

УДК 330.43

О.М. Назаренко

Динамічне моделювання інвестиційного розвитку та оптимальної макроекономічної інвестиційної політики

У статті описується процес побудови динамічної моделі інвестиційного розвитку як системи диференціальних рівнянь. Для дослідження моделі використовується економетричний підхід, який дозволяє з високою точністю перейти від неперервної до дискретної моделі. Апробація побудованої моделі здійснюється для економіки Данії. Також описується проблема оптимальної інвестиційної політики як задача лінійного програмування.

Інвестиційна політика держави останнім часом доволі часто стає об'єктом дослідження в наукових працях економістів і математиків із пострадянського простору [1, 2], а усвідомлення необхідності переходу від стихійності інвестиційних потоків до їх вмотивованого регулювання виходить далеко за межі суто академічного інтересу. Це пов'язано перш за все з тим, що більшість країн колишнього СРСР при переході від планової до ринкової економіки мають досить великі прогалини як на інституціональному, так і на законодавчому рівні, що нерідко спричинює відтік якісного національного капіталу за кордон і залучення іноземних інвестицій не завжди з урахуванням довготермінових стратегічних інтересів держави [3]. Останнє, в свою чергу, приводить до нарощення суми зовнішнього боргу і навряд чи сприяє економічному зростанню.

Тому проблема моделювання інвестиційної політики часто має спільні витоки з проблемою моделювання зовнішнього боргу [4]. Більшість таких моделей мають скоріше теоретичне значення, оскільки проблема збору кількісної інформації являє собою значну перепону на шляху їх практичного використання. Недосконаліми також є методи чисельної реалізації цих моделей.

Взагалі еволюція будь-якої динамічної системи може бути описана системою диференціальних рівнянь такого виду:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$$

де $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ – вектор фазових координат (змінних станів); $\mathbf{u}(t) = (u_1, u_2, \dots, u_l)^T$ – вектор змінних керування системою. Якщо функція $f(\cdot)$ не залежить явно від часу t , то система називається автономною.

Розглянемо, наприклад, економічну систему відкритого типу, що складається з n галузей, кожна з яких (у загальному випадку) виробляє продукти як для ринку кінцевого споживання, так і для інвестиційного ринку. Споживчі товари або споживаються домогосподарствами в національній економіці, або експортуються за кордон. Інвестиційні ресурси також спрямовуються за двома напрямками: для інвестування будь-яких з n галузей національної економіки та для інвестування

Назаренко Олександр Максимович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри моделювання складних систем Сумського державного університету.

© В.О.М. Назаренко, 2006

закордонних проектів. Споживчі товари та інвестиції надходять також ззовні у вигляді імпорту іноземних споживчих товарів та іноземних інвестицій відповідно. Загальна схема грошових та товарних потоків для такої економіки представлена на рис. 1.

Змінні керування будемо вибирати у відповідності до кінцевої мети моделювання. У нашому випадку інструментами прийняття рішень мають бути потоки інвестицій, адже за мету поставлено регулювання інвестиційною політикою держави. Вибір фазових координат будемо здійснювати, дотримуючись підходу, описаного в [5].

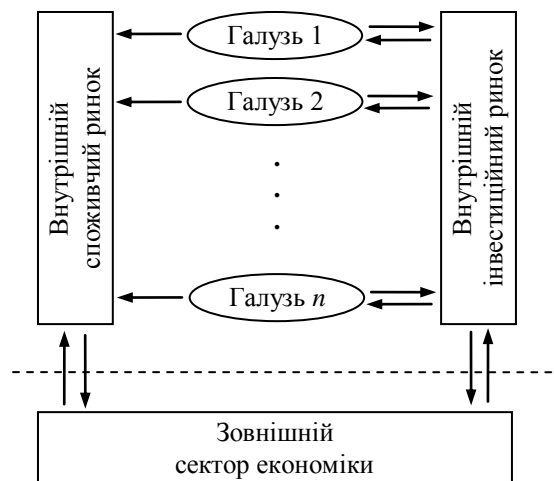


Рисунок 1 – Загальна схема грошових та товарних потоків у відкритій n -галузевій економіці

