УДК 621. 3. 037. 37

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СЧЕТА В КОДЕ ФИБОНАЧЧИ

А. А. Борисенко, *д-р техн. наук, профессор,*
А. П. Стахов, *д-р техн.наук, профессор,*
Сумский государственный университет, г. Сумы

В данной статье рассмотрен метод счета фибоначчиевых чисел, представленных в нормальной форме. В отличие от ранее предложенных методов счета он не использует операций сверток и разверток с переходом, при этом, к разным формам представления фибоначчиевых чисел. Это позволяет сделать реализацию счетчиков на его основе более простой и быстродействующей при сохранении возможности обнаружения ошибок.
Ключевые слова*: счет, Фибоначчи, свертки, развертки, счетчик, ошибки .*

У цій статті поданий метод лічби фібоначиєвих чисел, зображених у нормальній формі. На відміну від раніше запропонованих методів лічби він не використовує операцій згорток і розгорток з переходом, при цьому, до різних форм зображення фібоначчієвих чисел. Це дозволяє зробити реалізацію лічильників на його основі більш простою і швидкодіючою при збереженні можливості знаходження помилок.
Ключові слова*: лічба, Фібоначчі, згортки, розгортки, лічильник, помилки*

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Начиная с 60-х 20 в. в современной математике начала активно развиваться «теория чисел Фибоначчи». Толчком к этим исследованиям стала брошюра советского математика Николая Воробьева *«Числа Фибоначчи»* [1], первое издание которой появилось в 1961 г. Эта брошюра выдержала ряд изданий и была переведена на многие иностранные языки. В 1963 г. группа американских математиков организовала новое математическое сообщество – *Фибоначчи Ассоциацию*, которая с 1963 г. начала издавать специальный математический журнал *"The Fibonacci Quarterly"*, а с 1984 г. регулярно (один раз в 2 года) проводить Международную конференцию «Числа Фибоначчи и их приложения». В 1969 г. создатель Фибоначчи Ассоциации американский математик Вернер Хоггатт опубликовал книгу *«Fibonacci and Lucas Numbers»* [2], которая сохраняет свою актуальность до настоящего времени. В 1989 г. английский математик Стефан Вайда опубликовал книгу *«Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications»* [3].

В 70-е годы 20 в. началось использование *чисел Фибоначчи* в компьютерной и измерительной технике. Одним из инициаторов этих исследований стал один из авторов данной статьи советский ученый Алексей Стахов, который изложил основы теории «кодов и арифметики Фибоначчи», а также выдвинул концепцию «компьютеров Фибоначчи», что изложено в книгах [4,5]. Основная привлекательность компьютерных структур и устройств, основанных на «кодах Фибоначчи», состоит в возможности организации оперативного контроля ошибок в таких структурах за счет «естественной» кодовой избыточности кода Фибоначчи. В настоящее время интерес к «кодам и компьютерам Фибоначчи» продолжает сохраняться, о чем свидетельствуют некоторые новые публикации [6-9].

В настоящей статье излагаются результаты исследований, цель которых – разработка нового алгоритма функционирования фибоначчиевых счетчиков, что позволяет повысить их быстродействие при сохранении контролеспособности.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

2.1. Числа Фибоначчи

Так называются числа в последовательности $1,1,2,3,5,8,13,21,34,...,F_n$, в которой каждый ее элемент, начиная с третьего, вычисляется как сумма двух предыдущих, то есть удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \tag{1}$$

причем начальные члены последовательности равны $F_1 = F_2 = 1$. Данная последовательность получила в современной математике название «последовательность *чисел Фибоначчи*» [1-3].

