УДК 336.01

КВАДРАТ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ СТАВОК ПРОЦЕНТА

О. В. Зайцев, *канд. екон. наук, викладач,*
Сумський державний університет, м. Суми

У статті запропоновано простий механізм виведення та навчального засвоєння великого масиву розрахункових формул еквівалентності ставок за допомогою так званого квадрата еквівалентності. Передбачається використання квадрата еквівалентності в навчальному процесі під час вивчення дисциплін фінансового та економічного спрямування.

Ключові слова: *еквівалентні ставки, принцип еквівалентності, квадрат еквівалентності, проста ставка, складна ставка, сила росту.*

В статье предложен простой механизм выведения и учебного освоения большого массива расчетных формул эквивалентности ставок с помощью так называемого квадрата эквивалентности. Предполагается использование квадрата эквивалентности в учебном процессе при изучении дисциплин финансовой и экономической направленности.

Ключевые слова: *эквивалентные ставки, принцип эквивалентности, квадрат эквивалентности, простая ставка, сложная ставка, сила роста.*

ВСТУП

У практиці фінансових розрахунків існують великі масиві формул, які охоплюють одну тематичну спрямованість, але в навчальних літературних джерелах, як правило, надається лише частина таких формул. В українських навчальних посібниках у розділі про еквівалентність ставок надається чотири — шість найчастіше вживаних формул, наприклад, у навчальному посібнику [1, с. 25-27] в розділі про еквівалентність ставок надано лише дві формули еквівалентності. А коли й надаються майже всі формальні вирази еквівалентності, наприклад, у російськомовних підручниках та посібниках [3, с. 69-73] [2, с. 63-70], то студенту досить важко запам’ятати як самі формули, так і умови їх застосування. Такі труднощі в освоєнні матеріалу з еквівалентності ставок пов’язані з тим, що загалом кількість лише основних формул еквівалентності ставок сягає більше двадцяти.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Метою статті є оприлюднити зрозумілий та простий прийом виведення та навчального засвоєння всіх можливих видів розрахункових формул еквівалентності ставок.

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

Один і той самий фінансовий результат можна одержати різноманітними способами, використовуючи різні ставки, різні механізми нарощення та дисконтування. Таке є можливим тому, що будь-яка ставка процента (процентна, облікова або сила росту) характеризує один і той самий показник — дохідність фінансової операції.

Еквівалентні ставки — це такі ставки, застосування яких приводить до подібних фінансових результатів.

Латинський термін «еквівалентний» означає «рівноцінний», а швидше за все, на наш погляд, означає рівнооцінюваний. Додержання «рівнооцінюваності» вимагає додержання певних принципів. Еквівалентні ставки, за визначенням, не змінюють початкову суму (PV=const), не змінюють кінцевий результат (FV=const), не змінюють строку операції (T=const) і не змінюють кількості періодів нарахувань упродовж строку T (n=const). Додержання таких вимог має у фінансах назву - **принцип еквівалентності**.

Іншими словами, **еквівалентність ставок** - це заміна однієї ставки на другу, заміна ставки, яка не змінює фінансових показників, тобто заміна ставки при дотриманні принципів еквівалентності.

Якщо початкові й кінцеві суми не змінюються, то не змінюється і їх різниця - прибуток (процент). При рівності початкових сум та кінцевих результатів процент визначається розміром множника нарощення. Звідси випливає: щоб вивести співвідношення для еквівалентних ставок, потрібно зрівняти множники нарощення для різних процентних ставок і з отриманої рівності виразити потрібний показник. Основних формул у фінансах всього чотири:

$$FV = PV(1 + i_s n); \tag{1}$$

$$FV = PV(1 + i_c)^n; \tag{2}$$

$$FV = PV \frac{1}{(1 - d_s n)}; \tag{3}$$

$$FV = PV \frac{1}{(1 - d_c)^n}. \tag{4}$$

Тому основних множників у нас також чотири. Отже, для одержання формул еквівалентності ставок запишемо чотири множники у вигляді так званого **квадрата еквівалентності,** за допомогою якого можемо визначати всі можливі співвідношення ставок еквівалентності, рис. 1.