Нехай $x_i(t)$ – основні фонди (реальний капітал) i -го сектора в момент часу t ($i = 1, 2, \dots, n$), тоді капітальні вкладення вимірюються швидкістю зміни основних фондів (чистими інвестиціями) $\dot{x}_i(t) = dx_i(t)/dt$. Припустимо, що в кожний момент часу t необхідно замінити $f_i(t)$ амортизованого капіталу i -го сектора. Функція $f_i(t)$ називається функцією амортизації і часто має вигляд $f_i(t) = \mu_i(t)x_i(t)$, де $\mu_i(t)$ – норма амортизації для i -го сектора в момент часу t . Якщо валові інвестиції $I_i(t)$ в i -й сектор економіки йдуть на заміну амортизованого капіталу та на чисте прирощення існуючого капіталу, то динаміку зміни основних фондів i -го сектора можна описати диференціальним рівнянням

$$\dot{x}_i(t) + f_i(t) = I_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Позначимо $x_{n+1}(t)$ – зовнішній борг держави в момент часу t , тоді $\dot{x}_{n+1}(t) = dx_{n+1}(t)/dt$ – швидкість зміни зовнішнього боргу (валовий приріст). Будемо вважати, що в кожний момент часу t існують витрати $f_{n+1}(t)$, які додаються до суми заборгованості як відсоток за користування зовнішніми запозиченнями. Функція $f_{n+1}(t)$ називається функцією обслуговування зовнішнього боргу і часто має вигляд $f_{n+1}(t) = \mu_{n+1}(t)x_{n+1}(t)$, де $\mu_{n+1}(t)$ – ставка зовнішніх запозичень в момент часу t (як

правило, асоціюється зі світовою процентною ставкою). Чистий приріст зовнішнього боргу (валовий приріст мінус величина обслуговування) пов'язаний з необхідністю фінансування дефіциту платіжного балансу держави $BPD(t)$. Тоді динаміка зміни зовнішнього боргу може бути описана диференціальним рівнянням

$$\dot{x}_{n+1}(t) - f_{n+1}(t) = BPD(t). \quad (2)$$

Отже, в загальному випадку для n -секторної економіки динаміку системи будемо описувати неперервною моделлю, що складається з $n+1$ диференціальних рівнянь (1)-(2).

Охарактеризуємо функції $I_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, n$) та $BPD(t)$. Припустимо, що в кожному момент часу t існує m інвестиційних та споживчих потоків $u_k(t)$, таких, що $I_i(t)$ та $BPD(t)$ можуть бути представлені як лінійні комбінації таких потоків:

$$I_i(t) = \sum_{k=1}^m \lambda_k u_k(t), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$BPD(t) = \sum_{k=1}^m \eta_k u_k(t), \quad (4)$$

де λ_k, η_k – деякі сталі вагові коефіцієнти.

З урахуванням (3)-(4) модель (1)-(2) набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k u_k(t) = \dot{x}_i(t) + f_i(t), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^m \eta_k u_k(t) = \dot{x}_{n+1}(t) - f_{n+1}(t). \quad (6)$$

Модель (5)-(6) є базовою для дослідження динамічних характеристик описаної системи і розв'язання численних оптимізаційних задач залежно від мети подальшого моделювання.

У нашому випадку метою є регулювання потоками u_k ($k=1, 2, \dots, m$). Тоді виникає питання про апроксимацію функцій правих частин системи (5)-(6). Для цього будемо використовувати економетричний підхід, описаний у [6].

Дискретна модель досліджуваної системи для моментів часу $t=1, 2, \dots, N$ набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k u_k(t) = I_i(t) = x_i(t+1) - x_i(t) + f_i(t), \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^m \eta_k u_k(t) = BPD(t) = x_{n+1}(t+1) - x_{n+1}(t) - f_{n+1}(t). \quad (8)$$