2.2. Код Фибоначчи

Под кодом Фибоначчи понимают следующее позиционное представление целых неотрицательных чисел, называемое также в дальнейшем фибоначчиевым числом:

$$N = a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + \ldots + a_i F_i + \ldots + a_1 F_1, \tag{2}$$

где $a_i \in \{0,\ 1\}$ − двоичная цифра i-го разряда позиционного представления (2); n − разрядность кода (2); F_i − вес i-го разряда, равный i-му *числу Фибоначчи*. Сокращенная запись (2) имеет следующий вид:

$$N = a_n a_{n-1} \ldots a_i \ldots a_1. \tag{3}$$

2.3. «Свертки» и «развертки» фибоначчиевых разрядов

Основной особенностью кода Фибоначчи (2) является *многозначность* представления одного и того же числа N. Различные его представления в виде (2) или (3) могут быть получены одно из другого путем специфических преобразований над двоичными «фибоначчивыми» разрядами, называемыми *сверткой* и *разверткой* «фибоначчиевых» разрядов. Эти кодовые преобразования выполняются в рамках одной и той же двоичной комбинации (3), представляющей сумму разрядов (2), веса которых получены из основного рекуррентном соотношении (1), связывающем их выражением (2). Операция *свертки* выполняется над группой из трех «фибоначчиевых» разрядов $a_i a_{i-1} a_{i-2} = 011$. Свертка состоит в замене тройки «фибоначчиевых» разрядов своими отрицаниями, то есть

$$\left[011 \to 100\right]. \tag{4}$$

Операция *развертки* выполняется над группой «фибоначчиевых» разрядов $a_i a_{i-1} a_{i-2} = 100$ и состоит в замене тройки «фибоначчиевых» разрядов 100 своими отрицаниями, то есть

$$\left[100 \to 011\right]. \tag{5}$$

Основное свойство этих операций состоит в том, что их выполнение в «фибоначчиевой» кодовой комбинации (3) не приводит к изменению числа, представляемого этой кодовой комбинации в виде суммы (2). Ниже приведены примеры применения операций *свертки* и *развертки* для получения различных «фибоначчиевых» представлений чисел 7 и 5:

$$\text{Свертка}: 7 = \begin{cases} 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{cases} \quad \text{Развертка}: 5 = \begin{cases} 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{cases} \qquad (6)$$

2.4. Минимальная и максимальная форма кода Фибоначчи

Если в коде Фибоначчи (3) выполнить все возможные *свертки,* то мы придем к характерному представлению, в котором две единицы рядом не встречаются (см. нижнее «фибоначчиевое» представление числа 7). Такое «фибоначчиевое» представление будем называть *минимальной (нормальной) формой кода Фибоначчи* (2), (3). Заметим, что младший разряд минимальной формы кода Фибоначчи (3) всегда равен 0. Если в коде Фибоначчи (3) выполнить все возможные *развертки,* то мы придем еще к одному характерному представлению, в котором два нуля рядом справа от старшего значащего разряда не встречаются (см. нижнее «фибоначчиевое» представление числа 5). Такое «фибоначчиевое» представление будем называть *максимальной формой кодов Фибоначчи.* Заметим, что младший разряд максимальной формы кода Фибоначчи (3) всегда равен 1. Названия «минимальная форма» и «максимальная форма» отражают тот факт, что среди всех возможных кодов Фибоначчи (3) одного и того же числа N в «минимальной форме» содержится наименьшее число единиц, а в «максимальной форме» - наибольшее число единиц.

3. МИНИМАЛЬНАЯ (НОРМАЛЬНАЯ) ФОРМА КОДА ФИБОНАЧЧИ

3.1. Ограничения фибоначчиевых чисел

В дальнейшем в данной работе нас будет интересовать только *минимальная (нормальная) форма представления кода Фибоначчи,* которую для удобства изложения, как указывалось выше, мы будем также называть *фибоначчиевым числом.* Как следует из приведенного выше определения, характерным свойством *фибоначчиевого числа* является то, что между двумя единицами в коде (3) находится не меньше одного нуля, и, соответственно, нахождение рядом двух единиц запрещено. Это свойство является ограничением, формирующим как нормальные *фибоначчиевые числа* заданной длины (разрядности) n, так и их диапазон P. В качестве примера для весов 1, 1, 2, 5, 8, 13, 21 в табл. 1 даны *фибоначиевые 8-разрядные числа* 25, 33, 20.