$$\begin{array}{ccccc} (1+i_s n) & \rightarrow & & \leftarrow & \dfrac{1}{(1-d_s n)} \\ \uparrow\ \downarrow & & \nwarrow\!\!\!\searrow\ \swarrow\!\!\!\nearrow & & \uparrow\ \downarrow \\ (1+i_c)^n & \rightarrow & & \leftarrow & \dfrac{1}{(1-d_c)^n} \end{array}$$

Рисунок 1 – Квадрат еквівалентності ставок процента: (де «i» - процентна ставка; «d» - облікова ставка; індекс «s» означає, що ставки «i» та «d» прості (від англ. simple); індекс «c» означає, що ставки «i» та «d» складні (від англ. compound))

Квадрат еквівалентності дає можливість записати всі формули еквівалентності ставок. Використовуючи квадрат еквівалентності, немає потреби запам'ятовувати формули. Просто за необхідності потрібно написати відповідне співвідношення між множниками нарощення й одержати з нього потрібну формулу. В квадраті еквівалентності можливі співвідношення між множниками нарощення вказані стрілками. Таких співвідношень усього дванадцять. Головне — зрозуміти цей простий прийом.

1. Еквівалентність простої процентної ставки (i_S **) і простої облікової ставки (** d_S **)** знайдемо зі зрівнювання множників $(1+i_s n)=\frac{1}{(1-d_s n)}$. Якщо n — ціле число, або ціле число з дробом, наприклад, кількість років, то

$$i_s = \frac{d_s}{1-d_s n}, \tag{5}$$

$$d_s = \frac{i_s}{1+i_s n}, \tag{6}$$

У формулах (5), (6) за умови, що n — кількість років, ставки i_s, d_s - річні, якщо n вимірюється кількістю півріч, ставки i_s, d_s - піврічні, загалом – ставки, відповідні періоду нарахування процентів.

Необхідно звернути увагу, що співвідношення еквівалентності між простими ставками залежать від строку. Наприклад, за формулою (5) для d_s = 10% i_s змінюється так, табл.1.

Таблиця 1 - Еквівалентність простої процентної ставки i_s до простої облікової, що дорівнює d_s = 10%, залежно від строку n (кількість років)

n (кількість років)	0,1	0,5	1	2	5	7	10
i_s, (%)	10,1	10,5	11,1	12,5	20	33,3	∞ *

**при n = 9 років i_s, = 100%, а при 10 і більше роках формула (5) не працює, тобто еквівалентності ставок не існує*

Якщо n - дробове число, наприклад, строк вимірюється в днях, тоді підставимо у (5) і (6) $n = t/y$ та одержимо варіанти еквівалентності ставок (нагадуємо, що t - строк нарощення (дисконтування) процентів у днях, y - кількість днів у році, y ще може мати назву - часова база, або база розрахунку).

Варіант 1. Бази розрахунків, тобто кількість днів у році y, - однакові в еквівалентних варіантах:

$$i_S = \frac{d_S}{1-d_S\frac{t}{y}}, \quad \text{або} \quad i_S = \frac{yd_S}{y-d_S t}, \tag{7}$$

$$d_S = \frac{i_S}{1+i_S\frac{t}{y}}, \quad \text{або} \quad d_S = \frac{y\,i_S}{y+i_S t}. \tag{8}$$

Варіант 2. Бази розрахунків, тобто кількість днів у році y, - різні в еквівалентних варіантах.

Якщо при процентній ставці i_s нарахування процентів здійснюється при y = 365 днів, а по обліковій ставці d_s розрахунок проводиться при y = 360 днів, то формули еквівалентності мають такий вигляд:

$$i_S = \frac{365\, d_S}{360 - d_S\, t}, \tag{9}$$

$$d_S = \frac{360\, i_S}{365 + i_S\, t}. \tag{10}$$

Якщо при процентній ставці i_S нарахування процентів здійснюється при y = 360 днів, а по обліковій ставці d_S розрахунок проводиться при y = 365 днів, то формули еквівалентності мають такий вигляд:

$$i_S = \frac{360\, d_S}{365 - d_S t}, \tag{11}$$

$$d_S = \frac{365\, i_S}{360 + i_S t}. \tag{12}$$

Забезпечення еквівалентності простих процентних та облікових ставок досягається, за інших однакових умов, їх нерівністю, тобто завжди d_S менше (чисельно, за модулем) еквівалентної до неї i_S.