Маючи для кожного з n секторів економіки статистичні дані з основних фондів $x_i(t)$ і функцій амортизації $f_i(t)$, а також зовнішнього боргу держави $x_{n+1}(t)$ і функцій його обслуговування $f_{n+1}(t)$ праві частини рівнянь (7)-(8) можна апроксимувати функцією регресії з якомога більшою точністю. Для цього валові інвестиції $I_i(t)$ в основні фонди i -го сектора економіки та дефіцит платіжного балансу держави $BPD(t)$ представимо як частки від ВВП (Y) країни. В результаті приходимо до такої економетричної моделі:

$$x_i(t+1) - x_i(t) + f_i(t) = v_i(t)Y_t, i=1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$x_{n+1}(t+1) - x_{n+1}(t) - f_{n+1}(t) = v_{n+1}Y_t, t=1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

де $v_i(t)$ – деякі неперервні функції, які будемо шукати у вигляді многочленів:

$$v_i(t) = b_{i0} + b_{i1}t + b_{i2}t^2 + \dots + b_{ik}t^{k_i}, i=1, 2, \dots, n+1. \quad (11)$$

Тут степені k_i встановлюються експериментально.

Функцію $v_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) можна інтерпретувати як показник інвестиційної активності в i -му секторі економіки. Чим більше значення $v_i(t)$, тим більша частка у ВВП інвестицій, залучених в i -й сектор, а отже, більший внесок i -го сектора в оновлення і модернізацію економіки. Зростання темпів модернізації буде відбуватися за умови, що темпи зростання інвестування в основний капітал будуть вищі за темпи зростання ВВП.

Що стосується економічної інтерпретації функції $v_{n+1}(t)$, то вона найчастіше виступає як ступінь незбалансованості товарних, капітальних та фінансових потоків в момент часу t . Чим більше значення $v_{n+1}(t)$, тим суттєвіший “перекіс” у бік відтоку товарів та капіталу з країни або, навпаки, їх притоку ззовні, і, як наслідок, в обох випадках спостерігається залежність від зовнішньої кон’юнктури.

ВВП Y у даному випадку є екзогенним параметром, який в кожний момент часу будемо наближувати функцією Кобба-Дугласа:

$$Y = a_0 p^{a_1} q^{a_2} \dots, \quad (12)$$

де p, q, \dots – деякі фактори (основні фонди, трудові ресурси, матеріальні витрати тощо), які впливають на ВВП, забезпечуючи якомога більший коефіцієнт детермінації R^2 для моделі (12).

Продемонструємо наведений вище підхід до апроксимації правих частин моделі (7)-(8) на прикладі динаміки економічного розвитку Данії в період 1966-1998 рр. Всі статистичні дані – з офіційного сервера статистичної інформації Данії [7] і Організації економічного співробітництва та розвитку [8].

Розглянемо випадок двогалузевої економічної системи, умовно розділивши економіку Данії на промислово-сільськогосподарську галузь (переробна промисловість, електроенергетика, газо- та водопостачання, сільське господарство тощо) і галузь послуг (готельно-ресторанний бізнес, транспорт, зв’язок, телекомунікації і т.д.).

ВВП Данії будемо наближати функцією виду (12), обравши як фактори основні фонди (p) та чисельність робочої сили (q). Метод найменших квадратів оцінки невідомих параметрів дає такі результати:

$$Y(p, q) = 0.6385 p^{0.7826} q^{2.6625}, R^2 = 0.9961.$$

Високе значення коефіцієнта детермінації R^2 дозволяє використовувати функцію для подальшого дослідження.

Динаміка розвитку величин інвестицій $I_1(t)$ в першу галузь, $I_2(t)$ в другу галузь та дефіциту платіжного балансу країни $BPD(t)$ описується моделлю (9)-(10). Розрахунки показують, що як функція $v_i(t)$ ($i=1, 2, 3$) можна обрати такі многочлени:

$$v_1(t) = 0.1205 + 0.0113t - 0.0009339 t^2 + 0.00001727 t^3,$$

$$v_2(t) = 0.1527 + 0.0207t - 0.001597t^2 + 0.00002956t^3,$$

$$v_3(t) = -0.1180 + 0.0593t - 0.00423t^2 + 0.00007957t^3.$$

Графіки цих функцій наведені на рис. 2 і рис. 3.

