50$ °C? Температурний коефіцієнт опору заліза $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

$t_0 = 0$ °C,
$R_0 = 120$ Ом,
$R_{A0} = 20$ Ом,
$I_0 = 22 \cdot 10^{-3}$ А,
$t_1 = 50$ °C,
$\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$
I–?

Запишемо закон Ома для початкового стану кола, використовуючи формулу (13.4):

$$I_0 = \frac{U}{R_0 + R_{A0}}, \quad U = I_0(R_0 + R_{A0}),$$

або після підстановки числових значень

$$U = 22 \cdot 10^{-3} \cdot (120 + 20) = 3,08 \text{ (В)}.$$

Після того як реостат нагрівся, його опір R_0 змінився і став дорівнювати R. Амперметр при цьому показує струм

$$I = \frac{U}{R + R_{A0}}.$$

Опір реостата після нагрівання може бути знайдений за формулою (13.8):

$$R = R_0(1 + \alpha t_1).$$

Відмітимо, що за умовою задачі нам відомий опір R_0, який мав реостат при початковій температурі $t_0 = 0$ °C. Тоді вираз для знаходження струму набирає вигляду

$$I = \frac{U}{R_0(1+\alpha t_1) + R_{A0}},$$

або після підстановки відомих і знайдених значень:

$$I = \frac{3,08}{120 \cdot (1 + 6 \cdot 10^{-3} \cdot 50) + 20} = 0,0175\ (\text{А}) = 17,5\ (\text{мА}).$$

13.7. Визначити сили струмів, що проходять через кожен опір електричного кола, зображеного на рис. 13.6, якщо ЕРС джерела 24 В, а його внутрішній опір $r = 2/3$ Ом. Опори $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом і $R_3 = 6$ Ом. Знайти напругу на затисках джерела U та ККД джерела η.

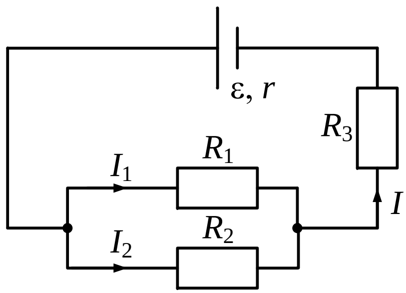


Рисунок 13.6

$\varepsilon = 24$ В,
$r = 2/3$ Ом,
$R_1 = 2$ Ом,
$R_2 = 4$ Ом,
$R_3 = 6$ Ом

U, I, I_1, I_2, η—?

За законом Ома для повного кола (13.6) сила струму, що проходить через опори r та R, дорівнює

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

де R — опір зовнішньої ділянки кола, який у нашому випадку визначається таким чином:

$$R = R_{12} + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3.$$

Тому сила струму

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{\varepsilon}{R_1 R_2/(R_1 + R_2) + R_3 + r} =$$

$$= \frac{\varepsilon \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + (R_3 + r) \cdot (R_1 + R_2)},$$

або після підстановки і знаходження числового значення:

$$I = \frac{24 \cdot (2 + 4)}{2 \cdot 4 + (6 + 2/3) \cdot (2 + 4)} = 3 \text{ (А)}.$$

Оскільки опори R_1 і R_2 з'єднані паралельно, напруга на них однакова:

$$U_1 = U_2 = IR_{12} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Сили струмів, що проходять через опори R_1 та R_2, відповідно

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{IR_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{IR_1}{R_1 + R_2}.$$

Після розрахунків маємо

$$I_1 = \frac{3 \cdot 4}{2 + 4} = 2 \text{ (А)},$$

$$I_2 = \frac{3 \cdot 2}{2 + 4} = 1 \text{ (А)}.$$

Напругу на затисках джерела можна знайти за формулами

$$U = \varepsilon - Ir = IR, \quad U = IR.$$

Підстановка числових значень до першої формули дає шукане значення:

$$U = 24 - 3 \cdot 2/3 = 22 \text{ (В)}.$$

За формулою (13.13) найдемо ККД джерела:

$$\eta = \frac{R}{R + r} \cdot 100\,\% = \frac{R_1 R_2/(R_1 + R_2) + R_3}{R_1 R_2/(R_1 + R_2) + R_3 + r} \cdot 100\,\% =$$

$$= \frac{R_1 R_2 + R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + (R_3 + r) \cdot (R_1 + R_2)} \cdot 100\,\%.$$

Знайдемо числове значення:

$$\eta = \frac{2 \cdot 4 + 6 \cdot (2 + 4)}{2 \cdot 4 + (6 + 2/3) \cdot (2 + 4)} \cdot 100\,\% = 91,67\,\%.$$

13.8. Знайти еквівалентний опір між затисками a і b кола, зображеного на рис. 13.7, якщо $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, $R_4 = 60$ Ом, $R_5 = 12$ Ом.

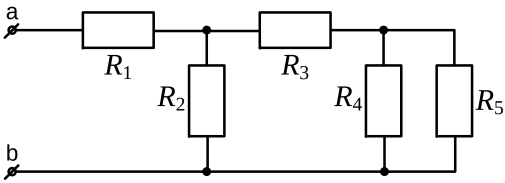


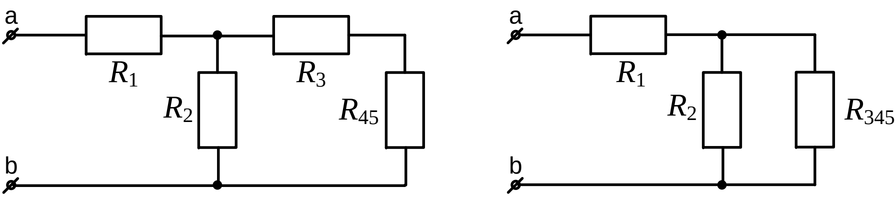
Рисунок 13.7

$R_1 = 12$ Ом,
$R_2 = 10$ Ом,
$R_3 = 30$ Ом,
$R_4 = 60$ Ом,
$R_5 = 12$ Ом
R_{ab}–?

На схемі виділимо ділянку кола з паралельним з'єднанням резисторів R_4 і R_5 та, замінюючи їх еквівалентним опором R_{45}, як це показано на рис. 13.8 а, отримаємо

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{60 \cdot 12}{60 + 12} = 10 \text{ (Ом)}.$$

Далі перетворимо послідовно з'єднані елементи R_3 і R_{45} в еквівалентний опір R_{345}, як це показано на рис. 13.8 б:



а) б)

Рисунок 13.8

$$R_{345} = R_3 + R_{45} = 30 + 10 = 40 \text{ (Ом)}.$$

Тепер замінимо паралельно з'єднані резистори R_2 і R_{345} еквівалентним опором R_{2345} (рис. 13.9 а). Еквівалентний пір R_{2345} розраховується як:

$$R_{2345} = \frac{R_2 R_{345}}{R_2 + R_{345}} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8 \text{ (Ом)}.$$

На завершення знайдемо еквівалентний опір усього кола з боку затисків a і b, враховуючи, що R_1 і R_{2345} з'єднані послідовно (рис. 13.9 б):

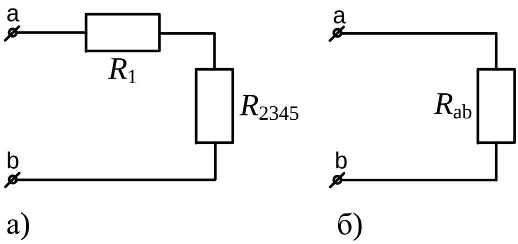


Рисунок 13.9

$$R_{\text{ab}} = R_1 + R_{2345} = 12 + 8 = 20\ (\text{Ом}).$$

Отже, ми знайшли еквівалентний опір кола, показаного на рис. 13.7, що дорівнює 20 Ом.

13.9. Джерело струму з ЕРС $\varepsilon = 12$ В та внутрішнім опором $r = 1$ Ом з'єднане з реостатом. Напруга на затисках джерела $U = 10$ В. Якої довжини потрібно взяти мідний дріт для виготовлення реостата, якщо його переріз $S = 1$ мм^2? Питомий опір міді $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8}$ Ом$\cdot$ м.

$\varepsilon = 12$ В,
$r = 1$ Ом,
$U = 10$ В,
$S = 10^{-6}$ м^2,
$\rho = 1,68 \cdot 10^{-8}$ Ом$\cdot$ м
l–?

Напруга на затисках джерела дорівнює спаду напруги на зовнішній ділянці кола:

$$U = IR = \varepsilon - Ir.$$

Звідси струм в колі дорівнює:

$$I = \frac{\varepsilon - U}{r}.$$

Комбінуючи записані рівності, отримуємо

$$R = \frac{U}{I} = \frac{Ur}{\varepsilon - U}.$$

Формула (13.7) задає залежність опору провідника від його геометричних розмірів:

$$R = \rho\frac{l}{S}.$$

Отримаємо формулу для розрахунку шуканої довжини дроту:

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{UrS}{\rho(\varepsilon - U)}.$$

Після розрахунків маємо

$$l = \frac{10 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1,68 \cdot 10^{-8} \cdot (12 - 10)} = 297,62 \text{ (м)}.$$

13.10. Джерело з ЕРС $\varepsilon = 4$ В і внутрішнім опором $r = 4$ Ом підключене до опорів $R_1 = 20$ Ом і $R_2 = 30$ Ом, як це показано на рис. 13.10. Визначити різницю потенціалів на затисках джерела ЕРС: 1) при розімкнутому колі; 2) при замиканні тільки ключа k_1; 3) при одночасному замиканні ключів k_1 і k_2.

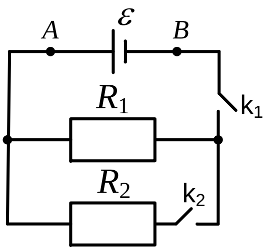


Рисунок 13.10

$\varepsilon = 4$ В, $r = 4$ Ом, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом
$(\varphi_A - \varphi_B)_1$, $(\varphi_A - \varphi_B)_2$, $(\varphi_A - \varphi_B)_3$–?

1. При розімкнутому колі різниця потенціалів $\varphi_A - \varphi_B$ дорівнює ЕРС, оскільки в колі струм не проходить ($I_1 = 0$) і на внутрішньому опорі r джерела немає спаду напруги:

$$(\varphi_A - \varphi_B)_1 = \varepsilon.$$

2. При замиканні тільки ключа k_1, по колу проходить струм. Згідно із законом Ома для повного кола (13.6) сила струму I_2 становить:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}.$$

У цьому разі різниця потенціалів

$$(\varphi_A - \varphi_B)_2 = I_2 R_1 = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + r} = \frac{4 \cdot 20}{20 + 4} = 3,33 \text{ (В)}.$$

3. Оскільки опори R_1 і R_2 з'єднані паралельно, при замиканні обох ключів k_1 і k_2 еквівалентний зовнішній опір кола знаходимо за формулою

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Сила струму в цьому разі

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{r + R_1 R_2/(R_1 + R_2)},$$

а шукана різниця потенціалів

$$(\varphi_A - \varphi_B)_3 = \varepsilon - I_3 r = \varepsilon - \frac{\varepsilon r}{r + R_1 R_2/(R_1 + R_2)}.$$

Після підстановки знайдемо

$$(\varphi_A - \varphi_B)_3 = 4 - \frac{4 \cdot 4}{4 + 20 \cdot 30/(20 + 30)} = 3 \text{ (В)}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

13.11. Фібриляція шлуночків серця полягає в їх хаотичному скороченні. Якщо при цьому пропустити через серце великий струм, то це призведе до збудження більшості клітин тканин міокарда і, як наслідок цього, може відновитися нормальний режим скорочення шлуночків. Відповідний апарат називається дефібрилятор. Технічно він виконаний у вигляді конденсатора, що заряджається до значної напруги, а потім розряджається через електроди, накладені на тіло хворого в ділянці серця. Знайти значення максимального струму під час дії дефібрилятора, якщо він заряджений до напруги $U = 5$ кВ, а опір ділянки тіла $R = 500$ Ом.

13.12. Для сухої шкіри опір між долонями рук може досягати значень $R_1 = 10^5$ Ом, для вологої шкіри цей опір значно менший ($R_2 = 1000$ Ом). Оцінити струм, що пройде через тіло людини при контакті з електромережею напругою $U = 220$ В.

13.13. Яка ЕРС елемента, якщо при підключенні до нього вольтметра опором $R = 20$ Ом він показує напругу $U = 1,37$ В, а при підключенні до ЕРС елемента опором $R_1 = 10$ Ом по колу проходить струм $I_1 = 0,132$ А?

13. Постійний струм. Внутрішній опір джерела. Правила Кірхгофа

13.14. Ділянка електричного кола складається з трьох послідовно з'єднаних провідників однакової довжини з одного матеріалу, але різного перерізу $S = 1, 2, 3$ мм^2 відповідно. Різниця потенціалів на кінцях ділянки $U = 10$ В. Визначити різницю потенціалів на кінцях окремих провідників.

13.15. Сила струму в провіднику рівномірно наростає від $I_0 = 0$ А до $I = 3$ А протягом часу $t = 10$ с. Визначити заряд Q, що пройшов у провіднику.

13.16. Визначити густину струму j в залізному провіднику довжиною $l = 10$ м, якщо він знаходиться під напругою $U = 6$ В.

13.17. Напруга U на шинах електростанції 6,6 кВ. Споживач знаходиться на відстані $l = 10$ км. Визначити площу S перерізу мідного провідника, який необхідно взяти для двопровідної лінії передачі, якщо сила струму I в лінії дорівнює 20 А і втрати напруги в провіднику не повинні перевищувати 3%.

13.18. Густина струму j в мідному провіднику дорівнює 3 А/мм^2. Знайти напруженість E електричного поля в ньому.

13.19. До батареї акумуляторів, ЕРС якої дорівнює 2 В і внутрішній опір $r = 0,5$ Ом, приєднаний провідник. Визначити: 1) опір R провідника, при якому потужність, що виділяється в ньому, максимальна; 2) потужність, що при цьому виділяється в провіднику. Для розв'язування задачі використовувати формулу (14.4).

13.20. Скільки витків дроту з ніхрому діаметром $d = 1$ мм потрібно намотати на фарфоровий циліндр радіусом $r = 2,5$ см, щоб отримати піч з опором $R = 40$ Ом?

13.21. Знайти опір R залізного стрижня діаметром $d = 1$ см, якщо його маса $m = 1$ кг.

13.22. Вольтметр, що підключений до акумулятора з внутрішнім опором 1 Ом, показує 1,2 В. Якщо послідовно з ним включити опір 20 Ом, вольтметр показує 1 В. Визначити опір вольтметра.

13.23. Два однакових опори підключено до джерела струму послідовно та паралельно. В якому випадку ККД кола буде більшим?

13.24. Два послідовно з'єднаних елементи з однаковою ЕРС $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ В та з внутрішніми опорами $r_1 = 1$ Ом і $r_2 = 1,5$ Ом замкнені на зовнішній опір $R = 0,5$ Ом. Знайти різницю потенціалів на затискачах кожного елемента.

13.25. Два опори $R_1 = 2$ Ом і $R_2 = 8$ Ом підключені в електромережу спочатку послідовно, а потім паралельно. У скільки разів відрізняються сили струмів у цих випадках?

13.26. На рис. 13.11 всі опори дорівнюють R. Визначити еквівалентний опір.

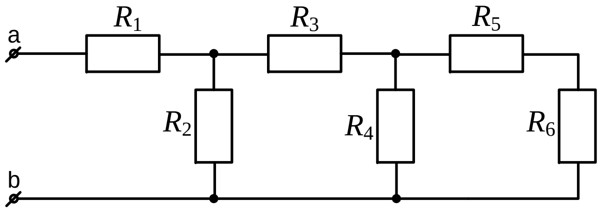


Рисунок 13.11

13.27. Батарея акумуляторів із внутрішнім опором $r = 1,4$ Ом та ЕРС $\varepsilon = 6$ В живить зовнішнє коло, що складається із двох паралельно з'єднаних опорів $R_1 = 2$ Ом і $R_2 = 8$ Ом. Визначити різницю потенціалів U на затискачах батареї і сили струмів I_1 і I_2, що проходять через опори.

13.28. Елемент з ЕРС $\varepsilon = 1,1$ В і внутрішнім опором $r = 1$ Ом замкнено на зовнішній опір $R = 9$ Ом. Визначити: 1) силу струму в колі I; 2) спад напруги U_1 у зовнішньому колі; 3) спад напруги U усередині елемента; 4) ККД елемента.

13.29. Батарея елементів з ЕРС $\varepsilon = 6$ В при замиканні на зовнішній опір $r = 1$ Ом дає струм силою $I = 3$ А. Яка буде сила струму I при короткому замиканні батареї?

13.30. Обмотка котушки з мідного дроту при $t_1 = 14$ °C має опір $R_1 = 10$ Ом. Після пропускання струму опір обмотки став дорівнювати $R_2 = 12,2$ Ом. До якої температури нагрілася обмотка? Температурний коефіцієнт опору міді $\alpha = 4,15 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

13.31. ЕРС елемента $\varepsilon = 6$ В. При зовнішньому опорі $R = 1,1$ Ом струм у колі $I = 3$ А. Знайти спад напруги U_r всередині елемента та його внутрішній опір r.

13.32. Знайти еквівалентний опір між затискачами a і b для кола, що зображене на рис. 13.12 а, якщо $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 30$ Ом, $R_5 = 60$ Ом.

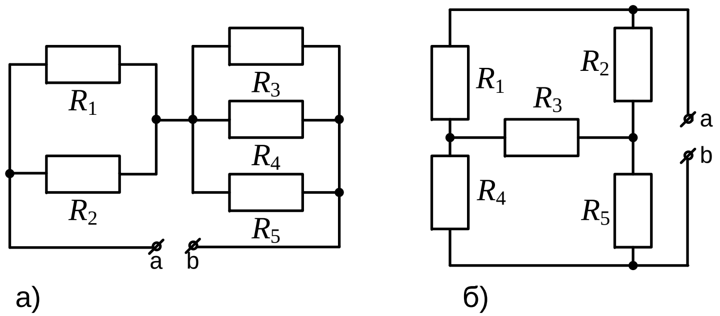


Рисунок 13.12

13.33. Знайти еквівалентний опір між затискачами a і b для кола, що зображене на рис. 13.12 б, якщо $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 60$ Ом, $R_4 = 14$ Ом, $R_5 = 2$ Ом.

13.34. Знайти загальний опір між клемами схеми, що зображена на рис. 13.13 а, якщо опори резисторів дорівнюють $R_1 = 9$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, $R_5 = 20$ Ом, $R_6 = 14$ Ом, $R_7 = 36$ Ом.

13.35. В електричному колі, що зображене на рис. 13.13 б, визначити струми всіх областей, якщо $\varepsilon = 20$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, $R_5 = 4$ Ом, $R_6 = 1$ Ом.

13.36. ЕРС батареї дорівнює 20 В. Опір R зовнішнього кола дорівнює 2 Ом, сила струму в колі $I = 4$ А. Знайти ККД батареї. При якому значенні зовнішнього опору R ККД батареї буде дорівнювати 99 %?

13.37. Джерело струму замкнене через опір, який у k разів пере-

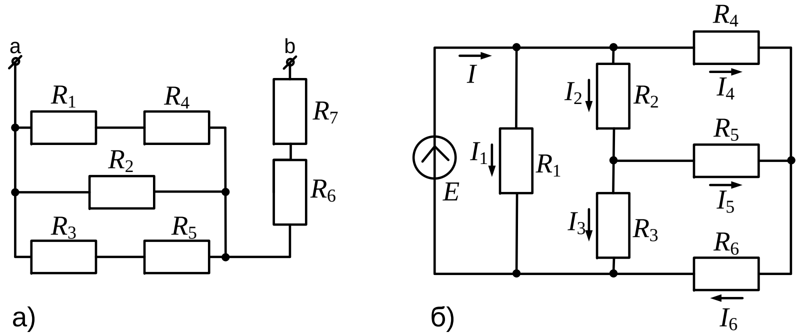


Рисунок 13.13

вищує внутрішній опір джерела r. Як зміниться ККД джерела, якщо паралельно зовнішньому опору під'єднати додатковий опір, який у n разів більший внутрішнього опору? Взяти: а) $k = 4$, $n = 2$, б) $k = 3$, $n = 3$.

13.38. Знайти внутрішній опір джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 18$ В, до якого підключено реостат з опором $R = 4$ Ом, якщо напруга на затискачах джерела 12 В.

13.39. До джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 6$ В і внутрішнім опором $r = 0,2$ Ом послідовно підключено амперметр і два резистори з опорами $R_1 = 1,8$ Ом і $R_2 = 10$ Ом. До другого резистора підключено вольтметр. Знайти показники приладів.

13.40. При температурі $t_1 = 20$ °C опір платинового дроту $R_1 = 20$ Ом, а при температурі $t_2 = 500$ °C опір становить $R_2 = 59$ Ом. Знайти значення температурного коефіцієнта α опору платини.

14. Електроліз. Теплова дія струму. Робота й потужність

Основні формули

- Густина електричного струму

$$j = nqv, \tag{14.1}$$

де n — концентрація заряджених частинок ($м^{-3}$); q — заряд кожної із частинок (Кл); v — швидкість їх спрямованого руху (м/с).

- Робота сил електростатичного поля

$$A = qU = IU\Delta t, \tag{14.2}$$

де q (Кл) — заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за проміжок часу Δt (с); U — напруга (В); I — сила струму (А).

- Закон Джоуля-Ленца

$$Q = I^2 R\Delta t = \frac{U^2\Delta t}{R}, \tag{14.3}$$

де R — опір (Ом); Q — кількість теплоти (Дж).

- Потужність струму — робота, що здійснюється за одиницю часу:

$$P = \frac{A}{t} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \tag{14.4}$$

Електричний струм у металах

- Напруженість електричного поля

$$E = \frac{U}{d} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}, \tag{14.5}$$

де d (м) — відстань між двома точками, між якими підтримується різниця потенціалів $\varphi_2 - \varphi_1$ (В).

- Сила, що діє на окремі вільні електрони:

$$F = eE, \tag{14.6}$$

де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона; E – напруженість (В/м).

- Середня швидкість теплового руху електрона

$$\langle \upsilon_T \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}}, \tag{14.7}$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; T – абсолютна температура (К); $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг – маса електрона.

- Середній час вільного пробігу електрона

$$\langle t \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle \upsilon_T \rangle}, \tag{14.8}$$

де $\langle \lambda \rangle$ – середня довжина вільного пробігу електрона (м).

- Середня швидкість упорядкованого руху електрона в електричному полі з напруженістю E:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{eE}{2m_e} \langle t \rangle. \tag{14.9}$$

- Густина струму (закон Ома в диференціальній формі)

$$j = ne\upsilon = \frac{ne^2 E}{2m_e} \langle t \rangle = \sigma E, \tag{14.10}$$

де σ – питома провідність матеріалу провідника – величина, обернена до його питомого опору (Ом$^{-1}$· м$^{-1}$).

Електричний струм в електролітах (розчини солей, кислот, лугів, розплави солей)

- Перший закон Фарадея (маса речовини, що виділяється при електролізі, прямо пропорційна кількості струму, що проходить через електроліт):

$$m = kq = kI\Delta t, \tag{14.11}$$

де k – електрохімічний еквівалент речовини (кг/Кл); Δt – час електролізу (с).

14. Електроліз. Теплова дія струму. Робота й потужність

- Другий закон Фарадея встановлює зв'язок між електорохімічним k та хімічним x еквівалентами речовини:

$$k = \frac{x}{F}, \quad x = \frac{\mu}{n}, \quad F = eN_A, \tag{14.12}$$

де x — хімічний еквівалент речовини; μ — молярна маса (кг/моль); n — валентність речовини; $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — стала Авогадро; $F = 96485,33$ Кл/моль — стала Фарадея.

- Об'єднаний закон Фарадея

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{n} \cdot I\Delta t. \tag{14.13}$$

- Густина струму в електроліті

$$j = qn(b_+ + b_-)E, \tag{14.14}$$

де b_+ і b_- — рухливості іонів відповідних знаків (м^2·В$^{-1}$·с$^{-1}$); n — концентрація іонів (м$^{-3}$).

- Густина струму насичення в газі

$$j_n = qNd, \tag{14.15}$$

де N — число пар іонів, що утворюються в одиниці об'єму за одиницю часу (м$^{-3}$· с$^{-1}$); d — відстань між електродами (м).

Приклади розв'язання задач

14.1. Обмотка електричного кип'ятильника має дві секції. Якщо ввімкнена тільки перша секція, то вода закипає за час $t_1 = 15$ хв, якщо тільки друга, то за час $t_2 = 30$ хв. За який час закипить вода, якщо обидві секції ввімкнути послідовно, паралельно?

$t_1 = 15$ хв, $t_2 = 30$ хв
t–?

Нехай Q – це кількість теплоти, яку потрібно передати воді, щоб вона закипіла. Згідно із законом Джоуля-Ленца (14.3)

$$Q = I^2 Rt.$$

За законом Ома (13.4)

$$I = \frac{U}{R}.$$

Комбінуючи ці вирази, матимемо

$$Q = \frac{U^2 t}{R}.$$

Позначимо опори спіралей як R_1 і R_2. Тоді при одночасному ввімкнені тільки однієї з них матимемо

$$R_1 = \frac{U^2 t_1}{Q}; \quad R_2 = \frac{U^2 t_2}{Q}.$$

При послідовному ввімкнені спіралей загальний опір R – це сума опорів R_1 і R_2:

$$R = R_1 + R_2 = \frac{U^2\,(t_1 + t_2)}{Q}.$$

Із закону Джоуля-Ленца (третя формула задачі) виразимо час t:

$$t = \frac{QR}{U^2}.$$

Після підстановки знайденого загального опору R матимемо

$$t = \frac{Q}{U^2} \cdot \frac{U^2\,(t_1 + t_2)}{Q} = t_1 + t_2 = 15 + 30 = 45 \text{ (хв)}.$$

При паралельному ввімкнені спіралей їх загальний опір знайдемо як

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad R = \frac{(U^2 t_1/Q) \cdot (U^2 t_2/Q)}{U^2 t_1/Q + U^2 t_2/Q} = \frac{U^2 t_1 t_2}{Q(t_1 + t_2)},$$

або шуканий час

$$t = \frac{QR}{U^2} = \frac{Q}{U^2} \cdot \frac{U^2 t_1 t_2}{Q(t_1 + t_2)} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Знайдемо числове значення:

$$t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{15 \cdot 30}{15 + 30} = 10 \text{ (хв)}.$$

14.2. Густина струму j в алюмінієвому провіднику дорівнює 1 А/мм^2. Знайти середню швидкість $\langle v \rangle$ спрямованого руху електронів, припускаючи, що число вільних електронів у фіксованому об'ємі алюмінію дорівнює кількості атомів у цьому об'ємі.

14. Електроліз. Теплова дія струму. Робота й потужність

$j = 10^6$ А/м^2, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $D = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\mu = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$\langle v \rangle$−?

Сила електричного струму — це заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу (13.1):

$$I = \frac{q}{t}.$$

Заряд q знайдемо як кількість вільних електронів N, помножену на заряд електрона e:

$$q = Ne.$$

За умовою задачі кількість вільних електронів дорівнює числу атомів, отже:

$$N = N_A \nu = N_A \frac{m}{\mu} = N_A \frac{DV}{\mu},$$

де ν — кількість молів речовини, m — маса речовини, D — її густина, V — об'єм, який займає речовина. Комбінуючи записані рівності, маємо

$$I = \frac{q}{t} = \frac{Ne}{t} = \frac{N_A DeV}{\mu t} = \frac{N_A DeSl}{\mu t},$$

де S — площа поперечного перерізу провідника, l — його довжина. Виразимо довжину l:

$$l = \frac{I\mu t}{N_A DeS}.$$

Оскільки швидкість визначається як $\langle v \rangle = l/t$, то

$$\langle v \rangle = \frac{I\mu}{N_A DeS}.$$

Беручи до уваги те, що густина струму $j = I/S$ (див. (13.3)), перепишемо останню формулу у вигляді

$$\langle v \rangle = \frac{j\mu}{N_A De},$$

або після підстановки числових значень:

$$\langle v \rangle = \frac{10^6 \cdot 27 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,038 \cdot 10^{-4} \ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

14.3. Дві електролітичні ванни з'єднані послідовно. У першій ванні виділилося $m_1 = 3,9$ г цинку, у другій за той самий час $m_2 = 2,24$ г заліза. Цинк двовалентний. Визначити валентність заліза.

$m_1 = 3,9 \cdot 10^{-3}$ кг,
$m_2 = 2,24 \cdot 10^{-3}$ кг,
$\mu_1 = 65 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,
$\mu_2 = 56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,
$n_1 = 2$
n_2–?

Оскільки ванни з'єднані послідовно, по них проходить однаковий струм I. Час процесів t також однаковий. Згідно із законом Фарадея (14.13)

$$m_1 = \frac{1}{F}\frac{\mu_1}{n_1}It; \quad m_2 = \frac{1}{F}\frac{\mu_2}{n_2}It.$$

Розділивши m_1 на m_2, знаходимо

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \Rightarrow n_2 = n_1\frac{m_1\mu_2}{m_2\mu_1}.$$

Знайдемо числове значення валентності:

$$n_2 = 2 \cdot \frac{3,9 \cdot 10^{-3} \cdot 56 \cdot 10^{-3}}{2,24 \cdot 10^{-3} \cdot 65 \cdot 10^{-3}} = 3.$$

14.4. Елемент замикають спочатку на зовнішній опір $R_1 = 2$ Ом, а потім на зовнішній опір $R_2 = 0,5$ Ом. В обох випадках у зовнішньому колі виділяється потужність $P = 2,54$ Вт. Знайти ЕРС елемента ε та його внутрішній опір r.

$R_1 = 2$ Ом,
$R_2 = 0,5$ Ом,
$P = 2,54$ Вт
ε, r–?

Потужність, що виділяється у зовнішньому колі (14.4):

$$P = I^2R,$$

де струм I визначається із закону Ома для повного кола (13.6):

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}.$$

Поєднавши ці формули, матимемо

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}.$$

За умовою відомо, що потужності в обох випадках однакові:

$$P = \frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1+r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2+r)^2}.$$

Із цього співвідношення можна знайти величину внутрішнього опору r:

$$\frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1+r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2+r)^2}; \qquad \frac{R_1}{(R_1+r)^2} = \frac{R_2}{(R_2+r)^2};$$

$$\frac{\sqrt{R_1}}{R_1+r}=\frac{\sqrt{R_2}}{R_2+r};\quad (R_2+r)\sqrt{R_1}=(R_1+r)\sqrt{R_2};$$

$$R_2\sqrt{R_1}+r\sqrt{R_1}=R_1\sqrt{R_2}+r\sqrt{R_2};$$

$$r(\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2})=R_1\sqrt{R_2}-R_2\sqrt{R_1};$$

$$r=\frac{R_1\sqrt{R_2}-R_2\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2}}=\frac{\sqrt{R_1R_2}(\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2})}{\sqrt{R_1}-\sqrt{R_2}}=\sqrt{R_1R_2}.$$

Знайдемо шукане значення:

$$r=\sqrt{R_1R_2}=\sqrt{2\cdot 0,5}=1\ (\text{Ом}).$$

ЕРС знайдемо із співвідношення для потужності:

$$P=\frac{\varepsilon^2R_1}{(R_1+r)^2};\quad \varepsilon^2=(R_1+r)^2\frac{P}{R_1};\quad \varepsilon=(R_1+r)\sqrt{\frac{P}{R_1}}.$$

Розрахуємо це значення:

$$\varepsilon=(2+1)\cdot\sqrt{\frac{2,54}{2}}=3,38\ (\text{Ом}).$$

14.5. Яку потужність споживає нагрівач електричного чайника, якщо об'єм води $V=1$ л закипає за час $\tau=5$ хв? Який опір нагрівача R, якщо напруга в мережі $U=120$ В? Початкова температура води $t_0=13,5\ ^\circ$С.

$V=10^{-3}$ м^3,
$\tau=300$ с,
$U=120$ В,
$t_0=13,5\ ^\circ$С,
$D=1000$ кг/м^3,
$c=4200$ Дж/(кг·К),
$t_k=100^\circ$С
P, R–?

Для того щоб нагріти воду об'ємом V до температури кипіння t_k за час τ, необхідна кількість теплоти (див. вираз (10.1) на стор. 155 першої частини посібника)

$$Q=cm\Delta T=cDV(t_k-t_0).$$

З іншого боку, кількість теплоти дорівнюватиме роботі електричного струму (див. (14.4)):

$$Q=P\tau.$$

Прирівнявши праві частини обох співвідношень, отримуємо

$$cDV(t_k-t_0)=P\tau,$$

звідки виразимо потужність P:

$$P = \frac{cDV(t_k - t_0)}{\tau}.$$

Після підстановки числових значень матимемо

$$P = \frac{4200 \cdot 1000 \cdot 10^{-3} \cdot (100 - 13,5)}{300} = 1211\ (\text{Вт}).$$

Опір нагрівача можна знайти за формулою (14.4):

$$P = \frac{U^2}{R}; \quad R = \frac{U^2}{P}.$$

Знайдемо числове значення:

$$R = \frac{120^2}{1211} = 11,9\ (\text{Ом}).$$

14.6. За який час t при електролізі водного розчину хлориду міді $CuCl_2$ на катоді виділиться маса міді $m = 4,74$ г, якщо сила струму при електролізі становить $I = 2$ А.

$m = 4,74 \cdot 10^{-3}$ кг,
$I = 2$ А,
$\mu = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,
$F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль,
$n = 2$
t–?

Згідно з першим законом Фарадея (14.11)

$$m = kIt.$$

Електрохімічний еквівалент хлориду міді знаходиться за формулою (14.12):

$$k = \frac{1}{F} \cdot \frac{\mu}{n},$$

що після підстановки дає значення

$$k = \frac{64 \cdot 10^{-3}}{9,65 \cdot 10^4 \cdot 2} = 331,6 \cdot 10^{-9}\ \left(\frac{\text{кг}}{\text{Кл}}\right).$$

З першого закону Фарадея (14.11)

$$m = kIt; \quad t = \frac{m}{kI}.$$

Підставляючи числові значення, отримуємо відповідь:

$$t = \frac{4,74 \cdot 10^{-3}}{331,6 \cdot 10^{-9} \cdot 2} = 7147\ (\text{с}) \approx\ 2\ (\text{год}).$$

14.7. За який час t при електролізі мідного купоросу $CuSO_4 \cdot 5H_2O$ маса мідної пластинки збільшиться на $\Delta m = 99$ г? Площа пластинки $S = 25$ см^2, густина струму $j = 200$ А/м^2. Знайти товщину d шару міді, що утворився на пластинці.

14. Електроліз. Теплова дія струму. Робота й потужність

$\Delta m = 99 \cdot 10^{-3}$ кг, $S = 25 \cdot 10^{-4}$ м^2, $j = 200$ А/м^2, $D = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м^3, $k = 331,6 \cdot 10^{-9}$ кг/Кл
t, d–?

Згідно з першим законом Фарадея (14.11)

$$\Delta m = kIt.$$

Силу струму I знайдемо за формулою (13.3):

$$I = jS.$$

Або, підставляючи це значення до першої формули:

$$\Delta m = kjSt.$$

Отримуємо остаточний вираз для часу:

$$t = \frac{\Delta m}{kjS},$$

або після розрахунку

$$t = \frac{99 \cdot 10^{-3}}{331,6 \cdot 10^{-9} \cdot 200 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 597105 \text{ (с)} \approx 7 \text{ (діб)}.$$

Об'єм шару міді, що утворився в результаті:

$$V = Sd = \frac{\Delta m}{D},$$

звідки знайдемо товщину шару:

$$d = \frac{\Delta m}{DS} = \frac{99 \cdot 10^{-3}}{8,9 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 4,45 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 4,45 \text{ (мм)}.$$

14.8. По залізному провіднику, діаметр якого $d = 0,6$ мм, проходить струм $I = 16$ А. Знайти середню швидкість $\langle v \rangle$ спрямованого руху електронів, вважаючи, що концентрація n вільних електронів дорівнює концентрації атомів кола n'.

$d = 0,6 \cdot 10^{-3}$ м, $I = 16$ А, $n = n'$, $\mu = 56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $D = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м^3
$\langle v \rangle$–?

Середня швидкість спрямованого руху електронів дорівнює

$$\langle v \rangle = \frac{l}{t},$$

де t — час, за який N вільних електронів, що знаходяться між кінцями провідника, перенесуть заряд

$$q = Ne$$

та створять струм (див. (13.1)):

$$I = \frac{q}{t} = \frac{Ne}{t}.$$

Кількість вільних електронів у циліндричному дроті можна знайти за формулою

$$N = nV = nSl,$$

де V – об'єм провідника, S – площа його поперечного перерізу, l – його довжина. За умовою задачі

$$n = n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{\mu/D} = \frac{N_A D}{\mu},$$

де V_m – молярний об'єм металу, μ – його молярна маса. Підставляючи послідовно вирази для концентрації у вираз для кількості вільних електронів, а потім, відповідно, у рівність для струму, отримаємо

$$I = \frac{N_A DSle}{\mu t}.$$

Виразимо довжину:

$$l = \frac{I\mu t}{N_A DeS}.$$

Записавши площу через діаметр

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

отримаємо остаточну формулу швидкості спрямованого руху електронів:

$$\langle v \rangle = \frac{4I\mu}{\pi d^2 N_A De},$$

$$\langle v \rangle = \frac{4 \cdot 16 \cdot 56 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (0,6 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} =$$
$$= 0,00422 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right) = 4,22 \left(\frac{\text{мм}}{\text{с}}\right).$$

14.9. Скільки атомів двовалентного металу виділиться на поверхні електрода площею 1 см^2 за час $t = 5$ хв, якщо густина струму $j = 10$ А/м^2?

$S = 10^{-4}$ м^2, $t = 300$ с, $j = 10$ А/м^2, $n = 2$, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $F = 9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль
N–?

За законом Фарадея (14.13)

$$m = \frac{1}{F}\frac{\mu}{n}It,$$

звідки кількість речовини ν:

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{It}{Fn}.$$

З іншого боку, кількість речовини можна знайти із співвідношення

$$\nu = \frac{N}{N_A}.$$

Виразимо кількість атомів N:

$$N = N_A\nu = N_A\frac{It}{Fn}.$$

Струм I можна виразити через відому величину густини струму j (13.3):

$$j = \frac{I}{S}; \quad I = jS.$$

У результаті матимемо

$$N = N_A\frac{It}{Fn} = N_A\frac{jSt}{Fn}.$$

Розрахуємо числове значення:

$$N = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-4} \cdot 300}{9,65 \cdot 10^4 \cdot 2} = 9,36 \cdot 10^{17}.$$

14.10. Металевий провідник рухається вздовж своєї осі. Швидкість руху $v = 200$ м/с. Визначити заряд q, що пройде через гальванометр, що підключений до кінців провідника при його різкому гальмуванні. Довжина L провідника становить 10 м, а опір R усього кола (включаючи гальванометр) дорівнює 10 мОм.

$v = 200$ м/с, $L = 10$ м, $R = 10^{-2}$ Ом, $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
q–?

При гальмуванні на кожний вільний електрон діє сила інерції:

$$F = -ma.$$

Дія цієї сили еквівалентна тому, що електрон знаходиться в деякому силовому полі, напруженість якого

$$E = \frac{F}{e} = -\frac{ma}{e}.$$

Різниця потенціалів на кінцях провідника

$$U = \int_0^L E\mathrm{d}l = -\frac{ma}{e}\int_0^L \mathrm{d}l = -\frac{maL}{e}.$$

Тут враховано, що прискорення однакове для всіх частинок усередині провідника. Згідно із законом Ома (13.4)

$$U = IR = -\frac{maL}{e},$$

звідки сила струму

$$I = -\frac{maL}{eR}.$$

Сила струму пов'язана із зарядом співвідношенням (13.1):

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},$$

а прискорення пов'язане зі швидкістю як

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Підставляючи співвідношення для прискорення у вираз для сили струму, отримуємо

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{mL}{eR}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \int_0^q \mathrm{d}q' = -\frac{mL}{eR}\int_v^0 \mathrm{d}v'.$$

Отже, вираз для визначення заряду набирає вигляду

$$q = \frac{mLv}{eR},$$

що при підстановці дає результат

$$q = \frac{9,11\cdot 10^{-31}\cdot 10\cdot 200}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-2}} = 1,14\cdot 10^{-6}\ (\text{Кл}).$$

14. Електроліз. Теплова дія струму. Робота й потужність

Задачі для самостійного розв'язування

14.11. По мідному провіднику довжиною $l = 2$ м і площею S поперечного перерізу 0,4 мм^2 проходить струм. При цьому кожну секунду виділяється кількість теплоти $Q = 0,35$ Дж. Скільки електронів N проходить за 1 с через поперечний переріз цього провідника?

14.12. У мідному провіднику об'ємом $V = 6$ см^3 при проходженні постійного струму виділилася кількість теплоти $Q = 216$ Дж за час $t = 1$ хв. Обчислити напруженість E електричного поля в провіднику.

14.13. Визначити об'ємну густину теплової потужності ω у металевому провіднику, якщо густина струму $j = 10$ А/мм^2. Напруженість E електричного поля в провіднику дорівнює 1 мВ/м.

14.14. Сила струму I в металевому провіднику дорівнює 0,8 А, переріз провідника 4 мм^2. Приймаючи, що в кожному кубічному сантиметрі металу міститься $n = 2,5 \cdot 10^{22}$ вільних електронів, визначити середню швидкість $\langle v \rangle$ їх спрямованого руху.

14.15. Температура водного термостата об'ємом $V = 1$ л підтримується постійною за допомогою нагрівача потужністю $P = 26$ Вт. На нагрівання води витрачається 80 % цієї потужності. На скільки знизиться температура води в термостаті за час $t = 10$ хв, якщо нагрівач вимкнути?

14.16. При електролізі мідного купоросу за час $t = 5$ год виділився шар міді. Густина струму $j = 80$ А/м^2. Визначити товщину шару.

14.17. У ртутному дифузійному насосі за хвилину випаровується $m_1 = 100$ г ртуті. Яким має бути опір нагрівача R насоса, якщо він вмикається в мережу з напругою $U = 127$ В? Питома теплота пароутворення ртуті $r = 296$ кДж/кг.

14.18. Чайник, наповнений водою об'ємом $V = 1$ л при температурі $t = 10$ °C стоїть на плиті з потужністю $P = 0,5$ кВт. Вода закипає через $\tau = 20$ хв після того, як увімкнули плиту. Яка кількість теплоти Q втрачається при цьому на нагрівання самого чайника?

14.19. Густина струму в пучку електронів j, швидкість електронів v. Визначити густину заряду в пучку.

14.20. При силі струму $I_1 = 3$ А в зовнішньому колі батареї акумуляторів виділяється потужність $P_1 = 18$ Вт, при силі струму $I_2 = 1$ А – відповідно $P_2 = 10$ Вт. Визначити ЕРС ε і внутрішній опір r батареї.

14.21. Визначити кількість речовини ν і число атомів N двовалентного металу, що утворюється на катоді електролітичної ванни, якщо через розчин проходить струм силою $I = 2$ А протягом $t = 5$ хв.

14.22. Визначити кількість алюмінію, що виділяється на катоді при електролізі (електроліт Al_2SO_4), якщо було затрачено 20 кВт·год енергії при напрузі на електродах 12 В, ККД установки 80 %. Електрохімічний еквівалент алюмінію $k = 9,3 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл.

14.23. При нікелюванні виробу протягом 1 год утворився шар нікелю товщиною $h = 0,01$ мм. Визначити густину струму j, якщо густина нікелю $D = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

14.24. Об'єм води $V = 4,5$ л можна закип'ятити, витративши електричну енергію 0,5 кВт·год. Знайти ККД нагрівача, якщо початкова температура води $t_0 = 23\,^\circ$C.

14.25. Знайти кількість теплоти Q, що виділяється за одиницю часу в одиниці об'єму мідного провідника, якщо густина струму $j = 300$ кА/м^2.

14.26. При електролізі мідного купоросу за час $t = 1$ год виділилася маса міді $m = 0,5$ г. Площа кожного електрода $S = 75$ см^2. Знайти густину струму j.

14.27. Знайти густину струму j в електроліті, якщо концентрація іонів у ньому $n = 10^5$ см$^{-3}$, їх рухливість $b_+ = 4,5 \cdot 10^{-4}$ см^2/(В·с), $b_- = 6,5 \cdot 10^{-4}$ см^2/(В·с), а напруженість електричного поля $E = 10$ В/см. Вважаючи густину струму однаковою, знайти силу струму, якщо площа кожного електрода $S = 1$ дм^2. Прийняти заряд іона таким, що дорівнює заряду електрона.

14.28. Визначити електричну енергію, що витрачена на отримання 200 г срібла, якщо ККД установки 80 %, а електроліз відбувається при напрузі 20 В.

14.29. Площа кожного електрода камери $S = 0,01$ м^2, відстань між ними $d = 6,2$ см. Знайти струм насичення I_n у такій камері, якщо в одиниці об'єму за одиницю часу утворюється кількість однаково заряджених іонів кожного знака $N = 10^{15}$ м$^{-3}\cdot$ с$^{-1}$.

14.30. При якій температурі T атоми ртуті мають кінетичну енергію поступального руху достатню для іонізації? Потенціал іонізації атома ртуті $U = 10,4$ В.

14.31. Електрична плитка потужністю 1 кВт з ніхромовою спіраллю вмикається в мережу з напругою 220 В. Скільки метрів провідника діаметром 0,5 мм потрібно взяти для виготовлення спіралі, якщо температура нитки 900 °C? Питомий опір ніхрому при температурі 0 °C становить $\rho_0 = 1$ мкОм $\cdot$ м, а температурний коефіцієнт опору $\alpha = 0,4 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

15. Магнітне поле

Основні формули

- Магнітний момент замкненого плоского контура зі струмом

$$\mathbf{p}_\mathrm{m} = IS\mathbf{n}, \tag{15.1}$$

де I – сила струму (A); S – площа контура (м^2); $\mathbf{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні рамки.

- Момент сили, що діє на рамку зі струмом у магнітному полі:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_\mathrm{m} \times \mathbf{B}], \quad M = p_\mathrm{m} B \sin\alpha, \tag{15.2}$$

де B – індукція магнітного поля (Тл); α – кут між нормаллю до площини рамки і вектором індукції $\mathbf{B}$.

- Зв'язок напруженості магнітного поля $\mathbf{H}$ і магнітної індукції $\mathbf{B}$ в однорідному нескінченному середовищі

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \tag{15.3}$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала; μ – відносна магнітна проникність середовища.

- Закон Біо – Савара – Лапласа (див. рис. 15.1):

$$\mathrm{d}\mathbf{H} = \frac{I[\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}, \quad \mathrm{d}H = \frac{I \mathrm{d}l \sin\alpha}{4\pi r^2}, \tag{15.4}$$

де $\mathrm{d}\mathbf{H}$ – вектор напруженості магнітного поля (А/м), що створюється елементом струму $I\mathrm{d}\mathbf{l}$; $\mathbf{r}$ – радіус-вектор, проведений від елемента струму в точку A, в якій визначається $\mathrm{d}\mathbf{H}$; $r = |\mathbf{r}|$ (м).

- Напруженість магнітного поля в центрі колового струму радіусом r

$$H = \frac{I}{2r}. \tag{15.5}$$

15. Магнітне поле

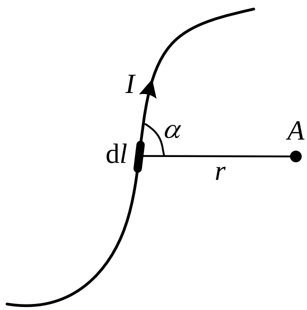


Рисунок 15.1

- Напруженість магнітного поля, що утворюється прямолінійним відрізком провідника зі струмом:

$$H = \frac{I}{4\pi b}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) = \frac{I}{4\pi b}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2), \qquad (15.6)$$

де b (м) — відстань від осі провідника до точки A (див. рис. 15.2).

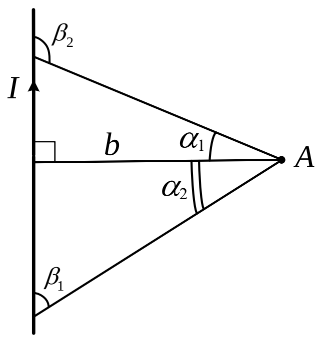


Рисунок 15.2

- Напруженість магнітного поля, що створюється нескінченно довгим провідником зі струмом:

$$H = \frac{I}{2\pi b}, \qquad (15.7)$$

де b — відстань від осі провідника до точки, в якій визначається напруженість (м).

- Напруженість магнітного поля в центрі довгого соленоїда

$$H = \frac{IN}{l}, \tag{15.8}$$

де N — кількість витків; l — довжина соленоїда (м).

- Напруженість магнітного поля в центрі соленоїда довжиною l

$$H = \frac{IN}{2l}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right), \tag{15.9}$$

де кути β_1 і β_2 показані на рис. 15.7 на с. 50.