2. Еквівалентність процентних ставок — простої ставки (i_S) і складної ставки (i_C) - знайдемо з дорівнювання множників $(1 + i_S n) = (1 + i_C)^n$:

$$i_s = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n}, \tag{13}$$

$$i_C = \sqrt[n]{1 + n\, i_S} - 1, \quad \text{або} \quad i_c = (1 + n\, i_s)^{\frac{1}{n}} - 1. \tag{14}$$

У формулах (13), (14) ставки i_S, i_C є ставками в періодах n. Якщо n вимірюється роками, то і ставки i_S , i_C - річні, якщо n вимірюється кварталами, то відповідно ставки i_S та i_C — квартальні, і така відповідність у цих формулах завжди. Якщо зафіксувати ставки тільки як номінальні, тобто річні, то при m разів нарахування процентів у році і кількості років N , показник $n = Nm$. За таких умов формули (13) та (14) мають такий вигляд:

$$i_S = \frac{(1 + i_C / m)^{mN} - 1}{N}, \tag{15}$$

$$i_C = m(\sqrt[mN]{1 + N\, i_S} - 1), \quad \text{або} \quad i_C = m\left((1 + N i_S)^{\frac{1}{mN}} - 1\right). \tag{16}$$

У формулах (15) та (16) ставки i_S та i_C — річні.

3. Еквівалентність простої облікової ставки (d_S) і складної процентної ставки (i_C), знайдемо зі зрівнювання множників $(1 + i_C)^n = \frac{1}{(1 - d_S n)}$:

$$i_c = \sqrt[n]{\frac{1}{(1-d_s n)}} - 1, \quad \text{або} \quad i_c = (1 - n\, d_s)^{-\frac{1}{n}} - 1, \tag{17}$$

$$d_s = \frac{1-(1+i_c)^{-n}}{n}. \tag{18}$$

Якщо зафіксувати ставки тільки як номінальні, тобто - річні, то при застосуванні m та N формули (17) та (18) набирають такого вигляду:

$$i_c = m\left((1-Nd_s)^{-\frac{1}{mN}} - 1\right), \text{ або } \; i_c = m\left(\sqrt[mN]{\frac{1}{1-Nd_s}} - 1\right), \tag{19}$$

$$d_s = \frac{1-(1+i_c/m)^{-mN}}{N}, \text{ або } \; d_s = \frac{1}{N}\left(1 - \sqrt[mN]{\frac{1}{1+i_c/m}}\right). \tag{20}$$

4. Еквівалентність складної процентної ставки (i_c) **і складної облікової ставки** (d_c) знайдемо зі зрівнювання множників $(1+i_c)^n = \dfrac{1}{(1-d_c)^n}$:

$$i_c = \frac{d_c}{1-d_c}, \tag{21}$$

$$d_c = \frac{i_c}{1+i_c}. \tag{22}$$

Як бачимо, при виведенні формул (21) та (22) показник кількості періодів нарахування процентів - n у математичний запис формул не потрапляє, він там відсутній. Його відсутність у запису формул еквівалентності складних процентної та облікової ставок привела до некоректного висновку, що у формулах (21) та (22) результат еквівалентних перерахунків не залежить від строку фінансової операції, або, що одне і те ж, не залежить від кількості періодів нарахування чи утримання процентів. Такої думки дотримуються Долінський [1, с. 22], Мелкумов [2, с. 68], Четиркін [3, с. 72]. Це не зовсім так, а точніше, зовсім не так. У наведених формулах строк існує і він один і той самий для двох еквівалентних ставок, тому він у формулах і не «виникає». Це формули для одного і того самого строку фінансової операції. Кількість періодів нарахування в цих формулах не змінюється, кількість n у множниках $(1+i_c)^n$ і $(1-d_c)^{-n}$ передбачається однаковою, передбачається підсвідомо, і тому автоматично скорочується за правилами математики. Строк і кількість періодів нарахування процентів - n наявні в будь-яких розрахунках, де використовуються формули (21) та (22) і їх неявна присутність передбачає: - строк є, строк є і тому на розрахунок впливає, і цей строк не змінюється при заміні ставки на еквівалентну; - n в розрахунках наявна, n на розрахунки впливає тим, що n однакова для кожної еквівалентної ставки. Як тільки перейдемо до практичного застосування формул (21) та (22), відразу в розрахунках «виникають» i строк, і кількість періодів нарахування і вони починають впливати на розрахунки. У випадках, коли n різні для ставок (i_c) і (d_c), а їх еквівалентність потрібно розрахувати, формули еквівалентності будуть іншими, не схожими на (21) і (22), і в їх формалізованому записі будуть показники n відповідні своїм ставкам. Формули (21) і (22) - похідні формули від інших, більш загальних формул, в яких і строк, і n фігурують у запису формули безпосередньо.

