Министерство образования и науки Украины

Сумский государственный университет

Павленко И.В.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

в задачах сопротивления материалов и линейной теории упругости

Рекомендовано учёным советом Сумского государственного университета как учебное пособие

Сумы

Изд-во СумГУ

2006

УДК 539.3

П 12

ББК 30.121.2

Рецензенти:

канд. техн. наук, проф. В.А. Хворост;

канд. техн. наук, проф. І.Б. Карінцев

Рекомендовано до друку вченою радою Сумського державного університету Міністерства освіти і науки України

Павленко І.В.

П 12 **Метод** скінчених елементів в задачах опору матеріалів і лінійної теорії пружності: Навчальний посібник.– Суми: Вид-во СумДУ, 2006.–147с. Російською мовою.

ISBN 966-657-087-4

Викладені основи методу скінчених елементів при розв'язанні задач опору матеріалів і теорії пружності. Наведені приклади розрахунків напружено-деформованого стану різних конструкцій.

Для студентів спеціальності «Динаміка і міцність», а також для студентів інженерних спеціальностей, що факультативно вивчають метод скінчених елементів.

ББК 30.121.2

ISBN 966-657-087-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Экстремальные условия работы элементов современных конструкций, сложность их формы и большие габариты делают трудным и дорогостоящим осуществление натурного эксперимента.

Значительное развитие ЭВМ позволило моделировать сложные физические явления, что, в свою очередь, даёт возможность варьировать определяющими параметрами исследуемой системы с целью получения оптимальных характеристик прочности и надёжности. Важнейшим подспорьем в реализации численного эксперимента является выбор численных методов решения конкретной проблемы, что на данный период развития науки и техники не представляет особой трудности.

В основе численных методов лежит замена континуальной расчётной модели с непрерывным распределением параметров дискретной моделью, имеющей конечное значение неизвестных, выбираемых в зависимости от требований, предъявляемых к расчёту, и возможностей ЭВМ.

В настоящее время большое распространение среди множества численных методов получил метод конечных элементов (МКЭ), который наиболее удобен для реализации на ЭВМ благодаря чёткой формализации отдельных этапов решения задачи в матричной форме расчёта.

Наряду с этим широко применяются и другие численные методы расчёта (вариационные, разностные, интегральные и т.д.), в основе многих из которых лежат уравнения вариационных принципов.

В первых главах изложены основные соотношения теории упругости, приведены основы матричного исчисления, а также рассмотрены методы решения систем алгебраических уравнений.

В последующих разделах рассмотрены основы метода конечных элементов и его применение к решению задач сопротивления материалов и теории упругости, а также приведены многочисленные примеры.

1 ОСНОВЫ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1 Матрицы и операции над ними

1.1.1 Определение матрицы

Матрица определяется как прямоугольный массив символов или чисел, упорядоченных в строки или столбцы, и обычно записывается в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a._{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (1.1)$$

Нижние индексы i и j в первой и второй позициях указывают соответственно на i-ю строку и j-й столбец.

Матрица (1.1) имеет m строк и n столбцов; её типичный элемент a_{ij} расположен в i-й строке и j-м столбце. Говорят, что матрица A имеет порядок $m \times n$.

1.1.2 Виды матриц

Вектор-строка представляет собой матрицу порядка $1 \times n$ и может быть представлена в виде

$$b = \{b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n\}. \qquad (1.2)$$

Вектор-столбец представляет собой матрицу порядка $m \times 1$ и может быть представлен в виде

$$c = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{Bmatrix}. \tag{1.3}$$

Нуль-матрица – это матрица, все элементы которой равны нулю:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Квадратная матрица имеет равное число строк и столбцов:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Скалярная матрица – это матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} a, \; i = j; \\ 0, \; i \neq j, \end{cases} \tag{1.6}$$

где a – скаляр. Например:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

*Единичная матриц*а определяется по правилу

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, \; i = j; \\ 0, \; i \neq j. \end{cases} \tag{1.8}$$

Например, единичная матрица порядка 3×3 имеет вид

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.9)$$

Диагональная матрица определяется следующим образом:

$$d_{ij} = \begin{cases} d_{ii}, \; i = j; \\ 0, \; i \neq j, \end{cases} \qquad (1.10)$$

поэтому диагональная матрица может быть записана в виде

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.11)$$

Ленточная матрица имеет ненулевые элементы в полосе, расположенной вдоль главной диагонали, и только нулевые вне этой полосы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.12)$$

Треугольная матрица представляет собой матрицу, у которой равны нулю все элементы либо над главной диагональю (нижняя треугольная матрица *U*), либо под главной диагональю (верхняя треугольная матрица *L*). Например:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}; \qquad (1.13)$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (1.14)$$

Симметричная матрица – это квадратная матрица, в которой элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, то есть

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (1.15)$$

Кососимметричная матрица – это квадратная матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, \ i = j; \\ -a_{ji}, \ i \neq j. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Например:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.17)$$

Косая матрица – матрица, элементы которой определяются по правилу

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ii}, \ i = j; \\ -a_{ji}, \ i \neq j. \end{cases} \qquad (1.18)$$

Например:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{1.19}$$

Блочная матрица – это матрица, разделённая на подматрицы.

Например:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}, \tag{1.20}$$

где подматрицы A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23} задаются в виде

$$\mathrm{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}; \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix};$$

$$A_{21} = a_{41}; \qquad A_{22} = a_{42}; \qquad A_{23} = [a_{43} \quad a_{44}]. \tag{1.21}$$

1.1.3 Операции над матрицами

Суммой двух матриц A и B одного порядка называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых

$$C = A + B, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \tag{1.22}$$

Например:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & -1+1 & 0+1 \\ 3+2 & -2+4 & -4+0 \\ 1+0 & 2+1 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.23}$$

Вычитание матриц A и B определяется аналогично сложению

$$C = A - B, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \tag{1.24}$$

Матрицы обладают свойствами *коммутативности*:

$$A + B = B + A, \tag{1.25}$$

а также *ассоциативности*:

$$(A + B) + C = A + (B + C). \tag{1.26}$$

Транспонирование матрицы – это операция, осуществляемая заменой всех строк соответствующими столбцами.

Например, если задана матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \tag{1.27}$$

то соответствующая ей транспонированная матрица имеет вид

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}. \tag{1.28}$$

Транспонирование блочной матрицы получается заменой каждой подматрицы на транспонированную, а затем переменой строк и столбцов блочной матрицы.

Например, для матрицы (1.20)

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

получаем транспонированную

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{bmatrix}. \tag{1.30}$$

Заметим, что симметричная матрица совпадает со своей транспонированной, то есть

$$A^T = A. \tag{1.31}$$

Для кососимметричной матрицы транспонированная равная исходной с противоположным знаком, то есть

$$A^T = -A. \tag{1.32}$$

Для *умножения матрицы A на скаляр* λ каждый элемент матрицы умножается на λ:

$$B = \lambda \cdot A,\ если\ b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}. \tag{1.33}$$

Например:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot(-4) & 2\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 10 \\ 6 & -8 & 12 \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

Умножение матрицы A порядка m×k на матрицу B порядка $k \times n$ осуществляется по следующему правилу:

$$C = A \cdot B,\ если\ c_{ij} = \sum_{q=1}^{k} a_{iq} \cdot b_{qj}. \tag{1.35}$$

При этом матрица C имеет порядок $m \times n$.

Например, для матриц

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \underset{3\times 3}{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

произведение $C=A \cdot B$ получается следующим образом:

$$\underset{3\times 3}{C} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot 5 + 1\cdot 0 & 2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 3 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-2) + 1\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 5 + 4\cdot 0 & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 + 4\cdot 3 & 3\cdot 2 + 0\cdot(-2) + 4\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 10 \\ 3 & 12 & 28 \end{bmatrix}. \tag{1.37}$$

Операцию умножения можно распространить на произведение более чем двух матриц в том случае, если они имеют согласованные порядки.

Например:

$$\underset{m\times n}{D} = \underset{m\times p}{A} \cdot \underset{p\times q}{B} \cdot \underset{q\times n}{C}. \tag{1.38}$$

Если последовательность перемножаемых матриц не нарушается, то к произведению матриц применимы законы ассоциативности и дистрибутивности:

$$(AB)C = A(BC) = ABC; \tag{1.39}$$

$$A(B+C) = AB + AC. \tag{1.40}$$

В общем случае перемножение матриц не коммутативно:

$$AB \neq BA. \tag{1.41}$$

Блочные матрицы перемножаются аналогично обычным. При этом необходимо согласование порядков соответствующих блоков.