- Поперечна (холлівська) різниця потенціалів (див. рис. 15.3):

$$\Delta\varphi = \upsilon Ba = \frac{jBa}{ne} = \frac{RBI}{d}, \tag{15.10}$$

де υ — швидкість спрямованого руху електронів (м/с); B — магнітна індукція (Тл); a — ширина пластинки (м); j — густина струму (А/м^2); n — концентрація електронів у провіднику (м$^{-3}$); $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд електрона; I — сила струму (А); d — товщина пластинки (м); $R = 1/(en)$ — стала Холла (м^3/Кл).

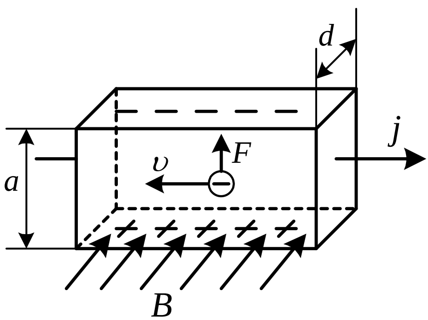


Рисунок 15.3

15. Магнітне поле

Приклади розв'язання задач

15.1. На виток із дроту радіусом 10 см, що поміщений між полюсами магніту, діє максимальний механічний момент 6,5 мкН·м. Сила струму у витку становить $I = 2$ A. Визначити магнітну індукцію B поля між полюсами магніту. Дією магнітного поля Землі знехтувати.

$r = 0,1$ м, $I = 2$ A, $M_{\max} = 6,5 \cdot 10^{-6}$ Н·м
$B-?$

На контур зі струмом (виток або рамку), поміщений у магнітне поле, діє обертальний момент, що визначається формулою (15.2):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_{\mathrm{m}} \times \mathbf{B}],$$

де $\mathbf{p}_{\mathrm{m}}$ – магнітний момент контура зі струмом (15.1):

$$\mathbf{p_m} = p_m\mathbf{n}; \quad p_{\mathrm{m}} = IS,$$

де $\mathbf{n}$ – одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом позитивної нормалі контура; S – площа контура. Таким чином, контур зі струмом у магнітному полі буде повертатися доти, поки вектор $\mathbf{n}$ не збігатиметься з напрямом $\mathbf{B}$, тобто контур зі струмом у магнітному полі орієнтується. Абсолютне значення вектора $\mathbf{M}$ знаходимо за формулою (15.2):

$$M = p_{\mathrm{m}} B \sin\alpha.$$

За умовою задачі на виток із провідника діє максимальний магнітний момент. При цьому кут α між векторами $\mathbf{p}$ і $\mathbf{B}$ становитиме $90°$, отже, $\sin\alpha = 1$. З урахуванням (15.1) маємо

$$M_{\max} = ISB,$$

де площу контура легко розрахувати за формулою

$$S = \pi r^2.$$

Запишемо остаточний вираз для визначення індукції B:

$$B = \frac{M_{\max}}{I\pi r^2}.$$

Розрахуємо це значення:

$$B = \frac{6,5 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 0,1^2} = 103,5 \cdot 10^{-6}\ (\text{Тл}) = 103,5\ (\text{мкТл}).$$

15.2. На рис. 15.4 зображено переріз двох прямолінійних нескінченно довгих провідників зі струмами $I_1 = 20$ А і $I_2 = 30$ А. Відстань між ними AB = 10 см. Знайти напруженість магнітного поля, утвореного струмами I_1 та I_2 в точках M_1, M_2 та M_3. Відстані $M_1A = 2$ см, $AM_2 = 4$ см та $BM_3 = 3$ см.

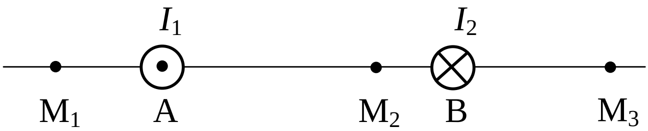


Рисунок 15.4

$AB = 0,1$ м,
$I_1 = 20$ А,
$I_2 = 30$ А,
$M_1A = 0,02$ м,
$AM_2 = 0,04$ м,
$BM_3 = 0,03$ м
$H_{M_1}, H_{M_2}, H_{M_3}$—?

Згідно з принципом суперпозиції напруженості H_1, H_2 і H_3 магнітного поля в точках M_1, M_2 і M_3 складатимуться з напруженостей, що створюються струмами I_1 і I_2. За правилом правого гвинта напруженості в точках M_1, M_2 і M_3 будуть напрямлені, як це показано на рис. 15.5. При цьому справедливі такі векторні рівності:

$$\mathbf{H}_{M_1} = \mathbf{H}_1^A + \mathbf{H}_1^B,$$

$$\mathbf{H}_{M_2} = \mathbf{H}_2^A + \mathbf{H}_2^B,$$

$$\mathbf{H}_{M_3} = \mathbf{H}_3^A + \mathbf{H}_3^B.$$

Напруженість магнітного поля H, що створюється нескінченно дов-

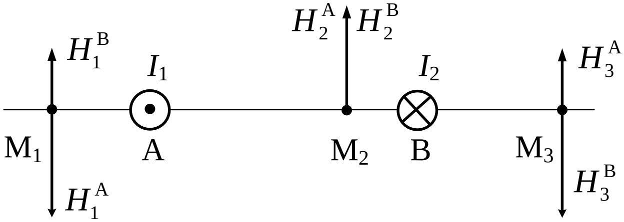


Рисунок 15.5

гим провідником зі струмом на відстані b від провідника, задається виразом (15.7):

$$H = \frac{I}{2\pi b}.$$

За цією формулою знайдемо всі компоненти, що показані на рис. 15.5:

$$H_1^{\mathrm{A}} = \frac{I_1}{2\pi \cdot \mathrm{M_1A}} = \frac{20}{2\pi \cdot 0,02} = 159,2 \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{м}}\right),$$

$$H_1^{\mathrm{B}} = \frac{I_2}{2\pi \cdot (\mathrm{AB} + \mathrm{M_1A})} = \frac{30}{2\pi \cdot (0,1 + 0,02)} = 39,8 \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{м}}\right),$$

$$H_2^{\mathrm{A}} = \frac{I_1}{2\pi \cdot \mathrm{AM_2}} = \frac{20}{2\pi \cdot 0,04} = 79,6 \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{м}}\right),$$

$$H_2^{\mathrm{B}} = \frac{I_2}{2\pi \cdot (\mathrm{AB} - \mathrm{AM_2})} = \frac{30}{2\pi \cdot (0,1 - 0,04)} = 79,6 \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{м}}\right),$$

$$H_3^{\mathrm{A}} = \frac{I_1}{2\pi \cdot (\mathrm{AB} + \mathrm{BM_3})} = \frac{20}{2\pi \cdot (0,1 + 0,03)} = 24,5 \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{м}}\right),$$

$$H_3^{\mathrm{B}} = \frac{I_2}{2\pi \cdot \mathrm{BM_3}} = \frac{30}{2\pi \cdot 0,03} = 159,2 \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{м}}\right).$$

Звідси з урахуванням рисунка матимемо шукані величини:

$$H_{\mathrm{M_1}} = H_1^{\mathrm{A}} - H_1^{\mathrm{B}} = 159,2 - 39,8 = 119,4 \ (\mathrm{A/м}),$$

$$H_{\mathrm{M_2}} = H_2^{\mathrm{A}} + H_2^{\mathrm{B}} = 79,6 + 79,6 = 159,2 \ (\mathrm{A/м}),$$

$$H_{\mathrm{M_3}} = H_3^{\mathrm{B}} - H_3^{\mathrm{A}} = 159,2 - 24,5 = 134,7 \ (\mathrm{A/м}).$$

15.3. По прямому провіднику довжиною $l = 80$ см проходить струм $I = 50$ А. Визначити магнітну індукцію поля, що створюється струмом у точці, яка рівновіддалена від кінців провідника та знаходиться на відстані $r_0 = 30$ см від його середини.

$l = 0,8$ м,
$I = 50$ А,
$r_0 = 0,3$ м,
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
B–?

Згідно з рис. 15.2 і законом Біо — Савара — Лапласа (15.6) з урахуванням співвідношення (15.3) матимемо

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2),$$

Із геометрії задачі випливає, що

$$\cos\beta_2 = -\cos\beta_1,$$

звідки

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos\beta_1.$$

Знайдемо значення косинуса кута. Із рисунка випливає, що

$$\cos\beta_1 = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

З урахуванням цього закон Біо – Савара – Лапласа набирає вигляду

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cdot \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

Виконаємо розрахунки:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{2\pi \cdot 0,3} \cdot \frac{0,8}{\sqrt{4 \cdot 0,3^2 + 0,8^2}} = 26,7 \cdot 10^{-6}\ (\text{Тл}) = 26,7\ (\text{мкТл}).$$

15.4. Знайти напруженість магнітного поля H, що створюється прямолінійним відрізком провідника АВ зі струмом $I = 20$ А в точці С, розташованій на перпендикулярі до його середини на відстані $a = 5$ см від провідника (рис. 15.6 а). Відрізок АВ видно з точки С під кутом $\alpha = 60°$.

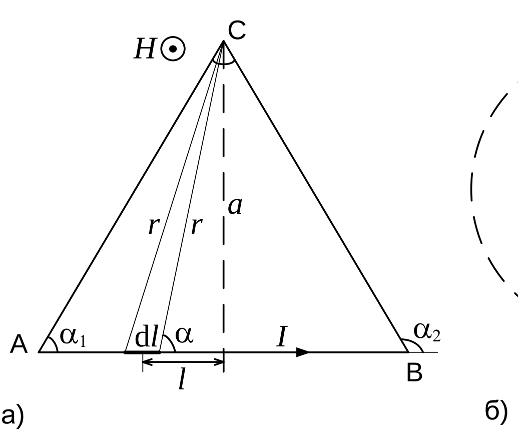


Рисунок 15.6

15. Магнітне поле

$a = 0,05$ м, $I = 20$ А, $\alpha = 60^\circ$
H–?

Закон Біо – Савара – Лапласа (15.4) дозволяє визначити напруженість H, що створюється елементом провідника $\mathrm{d}l$, вздовж якого проходить струм I:

$$\mathrm{d}H = \frac{I \mathrm{d}l \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

де r – відстань від точки, в якій визначається напруженість H до елемента струму $I\mathrm{d}l$; α – кут між радіус-вектором $\mathbf{r}$ та елементом струму. Геометрія задачі показана на рис. 15.6 а. Нам потрібно визначити напруженість у точці С, що створюється провідником АВ. Для цього розіб'ємо провідник на нескінченну кількість елементарних відрізків $\mathrm{d}l$, один із яких показаний на рисунку. При $\mathrm{d}l \to 0$ відстань від точки С до обох кінців кожного відрізка $\mathrm{d}l$ буде однаковою, позначимо її через r. Кут між відрізком $\mathrm{d}l$ і напрямом до точки С позначимо через α. Потрібно зазначити, що згідно з правилом правого гвинта складові напруженості від усіх відрізків $\mathrm{d}l$ будуть паралельними й спрямованими до нас, як це показано на рисунку. Тобто результуючу напруженість у точці С можна знайти як алгебраїчну суму складових напруженості від усіх елементарних ділянок $\mathrm{d}l$. Відповідно до записаного закону Біо – Савара – Лапласа це визначений інтеграл вигляду

$$\int_0^H \mathrm{d}H' = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2}\mathrm{d}l; \quad H = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2}\mathrm{d}l.$$

У нашому випадку за границі інтегрування зручно обрати граничні значення кута α, який згідно з рисунком змінюється від α_2 до α_1. На даний момент під знаком інтеграла три змінні – кут α, відстань r і довжина l. Для визначення інтеграла змінна має бути лише одна, по якій і проводитиметься інтегрування. Згідно з обраними границями інтегрування це має бути кут α. Із рисунка випливає, що

$$l = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Тоді диференціал $\mathrm{d}l$

$$\mathrm{d}l = l'_\alpha \mathrm{d}\alpha = -\frac{a}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

Відповідно до рисунка через кут α легко визначити відстань r:

$$r = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Виходячи з цього, отримаємо більш зручний інтегральний вираз:

$$H = \int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1} \left(\frac{I\sin\alpha}{4\pi}\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}\right)\left(-\frac{a}{\sin^2\alpha}\right)\mathrm{d}\alpha = -\frac{I}{4\pi a}\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_1}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{I}{4\pi a}\cos\alpha\Big|_{\alpha_2}^{\alpha_1} = \frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Фактично ми щойно отримали формулу (15.6). За умовою задачі висота трикутника збігається з його медіаною, причому верхній кут 60°. Це означає, що трикутник рівносторонній і всі його кути дорівнюють 60°. Тому

$$\alpha_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

отже, результуюча індуктивність

$$H = \frac{20}{4\cdot\pi\cdot 0,05}(\cos 60^\circ - \cos 120^\circ) = 31,83\ \left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right).$$

15.5. Коловий виток радіусом r, по якому проходить струм I_2, знаходиться поблизу нескінченного прямого провідника, по якому проходить струм I_1. Провідник та виток знаходяться в одній площині (рис. 15.6 б). Відстань від центра витка до провідника $2r$. Визначити індукцію магнітного поля в центрі витка. Як має змінитися сила струму I_2, щоб індукція магнітного поля в центрі витка дорівнювала нулю?

$r, I_2,$ $I_1, 2r$
$B, I_2'-?$

Магнітне поле утворюється прямолінійним провідником зі струмом та коловим витком. Вектор індукції поля $\mathbf{B_1}$, що утворюється прямим провідником зі струмом (рис. 15.6 б), лежить у площині креслення. Вектор індукції магнітного поля витка зі струмом $\mathbf{B_2}$ перпендикулярний до площини витка і також лежить у площині креслення. Згідно з принципом суперпозиції полів $\mathbf{B} = \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2}$, або в проекції на вісь y:

$$B = B_1 - B_2.$$

Для знаходження цих величин використаємо формули (15.5) і (15.7):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2r}.$$

Тоді результуюча індукція магнітного поля запишеться як

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r} - \frac{\mu_0 I_2}{2r} = \frac{\mu_0}{2r}\left(\frac{I_1}{2\pi} - I_2\right).$$

Індукція магнітного поля B в центрі витка буде нульовою, якщо вираз у дужках у попередній формулі дорівнюватиме нулю:

$$\frac{I_1}{2\pi} - I_2' = 0; \quad I_2' = \frac{I_1}{2\pi}.$$

Отже, для того щоб індукція магнітного поля в центрі колового витка дорівнювала нулю, сила струму I_2, що проходить по витку, має збільшитися на величину

$$\Delta I_2 = I_2' - I_2 = \frac{I_1}{2\pi} - I_2.$$

15.6. У центрі колового витка утворюється магнітне поле напруженістю H при різниці потенціалів U_1 на кінцях витка. Яку потрібно прикласти різницю потенціалів U_2, щоб отримати таку саму напруженість магнітного поля в центрі витка вдвічі більшого радіуса.

H, U_1
U_2—?

Напруженість у центрі колового витка зі струмом (15.5)

$$H = \frac{I}{2r},$$

де r — радіус витка. За законом Ома (13.4)

$$I = \frac{U}{R},$$

де опір провідника (13.7)

$$R = \rho\frac{l}{S}.$$

Для колового витка радіусом r довжина провідника $l_1 = 2\pi r$, отже, опір та сила струму визначаються як

$$R_1 = \rho\frac{2\pi r}{S}, \qquad I_1 = \frac{U_1 S}{2\rho\pi r}.$$

Для колового витка радіусом $2r$ довжина провідника $l_2 = 4\pi r$, звідки опір та сила струму відповідно:

$$R_2 = \rho\frac{4\pi r}{S}, \qquad I_2 = \frac{U_2 S}{4\rho\pi r}.$$

За умовою

$$H = \frac{I_1}{2r} = \frac{I_2}{4r},$$

отже

$$\frac{U_1 S}{4\rho\pi r^2} = \frac{U_2 S}{16\rho\pi r^2},$$

звідки остаточно

$$U_2 = 4U_1.$$

15.7. Знайти напруженість H магнітного поля соленоїда, довжина якого $l = 3$ см та діаметр $D = 2$ см. По соленоїду проходить струм $I = 2$ А. Котушка має $N = 100$ витків, відстань від кінця соленоїда до обраної точки $x = 2$ см.

$l = 0,03$ м,
$D = 0,02$ м,
$I = 2$ А,
$N = 100$,
$x = 0,02$ м
$H-?$

Напруженість магнітного поля на осі соленоїда скінченної довжини визначається за формулою (15.9):

$$H = \frac{IN}{2l}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2),$$

де β_1 і β_2 – кути, показані на рис. 15.7. Розглянемо точку А на осі соленоїда та визначимо залежність величин $\cos\beta_1$ і $\cos\beta_2$ від діаметра D та зсуву по вісі x. З рисунка бачимо, що

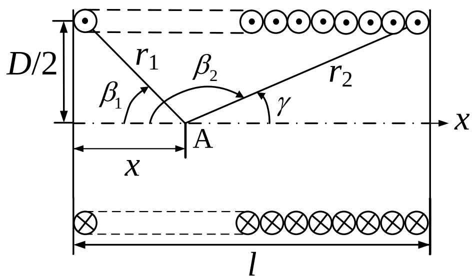


Рисунок 15.7

$$\cos\beta_1 = \frac{x}{r_1}, \quad \cos\beta_2 = \cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma = -\frac{l - x}{r_2}.$$

Для відповідних прямокутних трикутників із теореми Піфагора матимемо

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + x^2}, \quad r_2 = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + (l - x)^2},$$

звідки формула для визначення напруженості набере вигляду

$$H = \frac{IN}{2l}\left(\frac{x}{\sqrt{D^2/4 + x^2}} + \frac{l - x}{\sqrt{D^2/4 + (l-x)^2}}\right).$$

Підставляючи числові дані, отримуємо

$$H = \frac{2 \cdot 100}{2 \cdot 0,03}\left(\frac{0,02}{\sqrt{0,02^2/4 + 0,02^2}} + \frac{0,03 - 0,02}{\sqrt{0,02^2/4 + (0,03-0,02)^2}}\right) =$$
$$= 5338,45 \ \left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right).$$

15.8. Через переріз $S = ab$ мідної пластинки товщиною $a = 0,5$ мм та висотою $b = 10$ мм пропускається струм $I = 20$ А. Коли пластинку помістили в магнітне поле, перпендикулярне до ребра b та напряму струму, виникла поперечна різниця потенціалів $\Delta\varphi = 3,1$ мкВ. Індукція магнітного поля $B = 1$ Тл. Знайти концентрацію n електронів провідності в міді та їх швидкість v.

$a = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м,
$b = 10^{-2}$ м,
$I = 20$ А,
$\Delta\varphi = 3,1 \cdot 10^{-6}$ В,
$B = 1$ Тл,
$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
n, v–?

Для розв'язування цієї задачі використаємо рис. 15.3. При проходженні струму через пластину, що поміщена перпендикулярно до магнітного поля, виникає поперечна різниця потенціалів (15.10), яка в позначеннях задачі запишеться як

$$\Delta\varphi = \frac{RBI}{a}.$$

Після підстановки сталої Холла $R = 1/(ne)$ поперечна різниця потенціалів набирає вигляду

$$\Delta\varphi = \frac{BI}{ane}.$$

Тоді концентрація електронів провідності

$$n = \frac{BI}{\Delta\varphi a e},$$

що після підстановки дасть числове значення

$$n = \frac{1 \cdot 20}{3,1 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 8,1 \cdot 10^{28} \ (\text{м}^{-3}).$$

За визначенням густина струму (14.1)

$$j = env,$$

але, з іншого боку, j може бути знайдена як (13.3):

$$j = \frac{I}{S},$$

де I – сила струму, $S = ab$ – площа мідної пластинки. Тоді матимемо

$$j = \frac{I}{ab} = env,$$

звідки швидкість електронів провідності

$$v = \frac{I}{aben}.$$

Підставляючи числові дані, отримуємо

$$v = \frac{20}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,1 \cdot 10^{28}} = 0,31 \cdot 10^{-3} \ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Задачі для самостійного розв'язування

15.9. Два паралельні нескінченно довгі провідники, по яких в одному напрямі проходять струми $I_1 = I_2 = 60$ А, розміщені на відстані $d = 10$ см один від одного. Визначити магнітну індукцію в точці, що знаходиться на відстані $r_1 = 5$ см від першого провідника та на відстані $r_2 = 12$ см від другого.

15.10. По квадратному контуру проходить струм $I = 50$ А. Довжина сторони квадрата $a = 20$ см. Визначити магнітну індукцію B у точці перетину діагоналей квадрата.

15.11. Знайти індукцію магнітного поля в центрі прямокутного контура, якщо його діагональ $d = 16$ см, кут між діагоналями $\alpha = 30°$, а струм у контурі $I = 5$ А.

15.12. Обмотка соленоїда складається з N витків мідного провідника з поперечним перерізом $S = 1$ мм^2. Довжина соленоїда $l = 25$ см, діаметр $D = 5$ см. Визначити напруженість H та індукцію B магнітного поля всередині соленоїда при силі струму $I = 2$ А, якщо його опір $R = 0,2$ Ом. Питомий опір міді $\rho = 17 \cdot 10^{-9}$ Ом·м.

15.13. Котушка зі струмом 0,5 А і площею поперечного перерізу 100 см^2 поміщена в однорідне магнітне поле з індукцією 2 Тл. Вісь котушки перпендикулярна до ліній індукції поля. Знайти число витків котушки, якщо в магнітному полі на неї діє момент сил 0,3 Н·м.

15.14. Знайти напруженість магнітного поля, що утворюється відрізком АВ прямолінійного провідника зі струмом у точці С, яка розміщена на перпендикулярі до середини цього відрізка на відстані $a = 6$ см від нього. Сила струму у провіднику $I = 30$ А. Відрізок АВ провідника видно з точки С під кутом $\alpha = 90°$.

15.15. Дуже довгий провідник зі струмом $I = 5$ А зігнутий у формі прямого кута. Знайти індукцію магнітного поля в точці, яка віддалена від провідника на $l = 35$ см і знаходиться на перпендикулярі до провідників, що проходить через точку вигину.

15.16. Напруженість магнітного поля в центрі колового витка з магнітним моментом $p_{\mathrm{m}} = 1,5$ А$\cdot$ м^2 дорівнює 150 А/м. Визначити радіус витка та силу струму в ньому.

15.17. Квадратна рамка зі стороною 5 см, що має 10 витків, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією 0,1 Тл. Площина рамки становить кут 0° з напрямом магнітного поля. Визначити обертальний момент, що діє на рамку, якщо струм у рамці 4 А.

15.18. Два колові витки розташовані у двох перпендикулярних площинах так, що центри цих витків збігаються. Радіус кожного витка $R = 2$ см, струми у витках $I_1 = I_2 = 5$ А. Знайти напруженість H магнітного поля в центрі цих витків.

15.19. Струм I проходить по квадратному провіднику. Довжина провідника $l = 80$ см. Визначити магнітну індукцію поля, що утворюється цим струмом у точці А, яка рівновіддалена від його кінців та знаходиться на відстані $r_0 = 30$ см від середини прямокутника.

15.20. Струм I проходить по колу з мідного дроту перерізом S. У центрі кола напруженість магнітного поля H. Яка різниця потенціалів U прикладена до кінців провідника, що утворює коло?

15.21. Знайти напруженість H магнітного поля в центрі колового витка із провідника радіусом $R = 1$ см, по якому проходить струм $I = 1$ А.

15.22. На рис. 15.8 а зображено переріз двох прямолінійних нескінченно довгих провідників зі струмом. Відстань між ними

AB = 10 см, струми $I_1 = 20$ А, $I_2 = 30$ А. Знайти напруженість магнітного поля, утвореного струмами I_1 та I_2 в точках M_1, M_2 і M_3. Відстані $M_1A = 2$ см, $AM_2 = 4$ см і $BM_3 = 3$ см.

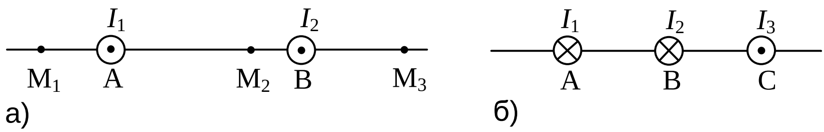


Рисунок 15.8

15.23. На рис. 15.8 б зображено переріз трьох прямолінійних нескінченно довгих провідників зі струмами. Відстані AB = BC = 5 см, струми $I_1 = I_2 = I$, $I_3 = 2I$. Знайти точку на прямій AC, у якій напруженість магнітного поля дорівнює нулю.

15.24. Із провідника діаметром $d = 1$ мм потрібно намотати соленоїд, усередині якого має бути напруженість магнітного поля $H = 24$ кА/м. По провіднику можна пропустити струм $I = 6$ А. З якої кількості шарів повинна складатись обмотка соленоїда, якщо витки щільно прилягають один до одного? Діаметр котушки вважати малим порівняно з її довжиною.

15.25. Напруженість магнітного поля в центрі колового витка $H_0 = 63,7$ А/м. Радіус витка $R = 11$ см. Знайти напруженість H магнітного поля на осі витка на відстані $a = 10$ см від його площини.

15.26. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1$ Тл знаходиться квадратна рамка площею $S = 25$ см^2. Нормаль до площини рамки становить із напрямом магнітного поля кут 60°. Визначити обертальний момент, що діє на рамку, якщо по ній проходить струм 1 А.

15.27. Яким має бути відношення довжини l котушки до її діаметра D, щоб напруженість магнітного поля в центрі котушки можна було знайти за формулою для напруженості поля нескінченно довгого соленоїда? Похибка при такому припущенні не має перевищувати $\delta = 5$ %. Вказівка: припустима похибка $\delta = (H_2 - H_1)/H_2$, де H_1 — напруженість поля всередині котушки кінцевої довжини, H_2 — напруженість поля всередині нескінченно довгої котушки.

15.28. Струм I проходить уздовж довгої тонкостінної труби радіусом R, яка має по всій довжині проріз шириною h. Знайти індукцію магнітного поля всередині труби за умови $h << R$.

15.29. Напруженість магнітного поля в соленоїді довжиною $l = 20$ см та діаметром $D = 5$ см становить $H = 1$ кА/м. Знайти число ампер-витків IN, яке необхідне для цього соленоїда, та різницю потенціалів U, що потрібно прикласти до кінців обмотки з мідного провідника діаметром $d = 0,5$ мм. Враховувати, що поле соленоїда однорідне.

15.30. Через переріз $S = ab$ алюмінієвої пластинки (a — товщина, b — висота) проходить струм $I = 5$ А. Пластинку поміщено в однорідне магнітне поле, що перпендикулярне до ребра b та до напряму струму. Знайти поперечну різницю потенціалів U, що виникає при цьому. Індукція магнітного поля $B = 0,5$ Тл. Товщина пластинки $a = 0,1$ мм. Концентрацію електронів провідності вважати такою, що дорівнює концентрації атомів.

15.31. По двох довгих паралельних провідниках проходять у протилежних напрямах струми, причому $I_2 = 2I_1$. Відстань між ними $l = 5$ см. Визначити положення точок, у яких напруженість магнітного поля H дорівнює нулю.

15.32. Знайти магнітний момент колового витка зі струмом, якщо радіус витка $R = 10$ см, а індукція поля в його центрі $B = 6$ мкТл.

15.33. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1$ Тл знаходиться квадратна рамка, по якій проходить струм $I = 0,4$ А. Площина рамки утворює з напрямом поля кут $\alpha = 60°$. Визначити обертальний момент, що діє на рамку, якщо її сторона $a = 2$ см.

15.34. Визначити індукцію магнітного поля, якщо на прямокутну рамку зі струмом 500 мА, що має 100 витків, яка поміщена в це поле, діє максимальний обертальний момент $0,003$ Н·м. Розміри рамки 20×30 мм.

15.35. Плоска прямокутна котушка зі сторонами 10 і 5 см, що має 200 витків, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією 0,05 Тл. Який максимальний обертальний момент може діяти на котушку в цьому полі, якщо сила струму в котушці 2 А?

16. Сила Ампера. Сила Лоренця. Магнітний потік

Основні формули

- Сила Ампера — сила, що діє на ділянку провідника довжиною $\mathrm{d}l$, по якій проходить струм I і яка знаходиться в магнітному полі з індукцією B:

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_A = I[\mathbf{B} \times \mathrm{d}\mathbf{l}]; \quad \mathrm{d}F_A = IB\mathrm{d}l \sin\alpha, \tag{16.1}$$

де вектор $\mathrm{d}\mathbf{l}$ збігається з напрямом струму I; α — кут між векторами $\mathbf{B}$ і $\mathrm{d}\mathbf{l}$. Напрям сили Ампера визначають за правилом лівої руки: якщо ліву руку розташувати таким чином, що чотири витягнуті пальці спрямовані вздовж струму I, а перпендикулярна до провідника складова вектора $\mathbf{B}$ входить у долоню, то відігнутий на 90° великий палець вказує на напрям сили $\mathrm{d}\mathbf{F}_A$, що діє на ділянку провідника $\mathrm{d}\mathbf{l}$.

- Сила взаємодії двох прямих нескінченно довгих паралельних провідників зі струмами I_1 і I_2, що знаходяться на відстані r один від одного:

$$F = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r} l, \tag{16.2}$$

де l — довжина ділянки провідника, на яку діє сила F.

- Сила Лоренця — сила, що діє на заряд q, який рухається зі швидкістю v у магнітному полі з індукцією B:

$$F_L = q[\boldsymbol{v} \times \mathbf{B}]; \quad F_L = qvB\sin\alpha, \tag{16.3}$$

де α — кут між швидкістю руху заряду $\boldsymbol{v}$ і вектором магнітної індукції $\mathbf{B}$. Напрям сили Лоренця визначають за правилом лівої руки: якщо чотири витягнуті пальці лівої руки спрямувати вздовж швидкості зарядженої частинки, а вектор індукції $\mathbf{B}$ при цьому входить у долоню, то відігнутий на 90° великий палець вказує напрям сили Лоренця, що діє на додатній заряд. Якщо заряд від'ємний, напрям сили потрібно змінити на протилежний.

16. Сила Ампера. Сила Лоренця. Магнітний потік

- Магнітний потік Φ через деяку поверхню площею S

$$\Phi = BS\cos\alpha = BS\sin\beta, \qquad (16.4)$$

де α – кут між векторами $\mathbf{n}$ і $\mathbf{B}$ (див. рис. 16.1); β – кут між площиною контура і напрямом вектора $\mathbf{B}$.

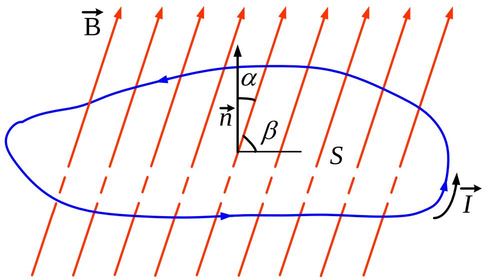


Рисунок 16.1

Приклади розв'язання задач

16.1. В однорідному магнітному полі по двох вертикальних провідниках рухається вгору без тертя прямий провідник масою $m = 10$ г, по якому проходить струм силою $I = 3$ А. Індукція магнітного поля становить $B = 4 \cdot 10^{-2}$ Тл і спрямована горизонтально, як це показано на рис. 16.2. Через 5 с після початку руху швидкість провідника стала дорівнювати $v = 20$ м/с. Визначити довжину провідника.

$B = 4 \cdot 10^{-2}$ Тл,
$\alpha = 90°$,
$m = 10^{-2}$ кг,
$I = 3$ А,
$t = 5$ с,
$v = 20$ м/с,
$g = 9,8$ м/с^2
l–?

На провідник зі струмом, що знаходиться в магнітному полі, діє сила Ампера (16.1), напрямлена, як показано на рис. 16.2:

$$F_A = IBl\sin\alpha,$$

де $\alpha = \pi/2$, тому

$$F_A = IBl.$$

Згідно з правилом лівої руки сила Ампера спрямована вгору. Сила тяжіння спрямована вниз. Рух

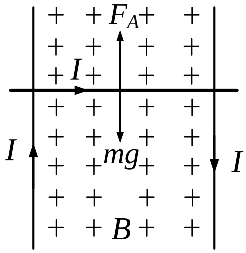


Рисунок 16.2

провідника відбувається у вертикальному напрямі. Прискорення знайдемо за другим законом Ньютона:

$$ma = F_A - mg; \quad ma = IBl - mg; \quad a = \frac{IBl}{m} - g.$$

У даному випадку прискорення a є сталою величиною. Тому швидкість руху провідника v можна знайти як

$$v = at = \frac{IBlt}{m} - gt,$$

звідки виразимо довжину l:

$$mv = IBlt - mgt; \quad IBlt = mv + mgt; \quad l = \frac{m(v + gt)}{IBt}.$$

Підставимо числові значення й отримаємо відповідь:

$$l = \frac{10^{-2} \cdot (20 + 9,8 \cdot 5)}{3 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 5} = 1,15 \text{ (м)}.$$

16.2. Прямий провідник довжиною $l = 10$ см, по якому проходить струм силою $I = 20$ А, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,01$ Тл. Знайти кут α між напрямом вектора B та струмом, якщо на провідник діє сила $F = 10$ мН.

$l = 0,1$ м, $I = 20$ А, $B = 0,01$ Тл, $F = 10^{-2}$ Н
α–?

Згідно із законом Ампера (16.1)

$$F = I[\mathbf{B} \times \mathbf{l}].$$

Модуль вектора F визначається за формулою

$$F = IBl \sin \alpha,$$

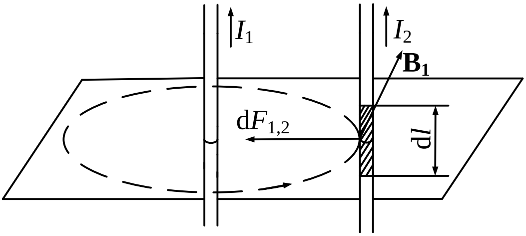


Рисунок 16.3

де α — кут між векторами $\mathbf{B}$ і $\mathbf{l}$, звідки

$$\sin\alpha = \frac{F}{IBl}; \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{F}{IBl}\right).$$

Розрахуємо це значення:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{10^{-2}}{20 \cdot 0,01 \cdot 0,1}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$

16.3. По двох нескінченних паралельних провідниках, що знаходяться на відстані $r = 20$ см один від одного, проходять однакові струми $I_1 = I_2 = 1$ кА. Визначити силу F взаємодії струмів, що діє на ділянки провідників з довжинами $l = 2,5$ м.

$l = 2,5$ м,
$r = 0,2$ м,
$I_1 = I_2 = 10^3$ А,
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
F—?

Взаємодія двох провідників, по яких проходить струм, відбувається через магнітне поле. Кожен струм створює магнітне поле, яке діє на сусідній провідник. Нехай струми проходять в одному напрямі. Визначимо силу $F_{1,2}$, з якою магнітне поле, що створене струмом I_1, діє на провідник зі струмом I_2. Для цього проведемо магнітну силову лінію так, щоб вона торкалася провідника зі струмом I_2 (див. рис. 16.3). Модуль магнітної індукції B_1, що створюється струмом I_1, визначається співвідношеннями (15.3), (15.7):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}.$$

Згідно із законом Ампера (16.1) на кожен елемент провідника зі струмом I_2 довжиною $\mathrm{d}l$ у магнітному полі з індукцією B_1 діє сила

$$\mathrm{d}F_{1,2} = I_2 B_1 \mathrm{d}l \sin(\widehat{\mathrm{d}l, B_1}).$$

Оскільки відрізок $\mathrm{d}l$ перпендикулярний до вектора B_1, то

$$\sin(\widehat{\mathrm{d}l, B_1}) = 1,$$

звідки

$$\mathrm{d}F_{1,2} = I_2 B_1 \mathrm{d}l.$$

Підставляючи вираз для B_1, отримуємо

$$\mathrm{d}F_{1,2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\mathrm{d}l.$$

Силу $\mathrm{d}F_{1,2}$ взаємодії провідників зі струмом знайдемо інтегруванням по всій довжині другого провідника:

$$\mathrm{d}F_{1,2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\int\limits_0^l \mathrm{d}l' = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l.$$

Оскільки за умовою $I_1 = I_2 = I$, отримаємо

$$\mathrm{d}F_{1,2} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r},$$

або після підстановки числових значень:

$$\mathrm{d}F_{1,2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (10^3)^2 \cdot 2,5}{2 \cdot \pi \cdot 0,2} = 2,5 \text{ (Н)}.$$

16.4. Електрон, пройшовши прискорювальну різницю потенціалів 400 В, потрапив у однорідне магнітне поле з індукцією 1,5 мТл. Визначити: 1) радіус кривизни траєкторії електрона; 2) частоту обертання електрона в магнітному полі. Вектор швидкості електрона перпендикулярний до ліній індукції.

$U = 400$ В, $B = 1,5 \cdot 10^{-3}$ Тл, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
R, ν–?

1. На заряд, що рухається зі швидкістю v у магнітному полі з індукцією B, діє сила Лоренця (16.3):

$$F_L = evB\sin\alpha.$$

Вектор сили Лоренця перпендикулярний до вектора швидкості v й, отже, надає електрону доцентрове прискорення

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

Другий закон Ньютона при цьому матиме вигляд

$$F_L = ma; \quad F_L = evB\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}; \quad eB\sin\alpha = \frac{mv}{R}.$$

Оскільки за умовою задачі $v \perp B$, то кут $\alpha = 90^\circ$, із чого випливає, що радіус

$$R = \frac{mv}{eB}.$$

Швидкість електрона, що входить до виразу для визначення радіуса кривизни, знайдемо через кінетичну енергію електрона:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Кінетична енергія електрона, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів U, визначається рівністю

$$E = eU.$$

Підставляючи цей вираз у попередню формулу, отримаємо швидкість руху електрона:

$$\frac{mv^2}{2} = eU; \quad mv^2 = 2eU; \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Із урахуванням швидкості, радіус кривизни

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Знайдемо числове значення:

$$R = \frac{1}{1,5\cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot 9,11\cdot 10^{-31}\cdot 400}{1,6\cdot 10^{-19}}} = 0,045\ (\text{м}) = 4,5\ (\text{см}).$$

2. Для визначення частоти обертання електрона скористаємося співвідношенням між лінійною v і кутовою ω швидкостями:

$$v = \omega R = 2\pi\nu R,$$

звідки

$$\nu = \frac{v}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2eU}{m}} \cdot B \cdot \sqrt{\frac{e}{2mU}} = \frac{eB}{2\pi m},$$

або після розрахунку

$$\nu = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} = 4,2 \cdot 10^{7}\ (\text{Гц}).$$

16.5. Електрон рухається по коловій орбіті з радіусом $R = 15$ см в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 2$ мТл. Визначити магнітний момент p_m колового струму.

$B = 2 \cdot 10^{-3}$ Тл,
$R = 0,15$ м,
$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл,
$m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
p_m–?

Магнітний момент контура зі струмом визначаємо за формулою (15.1):

$$p_m = IS,$$

де S – площа кола радіуса R:

$$S = \pi R^2.$$

Сила струму I визначається зарядом, що проходить через поперечний переріз провідника за час $t = 1$ с:

$$I = \frac{e}{T},$$

де T – період, який знайдемо як відношення довжини кола до швидкості, з якою заряд рухається по цьому колу:

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

На заряджену частинку діє сила Лоренця (16.3):

$$F_L = evB.$$

Доцентрова сила, що діє на тіло масою m, яке обертається по колу радіусом R зі швидкістю v:

$$F_C = \frac{mv^2}{R}.$$

Порівнюючи ці сили, отримаємо

$$evB = \frac{mv^2}{R}; \quad eB = \frac{mv}{R}; \quad v = \frac{eBR}{m}.$$

Знайдемо остаточний вираз для розрахунку магнітного моменту контура:

$$p_m = IS = \frac{eS}{T} = \frac{e\pi R^2}{T} = \frac{e\pi R^2 v}{2\pi R} = \frac{evR}{2} = \frac{e^2BR^2}{2m}.$$

Знайдемо шукане значення:

$$p_m = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,15^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} = 3,95 \cdot 10^6 \text{ (А} \cdot \text{м}^2).$$

16.6. Потік магнітної індукції через площу поперечного перерізу соленоїда дорівнює $\Phi = 1$ мкВб. Довжина соленоїда $l = 12,5$ см. Визначити магнітний момент p_m соленоїда, якщо він знаходиться в повітрі.

$\Phi = 10^{-6}$ Вб,
$l = 0,125$ м,
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
$\mu = 1$
p_m—?

Напруженість магнітного поля пов'язана з магнітною індукцією співвідношенням (15.3):

$$B = \mu_0 \mu H.$$

Напруженість магнітного поля соленоїда (15.8):

$$H = \frac{IN}{l}.$$

Магнітний потік через площу поперечного перерізу (16.4):

$$\Phi = BS = \mu_0 \mu \frac{IN}{l} S,$$

звідки сила струму

$$I = \frac{\Phi l}{\mu_0 \mu N S}.$$

Результуючий магнітний момент знайдемо як сумарний магнітний момент від усіх витків соленоїда (15.1):

$$p_m = ISN = \frac{\Phi l}{\mu_0 \mu}.$$

Розрахуємо це значення:

$$p_m = \frac{10^{-6} \cdot 0,125}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1} = 0,1 \text{ (А} \cdot \text{м}^2).$$

16.7. Однозарядний іон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,015$ Тл по колу радіусом $R = 10$ см. Визначити механічний імпульс іона p.

$B = 0,015$ Тл, $R = 0,1$ м, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
p–?

Іон рухається по колу під дією сили Лоренця (16.3):

$$F_L = qvB.$$

Доцентрова сила, що діє на тіло масою m, яке обертається по колу радіусом R зі швидкістю v:

$$F_C = \frac{mv^2}{R}.$$

Прирівнявши сили, отримуємо

$$\frac{mv^2}{R} = qvB; \quad \frac{mv}{R} = qB; \quad v = \frac{qBR}{m}.$$

Імпульс іона

$$p = mv = qBR.$$

Отже, матимемо

$$p = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,015 \cdot 0,1 = 2,4 \cdot 10^{-22} \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}\right).$$

16.8. Прямий провідник довжиною 20 см і масою 50 г підвішений на двох легких нитках в однорідному магнітному полі, індукція якого має горизонтальний напрям і перпендикулярна до провідника. Якого напряму і величини струм потрібно пропустити через провідник, щоб нитки розірвалися? Індукція магнітного поля 0,5 Тл. Кожна нитка розривається при навантаженні, що перевищує 0,4 Н.

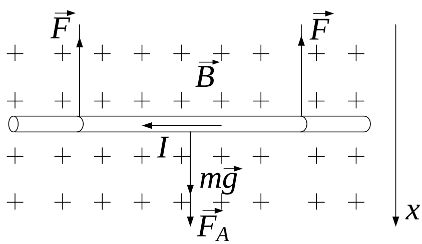


Рисунок 16.4

16. Сила Ампера. Сила Лоренця. Магнітний потік

$l = 0,2$ м,
$m = 0,05$ кг,
$B = 0,5$ Тл,
$F = 0,4$ Н,
$\alpha = 90^\circ$,
$g = 9,8$ м/с^2
I—?

На провідник зі струмом діють сили: сила тяжіння mg, дві сили натягу нитки F і сила Ампера F_A. Для того щоб нитки обірвалися, сила Ампера згідно із рис. 16.4 повинна бути спрямована вниз. Нехай індукція магнітного поля напрямлена перпендикулярно до площини рисунка від спостерігача (хрестики). Застосувавши правило лівої руки, можемо визначити напрям сили струму в провіднику: справа наліво. Оскільки перед обривом ниток провідник знаходиться в рівновазі, то відповідно до першого закону Ньютона можна записати:

$$m\mathbf{g} + 2\mathbf{F} + \mathbf{F}_A = 0.$$

Запишемо це векторне рівняння в проекціях на вертикальну вісь x, що напрямлена вниз:

$$mg - 2F + F_A = 0.$$

Ураховуючи те, що сила Ампера відповідно до (16.1)

$$F_A = IBl\sin\alpha,$$

запишемо

$$mg - 2F + IBl\sin\alpha = 0,$$

звідки отримуємо вираз для сили струму (враховуючи, що $\sin\alpha = 1$):

$$I = \frac{2F - mg}{Bl}.$$

Після розрахунку числового значення:

$$I = \frac{2 \cdot 0,4 - 0,05 \cdot 9,8}{0,5 \cdot 0,2} = 3,1 \text{ (А)}.$$

16.9. Протон влітає в однорідне магнітне поле зі швидкістю 1 км/с під кутом 60° до ліній індукції. Індукція магнітного поля 1 мТл. Визначити, скільки обертів буде зроблено протоном за 0,1 с руху та який шлях у напрямі ліній індукції при цьому він пройде.

$v = 10^3$ м/с,
$\alpha = 60^\circ$,
$B = 10^{-3}$ Тл,
$t = 0,1$ с,
$q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл,
$m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
n, s—?

Протон, що влітає в магнітне поле під кутом α, під дією сили Лоренця рухається по гвинтовій траєкторії (див. рис. 16.5). Складові вектора швидкості $\boldsymbol{v}$, перпендикулярна та паралельна лініям індукції, згідно з рисунком визначатимуться як

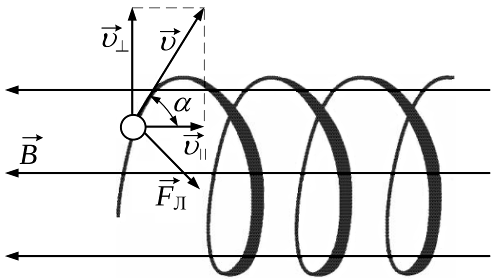


Рисунок 16.5

$$v_\perp = v \sin\alpha, \quad v_{||} = v\cos\alpha.$$

Шлях, що пройде частинка вздовж ліній індукції, становить:

$$s = v_{||}t = vt\cos\alpha = 10^3 \cdot 0,1 \cdot \cos 60^\circ = 50 \text{ (м)}.$$

Кількість обертів, які зробить протон у магнітному полі, визначимо як

$$n = \frac{t}{T},$$

де T – період або час одного повного обертання протона. Знайдемо період обертання протона, використовуючи другий закон Ньютона:

$$F_Л = ma.$$

Із урахуванням виразу для визначення сили Лоренця (16.3) та визначаючи доцентрове прискорення як $a = v_\perp^2/R$, матимемо

$$qv_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{R}; \quad qB = \frac{mv_\perp}{R}.$$

Використовуючи отриману формулу та зв'язок між лінійною швидкістю та періодом ($v_\perp = 2\pi R/T$), знайдемо період:

$$qB = \frac{m}{R}\cdot\frac{2\pi R}{T}; \quad qB = \frac{2\pi m}{T}; \quad T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Розрахуємо кількість обертів n:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{tqB}{2\pi m} = \frac{0,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3,14159 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}} \approx 1525.$$

16. Сила Ампера. Сила Лоренця. Магнітний потік

Задачі для самостійного розв'язування

16.10. Два однаково заряджені іони, що мають різну вагу, влітають в однорідне магнітне поле. Перший іон почав рухатися по колу радіусом $R_1 = 5$ см, другий іон – по колу радіусом $R_2 = 2,5$ см. Знайти відношення m_1/m_2 мас іонів, якщо вони пройшли однакову прискорювальну різницю потенціалів.

16.11. Два однозарядні іони, пройшовши однакову прискорювальну різницю потенціалів, влетіли в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Один іон, маса m_1 якого дорівнює 12 а.о.м., описав дугу кола радіусом $R_1 = 4$ см. Визначити масу m_2 іншого іона, який описав дугу кола радіусом $R_2 = 6$ см.

16.12. Циклотрон дозволяє прискорити протони до енергії 20 МеВ. Визначити радіус дуантів циклотрона, якщо магнітна індукція 2 Тл.

16.13. Електрон, прискорений різницею потенціалів $U = 1$ кВ, влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до напряму поля. Індукція магнітного поля $B = 1,19$ мТл. Знайти радіус кола, по якому рухається електрон, період обертання та момент імпульсу електрона.

16.14. Провідник довжиною 20 см із силою струму 50 А знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією 40 мТл. Визначити роботу з переміщення провідника на відстань 10 см перпендикулярно до вектора магнітної індукції (вектор магнітної індукції перпендикулярний до напряму струму в провіднику).

16.15. По котушці проходить струм $I = 1$ А, утворюючи в ній магнітний потік $\Phi = 0,6$ Вб. Скільки витків має котушка, якщо її довжина $l = 40$ см, радіус $r = 5$ см та відносна магнітна проникність сердечника при цьому струмі $\mu = 100$?

16.16. Електрон, розігнаний різницею потенціалів 2 кВ, влітає в однорідне магнітне поле з індукцією 150 мТл перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Визначити радіус кола, що описує електрон.

16.17. По трьох паралельних прямих провідниках, що знаходяться на однаковій відстані $a = 10$ см один від одного, проходять однакові струми $I = 100$ А. У двох провідниках напрями струмів збігаються.

Знайти силу, що діє на відрізок довжиною $l = 1$ м кожного провідника.