Прикладом такого узагальнення може бути формула еквівалентності складної облікової ставки (d_c) і номінальної складної процентної ставки (i_c) при нарахуванні процентів m разів у році, яку знайдемо з рівності множників $(1+i_c\ /\ m)^{mN} = \dfrac{1}{(1-d_c)^N}$:

$$i_c = m\left(\sqrt[m]{\frac{1}{1-d_c}}-1\right), \quad \text{або} \quad i_c = m\left((1-d\ )^{-\frac{1}{m}}-1\right), \tag{23}$$

$$d_s = 1-(1+\frac{i_c}{m})^{-m}. \tag{24}$$

5. Еквівалентність складної облікової ставки (d_c) і простої облікової ставки (d_s) знайдемо з рівності множників $\dfrac{1}{(1-d_c)^n} = \dfrac{1}{(1-d_s\,n)}$:

$$d_c = 1-\sqrt[n]{1-n\,d_s}, \quad \text{або} \quad d_c = 1-(1-n\,d_s)^{\frac{1}{n}}, \tag{25}$$

$$d_s = \frac{1-(1-d_c)^n}{n}. \tag{26}$$

Якщо зафіксувати ставки тільки як номінальні, тобто — річні, то при застосуванні m та N формули (25) та (26) набирають такого вигляду:

$$d_c = \frac{1}{m}\left(1-\sqrt[mN]{1-d_s N}\right), \tag{27}$$

$$d_s = \frac{1-(1-d_c\ /\ m)^{mN}}{N}. \tag{28}$$

6. Еквівалентність простої процентної ставки (i_s) і складної облікової ставки (d_c) знайдемо з рівності множників $(1+i_s n) = \dfrac{1}{(1-d_c)^n}$:

$$i_s = \frac{(1-d_c)^{-n}-1}{n}, \tag{29}$$

$$d_c = 1-\sqrt[n]{\frac{1}{1+ni_s}}, \quad \text{або} \quad d_c = 1-(1+n\,i_s)^{-\frac{1}{n}}. \tag{30}$$

Якщо зафіксувати ставки тільки як номінальні, тобто - річні, то при застосуванні m та N формули (29) та (30) набирають такого вигляду:

$$i_s = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{(1-d_c/m)^{mN}}-1\right), \text{ або } i_s = \frac{(1-d_c/m)^{-mN}-1}{N}, \quad (31)$$

$$d_s = \frac{1}{m}\left(1-\sqrt[mN]{\frac{1}{1+i_s N}}\right). \quad (32)$$

Таким чином, розглянуто всі варіанти еквівалентності ставок, передбачених квадратом еквівалентності (рис.1). Наголошувалося, що формул еквівалентності всього дванадцять, а у нас - уже 28. І все ж таки основних формул еквівалентності ставок - дванадцять, а вся решта - похідні від цих дванадцяти. Основними формулами еквівалентності ставок є формули: **(5)**, **(6)**, **(13)**, **(14)**, **(17)**, **(18)**, **(21)**, **(22)**, **(25)**, **(26)**, **(29)**, **(30)**. У тексті їх номери в дужках виділені жирними цифрами.

Крім використаних вище дискретних формул (1), (2), (3), (4), існують формули безперервного нарахування, де ставкою нарахування є показник - сила росту.