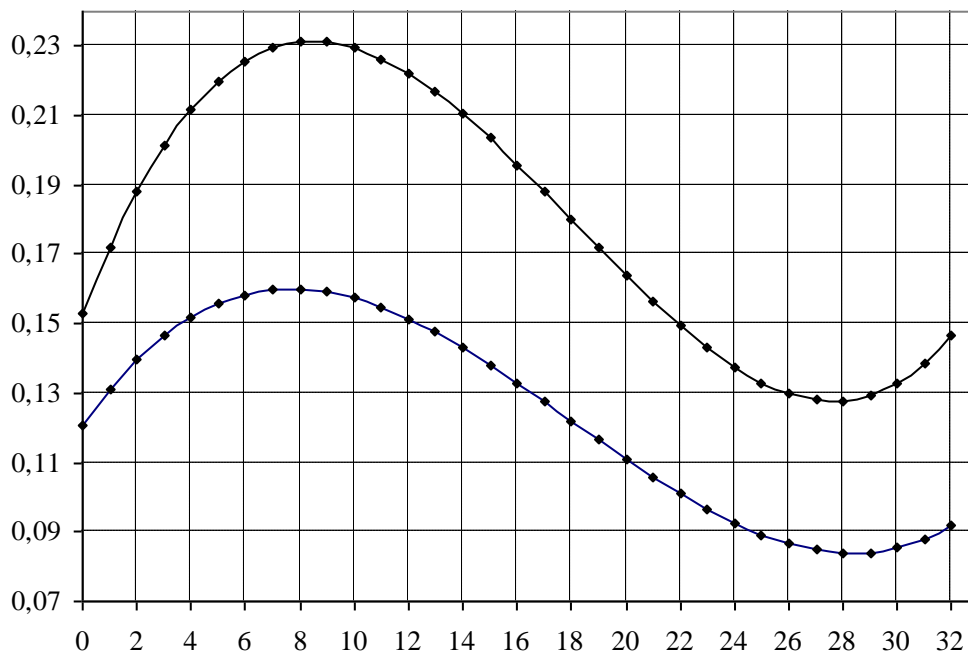


Рисунок 2 – Графіки функцій $v_1(t)$, $v_2(t)$

Як бачимо, інвестиційна активність $v_2(t)$ у галузі послуг на даному етапі розвитку країни перевищувала інвестиційну активність $v_1(t)$ у промислово-сільськогосподарській галузі і, маючи домінуюче значення, в більшій мірі сприяла модернізації економіки країни. Також треба відзначити майже синхронне коливання цього показника для обох галузей, що може свідчити про відсутність дисбалансів під час економічного спаду чи підйому в межах економічної циклічності. Загальній тенденції інвестиційної активності відповідає і функція $v_3(t)$, яка, як вже відзначалося, відображає ступінь залежності країни від зовнішньої кон'юнктури. А оскільки для економіки Данії цей показник був досить високим майже до 2005 р., то не дивно, що чим вище значення мала величина $v_3(t)$, тим вищими були показники інвестиційної активності в обох галузях економіки. Значне зростання функції $v_3(t)$ в 70-х рр. у результаті вилилося в збільшенні значення зовнішнього боргу майже до 50% від ВВП у 1988 р., але існуюча вже на той момент тенденція зниження частки дефіциту платіжного балансу країни у ВВП дала змогу поступово зменшити зовнішню заборгованість на початку 90-х рр.

При знайдених $v_i(t)$ ($i=1, 2, 3$) для функцій $I_1(t)$, $I_2(t)$, $BPD(t)$ згідно з моделлю (9)-(10) отримуємо такі регресії:

$$I_1(t) = \left(0.1205 + 0.0113t - 0.0009339t^2 + 0.00001727t^3 \right) \left(0.6385p^{0.7826}q^{2.6625} \right), R^2 = 0.92;$$

$$I_2(t) = (0.1527 + 0.0207t - 0.001597t^2 + 0.00002956t^3) (0.6385p^{0.7826}q^{2.6625}), R^2 = 0.92;$$

$$BPD(t) = (-0.1180 + 0.0593t - 0.00423t^2 + 0.00007957t^3) (0.6385p^{0.7826}q^{2.6625}), R^2 = 0.91.$$

