УДК 519.724.6:621.3.037

ОШИБКООБНАРУЖИВАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ КВАЗИРАВНОВЕСНОГО КОДА

И. А. Кулик, *канд. техн. наук, доцент;*
Е. М. Скордина, *аспирант;*
С. Н. Посный, *студент,*
Сумский государственный университет, г. Сумы

В статье получена количественная оценка ошибкообнаруживающей способности квазиравновесного кода, которая позволяет более точно определить области его эффективного использования и разработать способы адаптации параметров кода к количеству ошибок в каналах передачи и оконечных устройствах распределенных автоматизированных систем. В качестве такой оценки используется вероятность необнаруживаемой ошибки.

Ключевые слова: *адаптация, вероятность ошибки, ошибочный переход, канал передачи, квазиравновесная комбинация*

У статті отримана кількісна оцінка здатності квазірівноважного коду виявляти помилки. Ця оцінка дозволяє більш точно визначити галузі ефективного використання коду і розробити способи адаптації його параметрів до кількості помилок у каналах передачі та кінцевих пристроях розподілених автоматизованих систем. Як таку оцінку застосовують ймовірність помилки, яка не виявляється.

Ключові слова: *адаптація, імовірність помилки, помилковий перехід, канал передачі, квазірівноважна комбінація*

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Двоичные квазиравновесные коды (КРК) составляют многочисленный, но малоизученный подкласс равновесных кодов. По сравнению с кодами, имеющими постоянный вес, они обладают заметными достоинствами, к числу которых можно отнести следующие.

1. Множество КРК имеет существенно большую мощность при тех же параметрах длины n двоичных комбинаций и числа k единиц в них, а значит, характеризуется меньшей информационной избыточностью [1, 2].

2. КРК обладают значительно более гибкими возможностями по адаптации характеристик кода к требованиям или по ошибкообнаруживающей способности, или по величине избыточности за счет большего числа адаптируемых параметров [3, 4].

Серьезной проблемой, связанной с использованием как равновесных, так и квазиравновесных кодов, является их генерирование, которое являет собой сложную комбинаторную задачу, требующей существенных временных и аппаратно-программных затрат [5]. В работах [6, 7] было предложено достаточно эффективное решение такой задачи на основе биномиальных систем счисления и порождаемых ею биномиальных чисел. В основу решения задачи был положен тот факт, что биномиальные числа имеют ту же структуру, что и равновесные коды. Данная идея была формализована и получила успешное развитие для КРК в работах [4, 8]. Более того, обнаруживаются несложные алгоритмы взаимных преобразований КРК в равновесный код и наоборот.

С учетом вышеизложенного расширяются возможности по применению равновесных и квазиравновесных кодов в автоматизированных системах для решения различных информационных задач. Например, КРК могут эффективно применяться в системах контроля как симметричных, так и асимметричных ошибок на базе t-SEC/AUDE кодов [2, 9]. Перспективным является использование КРК в системах распределения частот в сетях радиосвязи, в том числе мобильной связи стандарта GSM [10]. С успехом КРК могут использоваться для построения сферических кодов и обнаружения равновесных кодов с заданным кодовым расстоянием [11].

В виду достаточного простого механизма адаптации квазиравновесных кодов к числу ошибок представляет особый интерес разработка адаптивных систем обмена данными на их основе. Но одной из главных составляющих содержания технологии адаптации параметров помехоустойчивого кода к числу ошибок в канале связи является оценка его ошибкообнаруживающей способности. До настоящего момента количественной оценки помехоустойчивости КРК, учитывающей вероятности ошибочных переходов, типы ошибок и их модели, не проводилась, что сдерживает разработку способов адаптации ошибкообнаруживающей способности кода для применения в различных распределенных автоматизированных системах. Оценивание КРК в прежних работах, например [4, 12], проводилось без учета отличий КРК от родственных им равновесных кодов, что приводило к весьма приблизительным результатам.

Таким образом, целью данной научной работы является повышение точности количественной оценки ошибкообнаруживающей способности КРК, учитывающей вероятности ошибочных переходов для различных моделей каналов передачи.

