

Шифр: “Постріл-6”

ВІЙСЬКОВІ НАУКИ

Тема роботи:

**“МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО
РОЗПОДІЛУ ЗАСОБІВ УРАЖЕННЯ”**

2011

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| ВСТУП | 3 |
| РОЗДІЛ 1 | 5 |
| 1.1 Постановка задачі..... | 5 |
| 1.2 Формалізація задачі..... | 5 |
| РОЗДІЛ 2 | 7 |
| 2.1 Математична модель оптимального розподілу засобів ураження по цілям евентуального противника. | 7 |
| 2.2 Обґрунтування методу знаходження оптимального розв'язку задачі. | 8 |
| 2.3 Алгоритм отримання шуканого вектору. | 10 |
| 2.4 Аналіз отриманого алгоритму. | 11 |
| РОЗДІЛ 3 | 14 |
| 3.1 Конкретизація математичної моделі оптимального розподілу засобів ураження по цілям у відповідності з поставленим завданням. | 14 |
| 3.2 Розрахунок ступеня ураження цілей евентуального противника. | 15 |
| ВИСНОВКИ..... | 24 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ..... | 25 |
| Додаток 1..... | 26 |
| Додаток 2..... | 27 |

ВСТУП

В сучасних умовах розвитку науки і техніки особлива увага приділяється вирішенню проблем, які мають місце у військовій справі. Важлива роль при цьому належить математиці. Розвиток математичних методів дозволяє розв'язувати принципово нові задачі, які характерні складними залежностями, великою розмірністю і необхідністю враховувати велику кількість факторів. Особливо це стосується тих задач, у яких необхідно знаходити оптимальне рішення. У цьому випадку приходять до математичного моделювання, оскільки за допомогою математичної моделі можна за відомими вхідними даними отримати нові, раніше невідомі дані про досліджуваний об'єкт.

Практичні задачі військової справи, які описуються математичними методами, можна розбити на дві групи. До першої відносяться задачі визначення оптимальних методів управління технічними системами, знаходження оптимальних варіантів бойових дій, організація ремонту озброєння і т.д. Друга група включає задачі, пов'язані з визначенням оптимальних характеристик перспективних систем озброєння і військової техніки, які розробляються. До класу таких задач відносяться так звані задачі розподілу, які зводяться до того, що необхідно знайти такий розподіл ресурсів по операціях, при якому або мінімізуються загальні витрати, або максимізується деяка міра ефективності.

При математичній постановці задачі оптимізації використовується поняття критерію оптимальності як показника, екстремальне значення якого характеризує максимально можливу ефективність системи.

Серед математичних методів оптимізації важливе місце займає метод динамічного програмування. Методи динамічного програмування застосовуються для розв'язання найрізноманітніших військових, технічних і економічних задач.

Однією з таких задач, яка відіграє суттєву роль при плануванні і управлінні бойовими операціями, є задача оптимального розподілу уражаючих стрільбових засобів поміж різними цілями.

У даній роботі розв'язок цієї задачі знаходиться за допомогою так званого метода максимального елемента, який відноситься до градієнтних методів. Робота складається зі вступу, трьох розділів і висновку.

У першому розділі сформульована постановка задачі і її формалізація.

Другий розділ присвячений побудові математичної моделі оптимального розподілу засобів ураження по цілям еventуального противника. Обґрунтовано метод знаходження оптимального розв'язку і наведено алгоритм отримання шуканого вектора.

Розв'язок прикладної задачі з застосуванням математичної моделі і конкретних вихідних даних наведено у третьому розділі. При цьому, враховуючи що задано багато цілей, розроблено алгоритм, за допомогою якого знайдено шукані показники ефективності ураження цілей еventуального противника.

Результати розрахунків подані у вигляді графіків і таблиць. Результати роботи програми наведено в додатку.

РОЗДІЛ 1

1.1 Постановка задачі

Евентуальний противник підрозділами 2 мбр веде наступ (див. схему рис. 1) з завданням прорвати оборону 1 мбр і оволодіти районом оборони 1 мб.

1 мб бригади обороняє район оборони батальйону з завданням нанести противнику максимальних втрат, не допустити прориву на даному напрямку і втримати займаний район.

2/3 БрАГ підтримує дії 1 мб. 2/4 БрАГ підтримає дії 4 мбр і діє за вказівками командира 4 мбр.

Вогневі завдання 2/3 БрАГ: уразити Ц212, Ц301, ЦА51 і бути в готовності до ураження інших цілей. Вогневі завдання 2/4 БрАГ: уразити Ц311, Ц111, Ц41 і бути в готовності до ураження інших цілей.

1.2 Формалізація задачі

Виходячи з тактичної обстановки та постановки задачі побудувати математичну модель, яка описує процес бойових дій між протидіючими угрупованнями:

- Угрупування А – евентуальний противник, який має у своєму складі відповідні засоби і сили (Ц212, Ц301, Ц51, Ц311, Ц111, Ц41), застосування яких веде до поставленої мети;

- Угрупування В – сили району оборони і засоби ураження, завдання яких полягає в нанесенні противнику максимальних втрат силами 2/3 БрАГ і 2/4 БрАГ цілям Ц41, А51, РЛС.

В якості показника ефективності вибрати максимум математичного сподівання втрат, що завдається противнику.