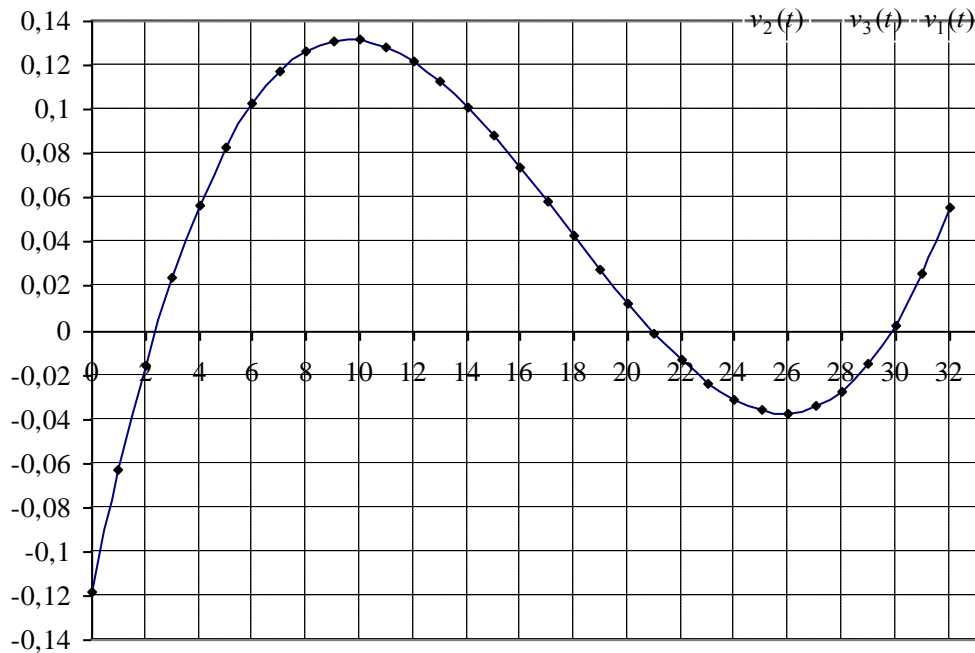


Рисунок 3 – Графік функції $v_3(t)$

Високі значення коефіцієнтів детермінації цих регресій дозволяють досить точно аналітично описати праві частини системи (5)-(6). Це дає можливість будувати постановки задач оптимального розподілу внутрішніх та зовнішніх потоків, що мають місце в системах описаного типу.

Далі наведемо одну з можливих проблем оптимізації. За оцінками експертів [9], передові темпи розповсюдження інновацій і оновлення національних економік не відповідають необхідним нормам навіть для розвинених європейських країн. Що стосується економіки України, то її технологічне оновлення потребує капіталовкладень на рівні 500 млрд дол. при тому, що щорічно сума інвестицій в основний капітал становить не більше 18-19 млрд дол. Тому єдиним виходом для багатьох перехідних економік та одним з ефективних методів розв'язання цієї проблеми для розвинених країн є точкове інвестування з наперед заданими пріоритетами для кожної точки економічного зростання [10]. З іншого боку, сама проблема вибору таких точок вже є непростою задачею. Так, наприклад, для країн з перехідною економікою хаотичність у розподілі потоків іноземних інвестицій може призвести (і у багатьох випадках призводить) до розвитку лише ресурсних, часто екологічно шкідливих галузей, консервуючи при цьому економічну другорядність країни.

Для начності розглянемо проблему точкового розподілу інвестицій на прикладі двогалузевої відкритої економіки (рис. 4).

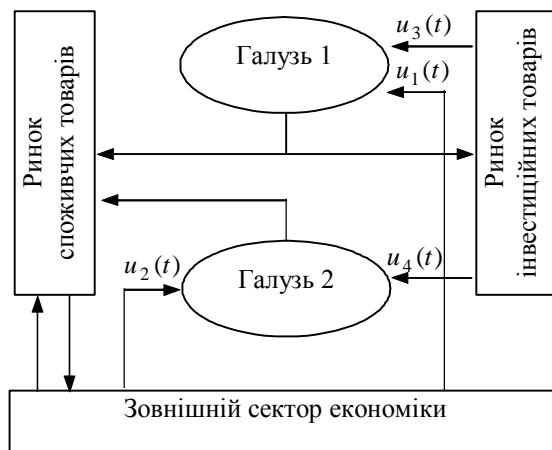


Рисунок 4 – Схема грошових та товарних потоків у відкритій двогалузевій економіці