Для достижения сформулированной цели необходимо решить следующие задачи:

1) определить вид возможных ошибок и их кратности для КРК при воздействии помех в канале передачи или возникновения аппаратурного сбоя;

2) получить для КРК зависимости вероятностей необнаруживаемой ошибки от вероятности ошибочных переходов, типа и кратности ошибки для различных моделей каналов передачи.

В основе решения приведенных задач лежит способ оценки помехоустойчивости неразделимых кодов, количественной характеристикой которой является вероятность V необнаруживаемой ошибки [13]:

$$V = \sum_{i=1}^{N} p(a_i) p_i^{н} , \qquad (1)$$

где $p_i^{н}$ – вероятность ошибочного перехода i-й комбинации в разрешенную; $p(a_i)$ – вероятность генерирования i-й комбинации источником информации.

В изложении данного исследования длину КРК примем равной $n-1$ двоичных разрядов с тем, чтобы показать преемственность данной научной статьи с работами [4, 8, 12], в которых значение n означает один из параметров соответствующей биномиальной системы счисления, используемой для генерирования и нумерации квазиравновесных комбинаций.

1. УСЛОВИЯ НЕОБНАРУЖЕНИЯ ОШИБОЧНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Как известно из работ [4, 12], множество $Y[n-1, k, k-1]$ квазиравновесных двоичных комбинаций длины $n-1$, содержащих k и $k-1$ единиц, представляет собой сумму двух подмножеств:

$$Y[n-1,k,k-1]=Y[n-1,k]\cup Y[n-1,k-1]\,, \qquad (2)$$

где $Y[n-1,k]$ и $Y[n-1,k-1]$ – подмножества квазиравновесных комбинаций длины $n-1$ с числами k и $k-1$ единиц соответственно. Очевидно, $Y[n-1,k]$ есть подмножество равновесных комбинаций с k единицами и $n-k-1$ нулями, а $Y[n-1,k-1]$ – подмножество равновесных комбинаций с $k-1$ единицами и $n-k$ нулями. Тогда $Y[n-1,k]=Y[k,n-k-1]$ и $Y[n-1,k-1]=Y[k-1,n-k]$, а выражение (2) запишется как

$$Y[n-1,k,k-1]=Y[k,n-k-1]\cup Y[k-1,n-k]\,. \qquad (3)$$

Следует отметить, что мощность КРК $Y[n-1,k,k-1]$ составляет $N_{КРК}=C_n^k$, а мощности подмножеств $Y[k,n-k-1]$ и $Y[k-1,n-k]$ соответственно $N_k=C_{n-1}^k$ и $N_{k-1}=C_{n-1}^{k-1}$.

Для оценки помехоустойчивости квазиравновесных комбинаций предлагается рассмотреть ошибкообнаруживающую способность для каждого из подмножеств $Y[k,n-k-1]$ и $Y[k-1,n-k]$ в отдельности с целью дальнейшего определения вероятности $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки для всего КРК.

Сам факт необнаружения ошибок при передаче связан с преобразованием исходной входной комбинации в выходную, отличную от исходной, кодовую последовательность. Полученная на выходе канала последовательность принадлежит входному кодовому множеству, т.е. выполняется переход разрешенной комбинации в другую разрешенную.

Пусть заданы $y_a,y_a'\in Y[k,n-k-1]$ и $y_b,y_b'\in Y[k-1,n-k]$, где y_a, y_b – квазиравновесные входные, а y_a', y_b' – выходные комбинации, $y_a\neq y_a'$, $y_b\neq y_b'$. Относительно КРК можно выделить два вида ошибочных необнаруживаемых переходов:

$$\begin{bmatrix} y_a\to y_b' \\ y_b\to y_a' \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} y_a\to y_a' \\ y_b\to y_b' \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Поразрядные переходы $1\to 0$ и $0\to 1$, которые приводят к ошибочным необнаруживаемым преобразованиям (4), составляют в общем случае сумму

$$e_{пр}=e_{01}+e_{10}\,, \qquad (5)$$

где e_{01} и e_{10} – количества переходов $0\to 1$ и $1\to 0$ соответственно. Из вида подмножеств (3) можно сделать следующие выводы.