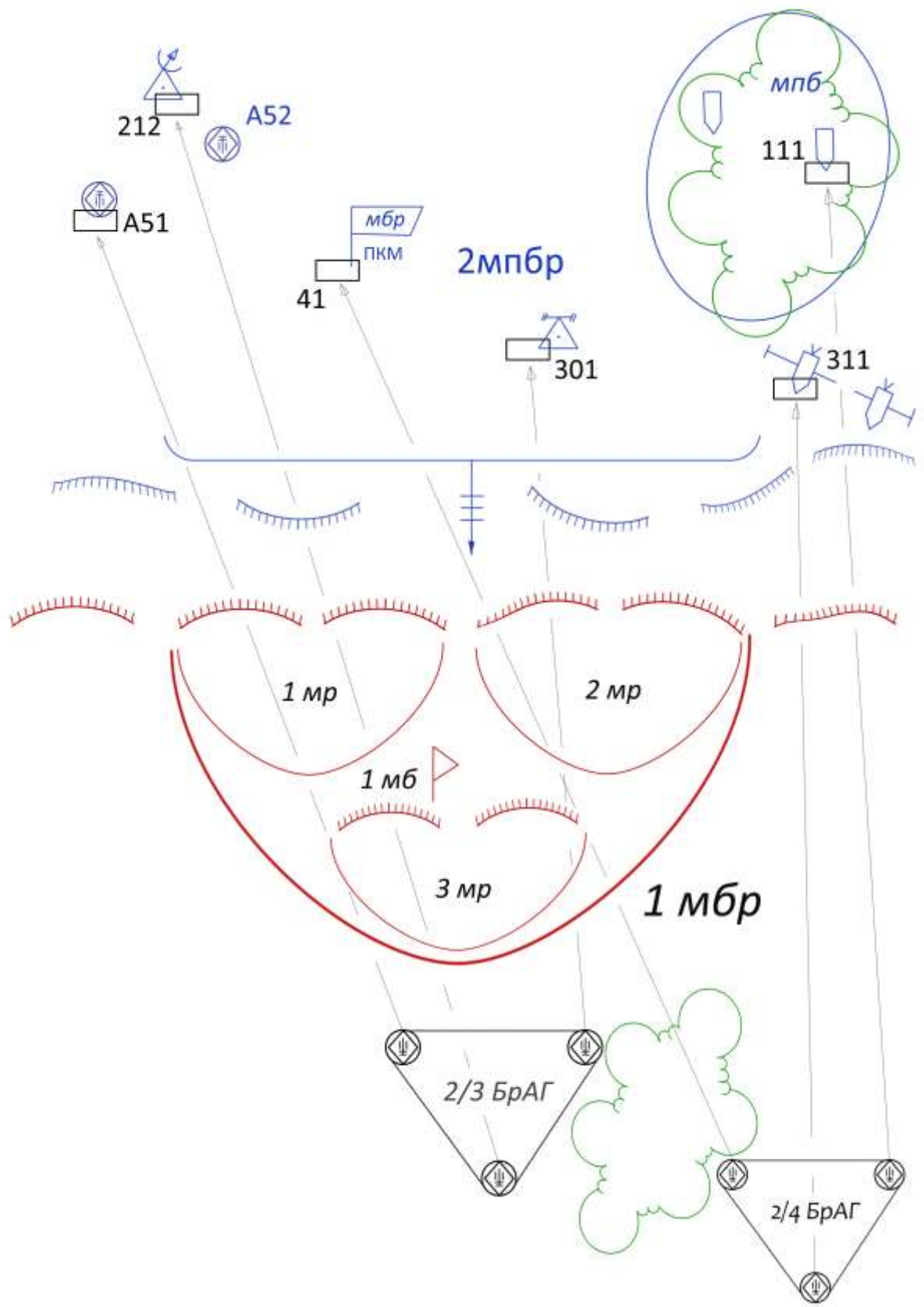


Рисунок 1. Схема протидії угруповань А і В.

РОЗДІЛ 2

2.1 Математична модель оптимального розподілу засобів ураження по цілям евентуального противника.

Позначимо через N – число неоднорідних засобів ураження, яке має у своєму складі угруповання В, через m – число цілей угруповання А, що підлягають ураженню. Нехай задана важливість A_i ($i=1,2..m$) кожної цілі і ймовірності P_{ji} ураження i -ї цілі j -ю гарматою у вигляді матриці

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1i} & \dots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2i} & \dots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{j1} & P_{j2} & \dots & P_{ji} & \dots & P_{jm} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_{Nj} & \dots & P_{Nm} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Розглянемо випадкову подію A_i ($i=1,2..m$), яка полягає у тому, що на i -у ціль направлені деякі з N гармат і вона уражена, тобто має місце хоча б одна із випадкових подій $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{Ni}$ – ціль уражена відповідно 1-ю, 2-ю, ..., N -ю гарматами. Очевидно, що події A_i (i -а ціль уражена хоча б одною із гармат) та $\overline{A_{1i}} \overline{A_{2i}} \dots \overline{A_{Ni}}$ (жодна із гармат не уразила i -у ціль) – протилежні, тоді

$$P(A_i) + P(\overline{A_{1i}} \overline{A_{2i}} \dots \overline{A_{Ni}}) = 1 \quad (2.2)$$

звідки, користуючись теоремою множення для взаємно незалежних подій [5, 6], одержуємо

$$P(A_i) = 1 - P(\overline{A_{1i}} \overline{A_{2i}} \dots \overline{A_{Ni}}) = 1 - \prod_{j=1}^N P(\overline{A_{ji}}) \quad (2.3)$$

або, остаточно, поклавши $p_i = P(A_i)$, $p_{ji} = P(A_{ji})$ маємо

$$p_i = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - p_{ji})^{x_{ji}}, \quad (2.4)$$

де $x_{ji} = 1$ для тих j -х засобів, які направлені в i -у ціль і, таким чином, відповідні їм множники $(1 - p_{ji})$ присутні в добуткові у першому степені;

$x_j = 0$ для тих тих j -х засобів, які не направлені в ціль, і відповідні їм множники $(1 - p_{ji})$ дорівнюють одиниці. Таким чином, x_{ji} – кількість засобів, що виділяються для дії по i -й цілі j -м засобом. Тоді [4, 6] математичне сподівання випадкової величини X – числа втрат, що будуть завдані противникові, визначимо за формулою

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^m A_i p_i \quad (2.5)$$

або з урахуванням (2.4) і того, що максимум втрат, наприклад, розподіляється по S цілям із m , отримуємо математичну модель, яка описує протидію угруповань A і B :

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^S A_i \left[1 - \prod_{j=1}^N (1 - p_{ji})^{x_{ji}} \right]. \quad (2.6)$$

Отже, математичне формулювання поставленої задачі зводиться до наступного твердження: необхідно знайти такий розподіл, тобто вектор $X_0 = \{x_{ji}^0\}_m$, при якому досягається максимум функції (2.6) при лінійному обмеженні на його компоненти

$$\sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^N x_{ji} \leq N \quad (2.7)$$

і додаткових умовах:

$$\begin{cases} x_{ji} \in \{0, 1, \dots, N\}, \\ 0 \leq (q_{ji} = 1 - p_{ji}) \leq 1, \\ A_i > 0, \\ i = \overline{1, S}, j = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (2.8)$$

2.2 Обґрунтування методу знаходження оптимального розв'язку задачі.

В даній задачі нам потрібно скласти оптимальний план розподілу засобів по цілям. Тобто із формули (2.6) ми бачимо, що треба розглянути всі комбінації розподілів j -го засобу по i -й цілі і визначити, яка із цих комбінацій буде надавати цільовій функції максимальне значення.

В основу методу знаходження оптимального розв'язку [8,9] задачі буде покладено метод максимального елемента [12-15]. Коротко опишемо в чому полягає суть цього методу. На довільному кроці процесу розподіляється тільки одна одиниця дискретного ресурсу. На формальній мові це означає, що на t -му кроці процесу ($t=1, \dots, T$) одиничний приріст $\Delta = 1$ надається тільки одній (j_t, i_t) -й компоненті шуканої оптимальної матриці $X_0 = \{x_{ji}^0\}$. Таким чином, після кінцевого числа кроків $t=T$, рівного числу одиниць ресурсу (N), увесь ресурс буде розподілений, тобто отримано оптимальне рішення поставленої задачі.

Як ми бачимо, алгоритм побудований на послідовному розподіленню засобів по одному на кожному кроці процесу, у відповідності з максимальним приростом цільової функції. Отримаємо вираз для обрахунку цільової функції Φ_t^+ на довільному кроці процесу.