Таблица 1 – Минимальная форма представления чисел 25, 33, 15 с весами 1, 1, 2, ..., F_n

Номер разряда	8	7	6	5	4	3	2	1
Вес разряда	21	13	8	5	3	2	1	1
N = 25	1	0	0	0	1	0	1	0
N = 33	1	0	1	0	1	0	1	0
N = 20	0	1	0	1	0	1	0	0

3.2. Сумма весов фибоначчиевых чисел ряда 1, 1, 2, ..., F_n

В работе [1] было показано, что для последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, ..., F_n сумма весов разрядов с нечетными номерами 1, 3, ..., n равна

$$F_n + F_{n-2} + \ldots + F_3 + F_1 = F_{n+1}, \qquad (7)$$

а сумма весов разрядов с четными номерами 2, 4, 6, ..., n равна

$$F_n + F_{n-2} + \ldots + F_4 + F_2 = F_{n+1} - 1. \tag{8}$$

Действительно, как следует из таблицы 1, сумма весов 1, 2, 5, 13 нечетных 1, 3, 5, 7 разрядов фибоначчиевых чисел равна 1+2+5+13=21. Сумма весов 1, 3, 8, 21 четных разрядов 2, 4, 6, 8 фибоначчиевых чисел равна 1+3+8+21=33=34-1.

3.3. Сумма весов фибоначчиевых чисел ряда 1, 2, 3, ..., F_n

Для разработки алгоритма счета в n-разрядном коде Фибоначчи особое значение имеют суммы последовательностей весов разрядов с ряда 1, 2, 3, ... F_n, в котором первый вес 1 из общего ряда весов 1, 1, 2, ..., F_n убран. Это сделано потому, что в соответствующем этому весе разряде цифра для любого фибоначчиевого числа равна 0 (см. для примера табл.1). Очевидно, что применительно к последовательности 1, 2, 3, ..., F_n весов результат их суммирования будет несколько другим, чем был получен ранее для весов 1, 1, 2, ..., F_n весов. Так, для разрядности n=8 сумма весов фибоначчиевого числа 10101010 будет равна 34+13+5+2=54, а для числа 01010101 соответственно равна 21+8+3+1=33 (см. табл.2).

Таблица 2 – Представление фибоначчиевых чисел с весами 1, 2, 3, 5, ... F_n

Номер разряда	8	7	6	5	4	3	2	1
Вес разряда	34	21	13	8	5	3	2	1
N = 25	0	1	0	0	0	1	0	1
N = 54	1	0	1	0	1	0	1	0
N = 33	0	1	0	1	0	1	0	1

Лемма 1. *Для нечетных разрядов 1, 3, ..., n фибоначчиевых чисел сумма их весов*

$$F_n + F_{n-2} + \ldots + F_3 + F_1 = F_{n+1} - 1 . \tag{9}$$

Доказательство. Проведем его методом полной (математической) индукции. Для этого сначала получим ее основание, путем доказательства правильности равенства (9) при сложении весов двух младших нечетных разрядов 1 и 3, то есть докажем, что $F_3 + F_1 = F_4 - 1$.

Из табл. 2 имеем, что $F_4 = 5, F_3 = 3, F_1 = 1$. Тогда в силу того, что наблюдается равенство 3+1=5-1=4, можно утверждать, что равенство (9) имеет место для двух начальных нечетных номеров ряда фибоначчиевых чисел. Следовательно, основание индукции для нечетных номеров чисел Фибоначчи получено. Докажем теперь, что выражения (9) имеет место для любого числа нечетных членов - *1, 3, ..., n*.

Для этого допустим, что лемма 1 выполняется для нечетного числа $n=k$. Тогда

$$F_k + F_{k-2} + \ldots + F_3 + F_1 = F_{k+1} - 1 .$$

Допустим далее, что нечетное число $n=k+2$. В данном случае берется следующий по порядку нечетный разряд фибоначчиевого числа. Тогда

$$F_{k+2} + (F_k + F_{k-2} + \ldots + F_3 + F_1) = F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+3} - 1,$$

что доказывает исходное утверждение леммы 1.

Последнее равенство утверждает, что если, например, к нечетным разрядам 1, 3, 5 добавить еще 7, то результат суммирования весов этих разрядов (чисел Фибоначчи) будет равен весу четного 8-го разряда за вычетом с него 1. Если исходить из табл. 1, то это будет число 33.