16.18. Протон, що влетів після прискорення в однорідне магнітне поле з індукцією 50 мТл, рухається по колу радіусом 5 см. Яку різницю потенціалів пройшов протон під час прискорення?

16.19. Знайти магнітний потік Ф, що утворюється соленоїдом перетином $S = 10$ см^2, якщо він має $N = 10$ витків на кожен сантиметр його довжини при силі струму $I = 20$ А.

16.20. З якою силою діє магнітне поле з індукцією 10 мТл на провідник, якщо в ньому сила струму 50 А, а довжина активної частини провідника 0,1 м? Поле та струм взаємно перпендикулярні.

16.21. Електрон у збудженому атомі водню рухається навколо ядра по колу радіусом $r = 53$ пм. Обчислити силу еквівалентного колового струму I і напруженість H поля в центрі кола.

16.22. Іони двох ізотопів з масами $m_1 = 6,5 \cdot 10^{-26}$ кг і $m_2 = 6,8 \cdot 10^{-26}$ кг, що прискорені різницею потенціалів $U = 0,5$ кВ, влітають в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,5$ Тл перпендикулярно до ліній індукції. Беручи заряд кожного іона таким, що дорівнює заряду електрона, визначити, на скільки будуть відрізнятися радіуси траєкторій ізотопів у магнітному полі.

16.23. Прямий провідник, довжина якого 10 см, а маса 10 г, підвішений горизонтально на двох легких нитках в однорідному магнітному полі. Лінії індукції магнітного поля напрямлені горизонтально і перпендикулярно до провідника. Сила струму, що проходить по провіднику 4,2 А, індукція магнітного поля 0,1 Тл. Знайти силу натягу ниток.

16.24. Знайти магнітний потік, що перетинає радіус диска за час обертання $t = 1$ хв. Радіус диска $R = 10$ см. Індукція магнітного поля $B = 0,1$ Тл. Диск обертається із частотою $\nu = 5,3$ Гц.

16.25. Знайти індукцію магнітного поля, якщо на провідник, по якому проходить струм силою 25 А, діє сила 50 мН? Поле і струм взаємно перпендикулярні. Довжина активної частини провідника 5 см.

16.26. Знайти період обертання електрона, якщо він рухається в однорідному магнітному полі з індукцією 4 мТл.

16.27. Прямий провідник довжиною $l = 10$ см, по якому проходить струм $I = 20$ А, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,01$ Тл. Знайти кут α між напрямами вектора B і струму, якщо на провідник діє сила $F = 10$ мН.

16.28. Горизонтальні рейки знаходяться на відстані 1 м одна від одної. Перпендикулярно до рейок на них лежить стрижень. Яким буде прискорення руху стрижня, якщо по ньому пропускатимуть струм 50 А? Коефіцієнт тертя стрижня об рейки 0,2, маса стрижня 500 мг. Вектор магнітної індукції лежить у вертикальній площині, перпендикулярно до рейок, спрямований під кутом 30° до стрижня і дорівнює за модулем 100 мТл.

16.29. У скільки разів зміниться магнітний потік, якщо у соленоїд внести стальний ($\mu = 100$) сердечник? Індукція зовнішнього магнітного поля $B_0 = 2,2$ мТл.

16.30. В однорідне магнітне поле з індукцією $B = 10$ мТл перпендикулярно до ліній індукції влітає електрон, кінетична енергія якого $E = 30$ кеВ. Обчислити радіус кривизни траєкторії руху електрона.

16.31. У магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції зі швидкістю 10 Мм/с влітає електрон. Визначити індукцію поля, якщо електрон описав коло радіусом 1 см.

16.32. Протон у магнітному полі, індукція якого 0,01 Тл, описав коло радіусом $R = 10$ см. Яка швидкість протона?

16.33. Електрон влітає в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 1$ мТл зі швидкістю $v = 4 \cdot 10^7$ м/с. Напрям руху електрона перпендикулярний до напряму магнітного поля. Знайти тангенціальне та нормальне прискорення електрона в магнітному полі.

16.34. По нерухомій непровідній похилій площині рухається вгору горизонтальний мідний провідник зі струмом квадратного перетину. Напрям руху показано на рис. 16.6. При якій густині струму рух провідника буде рівномірним? Кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30°$, коефіцієнт тертя – 0,289, густина міді – 8,93 г/см^3. Рух провідника відбувається в однорідному магнітному полі з індукцією 0,928 Тл, силові лінії якого напрямлені вертикально вгору.

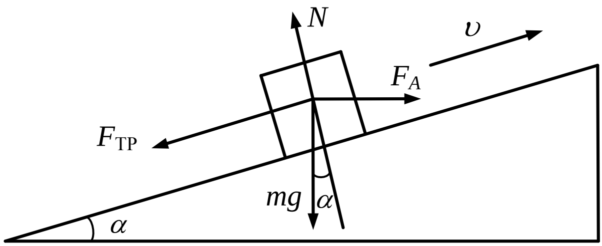


Рисунок 16.6

16.35. Контур із провідника, вигнутий у формі квадрата зі стороною $a = 0,5$ м, розташований в одній площині з нескінченним прямолінійним провідником зі струмом $I = 5$ А таким чином, що дві його сторони паралельні до провідника. Сила струму в контурі $I_1 = 1$ А. Визначити силу, що діє на контур, якщо найближча до провідника сторона квадрата знаходиться на відстані $b = 10$ см від нього. Напрями струмів показані на рис. 16.7.

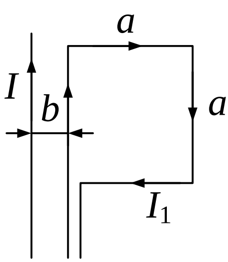


Рисунок 16.7

17. ЕРС індукції. Індуктивність. Енергія магнітного поля

Основні формули

- Робота з переміщення замкненого контура зі струмом у магнітному полі
$$A = I\Delta\Phi, \tag{17.1}$$
де $\Delta\Phi$ – зміна магнітного потоку, що пронизує поверхню, обмежену контуром (Вб); I – сила струму в контурі (А).

- Закон Фарадея – Максвелла, або основний закон електромагнітної індукції:
$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}, \tag{17.2}$$
де ε – електрорушійна сила індукції (В); N – число витків контура; $\Psi = N\Phi$ – потокозчеплення (Вб).

- Різниця потенціалів U на кінцях провідника довжиною l, що рухається зі швидкістю v в однорідному магнітному полі:
$$U = Blv\sin\alpha, \tag{17.3}$$
де α – кут між напрямами векторів швидкості $\boldsymbol{v}$ і магнітної індукції $\mathbf{B}$.

- Електрорушійна сила індукції, що виникає в рамці, яка містить N витків площею S, при обертанні рамки з кутовою швидкістю ω в однорідному магнітному полі з індукцією B:
$$\varepsilon = BNS\omega\sin\omega t, \tag{17.4}$$
де $\alpha = \omega t$ – миттєве значення кута між вектором $\mathbf{B}$ і вектором нормалі $\mathbf{n}$ до площини рамки.

- Кількість індукованого в контурі заряду q
$$q = \frac{\Delta\Psi}{R}, \tag{17.5}$$
де R – опір контура (Ом); $\Delta\Psi$ – зміна потокозчеплення (Вб).

- Сила індукційного струму, що проходить по контуру з опором R:

$$I = \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}. \tag{17.6}$$

- Магнітний потік контура

$$\Phi = LI, \tag{17.7}$$

де L – індуктивність контура (Гн).

- Електрорушійна сила самоіндукції

$$\varepsilon = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{17.8}$$

- Індуктивність соленоїда (тороїда)

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}, \tag{17.9}$$

де N – загальна кількість витків; l – довжина соленоїда (м); S – площа його перерізу (м^2).

- Енергія W_m магнітного поля, що утворюється струмом у контурі з індуктивністю L:

$$W_m = \frac{LI^2}{2}. \tag{17.10}$$

- Енергія W_e електричного поля

$$W_e = \frac{CU^2}{2}, \tag{17.11}$$

де C – ємність (Ф); U – напруга (В).

- Об'ємна (просторова) густина енергії однорідного магнітного поля (наприклад, поля довгого соленоїда):

$$\omega = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \tag{17.12}$$

17. ЕРС індукції. Індуктивність. Енергія магнітного поля

- Період власних коливань у коливальному контурі без активного опору (формула Томсона)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \tag{17.13}$$

де L — індуктивність контура (Гн); C — його електроємність (Ф).

- Швидкість електромагнітних хвиль у середовищі

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \tag{17.14}$$

де $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3 \cdot 10^8$ м/с — швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі; ε — діелектрична проникність середовища; μ — магнітна проникність середовища; $n = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — абсолютний показник заломлення середовища.

- Зв'язок довжини електромагнітної хвилі λ з періодом T і частотою ν коливань:

$$\lambda = cT; \quad \lambda = \frac{c}{\nu}. \tag{17.15}$$

Приклади розв'язання задач

17.1. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,1$ Тл рівномірно обертається рамка, що містить $N = 1000$ витків, із частотою $\nu = 10$ Гц. Площа S рамки дорівнює 150 см^2. Визначити миттєве значення ЕРС, що відповідає куту повороту рамки 30°.

$B = 0,1$ Тл,
$N = 1000$,
$\nu = 10$ Гц,
$S = 150 \cdot 10^{-4}$ м^2,
$\alpha = 30°$
ε—?

Миттєве значення ЕРС індукції ε визначається основним рівнянням електромагнітної індукції Фарадея — Максвелла (17.2):

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}.$$

Потокозчеплення $\Psi = N\Phi$, де N — число витків, що пронизані магнітним потоком Φ. Тоді миттєве значення ЕРС індукції набере вигляду

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

При обертанні рамки магнітний потік Φ, що пронизує рамку в момент часу t, змінюється за законом (16.4):

$$\Phi = BS\cos\alpha = BS\cos\omega t,$$

де B – магнітна індукція; S – площа рамки; ω – колова частота; $\alpha = \omega t$ – миттєве значення кута. Підставивши у формулу для миттєвого значення вираз для Φ і продиференціювавши за часом, знайдемо миттєве значення ЕРС індукції:

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = -N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}BS\cos\omega t = NBS\omega\sin\omega t.$$

Кутова частота ω пов'язана із частотою обертання ν співвідношенням

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Замінюючи ωt на α, отримуємо кінцеву формулу для визначення миттєвого значення ЕРС індукції:

$$\varepsilon = 2\pi\nu NBS\sin\alpha.$$

Зробивши обчислення за формулою, знайдемо

$$\varepsilon = 2\cdot 3,14159\cdot 10\cdot 1000\cdot 0,1\cdot 150\cdot 10^{-4}\cdot 0,5 = 47,12\ (\text{В}).$$

17.2. Швидкість літака з реактивним двигуном $\upsilon = 950$ км/год. Знайти ЕРС індукції, що виникає на кінцях крил літака, якщо вертикальна складова напруженості магнітного поля Землі $H = 39,8$ А/м, а розмах крил літака $l = 12,5$ м.

$\upsilon = 264$ м/с,
$H = 39,8$ А/м,
$l = 12,5$ м,
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м,
$\alpha = 0°$,
$\mu = 1$

ε–?

Відповідно до закону Фарадея (17.2)

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

де зміна магнітного потоку (16.4)

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S\cos\alpha,$$

де $\alpha = 0°$ (див. рис. 16.1). Тому матимемо

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S.$$

За формулою (15.3)

$$B = \mu_0\mu H.$$

Літак за час $\mathrm{d}t$ проходить відстань

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t.$$

Площа $\mathrm{d}S$, що перекривається крилами літака за час $\mathrm{d}t$, дорівнює

$$\mathrm{d}S = l\mathrm{d}x = lv\mathrm{d}t.$$

Тоді магнітний потік

$$\mathrm{d}\Phi = \mu_0\mu H l v \mathrm{d}t.$$

Без урахування знака "–" з першого рівняння ЕРС набирає вигляду:

$$\varepsilon = \frac{\mu_0\mu H l v \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \mu_0\mu H l v,$$

або після розрахунків

$$\varepsilon = 4 \cdot 3,14159 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 39,8 \cdot 12,5 \cdot 264 = 0,165 \text{ (В)}.$$

17.3. Провідник довжиною 50 см, по якому проходить струм силою 1 А, рухається зі швидкістю 1,4 м/с перпендикулярно до індукції магнітного поля з напруженістю 20 А/м. Визначити роботу з переміщення провідника за 1 годину руху.

$l = 0,5$ м,
$I = 1$ А,
$v = 1,4$ м/с,
$H = 20$ А/м,
$\beta = 90°$,
$\Delta t = 3600$ с,
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м,
$\mu = 1$
A–?

Робота з переміщення провідника в магнітному полі дорівнює (17.1)

$$A = I\Delta\Phi,$$

де $\Delta\Phi$ – магнітний потік, що перетинається провідником під час його руху. За визначенням (16.4)

$$\Delta\Phi = B\Delta S \sin\beta,$$

де $\Delta S = lv\Delta t$ – площа, яку перетинає провідник під час руху. З урахуванням (15.3)

$$B = \mu_0\mu H,$$

а також значення $\sin\beta = \sin 90° = 1$ матимемо:

$$\Delta\Phi = B\Delta S \sin\beta = \mu_0\mu H l v \Delta t.$$

Отже, робота з переміщення провідника дорівнюватиме

$$A = I\mu_0\mu H l v \Delta t.$$

Виконаємо розрахунки:

$$A = 1 \cdot 4 \cdot 3,14159 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 20 \cdot 0,5 \cdot 1,4 \cdot 3600 = 0,063 \text{ (Дж)}.$$

17.4. Соленоїд довжиною $l = 50$ см та площею поперечного перерізу $S = 2$ см^2 має індуктивність $L = 0,2$ мкГн. При якому струмі I об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда становитиме $\omega = 1$ мДж/м^3?

$l = 0,5$ м,
$S = 2 \cdot 10^{-4}$ м^2,
$L = 0,2 \cdot 10^{-6}$ Гн,
$\omega = 10^{-3}$ Дж/м^3,
$\mu = 1$
I–?

Об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда визначається за формулою (17.12):

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Індукція магнітного поля всередині соленоїда (15.8) із урахуванням (15.3)

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l}.$$

Кількість витків N знайдемо з виразу індуктивності соленоїда (17.9):

$$L = \frac{\mu_0\mu N^2 S}{l},$$

звідки

$$N = \sqrt{\frac{lL}{\mu\mu_0 S}}.$$

Підставимо кількість витків N у вираз для визначення індукції магнітного поля:

$$B = I\sqrt{\frac{\mu\mu_0 L}{lS}}.$$

Об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда дорівнюватиме

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = I^2\frac{\mu\mu_0 L}{2\mu\mu_0 lS} = \frac{I^2 L}{2lS},$$

звідки виразимо струм:

$$I = \sqrt{\frac{2lS\omega}{L}}$$

і розрахуємо числове значення:

$$I = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot 10^{-6}}} = 1\ (\text{А}).$$

17.5. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 1$ Тл знаходиться прямий провідник довжиною $l = 20$ см, кінці якого замкнені поза полем. Опір R усього кола дорівнює $0,1$ Ом. Знайти силу F, яку потрібно прикласти до провідника, щоб переміщати його перпендикулярно до ліній індукції зі швидкістю $\upsilon = 2,5$ м/с.

17. ЕРС індукції. Індуктивність. Енергія магнітного поля

$B = 1$ Тл,
$l = 0,2$ м,
$R = 0,1$ Ом,
$v = 2,5$ м/с
F–?

На провідник зі струмом у магнітному полі діє сила Ампера (16.1):
$$F_A = IBl.$$
За умовою задачі до провідника прикладена сила F, під дією якої він рухається з однаковою швидкістю v. За першим законом Ньютона в цьому разі векторна сума всіх діючих сил дорівнюватиме нулю. Із урахуванням напряму дії цих сил матимемо
$$F - F_A = 0,$$
звідки
$$F = F_A = IBl.$$
Згідно із законом Ома (13.4) сила стуму
$$I = \frac{\varepsilon}{R},$$
де ЕРС індукції (17.2)
$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$
із урахуванням зміни магнітного потоку $\Delta\Phi = B\Delta S$ можна записати як
$$\varepsilon = \frac{B\Delta S}{\Delta t}.$$
Провідник за час Δt проходить відстань
$$\Delta x = v\Delta t$$
та перекриває площу
$$\Delta S = l\Delta x = lv\Delta t.$$
Тому матимемо
$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\Delta S}{R\Delta t} = \frac{Blv\Delta t}{R\Delta t} = \frac{Bvl}{R},$$
звідки сила, яку потрібно прикласти до провідника, щоб переміщати його перпендикулярно до ліній індукції:
$$F = IBl = \frac{B^2vl^2}{R}.$$
Розрахуємо числове значення:
$$F = \frac{1^2 \cdot 2.5 \cdot 0,2^2}{0,1} = 1 \text{ (Н)}.$$

17.6. Конденсатор, електроємність якого $C = 500$ пФ з'єднаний паралельно з котушкою довжиною $l = 40$ см і площею перерізу S, що становить 5 см^2. Котушка містить $N = 1000$ витків. Сердечник немагнітний. Знайти період T коливань.

$l = 0,4$ м, $N = 1000$, $\mu = 1$, $C = 5 \cdot 10^{-10}$ Ф, $S = 5 \cdot 10^{-4}$ м^2, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м	
T–?	

За формулою Томсона (17.13) період власних коливань у контурі

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Індуктивність соленоїда визначається як (17.9):

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}.$$

Підставляючи вираз для індуктивності у формулу Томсона, отримаємо розрахункову формулу

$$T = 2\pi N \sqrt{\frac{\mu_0 \mu S C}{l}},$$

або після розрахунку

$$T = 2 \cdot 3,14 \cdot 1000 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-10}}{0,4}} =$$

$$= 5,56 \cdot 10^{-6} \text{ (с)}.$$

17.7. Індуктивність L коливального контура дорівнює $0,5$ мГн. Якою повинна бути електроємність C контура, щоб він резонував на довжину хвилі $\lambda = 300$ м?

$L = 0,5 \cdot 10^{-3}$ Гн, $\lambda = 300$ м, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с	
C–?	

Використаємо зв'язок довжини електромагнітної хвилі λ з періодом T коливань (17.15):

$$\lambda = cT,$$

звідки період коливань

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

де c – швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі (швидкість світла). З іншого боку, згідно з (17.13)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Прирівнюючи обидві формули, маємо

$$\frac{\lambda}{c} = 2\pi\sqrt{LC}; \quad \frac{\lambda^2}{c^2} = 4\pi^2 LC.$$

Отже, вираз для визначення електроємності контура набирає вигляду

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L}.$$

Після розрахунків

$$C = \frac{300^2}{4 \cdot 3,14^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}} = 5,07 \cdot 10^{-11}\ (\Phi) \approx 51\ (\text{п}\Phi).$$

17.8. Визначити значення електрорушійної сили, що індукується в колі із провідника, площина якого перпендикулярна до вектора індукції магнітного поля, якщо його повернути на кут 90° за 0,1 с. Радіус кола 10 см, індукція магнітного поля 1 Тл.

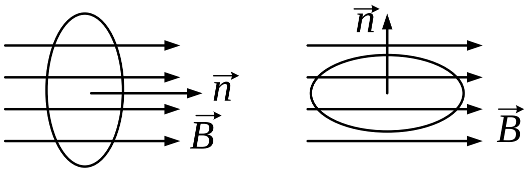


Рисунок 17.1

$\alpha_1 = 0°$,
$\alpha_2 = 90°$,
$\Delta t = 0,1$ с,
$B = 1$ Тл,
$r = 0,1$ м
$\langle\varepsilon\rangle$–?

Електрорушійна сила індукції виникає в замкненому колі під час його обертання в магнітному полі (17.2):

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

При цьому змінюється кут між нормаллю до рамки та вектором індукції магнітного поля. З рис. 17.1 бачимо, що $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 90°$. Таким чином, магнітний потік через рамку змінюється від Φ_1 до Φ_2 відповідно до (16.4):

$$\Phi_1 = BS\cos\alpha_1, \quad \Phi_2 = BS\cos\alpha_2.$$

Середнє значення ЕРС індукції визначимо за формулою (17.2):

$$\langle\varepsilon\rangle = -\frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{\Delta t} = -\frac{BS(\cos 90° - \cos 0°)}{\Delta t}.$$

Оскільки $\cos 0° = 1$, $\cos 90° = 0$, а площа кола $S = \pi r^2$, то цей вираз можна записати таким чином:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{BS}{\Delta t} = \frac{\pi r^2 B}{\Delta t}.$$

Знайдемо числове значення:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3,14\cdot 0,1^2\cdot 1}{0,1} = 0,314\ (\text{В}).$$

17.9. Одношаровий соленоїд без сердечника зроблений із провідника з діаметром 0,2 мм. Довжина соленоїда – 16 см, його діаметр – 3 см. При якій швидкості зміни сили струму виникає ЕРС самоіндукції величиною 1 В?

$d = 2\cdot 10^{-4}$ м,
$l = 0,16$ м,
$D = 0,03$ м,
$\varepsilon = 1$ В,
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м,
$\mu = 1$
$\Delta I/\Delta t$–?

ЕРС самоіндукції, що виникає при зміні сили струму на величину ΔI в соленоїді за час Δt, визначається формулою (17.8):

$$\varepsilon = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Індуктивність соленоїда, відповідно до (17.9),

$$L = \frac{\mu_0\mu N^2 S}{l},$$

де N – кількість витків соленоїда. Нам даний діаметр дроту d, із якого намотаний соленоїд. При цьому справедливі рівності

$$l = Nd; \quad N = \frac{l}{d}.$$

Площу перерізу соленоїда визначимо стандартним чином:

$$S = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Тоді матимемо

$$\varepsilon = -\mu_0\mu\frac{l}{d^2}\frac{\pi D^2}{4}\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

звідки без урахування знака швидкість зміни сили струму

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{4\varepsilon d^2}{\mu_0\mu l\pi D^2},$$

або після розрахунку

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{4\cdot 1\cdot (2\cdot 10^{-4})^2}{4\cdot 3,14159\cdot 10^{-7}\cdot 1\cdot 0,16\cdot 3,14159\cdot 0,03^2} = 281,45\ \left(\frac{\text{А}}{\text{с}}\right).$$

17.10. Котушка довжиною $l = 50$ см із площею поперечного перерізу $S = 40$ см^2 складається з одного ряду щільно прилеглих один до одного витків провідника діаметром $d = 0,6$ мм. Напруга на затисках котушки $U = 12$ В. Визначити силу струму I в котушці, якщо за час $t = 0,4$ мс у проводі виділяється кількість теплоти, що дорівнює енергії магнітного поля котушки. Поле всередині котушки вважати однорідним.

$l = 0,5$ м,
$S = 4 \cdot 10^{-3}$ м^2,
$d = 6 \cdot 10^{-4}$ м,
$U = 12$ В,
$t = 4 \cdot 10^{-4}$ с,
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м,
$\mu = 1$
I—?

Енергія магнітного поля котушки (17.10)

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

За законом Джоуля – Ленца (14.3) кількість теплоти Q, що виділяється за час t:

$$Q = I^2Rt,$$

де R – опір провідника. За умовою $Q = W$, тоді

$$I^2Rt = \frac{LI^2}{2},$$

скорочуючи на I^2, отримаємо

$$Rt = \frac{L}{2}; \quad R = \frac{L}{2t}.$$

Індуктивність соленоїда знаходимо за формулою (17.9):

$$L = \frac{\mu_0\mu N^2 S}{l},$$

де N – кількість витків у котушці; S – площа поперечного перерізу котушки; l – довжина котушки. Оскільки котушка складається з одного ряду щільно прилеглих один до одного витків, то $N = l/d$, де d – діаметр провідника. Вираз для визначення опору набирає вигляду

$$R = \frac{L}{2t} = \frac{\mu_0\mu N^2 S}{2tl} = \frac{\mu_0\mu l S}{2td^2}.$$

За законом Ома (13.4) знайдемо силу струму:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2Utd^2}{\mu_0\mu l S}.$$

Виконаємо розрахунки:

$$I = \frac{2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot (6 \cdot 10^{-4})^2}{4 \cdot 3,14159 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 1,38 \text{ (A)}.$$

17.11. При зміні струму в котушці індуктивності на величину 1 А за час $t = 0,6$ с у ній виникне ЕРС, що дорівнює $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ В. Яку довжину матиме радіохвиля, що випромінюється генератором, контур якого складається із цієї котушки і конденсатора ємністю 14,1 нФ?

$\Delta I = 1$ А,
$\Delta t = 0,6$ с,
$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ В,
$C = 14,1 \cdot 10^{-9}$ Ф,
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
λ–?

Коливальний контур генератора налаштований на довжину хвилі, при якій період його власних коливань T дорівнює періоду електромагнітної хвилі. За формулою Томсона (17.13)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

ЕРС самоіндукції, що виникає в контурі при зміні сили струму в ньому (17.8):

$$\varepsilon = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

звідки виразимо індуктивність без урахування знака

$$L = \varepsilon\frac{\Delta t}{\Delta I}.$$

Із цих формул, ураховуючи (17.15):

$$\lambda = cT,$$

отримаємо

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 2\pi c\sqrt{\frac{\varepsilon C \Delta t}{\Delta I}}.$$

Знайдемо числове значення:

$$\lambda = 2 \cdot 3,14159 \cdot 3 \cdot 10^8\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 14,1 \cdot 10^{-9} \cdot 0,6}{1}} = 2451,89 \text{ (м)}.$$

17.12. Металевий стрижень обертається в горизонтальній площині навколо вертикальної осі, що проходить через один із його кінців. Довжина стрижня – 2 м, вертикальна складова магнітного поля Землі – 50 мкТл, частота обертання стрижня – 8 с$^{-1}$. Визначити різницю потенціалів, що виникає між кінцями провідника.

17. ЕРС індукції. Індуктивність. Енергія магнітного поля

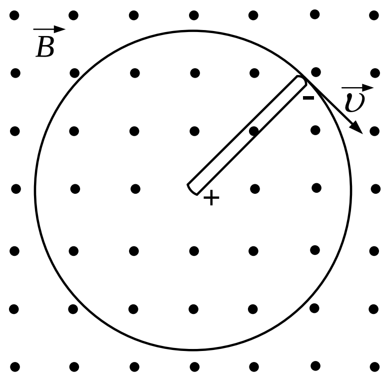


Рисунок 17.2

$l = 2$ м,
$B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл,
$\nu = 8$ с$^{-1}$,
$\alpha = 90^\circ$
$U-?$

Усередині стрижня, що перетинає лінії магнітної індукції, виникає сила Лоренця (16.3), яка діє на заряди в провіднику. Електрони під дією сили Лоренця починають зміщуватися вздовж стрижня до одного з його кінців (див. рис. 17.2). Зміщення відбувається доти, поки напруженість електричного поля всередині провідника не досягає значення, при якому сили електричного відштовхування електронів урівноважать сили Лоренця. Різниця потенціалів, що при цьому виникає, і є ЕРС індукції:

$$U = \varepsilon.$$

Задачу можна розв'язати двома способами.

1-й спосіб

Використаємо основний закон електромагнітної індукції (17.2):

$$\varepsilon = \left| -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \right| = \frac{\mathrm{d}(BS)}{\mathrm{d}t} = B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t},$$

де S – площа, яку перетинає провідник при обертанні в магнітному полі. Час повного обертання стрижня – це період T, що пов'язаний із частотою як

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

Радіус кола, що описує кінець стрижня, дорівнює довжині стрижня l. Отже, за час, що відповідає періоду обертання провідника T, площа S змінюється від $S_1 = 0$ до $S_2 = \pi l^2$. Тому часову залежність площі можна записати як

$$S = \frac{\pi l^2 t}{T},$$

або через частоту ν:

$$S = \pi l^2 \nu t.$$

Знайдемо шукану ЕРС:

$$\varepsilon = B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\pi l^2 \nu t\right) = \pi B l^2 \nu,$$

або після розрахунків:

$$\varepsilon = 3,14159 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 2^2 \cdot 8 = 5,03 \cdot 10^{-3}\ (\text{В}) = 5,03\ (\text{мВ}).$$

2-й спосіб

Лінійна швидкість довільної точки стрижня визначається виразом

$$v = \omega r,$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота, r – відстань від осі обертання стрижня до точки, в якій визначається швидкість v. Згідно із цим лінійна швидкість рівномірно змінюється вздовж довжини стрижня від 0 до $2\pi l\nu$. Для розрахунку ЕРС індукції використаємо формулу (17.3):

$$\varepsilon = Bl\langle v\rangle,$$

де $\langle v\rangle$ – середнє значення швидкості:

$$\langle v\rangle = \frac{0 + 2\pi l\nu}{2} = \pi l\nu.$$

Отже, матимемо

$$\varepsilon = Bl\langle v\rangle = \pi B l^2 \nu.$$

Ми отримали таку саму формулу, як і у перший спосіб. Це підтверджує те, що задачу розв'язано правильно.

17. ЕРС індукції. Індуктивність. Енергія магнітного поля

Задачі для самостійного розв'язування

17.13. Котушка без осердя довжиною $l = 50$ см і площею перерізу $S_1 = 3$ см^2 має $N = 1000$ витків і з'єднана паралельно з конденсатором. Конденсатор складається із двох пластин площею $S_2 = 75$ см^2 кожна. Відстань d між пластинами дорівнює 5 мм. Діелектрик — повітря. Визначити період T коливань контура.

17.14. Якою має бути індуктивність котушки, щоб при енергії магнітного поля всередині її витків $W = 5$ Дж відповідний магнітний потік дорівнював 10 Вб.

17.15. Обмотка електромагніта, знаходячись під постійною напругою, має опір 15 Ом та індуктивність 0,3 Гн. Визначити час, за який в обмотці виділиться кількість теплоти, що дорівнює енергії магнітного поля в сердечнику.

17.16. Котушка із залізним осердям має площу перерізу 20 см^2 і 500 витків. Індуктивність котушки — 0,28 Гн, сила струму, що проходить через обмотку, — 5 А. Знайти магнітну проникність осердя.

17.17. Обмотка тороїда з немагнітним осердям має $N_1 = 251$ виток. Середній діаметр $\langle D \rangle$ тороїда становить 8 см, діаметр d витків дорівнює 2 см. На тороїд намотана ще одна обмотка, що має $N_2 = 100$ витків. При замиканні первинної обмотки в ній протягом $t = 1$ мс встановлюється сила струму $I = 3$ А. Знайти середню ЕРС індукції, що виникає на другій обмотці.

17.18. Плоский контур зі струмом $I = 50$ А розміщений в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,6$ Тл так, що нормаль до контура перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Визначити роботу, що виконується силами поля при повільному повороті контура на кут $\alpha = 30°$, якщо площа контура 200 см^2.

17.19. Магнітний потік усередині котушки з 400 витками за $0,2$ с змінився від $0,1$ Вб до $0,9$ Вб. Визначити ЕРС у котушці.

17.20. По котушці з індуктивністю $L = 0,6$ Гн проходить струм $I = 20$ А. Чому дорівнює енергія магнітного поля котушки? Як зміниться ця енергія при зростанні сили струму вдвічі? втричі?

17.21. Якої сили струм потрібно пропускати по обмотці дроселя з індуктивністю 0,5 Гн, щоб енергія поля дорівнювала 100 Дж?

17.22. В однорідному магнітному полі з індукцією 0,84 Тл з невеликою швидкістю обертається квадратна рамка, сторона якої 5 см, що складається з невеликої кількості витків мідного провідника площею поперечного перерізу 0,5 мм^2. Кінці рамки коротко замкнені. Максимальна сила струму, індукованого в рамці при обертанні, — 1,9 А. Визначити частоту обертання рамки.

17.23. Визначити енергію магнітного поля котушки, що має 120 витків, якщо при струмі 7,5 А магнітний потік дорівнює $2,3 \cdot 10^{-3}$ Вб.

17.24. При швидкості зміни сили струму $\Delta I/\Delta t$ в соленоїді, що дорівнює 50 А/с, на його кінцях виникає ЕРС самоіндукції $\varepsilon = 0,08$ В. Визначити індуктивність L соленоїда.

17.25. Соленоїд завдовжки $l = 0,5$ м із площею перерізу $S = 2$ см^2 має індуктивність $L = 0,2$ мкГн. При якій силі струму I об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда $\omega = 1$ мДж/м^3?

17.26. Кільце з алюмінієвого провідника знаходиться в магнітному полі перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Діаметр кільця — 30 см, діаметр провідника — 2 мм. Визначити швидкість зміни магнітного поля, якщо струм у колі $I = 1$ А.

17.27. Виток із провідника площею перерізу 100 см^2 та опором 5 Ом знаходиться в однорідному магнітному полі з напруженістю 10 кА/м, перпендикулярно до ліній магнітної індукції. При повороті витка в магнітному полі гальванометр, який замкнено на виток, показує 12,6 мкКл. Визначити кут повороту витка.

17.28. В однорідному магнітному полі, індукція якого 0,1 Тл, обертається котушка, що складається з 200 витків. Вісь обертання котушки перпендикулярна до її осі та до напряму магнітного поля. Період обертання котушки — 0,2 с, площа поперечного перерізу — 4 см^2. Знайти максимальну ЕРС індукції в котушці.

17.29. Кільце з провідника радіусом $r = 10$ см лежить на столі. Яка кількість заряду q пройде по кільцю, якщо його повернути з одного боку на інший? Опір R кільця дорівнює 1 Ом. Вертикальна складова індукції B магнітного поля Землі дорівнює 50 мкТл.

17.30. Сила струму в обмотці соленоїда, що складається з 1500 витків, дорівнює 5 А. Магнітний потік через поперечний переріз соленоїда $\Phi = 200$ мкВб. Визначити енергію магнітного поля в соленоїді.

17.31. Котушка індуктивності діаметром 4 см, що має 400 витків мідного провідника діаметром 1 мм^2, розташована в однорідному магнітному полі, індукція якого напрямлена вздовж осі котушки та рівномірно змінюється зі швидкістю 0,1 Тл/с. Визначити кількість теплоти, що виділяється в котушці за 1 с.

17.32. Дві котушки намотані на спільне осердя. Індуктивність першої котушки $L_1 = 0,2$ Гн, другої $L_2 = 0,8$ Гн, опір другої котушки $R_2 = 600$ Ом. Який струм I_2 пройде по другій котушці, якщо струм $I_1 = 0,3$ А, що проходить у першій котушці, зникає за час $t = 1$ мс?

17.33. На залізне кільце намотано в один шар $N = 200$ витків провідника. Визначити енергію W_m магнітного поля, якщо при струмі $I = 2,5$ А магнітний потік Φ у залізі дорівнює $0,5$ МВб.

17.34. Індуктивність соленоїда, намотаного в один шар на немагнітний каркас, $L = 0,5$ мГн. Довжина соленоїда – 0,6 м, його діаметр – 2 см. Знайти відношення числа витків соленоїда до його довжини.

17.35. Дві довгі котушки намотані на загальне осердя, причому індуктивність цих котушок $L_1 = 0,64$ Гн та $L_2 = 0,04$ Гн відповідно. Визначити, у скільки разів число витків першої котушки більше, ніж другої.

17.36. Одношарова обмотка соленоїда без осердя виготовлена з провідника діаметром $d = 0,6$ мм. Довжина соленоїда $l = 60$ см, площа поперечного перерізу $S = 15$ см^2, по обмотці проходить струм $I = 2$ А. Знайти напругу, що подається на обмотку соленоїда, якщо за час $t = 5 \cdot 10^{-4}$ с на обмотці виділяється кількість теплоти Q, що дорівнює енергії магнітного поля всередині соленоїда W_m.

17.37. Енергія магнітного поля якої котушки більша, якщо для першої $I_1 = 10$ А, $L_1 = 20$ Гн, а для другої – $I_2 = 20$ А, $L_2 = 10$ Гн?

17.38. Два соленоїди намотані на немагнітний каркас один на другий. Кількість витків соленоїдів $N_1 = 1200$ і $N_2 = 750$, площі перерізів $S = 20$ см^2, їх довжини $l_1 = l_2 = 1$ м. По обмотках проходять струми $I_1 = 3$ А і $I_2 = 7$ А відповідно. Знайти енергію магнітного поля струмів.

17.39. Обмотка соленоїда складається з N витків мідного провідника, поперечний переріз якого 1 мм^2. Довжина соленоїда – 25 см, опір – 0,2 Ом. Знайти індуктивність соленоїда.

17.40. За 1 с у соленоїді, що складається з 1000 витків, магнітний потік зменшився з 5 мВб до 2 мВб. Визначити ЕРС індукції в соленоїді.

17.41. В магнітному полі з індукцією $B = 0,2$ Тл рівномірно з частотою $\nu = 600$ хв$^{-1}$ обертається рамка, що складається з 120 витків, які щільно прилягають один до одного. Площа рамки – 100 см^2. Вісь обертання лежить у площині рамки та перпендикулярна до ліній магнітної індукції. Визначити максимальну ЕРС, що індукується в рамці.

17.42. Коротка котушка, що містить $N = 1000$ витків, рівномірно обертається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0,04$ Тл з кутовою швидкістю $\omega = 5$ рад/с відносно осі, що збігається з діаметром котушки і перпендикулярна до ліній індукції поля. Визначити миттєве значення ЕРС індукції для тих моментів часу, коли площина котушки становить кут $\alpha = 60°$ з лініями індукції поля. Площа S котушки дорівнює 100 см^2.

17.43. Потрібно виготовити котушку довжиною 6,28 см і площею поперечного перерізу 40 см^2 з індуктивністю 0,02 Гн. Скільки витків повинна мати ця котушка?

17.44. Усередині соленоїда, що складається з $N_1 = 400$ витків провідника, рівномірно розподілених по його довжині $l = 40$ см, міститься коротка котушка радіусом $r = 2$ см, що має $N_2 = 500$ витків провідника з опором $R = 10$ Ом. Визначити максимально можливий заряд, що індукується в котушці при її повороті на $\alpha = 180°$, якщо в соленоїді проходить струм силою $I = 10$ А.

17.45. Два прямолінійні довгі паралельні провідники розміщені на відстані $r_1 = 10$ см один від одного. По провідниках в одному напрямку проходять струми $I_1 = 20$ А та $I_2 = 30$ А. Яку роботу потрібно виконати, щоб віддалити їх на відстань $r_2 = 20$ см?

18. Електромагнітні коливання та хвилі. Змінний струм

Основні формули

- Диференціальне рівняння для заряду в коливальному контурі, що містить ємність, опір та індуктивність:

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2q=0,\quad 2\beta=\frac{R}{L},\quad \omega_0^2=\frac{1}{LC},\qquad (18.1)$$

де q — заряд на обкладинках конденсатора (Кл); ω_0 — циклічна частота власних коливань (рад/с); β — коефіцієнт загасання (c^{-1}); C — ємність (Ф); R — опір (Ом); L — індуктивність (Гн).

- Циклічна частота коливань у коливальному контурі із загасанням (див. (18.1) при $R\neq 0$):

$$\omega^2=\omega_0^2-\beta^2.\qquad (18.2)$$

- Залежності величини заряду q, напруги U та сили струму I від часу t у коливальному контурі без загасання (див. (18.1) при $R=0$):

$$\begin{aligned}
&q=q_\mathrm{m}\cos(\omega_0t+\varphi_0),\\
&U=\frac{q}{C}=\frac{q_\mathrm{m}}{C}\cos(\omega_0t+\varphi_0)=U_\mathrm{m}\cos(\omega_0t+\varphi_0),\\
&I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-q_\mathrm{m}\omega_0\sin(\omega_0t+\varphi_0)=-I_\mathrm{m}\sin(\omega_0t+\varphi_0),
\end{aligned}\qquad (18.3)$$

де U_m — амплітуда напруги (В); I_m — амплітуда сили струму (А).

- Залежність заряду q на конденсаторі від часу в коливальному контурі з загасанням (див. (18.1) при $R\neq 0$, коли виконується умова $\omega_0^2-\beta^2>0$):

$$q=q_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0),\qquad (18.4)$$

де частота ω визначається формулою (18.2).

- Аперіодичний розряд конденсатора на резистор (сильне загасання, $\omega_0^2 \ll \beta^2$):

$$q = q_\mathrm{m} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \tag{18.5}$$

- Амплітуда напруги в коливальному контурі

$$U_\mathrm{m} = I_\mathrm{m}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{18.6}$$

- Опір конденсатора ємністю C в колі змінного струму

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \tag{18.7}$$

- Опір котушки з індуктивністю L в колі змінного струму

$$X_L = \omega L. \tag{18.8}$$

- Загальний опір (імпеданс) у колі змінного струму, що містить послідовно з'єднані резистор R, конденсатор C та індуктивність L:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \tag{18.9}$$

- Узагальнений закон Ома для кола змінного струму

$$I = \frac{U}{Z}. \tag{18.10}$$

- Умовний період згасних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{18.11}$$

18. Електромагнітні коливання та хвилі. Змінний струм

- Логарифмічний декремент загасання

$$\delta = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\omega}; \quad \delta = \ln\frac{U(t)}{U(t+T)}, \tag{18.12}$$

де $U(t)$ – амплітуда коливань напруги в довільний момент часу t; $U(t+T)$ – амплітуда коливань напруги в момент часу $t+T$, де T – умовний період коливань (18.11).

- Зв'язок діючих (ефективних) значень сили струму $I_\text{д}$, напруги $U_\text{д}$ та ЕРС $\varepsilon_\text{д}$ з їх амплітудними значеннями:

$$I_\text{д} = \frac{I_\text{m}}{\sqrt{2}}, \quad U_\text{д} = \frac{U_\text{m}}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_\text{д} = \frac{\varepsilon_\text{m}}{\sqrt{2}}. \tag{18.13}$$

- Зсув за фазою між силою струму та напругою в колі, що містить послідовно з'єднані резистор R, конденсатор C та індуктивність L:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{X_L - X_C}{R}, \tag{18.14}$$

або

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}, \quad \varphi = \arccos\frac{R}{Z}. \tag{18.15}$$

- Середня потужність, що виділяється в колі змінного струму:

$$P = I_\text{д} U_\text{д} \cos\varphi. \tag{18.16}$$

Приклади розв'язання задач

18.1. Визначити, за який час конденсатор ємністю $C = 100$ мкФ, що повністю заряджений до напруги $U = 220$ В, розрядиться через резистор з опором $R = 1$ кОм. Втратами в конденсаторі знехтувати.

$C = 10^{-4}$ Ф,
$U_0 = 220$ В,
$R = 1000$ Ом
τ–?

Розглянемо коло, що складається з послідовно з'єднаних резистора, конденсатора та котушки індуктивності. Таке коло називається коливальним контуром. У цьому разі для заряду на конденсаторі q може бути записане таке рівняння (18.1):

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = 0, \quad 2\beta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

або

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{LC} = 0.$$

Помножимо це рівняння на індуктивність L:

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0.$$

З рівняння бачимо, що саме наявність індуктивності L надає системі реактивні властивості, оскільки, якщо індуктивність відсутня ($L = 0$), це рівняння вироджується у звичайне релаксаційне рівняння. Однак ми розглядаємо саме такий випадок:

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{q}{RC}, \quad \frac{\mathrm{d}q}{q} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC}.$$

Проінтегруємо останній вираз:

$$\int\limits_{q_\mathrm{m}}^{q} \frac{\mathrm{d}q'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int\limits_0^t \mathrm{d}t'.$$

Тут у межах інтегрування враховано, що в початковий момент часу $t = 0$ заряд дорівнює своєму максимальному значенню $q = q_\mathrm{m}$, а в довільний момент часу t заряд дорівнює величині q. Проінтегруємо цей вираз:

$$\ln q'|_{q_\mathrm{m}}^{q} = -\frac{1}{RC}t'|_0^t, \quad \ln q - \ln q_\mathrm{m} = -\frac{t}{RC}, \quad \ln\frac{q}{q_\mathrm{m}} = -\frac{t}{RC}.$$

Проекспонуємо останній вираз:

$$\frac{q}{q_\mathrm{m}} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad q = q_\mathrm{m}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

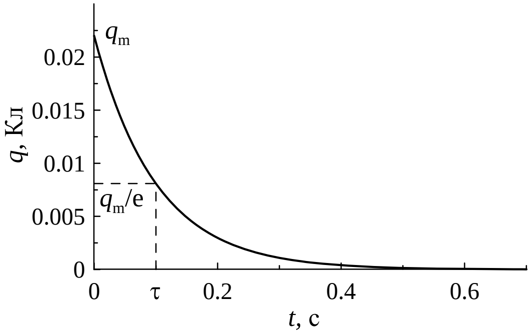


Рисунок 18.1

Отже, ми отримали універсальний закон розрядження конденсатора через резистор (див. формулу (18.5)). Але в нашій задачі немає значення заряду, а є напруга та ємність конденсатора. Тому використаємо співвідношення

$$U = \frac{q}{C}, \quad q = UC,$$

та матимемо розрахункову формулу

$$q = U_0 C \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

або при підстановці чисел:

$$q = 220 \cdot 10^{-4} \exp\left(-\frac{t}{1000 \cdot 10^{-4}}\right) = 0,022\mathrm{e}^{-10t}.$$

За умовою задачі потрібно знайти час t, за який конденсатор повністю розрядиться, тобто коли заряд q дорівнюватиме нулю. Згідно з отриманим законом цей момент ніколи не настане. Розрахуємо графік залежності $q(t)$. На рис. 18.1 показана отримана залежність, з якої бачимо, що при розряджанні конденсатора його заряд асимптотично наближається до нульового значення, але ніколи його не досягає. Однак у деякий момент часу значення заряду стає таким, що його можна порівняти з величиною теплових флуктуацій (внутрішнього шуму). При цьому інформація про те, що конденсатор був заряджений, зникає, тому що заряд q починає змінювати своє значення випадковим чином. Тобто конденсатор набуває стану, який еквівалентний до випадку, коли б він був не заряджений взагалі.

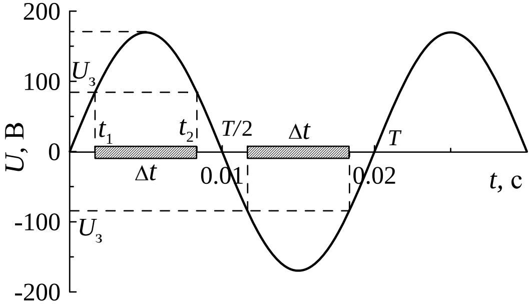


Рисунок 18.2

Такі релаксаційні процеси прийнято характеризувати часом релаксації τ — це такий час, за який початкове значення q_{m} зменшується в e разів, тобто коли $q = q_{\mathrm{m}}/\mathrm{e}$. Цей час легко знайти:

$$\frac{q}{q_{\mathrm{m}}} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad \frac{1}{\mathrm{e}} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad -1 = -\frac{t}{RC},$$

звідки випливає, що в нашому випадку час релаксації визначається умовою

$$\tau = RC = 1000 \cdot 10^{-4} = 0,1\ (\text{с}).$$

На рис. 18.1 цей час показаний штриховою лінією.

18.2. Який час працюватиме неонова лампа, якщо її на 1 хвилину під'єднати в коло змінного струму з діючою напругою 120 В і частотою 50 Гц? Лампа загоряється та гасне при напрузі 84,5 В.

$t_0 = 60$ с,
$U_{\text{д}} = 120$ В,
$\nu = 50$ Гц,
$U_{\text{з}} = 84,5$ В
t—?

При вмиканні лампи в коло змінного струму напруга на ній змінюється за законом

$$U = U_{\mathrm{m}} \sin \omega t; \quad \omega = 2\pi\nu,$$

звідки

$$U = U_{\mathrm{m}} \sin 2\pi\nu t,$$

де максимальна напруга може бути визначена за формулою (18.13):

$$U_{\mathrm{m}} = U_{\text{д}}\sqrt{2} = 120\sqrt{2} = 169,706\ (\text{В}).$$

Тому відповідно до умови задачі маємо залежність

$$U = 169,706 \sin(100\pi t)\ \text{В},$$

яка показана на рис. 18.2. На графіку $U(t)$ напругу, при якій лампа загоряється або вимикається, позначено $U_з$. Також позначено відповідні моменти часу: при t_1 лампа загоряється, а при t_2 – гасне. Відповідно до рисунка тривалість роботи лампи за один напівперіод становить

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Знайдемо t_2 і t_1:

$$U_з = U_\text{m} \sin 2\pi\nu t, \quad 84,5 = 169,706 \sin(100\pi t_1), \quad \frac{1}{2} = \sin(100\pi t_1),$$

$$100\pi t_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad t_1 = \frac{1}{600}\ (\text{с});$$

$$\frac{1}{2} = \sin(100\pi t_2), \quad 100\pi t_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \quad t_2 = \frac{5}{600}\ (\text{с}),$$

звідки

$$\Delta t = \frac{5}{600} - \frac{1}{600} = \frac{4}{600} = \frac{1}{150}\ (\text{с}).$$

Як бачимо з рисунка, протягом одного повного коливання лампа загоряється двічі. Оскільки повне число коливань за час t_0 дорівнює νt_0, то число разів, коли лампа горить, становить $2\nu t_0$. Отже, знайдемо час, протягом якого горить лампа:

$$t = 2\nu t_0 \Delta t,$$

або після розрахунків

$$t = 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \frac{1}{150} = 40\ (\text{с}).$$

18.3. До кола, що складається з послідовного з'єднання конденсатора ємністю 6,37 мкФ та активного опору 500 Ом, підведено змінну напругу 200 В із частотою 50 Гц. Визначити силу струму і зсув фази між струмом та напругою. Побудувати графіки залежності сили струму та напруги від фази (ωt).