Нехай до моменту назначення t -го засобу кожний об'єкт вже уражений з певною ймовірністю $P_{ji}^{(t-1)} = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - p_{ji})^{x_{ji}}$ або $P_{ji}^{(t-1)} = 1 - Q_{ji}^{(t-1)}$ за рахунок попереднього розподілення $(t-1)$ певних засобів по деяким точкам прицілювання. Сумарні очікувані втрати будуть становити

$$\Phi_{t-1}^+ = \sum_{i=1}^S A_i P_{ji}^{(t-1)} \quad (2.9)$$

За рахунок пробного назначення (пробні назначення для всіх (j_t, i_t) необхідні для того, щоб виявити максимальний елемент вектора приросту) ще одного j_t -го засобу по i_t -й точці прицілювання на t -у кроці процесу функція $\Phi(X)$ прийме значення

$$\Phi_t^+ = \sum_{i \neq i_t}^S A_i P_{j_t, i}^{(t-1)} + A_{i_t} (1 - Q_{j_t, i_t}^{(t-1)} q_{j_t, i_t}) \quad (2.10)$$

Знайдемо приріст функції Φ_t^+ , який отримується в даному випадку на t -у кроці процесу:

$$\Delta_{j_t i_t}^+ = \Phi_t^+ - \Phi_{t-1}^+ = A_{i_t} Q_{j_t i_t}^{(t-1)} p_{j_t i_t}. \quad (2.11)$$

Використовуючи позначення

$$A_{i_t}^{(t-1)} = A_{i_t} Q_{j_t i_t}^{(t-1)} \quad (2.12)$$

запишемо приріст $\Delta_{j_t i_t}^+$ в кінцевому вигляді:

$$\Delta_{j_t i_t}^+ = A_{i_t}^{(t-1)} p_{j_t i_t}, \quad j_t = \overline{1, N}, \quad i_t = \overline{1, S}. \quad (2.13)$$

2.3 Алгоритм отримання шуканого вектору.

Використовуючи попередні міркування алгоритм оптимізації тепер може бути записаний наступним чином.

Алгоритм.

1. Знайти компоненти матриці $\Delta_{j_t i_t}^+$ для чергового кроку процесу за формулою

$$\Delta_{j_t i_t}^+ = A_{i_t}^{(t-1)} p_{j_t i_t}, \quad j_t = \overline{1, N}, \quad i_t = \overline{1, S},$$

при цьому для $t = 1$ маємо

$$A_{i_t}^{(0)} = A_{i_t}.$$

2. Призначити одиничний засіб по $l = l_t$ -й точці прицілювання, для якої виконується умова

$$\Delta_{j_t i_t}^+ = \max_{\substack{1 \leq j_t \leq N \\ 1 \leq i_t \leq S}} \Delta_{j_t i_t}^+.$$

3. Знайти поточну кількість засобів, що назначені з j_t -го засобу по i_t -й точці прицілювання:

$$x_{j_t i_t}^{(t)} = \begin{cases} x_{j_t i_t}^{(t-1)}, & \text{якщо } j_t \text{ засіб не направлений на } i_t \text{ ціль,} \\ x_{j_t i_t}^{(t-1)} + 1, & \text{якщо } j_t \text{ засіб направлений на } i_t \text{ ціль,} \end{cases}$$

при цьому

$$x_{j_t i_t}^{(0)} = 0.$$

4. Перерахувати важливість (вагу) об'єктів за формулою

$$A_i^{(t)} = A_i^{(t-1)} q_{j_i t}.$$

5. Знайти поточне значення втрат:

$$\Phi_t^+ = \Phi_{t-1}^+ + \Delta_{l, i_t}^+, \quad \Phi_0 = 0, \quad t := t + 1.$$

6. Перевірити умову $t \leq N$: так – перейти до пункту 1, ні – перейти до пункту 7.

7. Показати результат

$$\Phi(X_0) = \Phi_N^+, \quad \{x_{j_i t}^0\} = \{x_{j_i t}^{(N)}\}$$

і закінчити обчислення.

2.4 Аналіз отриманого алгоритму.

Покажемо, що запропонований алгоритм є оптимальним і забезпечує точне рішення задачі.

Розглянемо роботу алгоритму починаючи з $t=1$ -го кроку процесу. Для простоти розглянемо випадок, коли $X = \{x_l\}$ є вектором, у випадку матриці аналіз є аналогічним.

Маємо вектор $\{\Delta_l^+\}_m$, компоненти якого (прирости) пронумеровані в порядку зменшення величин:

$$\Delta_1^+ \geq \Delta_2^+ \geq \dots \geq \Delta_l^+ \geq \dots \geq \Delta_n^+ \quad (2.14)$$

Згідно алгоритму при даній нумерації засіб буде назначатися спочатку на перший об'єкт ($l=1$). Буде назначена така їх кількість $x_l=k$, при якій уже наступний $(k+1)$ -й засіб не забезпечує об'єкту $l=1$ найбільший приріст, таким чином, умова (2.14) порушується, тобто:

$$\Delta_1^+ |_{x_l=k} \geq \Delta_2^+ \geq \dots \geq \Delta_l^+ \geq \dots \geq \Delta_n^+, \quad (2.15)$$

$$\Delta_1^+ |_{x_l=k+1} < \Delta_2^+ \geq \dots \geq \Delta_l^+ \geq \dots \geq \Delta_n^+. \quad (2.16)$$

Тоді наступний $(k+1)$ -й засіб буде назначено на об'єкт $l=2$, и далі назначення будуть чередуватися між першими двома об'єктами до тих пір, поки приріст на третьому об'єкті не перевищить приріст на кожному із

перших двох. Наступний засіб у таких умовах згідно алгоритму буде назначатися на третій об'єкт і т.д. до розподілення всіх m засобів.

Така процедура, як можна побачити, приводить до максимального урівнювання поточних приростів Δ_l^+ на деякій сукупності перших r об'єктів з найменшими порядковими номерами, що відповідають послідовності (2.14). Якщо середнє арифметичне значення приростів Δ_l^+ для перших r об'єктів позначити через λ , то можна записати:

$$\lambda \approx \Delta_1^+ |_{x_1=k_1} \approx \Delta_2^+ |_{x_2=k_2} \approx \dots \approx \Delta_r^+ |_{x_r=k_r} \geq \Delta_{r+1}^+ \geq \dots \geq \Delta_m^+, \quad (2.17)$$

де вектор $\{x_l\}_r$ задовольняє умову: $\sum_{l=1}^r x_l \leq N$.