1. Необнаруживаемые переходы $y_a\to y_b'$ и $y_b\to y_a'$ являются следствием асимметричных ошибок, когда $e_{пр}=e_{10}$ или $e_{пр}=e_{01}$. Данный тип ошибок изменяет параметры КРК:

$$Y[k,n-k-1]=Y[k-1\pm e_{пр},n-k\mp e_{пр}]\,, \qquad (6)$$

$$Y[k-1, n-k] = Y[k \pm e_{np}, n-k-1 \mp e_{np}]\,, \tag{7}$$

где в равенствах (6) и (7) входные комбинации принадлежат подмножествам $Y[k, n-k-1]$ и $Y[k-1, n-k]$ соответственно.

Для случая (6), когда $e_{np} = e_{01}$, получаем

$$Y[k, n-k-1] = Y[k-1+e_{01}, n-k-e_{01}]\,.$$

С учетом того, что $0 < e_{01} \le n-k-1$, выполнение данного равенства возможно только при $e_{01} = 1$, т.е. при однократной ошибке вида $0 \to 1$ наблюдается необнаруживаемый переход $y_b \to y'_a$. Если $e_{np} = e_{10}$, то равенство (6) имеет вид

$$Y[k, n-k-1] = Y[k-1-e_{10}, n-k+e_{10}]\,.$$

Отсюда выполнение данного равенства невозможно ни при каких $0 < e_{10} \le k$, т.е. все ошибки вида $1 \to 0$ приводят к обнаруживаемым переходам исходной комбинации y_b в запрещенные.

Для случая (7), когда $e_{np} = e_{01}$, получаем

$$Y[k-1, n-k] = Y[k+e_{01}, n-k-1-e_{01}]\,.$$

С учетом того, что $0 < e_{01} \le n-k$, выполнение данного равенства невозможно ни при каких e_{01}, т.е. все ошибки вида $0 \to 1$ приводят к обнаруживаемым переходам исходной комбинации y_a в запрещенные. Если $e_{np} = e_{10}$, то равенство (7) имеет вид

$$Y[k-1, n-k] = Y[k-e_{10}, n-k-1+e_{10}]\,.$$

Отсюда выполнение данного равенства возможно только при $e_{10} = 1$, т.е. при однократной ошибке вида $1 \to 0$ наблюдается необнаруживаемый переход $y_a \to y'_b$.

2. Необнаруживаемые переходы $y_a \to y'_a$ и $y_b \to y'_b$ являются следствием симметричных ошибок, когда $e_{01} = e_{10}$. Их воздействие на входные квазиравновесные комбинации можно отобразить как

$$Y[k, n-k-1] = Y[k+e_{01}-e_{10}, n-k-1]\,, \tag{8}$$

$$Y[k-1, n-k] = Y[k-1+e_{01}-e_{10}, n-k]\,. \tag{9}$$

Так как $e_{01} = e_{10}$, то равенства (8) и (9) соблюдаются при любых значениях $e_{01} = e_{10}$ с учетом ограничивающих неравенств

$$0 < e_{01}, e_{10} \le \min\left[k, n-k-1\right] \text{ и } 0 < e_{01}, e_{10} \le \min\left[k-1, n-k\right] \tag{10}$$

соответственно. Следовательно, для КРК все симметричные ошибки вида $0 \to 1$ и $1 \to 0$, кратность которых определяется (10), приводят к необнаруживаемым переходам $y_a \to y'_a$ и $y_b \to y'_b$.

Варианты ошибочных переходов квазиравновесных комбинаций с параметрами ошибок сведены в таблицу 1, где $y'_c, y'_d \notin Y[n-1, k, k-1]$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ВАРИАНТОВ ОШИБОЧНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Полученные условия необнаруживаемых ошибочных переходов позволяют определить для КРК число вариантов ошибочных преобразований разрешенной комбинации в разрешенную и число вариантов ошибочных преобразований разрешенной комбинации в запрещенную (4).