$C = 6,37 \cdot 10^{-6}$ Ф,
$R = 500$ Ом,
$\nu = 50$ Гц,
$U = 220$ В
I, φ–?

Спочатку знайдемо повний опір кола. Оскільки індуктивність у колі відсутня, за формулою (18.9) маємо

$$X_L = 0, \quad Z^2 = R^2 + X_C^2.$$

За формулою (18.7) розрахуємо опір конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14159 \cdot 50 \cdot 6,37 \cdot 10^{-6}} = 499,702 \text{ (Ом)}.$$

Знайдемо числове значення імпедансу Z:

$$Z = \sqrt{500^2 + 499,702^2} = 706,896 \text{ (Ом)}.$$

Сила струму в колі визначається за формулою (18.10):

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{706,896} = 0,311 \text{ (А)}.$$

Величину зсуву фази між силою струму та напругою визначаємо за формулою (18.14):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-X_C}{R} = -\frac{499,702}{500} \approx -1; \quad \varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Для того щоб побудувати графіки залежностей сили струму та напруги від фази, потрібно знати їх амплітудні значення. В умові дане діюче значення напруги. Тому згідно з (18.13) маємо

$$I_{\text{m}} = I\sqrt{2} = 0,311\sqrt{2} = 0,44 \text{ (А)},$$

$$U_{\text{m}} = U\sqrt{2} = 220\sqrt{2} = 311,127 \text{ (В)}.$$

Раніше було визначено, що напруга відстає за фазою від сили струму на $\pi/4$. Тому якщо закон для зміни сили струму записати у вигляді

$$I = I_{\text{m}} \sin(\omega t),$$

то закон для зміни напруги матиме вигляд

$$U = U_{\text{m}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

При підстановці числових значень

$$I = 0,44 \sin(\omega t), \quad U = 311,127 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

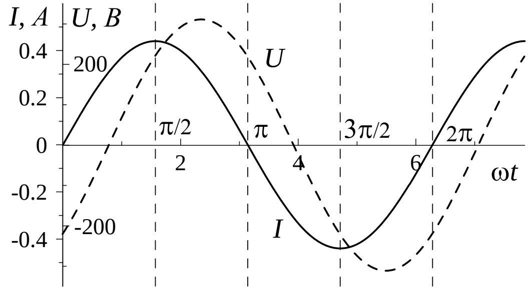


Рисунок 18.3

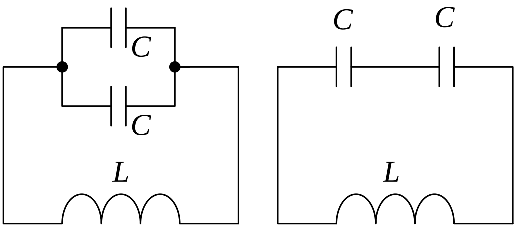


Рисунок 18.4

Оскільки в умові дана частота $\nu = 50$ Гц, ми можемо записати циклічну частоту як $\omega = 2\pi\nu$ й отримати залежності I та U від часу t. Однак потрібно побудувати залежності цих величин від фази ωt, а останні рівності — це саме такі залежності. Необхідні графіки наведені на рис. 18.3. Графіку напруги (пунктир) відповідає синусоїда, що зміщена праворуч відносно графіка сили струму (суцільна крива) на $\pi/4$.

18.4. Коливальний контур складається із котушки індуктивності й двох однакових конденсаторів, які з'єднані паралельно. Період власних коливань контура дорівнює 20 мкс. Визначити період коливань, якщо конденсатори під'єднати послідовно.

$T_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ с
T_2—?

На рис. 18.4 зображено два випадки, що розглядаються в задачі. Період коливань у контурі визначаємо за формулою Томсона (17.13):

$$T = 2\pi\sqrt{LC'},$$

де C' – ємність системи конденсаторів контура. Тоді для контура, що зображений на лівому рисунку, матимемо

$$T_1 = 2\pi\sqrt{2LC},$$

а для контура, що зображений праворуч:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{0,5LC}.$$

Період T_1 заданий в умові задачі, отже, зі співвідношення для T_1 знайдемо добуток LC:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{2LC}, \quad T_1^2 = 4\pi^2 \cdot 2LC, \quad LC = \frac{T_1^2}{8\pi^2}.$$

Підставимо знайдену величину LC у T_2:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{0,5LC} = 2\pi\sqrt{0,5\frac{T_1^2}{8\pi^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{T_1^2}{16\pi^2}} = 2\pi\frac{T_1}{4\pi} = \frac{T_1}{2}.$$

Тобто період T_2 буде меншим удвічі:

$$T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2} = 10^{-5}\ (\text{с}).$$

18.5. Коливальний контур має частоту 50 кГц. У скільки разів потрібно збільшити відстань між пластинами конденсатора, щоб частота контура дорівнювала 70 кГц?

$\nu_1 = 50 \cdot 10^3$ Гц,
$\nu_2 = 70 \cdot 10^3$ Гц
d_2/d_1–?

Частота коливань електричного контура ν залежить від індуктивності L і ємності контура C:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де ε_0 – електрична стала, S – площа пластин, d – відстань між пластинами. Звідси матимемо

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2\pi\sqrt{LC_2}}{2\pi\sqrt{LC_1}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_2}\Big/\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_1}} = \sqrt{\frac{d_1}{d_2}}.$$

Тобто відстань між пластинами конденсатора потрібно збільшити у

$$\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2 = \left(\frac{70 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^3}\right)^2 = 1,96 \text{ раза}.$$

18.6. Котушка з індуктивністю $L = 30$ мкГн приєднана до плоского конденсатора з площею пластин $S = 0,01$ м^2 та відстанню між ними $d = 0,1$ мм. Знайти діелектричну проникність ε середовища, що заповнює простір між пластинами, якщо контур налаштовано на довжину хвилі $\lambda = 750$ м.

$L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн,
$S = 0,01$ м^2,
$d = 10^{-4}$ м,
$\lambda = 750$ м,
$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м,
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
ε–?

Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де ε – діелектрична проникність середовища. Період коливань визначається за формулою Томсона (17.13):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Тоді довжина хвилі, на яку налаштовано контур:

$$\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{LC}.$$

Підставляючи вираз для ємності конденсатора у вираз для довжини хвилі, отримаємо

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}},$$

піднісши рівняння до квадрата

$$\lambda^2 = \frac{4\pi^2 c^2 \varepsilon\varepsilon_0 SL}{d},$$

звідки діелектрична проникність середовища, що заповнює простір між пластинами конденсатора:

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 SL}.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$\varepsilon = \frac{750^2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 3,14^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,01 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = 18,74 \text{ (В)}.$$

18.7. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L = 0,2$ Гн та конденсатора ємністю $C = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф. Конденсатор зарядили до напруги 4 В, тобто в момент часу $t = 0$ напруга $U_0 = 4$ В. Якими будуть струм, напруга і заряд у момент часу, коли відношення енергії електричного та магнітного полів дорівнює нулю?

$L = 0,2$ Гн,
$C = 2\cdot 10^{-5}$ Ф,
$U_0(t=0) = 4$ В,
$W_e/W_m = 0$
I, U, q–?

Напруга і заряд на обкладинках конденсатора змінюються за законом (18.3):

$$U = U_0\cos\omega t; \quad q = q_0\cos\omega t.$$

Тут обране значення початкової фази $\varphi_0 = 0$, оскільки в початковий момент часу $t = 0$ напруга на конденсаторі максимальна. Струм у колі змінюється за законом

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -q_0\omega\sin\omega t = -I_0\sin\omega t.$$

Енергія електричного та магнітного полів визначається за формулами (17.10), (17.11):

$$W_e = \frac{CU^2}{2}; \quad W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

Відношення енергій дорівнює

$$\frac{W_e}{W_m} = \frac{CU^2}{LI^2}.$$

За умовою $W_e/W_m = 0$, а це можливо тільки тоді, коли $W_e = 0$. Це означає, що заряд та напруга на обкладинках конденсатора дорівнюють нулю, а вся енергія знаходиться в магнітному полі:

$$W_m = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Енергія електричного поля в початковий момент часу також максимальна і дорівнює повній енергії системи:

$$W_e = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Ці два вирази можна прирівняти:

$$W_m = W_e; \quad \frac{LI_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}; \quad LI_0^2 = CU_0^2; \quad I_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Розрахуємо амплітудне значення струму:

$$I_0 = 4\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-5}}{0,2}} = 0,04\ (\text{А}).$$

За умовою задачі потрібно знайти динамічні параметри системи, коли вся енергія зосереджена в магнітному полі. Сила струму при цьому дорівнюватиме знайденому амплітудному значенню I_0, а заряд і напруга $q = 0$, $U = 0$.

18.8. Два конденсатори з ємностями $C_1 = 0,2$ мкФ, $C_2 = 0,1$ мкФ ввімкнені послідовно в коло змінного струму з напругою $U_д = 220$ В та частотою $\nu = 50$ Гц. Знайти струм I.

$C_1 = 2 \cdot 10^{-7}$ Ф, $C_2 = 10^{-7}$ Ф, $U_д = 220$ В, $\nu = 50$ Гц
I–?

Опір конденсатора в колі змінного струму виражається як (18.7):

$$X_C = \frac{1}{\omega C},$$

де $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота коливань. З урахуванням цього запишемо вирази для визначення опорів двох конденсаторів:

$$X_{C_1} = \frac{1}{2\pi\nu C_1}; \quad X_{C_2} = \frac{1}{2\pi\nu C_2}.$$

Оскільки конденсатори з'єднані послідовно, їх загальний опір – це сума знайдених опорів:

$$X_C = X_{C_1} + X_{C_2} = \frac{1}{2\pi\nu C_1} + \frac{1}{2\pi\nu C_2} = \frac{C_1 + C_2}{2\pi\nu C_1 C_2}.$$

За законом Ома для змінного струму (18.10):

$$I = \frac{U}{X_C}.$$

У результаті отримаємо шуканий струм у вигляді

$$I = \frac{2\pi\nu C_1 C_2 U}{C_1 + C_2},$$

або після розрахунку

$$I = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-7} \cdot 220}{2 \cdot 10^{-7} + 10^{-7}} = 0,00461 \text{ (А)} = 4,61 \text{ (мА)}.$$

18.9. Знайти відношення енергії магнітного поля коливального контура до енергії його електричного поля в момент часу $T/8$.

$t = T/8$
W_m/W_e–?

Запишемо вирази для енергії магнітного й електричного полів котушки та конденсатора (17.10), (17.11):

$$W_m = \frac{LI^2}{2}; \quad W_e = \frac{CU^2}{2}.$$

Напруга в коливальному контурі змінюється за законом (18.3):

$$U = U_0 \cos \omega t,$$

а сила струму в колі

$$I = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -CU_0\omega \sin \omega t,$$

де C – електроємність конденсатора. Тоді вирази для часових залежностей енергій магнітного та електричного полів можна записати у вигляді

$$W_m = \frac{LC^2U_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t}{2}; \quad W_e = \frac{CU_0^2 \cos^2 \omega t}{2},$$

а їх відношення

$$\frac{W_m}{W_e} = \frac{2LC^2U_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t}{2CU_0^2 \cos^2 \omega t} = LC\omega^2 \operatorname{tg}^2 \omega t.$$

Циклічна частота та період коливань зв'язані такими співвідношеннями:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Визначимо значення фази коливань ωt у момент часу $t = T/8$:

$$\omega t = \frac{\omega T}{8} = \frac{2\pi T}{8T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Ураховуючи останні розрахунки, матимемо

$$\frac{W_m}{W_e} = LC\omega^2 \operatorname{tg}^2 \omega t = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = 1.$$

18.10. Визначити довжину електромагнітної хвилі у вакуумі, на яку налаштовано коливальний контур, якщо максимальний заряд на обкладинках конденсатора $q_{\mathrm{m}} = 50$ нКл, а максимальна сила струму в контурі $I_{\mathrm{m}} = 1,5$ А. Активним опором контура знехтувати.

$q_{\mathrm{m}} = 50 \cdot 10^{-9}$ Кл, $I_{\mathrm{m}} = 1,5$ А, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с
λ–?

Заряд у коливальному контурі змінюється за законом (18.3):

$$q = q_{\mathrm{m}} \cos \omega t.$$

Оскільки сила струму зв'язана зі зміною заряду в контурі, то

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega q_{\mathrm{m}} \sin \omega t,$$

звідки максимальний струм, або амплітуда струму:

$$I_{\mathrm{m}} = \omega q_{\mathrm{m}}.$$

Циклічна частота та частота коливань зв'язані такими співвідношеннями:

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Оскільки довжина хвилі λ залежить від частоти ν (17.15), то

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c q_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{m}}}.$$

Залишилося розрахувати відповідне значення:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 3,14159 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 50 \cdot 10^{-9}}{1,5} = 62,83 \text{ (м)}.$$

18.11. До кола змінного струму напругою 220 В та частотою 50 Гц ввімкнені послідовно конденсатор ємністю 35,4 мкФ, резистор опором 100 Ом та котушка індуктивністю 0,7 Гн. Знайти силу струму в колі та спад напруг на резисторі, котушці та конденсаторі.

$U_0 = 220$ В,
$\nu = 50$ Гц,
$C = 35,4 \cdot 10^{-6}$ Ф,
$R = 100$ Ом,
$L = 0,7$ Гн
I_0, U_R, U_L, U_C—?

Для визначення амплітуди сили струму скористаємося законом Ома (18.10) для кола змінного струму з урахуванням імпедансу (18.9):

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - (\omega C)^{-1})^2}}.$$

Спад напруги на конденсаторі та котушці

$$U_C = I_0 X_C; \quad U_L = I_0 X_L.$$

Оскільки опір на конденсаторі (18.7) і на котушці (18.8)

$$X_C = \frac{1}{\omega C}; \quad X_L = \omega L,$$

а циклічна частота зв'язана із частотою співвідношенням $\omega = 2\pi\nu$, матимемо

$$U_C = \frac{I_0}{2\pi\nu C}; \quad U_L = 2\pi\nu I_0 L.$$

Підставляючи числові дані, зробимо розрахунки:

$$I_0 = \frac{220}{\sqrt{100^2 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot 0,7 - (2\pi \cdot 50 \cdot 35,4 \cdot 10^{-6})^{-1}\right)^2}} = 1,341\ (\text{А});$$

$$U_C = \frac{1,341}{2 \cdot 3,14159 \cdot 50 \cdot 35,4 \cdot 10^{-6}} = 120,58\ (\text{В});$$

$$U_L = 2 \cdot 3,14159 \cdot 50 \cdot 1,341 \cdot 0,7 = 294,9\ (\text{В}),$$

а спад напруги на резисторі

$$U_R = I_0 R = 100 \cdot 1,341 = 134,1\ (\text{В}).$$

18.12. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю 0,2 мкФ та котушки з індуктивністю 5,07 мГн. При якому логарифмічному декременті загасання різниця потенціалів на обкладинках конденсатора зменшиться втричі за час $t = 1$ мс? Визначити опір контура при цих характеристиках.

$C = 0,2 \cdot 10^{-6}$ Ф,
$L = 5,07 \cdot 10^{-3}$ Гн,
$t = 10^{-3}$ с,
$U_0/U_1 = 3$
R, δ–?

Спочатку знайдемо коефіцієнт загасання β:

$$U_1 = U_0 \mathrm{e}^{-\beta t}; \quad \mathrm{e}^{-\beta t} = \frac{U_1}{U_0}; \quad \mathrm{e}^{\beta t} = \frac{U_0}{U_1};$$

$$\beta t = \ln \frac{U_0}{U_1}; \quad \beta = \frac{1}{t} \ln \frac{U_0}{U_1}.$$

Розрахуємо це значення:

$$\beta = \frac{\ln 3}{10^{-3}} = 1098,6\ (\text{с}^{-1}).$$

Умовний період згасних коливань (18.11)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

де власна частота коливань ω_0 для коливального контура визначатиметься як (18.1):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

і може бути розрахована таким чином:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{5,07 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}}} = 31403,7\ \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

Розрахуємо числове значення періоду:

$$T = \frac{2 \cdot 3,14159}{\sqrt{31403,7^2 - 1098,6^2}} = 0,638 \cdot 10^{-8}\ (\text{с}).$$

Тепер можна розрахувати значення логарифмічного декременту загасання коливань:

$$\delta = \beta T = 1098,6 \cdot 0,638 \cdot 10^{-8} = 0,7 \cdot 10^{-5}.$$

Використовуючи співвідношення (18.1), розрахуємо активний опір контура:

$$\frac{R}{L} = 2\beta; \quad R = 2\beta L = 2 \cdot 1098,6 \cdot 5,07 \cdot 10^{-3} = 11,14\ (\text{Ом}).$$

18.13. У коливальному контурі з індуктивністю 160 мГн і ємністю 100 пФ значення максимального струму дорівнює 5 мА. Знайти максимальну напругу на конденсаторі та напругу в момент часу, коли сила струму дорівнюватиме 1 мА. Втратами в контурі знехтувати.

$L = 0,16$ Гн,
$C = 10^{-10}$ Ф,
$I_\text{m} = 5 \cdot 10^{-3}$ А,
$I = 10^{-3}$ А
U_m, U–?

В умові зазначено, що втрати в контурі незначні, отже, коливальний контур вважатимемо бездоганним і будемо використовувати закон збереження енергії. Конденсатор заряджений до максимальної напруги, коли вся енергія міститься в його електричному полі, тобто (17.11):

$$W = \frac{CU_\text{m}^2}{2}.$$

При коливаннях ця енергія поступово повністю переходить у магнітну енергію струму в котушці, тому, з іншого боку, відповідно до (17.10):

$$W = \frac{LI_\text{m}^2}{2}.$$

Прирівняємо ці енергії:

$$\frac{CU_\text{m}^2}{2} = \frac{LI_\text{m}^2}{2}, \quad CU_\text{m}^2 = LI_\text{m}^2, \quad U_\text{m}^2 = \frac{L}{C}I_\text{m}^2, \quad U_\text{m} = I_\text{m}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Розрахуємо це шукане значення:

$$U_\text{m} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{0,16}{10^{-10}}} = 200\ (\text{В}).$$

Нам також потрібно знайти величину напруги U, коли струм дорівнюватиме $I = 10^{-3}$ А. При довільному значенні струму частина енергії буде знаходитися в конденсаторі, а частина – в котушці. Отже, можна записати:

$$W = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_\mathrm{m}^2}{2} = \frac{LI_\mathrm{m}^2}{2}.$$

Оскільки тепер відомі величини максимального струму I_m і напруги U_m, то задачу можна розв'язати двома способами. Через максимальну напругу:

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_\mathrm{m}^2}{2}, \quad LI^2 + CU^2 = CU_\mathrm{m}^2, \quad CU^2 = CU_\mathrm{m}^2 - LI^2,$$

$$U^2 = U_\mathrm{m}^2 - \frac{L}{C}I^2, \quad U = \sqrt{U_\mathrm{m}^2 - \frac{L}{C}I^2},$$

$$U = \sqrt{200^2 - \frac{0,16}{10^{-10}} \cdot (10^{-3})^2} = 195,959 \text{ (В)},$$

або можна знайти відповідь через максимальну силу струму:

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{LI_\mathrm{m}^2}{2}, \quad LI^2 + CU^2 = LI_\mathrm{m}^2, \quad CU^2 = LI_\mathrm{m}^2 - LI^2,$$

$$U^2 = \frac{L}{C}(I_\mathrm{m}^2 - I^2), \quad U = \sqrt{\frac{L(I_\mathrm{m}^2 - I^2)}{C}}.$$

Підставимо числа і знайдемо відповідь:

$$U = \sqrt{\frac{0,16 \cdot [(5 \cdot 10^{-3})^2 - (10^{-3})^2]}{10^{-10}}} = 195,959 \text{ (В)}.$$

Двома способами отримано одну й ту саму відповідь. Отже, задача розв'язана правильно.

Задачі для самостійного розв'язання

18.14. Сила струму у відкритому коливальному контурі змінюється залежно від часу за законом $I = 0,4\cos(10^8\pi t)$ А. Знайти довжину хвилі λ.

18.15. Коли шкіра суха, опір між долонями рук може досягати значення $R_1 = 10^5$ Ом, а коли шкіра волога, цей опір істотно зменшується до значення $R_2 = 1000$ Ом. Оцінити струм, що пройде через тіло людини при контакті з електромережею напругою $U = 220$ В. Порівняти цей струм зі значенням порогового відчутного струму, якщо частота струму дорівнює $\nu = 50$ Гц. Пороговий відчутний струм за цієї частоти дорівнює 0,5 – 1,5 мА, в той час як при постійному струмі цей діапазон становить від 5 до 7 мА.

18.16. Активний опір терапевтичного контура апарата УВЧ-терапії дорівнює $5 \cdot 10^3$ Ом, індуктивність становить 27 мкГн, а частота – 40 МГц. Визначити ємність конденсатора, коефіцієнт загасання і період коливань у контурі.

18.17. Визначити діапазон частот власних коливань у контурі, якщо його індуктивність можна змінювати у межах від 0,1 до 10 мкГн, а ємність – у межах від 50 до 5000 пФ.

18.18. Індуктивність якої величини потрібно ввімкнути в коливальний контур, щоб при ємності конденсатора 50 пФ отримати частоту вільних коливань 10 МГц?

18.19. Задано рівняння $I = 5\cos(200\pi t)$ A зміни сили струму залежно від часу. Визначити частоту та період коливань, амплітуду сили струму, а також значення сили струму при фазі $\varphi = \pi/3$ рад.

18.20. Конденсатор ємністю $C = 25$ пФ заряджений до $U = 20$ В, розряджується через провідник опором $R = 1$ Ом та індуктивністю $L = 4$ мкГн. Знайти коефіцієнт загасання та амплітуду струму в колі.

18.21. Який опір має конденсатор ємністю 4 мкФ у колах із частотою змінного струму 50 і 400 Гц?

18.22. Кінцівка, на яку накладено електроди, має активний опір 1 кОм та ємність 0,2 мкФ. Визначити кут зсуву фаз між струмом та напругою для частоти 50 Гц, враховуючи, що активний та ємнісний опори з'єднано послідовно.

18.23. У коло змінного струму стандартної частоти напругою 220 В послідовно ввімкнули активний опір 150 Ом і конденсатор ємністю 16 мкФ. Визначити повний опір кола, силу струму в ньому, напругу на затисках активного опору та конденсатора.

18.24. Коли на котушку індуктивності подали постійну напругу 15 В, сила струму в ній дорівнювала 0,5 А. Коли подали таку саму змінну напругу, але частотою 50 Гц, сила струму зменшилася до 0,3 А. Яка індуктивність котушки?

18.25. Визначити активний опір котушки електромагнітного реле в схемі рентгенівського апарата, якщо індуктивність котушки 150 Гн, струм 2,5 мА, напруга 220 В, а частота струму в мережі 50 Гц.

18.26. Напруга і струм у котушці змінюються залежно від часу за законами: $U = 220\cos(100\pi t)$ В; $I = 6\sin(100\pi t)$ А. Визначити споживану потужність.

18.27. Зсув фаз між струмом та напругою під час проходження змінного струму частотою 25 Гц через м'язи жаби становить $-35°$. Чому дорівнює ємність конденсатора в еквівалентній схемі послідовно з'єднаних резистора і конденсатора, якщо активний опір становить 0,5 кОм?

18.28. У коло ввімкнули конденсатор ємністю 2 мкФ і котушку індуктивністю 0,05 Гн. При якій частоті струму в цьому колі буде спостерігатися резонанс?

18.29. У коло стандартної частоти ввімкнули послідовно лампочку, конденсатор ємністю 20 мкФ і котушку, яка без осердя має індуктивність 0,1 Гн, а при повністю введеному осерді 1 Гн. Як змінюється розжарювання лампи під час введення осердя в котушку?

18.30. Коливальний контур апарата для терапевтичної діатермії складається з котушки індуктивності та конденсатора ємністю 30 пФ. Визначити індуктивність котушки, якщо частота генератора 1 МГц.

18.31. Коливальний контур має ємність $C = 10$ мкФ, індуктивність $L = 25$ мГн та активний опір $R = 1$ Ом. Через скільки коливань амплітуда струму в цьому контурі зменшиться в е разів?

18.32. Кінці кола, що складається з послідовно ввімкнених конденсатора та активного опору $R = 110$ Ом, під'єднали до змінної напруги з амплітудним значенням $U_{\mathrm{m}} = 110$ В. При цьому амплітуда струму, що встановилася в колі, $I_{\mathrm{m}} = 0,5$ А. Знайти різницю фаз між струмом і напругою, що подається.

18.33. Конденсатор ємності C заряджається до напруги U_0 і замикається на котушку з індуктивністю L. Визначити амплітуду сили струму I_{m} в коливальному контурі. Активним опором контура знехтувати.

18.34. Коливальний контур містить конденсатор ємністю 800 пФ і котушку індуктивністю 2 мкГн. Який період власних коливань контура?

18.35. Коливальний контур складається з котушки і двох однакових конденсаторів, увімкнених паралельно. У скільки разів зміниться частота власних коливань, якщо ці конденсатори ввімкнути послідовно?

18.36. Записати рівняння $U = U(t)$ та $I = I(t)$ для кола електроплитки опором 50 Ом, увімкненої в мережу змінного струму, що має частоту 50 Гц і напругу 220 В.

18.37. Конденсатор увімкнули в коло змінного струму стандартної частоти напругою 220 В. Сила струму в колі цього конденсатора 2,5 А. Яка ємність конденсатора?

18.38. У коло змінного струму з частотою 50 Гц і напругою 220 В увімкнули послідовно реостат і котушку з дуже малим активним опором. Визначити опір реостата та індуктивність котушки, якщо сила струму в колі дорівнює 1 А, а різниця фаз між підведеною напругою та струмом становить 45°.

18.39. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю $C = 4$ мкФ, котушки з індуктивністю $L = 2$ мГн та активного опору $R = 10$ Ом. Знайти відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в момент, коли струм максимальний.

18.40. У коло змінного струму з частотою 400 Гц увімкнули котушку, індуктивність якої 0,1 Гн. Конденсатор якої ємності потрібно ввімкнути в це коло, щоб настав резонанс?

18.41. Як датчик медико-біологічної інформації використовують конденсатори зі змінною відстанню між пластинами. Знайти відношення зміни частоти ν до частоти власних коливань ν_0 у контурі, що містить такий конденсатор, якщо відстань між пластинами зменшилася на 1 мм. Початкова відстань дорівнює 1 см.

18.42. Конденсатор ємністю $C = 25$ пФ, заряджений до напруги

$U = 20$ В, розряджується через котушку опором $R = 10$ Ом та індуктивністю $L = 4$ мкГн. Знайти логарифмічний декремент загасання.

18.43. При зміні струму в котушці індуктивності на величину 1 А за час $0,6$ с у ній виникне ЕРС, що дорівнює $2 \cdot 10^{-4}$ В. Яку довжину матиме радіохвиля, що випромінюється генератором, контур якого складається із цієї котушки і конденсатора ємністю $14,1$ нФ?

18.44. Рівняння зміни різниці потенціалів із часом на обкладинках конденсатора в коливальному контурі має вигляд $U = 50\cos(10^4\pi t)$ В. Ємність конденсатора $C = 0,1$ мкФ. Знайти період T коливань, індуктивність L контура, закон зміни струму I в колі з часом t та довжину хвилі λ, що відповідає цьому контуру.

18.45. Котушка з опором $R = 10$ Ом та індуктивністю $L = 3$ Гн приєднана до джерела струму з ЕРС $\varepsilon = 15,5$ В та внутрішнім опором $r = 1$ Ом. Через який проміжок часу струм у котушці дорівнюватиме $I = 0,5$ А?

19. Хвильова оптика. Інтерференція

Основні формули

- Швидкість світла в середовищі

$$v = \frac{c}{n}, \tag{19.1}$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — швидкість світла у вакуумі; n — абсолютний показник заломлення середовища.

- Зв'язок швидкості хвилі v з її довжиною λ і частотою ν:

$$v = \lambda\nu. \tag{19.2}$$

- Додавання амплітуд напруженостей електричного поля E_m двох світлових хвиль однакової частоти:

$$E_m^2 = E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2E_{1m}E_{2m}\cos(\Delta\varphi), \tag{19.3}$$

де $\Delta\varphi$ — різниця фаз хвиль (рад).

- Додавання інтенсивностей I світлових хвиль однакової частоти:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi). \tag{19.4}$$

- Додавання амплітуд E та інтенсивностей I світлових хвиль від природних джерел світла:

$$E_{\text{сер}}^2 = E_{1\text{сер}}^2 + E_{2\text{сер}}^2, \quad I = I_1 + I_2. \tag{19.5}$$

- Оптична довжина шляху хвилі

$$L = nx, \tag{19.6}$$

де x — геометрична довжина шляху (м).

- Оптична різниця ходу хвиль:
$$\delta = x_1 n_1 - x_2 n_2, \tag{19.7}$$
де $x_{1,2}, n_{1,2}$ — геометрична довжина шляху та абсолютний показник заломлення у різних середовищах.

- Зв'язок різниці фаз $\Delta\varphi$ коливань з оптичною різницею ходу хвиль δ:
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta, \quad \delta = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi, \tag{19.8}$$
де λ — довжина хвилі світла (м).

- Умова максимуму інтенсивності світла при інтерференції:
$$\delta = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots); \tag{19.9}$$
умова мінімуму:
$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \tag{19.10}$$

- Умова максимуму інтерференції світлових хвиль, відбитих від верхньої і нижньої поверхонь тонкої плоскопаралельної пластинки або плівки, що знаходиться в повітрі:
$$2l\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{19.11}$$
де l — товщина пластинки (плівки) (м); n — показник заломлення речовини пластинки (плівки); α — кут падіння. У формулі враховано зміну оптичної довжини шляху світлової хвилі на $\lambda/2$ при відбитті її від оптично щільнішого середовища;

  умова мінімуму:
$$2l\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = k\lambda. \tag{19.12}$$

  У світлі, що проходить крізь пластинку, додаткової різниці ходу світлових променів не виникає, тому формула (19.11) відповідає умові мінімуму, а (19.12) — максимуму.

19. Хвильова оптика. Інтерференція

- Дослід Юнга:

$$y_{\max} = \pm \frac{l\lambda_0}{d} k; \quad y_{\min} = \pm \frac{l\lambda_0}{d} \left(k + \frac{1}{2}\right); \quad \Delta y = \frac{l\lambda_0}{d}, \quad (19.13)$$

  де $y_{\max}, y_{\min}$ — координати світлих і темних смуг на екрані (м); Δy — відстань між двома сусідніми інтерференційними максимумами або мінімумами (м); d — відстань між джерелами світла (м); l — відстань від джерел до екрана (м); λ_0 — довжина хвилі (м); k — порядок інтерференції.

- Закон відбиття:

$$\alpha = \gamma, \quad (19.14)$$

  де α — кут падіння; γ — кут відбиття.

- Закон заломлення:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \quad (19.15)$$

  де α — кут падіння; β — кут заломлення.

- Радіуси світлих кілець Ньютона у відбитому світлі (або темних у світлі, що проходить):

$$r_k = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda R}; \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \quad (19.16)$$

  де k — номер кільця; R — радіус кривизни поверхні лінзи, що дотикається з плоскопаралельною скляною пластинкою (м).

- Радіуси темних кілець у відбитому світлі (або світлих у світлі, що проходить):

$$r_k = \sqrt{k\lambda R}; \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \quad (19.17)$$

Приклади розв'язання задач

19.1. Довжина світлової хвилі в склі становить 450 нм. Світло в склі поширюється зі швидкістю $1,8 \cdot 10^5$ км/с. Визначити частоту коливань світла, абсолютний показник заломлення скла і довжину хвилі світла у вакуумі.

$\lambda_с = 4,5 \cdot 10^{-7}$ м,
$v_с = 1,8 \cdot 10^8$ м/с,
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
$\nu, n_с, \lambda_0$—?

Частоту світлової хвилі можна знайти з формули (19.2):

$$\nu = \frac{v_с}{\lambda_с} = \frac{1,8 \cdot 10^8}{4,5 \cdot 10^{-7}} = 4 \cdot 10^{14} \ \left(с^{-1}\right).$$

Під час переходу світла з повітря в скло швидкість і довжина хвилі змінюються, а частота залишається незмінною; вона визначає колір світла.

Показник заломлення скла знайдемо за формулою (19.1):

$$n = \frac{c}{v_с} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,8 \cdot 10^8} = 1,67.$$

Довжину хвилі світла у вакуумі знайдемо за формулою (19.2):

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{14}} = 0,75 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

19.2. Промінь білого світла нормально падає на одну з граней тригранної призми, що знаходиться в повітрі, із заломлювальним кутом 30°. Визначити кут між крайніми променями спектра після виходу з призми, якщо показники заломлення скла призми для них відповідно дорівнюють 1,62 і 1,67.

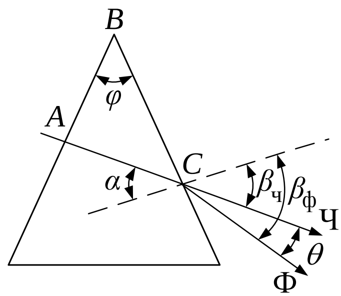


Рисунок 19.1

$n_ч = 1,62$,
$n_ф = 1,67$,
$\varphi = 30°$
θ—?

Оскільки промінь світла падає з повітря на грань призми перпендикулярно, то він усередині призми не заломлюється. На другу грань кут падіння α дорівнює куту призми 30° (оскільки ΔABC прямокутний, то

$\angle ACB = 90^\circ - \varphi$, а $\alpha = 90^\circ - \angle ACB = \varphi$, згідно з рис. 19.1). Запишемо закон заломлення (19.15) для червоного і фіолетового променів:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_{ч}} = \frac{1}{n_{ч}}, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_{ф}} = \frac{1}{n_{ф}},$$

звідки знайдемо $\beta_{ч}$ та $\beta_{ф}$:

$$\beta_{ч} = \arcsin\left(n_{ч}\sin\alpha\right) = \arcsin\left(1,62\sin 30^\circ\right) = \arcsin 0,81 \approx 54,1^\circ,$$

$$\beta_{ф} = \arcsin\left(n_{ф}\sin\alpha\right) = \arcsin\left(1,67\sin 30^\circ\right) = \arcsin 0,835 \approx 56,6^\circ.$$

Шуканий кут $\theta = \beta_{ф} - \beta_{ч} = 56,6 - 54,1 = 2,5^\circ$.

19.3. Різниці ходу двох хвиль, що інтерферують, у вакуумі дорівнюють: а) 0,4λ; б) 1,2λ. Знайти відповідну різницю фаз.

$\Delta x_1 = 0,4\lambda,$ $\Delta x_2 = 1,2\lambda$
$\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2$–?

Різниці ходу двох когерентних хвиль в одну довжину хвилі λ відповідає зсув за фазою на 2π (або 360°). Складемо і розв'яжемо пропорцію:

а) $\lambda - 2\pi;\ 0,4\lambda - \Delta\varphi_1;\ \Delta\varphi_1 = 0,8\lambda\pi/\lambda = 0,8\pi;$

б) $\lambda - 2\pi;\ 1,2\lambda - \Delta\varphi_2;\ \Delta\varphi_2 = 2,4\lambda\pi/\lambda = 2,4\pi.$

19.4. Різниці фаз двох хвиль, що інтерферують, дорівнюють: а) 0,25π; б) 2,5π. Скільком довжинам хвиль у вакуумі відповідають різниці ходу цих хвиль?

$\Delta\varphi_1 = 0,25\pi,$ $\Delta\varphi_2 = 2,5\pi$
N_1, N_2–?

Різниця фаз двох хвиль, що інтерферують, величиною $\Delta\varphi = 2\pi$ відповідає різниці ходу в одну довжину хвилі λ. Складемо і розв'яжемо пропорцію:

а) $2\pi - \lambda;\ 0,25\pi - N_1;\ N_1 = 0,25\pi\lambda/(2\pi) = 0,125\lambda;$

б) $2\pi - \lambda;\ 2,5\pi - N_2;\ N_2 = 2,5\pi\lambda/(2\pi) = 1,25\lambda.$

Для розв'язання цієї і попередньої задач також можна використовувати формули (19.8).

19.5. У досліді із дзеркалами Френеля відстань між уявними зображеннями джерела світла з довжиною хвилі 0,5 мкм дорівнює 5 мм. Відстань від лінії, що сполучає джерела світла до екрана, – 5 м. Що буде на екрані напроти одного з джерел – максимум або мінімум світла?

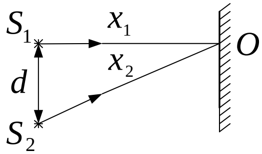


Рисунок 19.2

$\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м, $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $x_1 = 5$ м
k–?

Для того щоб визначити, що буде в точці O, максимум або мінімум світла, потрібно знайти значення множника перед $\lambda/2$ для формул (19.9) і (19.10). Для цього необхідно заздалегідь знайти геометричну різницю ходу $\Delta x = x_2 - x_1$. Із $\Delta S_1 S_2 O$ на рис. 19.2 за теоремою Піфагора знайдемо x_2:

$$x_2 = \sqrt{x_1^2 + d^2}.$$

Тепер знайдемо Δx:

$$\Delta x = \sqrt{x_1^2 + d^2} - x_1 = \sqrt{5^2 + (5 \cdot 10^{-3})^2} - 5 = 0,25 \cdot 10^{-5} \text{ (м)},$$

$$\Delta x = k\frac{\lambda}{2};\ k = \frac{2\Delta x}{\lambda} = \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 10^{-5}}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 10.$$

Ми отримали парний множник k, тобто різниця ходу дорівнює парному числу напівхвиль. Отже, в даній точці буде спостерігатися інтерференційний максимум.

19.6. У досліді Юнга отвори освітлювалися монохроматичним світлом із довжиною хвилі $6 \cdot 10^{-5}$ см, причому відстань між отворами 1 мм, а відстань від отвору до екрана 3 м. Знайти положення трьох перших світлих смуг щодо центрального максимуму.

$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, $d = 10^{-3}$ м, $l = 3$ м, $k = 1, 2, 3$
h_k–?

Щілини S_1 і S_2 є когерентними джерелами світлових хвиль, які при накладенні інтерферують. Нехай на екрані Е в точці C спостерігається інтерференційний максимум k-го порядку (див. рис. 19.3). Умова максимуму така (див. (19.9)):

$$\Delta x = x_2 - x_1 = k\lambda; \quad k = 1, 2, 3.$$

19. Хвильова оптика. Інтерференція

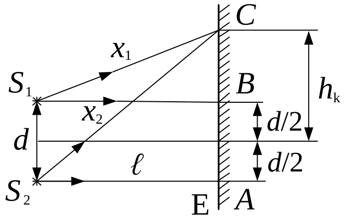


Рисунок 19.3

Знайдемо різницю ходу Δx. Для ΔS_1CB та ΔS_2CA можна записати теорему Піфагора:

$$x_1^2 = l^2 + (h_k - d/2)^2\,; \quad x_2^2 = l^2 + (h_k + d/2)^2\,.$$

Віднімаючи з другої рівності першу, отримуємо

$$x_2^2 - x_1^2 = 2h_k d; \quad (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 2h_k d.$$

Оскільки $d \ll l$, можна вважати, що $x_2 \approx x_1 \approx l$. При цьому $x_2 + x_1 \approx 2l$. З урахуванням цього останнє рівняння можна записати у спрощеному вигляді $2l\Delta x = 2h_k d$, звідки

$$\Delta x = \frac{h_k d}{l}.$$

Використовуючи умову максимуму, можна знайти h_k:

$$k\lambda = \frac{h_k d}{l},$$

звідки

$$h_k = \frac{k\lambda l}{d} = \frac{6 \cdot 10^{-7} \cdot 3}{10^{-3}}k = 1,8 \cdot 10^{-3}k.$$

Підставляючи значення k, що дорівнюють 1, 2, 3, отримаємо шукані значення:

$$h_1 = 1,8 \cdot 10^{-3}\ (\text{м}); \quad h_2 = 3,6 \cdot 10^{-3}\ (\text{м}); \quad h_3 = 5,4 \cdot 10^{-3}\ (\text{м}).$$

19.7. Два когерентні джерела світла з довжиною хвилі 0,5 мкм дають на екрані інтерференційну картину. Як зміниться ця картина, якщо на шляху одного із променів помістити плоскопаралельну пластинку зі скла з показником заломлення 1,5 і товщиною 10,5 мкм?

$\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м,
$n = 1,5$,
$l = 10,5 \cdot 10^{-6}$ м
k–?

Для того щоб відповісти на питання задачі, потрібно знайти, як зміниться оптична різниця ходу і скільки напівхвиль у ній укладається:

$$\delta = \frac{k\lambda}{2},$$

де k дорівнює цілому числу. В повітрі геометрична довжина шляху l, а в склі оптична довжина шляху дорівнює nl. Тому оптична різниця ходу дорівнює

$$\delta = nl - l = (n-1)l = (1,5-1) \cdot 10,5 \cdot 10^{-6} = 5,25 \cdot 10^{-6}\ (\text{м}).$$

Тепер обчислимо, скільки напівхвиль укладається в різниці ходу під час проходження променя через скляну пластинку:

$$k = \frac{2\delta}{\lambda} = \frac{2 \cdot 5,25 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 21.$$

Непарне число напівхвиль свідчить про те, що інтерференційна картина змінилася на протилежну: на місці темних смуг опиняться світлі, а на місці світлих – темні.

19.8. Визначити найменшу товщину прозорої плівки, оптична густина якої 1,6, якщо при освітленні її блакитним світлом із довжиною хвилі 480 нм вона у відбитому світлі опиниться: а) блакитною; б) чорною.

$\lambda = 0,48 \cdot 10^{-6}$ м,
$n = 1,6$
l–?

У разі, якщо плівка виявиться блакитною, для відповідної кольору довжини хвилі повинна виконуватися умова максимуму (19.11). Запишемо вираз для товщини плівки:

$$l = \frac{(2k+1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

При нормальному падінні променів для $\alpha = 0^\circ$ маємо

$$l = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}.$$

Найменша товщина плівки буде при $k = 0$, отже,

$$l = \frac{\lambda}{4n} = \frac{0,48 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1,6} = 7,5 \cdot 10^{-8}\ (\text{м}).$$

Аналогічно умова гасіння блакитного світла при інтерференції відбитих променів буде за виконання умови мінімуму (19.12):

$$l = \frac{k\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}},$$

для $\alpha = 0^\circ$ маємо

$$l = \frac{k\lambda}{2n}.$$

Оскільки найменша товщина плівки буде при $k = 1$, то

$$l = \frac{\lambda}{2n} = \frac{0,48 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1,6} = 15 \cdot 10^{-8}\ (\text{м}).$$

19.9. Одна з причин, за якою неможливо спостерігати інтерференцію у товстих плівках (пластинках), полягає у нечіткій монохроматичності світла: інтерференційні картини від різних довжин хвиль накладаються одна на одну. Розрахуйте граничну товщину скляної ($n = 1,5$) плоскопаралельної пластинки для спостереження інтерференції у відбитому світлі при нормальному падінні променів. Допустити, що довжина хвилі світла змінюється в інтервалі від $\lambda_1 = 600$ нм до $\lambda_2 = 600,2$ нм.

$\lambda_1 = 6 \cdot 10^{-7}$ м,
$\lambda_2 = 6,002 \cdot 10^{-7}$ м,
$n = 1,5$
l—?

Розглянемо два інтерференційні максимуми від довжин хвиль λ_1 і λ_2 при нормальному падінні світла на пластинку. Нехай ми маємо граничний випадок, коли ці максимуми накладаються один на одний. Запишемо умови максимумів (19.11) для двох довжин хвиль ($\sin\alpha = 0$) в цьому випадку:

$$2ln = (2k_1 + 1)\frac{\lambda_1}{2},$$

$$2ln = (2k + 1)\frac{\lambda_1 + \Delta\lambda}{2},$$

де $k_1 = k+1$, $\lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_2$. Прирівнюючи праві частини цих рівностей, маємо

$$(2k_1 + 1)\frac{\lambda_1}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda_1 + \Delta\lambda}{2}; \quad (2k_1 + 1)\lambda_1 = (2k + 1)(\lambda_1 + \Delta\lambda);$$

$$(2k_1 + 1)\lambda_1 - (2k + 1)\lambda_1 = (2k + 1)\Delta\lambda; \quad 2(k_1 - k)\lambda_1 = (2k + 1)\Delta\lambda.$$

Оскільки $k_1 = k + 1$, то $k_1 - k = 1$. Із урахуванням цього матимемо

$$2\lambda_1 = (2k+1)\Delta\lambda; \quad \lambda_1 = (2k+1)\frac{\Delta\lambda}{2}; \quad 2k+1 = \frac{2\lambda_1}{\Delta\lambda}.$$

Підставимо отриманий вираз для $2k+1$ у друге рівняння цієї задачі:

$$2ln = \frac{2\lambda_1}{\Delta\lambda}\cdot\frac{\lambda_1+\Delta\lambda}{2}; \quad 2ln = \frac{\lambda_1(\lambda_1+\Delta\lambda)}{\Delta\lambda}; \quad \lambda_1 = \frac{2ln\Delta\lambda}{\lambda_1+\Delta\lambda}.$$

Оскільки $\lambda_1 \gg \Delta\lambda$, то справедливою є наближена рівність

$$\lambda_1 \approx \frac{2ln\Delta\lambda}{\lambda_1},$$

звідки матимемо

$$l \approx \frac{\lambda_1^2}{2n\Delta\lambda} = \frac{\left(6\cdot10^{-7}\right)^2}{2\cdot1,5\cdot0,002\cdot10^{-7}} = 6\cdot10^{-4}\ (\text{м}).$$

Задачі для самостійного розв'язування

19.10. Визначити довжину хвилі жовтого світла парів натрію в склі з показником заломлення 1,56, якщо довжина хвилі цього світла в повітрі 589 нм.

19.11. Довжина хвилі червоного світла у вакуумі 720 нм. Визначити довжину хвилі червоного світла в середовищі, в якому швидкість світла становить 200000 км/с.

19.12. Скільки довжин хвиль монохроматичного світла з частотою коливань $\nu = 5\cdot10^{14}$ Гц укладеться на шляху довжиною $l = 1,2$ мм: 1) у вакуумі; 2) у склі?

19.13. Швидкість світлового променя в деякому середовищі становить 240000 км/с, а довжина хвилі – 8 мкм. Визначити величину показника заломлення і частоту коливань.

19.14. Визначити довжину світлової хвилі, частота коливань якої становить $5\cdot10^{14}$ Гц у вакуумі.

19.15. Визначити довжину l_1 відрізка, на якому укладається стільки ж довжин хвиль у вакуумі, скільки їх укладається на відрізку $l_2 = 3$ мм у воді.

19.16. Як зміниться довжина хвилі при нормальному падінні світла на межу поділу повітря – скло? Показник заломлення скла n, довжина хвилі в повітрі λ_0.

19.17. Світлові хвилі в деякій рідині мають довжину хвилі 500 нм і частоту $4,5 \cdot 10^{14}$ Гц. Визначити абсолютний показник заломлення цієї рідини.

19.18. Якої довжини l_1 шлях пройде фронт хвилі монохроматичного світла у вакуумі за такий самий час, за який він проходить шлях довжиною $l_2 = 1$ м у воді?

19.19. Довжина хвилі жовтого світла в повітрі становить 580 нм, а в рідині – 400 нм. Визначити оптичну густину рідини.

19.20. Під час переходу променів світла із води у вакуум довжина хвилі збільшилася на 0,12 мкм. Визначити довжину хвилі цих променів у вакуумі та воді.

19.21. Під час переходу світлових хвиль з вакууму в деяке прозоре середовище довжина хвилі зменшилася в 1,31 раза. Яке це середовище?

19.22. Один аквалангіст посилає іншому сигнал у воді на відстань 20 м за допомогою білого світла. На який час на цьому шляху червоні промені випередять фіолетові? Показник заломлення червоних променів дорівнює 1,329, фіолетових – 1,344.

19.23. Тонкий промінь білого світла падає на поверхню води під кутом 60°. Чому дорівнює кут між напрямами крайових червоних і фіолетових променів у воді, якщо їх показники заломлення становлять 1,329 та 1,344 відповідно.

19.24. Промінь білого світла падає нормально на катет прямокутної призми, кут заломлення якої дорівнює 30°. Показники заломлення скла призми для крайових променів становлять 1,60 і 1,65. Визначити кут між червоним і фіолетовим променями після виходу з призми.

19.25. Різниці ходу двох інтерферуючих хвиль у вакуумі дорівнюють: а) 0; б) $0,2\lambda$; в) $0,5\lambda$; г) λ; д) $1,2\lambda$. Чому дорівнює відповідна різниця фаз?