Лемма 2. *Для четных разрядов 2, 4, … n фибоначчиевых чисел сумма их весов*

$$F_n + F_{n-2} + \ldots + F_4 + F_2 = F_{n+1} - 1. \tag{10}$$

Доказательство. Проведем его, как и для леммы 1, методом полной индукции. Для этого получим ее основание путем доказательства правильности равенства (10) при сложении весов двух младших четных разрядов 2 и 4, то есть докажем, что $F_4 + F_2 = F_5 - 1$.

Из табл. 2 имеем, что $F_5 = 8, F_4 = 5, F_2 = 2$. Тогда в силу того, что наблюдается равенство 5+2=8-1=7, можно утверждать, что равенство (10) имеет место для двух начальных четных номеров ряда фибоначчиевых чисел. Следовательно, основание индукции для четных номеров разрядов фибоначчиевых чисел получено. Докажем теперь, что выражение (10) имеет место для любого числа четных разрядов *n*.

Для этого допустим, что лемма 2 выполняется для четного числа *n*=*k*. Тогда имеем, что

$$F_k + F_{k-2} + \ldots + F_4 + F_2 = F_{k+1} - 1.$$

Допустим далее, что *n* = *k*+2. В данном случае берется следующий по порядку четный разряд фибоначчиевого числа. Тогда

$$F_{k+2} + (F_k + F_{k-2} + \ldots + F_4 + F_2) = F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+3} - 1,$$

что и доказывает исходное утверждение леммы 1.

Полученное выше последнее равенство утверждает, что если, например, к ряду четных номеров разрядов 2, 4, 6 добавить еще разряд 8, то результат суммирования их весов будет равен весу нечетного 9-го разряда за вычетом с него 1. Если исходить из табл. 2, то это будет число 54.

3.4. Диапазон нормальных фибоначчиевых чисел

Теорема 1. *Фибоначчиево число, в котором во всех нечетных разрядах 1, 3, …, n стоят единицы, представляет собой наибольшее число среди фибоначчиевых чисел разрядности n и равно* $F_{n+1} - 1$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что разряд *n* фибоначчиевого числа нечетный и в нем стоит 1. В силу запрета нахождения в фибоначчиевых числах рядом двух единиц возле разряда *n* может стоять в четном разряде *n*–1 только 0. Поэтому единицы могут стоять в четных разрядах рассматриваемого фибоначчиевого числа, только начиная с разряда *n*–3. В соответствии с леммой 2 сумма весов всех четных разрядов фибоначчиевого числа, в которых может стоять 1, равняется уменьшенному на 1 весу нечетного разряда *n*–2, который заведомо меньший веса нечетного разряда *n*. Если же единицы стоят во всех нечетных разрядах, начиная с *n*–2, то в соответствии с леммой 1 сумма их весов равняется уменьшенному на 1 весу четного разряда *n*–1, который также будет меньшим веса разряда *n*. Если же часть единиц находится в четных разрядах, а часть в нечетных, между которыми по определению фибоначчиевого числа должны находиться нули, то каждая из соответствующих этим частям сумм весов будет меньшей соответственно веса $n-2$ и веса $n-1$ разряда. Поэтому сумма этих частей весов, очевидно, будет меньше веса нечетного разряда *n,* так как только сумма весов разрядов $n-2$ и $n-1$ в соответствии с выражением (1) равна весу разряда *n*. Поэтому фибоначчиевое число, в котором единицы расположены во всех нечетных разрядах *1, 3, ..., n*, будет наибольшим среди всех возможных фибоначчиевых чисел длины *n*. В соответствии с леммой 1 фибоначчиевое число, в котором во всех нечетных разрядах стоят единицы, равно $F_{n+1}-1$. Следовательно, наибольшее фибоначчиевое число длины (разрядности) *n*, где *n* является нечетным разрядом, равно $F_{n+1}-1$. *Теорема доказана.*

Теорема 2. *Диапазон фибоначчиевых чисел нечетной длины n равен* $P=F_{n+1}$.

Доказательство. Как следует из теоремы 1, число, в котором в нечетных разрядах *1, 3, ..., n* стоят 1, имеет нечетную длину *n* равную $F_{n+1}-1$. Это число является наибольшим из всех возможных чисел разрядности *n* и поэтому определяет количество всех возможных чисел данной разрядности, начиная с 1. Если теперь добавить к этому количеству еще неучтенное число 0, то получим исходное утверждение. *Теорема доказана.*

Следствие 1. Так как $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$, то диапазон фибоначчиевых чисел с нечетной длиной *n* равен $P=F_n+F_{n-1}$.

