КОНТРПРИМЕРЫ В КЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ КОШИ И ЛЕЙБНИЦА

COUNTEREXAMPLES IN THE CLASSICAL THEOREMS OF CAUCHY AND LEIBNIZ

Борщенко Д., студент, Малютин К.Г., профессор, СумГУ, Сумы
Borschenko D., student, Malyutin K.G., professor, SumSU, Sumy

В доказательстве классических теорем Коши и Лейбница о сходимости рядов существенную роль играет условие монотонности членов ряда. Приведены примеры, показывающие, что при невыполнении этих условий теоремы становятся неверны. Доказано следующее обобщение теоремы Коши.

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *определенная при всех* $x \geq 1$, *неотрицательная, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{1}$$

Может расходится, а интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx \tag{2}$$

сходится. Наоборот, интеграл (2) *может расходится, а ряд* (1) *сходится.*

Аналогичный результат имеет место и для признака Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Точнее, если члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{3}$$

удовлетворяют условиям:

$$a_n > 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то ряд (3) может как сходится, так и расходится.

Таким образом, если в интегральном признаке Коши сходимости числового ряда с положительными членами отбросить услови монотонности:

$$f(x) \downarrow 0, \quad x \to \infty,$$

то этот признак является неверным. Аналогично, в теореме Лейбница условие

$$a_n \downarrow 0, \quad n \to \infty,$$

также является существенным.

Показано, что невозможно сформулировать признаки, аналогичные признакам Коши и Лейбница, на уровне необходимых и достаточных условий.