19.26. Різниці фаз двох інтерферуючих хвиль становлять: а) 0; б) $\pi/3$; в) $\pi/2$; г) π; д) 2π; е) 3π. Скільком довжинам хвиль у вакуумі відповідають оптичні різниці ходу цих променів?

19.27. Довжина світлової хвилі у склі – 450 нм. Світло в склі поширюється зі швидкістю $1,8 \cdot 10^5$ км/с. Визначити частоту коливань світла, абсолютний показник заломлення скла і довжину хвилі світла у вакуумі.

19.28. На шляху світлової хвилі, що поширюється у повітрі, поставили скляну пластинку товщиною $l = 1$ мм. На скільки зміниться оптична довжина шляху, якщо хвиля падає на пластинку: 1) нормально; 2) під кутом $\alpha = 30°$?

19.29. На шляху монохроматичного світла з довжиною хвилі λ=0,6 мкм знаходиться плоскопаралельна скляна пластина товщиною $l = 0,1$ мм. Світло падає на пластину нормально. На який кут потрібно обернути пластину, щоб оптична довжина шляху L змінилася на $\lambda/2$?

19.30. У деяку точку простору надходять промені від когерентних джерел, довжина хвилі яких 0,5 мкм, а різниця ходу 0,5 мм. Що буде в цій точці – посилення чи послаблення світла?

19.31. Два променя із довжиною хвилі 0,404 мкм перетинаються в одній точці. Що спостерігається в цій точці – посилення чи послаблення світлової хвилі, якщо різниця ходу променів становить 17,17 мкм?

19.32. Два когерентні джерела випромінюють світло з довжиною хвилі 540 нм. Яка спостерігається інтерференційна картина в точці, віддаленій від одного джерела на 4 м, а від іншого – на 4,27 м?

19.33. Знайти всі довжини хвиль видимого світла (від 0,76 до 0,38 мкм), які будуть: 1) максимально підсилені; 2) максимально послаблені при оптичній різниці ходу інтерферуючих хвиль $\delta = 1,8$ мкм.

19.34. Різниця ходу двох когерентних променів, що перетинаються в деякій точці екрана, становить 4,36 мкм. Який буде результат інтерференції в цій точці екрана, якщо довжина хвилі світла становить: а) 670,9 нм; б) 435,8 нм; в) 536,0 нм?

19.35. У деяку точку простору надходять когерентні хвилі червоного кольору ($\lambda_1 = 720$ нм), зелені ($\lambda_2 = 540$ нм) і фіолетові ($\lambda_3 = 400$ нм) з оптичною різницею ходу 4 мкм. Визначити, для яких із цих променів спостерігається максимальне підсилення світла.

19.36. Два когерентні джерела посилають на екран світло з довжиною хвилі 550 нм (див. рис. 19.4). Джерела віддалені один від одного на 2,2 мм, а від екрана – на 2,2 м. Визначити, що спостерігається на екрані в точці O – гасіння чи посилення світла.

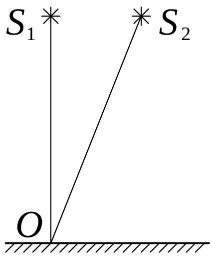


Рисунок 19.4

19.37. У воді інтерферують когерентні хвилі з частотою $5 \cdot 10^{14}$ Гц. Посилиться чи послабиться світло в точці, якщо геометрична різниця ходу променів, що перетинаються в ній, становить 1,8 мкм?

19.38. Радіус кривизни плоскоопуклої лінзи $R = 4$ м. Чому дорівнює довжина хвилі світла, що падає на лінзу, якщо радіус п'ятого світлого кільця у відбитому світлі $r_5 = 3,6$ мм?

19.39. Відстань d між двома щілинами в досліді Юнга дорівнює 1 мм, відстань від щілин до екрану $l = 3$ м. Визначити довжину хвилі λ, що випускається джерелом монохроматичного світла, якщо ширина h інтерференційних смуг на екрані дорівнює 1,5 мм.

19.40. У досліді Юнга відстань d між щілинами дорівнює 0,8 мм. На якій відстані l від щілин потрібно розташувати екран, щоб ширина h інтерференційної смуги дорівнювала 2 мм? Довжина хвилі падаючого світла $\lambda = 0,5$ мкм.

19.41. Один промінь від джерела S монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,76$ мкм падає в точку P безпосередньо, другий – після відбиття від плоского дзеркала M (дзеркало Ллойда) (див. рис. 19.5); $|SP| = 2$ м, $CM = 2$ мм, $|SM| = |MP|$. Що спостерігається в точці P екрана внаслідок інтерференції променів SP і SMP

— світло або темнота?

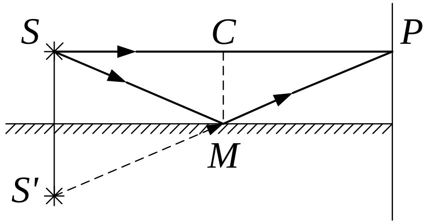


Рисунок 19.5

19.42. Виразити умови максимуму та мінімуму інтерференції світла у тонкій плівці через кут заломлення β.

19.43. Показати, що для інтерференції у світлі, що проходить (промені 1 і 2 на рис. 19.6), формула (19.11) відповідає мінімуму, а (19.12) — максимуму інтерференції.

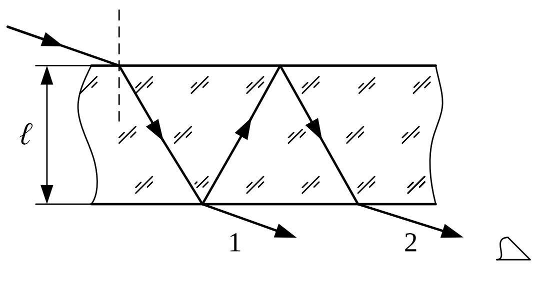


Рисунок 19.6

19.44. Знайти чотири найменші товщини прозорої плівки, показник заломлення якої 1,5, щоб при освітленні їх перпендикулярними червоними променями з довжиною хвилі 750 нм вони були видні у відбитому світлі червоними.

19.45. Яку найменшу товщину повинна мати пластинка, зроблена з матеріалу з показником заломлення 1,54, щоб при її освітленні променями з довжиною хвилі 750 нм, перпендикулярними до поверхні пластинки, вона у відбитому світлі здавалася червоною? чорною?

19.46. На мильну плівку ($n = 1,3$), що знаходиться в повітрі, падає нормально пучок променів білого світла. При якій найменшій товщині l плівки відбите світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,55$ мкм опиниться максимально посиленим унаслідок інтерференції?

19.47. Прозора пластинка товщиною 2,4 мкм освітлена перпендикулярними оранжевими променями з довжиною хвилі 0,6 мкм. Чи буде видна ця пластинка у відбитому світлі оранжевою, якщо оптична густина речовини пластинки дорівнює 1,5?

19.48. Пучок монохроматичних ($\lambda = 600$ нм) світлових хвиль падає під кутом $i = 30^\circ$ на мильну плівку ($n = 1,3$), що знаходиться в повітрі. При якій найменшій товщині l плівки відбиті світлові хвилі будуть максимально послаблені інтерференцією? максимально посилені?

19.49. На тонкий скляний клин ($n = 1,5$) падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 5,8 \cdot 10^{-7}$ м). Кут α між поверхнями клину дорівнює $20'$. Яке число темних інтерференційних смуг припадає на одиницю довжини клина?

19.50. На тонкий скляний клин ($n = 1,55$) падає нормально монохроматичне світло. Кут α між поверхнями клина дорівнює $2'$. Визначити довжину світлової хвилі λ, якщо відстань b між суміжними інтерференційними максимумами у відбитому світлі дорівнює 0,3 мм.

19.51. Відстань $\Delta r_{2,1}$ між другим і першим темними кільцями Ньютона у відбитому світлі дорівнює 0,41 мм. Визначити відстань $\Delta r_{11,10}$ між одинадцятим і десятим темними кільцями.

19.52. Кільця Ньютона спостерігаються у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм під кутом $\alpha = 0^\circ$. У деякій точці товщина повітряного шару між випуклою поверхнею лінзи та плоскою пластинкою $l = 1,767$ мкм. Яке кільце — світле або темне — проходитиме через цю точку?

19.53. Діаметри d_i і d_k двох світлих кілець Ньютона дорівнюють відповідно 4 і 4,8 мм. Порядкові номери кілець не визначалися, але відомо, що між двома зміряними кільцями розташовано три світлих кільця. Кільця спостерігалися у відбитому світлі ($\lambda = 500$ нм). Знайти радіус кривизни плоскоопуклої лінзи, взятої для досліду.

20. Дифракційні явища

Основні формули

- Дифракція від однієї щілини при нормальному падінні на неї паралельного пучка монохроматичного світла. Умова максимуму:

$$a\sin\alpha = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}; \tag{20.1}$$

умова мінімуму:

$$a\sin\alpha = \pm k\lambda; \tag{20.2}$$

де a — ширина щілини (м); $k = 1, 2, 3, \ldots$ — порядковий номер максимуму або мінімуму; α — кут між нормаллю до площини щілини та напрямом на максимум або мінімум; λ — довжина хвилі падаючого світла (м).

- Дифракція світла на дифракційній гратці при нормальному падінні променів. Основна формула дифракційної гратки (умова для головних максимумів):

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda, \tag{20.3}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$ — порядок головних максимумів; d — стала (період) дифракційної гратки (м).

- Умова додаткових максимумів для дифракційної гратки:

$$d\sin\varphi = \pm(2k'+1)\frac{\lambda}{2N}, \quad k' = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$k' \neq N-1, N, N+1;\ \ 2N-1, 2N, 2N+1, \ldots \tag{20.4}$$

Між головними максимумами розташовані додаткові дуже слабкі максимуми, інтенсивність яких набагато менше за інтенсивність головних максимумів. Кількість додаткових максимумів дорівнюватиме $N-2$, де N — кількість щілин гратки.

- Умова додаткових мінімумів для дифракційної гратки:

$$d\sin\varphi = \pm m'\frac{\lambda}{N}, \quad m' = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$m' \neq 0, N, 2N, 3N, \ldots \tag{20.5}$$

20. Дифракційні явища

- Роздільна здатність дифракційної гратки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN, \tag{20.6}$$

де $\Delta\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2)$ — різниця гранично розділюваних (що розрізняються) довжин хвиль; N — кількість щілин гратки.

- Кутова дисперсія дифракційної гратки (характеризує кутову відстань між близькими спектральними лініями):

$$D_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{k}{d\cos\varphi}, \tag{20.7}$$

де $\mathrm{d}\varphi$ — кутова відстань між двома спектральними лініями, що відрізняються за довжинами хвиль на $\mathrm{d}\lambda$.

- Лінійна дисперсія дифракційної гратки

$$D_l = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{20.8}$$

де $\mathrm{d}l$ — лінійна відстань між двома спектральними лініями з різницею довжин хвиль $\mathrm{d}\lambda$.

- Для малих кутів дифракції

$$D_l \approx fD_\varphi \approx f\frac{k}{d}, \tag{20.9}$$

де f — головна фокусна відстань лінзи, що збирає на екрані хвилі, що дифрагують (м).

- Умова головних максимумів при похилому падінні світла на дифракційну гратку

$$d\,(\sin\beta - \sin\varphi) = \pm k\lambda, \tag{20.10}$$

де β — кут падіння променів на гратку.

- Умова дифракційних максимумів при відбитті рентгенівських променів від кристала (формула Вульфа-Брегга)

$$2l\sin\theta = k\lambda, \tag{20.11}$$

де l — відстань між атомними площинами кристала (м); θ — кут ковзання (кут між напрямом пучка паралельних променів, що падають на кристал, та гранню кристала); $k = 1, 2, 3, \ldots$ — порядок дифракційного максимуму.

- Роздільна здатність об'єктива телескопа

$$R = \frac{1}{\theta} = \frac{D}{1,22\lambda}, \tag{20.12}$$

де θ — найменша кутова відстань між двома світлими точками, при якій зображення цих точок у фокальній площині об'єктива можуть бути видні роздільно (рад); D — діаметр об'єктива (м).

- Границя розділення мікроскопа (при відбитті світла від об'єктива) при похилому падінні світла на об'єкт

$$d = 0,5\frac{\lambda}{n\sin(u/2)} = 0,5\frac{\lambda}{A}, \tag{20.13}$$

де n — абсолютний показник заломлення середовища, що знаходиться між предметом та лінзою об'єктива; u — кутова апертура (кут між крайніми променями конічного світлового пучка, що входить до оптичної системи); $A = n\sin(u/2)$ — числова апертура; λ — довжина хвилі у вакуумі (м).

- Радіуси k-ї зони Френеля:

для сферичної хвилі

$$\rho_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b}k\lambda}, \tag{20.14}$$

де a — відстань діафрагми з круглим отвором від точкового джерела світла (м); b — відстань діафрагми від екрана, на якому ведеться спостереження дифракційної картини (м); k — номер зони Френеля;

для плоскої хвилі

$$\rho_k = \sqrt{bk\lambda}. \tag{20.15}$$

20. Дифракційні явища

Приклади розв'язання задач

20.1. На щілину шириною $a = 0,1$ мм нормально падає паралельний пучок світла від монохроматичного джерела ($\lambda = 0,6$ мкм). Визначити ширину l центрального максимуму в дифракційній картині, що проеціюється за допомогою лінзи на екран, віддалений від лінзи на відстань $L = 1$ м, якщо лінза знаходиться безпосередньо за щілиною.

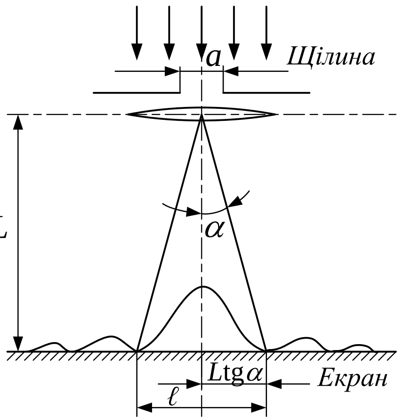


Рисунок 20.1

$\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6}$ м,
$a = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м,
$L = 1$ м,
$k = 1$
l—?

Центральний максимум інтенсивності світла займає область між найближчими від нього праворуч і ліворуч мінімумами інтенсивності. Тому ширину центрального максимуму беремо такою, що дорівнює відстані між цими двома мінімумами (рис. 20.1). Мінімуми інтенсивності світла при дифракції від однієї щілини спостерігаються під кутами α, що визначаються умовою (20.2), де порядок мінімуму k у нашому випадку дорівнює одиниці. Тому спостерігається співвідношення

$$a \sin\alpha = k\lambda; \quad \sin\alpha = \frac{\lambda}{a}.$$

Відстань між двома мінімумами на екрані визначимо безпосередньо із креслення:

$$l = 2L \operatorname{tg} \alpha.$$

Відмітивши, що при малих кутах $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$, перепишемо цю формулу у вигляді

$$l = 2L \sin \alpha.$$

Підставимо в останню рівність отриманий вираз для $\sin \alpha$:

$$l = \frac{2L\lambda}{a} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}.$$

20.2. Скільки штрихів на 1 мм довжини має дифракційна гратка, якщо лінія з довжиною хвилі 407 нм у спектрі першого порядку спостерігається під кутом 19°? Визначити найбільший порядок максимуму, який може утворити ця дифракційна гратка для даної довжини хвилі.

$\lambda = 407 \cdot 10^{-9}$ м,
$s = 10^{-3}$ м,
$k = 1$,
$\varphi = 19°$
$N, k_{\max}$—?

Із формули (20.3) знайдемо період дифракційної гратки ($\sin 19° = 0,3256$):

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \varphi} = \frac{1 \cdot 407 \cdot 10^{-9}}{0,3256} = 1,25 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

Число штрихів на 1 мм гратки дорівнює

$$N = \frac{s}{d} = \frac{10^{-3}}{1,25 \cdot 10^{-6}} = 800.$$

Із першої формули виразимо k:

$$k = \frac{d \sin \varphi}{\lambda}.$$

Максимальне значення k є можливим при $\sin \alpha = 1$. Тому отримаємо

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda} = \frac{1,25 \cdot 10^{-6}}{407 \cdot 10^{-9}} = 3,071.$$

Якщо результат ділення не ціле число, то $k_{\max}$ — найближче ціле число, менше ніж d/λ. Тому $k_{\max} = 3$.

20.3. Чому дорівнює стала дифракційної гратки, якщо червона лінія з довжиною хвилі $7 \cdot 10^{-7}$ м у спектрі другого порядку виходить на відстані 0,25 м від центральної світлої смуги на екрані. Відстань від екрана до дифракційної гратки дорівнює 43,3 см. Дифракція спостерігається при нормальному падінні на гратку паралельних променів білого світла.

20. Дифракційні явища

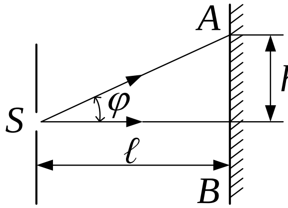


Рисунок 20.2

$\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м,
$h = 0,25$ м,
$k = 2$,
$l = 0,433$ м
d–?

Із формули (20.3) для дифракційної гратки можна знайти d, якщо наперед визначити значення кута φ. Із трикутника ASB (рис. 20.2) знайдемо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{l} = \frac{0,25}{0,433} \approx 0,577,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0,577 \approx 30^\circ; \ \sin 30^\circ = 0,5,$$

$$d \sin\varphi = k\lambda; \ d = \frac{k\lambda}{\sin\varphi} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-7}}{0,5} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

20.4. Дифракційна гратка, що має період 0,03 мм, освітлюється світлом із довжиною хвилі 600 нм. Відстань між центральною смугою і спектром четвертого порядку дорівнює 45 мм. На якій відстані від дифракційної гратки знаходиться екран?

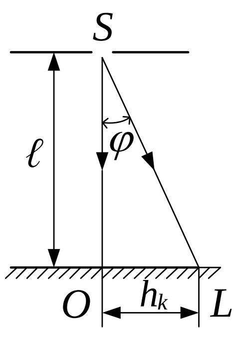


Рисунок 20.3

$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м, $d = 3 \cdot 10^{-5}$ м, $k = 4$, $h_k = 4,5 \cdot 10^{-2}$ м
l–?

Із формули (20.3) для дифракційної гратки випливає, що
$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{d}.$$
Із ΔSOL (рис. 20.3) можна також знайти $\sin\varphi$:
$$\sin\varphi = \frac{h_k}{|LS|} = \frac{h_k}{\sqrt{l^2 + h_k^2}}.$$
Сумістимо ці рівняння:
$$\frac{k\lambda}{d} = \frac{h_k}{\sqrt{l^2 + h_k^2}}.$$
З отриманого рівняння виразимо шукану відстань l:
$$k\lambda\sqrt{l^2 + h_k^2} = h_k d; \quad k^2\lambda^2(l^2 + h_k^2) = h_k^2 d^2;$$
$$k^2\lambda^2 l^2 = h_k^2 d^2 - h_k^2 k^2\lambda^2; \quad l = \frac{h_k\sqrt{d^2 - k^2\lambda^2}}{k\lambda}.$$
Виконаємо розрахунки:
$$l = \frac{4,5 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{(3 \cdot 10^{-5})^2 - 4^2 \cdot (6 \cdot 10^{-7})^2}}{4 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = 0,561 \text{ (м)}.$$
Оскільки кут φ зазвичай малий, то з хорошим наближенням можна вважати, що $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = h_k/l$. Тоді рівняння для знаходження шуканої величини матиме простіший вигляд:
$$\frac{k\lambda}{d} = \frac{h_k}{l} \Rightarrow l = \frac{h_k d}{k\lambda} = \frac{4,5 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = 0,563 \text{ (м)}.$$
Порівняймо цю формулу із формулою, отриманою під час розв'язання задачі 19.6 із попереднього розділу. Вони однакові. Це пояснюється тим, що всі щілини дифракційної гратки є джерелами когерентних хвиль. Дві сусідні щілини знаходяться на відстані d, що дорівнює сталій гратки, що аналогічно двом джерелам світла в досліді Юнга, які також знаходяться на відстані d одна від одної.

20.5. Оцінити граничний кут роздільної здатності людського ока, припускаючи, що він обмежується лише дифракцією. Довжина хвилі світла 500 нм (біля центра видимого спектра), а діаметр зіниці $D = 2$ мм. Визначити мінімальну відстань між двома точковими джерелами, які око може розрізняти, якщо вони знаходяться на відстані найкращого зору $L = 25$ см від спостерігача.

20. Дифракційні явища

$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, $D = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $L = 0,25$ м
θ, d–?

Найменшу кутову відстань між двома світлими точками, при якій зображення цих точок у фокальній площині ока можуть бути видні роздільно, знайдемо за формулою (20.12):

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D} = \frac{1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-3}} = 3,05 \cdot 10^{-4} \text{ (рад)}.$$

Використаємо цей результат для визначення мінімальної відстані між двома точковими джерелами, які око може розрізняти (див. рис. 20.4):

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \approx \sin\frac{\theta}{2} = \frac{d/2}{L}; \quad \frac{\theta}{2} \approx \frac{d/2}{L}; \quad \theta \approx \frac{d}{L};$$

$$d \approx \theta L = 3,05 \cdot 10^{-4} \cdot 0,25 \approx 0,763 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}.$$

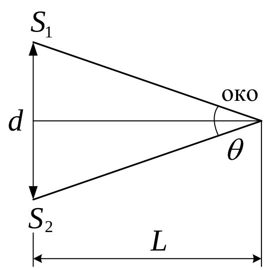


Рисунок 20.4

20.6. Нормальне око людини на відстані найкращого зору розрізняє дві точки, які віддалені одна від одної на 70 мкм. Розмір зображення на сітківці в цьому разі дорівнює середній відстані між двома колбочками. Оцінити, виходячи з формули (20.13), межу розділення ока, беручи діаметр зіниці $D = 2$ мм, а довжину хвилі $\lambda = 555$ нм. Формула (20.13) отримана із найбільш загальних міркувань дифракційної теорії, тому її можна використовувати і для ока.

$\lambda = 5,55 \cdot 10^{-7}$ м, $D = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $L = 0,25$ м, $n = 1$
d–?

Апертурний кут u дорівнює відношенню діаметра зіниці до відстані до предмета (відстань найкращого зору L):

$$u = \frac{D}{L}; \quad \sin\frac{u}{2} \approx \frac{D}{2L}.$$

Середовище між предметом та оком – повітря ($n = 1$). Маємо

$$d = \frac{0,5\lambda}{n\sin(u/2)} = \frac{0,5\lambda \cdot 2L}{nD} = \frac{\lambda L}{nD}.$$

Розрахуємо шукане значення:

$$d = \frac{5,55 \cdot 10^{-7} \cdot 0,25}{1 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \approx 6,94 \cdot 10^{-5}\ (\text{м}).$$

Задачі для самостійного розв'язування

20.7. На щілину шириною $a = 0,05$ мм падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0,6$ мкм). Визначити кут α між початковим напрямом пучка світла і напрямом на четверту темну дифракційну смугу.

20.8. На щілину шириною $a = 0,2$ мм падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0,64$ мкм). Визначити в кутових одиницях ширину центральної світлової смуги. Вважати, що межі світлової смуги відповідає мінімум.

20.9. На вузьку щілину падає нормально монохроматичне світло. Кут α відхилення пучків світла, що відповідають другій світлій дифракційній смузі, дорівнює 1°. Скільком довжинам хвиль падаючого світла відповідає ширина щілини?

20.10. На щілину падає нормально монохроматичне світло. Кут відхилення променів, які відповідають другому мінімуму, дорівнює $2^\circ 18'$. Скільком довжинам хвиль падаючого світла дорівнює ширина щілини?

20.11. На щілину шириною $a = 0,1$ мм падає нормально монохроматичне світло ($\lambda = 0,5$ мкм). За щілиною поміщена збиральна лінза, у фокальній площині якої знаходиться екран. Що буде спостерігатися на екрані, якщо кут α дифракції дорівнює: 1) $17'$; 2) $43'$?

20.12. Довжина хвилі монохроматичного світла, що падає на щілину нормально, вкладається в ширині щілини 6 разів. Під яким кутом спостерігатиметься третій дифракційний мінімум світла?

20.13. На щілину шириною $2 \cdot 10^{-3}$ см падає нормально паралельний пучок монохроматичних хвиль із довжиною $5 \cdot 10^{-5}$ см. Знайти ширину зображення щілини на екрані, віддаленому від щілини на 1 м. За ширину зображення вважати відстань між першими дифракційними мінімумами, розташованими по обидва боки від головного максимуму.

20.14. Плоска світлова хвиля довжиною 0,7 мкм падає нормально на діафрагму з круглим отвором радіусом 1,4 мм. Визначити відстані від діафрагми до трьох найбільш віддалених від неї точок, у яких спостерігається мінімум інтенсивності.

20.15. На щілину шириною 0,021 мм падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі 0,63 мкм. Скільки дифракційних мінімумів можна спостерігати на екрані за цією щілиною?

20.16. На дифракційну гратку нормально падає пучок світла. Кут відхилення для натрієвої лінії 589 нм у спектрі першого порядку дорівнює $17°8'$. Деяка лінія дає в спектрі другого порядку кут відхилення, що дорівнює $24°12'$. Знайти довжину хвилі цієї лінії та число штрихів на 1 мм гратки.

20.17. На дифракційну гратку з періодом 4 мкм падає нормально монохроматичне світло. При цьому максимуму четвертого порядку відповідає відхилення світла від початкового напряму на кут 30°. Визначити довжину хвилі світла.

20.18. Дифракційна гратка містить 500 штрихів на 1 мм. На гратку падає світло з довжиною хвилі 500 нм. Під яким кутом видно перший максимум?

20.19. На дифракційну гратку нормально падає пучок світла від гелієвої розрядної трубки. На яку лінію в спектрі третього порядку накладається червона лінія гелію (670 нм) спектра другого порядку?

20.20. Знайти найбільший порядок спектра для жовтої лінії 589 нм, якщо стала дифракційної гратки дорівнює 3 мкм. Яку найбільшу довжину хвилі можна спостерігати в спектрі дифракційної гратки?

20.21. Довжина хвилі червоної лінії кадмію дорівнює 643,8 нм. Який кут відхилення світла в спектрі першого порядку, якщо дифракційна гратка має 5684 штрихи на 1 см?

20.22. На дифракційну гратку падає нормально світло. При цьому максимуму другого порядку для лінії 0,65 мкм відповідає кут 45°. Знайти кут, що відповідає максимуму третього порядку для лінії 0,5 мкм.

20.23. На дифракційну гратку нормально падає пучок світла. Червона лінія 630 нм знаходиться у спектрі третього порядку під кутом 60°. Яка спектральна лінія спостерігається під таким самим кутом у спектрі четвертого порядку? Яке число штрихів на 1 мм довжини має гратка?

20.24. Період дифракційної гратки дорівнює 3 мкм. Знайти найбільший порядок спектра для жовтого світла з довжиною хвилі 580 нм.

20.25. Визначити, яку найбільшу довжину хвилі можна спостерігати у спектрі дифракційної гратки, що має 500 штрихів на 1 мм.

20.26. Скільки штрихів на міліметр містить дифракційна гратка, якщо при нормальному падінні на неї монохроматичного світла з довжиною хвилі 0,6 мкм максимум п’ятого порядку спостерігається під кутом 18°?

20.27. Визначити найбільший порядок спектра, який може дати дифракційна гратка, що має 500 штрихів на 1 мм, якщо довжина хвилі падаючого світла дорівнює 590 нм. Яку найбільшу довжину хвилі можна спостерігати в цьому спектрі?

20.28. Світлова хвиля довжиною 530 нм падає перпендикулярно на дифракційну гратку, стала якої дорівнює 1,8 мкм. Визначити кут дифракції, під яким утворюється максимум найбільшого порядку.

20.29. На дифракційну гратку, що містить 100 штрихів на міліметр, падає нормально монохроматичне світло. Зорова труба наведена на максимум третього порядку. Щоб навести трубу на інший максимум такого самого порядку, її потрібно повернути на кут 20°. Знайти довжину хвилі світла.

20.30. За допомогою дифракційної гратки з періодом 0,02 мм на екрані, що знаходиться на відстані 1,8 м від гратки, отримана дифракційна картина, у якої перший максимум знаходиться на відстані 3,6 см від центрального. Знайти довжину світлової хвилі.

20.31. Знайти період дифракційної гратки, якщо для світла з довжиною хвилі 486 нм отримано дифракційний максимум першого порядку на відстані 2,43 см від центрального. Відстань від гратки до екрана 1 м.

20.32. Дифракційна гратка освітлена нормально падаючим монохроматичним світлом. Максимум другого порядку спостерігається під кутом 14°. Під яким кутом видно максимум третього порядку?

20.33. Для визначення періоду гратки на неї спрямували світло через червоний світлофільтр, через який проникають промені з довжиною хвилі 0,76 мкм. Який період гратки, якщо на екрані, що знаходиться на відстані 1 м від гратки, відстань між спектрами першого порядку дорівнює 15,2 см?

20.34. Яка ширина всього спектра першого порядку (довжини хвиль у межах від 0,38 до 0,76 мкм), отриманого на екрані, віддаленому на 3 м від дифракційної гратки з періодом 0,01 мм?

20.35. Дифракційна гратка містить 200 штрихів на один міліметр. На неї нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі 0,6 мкм. Максимум якого найбільшого порядку дає ця гратка?

20.36. Дифракційна гратка, на кожному міліметрі якої нанесено 75 штрихів, освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі 500 нм. На екрані, паралельному гратці, видно інтерференційну картину: відстань від центральної світлої смуги до другої смуги дорівнює 11,25 см. Визначити відстань від екрана до гратки.

20.37. На якій відстані від дифракційної гратки потрібно поставити екран, щоб відстань між центральною смугою і спектром четвертого порядку дорівнювала 50 мм для світла з довжиною хвилі 500 нм? Стала дифракційної гратки дорівнює 0,02 мм.

20.38. Дифракційна гратка містить 200 штрихів на міліметр. На неї нормально падає монохроматичне світло з довжиною хвилі 0,6 мкм. Знайти загальне число дифракційних максимумів у спектрі гратки.

20.39. На дифракційну гратку з періодом 10 мкм під кутом 30° падає монохроматичне світло з довжиною хвилі 600 нм. Знайти кут дифракції для другого головного максимуму.

20.40. Кутова дисперсія D_φ дифракційної гратки для випромінювання деякої довжини хвилі (при малих кутах дифракції) становить 5 хв/нм. Визначити роздільну здатність R цієї гратки для випромінювання тієї самої довжини хвилі, якщо довжина гратки дорівнює 2 см.

20.41. Визначити кутову дисперсію D_φ дифракційної гратки для кута дифракції $\varphi = 30^\circ$ і довжини хвилі $\lambda = 600$ нм. Відповідь виразити в одиницях СІ та хвилинах на нанометр.

20.42. На дифракційну гратку, що містить 500 штрихів на 1 мм, падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 700$ нм. За граткою поміщено збиральну лінзу з головною фокусною відстанню $f = 50$ см. У фокальній площині лінзи поміщено екран. Визначити лінійну дисперсію D_l такої системи для максимуму третього порядку. Відповідь виразити в міліметрах на нанометр.

20.43. На дифракційну гратку нормально до її поверхні падає монохроматичне світло ($\lambda = 650$ нм). За граткою знаходиться лінза, у фокальній площині якої розташований екран. На екрані спостерігається дифракційна картина під кутом дифракції $\varphi = 30^\circ$. При якій головній фокусній відстані f лінзи лінійна дисперсія $D_l = 0,5$ мм/нм?

20.44. Рентгенівське випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,163$ нм падає на кристал кам'яної солі. Знайти міжплощинну відстань кристалічної гратки кам'яної солі, якщо дифракційний максимум першого порядку спостерігається при куті ковзання $\theta = 17^\circ$.

20.45. Яка довжина хвилі λ монохроматичного рентгенівського випромінювання, падаючого на кристал кальциту, якщо дифракційний максимум першого порядку спостерігається, коли кут θ між напрямом падаючого випромінювання і гранню кристала дорівнює 3°? Відстань l між атомними площинами кристала дорівнює 0,3 нм.

20.46. Випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,2$ нм падає на монокристал. Чому дорівнює кут ковзання, якщо у спектрі другого порядку отримано максимум? Міжплощинна відстань $l = 0,3$ нм.

20.47. Паралельний пучок рентгенівського випромінювання падає на грань кристала. Під кутом $\theta = 65^\circ$ до площини грані спостерігається максимум першого порядку. Відстань l між атомними площинами кристала 280 пм. Визначити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання.

20.48. Діаметр D об'єктива телескопа дорівнює 8 см. Яка найменша кутова відстань θ між двома зірками, дифракційні зображення яких у фокальній площині об'єктива є роздільними? При малій освітленості око людини найбільш чутливе до світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,5$ мкм.

20.49. На шпилі висотної будівлі укріплені одна під іншою дві червоні лампи ($\lambda = 640$ нм). Відстань d між лампами — 20 см. Будівлю розглядають вночі в телескоп з відстані $r = 15$ км. Визначити найменший діаметр $D_{\min}$ об'єктива, при якому в його фокальній площини вийдуть роздільні дифракційні зображення.

20.50. Визначити межу розділу мікроскопа за найкращих умов освітлення для об'єктива: а) безімерсійного із числовою апертурою $A = 0,9$; б) із масляною імерсією ($n = 1,6$). Розрахунок виконати для довжини хвилі у вакуумі $\lambda = 550$ нм.

20.51. У сучасних оптичних мікроскопах апертурний кут досягає найбільшого значення $u = 140°$. Знайти межу розділу такого мікроскопа у двох випадках: а) для найбільш короткохвильової частини видимого світла; б) для $\lambda = 555$ нм, найбільш чутливої до ока. Об'єктив безімерсійний (суха система). Об'єкт освітлюється пучком світла, що падає під нахилом.

20.52. У скільки разів можна підвищити роздільну здатність мікроскопа при переході до фотографування в ультрафіолетових променях ($\lambda_1 = 270$ нм) порівняно з фотографуванням у зелених променях ($\lambda_2 = 550$ нм)?

21. Геометрична оптика. Оптичні системи

Основні формули

- Фокусна відстань сферичного дзеркала

$$f = \frac{R}{2}, \tag{21.1}$$

де R – радіус кривизни дзеркала (м), для плоского дзеркала $R \to \infty$.

- Формула сферичного дзеркала

$$F = \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \tag{21.2}$$

де F – оптична сила дзеркала (дптр); a – відстань від полюса дзеркала до предмета (м); b – відстань від полюса дзеркала до зображення (м).

- Збільшення дзеркала

$$M = \frac{b}{a} = \frac{H}{h}, \tag{21.3}$$

де H – лінійний розмір зображення (м); h – лінійний розмір предмета (м).

- Формула лінзи

$$\pm\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \tag{21.4}$$

де f – фокусна відстань лінзи (м); p – відстань від джерела світла до лінзи (м); q – відстань від зображення до лінзи (м). Знак "+" перед f відповідає збиральній лінзі; знак "–" – розсіювальній.

- Збільшення лінзи

$$M = \frac{H}{h} = -\frac{q}{p}. \tag{21.5}$$

21. Геометрична оптика. Оптичні системи

- Оптична сила лінзи

$$F = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{с}}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (21.6)$$

де R_1 та R_2 — радіуси кривизни передньої та задньої поверхонь лінзи відповідно (м); $n_{\text{л}}$ — показник заломлення матеріалу, з якого виготовлено лінзу; $n_{\text{с}}$ — абсолютний показник заломлення навколишнього середовища (однаковий з обох боків лінзи); значення R_1 і R_2 у цій формулі додатні для опуклих поверхонь і від'ємні для увігнутих (див. правило вибору знаків на рис. 21.1).

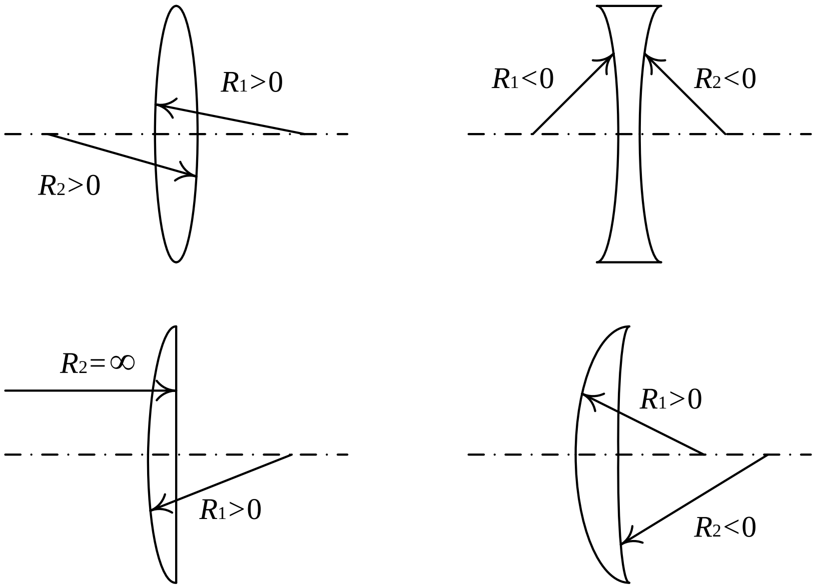


Рисунок 21.1

- Оптична сила та фокусна відстань системи, що складається із близько розташованих лінз:

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_N; \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \ldots + \frac{1}{f_N}, \qquad (21.7)$$

де N — кількість лінз (значення оптичних сил та фокусних відстаней брати з відповідними знаками).

- Збільшення системи лінз

$$M = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_N, \tag{21.8}$$

де N – кількість лінз.

- Оптична сила сферичної заломлювальної поверхні

$$F = \frac{n_2 - n_1}{R}, \tag{21.9}$$

де R – радіус поверхні (м); n_1 – показник заломлення першого середовища, з якого виходить світло; n_2 – показник заломлення другого середовища.

- Кутове збільшення лупи

$$M_{\text{л}} = \frac{D}{f}, \tag{21.10}$$

де $D = 0,25$ м – відстань найкращого зору; f – фокус лупи (м).

- Кутове збільшення телескопа

$$M_{\text{т}} = \frac{f_{\text{об}}}{f_{\text{ок}}}, \tag{21.11}$$

де $f_{\text{об}}$ та $f_{\text{ок}}$– фокусні відстані об'єктива та окуляра відповідно (м).

- Відстань від об'єктива до окуляра телескопа

$$L = f_{\text{об}} + f_{\text{ок}}. \tag{21.12}$$

- Кутове збільшення мікроскопа

$$M_{\text{м}} = \frac{\delta \cdot D}{f_{\text{об}} \cdot f_{\text{ок}}}, \tag{21.13}$$

де δ – оптична довжина тубуса, або відстань між заднім фокусом об'єктива і переднім фокусом окуляра (м).

21. Геометрична оптика. Оптичні системи

- Відстань від об'єктива до окуляра мікроскопа

$$L = f_{\text{об}} + \delta + f_{\text{ок}}. \qquad (21.14)$$

Приклади розв'язання задач

21.1. Збиральна лінза з фокусною відстанню $f = 10$ см формує зображення двох предметів, що знаходяться на відстані а) $p_1 = 30$ см та б) $p_2 = 5$ см перед лінзою. Для кожного випадку знайти відстань до зображення, побудувати та описати зображення.

$f = 0,1$ м,
$p_1 = 0,3$ м,
$p_2 = 0,05$ м
q_1, q_2–?

а) У першому випадку предмет знаходиться перед фокусом лінзи. Скористаємося формулою лінзи (21.4). Оскільки лінза збиральна, то f має знак плюс:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1},$$

звідки виразимо q_1:

$$q_1 = \frac{fp_1}{p_1 - f} = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,3 - 0,1} = 0,15\ (\text{м}).$$

Додатне значення q_1 свідчить про те, що зображення дійсне. Знайдемо збільшення лінзи за формулою (21.5):

$$M_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{0,15}{0,3} = -0,5.$$

Знак "$-$" перед M_1 означає те, що зображення перевернуте. Таким чином, отримане зображення є дійсним, перевернутим та зменшеним удвічі. Побудуємо зображення. Для того щоб визначити, де буде зображення, буде воно прямим чи перевернутим, збільшеним чи зменшеним, дійсним чи уявним, достатньо знати хід трьох променів, які виходять з вершини предмета:

1. Перший промінь проходить паралельно головній оптичній осі, а після заломлення в лінзі проходить через задній фокус F.
2. Другий промінь проходить через оптичний центр лінзи і не заломлюється.
3. Третій промінь проходить через передній фокус лінзи F і заломлюється, після чого йде паралельно головній оптичній осі.

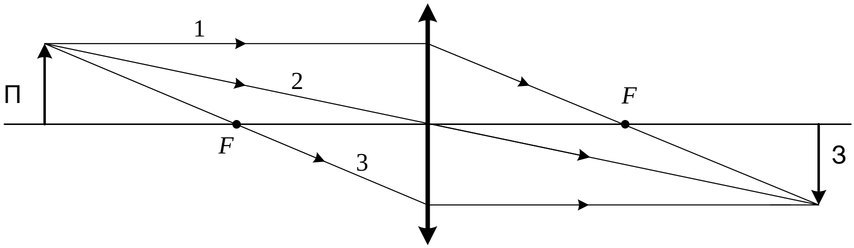


Рисунок 21.2

Точка перетину цих променів є вершиною зображення (див. рис. 21.2).

б) Розглянемо випадок, коли предмет знаходиться між фокусом та лінзою:

$$q_2 = \frac{fp_2}{p_2 - f} = \frac{0,1 \cdot 0,05}{0,05 - 0,1} = -0,1 \text{ (м)}.$$

Від'ємне значення q_2 свідчить про те, що зображення уявне. Знайдемо збільшення лінзи:

$$M_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{-0,1}{0,05} = 2.$$

Знак "+" перед M_2 означає, що зображення пряме. Таким чином, отримане зображення є уявним, прямим та збільшеним удвічі. Побудуємо хід променів. Оскільки промені не перетинаються, зображення уявне. Для знаходження вершини зображення в цьому разі необхідно продовжити кожен із променів до точки перетину, як це показано на рис. 21.3.

21.2. Розсіювальна лінза з фокусною відстанню $f = 20$ см формує зображення предмета, що знаходиться на відстані $p = 30$ см перед лінзою. Знайти положення зображення, збільшення лінзи і висоту зображення, якщо висота предмета $h = 2$ см. Побудувати та описати зображення.

$f = 0,2$ м,
$p = 0,3$ м,
$h = 0,02$ м
q, M, H–?

Оскільки лінза розсіювальна, то перед фокусом у формулі (21.4) обираємо знак "–":

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

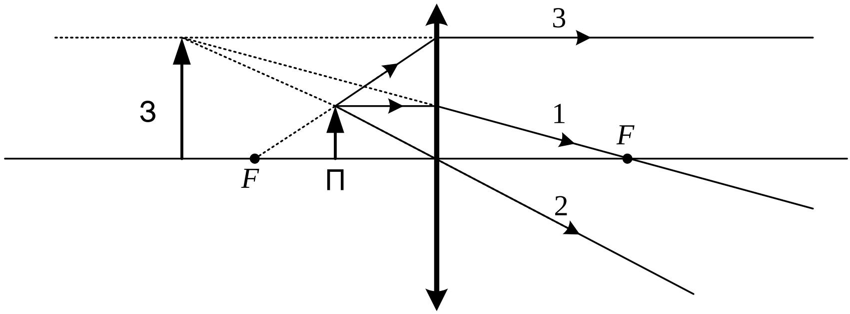


Рисунок 21.3

звідки
$$q = \frac{-fp}{p+f} = \frac{-0,2 \cdot 0,3}{0,3+0,2} = -0,12 \text{ (м)}.$$
Від'ємне значення q свідчить про те, що зображення уявне. Знайдемо збільшення лінзи (21.5):
$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{-0,12}{0,3} = 0,4.$$
Додатне значення M свідчить про те, що зображення пряме. Отже, зображення уявне, не перевернуте та зменшене. Для знаходження висоти зображення скористаємося формулою (21.5):
$$M = \frac{H}{h},$$
звідки
$$H = h \cdot M = 0,02 \cdot 0,4 = 0,008 \text{ (м)}.$$
Для побудови зображення розсіювальної лінзи необхідно провести такі три промені:

1. Промінь, паралельний до головної оптичній осі, заломлюючись, наче виходить із уявного головного фокуса лінзи.
2. Промінь, що йде через оптичний центр лінзи, після проходження крізь лінзу не заломлюється.
3. Промінь, що йде в напрямі уявного головного фокуса, що знаходиться за лінзою, після заломлення в лінзі йде паралельно до головної оптичної осі. Точка перетину цих трьох променів є вершиною уявного зображення (див. рис. 21.4).

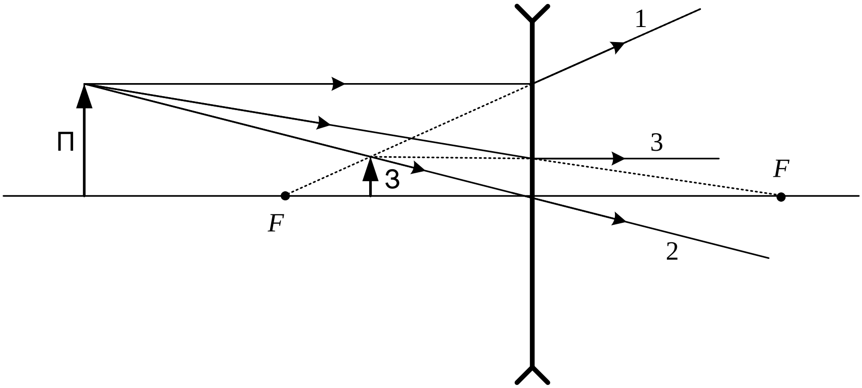


Рисунок 21.4

21.3. Збиральна лінза, виготовлена зі скла з показником заломлення $n_л = 1,52$, має фокусну відстань $f_п = 40$ см у повітрі. Визначити, якою буде фокусна відстань лінзи, якщо її помістити у воду. Показник заломлення води $n_в = 1,33$.

$n_п = 1,$ $n_в = 1,33,$ $n_л = 1,52,$ $f_п = 0,4$ м
$f_в$–?

Скористаємося формулою оптичної сили лінзи (21.6). Візьмемо до уваги, що радіуси кривизни лінзи R_1 та R_2 залишаються незмінними у першому і другому випадках.

$$\frac{1}{f_п} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

$$\frac{1}{f_в} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

де $n_1 = 1,52$ – відношення показника заломлення лінзи до показника заломлення повітря; n_2 – відношення показника заломлення лінзи до показника заломлення води:

$$n_2 = \frac{n_л}{n_в} = \frac{1,52}{1,33} = 1,143.$$

Розділивши перше рівняння на друге, отримуємо

$$\frac{f_в}{f_п} = \frac{n_1 - 1}{n_2 - 1} = \frac{1,52 - 1}{1,143 - 1} = 3,64.$$

Отже, фокусна відстань лінзи у воді дорівнюватиме

$$f_в = 3,64 \cdot f_п = 3,64 \cdot 0,4 = 1,46 \text{ (м)}.$$

21.4. Дві лінзи з фокусними відстанями $f_1 = 10$ см і $f_2 = 20$ см знаходяться на відстані 20 см одна від одної, як показано на рис. 21.5. Предмет знаходиться перед першою лінзою на відстані 15 см. Знайти положення зображення та збільшення, що дає система двох лінз. Описати зображення.

$f_1 = 0,1$ м,
$f_2 = 0,2$ м,
$l = 0,2$ м,
$p_1 = 0,15$ м
$q_2, M - ?$

Спочатку потрібно знайти положення зображення, яке формує перша лінза, не беручи до уваги лінзу 2. За формулою (21.4) матимемо

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1},$$

$$q_1 = \frac{f_1 p_1}{p_1 - f_1} = \frac{0,1 \cdot 0,15}{0,15 - 0,1} = 0,3 \text{ (м)},$$

де відстань q_1 вимірюється від першої лінзи. Оскільки q_1 додатне, зображення дійсне і знаходиться за першою лінзою. Предметом для другої лінзи буде зображення, що дає перша лінза. Відстань q_1 більша за відстань l, на якій розташовані дві лінзи, тому предмет для другої лінзи знаходитиметься праворуч від неї. Отже, предметна відстань

$$p_2 = l - q_1 = 0,2 - 0,3 = -0,1 \text{ (м)}.$$

Використаємо формулу лінзи (21.4) для другої лінзи:

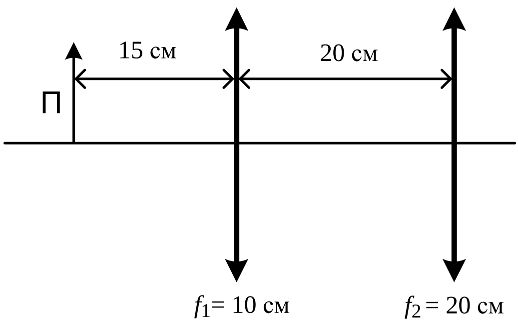


Рисунок 21.5

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2},$$

$$q_2 = \frac{f_2 p_2}{p_2 - f_2} = \frac{0,2 \cdot (-0,1)}{-0,1 - 0,2} = 0,067\ (\text{м}).$$

Таким чином, результуюче зображення знаходиться на відстані $q_2 = 0,067$ м від другої лінзи. За умовою потрібно також знайти збільшення системи лінз. Знайдемо спочатку збільшення кожної із лінз окремо за формулою (21.5):

$$M_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{0,3}{0,15} = -2;$$

$$M_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{0,067}{-0,1} = 0,67.$$

Згідно із формулою (21.8) результуюче збільшення системи лінз дорівнює добутку збільшення кожної із лінз:

$$M = M_1 \cdot M_2 = -2 \cdot 0,67 = -1,34.$$

Отже, результуюче зображення дійсне, збільшене і перевернуте.