Теорема 3. *Фибоначчиево число, в котором во всех четных разрядах 1, 2, ..., n стоят единицы, представляет собой наибольшее число среди фибоначчиевых чисел разрядности n и равно* $F_{n+1}-1$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что разряд *n* фибоначчиевого числа четный и в нем стоит 1. В силу запрета нахождения в фибоначчиевых числах рядом двух единиц возле разряда *n* может стоять в нечетном разряде $n-1$ только 0. Поэтому единицы могут стоять в нечетных разрядах рассматриваемого фибоначчиевого числа, только начиная с разряда $n-3$. В соответствии с леммой 1 сумма весов всех нечетных разрядов фибоначчиевого числа, в которых может стоять 1, равняется уменьшенному на 1 весу четного разряда $n-2$, который является заведомо меньшим веса четного разряда *n*. Если же единицы стоят во всех четных разрядах, начиная с $n-2$, то в соответствии с леммой 2 сумма их весов равняется уменьшенному на 1 весу нечетного разряда $n-1$, который также будет меньшим веса четного разряда *n*. Если же часть единиц находится в нечетных разрядах, а часть в четных, между которыми по определению фибоначчиевого числа должны находиться нули, то каждая из соответствующих этим частям сумм весов будет меньшей веса $n - 2$ и веса $n-1$ соответствующего разряда. Поэтому сумма этих частей весов, очевидно, будет меньше веса нечетного разряда *n,* так как только сумма весов разрядов $n-2$ и $n-1$ в соответствии с выражением (1) равна весу разряда *n*. Поэтому фибоначчиевое число, в котором единицы расположены во всех нечетных разрядах *1, 3, ..., n*, будет наибольшим среди всех возможных фибоначчиевых чисел длины *n*. В соответствии с леммой 1 фибоначчиевое число, в котором во всех нечетных разрядах стоят единицы, равно $F_{n+1}-1$. Следовательно, наибольшее фибоначчиевое число длины (разрядности) *n*, где *n* является нечетным разрядом, равно $F_{n+1}-1$. *Теорема доказана.*

Теорема 4. *Диапазон фибоначчиевых чисел четной длины n равен* $P = F_{n+1}$.

Доказательство. Как следует из теоремы 1, число, в котором в четных разрядах *1, 2, ..., n* стоят 1, имеет нечетную длину *n* равную $F_{n+1} - 1$. Это число является наибольшим из всех возможных чисел разрядности *n* и поэтому определяет количество всех возможных чисел данной разрядности, начиная с 1. Если теперь добавить к этому количеству еще неучтенное число 0, то получим исходное утверждение. *Теорема доказана.*

Следствие 1. Так как $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, то диапазон фибоначчиевых чисел с четной длиной *n* равен $P = F_n + F_{n-1}$.

Теорема 5. *Диапазон фибоначчиевых чисел длины n равен* $P = F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Доказательство. Следует из того, что диапазоны фибоначчиевых чисел как четной, так и нечетной длины *n* одинаковы. А они, как следует из теорем 2 и 4 и следствий из них, равны $P = F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. *Теорема доказана.*

4. СЧЕТ НОРМАЛЬНЫХ ФИБОНАЧЧИЕВЫХ ЧИСЕЛ

4.1. Теорема счета нормальных фибоначчиевых чисел

Терема 6. *В случае, если в фибоначчиевом числе вместо первого 0 будет устанавлена 1, впереди которой стоит еще хотя бы один 0, а все остальные разряды справа от него при этом устанавливаются в 0, то тем самым это число будет увеличено на 1.*