Определитель $|A|$ *квадратной матрицы* A равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

Алгебраическое дополнение L_{ij} элемента a_{ij} определяется как произведение $(-1)^{i+j}$ и минора M_{ij}, полученного вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

определитель записывается как

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}. \tag{1.43}$$

Миноры элементов a_{11}, a_{12}, a_{13} соответственно равны:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad M_{12} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad M_{13} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tag{1.44}$$

а алгебраические дополнения:

$$L_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \qquad L_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \qquad L_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}. \tag{1.45}$$

Следовательно, определитель матрицы A получается следующим образом:

$$|A| = 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\left(-\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) + (-3)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \tag{1.46}$$
$$= 2\cdot\bigl(0\cdot 2 + (-2)\cdot(-3)\bigr) - 1\cdot\bigl((-1)\cdot 2 + (-2)\cdot(-1)\bigr) + (-3)\cdot\bigl((-1)\cdot 3 + 0\cdot(-1)\bigr) = 21.$$

Свойства определителя:

– если какая-либо строка (или столбец) содержит только нули, то определитель равен нулю;

– если переставить любые две строки (или два столбца), то определитель изменит знак;

– если какие-либо две строки (или два столбца) совпадают, то определитель равен нулю;

– умножение каждого элемента в строке (или столбце) на скаляр λ эквивалентно умножению всего определителя на λ.

Обратной к квадратной матрице A является матрица A^{-1} того же порядка, которая после умножения на исходную даёт единичную матрицу:

$$A^{-1}A = I. \tag{1.47}$$

Матрица A^{-1} существует, если определитель исходной матрицы A отличен от нуля:

$$|A| \neq 0. \tag{1.48}$$

Матрица называется *сингулярной*, если её определитель равен нулю:

$$|A| = 0. \tag{1.49}$$

Элементы обратной матрицы вычисляются по формуле

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = b_{ij} = \frac{L_{ji}}{|A|}. \tag{1.50}$$

Например, для матрицы (1.42) получим:

$$b_{11}=\frac{\begin{vmatrix}0 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}}{21}=\frac{2}{7};\qquad b_{12}=\frac{-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}}{21}=-\frac{11}{21};\qquad b_{13}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -2\end{vmatrix}}{21}=-\frac{2}{21};$$

$$b_{21}=\frac{-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{21}=0;\qquad b_{22}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{21}=\frac{1}{3};\qquad b_{23}=\frac{-\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & -2\end{vmatrix}}{21}=\frac{1}{3};\quad (1.51)$$

$$b_{31}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{21}=-\frac{1}{7};\qquad b_{32}=\frac{-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{21}=-\frac{5}{21};\qquad b_{33}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}}{21}=\frac{1}{21},$$

то есть

$$B=A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{11}{21} & -\frac{2}{21}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{7} & -\frac{5}{21} & \frac{1}{21}\end{bmatrix}. \tag{1.52}$$

Нетрудно убедиться, что условие (1.47) выполняется:

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I. \tag{1.53}$$

Дифференцирование матрицы выполняется посредством дифференцирования каждого её элемента.

Например, если $A=A(t)$ – матрица порядка $m\times n$:

$$A(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t)\end{bmatrix}, \tag{1.54}$$

то имеем

$$D(A)=\frac{dA(t)}{dt}=\begin{bmatrix} \frac{da_{11}(t)}{dt} & \frac{da_{12}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}(t)}{dt} \\ \frac{da_{21}(t)}{dt} & \frac{da_{22}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}(t)}{dt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{m1}(t)}{dt} & \frac{da_{m2}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}(t)}{dt} \end{bmatrix}. \tag{1.55}$$

Интегрирование матрицы выполняется посредством интегрирования каждого её элемента.

Например, для матрицы (1.54) получим

$$\int A(t)dt=\begin{bmatrix} \int a_{11}(t)dt & \int a_{12}(t)dt & \dots & \int a_{1n}(t)dt \\ \int a_{21}(t)dt & \int a_{22}(t)dt & \dots & \int a_{2n}(t)dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int a_{m1}(t)dt & \int a_{m2}(t)dt & \dots & \int a_{mn}(t)dt \end{bmatrix}. \tag{1.56}$$

Если матрицы *A(t)*, *B(t)* и *C(t)* согласованны по сложению и умножению, то имеют место соотношения:

$$D(A+B)=D(A)+D(B); \tag{1.57}$$

$$D(AB)=D(A)\cdot B+A\cdot D(B); \tag{1.58}$$

$$D(ABC)=D(A)\cdot BC+A\cdot D(B)\cdot C+AB\cdot D(C); \tag{1.59}$$

$$D(A^{-1})=-A^{-1}D(A)A^{-1}. \tag{1.60}$$

Частное дифференцирование матрицы определяется аналогично общему дифференцированию.

Если X – вектор-столбец, Y – вектор-строка, то есть

$$X=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}; \qquad Y=\{y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m\}, \tag{1.61}$$

то *частные производные*, определяемые как

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} = \left\{ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \right\};$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x_2} = \left\{ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \right\}; \qquad (1.62)$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x_n} = \left\{ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \quad \dots \quad \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \right\}$$

образуют матрицу

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \qquad (1.63)$$

Если матрицы A, X, Y и Z имеют согласованные порядки по умножению и сложению, то справедливы соотношения:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \left(\frac{\partial Y^T}{\partial X^T} \right)^T; \qquad (1.64)$$

$$\frac{\partial X^T}{\partial X} = \frac{\partial X}{\partial X^T} = I; \qquad (1.65)$$

$$\frac{\partial \left(X^T A X \right)}{\partial X} = 2AX; \qquad (1.66)$$

$$\frac{\partial \left(X^T A X \right)}{\partial X^T} = 2X^T A; \qquad (1.67)$$

$$\frac{\partial \left(X^T A \right)}{\partial X} = A, \ где \ A \neq f(x_i); \qquad (1.68)$$

$$\frac{\partial (YZ)}{\partial X} = \frac{\partial (ZY)}{\partial X} = \frac{\partial Z^T}{\partial X} Y^T + \frac{\partial Y}{\partial X} Z; \qquad (1.69)$$

$$\frac{\partial (YZ)}{\partial X^T} = \frac{\partial (ZY)}{\partial X^T} = Y \frac{\partial Z}{\partial X^T} + Z^T \frac{\partial Y^T}{\partial X^T}. \qquad (1.70)$$

1.2 Решение систем линейных алгебраических уравнений

1.2.1 Классификация методов решения

В случае линейной стационарной задачи теории упругости метод конечных элементов приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1.71}$$

или в матричной форме записи

$$AX = B, \tag{1.72}$$

где A – квадратная матрица коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \tag{1.73}$$

X – вектор-столбец неизвестных параметров:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix}; \tag{1.74}$$

B – вектор-столбец свободных членов:

$$B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{Bmatrix}. \tag{1.75}$$

Существуют прямые и итерационные способы решения СЛАУ.

При использовании прямых методов решение X получается непосредственно в результате одного применения вычислительной процедуры.

При использовании итерационных методов решение X требует повторяющего применения алгоритма. Для начала итерационной процедуры необходимо задать начальное приближение решения. При последующих итерациях получаются всё более точные оценки решения. Для проверки сходимости последнее полученное решение сравнивают с предыдущим. Итерационный процесс заканчивается, если разность двух последних приближений становится меньше наперёд заданной величины.

1.2.2 Прямые методы решения СЛАУ

Прямые методы решения СЛАУ состоят из двух процедур:

– приведение матрицы системы к треугольному виду;

– обратная подстановка.

Существует множество прямых методов: метод Гаусса, метод LDL^T-факторизации, разложение Холесского, фронтальный метод, метод быстрого преобразования, метод разбиения на блоки.

В *методе Гаусса* с помощью действий над строками матрица A приводится к верхней треугольной матрице U, а вектор-столбец B преобразуется соответственно к вектору-столбцу C. Таким образом, из (1.72) получаем

$$UX = C. \tag{1.76}$$

Значение переменной x_n получается непосредственного из n-го уравнения системы (1.76). Подстановка этого значения в $(n–1)$-е уравнение даёт x_{n-1} и т.д.

В *методе LDL^T-факторизации* матрица коэффициентов A представляется в виде произведения нижней треугольной L, диагональной D и верхней треугольной U матриц

$$A = LDU. \tag{1.77}$$

Если A – симметричная матрица, то

$$U = L^T. \tag{1.78}$$

Тогда из (1.77) получаем

$$A = LDL^T,$$

а уравнение (1.72) принимает вид

$$LDL^T X = B, \tag{1.79}$$

или

$$LC = B, \tag{1.80}$$

где введён новый вектор-столбец неизвестных

$$C = DL^T X. \tag{1.81}$$

Сначала решается уравнение (1.80) относительно C, а затем – уравнение (1.81) относительно X.

Элементы матриц D и L могут быть вычислены по формулам

$$\begin{cases} d_{ii} = a_{ii} - \sum\limits_{q=1}^{i-1} l_{iq}^2 \cdot d_{qq}; \\ l_{ii} = 1; \\ l_{ij} = \dfrac{1}{d_{ii}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{q=1}^{j-1} d_{iq} \cdot l_{jq} \cdot d_{qq} \right); \\ l_{ij} = 0 \text{ при } i < j, \end{cases} \tag{1.82}$$

где сумма полагается равной нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего.