21.5. На якій відстані від збиральної лінзи з фокусною відстанню 30 см потрібно поставити предмет, щоб отримати його зображення, збільшене в 10 разів? Де буде знаходитися зображення предмета?

$f = 0,3$ м, $M = 10$
q, p—?

Збиральна лінза може давати збільшене зображення, яке є при одному розташуванні предмета дійсним, а при іншому — уявним. Тому існують два розв'язки.

1. Нехай зображення дійсне. Формула лінзи для цього випадку матиме вигляд (21.4):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Додамо до цього рівняння формулу (21.5):

$$M = -\frac{q}{p}$$

і розв'яжемо отриману систему двох рівнянь щодо невідомих p та q:

$$q = -Mp,$$

підставляючи у формулу лінзи, отримуємо

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Mp} = \frac{M-1}{Mp}; \quad f(M-1) = Mp;$$

$$p = \frac{f(M-1)}{M}.$$

Відомо, що у випадку, який розглядається, зображення предмета перевернуте. Це означає те, що $M = -10$. Таким чином, матимемо:

$$p = \frac{0,3 \cdot (-10-1)}{-10} = 0,33 \text{ (м)};$$

$$q = -Mp = -(-10) \cdot 0,33 = 3,3 \text{ (м)}.$$

2. Розглянемо другий випадок. Нехай зображення є уявним, що означає те, що $q < 0$. При цьому зображення буде прямим, тобто $M > 0$. Аналогічно до першого випадку отримуємо

$$p = \frac{f(M-1)}{M}.$$

Після підстановки матимемо:

$$p = \frac{0,3 \cdot (10-1)}{10} = 0,27 \text{ (м)};$$

$$q = -Mp = -10 \cdot 0,27 = -2,7 \text{ (м)}.$$

Ми отримали значення $q < 0$, тобто зображення є уявним і знаходиться з того самого боку, що й предмет. Порівнюючи отримані значення величини p з фокусною відстанню f, бачимо, що дійсне зображення виходить, якщо $f < p < 2f$, а уявне, якщо $p < f$. Побудуємо зображення предмета в обох випадках (див. рис. 21.6).

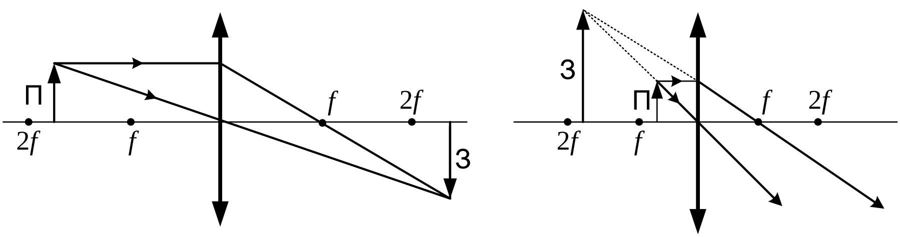


Рисунок 21.6

21.6. Якою повинна бути оптична сила розсіювальної лінзи, щоб зображення предмета, розташованого на відстані 0,1 м від лінзи, вийшло зменшеним у 5 разів?

$p = 0,1$ м, $M = 0,2$
$F-?$

Оскільки лінза розсіювальна, її оптична сила, згідно з формулою (21.6), визначиться таким чином:

$$F = -\frac{1}{f}.$$

Знайдемо фокусну відстань із формули лінзи (21.4):

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}; \quad f = -\frac{pq}{p+q}.$$

Для знаходження невідомої величини q використаємо формулу збільшення (21.5):

$$q = -Mp = -0,2 \cdot 0,1 = -0,02.$$

Знайдене значення q використаємо для знаходження фокусної відстані:

$$f = -\frac{0,1 \cdot (-0,02)}{0,1 - 0,02} = 0,025 \text{ (м)}; \quad F = -\frac{1}{0,025} = 40 \text{ (дптр)}.$$

Знак "−" відповідає оптичній силі розсіювальної лінзи. Побудуємо зображення предмета в цьому випадку (див. рис. 21.7).

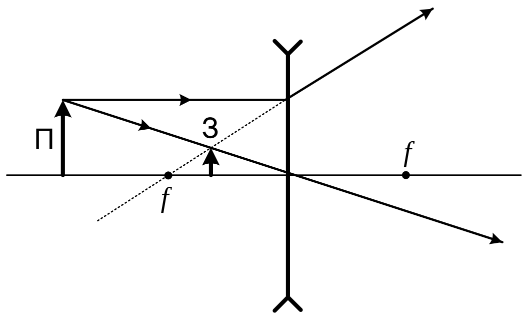


Рисунок 21.7

21.7. Знайти оптичну силу та фокусну відстань лінзи, що зображена на рис. 21.8, якщо відомі радіуси кривизни кожної з поверхонь: $R_1 = 20$ см, $R_2 = 18$ см, $R_3 = 40$ см. Показники заломлення матеріалів, з яких виготовлено лінзу, − $n_1 = 1,5$, $n_2 = 1,6$. Показник заломлення повітря, − $n = 1$.

21. Геометрична оптика. Оптичні системи

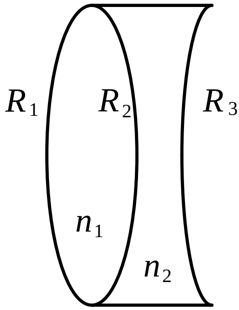


Рисунок 21.8

$R_1 = 0,2$ м,
$R_2 = -0,18$ м,
$R_3 = 0,4$ м,
$n_1 = 1,5$,
$n_2 = 1,6$,
$n = 1$
F, f −?

Спочатку за формулою (21.9) розрахуємо оптичну силу кожної з поверхонь лінзи. Оптична сила першої поверхні

$$F_1 = \frac{n_1 - n}{R_1} = \frac{1,5-1}{0,2} = 2,5 \text{ (дптр)}.$$

Оптична сила другої поверхні

$$F_2 = \frac{n_2 - n_1}{R_2} = \frac{1,6-1,5}{-0,18} = -0,56 \text{ (дптр)},$$

і оптична сила третьої поверхні

$$F_3 = \frac{n - n_2}{R_3} = \frac{1-1,6}{0,4} = -1,5 \text{ (дптр)}.$$

За формулою (21.7) загальна оптична сила лінзи дорівнюватиме сумі оптичних сил кожної з поверхонь:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 2,5 - 0,56 - 1,5 = 0,44 \text{ (дптр)}.$$

Фокусну відстань знайдемо за формулою (21.6):

$$f = \frac{1}{F} = \frac{1}{0,44} = 2,27 \text{ (м)}.$$

21.8. Дві тонкі лінзи, виготовлені зі скла з показником заломлення $n = 1,5$ та радіусами кривизни сферичних поверхонь $R_{об} = 1$ см і $R_{ок} = 5$ см, використовуються відповідно як об'єктив та окуляр мікроскопа, що дає збільшення $M_1 = 50$. Після збільшення відстані між об'єктивом та окуляром на Δl збільшення стало дорівнювати $M_2 = 60$. Знайти відстань Δl.

$n = 1,5$,
$R_{об} = 0,01$ м,
$R_{ок} = 0,05$ м,
$M_1 = 50$,
$M_2 = 60$
Δl–?

Під час спостереження за допомогою мікроскопа об'єктів малих розмірів предмет AB розташовують поблизу переднього фокуса об'єктива $f_{об}$ (див. рис. 21.9). Об'єктив дає збільшене дійсне перевернуте зображення A′B′ поблизу фокуса окуляра $f_{ок}$. У свою чергу, окуляр переводить зображення A′B′ у збільшене уявне зображення A*B*, що знаходиться на відстані найкращого зору O′B* $= D =$ 25 см. Відстань δ між заднім фокусом об'єктива і переднім фокусом окуляра називають оптичною довжиною мікроскопа. Збільшення оптичного мікроскопа будемо знаходити

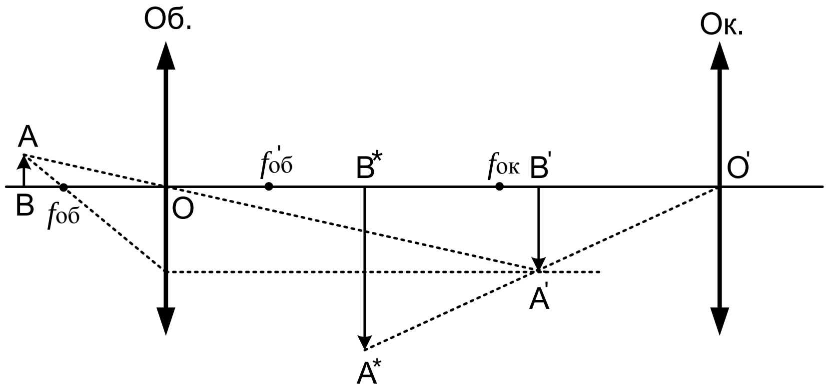


Рисунок 21.9

за формулою (21.13). У першому випадку збільшення дорівнює

$$M_1 = \frac{\delta \cdot D}{f_{об} \cdot f_{ок}}.$$

Після збільшення відстані між об'єктивом та окуляром на Δl оптична довжина мікроскопа δ також збільшиться на Δl. Збільшення у цьому разі дорівнюватиме

$$M_2 = \frac{(\delta + \Delta l) \cdot D}{f_{об} \cdot f_{ок}}.$$

Використовуючи взаємозв'язок між фокусною відстанню та оптичною силою $f_{об} = 1/F_{об}$ та $f_{ок} = 1/F_{ок}$, формули для збільшення перепишемо у вигляді

$$M_1 = \delta \cdot D \cdot F_{об} \cdot F_{ок},$$

$$M_2 = (\delta + \Delta l) \cdot D \cdot F_{\text{об}} \cdot F_{\text{ок}}.$$

Згідно з формулою (21.9) оптичні сили кожної із лінз дорівнюють відповідно

$$F_{\text{об}} = \frac{2(n - n_0)}{R_{\text{об}}},$$

$$F_{\text{ок}} = \frac{2(n - n_0)}{R_{\text{ок}}},$$

де показник заломлення повітря $n_0 = 1$. Підставивши формули для оптичних сил у вирази для збільшення, отримуємо

$$M_1 = \frac{4\delta D(n - n_0)^2}{R_{\text{об}} \cdot R_{\text{ок}}},$$

$$M_2 = \frac{4(\delta + \Delta l)D(n - n_0)^2}{R_{\text{об}} \cdot R_{\text{ок}}}.$$

Для знаходження невідомої величини Δl знайдемо різницю M_2 і M_1:

$$M_2 - M_1 = \frac{4\Delta l D(n - n_0)^2}{R_{\text{об}} \cdot R_{\text{ок}}},$$

звідки

$$\Delta l = \frac{(M_2 - M_1)R_{\text{об}}R_{\text{ок}}}{4D(n - n_0)^2}.$$

Після підстановки числових значень отримуємо

$$\Delta l = \frac{(60 - 50) \cdot 0,01 \cdot 0,05}{4 \cdot 0,25 \cdot (1,5 - 1)} = 0,01 \text{ (м)} = 1 \text{ (см)}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

21.9. На сферичне дзеркало падає промінь світла. Побудувати хід променя після відображення у двох випадках: а) увігнуте дзеркало (рис. 21.10 а); б) опукле дзеркало (рис. 21.10 б). На рисунку P – полюс дзеркала, O – оптичний центр.

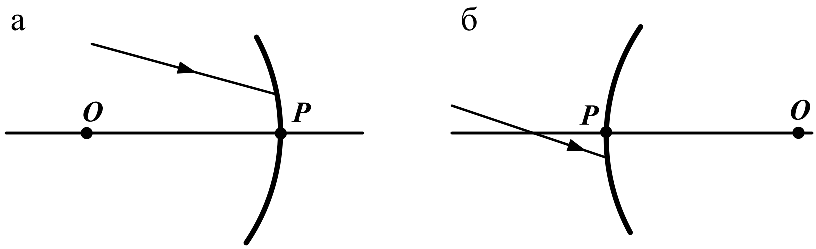


Рисунок 21.10

21.10. Увігнуте сферичне дзеркало дає на екрані зображення предмета, збільшене в $M = 4$ рази. Відстань a від предмета до дзеркала дорівнює 25 см. Визначити радіус R кривизни дзеркала.

21.11. Фокусна відстань f увігнутого дзеркала дорівнює 15 см. Дзеркало дає дійсне зображення предмета, зменшене втричі. Визначити відстань a від предмета до дзеркала.

21.12. Радіус кривизни R опуклого дзеркала дорівнює 50 см. Предмет висотою $h = 15$ см знаходиться на відстані $a = 1$ м від дзеркала. Визначити відстань b від дзеркала до зображення та його висоту H.

21.13. Висота зображення предмета в увігнутому дзеркалі вдвічі більша за висоту самого предмета. Відстань між предметом і зображенням дорівнює 15 см. Знайти фокусну відстань f та оптичну силу F дзеркала.

21.14. На екран проекціюють діапозитив, причому площа зображення в 25 разів більша за площу діапозитива. Відстань від об'єктива проекційного апарата до діапозитива 40 см. Визначити фокусну відстань об'єктива і відстань від об'єктива до екрана. Діапозитив вважати квадратним.

21.15. Відстань між предметом та екраном $L = 1$ м. Між ними знаходиться збиральна лінза, яка дає на екрані чітке зменшене зображення. Якщо лінзу наблизити на $\Delta p = 60$ см до предмета, то на екрані з'явиться збільшене зображення. Визначити фокусну відстань лінзи.

21.16. Точка, що світиться, знаходиться на головній оптичній осі лінзи на відстані $p = 20$ см від її переднього фокуса. Яка фокусна відстань збиральної лінзи, якщо зображення цієї точки виходить на відстані $q = 80$ см за її заднім фокусом?

21.17. Зображення предмета на плівці фотоапарата під час знімання з відстані $p_1 = 18$ м вийшло заввишки $H_1 = 6$ мм, а з відстані $p_2 = 10$ м – заввишки $H_2 = 11$ мм. Знайти фокусну відстань об'єктива фотоапарата.

21.18. Знайти найменшу відстань l між предметом та його дійсним зображенням, що формується збиральною лінзою з головною фокусною відстанню $f = 12$ см.

21.19. Людина рухається вздовж головної оптичної осі об'єктива фотоапарата зі швидкістю $v = 5$ м/с. З якою швидкістю u необхідно переміщувати матове скло фотоапарата, щоб зображення людини залишалося чітким? Головна фокусна відстань f об'єктива дорівнює 20 мм. Виконати розрахунки для випадку, коли людина знаходиться на відстані $p = 10$ м від фотоапарата.

21.20. Зі скла необхідно виготовити збиральну лінзу, оптична сила якої $F = 5$ дптр. Визначити радіус кривизни опуклої поверхні лінзи.

21.21. Довести, що у двоопуклій лінзі, що має показник заломлення $n = 1,5$ та рівні радіуси кривизни поверхонь, фокуси збігаються з центрами кривизни.

21.22. Опукла лінза зі скла має однакові радіуси кривизни передньої та задньої поверхонь. При якому значенні радіусів R лінзи головна фокусна відстань f буде дорівнювати 20 см?

21.23. Відношення k радіусів кривизни поверхонь скляної лінзи дорівнює 2. При яких радіусах кривизни R опуклих поверхонь оптична сила F лінзи буде дорівнювати 10 дптр?

21.24. Лінза виготовлена зі скла, показник заломлення якого для червоних променів $n_ч = 1,5$, а для фіолетових $n_ф = 1,52$. Радіуси кривизни R обох поверхонь лінзи однакові й дорівнюють 10 см. Визначити відстань $\triangle f$ між фокусами лінзи для червоних та фіолетових променів.

21.25. У скляній лінзі, що знаходиться у повітрі, фокусна відстань дорівнює $f_1 = 5$ см, а у зануреній у розчин цукру $f_2 = 35$ см. Визначити показник заломлення n розчину.

21.26. Тонка лінза, що знаходиться у повітрі, має оптичну силу $F_1 = 5$ дптр, а у рідині $F_2 = -0,48$ дптр. Визначити показник заломлення n_2 рідини, якщо показник заломлення n_1 скла, з якого виготовлена лінза, дорівнює 1,52.

21.27. Лупа – двоопукла лінза, виготовлена зі скла з показником заломлення $n = 1,6$. Радіуси кривизни R поверхонь лінзи однакові й дорівнюють 12 см. Визначити збільшення лупи $M_л$.

21.28. Лупа дає збільшення $M_л = 2$. До неї впритул приклали лінзу з оптичною силою $F = 20$ дптр. Яке збільшення M даватиме така складна система?

21.29. Якими мають бути радіуси кривизни $R_1 = R_2$ поверхонь лупи, щоб вона давала збільшення для нормального ока $M_л = 10$? Показник заломлення скла, з якого виготовлена лупа, $n = 1,5$.

21.30. Оптична сила об'єктива телескопа дорівнює 0,5 дптр. Окуляр діє як лупа, що дає збільшення $M_1 = 10$. Яке збільшення $M_т$ дає телескоп?

21.31. З окуляром з фокусною відстанню $f = 50$ мм телескоп дає кутове збільшення $M_1 = 60$. Яке кутове збільшення M_2 дасть об'єктив, якщо видалити окуляр і розглядати дійсне зображення, що створюється об'єктивом, неозброєним оком з відстані найкращого зору?

21.32. Фокусна відстань f_1 об'єктива телескопа дорівнює 1 м. За допомогою телескопа розглядають будинок, що знаходиться на відстані $p = 1$ км. У якому напрямі та на яку відстань необхідно перемістити окуляр, щоб отримати чітке зображення у двох випадках: 1) якщо після будинку спостерігатимуть Місяць; 2) замість Місяця будуть розглядати близькі предмети, що знаходяться на відстані $p_1 = 100$ м?

21.33. Фокусна відстань f_1 об'єктива мікроскопа дорівнює 8 мм, окуляра $f_2 = 4$ см. Предмет знаходиться на $\Delta p = 0,5$ мм далі від об'єктива, ніж головний фокус. Визначити збільшення M мікроскопа.

21.34. Фокусна відстань f_1 об'єктива мікроскопа дорівнює 1 см, окуляра $f_2 = 2$ см. Відстань від об'єктива до окуляра $L = 23$ см. Яке збільшення $M_{\text{м}}$ дає мікроскоп? На якій відстані p від об'єктива знаходиться предмет?

21.35. Відстань δ між фокусами об'єктива та окуляра всередині мікроскопа дорівнює 16 см. Фокусна відстань $f_{\text{об}}$ об'єктива дорівнює 1 мм. З якою фокусною відстанню $f_{\text{ок}}$ потрібно взяти окуляр, щоб отримати збільшення $M_{\text{м}} = 500$?

21.36. Предмет розташований на відстані 105 см перед об'єктивом фотоапарата, що має фокусну відстань 50 мм. Де повинна розташовуватися фотоплівка?

22. Око як оптична система

Основні формули

- Оптична сила рогівки

$$F_{\text{р}} = F_{\text{рп}} + F_{\text{рз}} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2}, \tag{22.1}$$

де $F_{\text{рп}}$ – оптична сила передньої поверхні рогівки (дптр); $F_{\text{рз}}$ – оптична сила задньої поверхні рогівки (дптр); R_1 – радіус передньої поверхні рогівки (м); R_2 – радіус задньої поверхні рогівки (м); n_1 – показник заломлення навколишнього середовища; n_2 – показник заломлення рогівки; n_3 – показник заломлення водянистої вологи.

- Оптична сила кришталика

$$F_{\text{к}} = F_{\text{кп}} + F_{\text{кз}} = \frac{n_4 - n_3}{R_3} - \frac{n_5 - n_4}{R_4}, \tag{22.2}$$

де $F_{\text{кп}}$ – оптична сила передньої поверхні кришталика (дптр); $F_{\text{рз}}$ – оптична сила задньої поверхні кришталика (дптр); R_3 – радіус передньої поверхні кришталика (м); R_4 – радіус задньої поверхні кришталика (м); n_4 – показник заломлення кришталика; n_5 – показник заломлення склуватого тіла.

- Оптична сила ока

$$F_{\text{ока}} = F_{\text{р}} + F_{\text{к}}. \tag{22.3}$$

- Фокусна відстань ока

$$f_{\text{ока}} = \frac{1}{F_{\text{ока}}}. \tag{22.4}$$

На рис. 22.1 показані основні компоненти оптичної системи ока. Відповідні значення радіусів кривизни та показників заломлення наведені в табл. 22.1.

22. Око як оптична система

Таблиця 22.1

	Радіус, мм		Показник заломлення
	Передня поверхня	Задня поверхня	
Рогівка	$R_1 = 7,8$	$R_2 = 7,3$	$n_2 = 1,38$
Кришталик ($F_{\min}$)	$R_3 = 10$	$R_4 = 6$	$n_4 = 1,4$
Кришталик ($F_{\max}$)	$R_3 = 6$	$R_4 = 5,5$	$n_4 = 1,4$
Водяниста волога та склувате тіло			$n_3 = n_5 = 1,38$

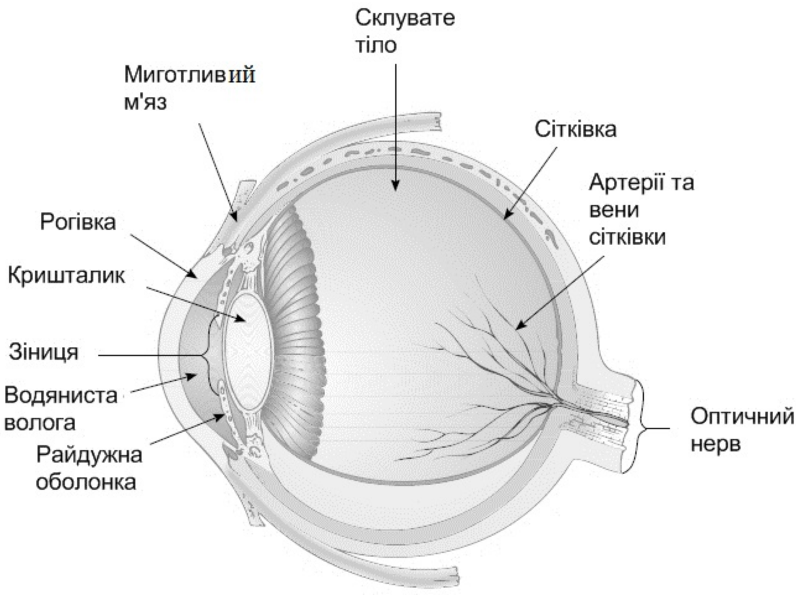


Рисунок 22.1

- Розрахунок корегувальних лінз для короткозорого ока:

$$F_{\text{к}} = \frac{1}{f_{\text{к}}} = \frac{1}{p_\infty} + \frac{1}{q}; \qquad (22.5)$$

де $F_к$ (дптр) — оптична сила та $f_к$ (м) — фокусна відстань лінзи, що необхідна для корекції короткозорості; p_∞ — дальня точка ока, у нормі беруть такою, що дорівнює нескінченності (м); q — відстань до зображення, дальня точка короткозорого ока (м).

- Розрахунок корегувальних лінз для далекозорого ока:

$$F_д = \frac{1}{f_д} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q}, \tag{22.6}$$

де $F_д$ (дптр) — оптична сила та $f_д$ (м) — фокусна відстань лінзи, що необхідна для корекції далекозорості; p_0 — ближня точка ока (м), у нормі — 25 см; q — відстань до зображення, ближня точка далекозорого ока (м).

- Зв'язок між лінійними розмірами предмета та розмірами його зображення на сітківці:

$$H = \frac{h \cdot l}{L}, \tag{22.7}$$

де h — розміри предмета (м); H — розміри зображення на сітківці (м); L — відстань від предмета до оптичної системи ока (м); l — відстань до зображення (м) (від рогівки до сітківки, в середньому дорівнює 1,5 см).

- Зв'язок між гостротою зору та найменшим кутом зору:

$$V = \frac{1}{\beta}, \tag{22.8}$$

де V — гострота зору; β — найменший кут зору.

- Роздільна здатність ока (аналогічно до формули (20.12)):

$$\Theta_{\min} = \frac{1,22\lambda}{D}, \tag{22.9}$$

де $\Theta_{\min}$ — кутова межа дозволу ока (рад); λ — довжина хвилі світла (м); D — діаметр зіниці (м).

22. Око як оптична система

- Найменший розмір предмета, який неозброєне людське око здатне розрізнити:

$$x = L \cdot \Theta_{\min}, \tag{22.10}$$

  де $\Theta_{\min}$ — кутова межа дозволу ока, в нормі $\Theta_{\min} = 5 \cdot 10^{-4}$ рад; L — відстань від предмета до спостерігача (м); x — розмір предмета (м).

Приклади розв'язання задач

22.1. Використовуючи дані табл. 22.1, розрахувати оптичну силу та фокусну відстань системи лінз ока: а) у стані спокою ($F_{\min}$ та $f_{\max}$), що відповідає фокусуванню ока на дуже віддалені предмети; б) у стані напруження ($F_{\max}$ та $f_{\min}$), тобто під час розглядання предметів, що знаходяться на відстані найкращого зору. Показник заломлення повітря $n_1 = 1$. На рис. 22.2 схематично зображено хід променів світла через систему лінз ока.

$R_1 = 7,8 \cdot 10^{-3}$ м, $R_2 = 7,3 \cdot 10^{-3}$ м, $R_{3\max} = 10^{-2}$ м, $R_{3\min} = 6 \cdot 10^{-3}$ м, $R_{4\max} = 6 \cdot 10^{-3}$ м, $R_{4\min} = 5,5 \cdot 10^{-3}$ м, $n_1 = 1,\ n_2 = 1,38$, $n_3 = n_5 = 1,33$, $n_4 = 1,4$
$F_{\min}, f_{\max}$, $F_{\max}, f_{\min}$—?

Розрахуємо спочатку оптичну силу рогівки. Оптична сила рогівки не залежить від відстані до предмета і є величиною незмінною (див. (22.1)):

$$F_{\text{р}} = F_{\text{рп}} + F_{\text{рз}} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2}.$$

Підставляючи числові значення, отримуємо

$$F_{\text{р}} = \frac{1,38-1}{7,8 \cdot 10^{-3}} + \frac{1,33-1,38}{7,3 \cdot 10^{-3}} = 41,87 \text{ (дптр)}.$$

Кришталик здатний змінювати розміри та радіуси кривизни своїх поверхонь. Відповідно до цього оптична сила кришталика також змінюється залежно від того, сфокусоване око на близько розташований предмет чи на даль. Цей процес має назву акомодації. При фокусуванні на дальні предмети око розслаблене, оптична сила має мінімальне значення, а кришталик — максимальні радіуси кривизни передньої та задньої поверхонь. За формулою (22.2) знайдемо величину $F_{\text{к}\min}$:

$$F_{\text{к}\min} = \frac{n_4 - n_3}{R_{3\max}} - \frac{n_5 - n_4}{R_{4\max}},$$

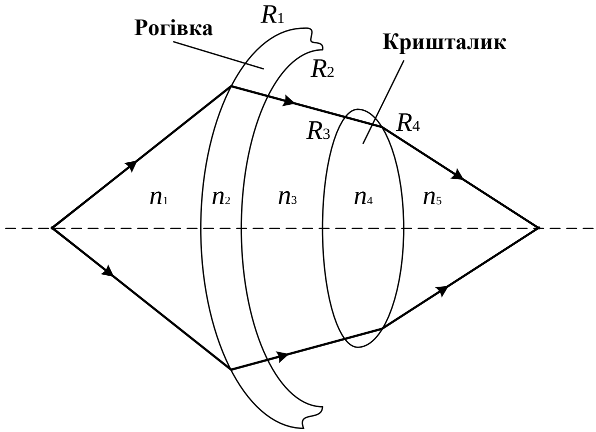


Рисунок 22.2

$$F_{\text{кmin}} = \frac{1,4 - 1,33}{10^{-2}} - \frac{1,33 - 1,4}{6 \cdot 10^{-3}} = 18,67\ (\text{дптр}).$$

Максимальна оптична сила кришталика відповідає фокусуванню на близько розташовані предмети, при цьому кришталик зменшується у розмірах і радіуси кривизни набувають мінімальних значень:

$$F_{\text{кmax}} = \frac{n_4 - n_3}{R_{3\min}} - \frac{n_5 - n_4}{R_{4\min}}.$$

Розрахуємо це значення:

$$F_{\text{кmax}} = \frac{1,4 - 1,33}{6 \cdot 10^{-3}} - \frac{1,33 - 1,4}{5,5 \cdot 10^{-3}} = 24,4\ (\text{дптр}).$$

Оптична сила ока в цілому за формулою (22.3) дорівнює сумі оптичних сил кришталика та рогівки. Отже, мінімальна оптична сила ока

$$F_{\text{окаmin}} = F_{\text{р}} + F_{\text{кmin}} = 41,87 + 18,67 = 60,54\ (\text{дптр}).$$

Максимальна оптична сила ока

$$F_{\text{окаmax}} = F_{\text{р}} + F_{\text{кmax}} = 41,87 + 24,4 = 66,27\ (\text{дптр}).$$

Відповідні фокусні відстані дорівнюють

$$f_{\text{окаmin}} = \frac{1}{F_{\text{окаmax}}} = \frac{1}{66,27} = 0,0151\ (\text{м}),$$

$$f_{\text{окаmax}} = \frac{1}{F_{\text{окаmin}}} = \frac{1}{60,54} = 0,0165\ (\text{м}).$$

22.2. На скільки діоптрій зростає оптична сила кришталика під час переведення погляду з дуже віддаленого предмета на предмет, що знаходиться на відстані найкращого зору $p_0 = 25$ см?

$p_0 = 0,25$ м, $p_\infty = \infty$
$\triangle F-?$

Запишемо формулу лінзи для ока, коли воно дивиться вдалину (22.5):

$$F_1 = \frac{1}{p_\infty} + \frac{1}{q},$$

де q — відстань від системи лінз ока до сітківки.
У другому випадку (22.6)

$$F_2 = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q}.$$

Знайдемо різницю:

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_\infty} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_\infty} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{\infty} = 4\ (\text{дптр}).$$

22.3. Припустимо, що короткозора людина не може чітко бачити предмети, які знаходяться на відстані більш ніж два метри від неї (дальня точка ока хворого). Знайти оптичну силу та фокусну відстань лінзи, приписаної для корекції цієї проблеми.

$p_\infty = \infty$, $q = -2$ м
$F_к, f_к-?$

Для здорового ока паралельні промені світла фокусуються на фоточутливій сітківці. У разі короткозорості оптична система лінз занадто заламлює світло. Це призводить до того, що зображення фокусується перед сітківкою і людина бачить предмети нечітко. Для корекції цієї вади використовують розсіювальну лінзу, що розміщується перед оком (див. рис. 22.3). Фокусну відстань можна знайти за формулою (22.5):

$$\frac{1}{f_к} = \frac{1}{p_\infty} + \frac{1}{q}.$$

У цьому випадку задача розсіювальної лінзи полягає у тому, щоб сформувати зображення від віддалених предметів ($p_\infty = \infty$) на відстані

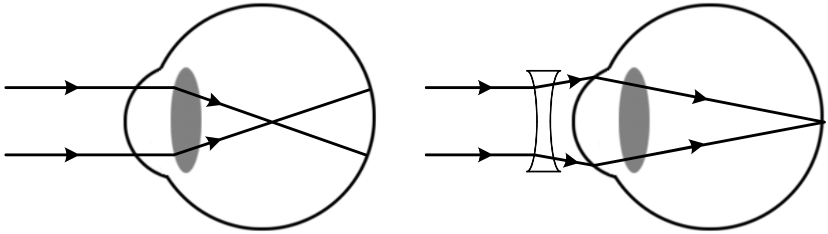


Рисунок 22.3

дальньої точки ока хворого. Тоді людина зможе бачити ці предмети чітко. Тобто бажана відстань до зображення $q = -2$ м. Знак "$-$" беруть тому, що зображення уявне (знаходиться перед оком). Отже, матимемо співвідношення:

$$\frac{1}{f_к} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{2},$$

звідки фокус

$$f_к = -2\ (\text{м}),$$

а оптична сила

$$F_к = \frac{1}{f_к} = -0,5\ (\text{дптр}).$$

22.4. Припускаючи, що далекозора людина не може чітко бачити предмети, які знаходяться на відстані меншій ніж 150 см від неї (ближня точка ока хворого), знайти оптичну силу та фокусну відстань лінзи, що потрібна для корекції цієї проблеми.

$p_0 = 0,25$ м,
$q = -1,5$ м
$F_д$, $f_д$–?

У разі далекозорості оптична система лінз заломлює світло недостатньо. Це призводить до того, що зображення фокусується поза сітківкою, і людина бачить предмети нечітко. Для корекції цієї вади використовують збиральну лінзу, що розміщується перед оком (рис. 22.4). Фокусну відстань можемо знайти за формулою (22.6):

$$\frac{1}{f_д} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q}.$$

У цьому випадку задача збиральної лінзи полягає у тому, щоб сформувати зображення від предметів, що знаходяться на відстані найкращого зору здорової людини ($p_0 = 25$ см), на відстані ближньої точки

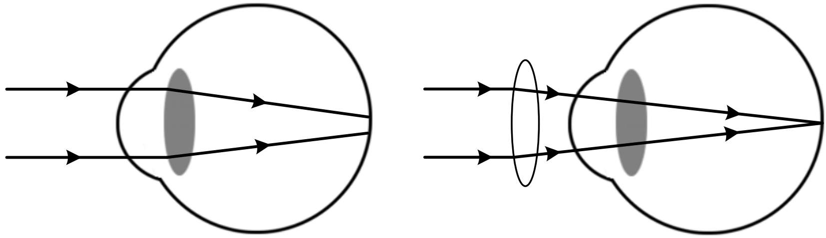


Рисунок 22.4

ока хворого. Тоді людина зможе бачити ці предмети чітко. Тобто бажана відстань до зображення $q = -150$ см. Знак "$-$" беруть тому, що зображення уявне (знаходиться перед оком). Отже, матимемо співвідношення

$$\frac{1}{f_\text{д}} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{1,5} = \frac{10}{3},$$

звідки фокус

$$f_\text{д} = 0,3 \text{ (м)},$$

а оптична сила

$$F_\text{д} = \frac{1}{f_\text{д}} = +3,33 \text{ (дптр)}.$$

22.5. Відстань найкращого зору для далекозорої людини дорівнює 60 см. Порівняти оптичні сили окулярів і контактних лінз, що необхідні для корекції цього дефекту. Взяти відстань від лінзи окулярів до ока 2 см.

$p_0 = 0,25$ м,
$q = -0,6$ м,
$h = 0,02$ м
$F-?$

Необхідно зазначити, що оптичні сили компенсуючих окулярів та контактних лінз не є однаковими. Це пов'язано з тим, що контактна лінза розташовується впритул до ока, а лінза окулярів віддалена від ока на деяку відстань, у цьому випадку $h = 2$ см. При компенсації за допомогою окулярів та контактних лінз око бачить не сам предмет, а його уявне зображення (рис. 22.5). При використанні контактної лінзи уявне зображення повинне знаходитися на відстані $q = 60$ см від ока, коли предмет знаходиться на відстані $p_0 = 25$ см (відстань найкращого зору в нормі) та $h = 0$ (22.6):

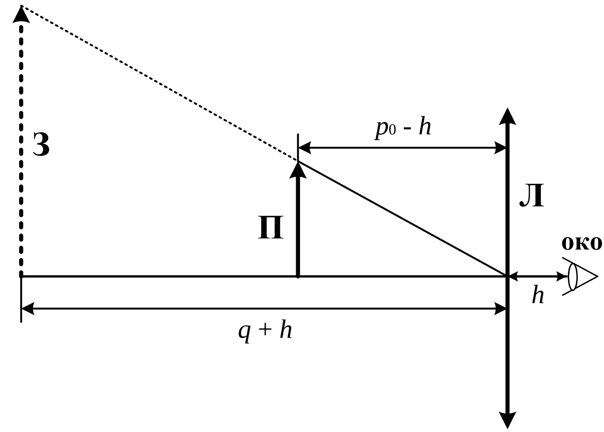


Рисунок 22.5

$$F_{\text{кл}} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,6} = +2,33 \text{ (дптр)}.$$

Для окулярів, взявши до уваги відстань між лінзою та оком, отримуємо

$$q_{\text{ок}} = q + h = -0,6 + 0,02 = -0,58 \text{ (м)};$$

$$p_{\text{ок}} = p_0 - h = 0,25 - 0,02 = 0,23 \text{ (м)}.$$

Підставляємо значення у формулу лінзи та отримуємо

$$F_{\text{ок}} = \frac{1}{p_{\text{ок}}} + \frac{1}{q_{\text{ок}}} = \frac{1}{0,23} - \frac{1}{0,58} = +2,62 \text{ (дптр)}.$$

22.6. Розрахувати розмір зображення на сітківці людини висотою 180 см, що знаходиться на відстані 200 см від спостерігача. Знайти розмір зображення на сітківці обличчя та носа людини, припускаючи, що її обличчя та ніс мають розміри 24 см та 8 см відповідно.

$h_1 = 1,8$ м,
$h_2 = 0,24$ м,
$h_3 = 0,08$ м,
$p = 2$ м,
$l = 0,015$ м
H_1, H_2, H_3–?

Для знаходження розміру зображення на сітківці скористаємося рис. 22.6. Оскільки два трикутники подібні, можна записати

$$\frac{h}{H} = \frac{L}{l},$$

звідки розмір зображення на сітківці дорівнюватиме

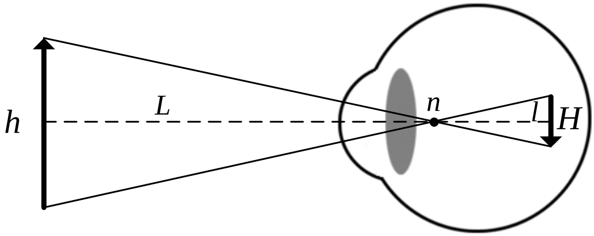


Рисунок 22.6

$$H = \frac{h \cdot l}{L}.$$

Відстань l від вузлової точки n до сітківки визначається геометричними розмірами ока і в середньому дорівнює 1,5 см. Відстань від рогівки до вузлової точки n у середньому дорівнює 0,5 см.
Звідси матимемо

$$L = p + 0,005 = 2 + 0,005 = 2,005 \text{ (м)}.$$

Після розрахунків отримуємо:

$$H_1 = \frac{h_1 \cdot l}{L} = \frac{1,8 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{2,005} = 13,47 \text{ (мм)},$$

$$H_2 = \frac{h_2 \cdot l}{L} = \frac{0,24 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{2,005} = 1,8 \text{ (мм)},$$

$$H_3 = \frac{h_3 \cdot l}{L} = \frac{0,08 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{2,005} = 0,6 \text{ (мм)}.$$

22.7. Визначити, на якій максимальній відстані людина з нормальним зором може роздивитися чітко предмет, розмір якого 1 см.

$x = 10^{-2}$ м,
$\Theta = 5 \cdot 10^{-4}$ рад
L–?

Найменший розмір предмета, який неозброєне людське око здатне розрізнити, визначається формулою (22.10):

$$x = L \cdot \Theta_{\min},$$

де $\Theta_{\min}$ – кутова межа дозволу ока (рис. 22.7).

Виразимо відстань до предмета таким чином:

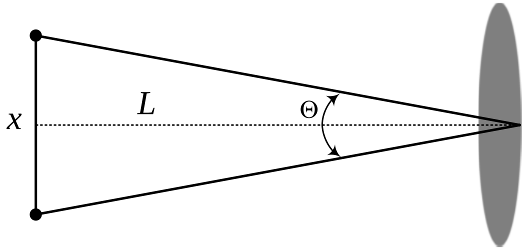


Рисунок 22.7

$$L = \frac{x}{\Theta_{\min}} = \frac{10^{-2}}{5 \cdot 10^{-4}} = 20 \text{ (м)}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

22.8. Чому вночі джерело світла здається ближче, ніж воно знаходиться від нас? Пояснити це явище.

22.9. Визначити оптичну силу рогівки при контакті ока людини з водою, якщо показник заломлення води $n_1 = 1,33$. Знайти оптичну силу та фокусну відстань ока в цілому. Значення показників заломлення та радіусів кривизни взяти із табл. 22.1.

22.10. Розрахувати оптичну силу кришталика ока риби. Кришталик має сферичну форму з діаметром 2 мм та показником заломлення $n_k = 1,4$. Показник заломлення водянистої вологи ока риби $n = 1,33$.

22.11. Оптична сила кришталика ока людини дорівнює 23 дптр. Показник заломлення – 1,4. Обчислити радіуси кривизни кришталика, якщо відомо, що радіус кривизни передньої поверхні вдвічі більший, ніж задньої. Показники заломлення водянистої вологи та склуватого тіла дорівнюють 1,33.

22.12. На скільки діоптрій зростає оптична сила кришталика під час переведення погляду з предмета, що знаходиться на відстані $p_1 = 1$ км на предмет, що знаходиться на відстані $p_2 = 50$ см?

22.13. Сумарна оптична сила оптичного апарату ока дорівнює сумі оптичних сил кожної з поверхонь заломлення: рогівка $F_{\text{р}} = 42 - 43$ дптр, кришталик $F_{\text{кр}} = 19 - 33$ дптр, передня камера $F_{\text{п/к}} = 2 - 4$ дптр, склувате тіло $F_{\text{ск/т}} = 5 - 6$ дптр. Розрахувати оптичну силу ока в стані спокою і при напруженні (під час розглядання близьких предметів).

22.14. Розрахувати оптичну силу системи лінз ока при повній акомодації. Взяти відстань від рогівки до предмета $p = 25$ см, а відстань від рогівки до зображення на сітківці $q = 23$ мм.

22.15. Абсолютна світлова чутливість зорових клітин визначається величиною біопотенціалу, що виникає при подразненні світлом. Порівняти світлочутливість зорових клітин, якщо для паличок світлова чутливість становить 13 мВ, а для колбочок – 0,12 мВ.

22.16. Порівняти максимуми чутливості зорового сприйняття, якщо при сприйнятті паличками максимум припадає на довжину хвилі $\lambda = 510$ нм, а при сприйнятті колбочками на $\lambda = 554$ нм.

22.17. Порівняти час досягнення амплітудного значення біопотенціалу, якщо для колбочок цей час дорівнює 100 мс, для паличок – 300 мс.

22.18. Кутова межа дозволу ока становить 5 кутових хвилин. У скільки разів нижча гострота зору в цьому випадку порівнянно з нормою?

22.19. У нормі око людини здатне розрізняти на відстані найкращого зору дві точки, віддалені одна від одної на 70 мкм. Розмір зображення на сітківці в цьому разі дорівнює відстані між двома колбочками. Визначити роздільну здатність ока, взявши розмір зіниці $D = 2$ мм, а довжину хвилі $\lambda = 555$ нм.

22.20. Порівняти зображення предмета на сітківці ока під час його розглядання: а) неозброєним оком; б) лупою.

22.21. Діаметр зіниці ока $D = 5$ мм. Знайти кутову межу дозволу ока для довжини хвилі світла $\lambda = 550$ нм.

22.22. Які окуляри необхідні людині, для якої відстань найкращого зору виявилася 75 см?

22.23. Ближня точка ока у далекозорої людини дорівнює 100 см. Які окуляри потрібні для корекції цього дефекту? Взяти відстань від лінзи окулярів до ока 2 см.

22.24. Ближня і дальня межі акомодації для короткозорого ока дорівнюють 18 см і 180 см відповідно. Які окуляри потрібні для корекції цього дефекту? Лінзи окулярів знаходяться на відстані 2 см від ока.

22.25. Людина, що має ваду короткозорості, найкраще розрізняє дрібний шрифт на відстані 15 см від ока. Окуляри якої оптичної сили необхідні людині для читання?

22.26. Межі акомодації ока короткозорої людини лежать між 20 см та 180 см. У контактних лінзах людина добре бачить віддалені предмети. На якій мінімальній відстані вона може тримати книгу під час читання в тих самих контактних лінзах?

22.27. Людина для читання тексту надягає окуляри оптичної сили $F = -2$ дптр. На якій відстані їй зручно розташувати плоске дзеркало, щоб бачити в ньому своє обличчя, не надягаючи окуляри? Відстань від лінзи до ока дорівнює 2 см.

22.28. Далекозора людина використовує для далі окуляри оптичної сили $F = 2$ дптр. Мінімальна відстань, на яку вона добре бачить у цих окулярах, дорівнює 50 см. Окуляри якої оптичної сили потрібні їй для читання? Відстань між лінзою та оком не враховувати.

22.29. Без окулярів людина тримає книгу під час читання на відстані 12,5 см. Окуляри якої оптичної сили їй необхідно використовувати?

22.30. Ближня точка ока у далекозорої людини дорівнює 50 см. Знайти оптичну силу та фокусну відстань контактних лінз, необхідних для корекції цього дефекту.

22.31. Дальня точка ока у короткозорої людини дорівнює 3 м. Знайти оптичну силу та фокусну відстань контактних лінз, необхідних для корекції цього дефекту.

22.32. Хлопчик, знявши окуляри, читає книгу, тримаючи її на відстані 16 см від очей. Якої оптичної сили у нього окуляри?

22.33. Розрахувати розмір зображення на сітківці предмета, що має висоту 180 см і знаходиться на відстані 5 м від спостерігача.

22.34. Знайти найменшу відстань між двома точками, які неозброєне людське око може бачити окремо. Припустити, що ближня точка знаходиться від ока на відстані $L = 20$ см та кутова межа дозволу ока $\Theta_{\min} = 5 \cdot 10^{-4}$ рад.

22.35. На якій максимальній відстані людина з нормальним зором розрізнить дрібні предмети, віддалені один від одного на 10 см?

22.36. Чи може на сітківці ока утворитися зображення предмета зі збільшенням, що дорівнює одиниці?

22.37. У якому з випадків оптична сила ока більша: при розгляданні близько розташованого предмета або віддалених предметів?

22.38. Короткозора людина може читати і розрізняти більш дрібні деталі, ніж людина, що володіє нормальним зором. Пояснити це.

22.39. У якому випадку — при далекозорості чи короткозорості — окуляри збільшують кількість енергії, падаючої на зіницю?

23. Теплове випромінювання тіл

Основні формули

- Закон Стефана – Больцмана (енергетична світимість чорного тіла):
$$R = \sigma T^4, \qquad (23.1)$$
де $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) – стала Стефана – Больцмана; T – термодинамічна температура (К).

- Енергетична світимість сірого тіла:
$$R = \alpha\sigma T^4, \qquad (23.2)$$
де α – коефіцієнт теплового випромінювання (ступінь чорноти) сірого тіла.

- Енергія, що випромінюється тілом із площею поверхні S за час t:
$$E = RSt. \qquad (23.3)$$

- Потужність випромінювання
$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = RS. \qquad (23.4)$$

- Закон зміщення Віна
$$\lambda_\mathrm{m} = \frac{b}{T}, \qquad (23.5)$$
де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання (м); $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К – стала закону зміщення Віна.

- Формула Планка (спектральна густина енергетичної світимості чорного тіла):
$$\varepsilon = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{hc/(\lambda kT)} - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/(kT)} - 1}, \qquad (23.6)$$

де λ — довжина хвилі (м); $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — швидкість світла у вакуумі; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — стала Больцмана; ω — колова частота (рад/с); T — термодинамічна температура (К); $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — стала Планка; $\hbar = h/(2\pi) = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — редукована стала Планка (стала Дірака).

- Залежність максимальної спектральної густини енергетичної світимості від температури:

$$\varepsilon_{\max} = CT^5, \tag{23.7}$$

де $C = 1,3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3·К^5) – стала.

Приклади розв'язання задач

23.1. Визначити енергію, що випромінюється крізь оглядове віконце печі за час $t = 1$ хв. Температура печі $T = 1500$ К, а площа оглядового віконця $S = 10$ см^2. Вважати, що піч випромінює як чорне тіло.

$t = 60$ с,
$T = 1500$ К,
$S = 10^{-3}$ м^2,
$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
E–?

Енергію розрахуємо за формулою (23.3):

$$E = RSt,$$

де S – площа віконця, t – час випромінювання. Енергетичну світимість чорного тіла знайдемо за відомим законом Стефана – Больцмана (23.1):

$$R = \sigma T^4.$$

Отримаємо кінцеву формулу та виконаємо числові розрахунки:

$$E = \sigma T^4 St.$$

$$E = 5,67 \cdot 10^8 \cdot 1500^4 \cdot 10^{-3} \cdot 60 = 17222,625\ (\text{Дж}) \approx 17,2\ (\text{кДж}).$$

23.2. При якій температурі енергетична світимість чорного тіла дорівнює $R = 500$ Вт/м^2?