Теорема 1. Число вариантов поразрядных переходов $1 \to 0$ в случае необнаруживаемой ошибки $y_a \to y'_b$ равно

$$r_1 = C_k^1. \tag{11}$$

Доказательство. Для $y_a \to y'_b$ кратность поразрядной ошибки $1 \to 0$ составляет $e_{10} = 1$ (табл. 1). Число r_1 переходов вида $1 \to 0$ в этом случае определяется как сочетание из общего числа k двоичных единиц по $e_{10} = 1$ единице, изменяющей своё значение:

$$r_1 = C_k^1.$$

Теорема доказана.

Таблиця 1 – Варианты ошибочных переходов для КРК

Входные	Выходные комбинации			
	Необнаруживаемые ошибки		Обнаруживаемые ошибки	
	y'_a	y'_b	y'_c	y'_d
y_a	$0 \to 1$, $1 \to 0$ $e_{01} = e_{10}$	$1 \to 0$ $e_{10} = 1$	$0 \to 1$ $0 < e_{01} \le n-k-1$	$1 \to 0$ $1 < e_{10} \le k$
y_b	$0 \to 1$ $e_{01} = 1$	$0 \to 1$, $1 \to 0$ $e_{01} = e_{10}$	$1 \to 0$ $0 < e_{10} \le k-1$	$0 \to 1$ $1 < e_{01} \le n-k$

Теорема 2. Число вариантов поразрядных переходов $0 \to 1$ в случае необнаруживаемой ошибки $y_b \to y'_a$ равно

$$r_2 = C_{n-k}^1. \tag{12}$$

Доказательство. Для $y_b \to y'_a$ кратность поразрядной ошибки $0 \to 1$ составляет $e_{01} = 1$ (табл. 1). Число r_2 переходов вида $0 \to 1$ в этом случае определяется как сочетание из общего числа $n-k$ двоичных нулей по $e_{01} = 1$ нулю, изменяющему своё значение:

$$r_2 = C^1_{n-k}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Число вариантов поразрядных переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$ в случае необнаруживаемой ошибки $y_a \to y'_a$ равно

$$r_3 = \sum_{l=1}^{\min[k,n-k-1]} C^l_k C^l_{n-k-1}. \quad (13)$$

Доказательство. При $y_a \to y'_a$, где $y_a, y'_a \in Y[k, n-k-1]$, имеем дело с двумя видами поразрядных переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$, определяющих симметричную ошибку, кратность которой $l = e_{01} = e_{10}$ (табл. 1). В соответствии с основным правилом комбинаторики количество $r_3[l]$ вариантов переходов для симметричной ошибки кратности l равно произведению числа вариантов e_{01} переходов вида $0 \to 1$ на число вариантов e_{10} переходов вида $1 \to 0$. Эти числа, в свою очередь, вычисляются как сочетание числа $l = e_{01}$ нулевых разрядов, изменяющих свое значение, из общего числа $n-k-1$ нулей и сочетание числа $l = e_{10}$ единичных разрядов, изменяющих свое значение, из общего числа k единиц. Таким образом, для симметричной ошибки кратности l получаем

$$r_3[l] = C^l_k C^l_{n-k-1}. \quad (14)$$

Так как кратность $1 \le l \le \min[k, n-k-1]$, то число вариантов переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$ в случае $y_a \to y'_a$ будет представлять собой сумму значений $r_3[l]$ (14) для любого возможного значения l:

$$r_3 = \sum_{l=1}^{\min[k,n-k-1]} C^l_k C^l_{n-k-1}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Число вариантов поразрядных переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$ в случае необнаруживаемой ошибки $y_b \to y'_b$ равно

$$r_4 = \sum_{l=1}^{\min[k-1,n-k]} C^l_{k-1} C^l_{n-k}. \quad (15)$$

Доказательство. При $y_b \to y'_b$, где $y_b, y'_b \in Y[k-1, n-k]$, также имеем дело с двумя видами поразрядных переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$, определяющих симметричную ошибку, кратность которой $l = e_{01} = e_{10}$ (табл. 1). По аналогии с доказательством теоремы 3, но с учетом чисел k