Векторы C и X определяются по формулам

$$\begin{cases} c_i = b_i - \sum\limits_{p=1}^{i-1} l_{ip} \cdot c_p; \\ x_i = \dfrac{1}{d_{ii}} \left(c_i - \sum\limits_{q=i+1}^{p} d_{ii} \cdot l_{qi} \cdot x_q \right), \end{cases} \tag{1.83}$$

где сумма полагается равной нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего.

Для симметричной матрицы можно записать *разложение Холесского*

$$A = LL^T, \tag{1.84}$$

где L – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами.

Уравнение (1.72) примет вид

$$LL^T X = B, \tag{1.85}$$

или последовательность уравнений:

$$LC = B; \tag{1.86}$$

$$L^T X = C. \tag{1.87}$$

Из (1.86) находится C, а затем из (1.87) находится X. При этом справедливы соотношения

$$\begin{cases} l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2}; \\ l_{ij} = \dfrac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum\limits_{m=1}^{j-1} l_{jm} \cdot l_{im} \right); \\ l_{ij} = 0 \text{ при } i < j, \end{cases} \tag{1.88}$$

где сумма полагается равной нулю, если верхний предел суммирования меньше нижнего.

1.2.3 Итерационные методы решения СЛАУ

Итерационные методы решения СЛАУ нашли широкое применение благодаря ряду преимуществ:

– значительной простоте программирования;

– эффективности обработки;

– необходимо меньше оперативной памяти.

Существует множество итерационных методов решения систем уравнений: метод Якоби, метод Зейделя, метод последовательной верхней релаксации, градиентные методы.

Общая линейная итерация для уравнения (1.72) имеет вид

$$X^k = G_k X^{k-1} + R_k, \tag{1.89}$$

где X^k, X^{k-1} – приближения для X на k-й и $(k-1)$-й итерациях соответственно;

G_k – матрица, зависящая от A и B;

R_k – вектор-столбец.

В пределе, когда количество итераций неограниченно большое, получим

$$\lim_{k\to\infty} X^k = X = A^{-1}B, \tag{1.90}$$

что при подстановке в (1.89) даёт

$$A^{-1}B = G_k A^{-1}B + R_k, \tag{1.91}$$

откуда находим

$$R_k = (I - G_k)A^{-1}B, \tag{1.92}$$

где I – единичная матрица.

Общая итерационная схема (1.89) принимает вид

$$X^k = G_k X^{k-1} + M_k B, \tag{1.93}$$

где введено обозначение

$$M_k = (I - G_k)A^{-1}. \tag{1.94}$$

Разнообразие итерационных методов связано с множеством способов задания итерационных матриц G_k и M_k.

Ряд методов использует представление матрицы A в виде суммы нижней треугольной L, диагональной D и верхней треугольной U матриц:

$$A = L + D + U. \tag{1.95}$$

В *методе Якоби (методе простой итерации)* итерационные матрицы не зависят от номера итерации:

$$\begin{cases} G = -D^{-1}(L+U); \\ M = D^{-1}. \end{cases} \tag{1.96}$$

Тогда

$$x_i^k = d_i + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \cdot x_j^{k-1}, \tag{1.97}$$

где x_i, g_{ij}, d_i – элементы матриц X, G, $D^{-1}B$ соответственно;

n – число элементов матрицы X.

В *методе последовательной верхней релаксации* итерационные матрицы имеют вид

$$\begin{cases} G = (D+\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D - \omega U\right]; \\ M = \omega(D+\omega L)^{-1}. \end{cases} \tag{1.98}$$

Тогда:

$$x_i^k = (1-\omega)x_i^{k-1} + \omega\left(\sum_{j=1}^{i-1} g_{ij} \cdot x_j^k + \sum_{j=i+1}^{n} g_{ij} \cdot x_j^{k-1} + d_i\right). \tag{1.99}$$

Здесь ω – параметр релаксации, определяющий быстроту сходимости итерационного процесса. В теории упругости принимают $1{,}85 \le \omega \le 1{,}92$.

Особенность *градиентных итерационных методов* заключается в том, что на решении X уравнения (1.72) достигается минимальное значение функционала

$$F = X^T AX - 2B^T X. \tag{1.100}$$

2 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

2.1 Тензор напряжений

Напряжённое состояние в любой точке однородного тела характеризуется *тензором напряжений*

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь σ_x, σ_y, σ_z – нормальные напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных соответствующим осям координат (рисунок 2.1);

τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy} – касательные напряжения (первый индекс указывает на ориентацию площадки, второй – на направление касательного напряжения).

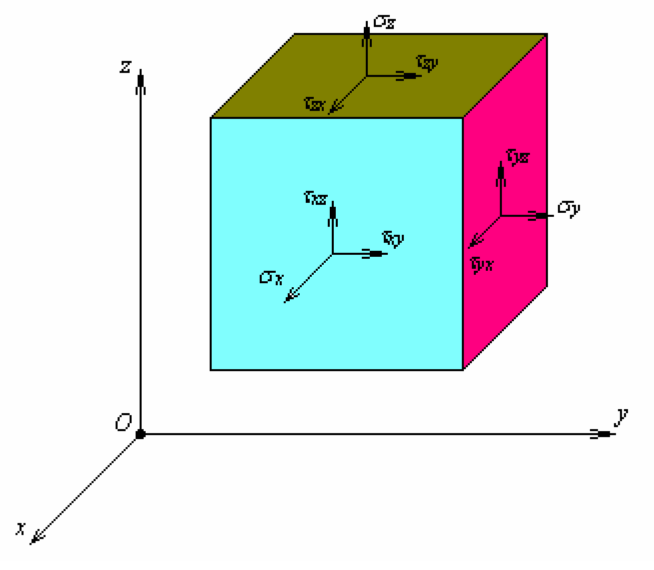


Рисунок 2.1 – Компоненты тензора напряжений

Тензор напряжений обладает свойством симметрии

$$S^T = S, \tag{2.2}$$

то есть

$$\begin{cases} \tau_{yx} = \tau_{xy}; \\ \tau_{zy} = \tau_{yz}; \\ \tau_{xz} = \tau_{zx}. \end{cases} \tag{2.3}$$

В связи с этим в МКЭ удобно оперировать не тензором S, а вектором-столбцом напряжений

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}. \tag{2.4}$$

2.2 Тензор деформаций

Деформированное состояние в любой точке однородного тела характеризуется *тензором деформаций*

$$T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

где ε_x, ε_y, ε_z – линейные деформации в направлении соответствующих осей (рисунок 2.2);

γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yx}, γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{zy} – сдвиговые деформации в соответствующих координатных плоскостях (рисунок 2.2).

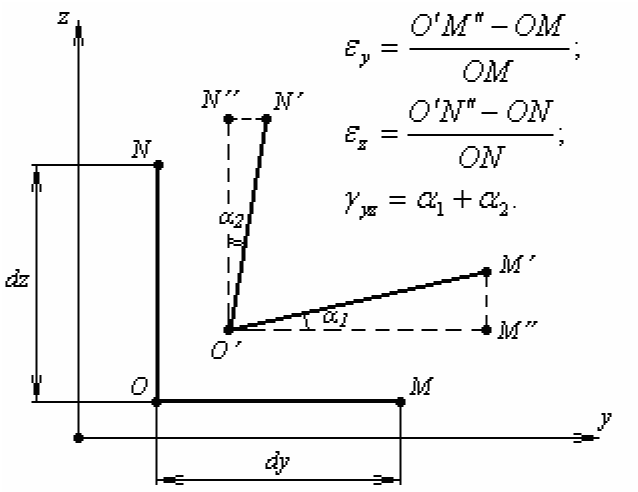


Рисунок 2.2

Тензор деформации обладает свойством симметрии

$$T^T = T, \tag{2.6}$$

то есть

$$\begin{cases} \gamma_{yx} = \gamma_{xy}; \\ \gamma_{zy} = \gamma_{yz}; \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx}. \end{cases} \tag{2.7}$$

В связи с этим в МКЭ удобно оперировать не тензором *T*, а вектором-столбцом деформаций:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}. \tag{2.8}$$

2.3 Уравнения Коши

Каждая точка тела, подверженная напряжённо-деформированному состоянию, получает перемещение (рисунок 2.3), которое можно записать в виде

$$\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}, \tag{2.9}$$

где u, v, w – проекции вектора перемещения на оси x, y, z соответственно.