Зміст виразу (2.17) полягає в тому, що приріст Δ_l^+ , отримуваний за рахунок x_l -го засобу, приблизно рівний для перших r об'єктів і не менший, ніж приріст від однієї одиниці засобів для кожного із інших ($l > r$) об'єктів, тобто

$$\Delta_l^+ = \begin{cases} \approx \lambda, & \text{якщо } x_l > 0 \ (l \leq r), \\ \leq \lambda, & \text{якщо } x_l = 0 \ (l > r). \end{cases} \quad (2.18)$$

Но величина $\Delta_l^+ = \Phi_t^+ - \Phi_{t-1}^+$, по суті є різницеvim аналогом частинної похідної $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_l}$ при одиничному прирості змінної ($\Delta x_l = 1$). Значить

замість (2.18) можна записати:

$$\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_l} = \begin{cases} \frac{\Delta \Phi(x_l)}{\Delta x_l} \approx \lambda & \text{для } l \leq r, \\ \frac{\Delta \Phi(x_l)}{\Delta x_l} \leq \lambda & \text{для } l > r. \end{cases} \quad (2.19)$$

Умову (2.19) можна розглядати як дискретний варіант необхідних умов Лагранжа для екстремума [10, 12].

Дійсно, відмовимося тимчасово від умови дискретності та невід'ємності змінних x_j . Тоді задача (2.6-2.8) може бути вирішена за допомогою множників Лагранжа. Функція Лагранжа [11] буде мати вигляд:

$$\Psi(X) = \Phi(X) - \delta \left(\sum_{j=1}^m x_j - N \right), \quad (2.20)$$

де δ – множник Лагранжа.

Необхідні умови екстремума:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi(x_j)}{\partial x_j} - \delta, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.21)$$

Припустимо, що при цих умовах змінні починаючи з x_{r+1} від’ємні. Для того, щоб зберігти умову невід’ємності, потрібно прийняти ці змінні рівними нулю, тоді умова (2.21) прийме вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x_j)}{\partial x_j} = \delta & \text{для } j \leq r \ (x_j \neq 0), \\ \frac{\partial \Phi(x_j)}{\partial x_j} \leq \delta & \text{для } j > r \ (x_j = 0). \end{cases} \quad (2.22)$$

Оскільки функція $\Phi(x_j)$ випукла вгору по кожній змінній (це забезпечує єдиність рішення), то умова (2.22) являє собою і достатню умову максимуму. Із “точністю до дискретності» умови (2.22) співпадають з умовами (2.22). Зменшуючи крок дискретності (різниця між двома допустимими суміжними значеннями змінної x_j) аж до нуля умови (2.19) і умови (2.22) співпадуть з точністю до позначення, що вказує нам на оптимальність запропонованого алгоритму.

Відмітимо, що на практиці такого співпадіння бути не може, оскільки тоді алгоритм стане мати нескінченну кількість кроків. “Неперервний” варіант задачі (2.6-2.8) може бути вирішений за допомогою даного алгоритму наближено, з будь-яким ступенем точності, що забезпечується кроком дискретності. Покращення співпадіння можна досягти за допомогою зменшення кроку дискретності в ході оптимізації.

Слід зазначити, що умови (2.17), а значить і (2.19), виконуються в ході всієї оптимізації, тому і всі проміжні рішення також є оптимальними.

РОЗДІЛ 3

3.1 Конкретизація математичної моделі оптимального розподілу засобів ураження по цілям у відповідності з поставленим завданням.

З умови задачі отримуємо такі вихідні дані:

а) ураженню підлягають $m = 6$ цілей угруповання А: Ц212, Ц301, Ц51, Ц311, Ц111, Ц41.

б) уражаючими вогневими засобами угруповання В є артилерійські підрозділи 2/3 БрАГ і 2/4 БрАГ, які можуть виконувати поставлене завдання дивізіоном, двома батареями або однією батареєю. Таким чином, будемо вважати, що угруповання В має у своєму складі $N = 6$ засобів ураження.

в) з точки зору командування угрупованням В на даний момент часу найбільш важливими є цілі Ц41, А51 та РЛС (тобто $S = 3$), яким надаються відповідно коефіцієнти важливості: 50%, 30% та 20%.

г) розподілити засоби ураження угруповання Б таким чином, щоб математичне сподівання втрат еventуального противника було максимальним.

Таким чином, конкретизована задача [3, 7] оптимального цілерозподілу засобів ураження звелася до знаходження набору компонент вектора $X_0 = \{x_j^0\}_{j=1}^6$ при лінійному обмеженні на його компоненти

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^6 x_j \leq 6 \quad (3.1)$$

і додаткових умовах

$$\begin{cases} x_j \in \{0, 1, \dots, 6\}, \\ 0 \leq (q_{ji} = 1 - p_{ji}) \leq 1, \\ A_i > 0, \\ i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 6}. \end{cases} \quad (3.2)$$

та надають максимального значення нелінійній функції

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^3 A_i \left[1 - \prod_{j=1}^6 q_{ji}^{x_{ji}} \right]. \quad (3.3)$$

3.2 Розрахунок ступеня ураження цілей евентуального противника.

Для розрахунку ступеня ураження цілей евентуального противника скористаємося розробленим алгоритмом