единиц и $n-k$ нулей, получаем количество $r_4[l]$ вариантов переходов для симметричной ошибки кратности l:

$$r_4[l] = C_{k-1}^{l} C_{n-k}^{l}. \qquad (16)$$

Так как кратность $1 \le l \le \min[k-1, n-k]$, то число вариантов переходов $1 \to 0$ и $0 \to 1$ в случае $y_b \to y'_b$ будет представлять собой сумму значений $r_4[l]$ (16) для любого возможного значения l:

$$r_4 = \sum_{l=1}^{\min[k-1,n-k]} C_{k-1}^{l} C_{n-k}^{l}.$$

Теорема доказана.

3. НАХОЖДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ НЕОБНАРУЖИВАЕМОЙ ОШИБКИ

Вероятность $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки для КРК можно представить как сумму вероятностей всех необнаруживаемых ошибок (4) для подмножеств $Y[k, n-k-1]$ и $Y[k-1, n-k]$:

$$V_{КРК} = V[y_a \to y'_a] + V[y_b \to y'_b] + V[y_a \to y'_b] + V[y_b \to y'_a], \qquad (17)$$

где $V[y_a \to y'_a]$ и $V[y_a \to y'_b]$ – вероятности необнаруживаемых ошибок для кодового подмножества $Y[k, n-k-1]$; $V[y_b \to y'_b]$ и $V[y_b \to y'_a]$ – вероятности необнаруживаемых ошибок для кодового подмножества $Y[k-1, n-k]$. Согласно (1) каждую вероятность необнаруживаемой ошибки из равенства (17) можно выразить как сумму произведений вероятности ошибочного перехода на вероятность возникновения на входе канала передачи соответствующей квазиравновесной комбинации, т.е.

$$V[y_a \to y'_a] = \sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p(y_a) P[y_a \to y'_a], \qquad (18)$$

$$V[y_a \to y'_b] = \sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p(y_a) P[y_a \to y'_b], \qquad (19)$$

$$V[y_b \to y'_b] = \sum_{b=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p(y_b) P[y_b \to y'_b], \qquad (20)$$

$$V[y_b \to y'_a] = \sum_{b=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p(y_b) P[y_b \to y'_a], \qquad (21)$$

где $p(y_a)$ и $p(y_b)$ – вероятности появления на входе канала передачи квазиравновесных комбинаций y_a и y_b; $P[y_a \to y'_a]$ и $P[y_a \to y'_b]$ – вероятности необнаруживаемых переходов для комбинации y_a;

$P\left[y_b \to y'_b\right]$ и $P\left[y_b \to y'_a\right]$ – вероятности необнаруживаемых переходов для комбинации y_b, где $y_a \in Y[k, n-k-1]$ и $y_b \in Y[k-1, n-k]$.

С учетом (18), (19), (20) и (21) и объединения сумм для y_a и y_b, выражение (17) приводится к следующему виду:

$$\begin{gathered} V_{КРК} = \sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p\left(y_a\right)\left(P\left[y_a \to y'_a\right] + P\left[y_a \to y'_b\right]\right) + \\ + \sum_{b=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p\left(y_b\right)\left(P\left[y_b \to y'_b\right] + P\left[y_b \to y'_a\right]\right). \end{gathered} \tag{22}$$

Равенство (22) представляет собой общий вид оценки вероятности необнаруживаемой ошибки для КРК $Y[n-1, k, k-1]$.

Условимся считать, что поразрядные переходы $1 \to 1$ и ошибочный $1 \to 0$, $0 \to 0$ и ошибочный $0 \to 1$ происходят независимо друг от друга и являют собой полные группы событий:

$$p_{11} + p_{10} = 1, \; p_{00} + p_{01} = 1. \tag{23}$$

Исходя из такой модели ошибок, определим вероятности $P\left[y_a \to y'_a\right]$, $P\left[y_a \to y'_b\right]$, $P\left[y_b \to y'_b\right]$ и $P\left[y_b \to y'_a\right]$.