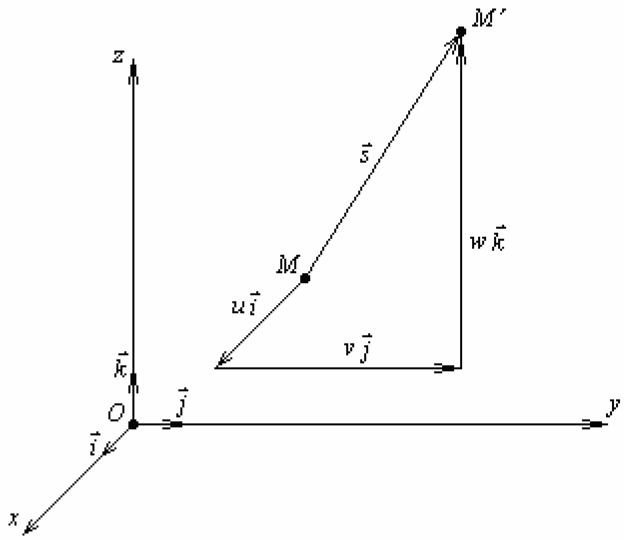


Рисунок 2.3

Введём вектор-столбец перемещений

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \tag{2.10}$$

Уравнения Коши устанавливают взаимосвязь компонентов деформированного состояния с вектором перемещений. В рамках линейной теории упругости эти соотношения имеют вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, \end{cases} \tag{2.11}$$

или в матричной форме записи:

$$\varepsilon = Du, \tag{2.12}$$

где D – матрица дифференцирования:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \qquad (2.13)$$

2.4 Обобщённый закон Гука

Обобщённый закон Гука устанавливает взаимосвязь компонентов напряжённо-деформированного состояния (векторы-столбцы σ и ε) и в случае изотропного материала имеет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right]; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{cases} \qquad (2.14)$$

где E – модуль продольной упругости материала;

G – модуль сдвига;

ν – коэффициент Пуассона.

Установлена связь между параметрами ν, E и G:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \qquad (2.15)$$

Система (2.14) в матричной форме записи принимает вид:

$$\varepsilon = M\sigma, \qquad (2.16)$$

где введено обозначение:

$$M = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \qquad (2.17)$$

Из (2.16) получаем закон Гука в обратной форме

$$\sigma = A\varepsilon, \qquad (2.18)$$

где A – матрица закона Гука, определяемая следующим образом:

$$A = M^{-1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \qquad (2.19)$$

2.5 Частные случаи напряжённо-деформированного состояния

2.5.1 Линейное напряжённо-деформированное состояние

Линейное напряжённо-деформированное состояние имеет место при рассмотрении стержней, работающих на растяжение-сжатие (рисунок 2.4).

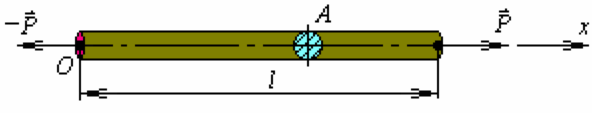


Рисунок 2.4 – Линейное напряжённо-деформированное состояние

В случае линейного напряжённо-деформированного состояния закон Гука имеет вид

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \tag{2.20}$$

Уравнение Коши

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \tag{2.21}$$

Напряжение определяется по формуле

$$\sigma_x = \frac{P}{A}, \tag{2.22}$$

где P –продольная сила, действующая на стержень (положительная при растяжении);

A – площадь поперечного сечения стержня.

Таким образом, из (2.20) получим

$$\frac{P}{A} = E\frac{du}{dx}, \tag{2.23}$$

откуда

$$\frac{du}{dx} = \frac{P}{EA}. \tag{2.24}$$

2.5.2 Плоское напряжённое состояние

Плоское напряжённое состояние возникает в тонких пластинах, нагруженных растягивающими (сжимающими) усилиями, действующими в плоскости пластины (рисунок 2.5).

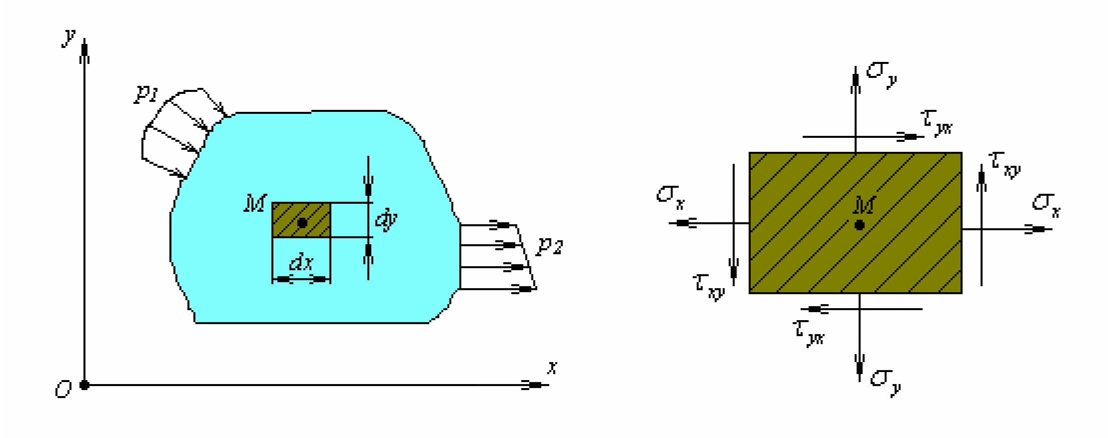


Рисунок 2.5 – Плоское напряженное состояние

Соотношения Коши для плоского напряжённого состояния

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \tag{2.25}$$

или в матричной форме

$$\varepsilon = Du, \tag{2.26}$$

где ε – вектор-столбец деформаций

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \tag{2.27}$$

u – вектор-столбец перемещений

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}; \tag{2.28}$$

D – матрица дифференцирования

$$D = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Уравнения закона Гука принимают вид

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right); \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right); \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Обратная форма закона Гука в матричном виде

$$\sigma = A\varepsilon, \tag{2.31}$$

где σ - вектор-столбец напряжений

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \tag{2.32}$$

A – матрица закона Гука

$$A = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

2.5.3 Плоская деформация

Плоское деформированное состояние возникает в протяжённых цилиндрических телах, загруженных по всей длине (рисунок 2.6).

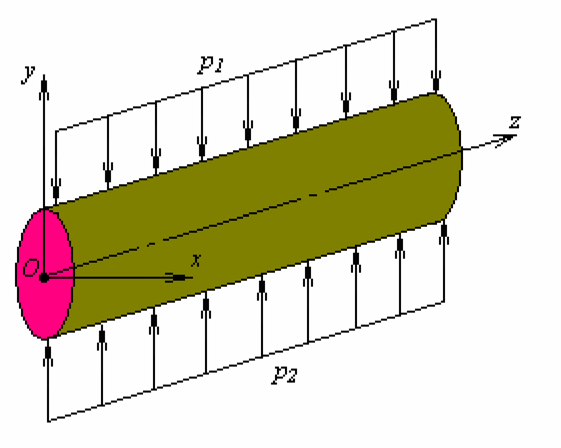


Рисунок 2.6 – Плоская деформация

Для случая плоской деформации уравнения Коши имеют вид (2.25), а закон Гука записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E_1}\left(\sigma_x - \nu_1 \sigma_y\right); \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E_1}\left(\sigma_y - \nu_1 \sigma_x\right); \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}, \end{cases} \tag{2.34}$$

где введены обозначения:

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \tag{2.35}$$

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \tag{2.36}$$

Обратная форма закона Гука в матричном виде

$$\sigma = A_1 \varepsilon, \tag{2.37}$$

где матрица закона Гука имеет вид

$$A_1 = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu_1 & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu_1}{2} \end{bmatrix}. \tag{2.38}$$

3 МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

3.1 Идея МКЭ

Идея МКЭ состоит в том, что любую непрерывную величину можно аппроксимировать кусочно-непрерывной функцией, которая строится на значениях исследуемой величины в конечном числе точек рассматриваемых элементов.

При построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом:

– область определения исследуемой величины разбивается на конечное число элементов, имеющих общие узловые точки и в совокупности аппроксимирующих форму области;

– в рассматриваемой области фиксируются узлы;

– используя значения исследуемой непрерывной величины в узловых точках и аппроксимирующую функцию, определяются значения величины внутри области.

Аппроксимирующие функции чаще всего выбираются в виде линейных, квадратичных или кубических полиномов. Полином, связанный с данным элементом, называется функцией элемента.

С этой точки зрения конструкцию можно рассматривать как некоторую совокупность конструкционных элементов, соединённых в конечном числе узловых точек. Если известны соотношения между силами и перемещениями для каждого элемента, то можно описать свойства и исследовать поведение конструкции в целом.

Таким образом, при использовании МКЭ решение краевой задачи для заданной области ищется в виде набора функций, определённых на конечных элементах.

3.2 Типы конечных элементов

Существует большое количество разнообразных типов конечных элементов (КЭ) (рисунок 3.1).