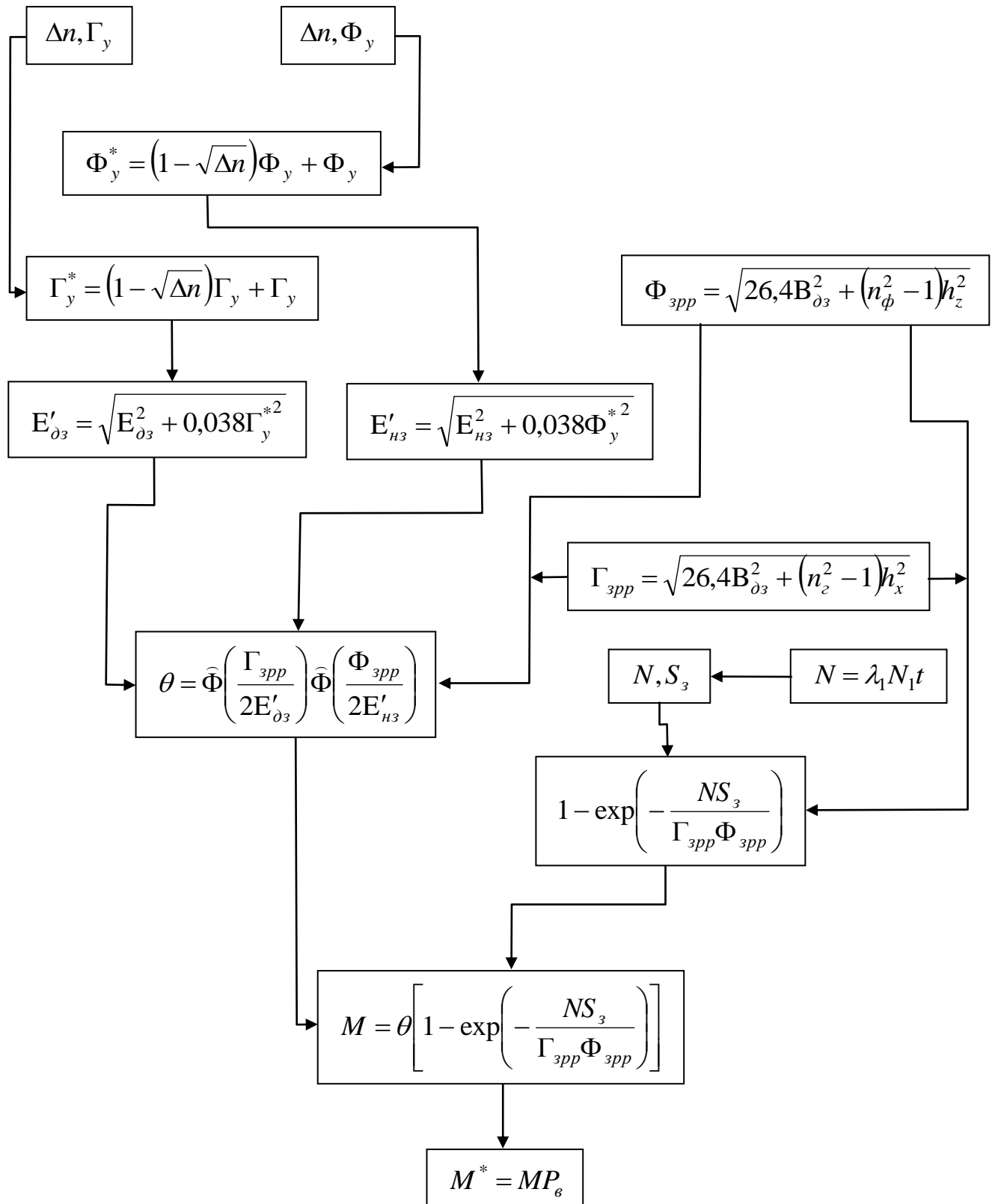


Рисунок 2. Алгоритм розрахунку ступеня ураження цілей евентуального противника.

де

n_2 – число установок прицілу (число батарей),

n_ϕ – число установок кутоміра (число гармат в батареї),

$h_x(h_z)$ – відстань між точками прицілювання по дальності (напрямку),

$B_{\partial z}(B_{\phi z})$ – зведені серединні помилки розсіювання по дальності (напрямку),

$\Gamma_{zpp}(\Phi_{zpp})$ – зведені серединні помилки розсіювання по дальності (напрямку),

h – число виявлених гармат,

Δn – частка (математичне сподівання) площі цілі, що накрита зоною ураження в залежності від числа виявлених гармат,

$E'_{\partial z}(E'_{nz})$ – зведені серединні помилки підготовки при стрільбі по груповій цілі за дальністю (напрячком),

$\Phi_y^*(\Gamma_y^*)$ – умовні розміри по фронту (глибині),

S_z – зведена зона ураження,

θ – імовірність накриття цілі областю розривів,

N – загальна витрата снарядів,

$E_{\partial z}(E_{nz})$ – зведені серединні помилки підготовки по дальністю (напрячком),

$\Phi_y(\Gamma_y)$ – розміри цілі по фронту (глибині).

Таблиця 1. Вхідні дані для розрахунку показника ефективності ураження цілі (для дивізіону).

| Арт. система | Цілі | РЛС (Ц301) | | АРК (Ц112) | | Жива сила (Ц11) | | Батарей (А-51) | | Ком. пункт (Ц41) | | ПТРК (Ц311) | |
|--------------|--|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------------|---------|----------------|---------------|------------------|---------|---------------|---------------|
| | | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 10 |
| Дивізіон | $\Gamma_y \times \Phi_y, \text{ м}^2$ | 150×150 | 150×150 | 150×150 | 150×150 | 200×300 | 200×300 | 100×200 | 100×200 | 100×300 | 100×300 | 100×200 | 100×200 |
| | $B_{\partial z} (B_{\partial z}), \text{ м}$ | 48(21) | 70(24) | 48(21) | 70(24) | 48(21) | 70(24) | 48(21) | 70(24) | 48(21) | 70(24) | 48(21) | 70(24) |
| | $E_{\partial z} (E_{\partial z}), \text{ м}$ | 63(38) | 77(42) | 63(38) | 77(42) | 63(38) | 77(42) | 63(38) | 77(42) | 63(38) | 77(42) | 63(38) | 77(42) |
| | $n_z (n_\phi)$ | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) |
| | $h_x (h_z), \text{ м}$ | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) |
| | $S_z, \text{ м}^2$ | 985 | 1090 | 380 | 415 | 540 | 570 | 405 | 410 | 395 | 415 | 715 | 710 |
| | $N_{\text{сн.}} (\Delta)$ | 150 (0.56) | 150 (0.56) | 150 (0.56) | 150 (0.56) | 180 | 180 | 100 (0.82) | 100 (0.82) | 90 | 90 | 100 (0.82) | 100 (0.82) |

Таблиця 2. Вхідні дані для розрахунку показника ефективності ураження цілі (для однієї батареї).

| Арт. система | Цілі | РЛС (Ц301) | | АРК (Ц112) | | Жива сила (Ц11) | | Батарея (А-51) | | Ком. пункт (Ц41) | | ПТРК (Ц311) | |
|---------------------------|--|------------------------|--------------|--------------|--------------|-----------------|---------------|----------------|--------------|------------------|--------------|--------------|---------|
| | | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 10 |
| Одна батарея | Вхідні параметри | Дальність стрільби, км | | | | | | | | | | | |
| | $\Gamma_y \times \Phi_y, \text{ м}^2$ | 150×150 | 150×150 | 150×150 | 150×150 | 200×300 | 200×300 | 100×200 | 100×200 | 100×300 | 100×300 | 100×200 | 100×200 |
| | $B_{\partial z} (B_{\bar{\partial z}}), \text{ м}$ | 38(8) | 53(9) | 38(8) | 53(9) | 38(8) | 53(9) | 38(8) | 53(9) | 38(8) | 53(9) | 38(8) | 53(9) |
| | $E_{\partial z} (E_{\text{нз}}), \text{ м}$ | 70(42) | 90(48) | 70(42) | 90(48) | 70(42) | 90(48) | 70(42) | 90(48) | 70(42) | 90(48) | 70(42) | 90(48) |
| | $n_z (n_{\phi})$ | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) | 3(6) |
| | $h_x (h_z), \text{ м}$ | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) |
| | $S_z, \text{ м}^2$ | 985 | 1090 | 380 | 415 | 540 | 570 | 405 | 410 | 395 | 415 | 715 | 710 |
| $N_{\text{сн.}} (\Delta)$ | 50 (0.56) | 50 (0.56) | 50 (0.56) | 50 (0.56) | 60 (0.56) | 60 (0.56) | 100 (0.56) | 100 (0.56) | 90 (0.56) | 90 (0.56) | 50 (0.56) | 50 (0.56) | |