Теорема 5. Вероятность $P\left[y_a \to y'_a\right]$ необнаруживаемого перехода $y_a \to y'_a$ равна

$$P[y_a \to y'_a] = \sum_{l=1}^{\min[k, n-k-1]} C_k^l C_{n-k-1}^l p_{00}^{n-k-1-l} p_{01}^l p_{11}^{k-l} p_{10}^l. \tag{24}$$

Доказательство. Необнаруживаемый переход вида $y_a \to y'_a$ является следствием симметричной поразрядной ошибки кратности $1 \le l \le \min\left[k, n-k-1\right]$. Так как переходы $1 \to 1$ и $1 \to 0$, $0 \to 0$ и $0 \to 1$ являются независимыми и несовместными событиями, то вероятность появления на выходе канала квазиравновесной комбинации y'_a, отличной от входной y_a, определяется как

$$p(y'_a) = p_{00}^{n-k-1-l} p_{01}^l p_{11}^{k-l} p_{10}^l. \tag{25}$$

Используя (25) и число r_3 вариантов поразрядных переходов (13) для случая $y_a \to y'_a$ (теорема 3), получаем

$$P[y_a \to y'_a] = r_3 \cdot p(y'_a) = \sum_{l=1}^{\min[k, n-k-1]} C_k^l C_{n-k-1}^l p_{00}^{n-k-1-l} p_{01}^l p_{11}^{k-l} p_{10}^l.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. Вероятность $P\left[y_b \to y_b'\right]$ необнаруживаемого перехода $y_b \to y_b'$ равна

$$P[y_b \to y_b'] = \sum_{l=1}^{\min[k-1,n-k]} C_{k-1}^{l} C_{n-k}^{l} p_{00}^{n-k-l} p_{01}^{l} p_{11}^{k-1-l} p_{10}^{l} . \tag{26}$$

Доказательство. Необнаруживаемый переход вида $y_b \to y_b'$ является следствием симметричной поразрядной ошибки кратности $1 \le l \le \min\left[k-1, n-k\right]$. Так как переходы $1 \to 1$ и $1 \to 0$, $0 \to 0$ и $0 \to 1$ являются независимыми и несовместными событиями, то вероятность появления на выходе канала квазиравновесной комбинации y_b', отличной от входной y_b, определяется как

$$p(y_b') = p_{00}^{n-k-l} p_{01}^{l} p_{11}^{k-1-l} p_{10}^{l} . \tag{27}$$

Используя (27) и число r_4 вариантов поразрядных переходов (15) для случая $y_b \to y_b'$ (теорема 4), получаем

$$P[y_b \to y_b'] = r_4 \cdot p(y_b') = \sum_{l=1}^{\min[k-1,n-k]} C_{k-1}^{l} C_{n-k}^{l} p_{00}^{n-k-l} p_{01}^{l} p_{11}^{k-1-l} p_{10}^{l} .$$

Теорема доказана.

Теорема 7. Вероятность $P\left[y_a \to y_b'\right]$ необнаруживаемого перехода $y_a \to y_b'$ равна

$$P[y_a \to y_b'] = C_k^1 p_{11}^{k-1} p_{10}^1 . \tag{28}$$

Доказательство. Необнаруживаемый переход вида $y_a \to y_b'$ является следствием асимметричной поразрядной ошибки кратности $l = e_{10} = 1$ (табл. 1). При этом $e_{01} = 0$, что, исходя из полноты событий (23), означает $p_{00} = 1$ и $p_{01} = 0$. Поскольку переходы $1 \to 1$ и $1 \to 0$ для заданной модели ошибок являются независимыми и несовместными событиями, то вероятность появления на выходе канала квазиравновесной комбинации y_b', отличной от входной y_a, определяется как

$$p(y_b') = p_{11}^{k-1} p_{10}^1 . \tag{29}$$

Используя (29) и число r_1 вариантов поразрядных переходов (11) для случая $y_a \to y_b'$ (теорема 1), получаем

$$P[y_a \to y_b'] = r_1 \cdot p(y_b') = C_k^1 p_{11}^{k-1} p_{10}^1 .$$

Теорема доказана.