$R = 500$ Вт/м^2, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
T–?

Оскільки тіло чорне, використовуємо закон Стефана – Больцмана (23.1):

$$R = \sigma T^4,$$

звідки отримуємо

$$T = \sqrt[4]{\frac{R}{\sigma}},$$

або після відповідних розрахунків:

$$T = \sqrt[4]{\frac{500}{5,67 \cdot 10^{-8}}} = 306,44 \text{ (К)}.$$

23.3. Поверхня чорного тіла нагріта до температури $T = 1000$ К. Знайти, у скільки разів зміниться потужність випромінювання цього тіла, якщо його половину нагріти, а іншу охолодити на $\Delta T = 100$ К.

$T = 1000$ К, $\Delta T = 100$ К
P_2/P_1–?

Початкову потужність випромінювання позначимо P_1, а потужність, що випромінюється тілом після охолодження та нагрівання P_2. Тоді, згідно із законом Стефана – Больцмана (23.1) із урахуванням (23.4) маємо

$$P_1 = RS = \sigma T^4 S,$$

$$P_2 = R_1 S_1 + R_2 S_2 = \sigma (T + \Delta T)^4 \frac{S}{2} + \sigma (T - \Delta T)^4 \frac{S}{2}.$$

В останньому виразі враховано, що половина площі тіла ($S/2$) нагріта, а інша половина охолоджена на ΔT. Тепер знайдемо шукане відношення потужності P_2 до P_1:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma (T + \Delta T)^4 S + \sigma (T - \Delta T)^4 S}{\sigma T^4 S} =$$

$$= \frac{(T + \Delta T)^4 + (T - \Delta T)^4}{2T^4}.$$

Розрахуємо це значення:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1100^4 + 900^4}{2 \cdot 1000^4} = 1,06.$$

Робимо висновок, що потужність випромінювання збільшиться ($P_2 > P_1$).

23.4. Дві порожнини з малими отворами однакових діаметрів, що дорівнюють $D = 1$ см, мають абсолютно відбивальні зовнішні поверхні. Отвори розташовані один напроти одного, а відстань між ними $l = 10$ см. В одній порожнині підтримується температура $T = 1700$ К. Визначити температуру, що встановиться в іншій порожнині.

$D = 10^{-2}$ м,
$l = 0,1$ м,
$T_1 = 1700$ К
$T_2 - ?$

На рис. 23.1 графічно показана досліджувана система в розрізі. Друга порожнина (із температурою T_2) буде нагріватися за рахунок того, що перша порожнина (нагріта до температури T_1) випромінює. В разі, коли відстань між порожнинами дуже мала і температура першої порожнини T_1 велика, температура T_2 може істотно відрізнятися від температури навколишнього середовища. Отже, визначимо цю температуру. Перша порожнина випромінює потужність P_1:

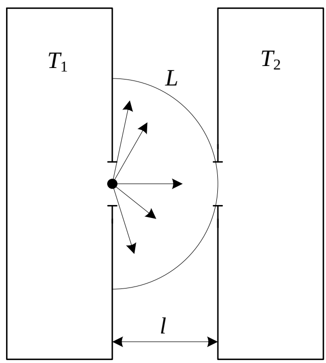


Рисунок 23.1

$$P_1 = R_1 S_1 = \sigma T_1^4 S_1,$$

де площу S_1 знайдемо як площу отвору порожнини (порожнина випромінює тільки з отвору):

$$S_1 = \frac{\pi D^2}{4},$$

звідки формула для знаходження потужності

$$P_1 = \sigma T_1^4 \frac{\pi D^2}{4}.$$

Але не вся ця потужність потраплятиме в отвір іншої порожнини. Будемо вважати, що потужність P_1 випромінюється у всіх напрямах рівномірно. Але вона випромінюватиметься лише в правий бік від отвору в порожнині, отже, фронт випромінювання – це напівсфера (на рисунку в розрізі показана напівколом). У момент, коли потужність P_1 потрапляє до другого отвору, радіус цієї напівсфери – це відстань між порожнинами l. Отже, вся поверхня цієї напівсфери

$$L = \frac{4\pi l^2}{2} = 2\pi l^2.$$

Знайдена потужність P_1 рівномірно розподілена на поверхні цієї напівсфери, але в другу порожнину потрапляє лише та частина потужності P_1, що знаходиться на частині напівсфери, площа якої дорівнює площі другого отвору:

$$S_2 = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Нехай друга порожнина отримує потужність P_2. Отже, можна скласти пропорцію:

$$P_1 \to 2\pi l^2,$$

$$P_2 \to \frac{\pi D^2}{4}.$$

Звідки отримуємо

$$P_2 = P_1 \frac{\pi D^2}{4(2\pi l^2)}; \quad P_2 = P_1 \frac{D^2}{8l^2}.$$

За формулою Стефана – Больцмана (23.1) ми також можемо записати потужність P_2', що розсіюється другою порожниною:

$$P_2' = \sigma T_2^4 \frac{\pi D^2}{4},$$

де використовується енергетична світимість другої порожнини та площа її отвору. Коли встановлюється стаціонарний стан і температура другої порожнини T_2 не змінюється з часом, друга порожнина розсіює потужність P_2', що дорівнює потужності P_2, що входить до неї. Отже, прирівняємо P_2 до P_2':

$$P_1 \frac{D^2}{8l^2} = \sigma T_2^4 \frac{\pi D^2}{4},$$

звідки після скорочення загальних частин отримаємо

$$\frac{P_1}{2l^2} = \sigma T_2^4 \pi,$$

або з урахуванням отриманого раніше виразу для P_1

$$\sigma T_1^4 \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{2l^2} = \sigma T_2^4 \pi; \quad T_1^4 \frac{D^2}{8l^2} = T_2^4.$$

Для остаточного визначення T_2 необхідно взяти корінь четвертої степені з отриманого рівняння:

$$T_2 = T_1 \sqrt[4]{\frac{D^2}{8l^2}}.$$

Підставимо відомі значення:

$$T_2 = 1700 \sqrt[4]{\frac{10^{-4}}{8 \cdot 0,01}} = 319,65 \text{ (К)}.$$

Отримана температура близька до кімнатної, але вона швидко збільшується зі зростанням діаметра D і зі зменшенням відстані між поверхнями l.

23.5. Знайти сонячну сталу, вважаючи Солнце абсолютно чорним тілом із температурою поверхні $T = 5800$ К. Радіус Сонця $r = 6,95 \cdot 10^8$ м, відстань від Землі до Сонця $l = 1,5 \cdot 10^{11}$ м.

$T = 5800$ К, $r = 6,95 \cdot 10^8$ м, $l = 1,5 \cdot 10^{11}$ м, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
P_2–?

Почнемо з означення. Сонячна стала – це сумарний потік сонячного випромінювання, що проходить за одиницю часу через одиницю площі, що розташована перпендикулярно до потоку на відстані однієї астрономічної одиниці від Сонця зовні земної атмосфери. За 1 астрономічну одиницю беруть відстань від Землі до Сонця. Тобто, за умовою задачі потрібно знайти потужність P_2, що потрапляє на 1 квадратний метр Землі від Сонця.

Сонце буде випромінювати потужність, що дорівнює добутку його енергетичної світимості та площі його поверхні. Отже, з урахуванням формули (23.1) отримаємо

$$P_1 = RS = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2.$$

Площа сфери, по якій рівномірно розподіляється потужність на відстані до Землі (див. попередню задачу):

$$L = 4\pi l^2.$$

Як і в попередній задачі, запишемо пропорцію (враховуючи, що потужність від Сонця P_2 потрапляє на 1 м^2 Землі):

$$P_1 \to 4\pi l^2,$$

$$P_2 \to 1.$$

Звідки виразимо P_2:

$$P_2 = P_1 \frac{1}{4\pi l^2}.$$

Зараз підставимо раніше знайдену потужність P_1 та виконаємо відповідне скорочення:

$$P_2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2 \frac{1}{4\pi l^2} = \frac{\sigma T^4 r^2}{l^2}.$$

Знайдемо числове значення:

$$P_2 = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4 \cdot \left(6,95 \cdot 10^8\right)^2}{(1,5 \cdot 10^{11})^2} = 1377,47 \text{ (Вт)}.$$

23.6. Використовуючи умову попередньої задачі, визначити енергію та масу Сонця, які воно втрачає кожної секунди за рахунок випромінювання.

$T = 5800$ К,
$r = 6,95 \cdot 10^8$ м,
$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4),
$t = 1$ с,
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
E, m–?

Потужність, що випромінюється Сонцем (енергія за 1 с):

$$P = RS = \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2.$$

Похідна від енергії – це потужність, або енергія, що втрачається Сонцем за одиницю часу (за 1 с у системі СІ):

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \equiv P.$$

Тобто шукана енергія E – це потужність P. Знайдемо цю потужність:

$$P = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4 \cdot 4 \cdot 3,14159 \cdot \left(6,95 \cdot 10^8\right)^2 = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ (Вт)}.$$

За умовою задачі також необхідно знайти масу, що втрачає Сонце щосекунди. Для зв'язку енергії та маси будемо використовувати формулу Айнштайна:

$$E = mc^2.$$

Із цієї формули можна записати:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}c^2; \quad P = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}c^2; \quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{c^2}.$$

Розрахуємо числове значення:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{3,9 \cdot 10^{26}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4,33 \cdot 10^9 \ \left(\frac{\text{кг}}{\text{с}}\right).$$

Ми отримали, що Сонце за рахунок випромінювання втрачає кожної секунди $4,33 \cdot 10^9$ кг своєї маси, або це дорівнюватиме $4,33 \cdot 10^6$ тон.

23.7. Знайти зв'язок між відносною зміною температури випромінювального сірого тіла ($\mathrm{d}T/T$) та відповідною відносною зміною його енергетичної світимості ($\mathrm{d}R/R$). При цьому враховувати, що $\mathrm{d}T \ll T$.

$\mathrm{d}T \ll T$
$(\mathrm{d}T/T)(\mathrm{d}R/R)$–?

За умовою задачі потрібно знайти одну величину як функцію іншої. По-перше, запишемо енергетичну світимість сірого тіла (23.2):

$$R = \alpha\sigma T^4.$$

Якщо ми збільшимо T на величину $\mathrm{d}T$, світимість R збільшиться на величину $\mathrm{d}R$:

$$R + \mathrm{d}R = \alpha\sigma(T + \mathrm{d}T)^4.$$

Поділимо другу рівність на першу:

$$\frac{R + \mathrm{d}R}{R} = \frac{\alpha\sigma(T + \mathrm{d}T)^4}{\alpha\sigma T^4}; \quad 1 + \frac{\mathrm{d}R}{R} = \frac{(T + \mathrm{d}T)^4}{T^4};$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{R} = \left(\frac{T + \mathrm{d}T}{T}\right)^4 - 1; \quad \frac{\mathrm{d}R}{R} = \left(1 + \frac{\mathrm{d}T}{T}\right)^4 - 1.$$

За умовою задачі $\mathrm{d}T \ll T$, отже ми можемо використовувати формулу для наближеного розрахунку (при $\alpha \ll 1$):

$$(1 + \alpha)^x \approx 1 + \alpha x.$$

Отримуємо

$$\frac{\mathrm{d}R}{R} \approx 1 + 4\frac{\mathrm{d}T}{T} - 1; \quad \frac{\mathrm{d}R}{R} \approx 4\frac{\mathrm{d}T}{T}.$$

Цей зв'язок і є шуканою відповіддю задачі.

23.8. Визначити силу струму, що проходить по вольфрамовому провіднику діаметром $d = 0,8$ мм, температура якого у вакуумі підтримується сталою і дорівнює $t = 2800$ °C. Поверхню провідника вважати сірою з коефіцієнтом поглинання $\alpha = 0,343$. Питомий опір провідника при цій температурі $\rho = 0,92 \cdot 10^{-4}$ Ом·см. Температура навколишнього середовища $t_0 = 17\,^{\circ}$С.

$d = 8 \cdot 10^{-4}$ м, $T = 3073$ К, $\alpha = 0,343$, $\rho = 9,2 \cdot 10^{-7}$ Ом·м, $T_0 = 290$ К, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
I–?

Потужність постійного струму визначається за формулою (14.4):

$$P = I^2 R,$$

де I – сила струму, R – опір провідника. Опір R, у свою чергу, залежить від природи провідника та його геометричних розмірів (13.7):

$$R = \rho \frac{l}{S_{\text{пер}}},$$

де l – довжина провідника, а $S_{\text{пер}}$ – площа його перерізу, яку можна знайти як

$$S_{\text{пер}} = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Таким чином, потужність струму дорівнює

$$P = I^2 \rho \frac{4l}{\pi d^2}.$$

У той самий час потужність, що підводиться до провідника, може бути розрахована як різниця потужності, яка випромінюється, $P_{\text{вип}}$ та потужності, що поглинається, $P_{\text{погл}}$:

$$P = P_{\text{вип}} - P_{\text{погл}}.$$

Потужність, що випромінюється, залежить від температури провідника:

$$P_{\text{вип}} = \alpha \sigma T^4 S,$$

де площа поверхні провідника S може бути знайдена як площа циліндра:

$$S = \pi l d.$$

Потужність, що поглинається, може бути знайдена за аналогічною формулою:

$$P_{\text{погл}} = \alpha \sigma T_0^4 S.$$

Тоді потужність, що підводиться:

$$P = P_{\text{вип}} - P_{\text{погл}} = \alpha \sigma (T^4 - T_0^4) \pi l d.$$

Прирівняємо цю потужність до знайденої за законом Джоуля-Ленца:

$$I^2\rho\frac{4l}{\pi d^2} = \alpha\sigma(T^4 - T_0^4)\pi l d.$$

Із цього виразу отримаємо розрахункову формулу для сили струму:

$$I = \sqrt{\frac{\pi^2\alpha\sigma(T^4 - T_0^4)d^3}{4\rho}}.$$

Проведемо відповідні розрахунки й отримаємо значення:

$$I = \sqrt{\frac{3,14159^2\cdot 0,343\cdot 5,67\cdot 10^{-8}(3073^4 - 290^4)\cdot(8\cdot 10^{-4})^3}{4\cdot 9,2\cdot 10^{-7}}} = 48,8\ (\text{А}).$$

Задачі для самостійного розв'язування

23.9. Спектральна густина енергетичної світимості чорного тіла в деякому інтервалі довжин хвиль дорівнює $\varepsilon_\lambda = 3\cdot 10^4$ Вт/(м^2·нм). Визначити відповідну спектральну густину енергетичної світимості сірого тіла, що має таку саму температуру та коефіцієнт поглинання $\alpha = 0,8$.

23.10. При якій температурі енергетична світимість сірого тіла становить $R = 500$ Вт/м^2? Коефіцієнт поглинання $\alpha = 0,5$.

23.11. Знайти температуру печі, якщо відомо, що з її отвору площею $S = 6$ см^2 випромінюється 7 кал за 1 с. Вважати випромінювання близьким до випромінювання чорного тіла. При розв'язуванні задачі врахувати, що 1 калорія відповідає 4,186 Дж.

23.12. Знайти енергетичну світимість тіла людини при температурі 36 °C, вважаючи його за сіре тіло з коефіцієнтом поглинання $\alpha = 0,9$.

23.13. Як пояснити, що залізо при температурі 800 °C світиться, а кварц при такій самій температурі не світиться?

23.14. Обчислити енергію, що втрачається людиною кожної секунди при теплообміні із зовнішнім середовищем за допомогою випромінювання. Розглянути два випадки: а) роздягнена людина; б) людина, одягнена у костюм із вовняної тканини. Взяти коефіцієнт поглинання шкіри людини $\alpha_1 = 0,9$, а вовняної тканини $\alpha_2 = 0,76$. Температури поверхні шкіри $t_1 = 30$ °C, поверхні тканини $t_2 = 20$ °C, навколишнього повітря $t_3 = 18\,^\circ$C. Площа поверхні, через яку відбувається теплообмін енергією з навколишнім повітрям, вважати $S = 1,2$ м^2.

23.15. Температура чорного тіла $T = 1000$ K. Визначити, на скільки відсотків зміниться його енергетична світимість при підвищенні температури на $\Delta T = 1$ K.

23.16. У медицині для діагностики ряду захворювань набув поширення метод, що має назву термографії. Він базується на реєстрації відмінностей теплового випромінювання здорових та хворих органів, що обумовлено невеликою відмінністю їх температур. Обчислити, у скільки разів відрізняються термодинамічні температури та енергетичні світимості ділянок поверхні тіла людини, що мають температури $30,5\,^\circ$C та $30,0\,^\circ$C відповідно.

23.17. Визначити, на яку довжину хвилі припадає максимум спектральної густини енергетичної світимості таких джерел теплового випромінювання: а) тіло людини з температурою поверхні шкіри $t = 30\ ^\circ$C; б) спіраль електричної лампочки з температурою $T = 2000$ K; в) поверхня Сонця з температурою $T = 5800$ K; г) атомна бомба, що має в момент зриву температуру $T \approx 10^7$ K. При розрахунках вважати, що всі тіла випромінюють як абсолютно чорні.

23.18. Унаслідок зміни температури сірого тіла максимум спектральної густини енергетичної світимості змістився з $\lambda_1 = 2400$ нм до $\lambda_2 = 800$ нм. У скільки разів зміниться енергетична світимість тіла?

23.19. З формули Планка (23.6) отримати такі залежності: а) між зміною температури тіла $\mathrm{d}T$ та зміною довжини хвилі $\mathrm{d}\lambda_{\max}$, якій відповідає максимум спектральної густини енергетичної світимості; б) між відносною зміною температури тіла $(\mathrm{d}T/T)$ та відносною зміною довжини хвилі, що відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світимості $(\mathrm{d}\lambda_{\max}/\lambda_{\max})$. При розрахунках в обох випадках вважати, що $\mathrm{d}T \ll T$.

23.20. Знайти, на скільки зміститься максимум спектральної густини енергетичної світимості при зміні температури поверхні тіла людини від $t_1 = 30\,^\circ$C до $t_2 = 31\,^\circ$C. Тіло людини вважати сірим.

23.21. Показати, як можна з формули Планка (23.6) отримати формулу для залежності максимальної спектральної густини енергетичної світимості від температури (23.7).

23.22. У скільки разів потрібно зменшити температуру чорного тіла, щоб його енергетична світимість R стала слабшою в 16 разів?

23.23. Температура внутрішньої поверхні печі при відкритому оглядовому віконці з площею 30 см^2, становить 1300 К. Вважаючи, що отвір печі випромінює як чорне тіло, визначити, яка частина потужності розсіється стінками, якщо потужність, яку споживає піч, становить 1,5 кВт.

23.24. Визначити температуру тіла, при якій воно випромінює енергії в 10 разів більше, ніж поглинає при температурі зовнішнього середовища $t = 27$ °C.

23.25. У скільки разів потрібно зменшити температуру чорного тіла, щоб його енергетична світимість R зросла удвічі?

23.26. Знайти температуру печі, якщо відомо, що випромінювання з її отвору площею $S = 6,1$ см^2 має потужність $P = 34,6$ Вт. Випромінювання вважати близьким до випромінювання чорного тіла.

23.27. Яку енергетичну світимість має отверділий після плавлення свинець? Температура плавлення свинцю – 327 °C. Відношення енергетичних світимостей свинцю та абсолютно чорного тіла при цій температурі дорівнює $0,6$.

23.28. Потужність випромінювання абсолютно чорного тіла $P = 10$ кВт. Знайти площу S поверхні тіла, якщо максимум спектральної густини його енергетичної світимості розташований на довжині хвилі $\lambda_{\max} = 700$ нм.

23.29. Вважаючи, що теплові втрати викликані лише випромінюванням, знайти, яку потужність необхідно підводити до мідної кульки діаметром $d = 0,2$ см, щоб при температурі навколишнього повітря $t_0 = -13$ °C підтримувати її температуру такою, що дорівнює 17 °C. Коефіцієнт теплового поглинання міді $\alpha = 0,6$.

23.30. Діаметр вольфрамової спіралі в електричній лампочці $d = 0,3$ мм, довжина спіралі $l = 5$ см. При ввімкнені лампочки у напругу $U = 127$ В, через неї проходить струм $I = 0,31$ А. Знайти температуру T спіралі. Вважати, що при встановленні стаціонарного стану все тепло, що виділяється в спіралі, витрачається на випромінювання. Відношення енергетичних світимостей вольфраму та абсолютно чорного тіла при цій температурі $\alpha = 0,31$.

23.31. Випромінювання Сонця за своїм спектральним складом близьке до випромінювання абсолютно чорного тіла, для якого максимум випромінювання відповідає довжині хвилі $\lambda = 0,48$ мкм. Знайти масу, що втрачає Сонце кожної секунди за рахунок цього випромінювання. Оцінити час, за який маса Сонця зменшиться на $1\,\%$.

23.32. Яку енергетичну світимість має абсолютно чорне тіло, якщо максимум спектральної густини його енергетичної світимості відповідає довжині хвилі 484 нм?

23.33. З поверхні сажі площею $S = 2\,\text{см}^2$ при температурі $T = 400$ К за час $t = 5$ хвилин випромінюється енергія $E = 83$ Дж. Знайти коефіцієнт теплового випромінювання α сажі.

23.34. Абсолютно чорне тіло має температуру $T_1 = 2900$ К. Унаслідок охолодження тіла довжина хвилі, якій відповідає максимум спектральної густини енергетичної світимості, змінилася на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До якої температури T_2 тіло було охолоджене?

23.35. Температура T поверхні зірки Сиріус становить 10 кК. Знайти потік енергії Φ, що випромінюється з поверхні цієї зірки площею $S = 1\,\text{км}^2$. Яка енергія буде втрачена через поверхню S за добу?

23.36. Потужність випромінювання розжареної металевої поверхні $P = 0,67$ кВт. Температура поверхні $T = 2500$ К, а її площа $S = 10\,\text{см}^2$. Яку потужність випромінювання P мала б ця поверхня, якщо вона була б абсолютно чорною? Знайти відношення k енергетичних світимостей цієї поверхні та абсолютно чорного тіла при цій температурі.

23.37. Знайти, на скільки зменшиться маса Сонця завдяки випромінюванню за рік. За який час τ маса Сонця зменшиться вдвічі? Температура поверхні Сонця $T = 5800$ К. Випромінювання Сонця вважати сталим.

24. Фотони. Фотоефект

Основні формули

- Енергія фотона

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (24.1)$$

де $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — стала Планка; ν — частота (Гц); $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — швидкість світла у вакуумі; λ — довжина хвилі (м).

- Маса фотона

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}. \qquad (24.2)$$

- Імпульс фотона

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (24.3)$$

- Формула Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2} = \lambda_c(1 - \cos\theta), \qquad (24.4)$$

де λ', λ — довжини хвиль розсіяного та падаючого випромінювання відповідно (м); $\lambda_c = h/(m_e c)$ — комптонівська довжина хвилі (при розсіюванні на електронах $\lambda_c = 2,426$ пм), $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг — маса спокою електрона; θ — кут розсіювання.

- Рівняння Айнштайна для зовнішнього фотоефекту:

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}, \qquad (24.5)$$

де $h\nu$ — енергія фотона (Дж); $mv^2/2$ — максимальна кінетична енергія електрона, що вилетів з металу (Дж); A — робота виходу з металу (Дж).

- Червона межа фотоефекту

$$\nu_0 = \frac{A}{h}. \tag{24.6}$$

Приклади розв'язання задач

24.1. Підрахувати кількість фотонів зеленого світла ($\lambda = 550$ нм), енергія яких дорівнює $E = 1$ Дж.

$\lambda = 0,55 \cdot 10^{-6}$ м,
$E = 1$ Дж,
$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с,
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
N–?

Загальну енергію фотонів знаходимо за формулою (24.1):

$$E = N\frac{hc}{\lambda},$$

де N – їх кількість. З останньої формули знайдемо кількість фотонів:

$$N = \frac{E\lambda}{hc}.$$

Після підстановки значень отримуємо

$$N = \frac{1 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2,77 \cdot 10^{18}.$$

24.2. Яку енергію повинен мати фотон, щоб його маса дорівнювала масі спокою електрона?

$m_ф = m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг,
$q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл,
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
$\varepsilon_ф$–?

Енергію спокою електрона знаходимо за формулою

$$\varepsilon_e = m_e c^2.$$

Таким самим чином можна знайти енергію фотона:

$$\varepsilon_ф = m_ф c^2.$$

За умовою задачі $m_ф = m_e$. Отже, енергію фотона шукатимемо зі співвідношення:

$$\varepsilon_ф = m_e c^2.$$

Виконаємо розрахунки:

$$\varepsilon_ф = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ (Дж)}.$$

24. Фотони. Фотоефект

Енергія фотона має завжди дуже мале значення. Тому для зручності використовують одиниці електрон-вольти (еВ). Щоб отримати енергію в еВ, потрібно енергію, виражену в джоулях, поділити на заряд електрона. Отже:

$$\varepsilon_{\text{ф}} = \frac{8,2 \cdot 10^{-14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,51 \cdot 10^{6}\ (\text{еВ}) = 0,51\ (\text{МеВ}).$$

Таким чином, фотон повинен мати енергію $8,2 \cdot 10^{-14}$ (Дж), або $0,51$ (МеВ).

24.3. При якій температурі середня енергія поступального руху молекули дорівнює енергії фотона червоного випромінювання ($\lambda = 700$ нм)?

$\lambda = 0,7 \cdot 10^{-6}$ м,
$E = \varepsilon_{\text{ф}}$,
$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с,
$c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с,
$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
T–?

Середня кінетична енергія поступального руху молекули виражається формулою (див. вираз (8.11) на с. 113 першої частини посібника):

$$E = \frac{3}{2}kT,$$

де k – стала Больцмана. За умовою ця енергія дорівнює енергії фотона, яку можна знайти за формулою (24.1):

$$\varepsilon_{\text{ф}} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Прирівнявши $\varepsilon_{\text{ф}}$ до E, отримаємо

$$\frac{3}{2}kT = \frac{hc}{\lambda}, \quad T = \frac{2hc}{3\lambda k}.$$

Розрахуємо числове значення температури:

$$T = \frac{2 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} = 14000\ (\text{К}).$$

24.4. Джерело монохроматичного випромінювання з довжиною хвилі λ має потужність P. Знайти число фотонів N, що випромінює це джерело кожної секунди.

λ, P, h, c
$N-?$

Потужність – це енергія, що випромінюється за одиницю часу:

$$P = \frac{\varepsilon}{t}.$$

Загальну енергію можна подати як добуток енергії одного фотона $\varepsilon_ф$ на число фотонів N:

$$\varepsilon = \varepsilon_ф N.$$

Використовуючи формулу для знаходження енергії фотона $\varepsilon_ф$ (24.1), отримаємо

$$P = \frac{Nhc}{\lambda t},$$

звідки знайдемо кількість фотонів:

$$N = \frac{P\lambda t}{hc},$$

або за одиницю часу:

$$N = \frac{P\lambda}{hc}.$$

24.5. Вузький пучок монохроматичного рентгенівського випромінювання падає на розсіювальну речовину. Виміряні довжини хвиль випромінювання розсіяного під кутами $\theta_1 = 60^\circ$ і $\theta_2 = 120^\circ$ відрізняються в $1,5$ раза. Визначити довжину хвилі падаючого випромінювання, вважаючи, що розсіювання відбувається на вільних електронах.

$\theta_1 = 60^\circ$, $\theta_2 = 120^\circ$, $\lambda_2'/\lambda_1' = 1,5$, $\lambda_c = 2,426 \cdot 10^{-12}$ м
$\lambda-?$

Запишемо формулу Комптона (24.4) для розсіювання рентгенівського випромінювання під кутами θ_1 і θ_2:

$$\lambda_1' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta_1),$$

$$\lambda_2' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta_2).$$

Поділимо друге рівняння на перше та, враховуючи умову задачі, отримаємо

$$\frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} = 1,5 = \frac{\lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta_2)}{\lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta_1)}.$$

Звідки

$$\lambda + \lambda_c - \lambda_c \cos\theta_2 = 1,5\lambda + 1,5\lambda_c - 1,5\lambda_c \cos\theta_1.$$

Виразимо із останнього співвідношення шукану довжину хвилі падаючого випромінювання:

$$\lambda = \lambda_c(3\cos\theta_1 - 2\cos\theta_2 - 1).$$

Або після підстановки значень

$$\lambda = 2,426 \cdot 10^{-12} \cdot (3\cos 60^\circ - 2\cos 120^\circ - 1) =$$

$$= 2,426 \cdot 10^{-12} \cdot (3 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 - 1) = 3,639 \cdot 10^{-12}\ (\text{м}) \approx 3,64\ (\text{пм}).$$

24.6. Фотон з енергією $\varepsilon = 0,25$ МеВ розсіявся на вільному електроні, що до розсіювання мав нульову швидкість. Знайти кінетичну енергію електрона віддачі, якщо довжина хвилі розсіяного фотона змінилася на 25 %.

$\varepsilon = 0,25$ МеВ,
$\lambda' = 1,25\lambda$
E_e–?

Із закону збереження енергії випливає, що кінетична енергія електрона віддачі дорівнює різниці між енергіями падаючого ε та розсіяного фотонів ε':

$$E_e = \varepsilon - \varepsilon'.$$

Енергію падаючого та розсіяного фотонів визначатимемо за формулою (24.1):

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}; \quad \varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'}.$$

Звідки випливає, що

$$\varepsilon' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{1,25\lambda} = \frac{\varepsilon}{1,25}.$$

Отже, отримуємо

$$E_e = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1,25} = \frac{\varepsilon}{5}.$$

Проведемо розрахунки:

$$E_e = \frac{0,25}{5} = 0,05\ (\text{МеВ}).$$

24.7. Визначити червону межу фотоефекту для цинку та максимальну швидкість фотоелектронів, що вириваються з поверхні цинку випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda = 200$ нм. Робота виходу для цинку $A = 3,74$ еВ.

$\lambda = 0,2 \cdot 10^{-6}$ м, A $= 3,74$ еВ $= 5,984 \cdot 10^{-19}$ Дж, $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с, $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
$v_{\max}, \lambda_0$—?

Використаємо рівняння Айнштайна для фотоефекту (24.5):

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}.$$

Червона межа фотоефекту — це довжина хвилі, при якій починається фотоефект, тобто коли швидкість фотоелектронів $v = 0$:

$$h\nu_0 = A; \quad \nu_0 = \frac{A}{h}.$$

Використовуючи зв'язок між частотою та довжиною хвилі ($\lambda = c/\nu$), визначимо відповідну довжину хвилі:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A}.$$

Знайдемо числове значення:

$$\lambda_0 = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{5.984 \cdot 10^{-19}} = 3,322 \cdot 10^{-7}\ (\text{м}) \approx 0,332\ (\text{мкм}) = 332\ (\text{нм}).$$

Тепер знайдемо максимальну швидкість фотоелектронів, використовуючи першу формулу:

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - A; \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A; \quad mv^2 = \frac{2hc}{\lambda} - 2A;$$

$$v^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{2hc}{\lambda} - 2A\right); \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}.$$

Таким чином, ми знайшли вираз для швидкості. Проведемо розрахунки:

$$v = \sqrt{\frac{2}{9,11 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{0,2 \cdot 10^{-6}} - 5,984 \cdot 10^{-19}\right)} =$$

$$= 9,3 \cdot 10^{5}\ (\text{м/с}).$$

24.8. Калій освітлюється монохроматичним світлом із довжиною хвилі 400 нм. Визначити найменшу затримувальну напругу, при якій фотострум зупиниться. Робота виходу електронів із калію становить $2,2$ еВ.

24. Фотони. Фотоефект

$\lambda = 0,4 \cdot 10^{-6}$ м,
А $= 2,2$ еВ $= 3,52 \cdot 10^{-19}$ Дж,
$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с,
$c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с,
$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
U_0–?

Запишемо рівняння Айнштайна для зовнішнього фотоефекту (24.5):

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}.$$

Під час руху в електричному полі електрон набуває енергії, що дорівнює

$$E = eU_0.$$

Оскільки за умовою задачі при значенні U_0 фотострум зупиняється, прирівняємо енергію електрона в електричному полі до кінетичної:

$$\frac{mv^2}{2} = eU_0,$$

тобто спостерігається співвідношення

$$h\nu = A + eU_0.$$

Використовуючи зв'язок між частотою та довжиною хвилі ($\lambda = c/\nu$), отримаємо

$$h\frac{c}{\lambda} = A + eU_0,$$

звідки вираз для знаходження величини затримувальної напруги набуває вигляду

$$U_0 = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right).$$

Розрахуємо числове значення:

$$U_0 = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}}\left(\frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{0,4 \cdot 10^{-6}} - 3,52 \cdot 10^{-19}\right) = 0,91 \text{ (В)}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

24.9. Знайти масу, енергію та імпульс фотонів: а) червоного ($\lambda_1 = 700$ нм); б) фіолетового ($\lambda_2 = 400$ нм); в) рентгенівського ($\lambda_3 = 5 \cdot 10^{-10}$ м) випромінювання.

24.10. Яка кількість фотонів світла з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм відповідає енергії $E = 10$ еВ?

24.11. Визначити довжину хвилі фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу електрона, що має швидкість $v = 10^4$ км/с.

24.12. Електрон рухається зі швидкістю $v = 10^8$ см/с. При гальмуванні в електричному полі атома він зупиняється та випромінює фотон. Знайти довжину хвилі світла, що випромінюється.

24.13. Знайти, з якою швидкістю повинен рухатись електрон, щоб його імпульс дорівнював імпульсу фотона з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм.

24.14. Показати за допомогою законів збереження енергії та імпульсу, що вільний електрон не може поглинути фотон.

24.15. Знайти масу фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу молекули водню при температурі $t = 20$ °С. Швидкість молекули дорівнює середньоквадратичній швидкості при цій температурі.

24.16. Точкове джерело світла потужністю P випромінює світло довжиною хвилі λ. Скільки фотонів N проходить за час t крізь маленький переріз площею S, розташований перпендикулярно до падаючих променів на відстані r від джерела?

24.17. Знайти абсолютний показник заломлення середовища, в якому світло з енергією фотона $\varepsilon = 4,4 \cdot 10^{-19}$ Дж має довжину хвилі $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$ см.

24.18. Дифракційна гратка з періодом $d = 3$ мкм розташована нормально на шляху монохроматичного світлового потоку. При цьому кути дифракції, що відповідають двом сусіднім максимумам, становлять $\varphi_1 = 23°35'$ та $\varphi_2 = 36°52'$. Визначити енергію фотонів цього світлового потоку.

24.19. Визначити потужність монохроматичного джерела світла, якщо за час $t = 1$ хв він віддає $N = 2 \cdot 10^{21}$ фотонів. Спектр випромінювання має довжину хвилі $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м.

24.20. Чутливість сітківки ока до жовтого світла з довжиною хвилі $\lambda = 600$ нм становить $P = 1,7 \cdot 10^{-18}$ Вт. Скільки фотонів повинно падати кожної секунди на сітківку, щоб світло було сприйнято організмом?

24.21. Під якою напругою функціонує рентгенівська трубка, якщо найбільш жорсткі промені в рентгенівському спектрі цієї трубки мають частоту $\nu = 10^{18}$ Гц?

24.22. Воду, що має об'єм $V = 0,2$ мл, нагрівають світлом довжиною хвилі $\lambda = 0,75$ мкм. Кожної секунди вода поглинає $N = 10^{10}$ фотонів. Знайти швидкість нагрівання води, вважаючи, що вся отримана енергія йде на нагрівання.

24.23. Визначити максимальну зміну довжини хвилі при комптонівському розсіюванні: а) на вільних електронах; б) на вільних протонах.

24.24. Рентгенівські промені довжиною хвилі $\lambda = 70,8$ пм комптонівськи розсіюються на парафіні. Знайти довжину хвилі λ' рентгенівських променів, розсіяних у напрямі $\theta = \pi$.

24.25. Знайти довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання, якщо при комптонівському розсіюванні цього випромінювання графітом під кутом $\theta = 60°$ довжина хвилі розсіяного випромінювання дорівнювала $\lambda' = 25,4$ пм.

24.26. Визначити частку енергії фотона при ефекті Комптона, що припадає на електрон віддачі, якщо фотон розсіюється під кутом $\theta = 180°$. Енергія ε фотона до розсіювання становить $0,255$ МеВ.

24.27. Фотон з енергією, що в $\eta = 2$ рази перевищує енергію спокою електрона, зіткнувся з електроном, що знаходився у спокої. Знайти радіус кривизни траєкторії електрона віддачі в магнітному полі з індукцією $B = 0,12$ Тл. Вважати, що електрон віддачі рухається перпендикулярно до напряму поля.

24.28. Фотон ($\lambda = 1$ пм) розсіявся на вільному електроні під кутом $\theta = 90°$. Знайти, яку частку своєї енергії фотон передав електрону.

24.29. Чи можна застосовувати барій для використання у фотоелементі при опроміненні видимим світлом (довжини хвиль від 380 нм до 780 нм), якщо робота виходу для барію $A = 2,5$ еВ?

24.30. Визначити (в електронвольтах) роботу виходу електрона із рубідію, якщо червона межа фотоефекту для нього $\lambda_0 = 0,81$ мкм.

24.31. Робота виходу електрона з літію $A = 2,5$ еВ. Чи буде спостерігатися фотоефект при освітленні літію монохроматичним світлом із довжиною хвилі $\lambda = 50$ нм?

24.32. Червона межа фотоефекту для вольфраму $\lambda_0 = 230$ нм. Визначити кінетичну енергію електронів, що вириваються з вольфраму ультрафіолетовим світлом довжиною хвилі $\lambda = 150$ нм.

24.33. Червона межа фотоефекту для калію $\lambda = 620$ нм. Чому дорівнює мінімальна енергія фотона, що викликає фотоефект?

24.34. Знайти червону межу фотоефекту для літію, якщо робота виходу $A = 2,4$ еВ.

24.35. Визначити частоту світла, що вириває з поверхні металу електрони, які повністю затримуються різницею потенціалів $U = 5$ В. Червона межа фотоефекту $\nu_0 = 10^{15}$ Гц. Знайти роботу виходу електрона із цього металу.

24.36. Плоский срібний електрод освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 83$ нм. Визначити, на яку максимальну відстань від поверхні електрода може віддалитися фотоелектрон, якщо ззовні електрода є затримувальне електричне поле із напруженістю $E = 10$ В/см. Червона межа фотоефекту для срібла $\lambda_0 = 264$ нм.

24.37. Фотони енергією $\varepsilon = 5$ еВ виривають фотоелектрони з металу з роботою виходу $A = 4,7$ еВ. Визначити максимальний імпульс $p_{\max}$, що передається поверхні цього металу при виході електрона.

24.38. Плоска поверхня освітлюється світлом із довжиною хвилі $\lambda = 180$ нм. Червона межа фотоефекту для цієї речовини $\lambda = 360$ нм. Безпосередньо біля поверхні створене однорідне магнітне поле з індукцією $B = 1,0$ мТл. Лінії індукції магнітного поля паралельні поверхні. На яку максимальну відстань від поверхні зможуть віддалитися фотоелектрони, якщо вони вилітають перпендикулярно до поверхні?

24.39. Якщо по черзі освітлювати поверхню металу випромінюванням із довжинами хвиль $\lambda_1 = 350$ нм і $\lambda_2 = 640$ нм, то максимальні швидкості фотоелектронів будуть відрізнятися в $n = 2$ рази. Визначити роботу виходу із цього металу.

25. Закон радіоактивного розпаду. Активність. Радіоактивна рівновага

Основні формули

- Закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}, \qquad (25.1)$$

де N — кількість атомів у момент часу t; N_0 — кількість атомів у початковий момент часу $t = 0$; e — основа натурального логарифма; λ — стала радіоактивного розпаду (1/с); $T_{1/2}$ — період напіврозпаду (с).

- Кількість атомів, що розпалися за час t:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \qquad (25.2)$$

- Якщо проміжок часу $\Delta t \ll T_{1/2}$, для знаходження кількості атомів, що розпалися, справедлива формула

$$\Delta N \approx \lambda N_0 \Delta t. \qquad (25.3)$$

- Період напіврозпаду, або проміжок часу, за який початкова кількість атомів зменшується вдвічі:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}. \qquad (25.4)$$

- Середній час життя радіоактивного ядра τ — проміжок часу, за який кількість ядер, що не розпалися, зменшиться в e разів:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \qquad (25.5)$$

- Кількість атомів, що містяться в радіоактивному ізотопі:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A, \qquad (25.6)$$

де m — маса ізотопа (кг); μ — молярна маса ізотопа (кг/моль); $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — стала Авогадро.

- Активність нукліда в радіоактивному джерелі:

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N, \tag{25.7}$$

$$A = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}. \tag{25.8}$$

- Активність ізотопа в початковий момент часу ($t = 0$)

$$A_0 = \lambda N_0. \tag{25.9}$$

- Залежність активності від часу

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = A_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}. \tag{25.10}$$

- Масова активність радіоактивного джерела

$$a = \frac{A}{m}, \tag{25.11}$$

  де m – маса джерела (кг).

- Якщо є суміш ряду радіоактивних ізотопів, які утворюються один із одного, і якщо стала розпаду λ першого члена ряду набагато менша, ніж сталі всіх останніх членів ряду, в суміші встановлюється стан радіоактивної рівноваги, в якому активності всіх членів ряду рівні між собою:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \ldots = \lambda_k N_k, \tag{25.12}$$

  де k – кількість різних ізотопів.

Приклади розв'язання задач

25.1. Визначити початкову активність A_0 радіоактивного магнію $^{27}\mathrm{Mg}$ масою $m_0 = 0,2$ мкг, а також активність A через час $t = 1$ год. Вважати, що всі атоми радіоактивні.

25. Закон радіоактивного розпаду. Активність. Радіоактивна рівновага

$\mu = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль,
$m_0 = 0,2 \cdot 10^{-9}$ кг,
$N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$,
$T_{1/2} = 567,48$ с,
$t = 3600$ с
A_0, A–?

Початкова активність ізотопа визначається за формулою (25.9):

$$A_0 = \lambda N_0.$$

При розв'язанні задачі також врахуємо період напіврозпаду (25.4):

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

та через сталу Авогадро визначимо початкову кількість атомів:

$$N_0 = \frac{m_0}{\mu} N_A.$$

Поєднуючи ці формули, отримуємо початкову активність:

$$A_0 = \frac{m_0 N_A}{\mu T_{1/2}} \ln 2.$$

Виконаємо розрахунки:

$$A_0 = \frac{0,2 \cdot 10^{-9} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3} \cdot 567,48} \ln 2 = 0,545 \cdot 10^{13}\ (\text{Бк}) = 5,45\ (\text{ТБк}).$$

Активність ізотопа з часом зменшується за формулою (25.10):

$$A = A_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}.$$

Із цієї формули маємо

$$A = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}.$$

Зробимо підстановку значень:

$$A = \frac{0,545 \cdot 10^{13}}{2^{3600/567,48}} = 0,671 \cdot 10^{11}\ (\text{Бк}) = 67,1\ (\text{ГБк}).$$

25.2. При визначенні періоду напіврозпаду $T_{1/2}$ радіоактивного ізотопа з коротким часом життя, використовується лічильник імпульсів. За час $\Delta t = 1$ хв від початку спостереження (в момент $t = 0$) було нараховано $\Delta n_1 = 250$ імпульсів, а коли пройшов час $t = 1$ год, за такий самий проміжок часу Δt нарахували $\Delta n_2 = 92$ імпульси. Визначити сталу радіоактивного розпаду λ та період напіврозпаду $T_{1/2}$ ізотопа.

$\Delta t = 60$ с,
$\Delta n_1 = 250$,
$\Delta n_2 = 92$,
$t = 3600$ с
$\lambda, T_{1/2}$–?

Кількість імпульсів Δn, що реєструє лічильник за час Δt, – пропорційна числу атомів ΔN, що розпалися за цей час, відповідно до (25.2):

$$\Delta n_1 = k\Delta N_1 = kN_1(1 - \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t}),$$

де N_1 – кількість атомів у момент першого випромінювання, а також введено коефіцієнт пропорційності k, що залежить від типу приладу та його розташування щодо досліджуваної речовини. Аналогічна формула справедлива для повторного вимірювання:

$$\Delta n_2 = k\Delta N_2 = kN_2(1 - \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t}).$$

Тут ми вважаємо, що прилад не змінював свого положення, а N_2 – це кількість радіоактивних атомів у момент другого вимірювання. В цьому разі за умовою задачі $\Delta t = 60$ с для обох вимірювань, тобто це час вимірювання. Поділимо ці співвідношення:

$$\frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} = \frac{kN_2(1 - \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t})}{kN_1(1 - \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t})}; \quad \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Врахуємо вираз (25.1), за яким

$$N_2 = N_1 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

У результаті матимемо:

$$\frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_1 \mathrm{e}^{-\lambda t}}{N_1}; \quad \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

де t – час між першим та другим вимірюваннями (за умовою задачі це 1 година). Для того щоб виразити величину λ, останній вираз потрібно прологарифмувати:

$$-\lambda t = \ln \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}; \quad -\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}; \quad \lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2}.$$

Підставимо числові дані:

$$\lambda = \frac{1}{3600} \ln \frac{250}{92} = 0,278 \cdot 10^{-3} \ (\mathrm{с}^{-1}).$$

Використовуючи формулу (25.4), можна знайти період напіврозпаду:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}; \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{0.278 \cdot 10^{-3}} = 2496 \ (\mathrm{с}) = 41,6 \ (\mathrm{хв}).$$

25.3. Яка частина початкової кількості речовини розпадеться за один рік у радіоактивному ізотопі торію ^{228}Th?

$T_{1/2} = 7 \cdot 10^3$ років, $t = 1$ рік
$\Delta N/N_0$–?

Використаємо закон радіоактивного розпаду (25.1):

$$N = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}.$$

Шуканий вираз може бути поданий як

$$\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - 2^{-t/T_{1/2}} = 1 - \frac{1}{2^{t/T_{1/2}}}.$$

Оскільки степінь двійки – це безрозмірна величина, час і період напіврозпаду повинні виражатися в однакових одиницях (не обов'язково в секундах). Підставимо дані й отримаємо відповідь:

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - \frac{1}{2^{1/(7 \cdot 10^3)}} = 9,9 \cdot 10^{-5}.$$

25.4. За один рік початкова кількість радіоактивного ізотопа зменшилася втричі. У скільки разів вона зменшиться за два роки?

$t_1 = 1$ рік, $t_2 = 2$ роки, $N_0/N_1 = 3$
N_0/N_2–?

За умовою задачі $N_0/N_1 = 3$, отже, $N_0 = 3N_1$. Використаємо закон радіоактивного розпаду (25.1):

$$N_1 = 3N_1 \mathrm{e}^{-\lambda t_1}; \quad 1 = 3\mathrm{e}^{-\lambda t_1}; \quad -\lambda t_1 = \ln\frac{1}{3};$$

$$\lambda t_1 = \ln 3; \quad \lambda = \frac{\ln 3}{t_1}.$$

Будемо шукати необхідну величину:

$$\frac{N_0}{N_2} = \frac{N_0}{N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t_2}} = \mathrm{e}^{\lambda t_2} = \exp\left(\frac{\ln 3}{t_1} \cdot t_2\right) = \exp\left(\frac{t_2}{t_1}\ln 3\right) =$$

$$= \left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^{t_2/t_1} = 3^{t_2/t_1}.$$

У показнику степеня стоїть безрозмірна величина, отже, час можна виражати в будь-яких, але в однакових одиницях. При підстановці знайдемо час згідно з умовою в роках:

$$\frac{N_0}{N_2} = 3^{2/1} = 3^2 = 9.$$

Тобто, за два роки початкова кількість цієї речовини зменшиться в 9 разів.

25.5. Активність A препарату зменшилася в $k = 250$ разів. Скільком періодам напіврозпаду $T_{1/2}$ дорівнює проміжок часу, що при цьому пройшов?

$k = A_0/A = 250$
t–?

Використаємо означення (25.8) та (25.9):

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

При використанні умови задачі матимемо

$$\frac{A_0}{A} \equiv k = \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Прологарифмуємо цей вираз та знайдемо час:

$$\lambda t = \ln k; \quad t = \frac{\ln k}{\lambda}.$$

Із означення періоду напіврозпаду (25.4)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Із урахуванням цього матимемо час:

$$t = T_{1/2} \cdot \frac{\ln k}{\ln 2}.$$

Після підстановки отримуємо

$$t = T_{1/2} \cdot \frac{\ln 250}{\ln 2} = 7,966 \cdot T_{1/2}.$$

Отже, час що пройшов, виражений у частках періоду напіврозпаду $T_{1/2}$.

25.6. В урановій руді відношення числа ядер $^{238}\mathrm{U}$ до числа ядер $^{206}\mathrm{Pb}$ становить $\eta = 2,8$. Оцінити вік руди, вважаючи, що весь свинець $^{206}\mathrm{Pb}$ є кінцевим продуктом розпаду уранового ядра. Період напіврозпаду ядер урана $^{238}\mathrm{U}$ становить $4,5 \cdot 10^9$ років.