Таблиця 3. Вхідні дані для розрахунку показника ефективності ураження цілі (для двох батарей).

| Арт. система | Цілі | РЛС (Ц301) | | АРК (Ц112) | | Жива сила (Ц11) | | Батарея (А-51) | | Ком. пункт (Ц41) | | ПТРК (Ц311) | |
|--------------------------|--|------------------------|--------------|--------------|--------------|-----------------|---------------|----------------|--------------|------------------|--------------|--------------|---------|
| | | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 12 | 10 | 10 |
| Дві батареї | Вхідні параметри | Дальність стрільби, км | | | | | | | | | | | |
| | $\Gamma_y \times \Gamma_\phi, \text{ м}^2$ | 150×150 | 150×150 | 150×150 | 150×150 | 200×300 | 200×300 | 100×200 | 100×200 | 100×300 | 100×300 | 100×200 | 100×200 |
| | $B_{\partial z} (B_{\bar{\sigma}_z}), \text{ м}$ | 43(16) | 62(17) | 43(16) | 62(17) | 43(16) | 62(17) | 43(16) | 62(17) | 43(16) | 62(17) | 43(16) | 62(17) |
| | $E_{\partial z} (E_{H_z}), \text{ м}$ | 77(46) | 83(45) | 77(46) | 83(45) | 77(46) | 83(45) | 77(46) | 83(45) | 77(46) | 83(45) | 77(46) | 83(45) |
| | $n_z (n_\phi)$ | 2(6) | 2(6) | 2(12) | 2(12) | 2(12) | 2(12) | 2(6) | 2(6) | 2(6) | 2(6) | 2(6) | 2(6) |
| | $h_x (h_z), \text{ м}$ | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(33) | 67(33) | 100(33) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) | 67(33) | 72(32) |
| | $S_3, \text{ м}^2$ | 985 | 1090 | 380 | 415 | 540 | 570 | 405 | 410 | 395 | 415 | 715 | 710 |
| $N_{\text{сн.}}(\Delta)$ | 50 (0.56) | 50 (0.56) | 50 (0.56) | 50 (0.56) | 60 (0.56) | 60 (0.56) | 100 (0.56) | 100 (0.56) | 90 (0.56) | 90 (0.56) | 50 (0.56) | 50 (0.56) | |

В якості елементів матриці (2.1) взято математичне сподівання відносного числа уражених окремих цілей зі складу групової або ймовірність ураження цілі. Розрахунок проводимо за алгоритмом (рис.2). Дані для розрахунку ступеня ураження відповідних цілей обираємо із таблиць 1-3, в основі яких лежать відомості отримані з [1], [2], [7] для артилерійської системи 152-мм СГ2С3М снаряд ОФ-540 підр. “О”.

Для ілюстрації наведемо приклад розрахунку одного з елементів в матриці (2.1). З цією метою сформулюємо наступну задачу: для ураження відкрито розташованої РЛС польової артилерії залучається дивізіон 152-мм СГ2С3. Дальність стрільби 12км. Визначення установок для стрільби на поразку здійснюється на основі повної підготовки [2]. Снаряд ОФ-540.

Визначити ефективність поразки цілі.

Розв'язок. З умови прикладу маємо: ціль окрема, неспостережна. Основний елемент, що підлягає ураженню, – антена. Вражаючий фактор – осколки. Подія поразки цілі – виведення РЛС зі стану боєздатності.

Згідно даних таблиць додаток вибираємо вхідні величини: зведена зона (площа) поразки $S_3 = 1090 м^2$; число установок прицілу $n_2 = 3$; число установок кутоміра $n_{\phi} = 6$; відстань між точками прицілювання по дальності (величина стрибка прицілу) $h_x = 72 м$; по напрямку $h_z = 32 м$; $N = 150 сн.$; $\Gamma_y \times \Phi_y = 150 \times 150 м^2$; $E_{\partial_3} = 77 м$; $E_{нз} = 42 м$; $B_{\partial_3} = 70 м$; $B_{\partial_3} = 24 м$; $\Delta n = 0.56$.

Послідовно (див. алгоритм) отримуємо:

1) підрахуємо умовні розміри цілі по фронту Φ_y^* і глибині Γ_y^* :

$$\Gamma_y^* = (1 - \sqrt{0,56}) \cdot 150 + 150 \approx 188 м$$

$$\Phi_y^* = (1 - \sqrt{0,56}) \cdot 150 + 150 \approx 188 м$$

2) відшукаємо зведені середні помилки підготовки та розсіювання за дальністю стрільби 12км для зразка озброєння 152-мм СГ2С3:

$$E'_{\partial z} = \sqrt{E_{\partial z}^2 + 0,038\Gamma_y^{*2}} = \sqrt{77^2 + 0,038 \cdot 188^2} = 85,276 \approx 85\text{м}$$

$$E'_{nz} = \sqrt{E_{nz}^2 + 0,038\Phi_y^{*2}} = \sqrt{42^2 + 0,038 \cdot 188^2} = 55,741 \approx 56\text{м}$$

3) зону рівномірного розподілу точок падіння снарядів підрахуємо за формулою (38) при числі установок прицілу $n_z = 3$, числі установок кутоміру (по числу гармат) $n_\phi = 6$, відстань між точками прицілювання $h_x = 72\text{м}$ по дальності і $h_z = 32\text{м}$ по напрямку, тоді маємо:

$$\Gamma_{zpp} = \sqrt{26,4B_{\partial z}^2 + (n_z^2 - 1)h_x^2} = \sqrt{26,4 \cdot 70^2 + 8 \cdot 72^2} = 413\text{м}$$

$$\Phi_{zpp} = \sqrt{26,4B_{\phi}^2 + (n_\phi^2 - 1)h_z^2} = \sqrt{26,4 \cdot 24^2 + 35 \cdot 32^2} = 226\text{м}$$

4) остаточно знаходимо шукану ймовірність θ за формулою (35):

$$\theta = \widehat{\Phi}\left(\frac{\Gamma_{zpp}}{2E'_{\partial z}}\right) \cdot \widehat{\Phi}\left(\frac{\Phi_{zpp}}{2E'_{nz}}\right) = \widehat{\Phi}\left(\frac{413}{2 \cdot 82}\right) \cdot \widehat{\Phi}\left(\frac{226}{2 \cdot 56}\right) = 0,89738 \cdot 0,82695 = 0,74$$

5) умовну ймовірність ураження за умови, що ціль накрита зоною рівномірного розсіювання, знайдемо за формулою:

$$P_y = 1 - e^{-\frac{NS_z}{\Gamma_{zpp}\Phi_{zpp}}}$$

Загальна витрата снарядів, згідно умови задачі, на ураження цілі $N = 150\text{сн.}$, зведена зона ураження $S_z = 1090\text{м}^2$, тоді з (39) отримуємо:

$$P_y = 1 - e^{-\frac{150 \cdot 1090}{413 \cdot 226}} = 1 - e^{-1,75} = 0,83$$

б) повну ймовірність ураження цілі (хоча б одне влучення) знаходимо за формулою:

$$P(y \geq 1) = \theta \cdot \left(1 - e^{-\frac{NS_z}{\Gamma_{zpp}\Phi_{zpp}}}\right) = 0,74 \cdot 0,83 = 0,61$$

