НЕСКОЛЬКО ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УТОЧНЁННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ

SEVERAL APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE IMPROVED ELASTIC CURVE DIFFERENTIAL EQUATION

Павленко И.В., Жигилий Д.А, ассистенты, Ткач П Ю., студент,
СумГУ, Сумы
Pavlenko I.V., Zhigiliy D.A., assistants, Tkach P.Y., student, SumSU, Sumy

При расчёте конструкций важна не только её прочность, но и жёсткость – деформация в заранее заданных пределах. Это заставляет оценивать влияние разного рода допущения, принятые при выводе формул, в частности, для деформаций балки.

Под действием внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей прямой балки, её ось искривляется в той же плоскости; при этом точки оси перемещаются. Изогнутая ось балки называется упругой линией, а перемещения точек оси балки по нормали к её недеформированной оси называются прогибами балки.

При изгибе сечения балка приобретают некоторые прогибы и углы поворота. Для адекватного их определения следует решить задачу Коши для дифференциального уравнения упругой линии, в нашем случае – двухопорной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис.1):

$\frac{1}{\rho}=\frac{M_x}{EI_x}$, где ρ - радиус кривизны оси, M_x - функция изгибающих моментов, а EI_x - жёсткость сечения балки при изгибе в плоскости действия M_x.

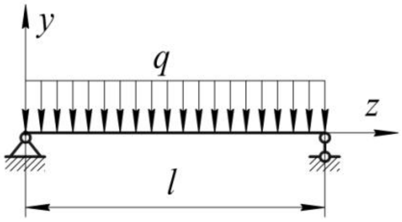

Рисунок 1 - Двухопорная балка, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой

Из математического анализа известна зависимость $\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}$. В сопротивлении материалов принято линейное приближение: $\frac{1}{\rho}\approx y''$, следовательно $y'^2 \ll 1$ и $y'=tg(\theta)\approx\theta$. Представляет интерес оценка влияния этих допущений на прогибы балки. Ранее в работе [1] точная зависимость $\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}$ раскладывалась в полиномиальный ряд. В данной работе предлагается первоначальная замена переменной $y'=tg(\theta)$, что соответствует геометрическому смыслу производной, $\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}=\frac{tg'(\theta)}{\sqrt{\left(1+tg^2(\theta)\right)^3}}=\cos(\theta)\theta'$ с последующим разложением в ряд Маклорена по углу поворота сечения θ:

$$\frac{M_x}{EI_x}=\theta'\Big(\cos(0)+\frac{\cos^{I}(0)}{1!}(\theta-0)+\frac{\cos^{II}(0)}{2!}(\theta-0)^2+\frac{\cos^{III}(0)}{3!}(\theta-0)^3+\frac{\cos^{IV}(0)}{4!}(\theta-0)^4+$$
$$+\frac{\cos^{V}(0)}{5!}(\theta-0)^5+\frac{\cos^{VI}(0)}{6!}(\theta-0)^6+\frac{\cos^{VII}(0)}{7!}(\theta-0)^7+\frac{\cos^{VIII}(0)}{8!}(\theta-0)^8+$$
$$+\frac{\cos^{IX}(0)}{9!}(\theta-0)^9+\frac{\cos^{X}(0)}{10!}(\theta-0)^{10}+\frac{\cos^{XI}(0)}{11!}(\theta-0)^{11}+\frac{\cos^{XII}(0)}{12!}(\theta-0)^{12}+\ldots+(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}+\ldots\Big)$$

Для двухопорной балки нагруженной равномерно распределенной нагрузкой: $M_x(z)=\frac{q}{2}\left(l^2-z^2\right)=\frac{ql^2}{2}\left(1-\left(\frac{z}{l}\right)^2\right)$.

Решаются уравнения 2-х приближений:

$$\frac{M_x(z)}{EI_x}=\theta'\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}\right);\quad \frac{M_x(z)}{EI_x}=\theta'\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}-\frac{\theta^6}{720}\right).$$

Последовательным интегрированием с граничными условиями $y(0)=0$ и $y(l)=0$ численно решается задача Коши для этих двух уточненных уравнений, если $y'=tg(\theta)$. Дана процентная оценка расхождения прогибов в зависимости от $\frac{ql^3}{2EI_x}$.

Список литературы

1. Жигилий Д.А., Ткач П.Ю. Определение перемещений в балках постоянного сечения методом непосредственного интегрирования уточнённого дифференциального уравнения упругой линии. Матеріали науково-технічної конференції, співробітників, аспірантів і студентів факультету технічних систем та енергоефективних технологій. - Суми: Вид-во СумДУ, 2009.- Ч. II, Вип. 11. - 139.