Сила росту (δ) характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу. Вона може бути незмінною або змінюватись у часі.

Формула при незмінній силі росту є такою:

$$FV = PVe^{\delta N}. \quad (33)$$

7. Еквівалентність сили росту і процентних ставок:

- для простої процентної ставки з рівності множників $e^{\delta n} = (1+i_s n)$:

$$\delta = \frac{\ln(1+i_s n)}{n}, \quad (34)$$

$$i_s = \frac{e^{\delta n}-1}{n}; \quad (35)$$

- для складної процентної ставки з дорівнювання множників $e^{\delta n} = (1+i_c)^n$:

$$\delta = \ln(1+i_c),$$
$$i_c = e^{\delta}-1. \quad (36)$$

8. Еквівалентність сили росту і облікових ставок:

- для простої облікової ставки з рівності множників $e^{\delta n} = \frac{1}{(1-d_s n)}$:

$$\delta = \frac{-\ln(1-d_s n)}{n}, \quad (37)$$

$$d_s = \frac{1-e^{-\delta}}{n}; \quad (38)$$

— для складної облікової ставки з рівності множників $e^{\delta n} = \dfrac{1}{(1-d_c)^n}$:

$$\delta = -\ln(1-d_c), \tag{39}$$

$$d_c = 1 - e^{-\delta}. \tag{40}$$

9. Еквівалентність сили росту і номінальної складної процентної ставки при нарахуванні процентів *m* разів у році розраховується з порівнювання $e^{\delta N} = (1 + i_c / m)^{mN}$:

$$\delta = m \ln(1 + i_c / m), \tag{41}$$

$$i_c = m(e^{\delta / m} - 1). \tag{42}$$

10. При лінійній зміні сили росту еквівалентну складну процентну ставку можна розрахувати за такою формулою:

$$i_c = \left(e^{\delta n + a\frac{n^2}{2}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1. \tag{43}$$

11. При постійному темпі зміні сили росту еквівалентну складну процентну ставку можна розрахувати за такою формулою:

$$i_c = \left(e^{\frac{\delta_0}{\ln a}(a^n - 1)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1. \tag{44}$$

ВИСНОВКИ

Еквівалентні ставки — це такі ставки, застосування яких приводить до однакових фінансових результатів.

Еквівалентні ставки, за визначенням, не змінюють початкової суми (*PV*=const), не змінюють кінцевого результату (*FV*=const), не змінюють строку операції (*T*=const) і не змінюють кількості періодів нарахувань впродовж строку *T* (*n*=const). Додержання таких вимог має у фінансах назву — **принцип еквівалентності**.

Еквівалентність ставок — це заміна однієї ставки на другу, заміна ставки, яка не змінює фінансових показників, тобто заміна ставки при дотриманні принципів еквівалентності.

Квадрат еквівалентності дає можливість записати всі формули еквівалентності ставок. Використовуючи квадрат еквівалентності, немає потреби запам'ятовувати формули. Просто, при необхідності, потрібно написати відповідне співвідношення між множниками нарощення й одержати з нього потрібну формулу.

Основних формул еквівалентності ставок процента для дискретного нарахування — дванадцять. Інші формули походять від основних.

Основних формул еквівалентності ставок процента між ставками дискретного нарахування і ставкою безперервного нарахування (сила росту) — вісім. Інші формули походять від основних.

SUMMARY

SQUARE EQUIVALENCE IN INTEREST RATES

A. Zaitsev,
Sumy State University, Sumy

In this article the simple mechanism of the educational development of a large array of design formulas of equivalent rates using a so-called square equivalence is presented. The use of the equivalence square is suggested to be in the educational process of the financial and economical courses.

Key words: *equivalent rates, the equivalence principle, the square of equivalence, the simple interest rate, the compound interest rate, the force of interest.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Долінський Л.Б. Фінансові обчислення та аналіз цінних паперів: навч. посіб. — К.: Майстер-клас, 2005. — 192 с.
2. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика: учебно-справочное пособие. — М.: ИНФА-М, 2002. — 383с.
3. Четыркин Е.М. Финансовая математика: учеб. — М.: Дело, 2000. — 400 с.

Надійшла до редакції 12 вересня 2011 р.