Доказательство. Наличие при счете справа налево в фибоначчиевом числе первого 0, впереди которого стоит хотя бы еще один 0, например в *i* разряде, где *i*=1, 2, ..., *n*, означает, что в части идущего до этого 0 фибоначчиевого числа между двумя каждыми из двух 1 стоит нуль. Если первый 0 стоит во втором разряде справа (*i*=2), то тогда 1 стоит в первом разряде числа. Если поставить 1 в первый из двух стоящих рядом 0, то фибоначчиво число, как при нечетном, так и при четном значении *i*, должно увеличиться. Причем это увеличение произойдет на одну и ту же величину F_{i+1}. В то же время величина части фибоначчиевого числа, которая стоит до первого их двух 0, равна величине $F_{i+1} - 1$ в соответствии с теоремами 1, 3. Если эту часть числа обнулить, то число Фибоначчи уменьшится ровно на указанную величину. Разность $F_{n+1} - (F_{n+1} - 1) = 1$. **Теорема доказана.**

4.2. Алгоритм счета нормальных фибоначчиевых чисел

Теорема 7 дает алгоритм фибоначчиевого счета в нормальной (минимальной) форме.

Алгоритм счета состоит *в нахождении в фибоначчиевом числе при счете в нем разрядов справа налево двух разрядов, в которых стоят подряд два 0, и установке первого из них в 1, при одновременном переводе значений всех разрядов, которые идут справа налево до этого 0, в нулевое состояние.*

Например, если задано фибоначчиево число в нормальной форме 01000101, равное 25, то в соответствии с приведенным алгоритмом, следующим по порядку числом, будет идти число 01001000, равное 26. Собственно для получения этих двух пунктов алгоритма и доказывались приведенные выше теоремы и леммы.

Ниже в табл. 3 в порядке возрастания приведены все возможные нормальные фибоначчиевые числа для ряда 1, 2, 3, 5, 8 из диапазона 5+8=13.

Таблица 3 – Нормальные фибоначчиевые числа для ряда 1, 2, 3, 5

Номер разряда	4	3	2	1
Вес разряда	5	3	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	0	1
5	1	0	0	0
6	1	0	0	1
7	1	0	1	0

Достоинством приведенного алгоритма является отсутствие операций сверток и разверток при счете, как это имеет место в ряде имеющихся алгоритмов счета фибоначчиевых чисел [10], что повышает его быстродействие. Кроме того, данный алгоритм позволяет применить простую и эффективную методику обнаружения ошибок типа переходов 0 в 1, так как она базируется только на признаке отсутствия двух и более рядом стоящих единиц.

5. ВЫВОДЫ

Таким образом, в статье разработан и обоснован новый простой алгоритм счета фибоначчиевых чисел в нормальной форме, обладающий повышенным быстродействием работы и эффективно обнаруживающий ошибки в своей работе.

SUMMARY

ABOUT ONE METHOD OF COUNTING IN THE FIBONACCI CODE

Borysenko A. A., Stakhov A.P.
Sumy State University, Sumy

In this article the method of counting of Fibonacci numbers represented in normal form is considered. In contrast to previously proposed counting methods it does not use operations of convolution and devolution with the transition by this to different forms of representation of the Fibonacci numbers. This allows counting on its basis more simple and fast while retaining the ability of errors detecting.

Key words: *counting, Fibonacci convolution, devolution, counter, errors.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. – Москва: Наука, 1978.
2. Hoggat V. E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
3. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited, 1989.
4. Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения/ А. П. Стахов. – Москва: Советское Радио, 1977.
5. Стахов А. П. Коды золотой пропорции/ А. П. Стахов. - Москва: Советское радио, 1984.
6. Stakhov A. P. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic / A. P. Stakhov // The Computer Journal. - 2002. - Vol. 45, № 2. – P. 222-236.

7. Стахов А. П. Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 1. Математика Гармонии / А. П. Стахов // «Академия Тринитаризма». - М. – Эл. № 77-6567, публ. 14876, 16.09.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321089.htm
8. Стахов А. П. Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 2. «Золотая» Информационная Технология / А. П. Стахов // «Академия Тринитаризма». - М. – Эл. № 77-6567, публ. 14878, 19.09.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321090.htm
9. Стахов А. П. Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем / А. П. Стахов // «Академия Тринитаризма». - М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321212.htm
10. Вишняков Ю.М. Разработка принципов построения и исследование пересчетных устройств в p-кодах Фибоначчи. Автореф. дисс... канд. техн. наук. - Таганрогский радиотехнический институт, 1977.

Поступила в редакцию 1 декабря 2011 г.