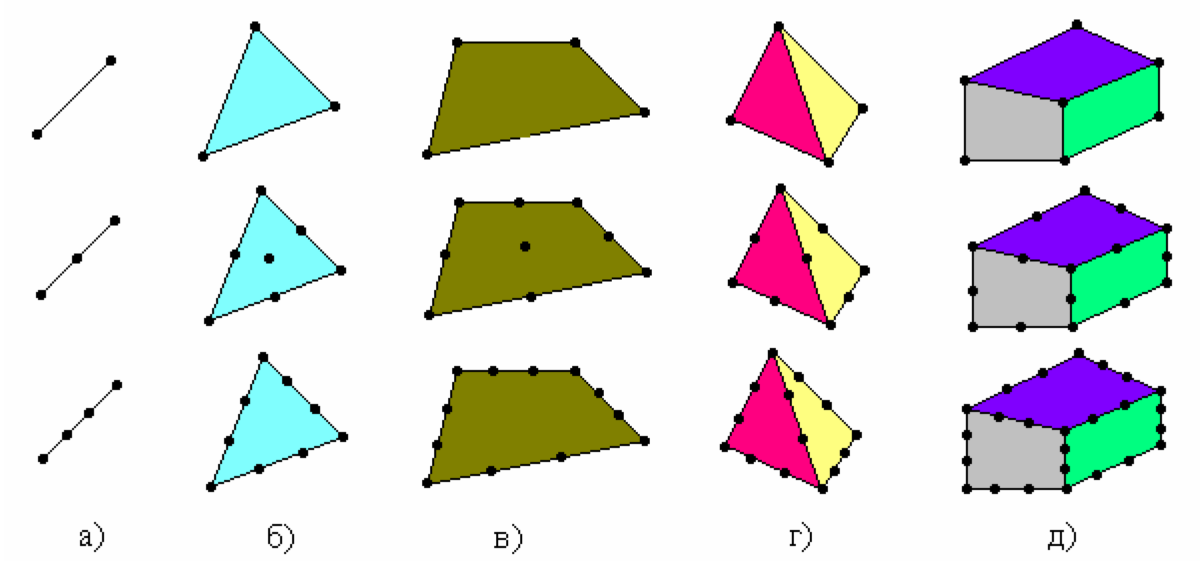


Рисунок 3.1 – Основные типы конечных элементов

Задача разбиения тела на КЭ неоднозначна. Так, для расчёта ферм используются линейные стержневые элементы (рисунок 3.1 а). Такими же элементами можно моделировать различного рода конструктивные элементы (пружины, стержни, балки, рамы и т.д.).

Гораздо сложнее выбрать тип КЭ для двумерных или трёхмерных областей. Здесь нужно учитывать типы КЭ, наилучшим образом аппроксимирующие исследуемую область.

Плоские двумерные элементы (рисунок 3.1,б-в) применяются для моделирования мембран, тонких пластин, тонкостенных оболочек и т.д.

Объёмные трёхмерные элементы (рисунок 3.1,г-д) применяются при исследовании объёмного напряжённо-деформированного состояния.

3.3 Линейный упругий элемент

3.3.1 Матрица жёсткости упругого элемента

Рассмотрим линейный упругий элемент *e* жёсткостью *c* (рисунок 3.2).

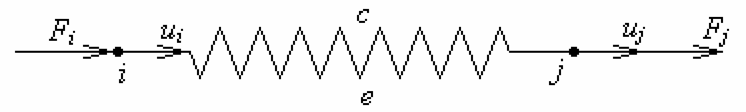


Рисунок 3.2 – Линейный упругий элемент

Элемент ограничен двумя узлами *i* и *j*, в которых приложены силы F_i и F_j, вызывающие смещения узлов u_i и u_j.

Зависимость сил от деформаций

$$\begin{cases} F_i = c\cdot(u_i - u_j); \\ F_j = c\cdot(u_j - u_i). \end{cases} \tag{3.1}$$

Сила считается положительной, если её направление совпадает с положительным направлением оси *x*.

Уравнения (3.1) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}, \tag{3.2}$$

или

$$Ku = F, \tag{3.3}$$

где *u* – вектор-столбец узловых смещений элемента

$$u = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}; \tag{3.4}$$

F – вектор-столбец сил

$$F = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix};$$

K – матрица жёсткости элемента

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_i & u_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \end{array}. \tag{3.5}$$

3.3.2 Система упругих элементов

Рассмотрим систему двух последовательно соединённых упругих элементов e_1 и e_2 с жёсткостями c_1 и c_2 соответственно (рисунок 3.3).

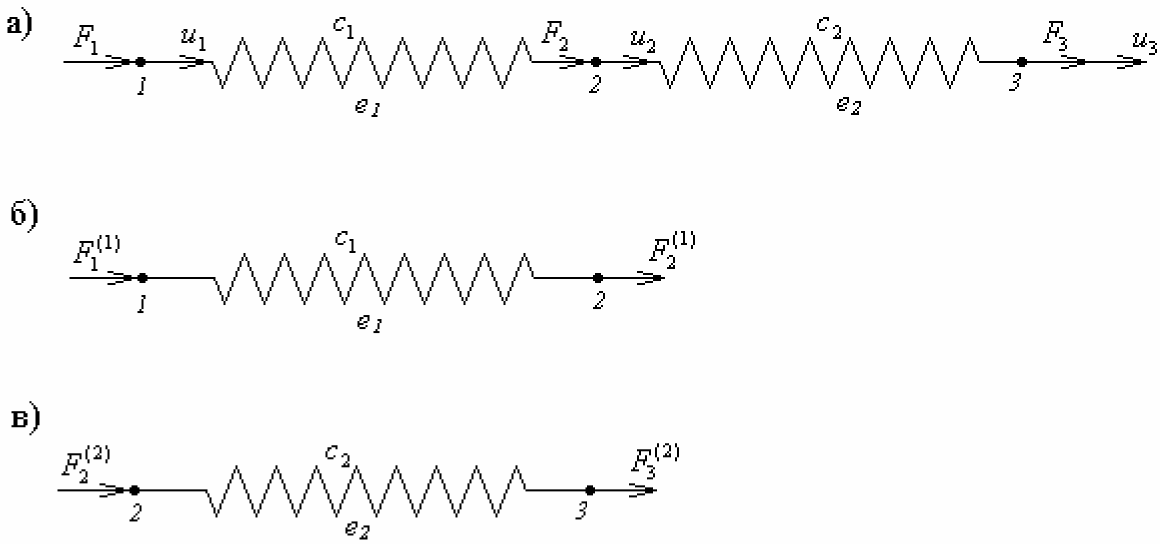


Рисунок 3.3 – Система двух упругих элементов

Для элемента e_1 согласно (3.2)

$$\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}, \tag{3.6}$$

где $F_2^{(1)}$ – внутренняя сила, действующая на j-й узел элемента e_1.

Аналогично, для элемента e_2

$$\begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3 \end{Bmatrix}, \tag{3.7}$$

где $F_2^{(2)}$ – внутренняя сила, действующая на i-й узел элемента e_2.

Из рисунка 3.3

$$\begin{cases} F_1 = F_1^{(1)}; \\ F_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)}; \\ F_3 = F_3^{(2)}, \end{cases} \tag{3.8}$$

где $F_1^{(1)}$ – внутренняя сила, действующая на *i*-й узел элемента e_1; $F_3^{(2)}$ – внутренняя сила, действующая на *j*-й узел элемента e_2.

Для составления матрицы жёсткости системы элементов рассмотрим равновесие сил, действующих на каждый из узлов (внешние и упругие силы):

$$\begin{cases} F_1 = c_1 \cdot (u_1 - u_2); \\ F_2 = c_1 \cdot (u_2 - u_1) + c_2 \cdot (u_2 - u_3); \\ F_3 = c_2 (u_3 - u_2), \end{cases} \tag{3.9}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}, \tag{3.10}$$

что аналогично

$$Ku = F, \tag{3.11}$$

где u – вектор-столбец узловых смещений

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}; \tag{3.12}$$

F – вектор-столбец внешних сил

$$F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}; \tag{3.13}$$

K – матрица жёсткости системы элементов

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{3.14}$$

Матрицу жесткости системы можно представить в виде суммы расширенных матриц жёсткостей составляющих КЭ

$$K = K_{e_1} + K_{e_2}, \tag{3.15}$$

где

$$K_{e_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad K_{e_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{3.16}$$

Справедливо утверждение, что сумма элементов вектора-столбца F равна нулю в силу условия равновесия системы.

Заметим, что матрица жёсткости системы линейных упругих элементов обладает свойством симметрии

$$K^T = K. \tag{3.17}$$

3.3.3 Энергетический подход к определению матрицы жёсткости

Матрица жёсткости линейного упругого элемента (3.5) была ранее получена в п.3.3.1 исходя из системы уравнений (3.1), определяющих зависимость узловых усилий от узловых перемещений.

Существует более универсальный способ получения матриц жёсткости, одинаково применимый для различных типов конструкций и элементов – энергетический метод. Его суть заключается в том, что матрица жёсткости K определяется из следующего выражения:

$$K_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j},$$

где U –внутренняя потенциальная энергия деформации;

u – узловые перемещения.

При этом основная задача состоит в определении U.