Серед потоків, що визначають ліві частини системи (5)-(6), виділимо такі: зовнішні інвестиції $u_1(t)$ в галузь 1 та $u_2(t)$ в галузь 2, внутрішні інвестиції $u_3(t)$ в галузь 1 та $u_4(t)$ – в галузь 2. Також введемо величину $u_5(t)$ як суму чистого експорту та інвестицій за кордон. У загальному випадку можна розширювати набір функцій керування, але для наочності задачі обмежимося п'ятьма вказаними потоками.

Отже, модель (3)-(4) може бути представлена у вигляді

$$\begin{cases} u_1(t) + u_3(t) = I_1(t), \\ u_2(t) + u_4(t) = I_2(t), \\ u_1(t) + u_2(t) - u_5(t) = BPD(t). \end{cases}$$

Тут число невідомих на два більше від числа рівнянь. Тому як базові змінні виберемо $u_3(t)$, $u_4(t)$ та $u_5(t)$, а як вільні – $u_1(t)$ та $u_2(t)$, тобто потоки інвестицій із-за кордону в галузь 1 та галузь 2 відповідно. Тоді

$$\begin{cases} u_3(t) = I_1(t) - u_1(t), \\ u_4(t) = I_2(t) - u_2(t), \\ u_5(t) = -BPD(t) + u_1(t) + u_2(t). \end{cases} \quad (13)$$

Якщо p_1 ($0 \leq p_1 \leq 1$) позначити пріоритет розвитку першої галузі, а p_2 ($0 \leq p_2 \leq 1$) – другої, то за критерій оптимальності логічно обрати такий:

$$F(u_1, u_2) = p_1 u_1 + p_2 u_2 \rightarrow \max_{u_1, u_2}. \quad (14)$$

Що стосується системи обмежень, то на практиці вони найчастіше будуть пов'язані з необхідністю задоволення певних критичних значень таких параметрів, як споживання, експорт, імпорт і т.д., а їх кількість може бути досить великою. Для прикладу наведемо деякі з можливих обмежень на змінні керування $u_1(t)$ та $u_2(t)$.

Перше обмеження природно випливає з того, що сумарне значення іноземних інвестицій не може перевищувати деякого значення $M(t)$, яке можна інтерпретувати як

критичне для економіки, стратегії розвитку або навіть національної безпеки держави. Отже,

$$u_1 + u_2 \leq M. \quad (15)$$

Для того щоб записати друге обмеження, введемо такі позначення. Нехай k ($0 \leq k \leq 1$) – коефіцієнт, що показує, яка частка споживчих товарів національного виробництва повинна за будь-яких умов залишатися для внутрішнього споживання. Аналогічні критичні коефіцієнти існують і для ринку інвестиційних товарів. Так, під k_1 і k_2 ($0 \leq k_1, k_2 \leq 1$) будемо розуміти частки внутрішніх інвестицій u_3 в галузь 1 і u_4 – в галузь 2 відповідно, які за будь-яких умов повинні йти на внутрішній розвиток. Тоді для величини u_5 маємо нерівність

$$u_5 \leq (1-k)(Y - (u_3 + u_4)) + (1-k_1)u_3 + (1-k_2)u_4.$$

З урахуванням (13) після відповідних розрахунків отримаємо таке обмеження на змінні $u_1(t)$ та $u_2(t)$:

$$(1+k-k_1)u_1 + (1+k-k_2)u_2 \leq (1-k)Y + (k-k_1)I_1 + (k-k_2)I_2 + BPD. \quad (16)$$

Наступні обмеження відображають залежність економіки від іноземних інвестицій, задаючи їх критичні рівні для кожної з галузей:

$$u_1^{\min} \leq u_1 \leq u_1^{\max}, \quad (17)$$

$$u_2^{\min} \leq u_2 \leq u_2^{\max}, \quad (18)$$

де u_1^{\min} , u_1^{\max} і u_2^{\min} , u_2^{\max} – граничні рівні іноземних інвестицій в галузь 1 і галузь 2 відповідно.