Теорема 8. Вероятность $P\left[y_b \to y'_a\right]$ необнаруживаемого перехода $y_b \to y'_a$ равна

$$P[y_b \to y'_a] = C_{n-k}^{1} p_{00}^{n-k-1} p_{01}^{1}. \tag{30}$$

Доказательство. Необнаруживаемый переход вида $y_b \to y'_a$ является следствием асимметричной поразрядной ошибки кратности $l = e_{01} = 1$ (табл. 1). При этом $e_{10} = 1$, что, исходя из полноты событий (23), означает $p_{11} = 1$ и $p_{10} = 0$. Поскольку переходы $0 \to 0$ и $0 \to 1$ для заданной модели ошибок являются независимыми и несовместными событиями, то вероятность появления на выходе канала квазиравновесной комбинации y'_a, отличной от входной y_b, определяется как

$$p(y'_a) = p_{00}^{n-k-1} p_{01}^{1}. \tag{31}$$

Используя (31) и число r_2 вариантов поразрядных переходов (12) для случая $y_b \to y'_a$ (теорема 2), получаем

$$P[y_b \to y'_a] = r_2 \cdot p(y'_a) = C_{n-k}^{1} p_{00}^{n-k-1} p_{01}^{1}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, с учетом теорем 5–8 и выражений (24), (26), (28), (30) общий вид равенства (22) для вероятности $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки для случая независимых ошибок $1 \to 0$ и $0 \to 1$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} V_{КРК} = &\sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p\left(y_a\right)\left(\sum_{l=1}^{\min[k,n-k-1]} C_k^l C_{n-k-1}^l p_{00}^{n-k-1-l} p_{01}^l p_{11}^{k-l} p_{10}^l + C_k^1 p_{11}^{k-1} p_{10}^1\right) + \\ &+ \sum_{b=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p\left(y_b\right)\left(\sum_{l=1}^{\min[k-1,n-k]} C_{k-1}^l C_{n-k}^l p_{00}^{n-k-l} p_{01}^l p_{11}^{k-1-l} p_{10}^l + C_{n-k}^1 p_{00}^{n-k-1} p_{01}^1\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Вероятность $V_{КРК}$ необнаруживаемой ошибки (32) зависит от появления на входе канала квазиравновесных комбинаций y_a и y_b соответствующих подмножеств $Y[k, n-k-1]$ и $Y[k-1, n-k]$. В предположении, что комбинации y_a и y_b возникают на входе канала с равными вероятностями

$$p(y_a) = p(y_b) = \frac{1}{N_{КРК}} = \frac{1}{C_n^k}$$

получаем вероятности появления комбинаций для рассматриваемых подмножеств:

$$\sum_{a=1}^{C_{n-1}^{k}} p(y_a) = \frac{N_k}{N_{КРК}} = \frac{C_{n-1}^{k}}{C_n^k} \text{ и } \sum_{i=1}^{C_{n-1}^{k-1}} p(y_b) = \frac{N_{k-1}}{N_{КРК}} = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}.$$

Следовательно, при равновероятности комбинаций КРК на входе канала вероятность V_{KPK} необнаруживаемой ошибки (32) имеет значение:

$$V_{KPK} = \frac{C_{n-1}^{k}}{C_{n}^{k}}\left(\sum_{l=1}^{\min[k,n-k-1]} C_{k}^{l}C_{n-k-1}^{l}p_{00}^{n-k-1-l}p_{01}^{l}p_{11}^{k-l}p_{10}^{l} + C_{k}^{1}p_{11}^{k-1}p_{10}^{1}\right) + \\ + \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{n}^{k}}\left(\sum_{l=1}^{\min[k-1,n-k]} C_{k-1}^{l}C_{n-k}^{l}p_{00}^{n-k-l}p_{01}^{l}p_{11}^{k-1-l}p_{10}^{l} + C_{n-k}^{1}p_{00}^{n-k-1}p_{01}^{1}\right). \tag{33}$$