В частности, внутренняя потенциальная энергия продольной деформации упругого элемента равна

$$U = \frac{1}{2}c(u_i - u_j)^2 = \frac{1}{2}cu_i^2 - cu_iu_j + \frac{1}{2}cu_j^2.$$

Таким образом, матрица жёсткости принимает вид

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial u_i^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial u_j \partial u_i} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial u_j^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix},$$

что совпадает с ранее полученным выражением (3.5).

3.3.4 Применение вариационных принципов

Система алгебраических уравнений метода конечных элементов в матричном виде (3.11) может быть получена на основании применения вариационных принципов. Одним из них является принцип Лагранжа, согласно которому в состоянии равновесия полная потенциальная энергия *Э* системы принимает стационарное значение

$$\frac{\partial Э}{\partial u} = 0,$$

где u – вектор узловых смещений.

При этом полная потенциальная энергия системы равна

$$Э = U - V,$$

где U – внутренняя энергия деформации системы;

V – работа внешних сил по соответствующим перемещениям.

Внутренняя энергия деформации линейного упругого элемента жёсткостью c, ограниченного узлами i и j, равна

$$U = \frac{1}{2} c \left(u_i - u_j\right)^2.$$

Работа приложенных к узлам сил по узловым перемещениям равна

$$V = F_i u_i + F_j u_j.$$

Система уравнений вариационного принципа Лагранжа для линейного упругого элемента принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial u_i} = c u_i - c u_j - F_i = 0; \\ \dfrac{\partial U}{\partial u_j} = -c u_i + c u_j - F_j = 0, \end{cases}$$

что равносильно матричному соотношению

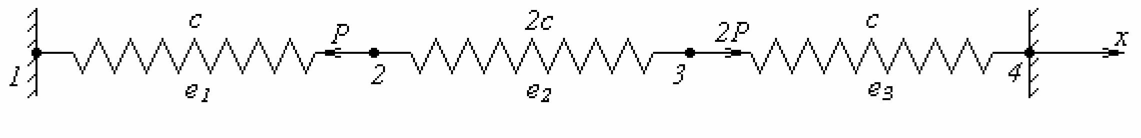
$$\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}.$$

Это уравнение совпадает с полученным ранее (3.2).

ПРИМЕРЫ

Пример 3.1

Определить смещения узлов 2, 3 и реакции в узлах 1, 4.



Решение

Матрица жёсткости элемента e_1

$$K_{e1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_2

$$K_{e2} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c & -2c & 0 \\ 0 & -2c & 2c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_3

$$K_{e3} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -c \\ 0 & 0 & -c & c \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости системы

$$K = K_{e1} + K_{e2} + K_{e3} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ -c & 3c & -2c & 0 \\ 0 & -2c & 3c & -c \\ 0 & 0 & -c & c \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия:

$u_1 = 0$;

$u_4 = 0$.

Силовые граничные условия:

$F_2 = -P$;

$F_3 = 2P$.

Уравнения равновесия в матричной форме с учётом граничных условий:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ -c & \boxed{3c} & \boxed{-2c} & 0 \\ 0 & \boxed{-2c} & \boxed{3c} & -c \\ 0 & 0 & -c & c \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ \boxed{u_2} \\ \boxed{u_3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \boxed{-P} \\ \boxed{2P} \\ F_4 \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для определения неизвестных перемещений

$$\begin{bmatrix} 3c & -2c \\ -2c & 3c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 2P \end{Bmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{1}{5}\dfrac{P}{c}; \\ u_3 = \dfrac{4}{5}\dfrac{P}{c}. \end{cases}$$

Неизвестные реакции составляют

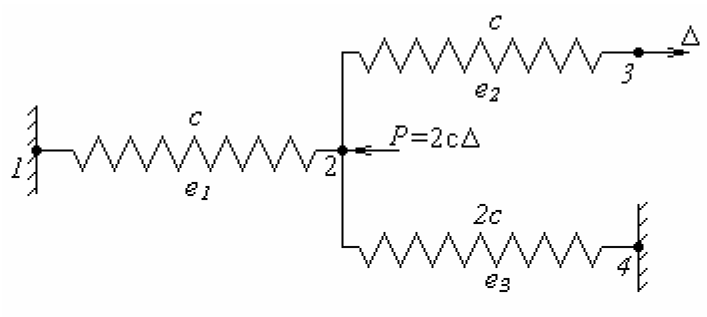
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{5}\dfrac{P}{c} \\ \dfrac{4}{5}\dfrac{P}{c} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{5}P \\ -\dfrac{4}{5}P \end{Bmatrix}.$$

Проверка условия равновесия

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -\frac{1}{5} - P + 2P - \frac{4}{5}P = 0.$$

Пример 3.2

Определить смещение узла 2 и реакции в узлах 1, 3, 4.



Решение

Матрица жёсткости элемента e_1

$$K_{e1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_2

$$K_{e2} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -c & 0 \\ 0 & -c & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_3

$$K_{e3} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c & 0 & -2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2c & 0 & 2c \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости системы

$$K = K_{e1} + K_{e2} + K_{e3} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ -c & 4c & -c & -2c \\ 0 & -c & c & 0 \\ 0 & -2c & 0 & 2c \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия:

$u_1 = 0$;

$u_3 = \Delta$;

$u_4 = 0$.

Силовое граничное условие

$F_2 = -P = -2c\Delta$.

Уравнения равновесия в матричной форме записи с учётом граничных условий

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ -c & 4c & -c & -2c \\ 0 & -c & c & 0 \\ 0 & -2c & 0 & 2c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ \Delta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ -2c\Delta \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для определения неизвестного перемещения

$$\{4c \quad -c\}\begin{Bmatrix} u_2 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \{-2c\Delta\},$$

откуда находим

$$u_2 = -\frac{1}{4}\Delta.$$

Неизвестные реакции составляют

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 \\ 0 & -2c & 0 & 2c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4}\Delta \\ \Delta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}c\Delta \\ \frac{5}{4}c\Delta \\ \frac{1}{2}c\Delta \end{Bmatrix}.$$

Проверка условия равновесия

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \frac{1}{4}c\Delta - 2c\Delta + \frac{5}{4}c\Delta + \frac{1}{2}c\Delta = 0.$$

Пример 3.3

Определить матрицу жёсткости системы из примера 3.2, применяя энергетический подход.

Решение

Внутренняя потенциальная энергия упругой системы

$$U = \frac{1}{2}c\left(u_1 - u_2\right)^2 + \frac{1}{2}c\left(u_2 - u_3\right) + \frac{1}{2}\cdot 2c\left(u_2 - u_4\right) =$$

$$= \frac{1}{2}cu_1^2 - cu_1u_2 + 2cu_2^2 - cu_2u_3 - 2cu_2u_4 + \frac{1}{2}cu_3^2 + cu_4^2.$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} = c; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial u_2} = -c; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial u_3} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_1 \partial u_4} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u_2 \partial u_1} = -c; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_2^2} = 4c; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_2 \partial u_3} = -c; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_2 \partial u_4} = -2c;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u_3 \partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_3 \partial u_2} = -c; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_3^2} = c; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_3 \partial u_4} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u_4 \partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_4 \partial u_2} = -2c; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_4 \partial u_3} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_4^2} = 2c.$$

Таким образом, матрица жёсткости системы имеет вид

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ -c & 4c & -c & -2c \\ 0 & -c & c & 0 \\ 0 & -2c & 0 & 2c \end{bmatrix} \end{array}.$$

Полученный результат совпадает с полученным ранее в примере 3.2.

Пример 3.4

Составить матричное уравнение метода конечных элементов для системы, рассмотренной в примере 3.1.

Решение

Полная потенциальная энергия системы с учётом кинематических граничных условий ($u_1 = u_4 = 0$):

$$Э = \frac{1}{2} c u_2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2c \left(u_2 - u_3\right)^2 + \frac{1}{2} c u_3^2 - \left(-P\right) u_2 - 2P u_3 .$$

Условие стационарности функционала $Э$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Э}{\partial u_2} = 3cu_2 - 2cu_3 + P = 0; \\ \dfrac{\partial Э}{\partial u_3} = -2cu_2 + 3cu_3 - 2P = 0, \end{cases}$$

что аналогично в матричной форме записи

$$\begin{bmatrix} 3c & -2c \\ -2c & 3c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 2P \end{Bmatrix}.$$

Последнее уравнение совпадает с полученным ранее матричным уравнением для определения неизвестных узловых перемещений (см. пример 3.1).

3.4 Стержневой элемент

3.4.1 Матрица жёсткости стержневого элемента

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, воспринимающий осевую нагрузку (рисунок 3.4).

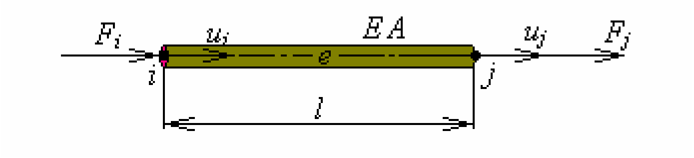


Рисунок 3.4 – Стержневой элемент

Стержневой элемент характеризуется длиной l, площадью поперечного сечения A и модулем упругости материала E.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (2.24)

$$u(x) = \frac{P}{EA} x + C, \tag{3.18}$$

где C – константа интегрирования, определяемая из граничных условий.