$\eta = 2,8$, $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ років
t–?

Нехай початкова кількість ядер урана дорівнює N_0. Використовуємо співвідношення (25.1):

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Кількість ядер, які є продуктом розпаду:

$$N' = N_0 - N = N_0 - N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = N_0(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}).$$

За умовою задачі $N/N' = \eta$, отже, матимемо:

$$\frac{1}{\eta} = \frac{N'}{N} = \frac{N_0(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})}{N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{\lambda t} - 1.$$

Виразимо час t:

$$\frac{1}{\eta} = \mathrm{e}^{\lambda t} - 1; \quad \mathrm{e}^{\lambda t} = \frac{1}{\eta} + 1; \quad \lambda t = \ln\left(1 + \frac{1}{\eta}\right); \quad t = \frac{\ln(1+\eta^{-1})}{\lambda}.$$

Визначимо сталу розпаду λ із формули (25.4)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

та підставимо у співвідношення для часу t:

$$t = \frac{\ln(1+\eta^{-1})}{\lambda} = T_{1/2} \cdot \frac{\ln(1+\eta^{-1})}{\ln 2}.$$

Розрахуємо відповідне значення:

$$t = 4,5 \cdot 10^9 \cdot \frac{\ln(1+2,8^{-1})}{\ln 2} = 1,98 \cdot 10^9 \text{ (років)}.$$

25.7. Знайти масу m_2 радону $^{222}\mathrm{Rn}$, що знаходиться в радіоактивній рівновазі з радієм $^{226}\mathrm{Ra}$ масою $m_1 = 1$ г.

$\mu_1 = \mu(^{226}\mathrm{Ra}) = 0,226$ кг/моль, $\mu_2 = \mu(^{222}\mathrm{Rn}) = 0,222$ кг/моль, $(T_{1/2})_1 = (^{226}\mathrm{Ra}) = 1600$ років, $(T_{1/2})_2 = T_{1/2}(^{222}\mathrm{Rn}) = 3,82$ днів, $m_1 = 10^{-3}$ кг
m_2—?

Якщо радіоактивні елементи знаходяться в рівновазі, виконується співвідношення (25.12):

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2,$$

де константу λ_1 можна знайти через період напіврозпаду за формулою (25.4):

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}},$$

а кількість атомів знайдемо за формулою (25.6):

$$N = \frac{m}{\mu} N_A.$$

У результаті матимемо

$$\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_1}\frac{m_1}{\mu_1}N_A = \frac{\ln 2}{(T_{1/2})_2}\frac{m_2}{\mu_2}N_A,$$

або після відповідних скорочень

$$\frac{m_1}{(T_{1/2})_1\mu_1} = \frac{m_2}{(T_{1/2})_2\mu_2}.$$

Виразимо шукану величину:

$$m_2 = \frac{m_1(T_{1/2})_2\mu_2}{(T_{1/2})_1\mu_1}.$$

Оскільки ми отримали відношення періодів напіврозпаду, вони повинні бути вираженими в одних одиницях. Зручно виразити періоди в днях: $T_{1/2}(^{226}\mathrm{Ra}) = 1600$ років $= 1600 \cdot 365$ днів $= 584 \cdot 10^3$ днів. Підставимо відомі й отримаємо відповідь:

$$m_2 = \frac{10^{-3} \cdot 3,82 \cdot 0,222}{584 \cdot 10^3 \cdot 0,226} = 6,425 \cdot 10^{-9}\ (\text{кг}).$$

Задачі для самостійного розв'язування

25.8. Знайти сталі радіоактивного розпаду λ ізотопів радію $^{219}_{88}\mathrm{Ra}$ (період напіврозпаду $T_{1/2} = 10^{-3}$ с) та $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ (період напіврозпаду $T_{1/2} = 1,6 \cdot 10^3$ років).

25.9. Стала радіоактивного розпаду λ рубідію $^{89}\mathrm{Rb}$ становить $0,00077$ с$^{-1}$. Визначити його період напіврозпаду $T_{1/2}$.

25.10. Яка частина початкової кількості атомів радіоактивного актинію $^{225}\mathrm{Ac}$ залишиться через 5 діб? Через 15 діб? Період напіврозпаду цього ізотопа становить $T_{1/2} = 10$ діб.

25.11. За який час t розпадеться $1/4$ початкової кількості ядер радіоактивного ізотопа, якщо його період напіврозпаду $T_{1/2} = 24$ години?

25.12. За час $t = 8$ діб розпалося $k = 3/4$ початкової кількості ядер радіоактивного ізотопа. Знайти період напіврозпаду $T_{1/2}$.

25.13. Період напіврозпаду $T_{1/2}$ радіоактивного нукліда складає 1 год. Знайти середню тривалість життя τ цього нукліда.

25.14. Яка частина початкової кількості радіоактивного нукліда розпадеться за час t, що дорівнює середній тривалості життя τ цього нукліда?

25. Закон радіоактивного розпаду. Активність. Радіоактивна рівновага

25.15. Знайти кількість N атомів, що розпадаються в радіоактивному ізотопі, якщо його активність $A = 0,1$ МБк. Вважати активність сталою у часі.

25.16. За час $t = 1$ доба активність ізотопа зменшилася від $A_1 = 118$ ГБк до $A_2 = 7,4$ ГБк. Знайти період напіврозпаду $T_{1/2}$ цього нукліда.

25.17. На скільки відсотків знизиться активність A ізотопа іридію ^{192}Ir за час $t = 30$ діб? Період напіврозпаду цього ізотопа – 75 діб.

25.18. Знайти проміжок часу τ, за який активність A ізотопа ^{90}Sr зменшиться в $k_1 = 10$ разів та в $k_2 = 100$ разів. Період напіврозпаду ізотопа – 28 років.

25.19. Лічильник Гейгера, що встановлений близько до препарату радіоактивного ізотопа срібла, реєструє потік β-частинок. При першому вимірюванні потік Φ_1 частинок дорівнював 87 с$^{-1}$, а через час $t = 1$ доба потік Φ_2 дорівнював 2 с$^{-1}$. Знайти період напіврозпаду $T_{1/2}$ цього ізотопа.

25.20. Визначити вік старого дерев'яного предмета, якщо відомо, що питома активність ізотопа ^{14}C в ньому становить 3/5 питомої активності цього ізотопа у свіжих деревах. Період напіврозпаду ядер ^{14}C дорівнює 5570 років.

25.21. Знайти активність фосфору ^{32}P масою $m = 1$ г. Період напіврозпаду $T_{1/2}$ ізотопа 14,29 доби.

25.22. Визначити питому активність a кобальту ^{60}Co, якщо його період напіврозпаду $T_{1/2} = 5,2713$ року.

25.23. Знайти відношення масової активності a_1 ізотопа стронцію ^{90}Sr до масової активності a_2 радію ^{226}Ra. Періоди напіврозпадів цих елементів 28,9 та $1,6 \cdot 10^3$ років відповідно.

25.24. Знайти масу m_1 урану ^{238}U, що має таку саму активність A, що й стронцій ^{90}Sr масою $m_2 = 10$ мг. Періоди напіврозпадів цих елементів $4,468 \cdot 10^9$ і 28,9 року.

25.25. Уран ^{234}U є продуктом розпаду найбільш поширеного ізотопа урану ^{238}U, період напіврозпаду якого $T_{1/2} = 4,468 \cdot 10^9$ років.

Визначити період напіврозпаду урану ^{234}U, якщо його масова частка в природному урані ^{238}U дорівнює $6 \cdot 10^{-5}$.

25.26. Радіоактивний ізотоп натрію $^{22}_{11}$Na (період напіврозпаду $T_{1/2} = 2,6027$ року) випромінює γ-кванти з енергією $\varepsilon = 1,28$ МеВ. Знайти потужність P гамма-випромінювання та енергію W, що випромінюється за час $t = 5$ хвилин ізотопом натрію масою $m = 5$ г. Вважати, що при кожному акті розпаду випромінюється один фотон із зазначеною енергією.

25.27. Точкове ізотропне радіоактивне джерело створює на відстані $r = 1$ м інтенсивність I гамма-випромінювання, що дорівнює $1,6$ мВт/м^2. Вважаючи, що при кожному акті розпаду ядра випромінюється один γ-фотон з енергією $\varepsilon = 1,33$ МеВ, знайти активність джерела A.

25.28. Зразок складається із 1000 радіоактивних ядер із періодом напіврозпаду $T_{1/2}$. Скільки ядер залишиться через проміжок часу $t = T_{1/2}/2$?

25.29. Зразок радіоактивної речовини містить 10^{12} радіоактивних атомів. Скільки атомів розпадеться кожної секунди, якщо період напіврозпаду 1 година?

25.30. Розрахувати питому активність одного із компонентів природного фону – рівномірно розподіленого в грунті калію із концентрацією 0,028 г на 1 г породи. Врахувати, що фотонне випромінювання обумовлене наявністю ^{40}K (період напіврозпаду $T_{1/2} = 1,248 \cdot 10^9$ років), масова частка якого в природному калії 0,0119 %.

26. Рентгенівське випромінювання

Основні формули

- Межа спектра гальмівного рентгенівського випромінювання

$$\lambda_{\min} = \frac{1,23}{U}, \tag{26.1}$$

де U – напруга на рентгенівській трубці (кВ); $\lambda_{\min}$ – мінімальна довжина хвилі (нм).

- Потік гальмівного рентгенівського випромінювання

$$\Phi = kIU^2Z, \tag{26.2}$$

де I – струм у рентгенівській трубці (А); U – напруга в трубці (В); Z – порядковий номер речовини анода; $k = 10^{-9}$ В$^{-1}$ – коефіцієнт пропорційності.

- Масовий коефіцієнт послаблення рентгенівського випромінювання

$$\mu_m = k\lambda^3Z^3, \tag{26.3}$$

де λ – довжина хвилі (м); Z – порядковий номер речовини, що поглинає випромінювання; k – деяка стала.

- Лінійний коефіцієнт послаблення рентгенівського випромінювання

$$\mu = \mu_m\rho, \tag{26.4}$$

де ρ – густина речовини (кг/м^3).

- Коефіцієнт послаблення для матеріалів складної структури

$$\mu(\lambda) = \sum_i C_i\mu_i(\lambda), \tag{26.5}$$

де C_i – вміст кожного елемента в речовині; μ_i – коефіцієнт послаблення в i-му елементі при довжині хвилі λ.

- Закон послаблення інтенсивності пучка променів при проходженні через речовину
$$I = I_0 e^{-\mu D}, \tag{26.6}$$
де D — товщина речовини (м); μ — лінійний коефіцієнт послаблення рентгенівського випромінювання (1/м); I_0 — початкова інтенсивність променів на вході в речовину.

- Закон послаблення потока рентгенівського випромінювання при його проходженні через речовину
$$\Phi = \Phi_0 e^{-\mu D}, \tag{26.7}$$
де Φ_0 — початковий потік на вході в речовину (Вт).

- Закон Мозлі для K-серії:
$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4} R'(Z-1)^2, \tag{26.8}$$
де $R' \approx 1,1 \cdot 10^7$ (м$^{-1}$) — стала Рідберга; Z — порядковий номер атома.

Приклади розв'язання задач

26.1. Знайти межу гальмівного рентгенівського випромінювання (частоту та довжину хвилі) для напруг $U_1 = 2$ кВ і $U_2 = 20$ кВ. У скільки разів енергія фотонів цих випромінювань більша за енергію фотонів, що відповідають червоному кольору ($\lambda = 760$ нм)?

$U_1 = 2$ кВ,
$U_2 = 20$ кВ,
$\lambda = 760$ нм,
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с
$\lambda_{\min 1}, \lambda_{\min 2}$—?

Межу спектра гальмівного рентгенівського випромінювання будемо шукати за формулою (26.1):
$$\lambda_{\min} = \frac{1,23}{U},$$
де напруга виражена в кіловольтах. За цією формулою знайдемо $\lambda_{\min 1}$ і $\lambda_{\min 2}$:
$$\lambda_{\min 1} = \frac{1,23}{2} = 0,615 \text{ (нм)},$$

$$\lambda_{\min 2} = \frac{1,23}{20} = 0,0615 \text{ (нм)}.$$

Використовуючи зв'язок між частотою та довжиною хвилі, знайдемо частоту:

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_{\min 1}} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,615 \cdot 10^{-9}} = 0,5 \cdot 10^{18} \text{ (Гц)},$$

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_{\min 2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,0615 \cdot 10^{-9}} = 0,5 \cdot 10^{19} \text{ (Гц)}.$$

Енергія фотона визначається згідно з формулою (24.1):

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}; \quad \varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_{\min 1}}; \quad \varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_{\min 2}}.$$

Таким чином, шукане співвідношення порівняно з енергією червоного світла:

$$n_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{\lambda_{\min 1}} = \frac{760}{0,615} = 1235,77,$$

$$n_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{\lambda_{\min 2}} = \frac{760}{0,0615} = 12357,7.$$

26.2. При проходженні потоку рентгенівського випромінювання через кісткову тканину відбувається його послаблення вдвічі. Враховуючи, що товщина кісткової тканини становить 20 мм, знайти лінійний коефіцієнт послаблення.

$I_0/I = 2,$
$D = 2 \cdot 10^{-2}$ м
μ–?

Запишемо закон послаблення у вигляді (26.7):

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\mu D},$$

звідки отримуємо

$$\frac{I}{I_0} = \mathrm{e}^{-\mu D}; \quad \frac{I_0}{I} = \mathrm{e}^{\mu D}; \quad \ln\frac{I_0}{I} = \mu D; \quad \mu = \frac{1}{D}\ln\frac{I_0}{I}.$$

Підставимо числові значення та знайдемо відповідь:

$$\mu = \frac{1}{2 \cdot 10^{-2}} \ln 2 = 34,657 \text{ (м}^{-1}\text{)}.$$

26.3. У скільки разів зміниться швидкість електронів у рентгенівській трубці при збільшенні напруги від 80 до 120 кВ?

Дано	
$U_1 = 80$ кВ,	
$U_2 = 120$ кВ	
$v_2/v_1 -?$	

Використаємо закон збереження енергії:

$$\frac{mv_1^2}{2} = eU_1; \quad \frac{mv_2^2}{2} = eU_2.$$

Із цих співвідношень випливає

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{U_2}{U_1}; \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{U_2}{U_1}},$$

або після підстановки значень:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{120}{80}} = 1,225.$$

26.4. Знайти потік рентгенівського випромінювання при $U = 10$ кВ, $I = 1$ мА. Анод виготовлений із вольфраму. Скільком фотонам за секунду відповідає цей потік, якщо припустити, що випромінюється електромагнітна хвиля, довжина якої дорівнює $2/3$ від довжини хвилі, що відповідає межі спектра гальмівного рентгенівського випромінювання?

Дано
$k = 10^{-9}$ В$^{-1}$,
$U = 10^4$ В,
$I = 10^{-3}$ А,
$\lambda = (2/3)\lambda_{\max}$,
$t = 1$ с,
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с,
$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
$\Phi, N -?$

Потік знайдемо за формулою (26.2):

$$\Phi = kIU^2Z,$$

де порядковий номер Z для вольфраму становить 74. Після розрахунку:

$$\Phi = 10^{-9} \cdot 10^{-3} \cdot (10^4)^2 \cdot 74 = 0,0074 \text{ (Вт)}.$$

Тепер знайдемо довжину хвилі, що відповідає межі спектра (26.1):

$$\lambda_{\min} = \frac{1,23}{U}; \quad \lambda_{\min} = \frac{1,23}{10} = 0,123 \text{ (нм)}.$$

Визначимо довжину хвилі, що випромінюється, за умовою задачі:

$$\lambda = \frac{2}{3}\lambda_{\max} = \frac{2}{3} \cdot 0,123 = 0,082 \text{ (нм)}.$$

Відповідна енергія фотона дорівнюватиме

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

а загальна енергія всіх фотонів

$$\varepsilon_N = N\frac{hc}{\lambda}.$$

У системі буде проходити енергія, що дорівнюватиме добутку потужності (потоку Φ) і часу проходження t:

$$\Phi t = N\frac{hc}{\lambda},$$

звідки можна знайти кількість фотонів:

$$N = \frac{\Phi t\lambda}{hc},$$

або після розрахунків:

$$N = \frac{0.0074 \cdot 1 \cdot 0,082 \cdot 10^{-9}}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 3,05 \cdot 10^{12}.$$

26.5. Визначити найбільшу довжину хвилі $\lambda_{\max}$ у K-серії характеристичного рентгенівського спектра скандію.

$Z = 21$,
$R' = 1,1 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
$\lambda_{\max}$–?

Закон Мозлі для K-ліній має вигляд

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4}R'(Z-1)^2.$$

Звідки знайдемо довжину хвилі:

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2},$$

або після підстановки значень:

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3 \cdot 1,1 \cdot 10^{7} \cdot (21-1)^2} = 0,303 \cdot 10^{-9}\ (\text{м}) = 303\ (\text{пм}).$$

26.6. Визначити граничну довжину хвилі $\lambda_{\min}$ спектра рентгенівського випромінювання, що виникає при гальмуванні електронів, якщо напруга, що подається на трубку, становить 1 МВ.

$U = 10^{6}$ В,
$c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с,
$\lvert e\rvert = 1,61 \cdot 10^{-19}$ Кл,
$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
$\lambda_{\min}$–?

Рентгенівське випромінювання – це гальмівне випромінювання, що виникає за рахунок енергії, яку втрачають електрони при гальмуванні. В рентгенівській трубці електрон набуває кінетичної енергії T, що пов'язана з прискорювальною різницею потенціалів U співвідношенням

$$T = |e|U,$$

де e — заряд електрона. Згідно із законом збереження енергії енергія фотона, що утворюється при гальмуванні електрона, не може перевищувати його кінетичну енергію ($\hbar\omega \leq T$), тобто

$$\hbar\omega_{\max} = T = |e|U.$$

Оскільки максимальна колова частота $\omega_{\max}$ пов'язана з мінімальною довжиною хвилі $\lambda_{\min}$ співвідношенням

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}},$$

то, поєднавши ці вирази, ми можемо записати

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{|e|U}.$$

Або після підстановки відповідних значень:

$$\lambda_{\min} = \frac{2 \cdot 3,14159 \cdot 1,055 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1,61 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{6}} = 1,24 \cdot 10^{-12} \text{ (м)}.$$

Спробуємо використати для розрахунку формулу (26.1):

$$\lambda_{\min} = \frac{1,23}{U}.$$

Нагадаємо, що напруга U підставляється у формулу в кіловольтах, а довжина хвилі виражена в нанометрах. Підставимо значення:

$$\lambda_{\min} = \frac{1,23}{10^{3}} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ (нм)} = 1,23 \cdot 10^{-12} \text{ (м)}.$$

Ми отримали таке саме значення, отже, ці підходи однакові.

26. Рентгенівське випромінювання

Задачі для самостійного розв'язування

26.7. У якому випадку відбудеться більше зростання потоку рентгенівського випромінювання: при збільшенні сили струму вдвічі, але при незмінній напрузі, або навпаки, при збільшенні напруги вдвічі, але при сталій силі струму? Як можна збільшити силу струму, не змінюючи напругу на рентгенівській трубці? Проаналізувати процеси, що відбуваються в рентгенівській трубці: а) при зміні сили струму; б) при зміні напруги.

26.8. Визначити, у скільки разів довжина хвилі рентгенівського випромінювання з енергією квантів 50 кеВ менша, ніж видимого світла із довжиною хвилі 400 нм.

26.9. Чому дорівнює енергія кванта рентгенівського випромінювання, якщо йому відповідає довжина хвилі 0,005 нм?

26.10. Порівняти зміну масового коефіцієнта послаблення кістки та м'яких тканин при переході від м'якого до жорсткого рентгенівського випромінювання. Вважати енергію фотонів для м'якого випромінювання такою, що дорівнює 30 кеВ, а для жорсткого — 120 кеВ.

26.11. Визначити, у скільки разів відрізняються лінійні коефіцієнти послаблення води та насиченої водяної пари при нормальних умовах. Вважати густину води 1000 кг/м^3, а пари — 768 кг/м^3.

26.12. Ураховуючи, що при взаємодії рентгенівських променів та атомів кальцію спостерігається фотоефект, знайти швидкість, з якою вилітають електрони з атомів кальцію, що входять до складу кісткової тканини. Енергія квантів рентгенівського випромінювання становить 10 кеВ, а енергія іонізації атома кальцію — 6,1 еВ.

26.13. У рентгенівській трубці при збільшенні напруги від 80 кВ до 120 кВ зміщується спектр гальмівного випромінювання. Знайти величину $\Delta\lambda_{\min}$ цього спектра.

26.14. Електрони в промені телевізійної трубки гальмуються речовиною екрана. Напруга, що подається до трубки, становить 20 кВ. Чому дорівнює гранична довжина хвилі $\lambda_{\min}$ спектра рентгенівського випромінювання, що виникає при гальмуванні електронів?

26.15. У скільки разів зменшиться потік рентгенівського випромінювання, якщо антикатод із вольфраму замінити на антикатод із молібдену, а напругу і струм накалу в трубці залишити незмінними?

26.16. Напруга на рентгенівській трубці становить 250 кВ. Знайти енергію квантів, що відповідають граничній довжині хвилі спектра гальмівного рентгенівського випромінювання.

26.17. Визначити швидкість електронів, що падають на антикатод рентгенівської трубки, якщо мінімальна довжина хвилі в суцільному спектрі випромінювання становить 1 нм.

26.18. Під час дослідження лінійного рентгенівського спектра деякого елемента було знайдено, що довжина хвилі λ серії K_α дорівнює 76 пм. Який це елемент?

26.19. Яку найменшу різницю потенціалів U_{min} потрібно прикласти до рентгенівської трубки, щоб у спектрі рентгенівського випромінювання з'явилися всі лінії K-серії ванадію? Межа K-серії ванадію становить $\lambda = 226$ пм.

26.20. Визначити енергію ε фотона, що відповідає лінії K_α у характеристичному спектрі марганцю ($Z = 25$).

26.21. Визначити довжину хвилі λ та енергію фотона ε, що належить K_α-лінії в спектрі характеристичного рентгенівського випромінювання платини.

26.22. При якій найменшій напрузі U_{min} на рентгенівській трубці починають з'являтися лінії серії K_α міді?

26.23. Розрахувати коефіцієнти послаблення рентгенівського випромінювання в сталі ($C_{\mathrm{Cr}} = 20$ %; $C_{\mathrm{Fe}} = 70$ %; $C_{\mathrm{Ni}} = 10$ %) для довжин хвиль $\lambda = 1,7 \cdot 10^{-10}$ м і $\lambda = 1,9 \cdot 10^{-10}$ м. Пояснити зміну μ_λ.

26.24. Визначити товщину шару заліза ($Z = 26$) і свинцю ($Z = 82$), що послаблює в 100 разів інтенсивність рентгенівського випромінювання молібдену ($\lambda_{\mathrm{Mo}K_\alpha} = 0,71 \cdot 10^{-10}$ м; $\rho_{\mathrm{Fe}} = 7,86$ г/см^3; $\rho_{\mathrm{Pb}} = 11,34$ г/см^3).

27. Основи дозиметрії

Основні формули

- Поглинута доза іонізувального випромінювання

$$D = \frac{E}{m}, \tag{27.1}$$

де E (Дж) – середня енергія, що передана іонізувальною речовиною в елементарному об'ємі, до маси m (кг) речовини в цьому об'ємі.

- Екпозиційна доза

$$X = \frac{Q}{m}, \tag{27.2}$$

де Q – заряд іонів одного знака, що утворилися випромінюванням у повітрі масою m.

- Зв'язок поглиненої та експозиційної доз

$$D = fX, \tag{27.3}$$

де f – перехідний коефіцієнт (для води та м'яких тканин $f = 1$). Якщо D вимірюється в радах, тоді одиницею виміру X є рентген.

- Зв'язок еквівалентної та поглиненої доз

$$H = kD, \tag{27.4}$$

де k – коефіцієнт якості, або відносна біологічна ефективність (ВБЕ). Коефіцієнт якості для рентгенівського і γ-випромінювання становить 1, а для α-випромінювання він дорівнює 20.

- Формули для визначення потужностей доз:

$$\dot{D} = \frac{D}{t}; \quad \dot{X} = \frac{X}{t}; \quad \dot{H} = \frac{H}{t}, \tag{27.5}$$

де t – час (с).

- Гранично допустима еквівалента доза для населення становить 0,05 Бер за рік, а для професіоналів вона дорівнює 5 Бер за рік.

- Зв'язок між активністю радіоактивної речовини (A) та потужністю експозиційної дози X/t:

$$\frac{X}{t} = k_\gamma \frac{A}{r^2}, \tag{27.6}$$

  де k_γ — γ-стала, що характерна для цього радіонукліда; r — відстань від джерела іонізувального випромінювання (м).

- Питома активність джерела

$$A_m = \frac{A}{m}. \tag{27.7}$$

- Поглинута доза D вимірюється у греях (Гр) та радах (рад), зв'язок між ними:

$$1 \text{ рад} = 10^{-2} \text{ Гр}. \tag{27.8}$$

- Експозиційна доза X вимірюється в (Кл/кг) та в рентгенах (Р), зв'язок між ними:

$$1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}. \tag{27.9}$$

- Активність радіоактивного джерела вимірюється в беккерелях (Бк), або в кюрі (Кі), зв'язок між ними:

$$1 \text{ Кі} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}. \tag{27.10}$$

Приклади розв'язання задач

27.1. Тіло масою $m = 60$ кг поглинуло енергію $E = 1$ Дж за час $t = 6$ год. Знайти поглинуту дозу і потужність поглиненої дози в одиницях СІ та несистемних одиницях.

27. Основи дозиметрії

$m = 60$ кг, $t = 21600$ с, $E = 1$ Дж
$D, D/t-?$

Основною величиною, що визначає величину радіоактивної дії, є поглинена доза іонізувального випромінювання D — відношення середньої енергії E, що передана іонізувальною речовиною в елементарному об'ємі, до маси m речовини в цьому об'ємі:

$$D = \frac{E}{m}.$$

Розрахуємо це значення в одиницях СІ (Гр — грей):

$$D = \frac{1}{60} = 0,017 \text{ (Гр)}.$$

Переведемо цю величину у несистемну одиницю рад. Ураховуючи, що між цими одиницями лінійна залежність 1 рад = 0,01 Гр, отримаємо

$$D = 1,7 \text{ (рад)}.$$

Обчислимо потужність поглиненої дози:

$$\frac{D}{t} = \frac{0,017}{21600} = 7,87 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Гр}}{\text{с}}\right),$$

або

$$\frac{D}{t} = \frac{1,7}{21600} = 7,87 \cdot 10^{-5} \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

27.2. Середня потужність експозиційної дози опромінення в рентгенівському кабінеті становить $6,45 \cdot 10^{-12}$ Кл/(кг·с). Лікар знаходиться протягом дня 5 годин у цьому кабінеті. Знайти експозиційну дозу опромінення за шість робочих днів.

$\dot{X} = 6,45 \cdot 10^{-12}$ Кл/(кг·с), $t = 108 \cdot 10^3$ с
$X-?$

Експозиційну дозу, що отримує людина, можна розрахувати як

$$X = \dot{X}t,$$

або після підстановки значень:

$$X = 6,45 \cdot 10^{-12} \cdot 108 \cdot 10^3 = 7 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}\right).$$

У несистемних одиницях

$$X = \frac{7 \cdot 10^{-7}}{2,58 \cdot 10^{-4}} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ (Р)}.$$

27.3. Космічне випромінювання на рівні моря на екваторі утворює в повітрі об'ємом $V = 1$ см^3 у середньому $N = 24$ пари іонів за час $t_1 = 10$ с. Визначити експозиційну дозу X, яку отримує людина за $t_2 = 1$ рік.

$V = 10^{-6}$ м^3, $N = 24$, $t_1 = 10$ с, $t_2 = 31536000$ с, $\lvert e\rvert = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $\rho = 1,29$ кг/м^3	
$X-?$	

Експозиційна доза, яку отримує людина, виражається через її швидкість:

$$X = \dot{X}t_2,$$

де потужність експозиційної дози визначається формулою

$$\dot{X} = \frac{Q}{mt_1},$$

де Q — заряд іонів одного знака, що утворюються випромінюванням за час t_1 у повітрі масою m. Масу повітря m_1 знайдемо як добуток об'єму V та густини ρ:

$$m = V\rho.$$

А заряд усіх іонів будемо визначати як добуток елементарного заряду та загальної кількості іонів:

$$Q = |e|N.$$

Таким чином, отримуємо

$$X = \dot{X}t_2 = \frac{Q}{mt_1}t_2 = \frac{|e|Nt_2}{V\rho t_1}.$$

Зробимо відповідні обчислення:

$$X = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 24 \cdot 31536000}{10^{-6} \cdot 1,29 \cdot 10} = 9,39{\cdot}10^{-6} \left(\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}\right) = 9,39 \left(\frac{\text{мкКл}}{\text{кг}}\right).$$

27.4. Потужність експозиційної дози γ-випромінювання на відстані 1 м від джерела становить 0,1 Р/хв. Людина працює кожен день на відстані 10 м від цього джерела. Знайти, яку експозиційну дозу випромінювання вона отримує за один день праці.

$\dot{X} = 0,1$ Р/хв, $r_1 = 1$ м, $r_2 = 10$ м, $t = 360$ хв	
$X_2-?$	

Згідно з формулою (27.6) потужність експозиційної дози обернено пропорційна відстані:

$$\frac{X}{t} = k_\gamma \frac{A}{r^2},$$

де сталі для джерела k_γ і A, а також час t не залежать від відстані. Нехай індекс 1 відповідає відстані r_1, а індекс 2 відповідає відстані r_2, звідки

$$\frac{X_1}{t} = k_\gamma \frac{A}{r_1^2}, \quad \frac{X_2}{t} = k_\gamma \frac{A}{r_2^2}.$$

Почленно розділимо ці співвідношення:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2},$$

звідки виразимо X_2:

$$X_2 = X_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2,$$

де експозиційна доза X_1 відповідає радіації, яку отримує людина, працюючи 6 годин (360 хвилин) на відстані r_1 від джерела. За умовою задачі це

$$X_1 = \dot{X}t = 0,1 \cdot 360 = 36 \text{ (Р)}.$$

Тепер знайдемо X_2:

$$X_2 = 36 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0,36 \text{ (Р)}.$$

27.5. Точкове радіоактивне джерело ^{60}Co знаходиться в центрі сферичного свинцевого контейнера. Товщина контейнера 1 см, а його зовнішній радіус 20 см. Знайти максимальну активність $A_{\max}$ джерела, яке можна зберігати в контейнері, якщо гранично допустима густина потоку γ-фотонів при виході з контейнера становить $J_{доп} = 8 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$·м$^{-2}$. Вважати, що при кожному розпаді ядра ^{60}Co випромінюється $n = 2$ γ-фотони, середня енергія кожного з яких становить 1,25 МеВ.

$x = 10^{-2}$ м,
$R = 0,2$ м,
$J_{доп} = 8 \cdot 10^{6}$ с$^{-1}$·м$^{-2}$,
$n = 2$,
$E = 1,25 \cdot 10^{6}$ еВ,
$\mu = 0,64$ см$^{-1}$

A–?

Активність радіоактивного джерела пов'язана із потоком випромінювання γ-квантів співвідношенням

$$\Phi = An,$$

звідки знаходимо

$$A = \frac{\Phi}{n}.$$

Потік Φ, що входить до цієї формули, запишемо через густину потоку:

$$J_1 = \frac{\Phi}{4\pi R^2}.$$

Після проходження крізь свинцеву сферу контейнера густина потоку зменшується згідно із співвідношенням

$$J_2 = J_1 \mathrm{e}^{-\mu x}.$$

Із цих двох формул знайдемо Ф:

$$J_2 \mathrm{e}^{\mu x} = \frac{\Phi}{4\pi R^2}; \quad \Phi = 4\pi R^2 J_2 \mathrm{e}^{\mu x},$$

або з урахуванням виразу для активності:

$$A = \frac{4\pi R^2 J_2}{n} \mathrm{e}^{\mu x}.$$

В останній формулі візьмемо $J_2 = J_{\text{доп}}$, тоді

$$A = \frac{4\pi R^2 J_{\text{доп}}}{n} \mathrm{e}^{\mu x}.$$

Відомо, що при цій енергії γ-фотонів лінійний коефіцієнт послаблення становить $\mu = 0,64$ см$^{-1}$. Розрахуємо відповідне значення:

$$A = \frac{4 \cdot 3,14159 \cdot (0,2)^2 \cdot 8 \cdot 10^6}{2} \mathrm{e}^{0,64 \cdot 1} = 3,81 \cdot 10^6 \text{ (Бк)}.$$

27.6. Повітря при нормальних умовах опромінюється γ-випромінюванням. Визначити енергію E, яку поглинає повітря масою $m = 5$ г при експозиційній дозі опромінювання X = 258 мкКл/кг.

$m = 5 \cdot 10^{-3}$ кг,
$X = 258 \cdot 10^{-6}$ Кл/кг,
$\varepsilon = 5,416 \cdot 10^{-18}$ Дж,
$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
E–?

Енергія, що поглинається повітрям, може бути виражена як

$$E = \varepsilon m N,$$

де ε – це енергія іонізації повітря, а N – кількість пар іонів в одиниці маси повітря m. Будемо вважати, що γ-випромінювання повністю використовує свою іонізувальну властивість. Відомо, що для утворення однієї пари іонів у сухому повітрі при нормальних умовах у середньому необхідна енергія $\varepsilon = 33,5$ еВ $= 5,416 \cdot 10^{-18}$ Дж. Кількість пар іонів N в одиниці маси визначається як

$$N = \frac{X}{e},$$

де введено до розгляду елементарний заряд e. Таком чином, отримуємо

$$E = \varepsilon m N = \varepsilon m \frac{X}{e}.$$

Після відповідних розрахунків знаходимо

$$E = 5,416 \cdot 10^{-18} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \frac{258 \cdot 10^{-6}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 4,37 \cdot 10^{-5} \text{ (Дж)}.$$

27.7. Потужність експозиційної дози, що утворюється джерелом γ-випромінювання з енергією фотонів $\varepsilon = 2$ МеВ, становить $8,6 \cdot 10^{-7}$ Кл/(кг·с). Знайти товщину x свинцевого екрана, що послаблює цю потужність до гранично допустимого рівня $\dot{X} = 8,6 \cdot 10^{-10}$ Кл/(кг·с).

$\varepsilon = 2$ МеВ,
$\dot{X}_0 = 8,6 \cdot 10^{-7}$ Кл/(кг·с),
$\dot{X} = 8,6 \cdot 10^{-10}$ Кл/(кг·с),
$\mu = 52$ м$^{-1}$

x—?

Послаблення експозиційної дози опромінення під час проходження крізь захисний екран може бути розраховане як

$$\dot{X} = \dot{X}_0 \mathrm{e}^{-\mu x},$$

де лінійний коефіцієнт послаблення μ для фотонів з енергією $\varepsilon = 2$ МеВ становить $\mu = 0,52$ см$^{-1}$. Звідки визначаємо

$$\frac{\dot{X}_0}{\dot{X}} = \mathrm{e}^{\mu x}; \quad \mu x = \ln \frac{\dot{X}_0}{\dot{X}}; \quad x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\dot{X}_0}{\dot{X}}.$$

Розрахуємо відповідне значення:

$$x = \frac{1}{52} \ln \frac{8,6 \cdot 10^{-7}}{8,6 \cdot 10^{-10}} = 0,133 \text{ (м)} = 13,3 \text{ (см)}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

27.8. У $m = 10$ г тканини поглинається 10^9 α-частинок з енергією приблизно $E = 5$ МеВ кожна. Знайти поглинену та еквівалентну дози. Коефіцієнт якості k для α-частинок становить 20.

27.9. Смертельна доза для людини масою 70 кг при опромінюванні всього тіла рентгенівськими або γ-променями становить 600 рад. Визначити, на скільки градусів від норми підвищиться температура тіла людини при цьому опроміненні, якщо її подати як однорідний фантом з питомою теплоємністю 3,33 кДж/(К·кг).

27.10. Радіаційний фон у деякому місті становить 30 мкР/год. Визначити поглинену та експозиційну дози, що отримують мешканці цього міста за рік.

27.11. Під час дослідження радіочутливості живих організмів щурів опромінювали рентгенівськими променями протягом 4 год. При цьому вони отримали сумарну дозу 300 Бер. Знайти потужність експозиційної і поглиненої доз у цьому експерименті (відповідь виразити в одиницях СІ).

27.12. У воді масою $m = 10$ г було поглинено 10^{20} протонів з енергією 5 МеВ кожний. Визначити поглинену дозу в радах.

27.13. Одна α-частинка утворює в повітрі близько 150 тисяч пар іонів. Знайти іонізаційний струм, що створює препарат, який випромінює 100 α-частинок кожної секунди.

27.14. Знайти, в якому співвідношенні знаходяться потужності експозиційної дози від одного і того самого джерела, якщо відстань від джерела: а) збільшується вдвічі; б) зменшується вдвічі.

27.15. Інтенсивність γ-випромінювання зменшилася в шість разів під час проходження крізь прошарок речовини товщиною 5 см. Знайти лінійний коефіцієнт послаблення цієї речовини.

27.16. Потужність експозиційної дози на відстані 10 см від джерела становить 85 мР/год. На якій відстані від джерела можна знаходитися без захисту, якщо допустима потужність дози дорівнює 0,017 мР/год?

27.17. Потужність експозиційної дози γ-випромінювання на відстані $r = 1$ м від точкового джерела становить $2,15 \cdot 10^{-7}$ Кл/кг. Знайти мінімальну відстань від джерела, на якій можна працювати 6 годин без захисту щодня. Гранично допустима еквівалентна доза при професійному випромінюванні дорівнює $5 \cdot 10^{-2}$ Дж/кг на рік. Поглинання γ-випромінювання повітрям не враховувати.

27.18. Яку експозиційну дозу створює препарат радіоактивного кобальту з активністю 10 Кі за 30 хвилин на відстані 2 м?

27.19. На якій відстані від препарату з радієм активністю 100 мКі можна знаходитися, щоб еквівалентна доза за шестигодинний робочий день не перевищила допустиму за добу дозу для професіоналів?

27.20. Яка частка γ-випромінювання з енергією 6 МеВ пройде крізь свинцевий екран товщиною 1 см, якщо лінійний коефіцієнт послаблення $\mu = 0,5$ см$^{-1}$. Пучок γ-випромінювання вузький.

27.21. Знайти, скільки α-частинок з енергією $E = 4,9$ МеВ, що поглинаються в біологічній тканині масою $m = 1$ г, відповідає еквівалентній дозі $D_{\text{екв}} = 0,5$ еВ. Коефіцієнт якості для цих частинок $K = 20$.

27.22. Під дією космічних променів у повітрі об'ємом 1 см^3 на рівні моря утворюється в середньому $N = 120$ пар іонів за проміжок часу $\Delta t = 1$ хвилина. Знайти експозиційну дозу X опромінення, що одержує людина за добу.

27.23. Ефективний об'єм V іонізаційної камери деякого дозиметра становить 1 см^3, а його електроємність $C = 2$ пФ. Камера містить повітря при нормальних умовах. Дозиметр було заряджено до потенціалу $\varphi_1 = 150$ В. Під дією опромінювання цей потенціал знизився до $\varphi_2 = 110$ В. Знайти експозиційну дозу X опромінювання.

27.24. На відстані $l = 10$ см від точкового джерела γ-випромінювання потужність експозиційної дози $\dot{X} = 8,6 \cdot 10^{-7}$ Кл/(кг·с). На якій найменшій відстані $l_{\min}$ від джерела експозиційна доза випромінювання X за робочий день протягом $t = 6$ год не переходить гранично допустиму дозу $5,16 \cdot 10^{-6}$ Кл/кг? Поглинанням γ-випромінювання в повітрі знехтувати.

27.25. Потужність експозиційної дози $\dot{X}$ γ-випромінювання на відстані $r_1 = 40$ см від точкового джерела становить $4,3 \cdot 10^{-6}$ Кл/(кг·с). Визначити час t, протягом якого можна знаходитися на відстані $r_2 = 6$ м від джерела, якщо гранично допустима експозиційна доза дорівнює $5,16 \cdot 10^{-6}$ Кл/кг. Поглинанням γ-випромінювання в повітрі знехтувати.

27.26. Визначити потужність експозиційної дози, що створює джерело ^{60}Co із активністю 900 мКі на відстані 0,5 м від препарату.

27.27. Точкове γ-джерело з активністю $A = 3,7 \cdot 10^6$ Бк знаходиться в центрі сферичного контейнера зі свинцю. Радіус контейнера $R = 10$ см. Знайти мінімальну товщину стінок контейнера, при якій потужність експозиційної дози зовні не буде перевищувати $0,2$ нКл/(кг·с), або 2,8 мР/год. Енергія γ-квантів $E = 2$ МеВ, а їх вихід, тобто кількість квантів на один розпад, $\eta = 0,6$.

27.28. Яка частка ω всіх молекул повітря при нормальних умовах іонізується рентгенівським випромінюванням при експозиційній дозі $X = 2,58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг?

27.29. Препарат радію $^{220}_{88}Ra$ з початковою активністю $0,5$ Кі зберігався 2 роки. Визначити, чому дорівнює потужність експозиційної дози випромінювання препарату на відстані 2 м після закінчення цього терміну.

Довідковий додаток

Таблиця 1 — Деякі одиниці системи СІ

Величина	Одиниця вимірювання	Позн.
Довжина	метр	м
Маса	кілограм	кг
Час	секунда	с
Сила струму	ампер	А
Температура	кельвін	К
Сила світла	кандела	кд
Кількість речовини	моль	моль
Плоский кут	радіан	рад
Тілесний кут	стерадіан	ср
Частота	герц	Гц
Сила	ньютон	Н
Енергія	джоуль	Дж
Потужність	ват	Вт
Тиск	паскаль	Па
Світловий потік	люмен	лм
Освітленість	люкс	лк
Електричний заряд	кулон	Кл
Потенціал	вольт	В
Опір	ом	Ом
Електроємність	фарад	Ф
Магнітний потік	вебер	Вб
Магнітна індукція	тесла	Тл
Індуктивність	генрі	Гн
Електрична провідність	сименс	См

Таблиця 2 — Десяткові приставки СІ

Кратність	Приставка	Позн.	Приклад
10^{24}	йота	Й	ЙБ – йотабайт
10^{21}	цета	З	Зг – цетаграм
10^{18}	екза	Е	ЕДж – екзаджоуль
10^{15}	пета	П	Пфлоп – петафлоп
10^{12}	тера	Т	ТВ – теравольт
10^{9}	гіга	Г	ГГц – гігагерц
10^{6}	мега	М	МПа – мегапаскаль
10^{3}	кіло	к	кН – кілоньютон
10^{2}	гекто	г	гОм – гектоом
10^{1}	дека	да	дал – декалітр
10^{-1}	деци	д	дБ – децибел
10^{-2}	санти	с	см – сантиметр
10^{-3}	мілі	м	мТл – мілітесла
10^{-6}	мікро	мк	мкГн – мікрогенрі
10^{-9}	нано	н	нм – нанометр
10^{-12}	піко	п	пФ – пікофарад
10^{-15}	фемто	ф	фс – фемтосекунда
10^{-18}	атто	а	ас – аттосекунда
10^{-21}	цепто	ц	цН – цептоньютон
10^{-24}	йокто	й	йг – йоктограм
10^{-10} м	ангстрем	Å	ангстрем

Таблиця 3 — Деякі фундаментальні фізичні сталі

Величина	Символ	Значення
Маса Землі		$5,97 \cdot 10^{24}$ кг
Радіус Землі		$6,37 \cdot 10^{6}$ м
Прискорення вільного падіння	g	$9,81$ м/с^2
Швидкість світла у вакуумі	c	$3 \cdot 10^{8}$ м/с
Гравітаційна стала	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$
Стала Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль
Об'єм одного моля газу	V_m	$22,4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Стала Лошмідта	$L = \frac{N_A}{V_m}$	$2,69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$
Стала Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Універсальна газова стала	$R = kN_A$	$8,314$ Дж/(моль·К)
Стала Планка	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Елементарний заряд	e	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Маса електрона	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Маса протона	m_p	$1,6726 \cdot 10^{-27}$ кг
Маса нейтрона	m_n	$1,6749 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомна одиниця маси	1 а.о.м.	$1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Електрична стала	ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Стала Фарадея	$F = eN_A$	96485 Кл/моль
Атмосферний тиск	atm	101325 Па

Таблиця 4 — Фізичні властивості деяких металів і сплавів при 20 °C

Речовина	Густина D, кг/м^3	Питомий опір ρ, 10^{-8} Ом·м	Температурний коефіцієнт опору α, 10^{-4} К$^{-1}$
Алюміній	2700	2,7	38
Вольфрам	19250	5,5	51
Залізо	7900	12	62
Золото	19300	2,42	40
Константан	8900	48	0,1
Латунь	8500	6–9	10
Манганін	8400	44,5	0,5
Мідь	8900	1,7	42,8
Нікелін	8500	42	1
Нікель	8900	11,8	27
Ніхром	8400	110	1,7
Олово	7300	11,3	45
Платина	7300	11	38
Свинець	11300	21	43
Срібло	10500	1,66	40
Цинк	7130	6,1	37

Таблиця 5 — Електрохімічні еквіваленти k, 10^{-6} кг/Кл

Алюміній	Al^{3+}	0,094
Водень	H^{+}	0,0104
Залізо	Fe^{2+}	0,29
Залізо	Fe^{3+}	0,193
Золото	Au^{3+}	0,68
Кальцій	Ca^{2+}	0,21
Кисень	O^{2-}	0,083
Мідь	Cu^{+}	0,659
Мідь	Cu^{2+}	0,33
Натрій	Na^{2+}	0,24
Нікель	Ni^{2+}	0,3
Срібло	Ag^{+}	1,12
Хлор	Cl^{-}	0,367
Цинк	Zn^{2+}	0,34

Таблиця 6 — Магнітні проникності деяких речовин

Парамагнетики	μ	Діамагнетики	μ
Алюміній	1,000023	Вісмут	0,999824
Повітря	1,00000038	Вода	0,999991
Вольфрам	1,000176	Водень	0,999999937
Кисень	1,0000019	Мідь	0,99999
Кисень рідкий	1,0034	Скло	0,999987

Таблиця 7 — Показники заломлення деяких речовин відносно повітря

Речовина	Показник заломлення n
Вода (при 20 °C)	1,33
Кедрове масло (при 20 °C)	1,52
Сірковуглець (при 20 °C)	1,63
Лід	1,31
Кам'яна сіль	1,54
Кварц	1,54
Рубін	1,76
Алмаз	2,42
Різні сорти скла	від 1,47 до 2,04

Таблиця 8 — Гамма-сталі деяких радіонуклідів, Р·см^2/(год·мКі)

^{60}Co	6,75		^{131}J	1,69
^{137}Cs	3,19		^{226}Ra	9,36
^{90}Sr	2,94		^{235}U	0,51

Список літератури

1. Ремизов А. Н. Медицинская и биологическая физика / А. Н. Ремизов, А. Г. Максина, А. Я. Потапенко. – М. : Дрофа, 2003. – 560 с.

2. Ремизов А. Н. Сборник задач по медицинской и биологической физике / А. Н. Ремизов, А. Г. Максина. – М. : Дрофа, 2001. – 192 с.

3. Чертов А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Физматлит, 2001. – 640 с.

4. Варфоломеев Н. М. Международная система единиц измерения: практическое справочное руководство / Н. М. Варфоломеев, З. А. Матысина, В. П. Милюков, А. И. Шкодина. – Киев : Урожай, 1964. – 88 с.

5. Трубецкова С. В. Физика. Вопросы – ответы. Задачи – решения. – Ч. 1, 2, 3. Механика. – М. : Физматлит, 2003. – 352 с.

6. Трубецкова С. В. Физика. Вопросы – ответы. Задачи – решения. – Ч. 4. Основы молекулярной физики и термодинамики. – М. : Физматлит, 2004. – 128 с.

7. Трубецкова С. В. Физика. Вопросы – ответы. Задачи – решения. – Ч. 5, 6. Электричество и магнетизм. – М. : Физматлит, 2004. – 304 с.

8. Трубецкова С. В. Физика. Вопросы – ответы. Задачи – решения. – Ч. 7, 8. Колебания и волны. Геометрическая и волновая оптика. – М. : Физматлит, 2005. – 304 с.

Навчальне видання

Дворниченко Аліна Василівна,
Ляшенко Яків Олександрович,
Хоменко Олексій Віталійович,
Корнющенко Ганна Сергіївна

Збірник задач з фізики з прикладами розв'язання

У двох частинах

Частина 2
Електричний струм. Магнітне поле. Оптика. Радіоактивність

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки Я. О. Ляшенка
Редактор Н. А. Гавриленко
Комп'ютерне верстання Я. О. Ляшенка, А. В. Дворниченко, О. В. Хоменка, Г. С. Корнющенко

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 13,72. Обл.-вид. арк. 10,24. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.