Провівши такий розрахунок для кожного елементу матриці (2.1) отримаємо наступні результати

Таблиця 4. Ймовірність ураження цілей в залежності від заданого засобу.

| Важливість | Цілі \ Засоби | Дивізіон (2/3 БрАГ) | 1 | 2 | Дивізіон (2/4 БрАГ) | 1 | 2 |
|------------|--------------------|------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | | | батарея (2/3 БрАГ) | батареї (2/3 БрАГ) | | батарея (2/4 БрАГ) | батареї (2/4 БрАГ) |
| $A_1=50$ | ЦА51 (Батарея) | 0,32 | 0,13 | 0,21 | 0,25 | 0,1 | 0,19 |
| $A_2=30$ | Ц41 (Ком.Пункт) | 0,23 | 0,09 | 0,15 | 0,19 | 0,07 | 0,14 |
| $A_3=20$ | Ц301 (РЛС) | 0,63 | 0,35 | 0,54 | 0,61 | 0,31 | 0,48 |
| $A_4=0$ | Ц212 (АРК) | 0,41 | 0,17 | 0,21 | 0,36 | 0,15 | 0,20 |
| $A_5=0$ | Ц111 (Ж.С.) | 0,39 | 0,18 | 0,27 | 0,34 | 0,16 | 0,26 |
| $A_6=0$ | Ц311 (ПТРК) | 0,54 | 0,27 | 0,37 | 0,48 | 0,21 | 0,37 |

В даній таблиці кожний елемент показує ймовірність ураження відповідної цілі відповідним засобом, також наведені важливості цілей.

Використовуючи розроблений алгоритм (пункту 2.3) і результати таблиці 4 (як вхідні дані) було написано програму (див. додаток 2), яка дозволяє знайти оптимальне рішення поставленої задачі. Отриманий розв'язок задачі представимо у наступному вигляді

| Номер кроку | Засіб ураження | Ціль |
|-------------|------------------------|--------------------|
| 1 | Дивізіон (2/3 БрАГ) | ЦА51 (Батарея) |
| 2 | Дивізіон (2/3 БрАГ) | Ц301 (РЛС) |
| 3 | Дивізіон (2/3 БрАГ) | ЦА51 (Батарея) |
| 4 | Дивізіон (2/3 БрАГ) | ЦА51 (Батарея) |
| 5 | Дивізіон (2/3 БрАГ) | Ц41 (Ком.Пункт) |
| 6 | Дивізіон (2/3 БрАГ) | Ц41 (Ком.Пункт) |

Як ми бачимо всього по цілі ЦА51 (Батарей) буде нанесено 3 удари, по Ц41 (Ком.Пункт) – 2 удари і по Ц301 (РЛС) – 1 удар, тобто кількість ударів по цілі тим більша, чим більша її важливість. При цьому логічно, що всі удари нанесені Дивізіоном (2/3 БрАГ), оскільки в даному випадку він має найбільшу вогневу силу. Також ми бачимо, що в першу чергу була атакована ціль ЦА51 (Батарей), це пояснюється тим, що вона є найбільш небезпечною.

Отже, отримані результати повністю адекватні, це говорить про правильність побудованої математичної моделі.

Зазначимо, що цільова функція приймає значення: $\Phi_{\text{опт. розв.}} \approx 59,1$, що реально відображає можливості засобів ураження.

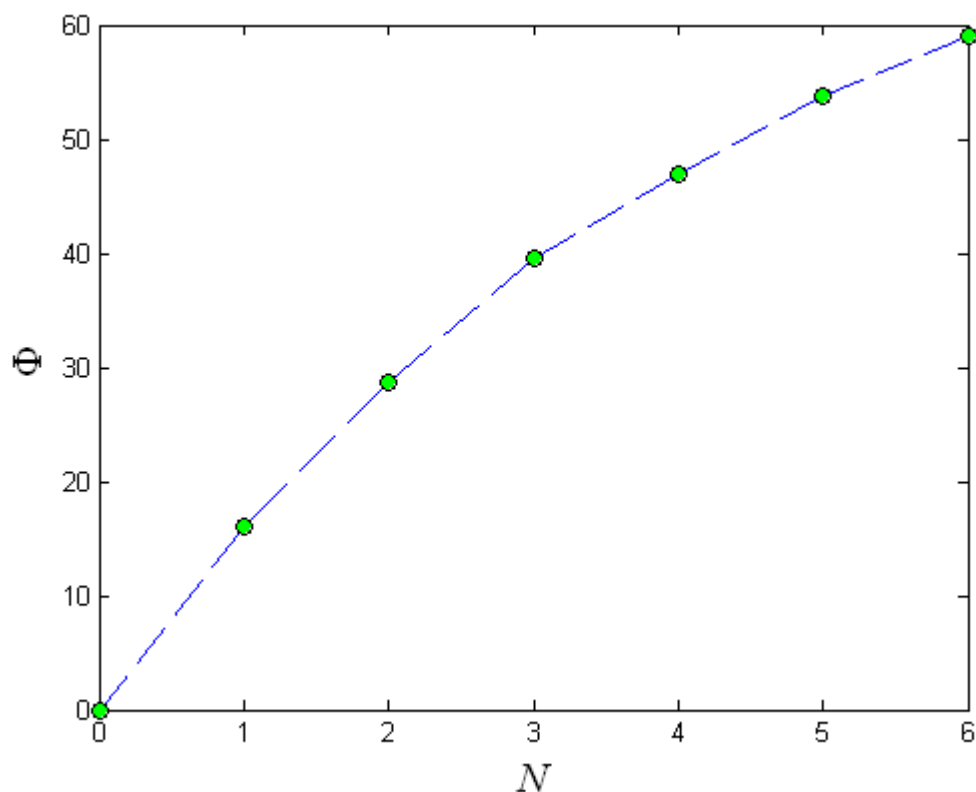


Рисунок 3. Графік залежності значення цільової функції від номера кроку (удару засобу по цілі).

Як ми бачимо, отримана функція є випуклою вгору, тобто для кожного кроку рішення задачі є оптимальним.

ВИСНОВКИ

В роботі наведена математична модель, яка дає змогу розв'язати задачу, яка описує процес бойових дій між двома протидіючими угрупованнями.

На основі методу максимального елемента було розроблено алгоритм розв'язку і відшукано оптимальний вектор розподілу засобів ураження (стрільбових комплексів) по цілях, зокрема була вирішена практична задача, яка полягає в нанесенні найбільш важливим силам противника максимальних втрат за допомогою бойових засобів 2/3 БрАГ і 2/4 БрАГ.