В точке $x = 0$:

$$u(0) = u_i = \frac{P}{EA} \cdot 0 + C, \tag{3.19}$$

откуда

$$C = u_i. \tag{3.20}$$

Уравнение (3.18) принимает вид

$$u(x) = \frac{P}{EA} x + u_i. \tag{3.21}$$

В точке $x = l$:

$$u(l) = u_j = \frac{P}{EA} l + u_i, \tag{3.22}$$

откуда находим

$$\frac{P}{EA} = \frac{u_j - u_i}{l}. \tag{3.23}$$

Подстановка (3.23) в (3.21) даёт

$$u(x)=\frac{u_j-u_i}{l}x+u_i, \tag{3.24}$$

или

$$u(x)=\left(1-\frac{x}{l}\right)u_i+\frac{x}{l}u_j. \tag{3.25}$$

Выражение (3.25) представляет собой функцию стержневого КЭ.

Деформация элемента составляет

$$\varepsilon=\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)u_i+\frac{x}{l}u_j\right]=\frac{u_j-u_i}{l}, \tag{3.26}$$

или в матричной форме

$$\varepsilon=Bu, \tag{3.27}$$

где u – вектор-столбец узловых смещений элемента

$$u=\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}, \tag{3.28}$$

а также введена матрица

$$B=\left\{-\frac{1}{l}\quad\frac{1}{l}\right\}. \tag{3.29}$$

Напряжения в элементе согласно (2.20)

$$\sigma=E\varepsilon=EBu=\frac{E}{l}\left(u_j-u_i\right). \tag{3.30}$$

Кроме того:

$$\sigma=\frac{F}{A}, \tag{3.31}$$

где F – сила, действующая на стержень.

Из последнего выражения получаем

$$F=\sigma A=\frac{EA}{l}\left(u_j-u_i\right)=c\cdot\Delta u, \tag{3.32}$$

где c – жёсткость стержня

$$c = \frac{EA}{l}; \tag{3.33}$$

Δu – удлинение элемента

$$\Delta u = u_j - u_i. \tag{3.34}$$

Таким образом, стержень работает подобно упругому элементу. Следовательно, матрица жёсткости имеет вид

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.35}$$

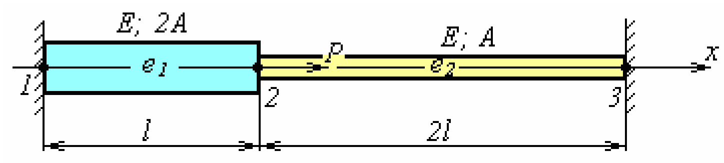
Уравнение равновесия элемента

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}. \tag{3.36}$$

ПРИМЕРЫ

Пример 3.4

Определить смещение узла 2 и реакции в узлах 1, 3.



Решение

Матрица жёсткости элемента e_1:

$$K_{e1} = \frac{EA}{2l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_2:

$$K_{e2} = \frac{EA}{2l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости системы

$$K = K_{e1} + K_{e2} = \frac{EA}{2l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия

$u_1 = 0$;

$u_3 = 0$.

Силовое граничное условие

$F_2 = P$.

Уравнения равновесия в матричной форме записи с учётом граничных условий

$$\frac{EA}{2l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & \boxed{5} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ \boxed{u_2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \boxed{P} \\ F_3 \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для определения неизвестного перемещения

$$\frac{EA}{2l}\cdot 5u_2 = P,$$

откуда находим

$$u_2 = \frac{2}{5}\frac{Pl}{EA}.$$

Неизвестные реакции составляют

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2l}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{5}\dfrac{Pl}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{4}{5}P \\ -\dfrac{1}{5}P \end{Bmatrix}.$$

Проверка условия равновесия

$$F_1 + F_2 + F_3 = -\frac{4}{5}P + P - \frac{1}{5}P = 0.$$

Напряжения в стержнях e_1 и e_2:

$$\sigma_{e1} = E\begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{5}\dfrac{Pl}{EA} \end{Bmatrix} = \frac{2}{5}\frac{P}{A};$$

$$\sigma_{e2} = E\begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{2}{5}\dfrac{Pl}{EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{5}\frac{P}{A}.$$

Проверка:

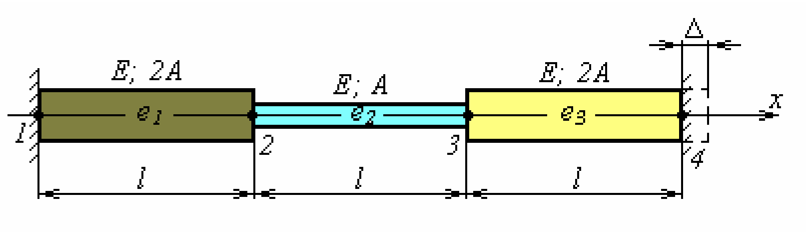
$$\sigma_{e1} = \frac{-F_1}{2A} = \frac{\dfrac{4}{5}P}{2A} = \frac{2}{5}\frac{P}{A};$$

$$\sigma_{e2} = \frac{F_3}{A} = \frac{-\dfrac{1}{5}P}{A} = -\frac{1}{5}\frac{P}{A}.$$

Таким образом, стержень e_1 работает на растяжение, а стержень e_2 – на сжатие.

Пример 3.5

При монтаже стержневой конструкции допустили натяг Δ. Определить напряжения в стержнях.



Решение

Матрица жёсткости элемента e_1:

$$K_{e1}=\frac{EA}{l}\begin{array}{c}\begin{matrix}u_1 & u_2 & u_3 & u_4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}2 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_2:

$$K_{e2}=\frac{EA}{l}\begin{array}{c}\begin{matrix}u_1 & u_2 & u_3 & u_4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_3:

$$K_{e3}=\frac{EA}{l}\begin{array}{c}\begin{matrix}u_1 & u_2 & u_3 & u_4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\end{array}.$$

Матрица жёсткости системы

$$K=\frac{EA}{l}\begin{array}{c}\begin{matrix}u_1 & u_2 & u_3 & u_4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}2 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\end{array}.$$

Кинематические граничные условия

$u_1 = 0$;

$u_4 = -\Delta$.

Силовые граничные условия

$F_2 = 0;$

$F_3 = 0.$

Уравнения равновесия в матричной форме записи с учётом граничных условий

$$\frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ -\Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ F_4 \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для определения неизвестных перемещений

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ -\Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{cases} u_2 = -\dfrac{1}{4}\Delta; \\ u_3 = -\dfrac{3}{4}\Delta. \end{cases}$$

Проверка условия совместности деформаций:

$u_2 + u_3 = -\Delta;$

$$-\frac{1}{4}\Delta - \frac{3}{4}\Delta = -\Delta.$$

Неизвестные реакции составляют

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{4}\Delta \\ -\dfrac{3}{4}\Delta \\ -\Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\Delta}{2l}EA \\ -\dfrac{\Delta}{2l}EA \end{Bmatrix}.$$

Проверка условия равновесия

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \frac{\Delta}{2l}EA + 0 + 0 - \frac{\Delta}{2l}EA = 0.$$

Напряжения в стержнях e_1, e_2 и e_3:

$$\sigma_{e1} = E\left\{-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right\}\left\{\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{4}\Delta \end{matrix}\right\} = -\frac{\Delta}{4l}E;$$

$$\sigma_{e2} = E\left\{-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right\}\left\{\begin{matrix} -\frac{1}{4}\Delta \\ -\frac{3}{4}\Delta \end{matrix}\right\} = -\frac{\Delta}{2l}E;$$

$$\sigma_{e3} = E\left\{-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right\}\left\{\begin{matrix} -\frac{3}{4}\Delta \\ -\Delta \end{matrix}\right\} = -\frac{\Delta}{4l}E.$$

Проверка:

$$\sigma_{e1} = \frac{-F_1}{2A} = -\frac{\Delta}{4l}E;$$

$$\sigma_{e2} = \frac{F_3}{A} = -\frac{\Delta}{4l}E.$$

Таким образом, все стержни работают на сжатие.

3.4.2 Учёт распределённой нагрузки

В случаях, когда требуется учесть распределённую нагрузку, действующую вдоль оси стержня, необходимо заменить её статически эквивалентной системой сосредоточенных в узлах продольных усилий.

Распределённая по длине нагрузка интенсивности q заменяется эквивалентной системой двух сосредоточенных в узлах сил таким образом, чтобы работа действительной системы нагружения по соответствующим перемещениям была равна работе эквивалентной системы сил по узловым перемещениям.

Рассмотрим стержневой элемент длиной l (рисунок 3.5 а), вдоль оси которого приложена равномерно распределённая нагрузка постоянной интенсивности q.