Задача (14)-(18) є задачею лінійного програмування. Її графічну інтерпретацію зображено на рис. 5.

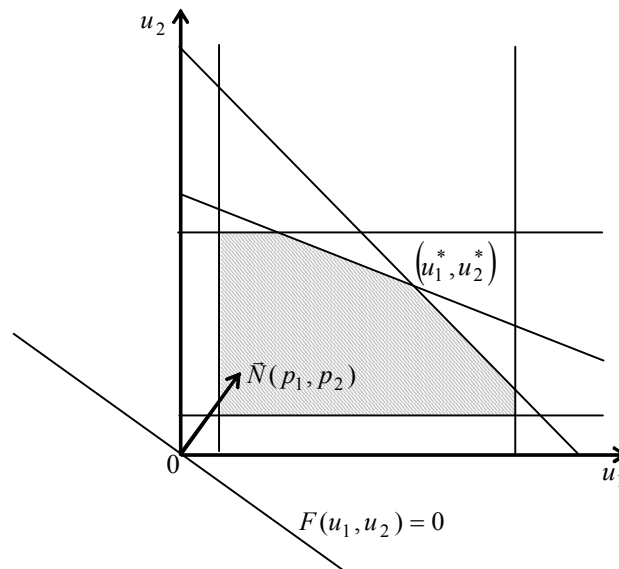


Рисунок 5 – Графічне зображення задачі оптимального розподілу іноземних інвестицій

Зауважимо, що подібна статична оптимізація потоків зовнішніх інвестицій можлива в кожний момент часу $t=1, 2, \dots, N$. Порівнюючи отримані оптимальні значення з тими, що мали місце в реальності, можна робити висновки з приводу ефективності макроекономічної політики та необхідності її коригування в майбутньому. Також відзначимо, що за наявності функцій регресії правих частин моделі (9)-(10), як це було зроблено на прикладі економіки Данії, можна знайти прогнозні значення функцій Y , I_1 , I_2 , BPD в момент часу $t=N+1$ і зробити оптимізацію потоків інвестицій в прогнозний період. Це дозволило б ефективно планувати інвестиційну політику країни.

1. Кузнєцова К., Карпа Я. Банківський сектор України як джерело фінансування інвестиційно-інноваційної діяльності // Вісник НБУ. – 2004. № 2. – С. 60-64.
2. Накоряков В.Е., Гасенко В.Г. Математическая модель плановой макроэкономки // Экономика и математические методы. – 2002. – Т.38, № 2. – С. 118-124.
3. Алексеев Д.А. Экономико-математическая модель трансформационного типа // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 6. – С. 30-35.
4. Дикусар В.В., Сиягин С.Ю. Качественные и численные методы в задаче оптимального управления внешним долгом: Сообщ. по прикладной матем./ ВЦ РАН. – М., 2000.
5. Назаренко А.М. Об эконометрико-игровом методе построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов // Механизм регулирования экономики. – 2006. – № 1. – С. 105-114.
6. Назаренко А.М., Васильев А.А. Моделирование макроэкономических систем эконометрико-игровым методом // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 4. – С. 161-171.
7. <http://www.dst.dk/>
8. <http://www.oecd.org>
9. Гесць В., Семиноженко В. Спеціальні економічні зони: „чорні діри”, чи точки економічного зростання // Дзеркало тижня. – № 44 (623).
10. Колемаев В.А. Математические методы в экономике. – М.: Юнити-Дана, 2005. – 297 с.

Отримано 29.12.2006 р.

А.М. Назаренко

**Динамическое моделирование инвестиционного развития
и оптимальной макроэкономической инвестиционной политики**

В статье описывается процесс построения динамической модели инвестиционного развития как системы дифференциальных уравнений. Для исследования модели используется эконометрический подход, который позволяет с высокой точностью перейти от непрерывной к дискретной модели. Апробация построенной модели осуществляется для экономики Дании. Также описывается проблема оптимальной инвестиционной политики как задача линейного программирования.