Розроблено алгоритм, за допомогою якого знаходиться математичне сподівання відносного числа уражених окремих цілей зі складу групової або ймовірність ураження цілі.

Проведено детальний аналіз запропонованих алгоритмів і показано, що вони дійсно є оптимальними на кожному кроці розрахунку цільової функції.

Відмітимо, що розв'язана задача і отримані висновки грають важливу роль при плануванні і управлінні бойовими операціями, при дослідженні на надійність зразків озброєння, в оборонних системах і т.і. Все це вказує на необхідність широкого застосування математичних методів у військовій справі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковский А. Ф. Основы оценки эффективности и выработки рекомендаций по поражению целей огнем артиллерии. – С-кт.–П.: ВАУ, 2000. – 309 с.
2. Правила стрільби і управління вогнем артилерії. – К.: Варта, 1995. – 304 с.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций – М.: Сов. радио, 1972. – 552 с.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей – М.: Высш. школа, 2001. – 575 с.
5. Максимов Ю. Д. Вероятностные разделы математики – С-кт.–П.: Иван Федоров, 2001. – 592 с.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей – М.: Наука, 1998. – 448 с.
7. Аверьянов А. И. и др. Управление в системах РАВ, ч.1 – Л.: ВАА, 1980. – 368 с.
8. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование – М.: Высш. школа, 1980. – 300 с.
9. Абчук В. А. и др. Справочник по исследованию операций – М.: Воениздат, 1979. – 369с.
10. Гурин Л. С., Дымарский Я. С., Меркулов А. Д. Задачи и методы оптимального распределения ресурсов – М.: Сов. радио, 1968. – 461 с.
11. Лиман Ф. М., Власенко В. Ф. і ін. Вища математика – С.: Унів. кн., 2006.– 614 с.
12. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования, изд. 2-е – М.: Сов. радио, 1964.
13. Беллман Р. Динамическое программирование – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.
14. Арис Р. Дискретное динамическое программирование – М.: Мир, 1969. – 171 с.
15. Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования – М.: Наука, 1964. – 176 с.

Лістинг програми розрахунку ймовірностей враження цілей (написано на мові впрограмування Maple)

```

restart:
with(LinearAlgebra):
Fu:=150: #фронт цілі
Hu:=150: #глибина цілі
Edz:=77: #зведені серединні помилки підготовки за дальністю
Enz:=42: #зведені серединні помилки підготовки за напрямком
Vdz:=70: #зведені серединні помилки розсіювання за дальністю
Vnz:=24: #зведені серединні помилки розсіювання за напрямком
nh:=3: #число установок прицілу
nf:=6: #число установок кутоміра(по числу гармат)
hx:=72: #відстань між точками прицілювання по дальності
hz:=32: #відстань між точками прицілювання по напрямку
Sz:=1090: #зведена зона ураження
N:=150:#кількість снарядів
deltan:=0.56:
ro:=0.4796:
Fuz:=(1-sqrt(deltan))*Fu+Fu:
Huz:=(1-sqrt(deltan))*Hu+Hu:
Edzh:=sqrt(Edz^2+0.038*Huz^2):
Enzh:=sqrt(Enz^2+0.038*Fuz^2):
Hzrr:=sqrt(26.4*Vdz^2+(nh^2-1)*hx^2):
Fzrr:=sqrt(26.4*Vnz^2+(nf^2-1)*hz^2):
a:=Hzrr/2/Edzh:
b:=Fzrr/2/Enzh:
teta:=4*ro^2/3.141592*evalf(int(exp(ro^2*(-r^2)),r=0..a))*evalf(int(exp(ro^2*(-x^2)),x=0..b)):
ru:=1-exp(-N*Sz/Fzrr/Hzrr):
M:=teta*ru:
print("Умовні розміри цілі по фронту");Fuz;
print("Умовні розміри цілі в глибину");Huz;
print("Зведені серединні помилки під час стрільби по груповій цілі за дальністю");Edzh;
print("Зведені серединні помилки під час стрільби по груповій цілі за напрямком");Enzh;
print("Глибина зони рівномірного розподілу точок падіння снарядів");Hzrr;
print("Фронт зони рівномірного розподілу точок падіння снарядів");Fzrr;
print("Ймовірність тета");
teta;
print("Умовна ймовірність ураження батареї за умови, що ціль накрита зоною рівномірного розсіювання");
ru;
print("Математичне сподівання відносного числа уражених окремих цілей зі складу групової");
M;

```

Лістинг програми знаходження оптимального розв'язку задачі (написано на мові програмування MATLAB)

```

clear all;

A(1)=50; A(2)=30; A(3)=20; A(4)=0; A(5)=0; A(6)=0;

m=6;
N=6;

%i - цілі
%j - засоби

p(1,1)=0.32; p(1,2)=0.13; p(1,3)=0.21; p(1,4)=0.25; p(1,5)=0.1;
p(1,6)=0.19;
p(2,1)=0.23; p(2,2)=0.09; p(2,3)=0.15; p(2,4)=0.19; p(2,5)=0.07;
p(2,6)=0.14;
p(3,1)=0.63; p(3,2)=0.35; p(3,3)=0.54; p(3,4)=0.61; p(3,5)=0.31;
p(3,6)=0.48;
p(4,1)=0.41; p(4,2)=0.17; p(4,3)=0.21; p(4,4)=0.36; p(4,5)=0.15;
p(4,6)=0.20;
p(5,1)=0.39; p(5,2)=0.18; p(5,3)=0.27; p(5,4)=0.34; p(5,5)=0.16;
p(5,6)=0.26;
p(6,1)=0.54; p(6,2)=0.27; p(6,3)=0.37; p(6,4)=0.48; p(6,5)=0.21;
p(6,6)=0.37;

q=1-p;

F(1)=(0);
X=zeros(m,N,N);
%%izr_srd=zeros(N);
t=1;

while t<=N

    delta=zeros(m,N);
    for i=1:m
        for j=1:N
            %%if (izr_srd(j)==0)
                delta(i,j)=delta(i,j)+A(i)*p(i,j);
            %%end
        end
    end

    [matrix_delta_t,matrix_i_t]=max(delta);
    [delta_t,j_t]=max(matrix_delta_t);
    i_t=matrix_i_t(j_t);

    X(i_t,j_t,t)=X(i_t,j_t,t)+1;
    A(i_t)=A(i_t)*q(i_t,j_t);

```

```
F(t+1)=F(t)+delta_t;
%%izr_srd(j_t)=izr_srd(j_t)+1;
t=t+1;
end;

Function=F(end)
X

i=0:N;
plot(i,F,'--o','LineWidth',1,...
      'MarkerEdgeColor','k',...
      'MarkerFaceColor','g',...
      'MarkerSize',7)

xlabel('N')
ylabel('F')
title('Plot of The Function')
```