При больших значениях n вероятности квазиравновесных комбинаций можно считать равными друг другу и на практике с относительно небольшой погрешностью проводить вычисления V_{KPK} по формуле (33).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с целью данной работы полученные соотношения (32) и (33) позволяют получить точные количественные оценки ошибкообнаруживающей способности КРК в зависимости от параметров n и k, модели канала связи, его асимметрии, модели ошибок и их кратности. Анализ, проведенный на основе (32) и (33), предоставит возможность: 1) более точно выделить области применения КРК; 2) разработать отвечающие практике способы адаптации ошибкообнаруживающей способности КРК в распределенных автоматизированных системах для решения различных информационных задач таких, как сбор данных, их передача, управление и т.п. По результатам проведенных исследований получила дальнейшее развитие информационная технология по адаптации параметров КРК к количеству ошибок как в канале связи, так и самих оконечных устройствах автоматизированных систем.

SUMMARY

ERROR DETECTION ABILITY OF A QUASI-CONSTANT WEIGHT CODE

I.A. Kulyk, O.M. Skordina, S.M. Posny,
Sumy State University, Sumy

In the paper the quantitative evaluation of error detection ability for a quasi-constant weight code is obtained. The evaluation makes it possible to determine more accurately fields of its effective application and to develop methods of error quantity adaptation of code parameters for transmission channels and terminal units of distributed automated system. In the capacity of such an evaluation the undetected error probability is used.

Key words: *adaptation, error probability, erroneous transition, transmission channel, quasi-constant weight combination*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Цымбал В.П. Теория информации и кодирование. – К.: Вища школа, 1992. – 263 с.
2. Kohzuki K. A Class of Single Error Correcting Constant Weight Codes / K. Kohzuki, K. Tokiwa, H. Tanaka // Electronics and Communications in Japan. Part 3. – 1997. - Vol. 80, № 7. – P. 55–64.
3. McWilliams F. J. The Theory of Error-Correcting Codes / F. J. McWilliams, N. J. Sloane. – Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1977. – 762 p.
4. Кулик И. А. Биномиальные преобразования квазиравновесных кодов / И. А. Кулик, Е. М. Скордина // Вісник Сумського державного університету. – 2010. – № 3. – С. 178–186.
5. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельд. – М.: Мир, 1980. – 476 с.

6. Борисенко А. А. Биномиальный счет. Теория и практика: монография / А. А. Борисенко. – Сумы: ИТД "Университетская книга", 2004. – 170 с.
7. Борисенко А. А. Биномиальное кодирование: монография / А. А. Борисенко, И. А. Кулик. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2010. – 206 с.
8. Кулик И. А. Генерирование кодов-сочетаний для решения информационных задач ИУС / И. А. Кулик, Е. М. Скордина, С. В. Костель // АСУ и приборы автоматики. Всеукраин. межведомст. сборник. – 2011. – № 157.
9. Mao-Chao Lin. Constant Weight Codes for Correcting Symmetric Errors and Detecting Unidirectional Errors / Lin Mao-Chao // IEEE Transactions on Computers. – Nov. 1993. – Vol. 42, № 11. – P. 1294–1302.
10. Smith D. Application of Coding Theory to the Design of Frequency Hopping Lists / D. Smith et al. // Technical Report UG-M-02-1. – University of Glamorgan, Wales, UK, 2002. – 148 p.
11. Agrell E. Upper bounds for constant-weight codes / E. Agrell, A. Vardy, K. Zeger // IEEE Transactions on Information Theory. – Nov. 2000. – Vol. 46, № 7. – P. 2373–2395.
12. Кулик И. А. Формирование квазиравновесных кодов на основе двоичных биномиальных чисел / И. А. Кулик, Е. М. Скордина, С. В. Костель // Вісник Сумського державного університету. – 2010. – №1. – С. 134–142.
13. Борисенко А. А. Оценка помехоустойчивости неразделимых кодов / А. А. Борисенко, Е. Л. Онанченко // Вісник Сумського державного університету. – 1994. – №2. – С. 64–68.

Поступила в редакцию 14 марта 2012 г.