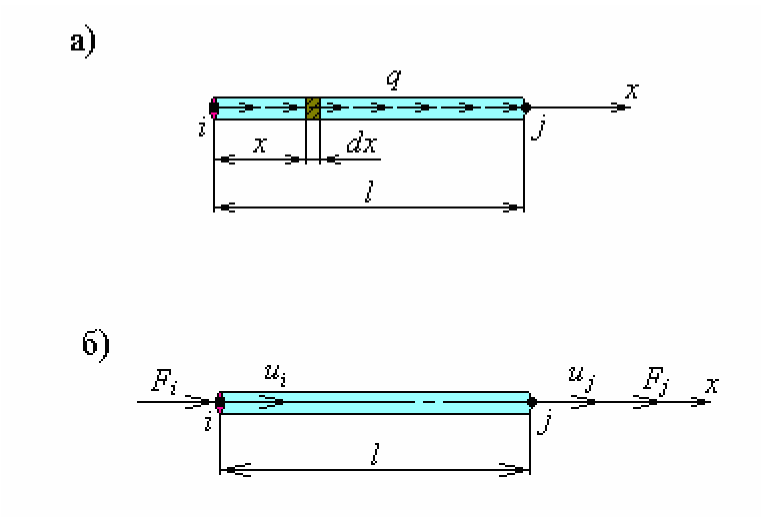


Рисунок 3.5

Элементарная работа силы $dF = q{\cdot}dx$ на перемещениях $u(x)$, определяемом формулой (3.25), равна

$$\delta W = u(x){\cdot}dF = \left[\left(1-\frac{x}{l}\right)u_i + \frac{x}{l}u_j\right]{\cdot}qdx. \qquad (3.38)$$

Работа распределённой нагрузки по деформации стержня

$$W = \int dW = \int_0^l \left[\left(1 - \frac{x}{l} \right) u_i + \frac{x}{l} u_j \right] \cdot q dx = q \cdot \left[\left(x - \frac{x^2}{2l} \right) u_i + \frac{x^2}{2l} u_j \right] \Bigg|_0^l = \frac{ql}{2} u_i + \frac{ql}{2} u_j . \quad (3.39)$$

Заменим распределённую нагрузку статически эквивалентной системой сосредоточенных сил F_i и F_j, приложенных в узлах i и j (рисунок 3.5 б). Суммарная работа этих сил на соответствующих перемещениях равна

$$W = F_i u_i + F_j u_j . \quad (3.40)$$

Сравнивая выражения (3.39) и (3.40), получим

$$F_i u_i + F_j u_j = \frac{ql}{2} u_i + \frac{ql}{2} u_j , \quad (3.41)$$

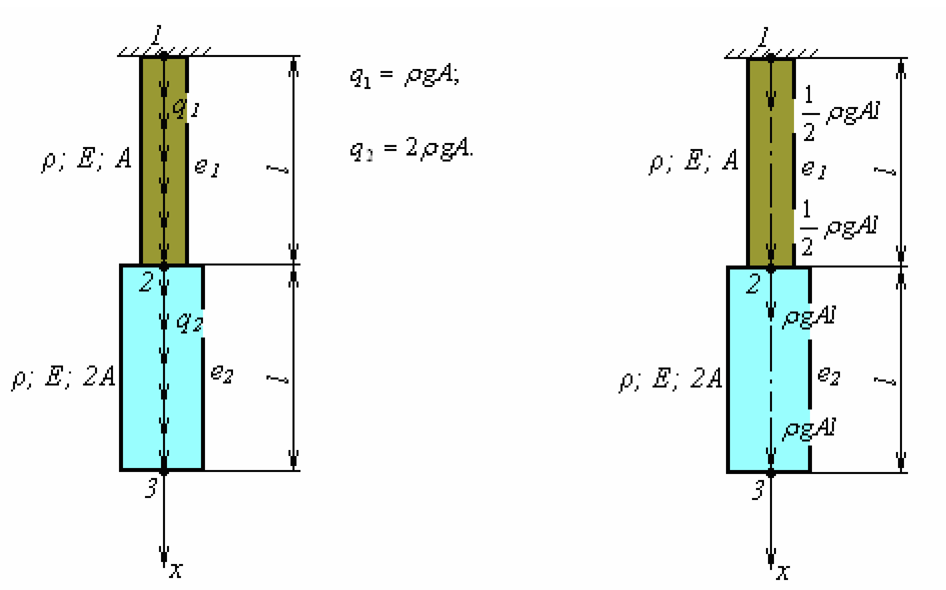
откуда находим

$$\begin{cases} F_i = \dfrac{ql}{2}; \\ F_j = \dfrac{ql}{2}. \end{cases} \quad (3.42)$$

ПРИМЕРЫ

Пример 3.6

Определить напряжения в колонне, деформируемой под собственным весом.



Решение

Матрица жёсткости элемента e_1:

$$K_{e1} = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_2:

$$K_{e2} = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости системы

$$K = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия

$u_1 = 0$;

$u_3 = 0$.

Силовые граничные условия

$$\begin{cases} F_1 = R_1 + \dfrac{1}{2}\rho gAl; \\ F_2 = \dfrac{3}{2}\rho gAl; \\ F_2 = R_3 + \rho gAl. \end{cases}$$

Уравнения равновесия в матричной форме записи с учётом граничных условий

$$\frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & \;u_2 & \;u_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \boxed{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ \boxed{u_2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 + \frac{1}{2}\rho gAl \\ \boxed{\frac{3}{2}\rho gAl} \\ R_3 + \rho gAl \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для определения неизвестного перемещения

$$\frac{EA}{l}\cdot 3u_2 = \frac{3}{2}\rho gAl,$$

откуда находим

$$u_2 = \frac{\rho gAl^2}{2EA}.$$

Поскольку вес всей конструкции равен

$$P = \rho gAl + 2\rho gAl = 3\rho gAl,$$

то получим

$$u_2 = \frac{Pl}{6EA},$$

а также

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{P}{3l}; \\ q_2 = \dfrac{2P}{3l}. \end{cases}$$

Уравнение для определения неизвестных реакций:

$$\begin{Bmatrix} R_1 + \dfrac{1}{2}\rho g A l \\ R_3 + \rho g A l \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{\rho g A l^2}{2EA} \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{6}P \\ \dfrac{1}{3}P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{6}P \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{6}P \\ -\dfrac{1}{3}P \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{3}P \\ -\dfrac{2}{3}P \end{Bmatrix}.$$

Проверка условия равновесия

$$R_1 + q_1 l + q_2 l + R_3 = -\frac{1}{3}P + \frac{P}{3l}\cdot l + \frac{2P}{3l}\cdot l - \frac{2}{3}P = 0.$$

Напряжения в стержнях e_1 и e_2:

$$\sigma_{e1} = E\begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{Pl}{6EA} \end{Bmatrix} = \frac{P}{6A};$$

$$\sigma_{e2} = E\begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{Pl}{6EA} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{P}{6A}.$$

Таким образом, стержень e_1 растягивается, а стержень e_2 – сжимается.

3.5 Произвольное расположение элементов на плоскости

До сих пор рассматривались элементы, ориентированные вдоль одной координатной оси *x*.

Рассмотрим общий случай, когда стержневой элемент составляет с осью *x* прямоугольной системы координат произвольный угол α (рисунок 3.6).

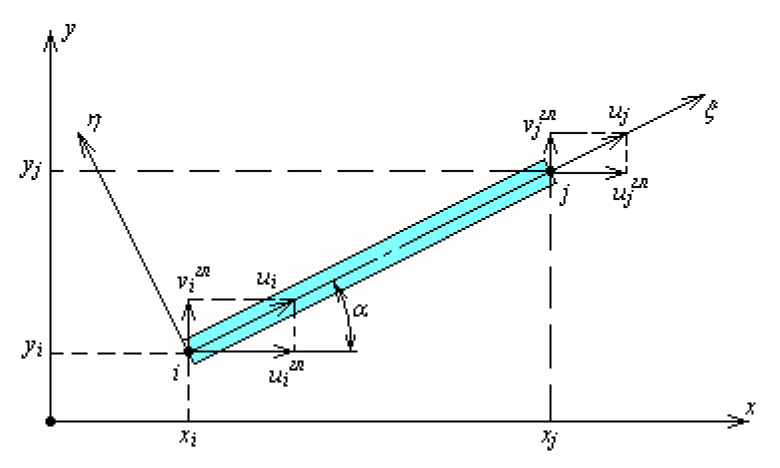


Рисунок 3.6 – Произвольное расположение элемента на плоскости

Введём в рассмотрение две прямоугольные системы координат:

– локальная ξη, связанная со стержневым элементом;

– глобальная xy.

Определим связь между перемещениями узлов *i* и *j* в локальной и глобальной системах координат

$$\begin{cases} u_i^{гл} = u_i \cos\alpha; \\ v_i^{гл} = u_i \sin\alpha. \end{cases} \tag{3.43}$$

Умножим первое уравнение (3.43) на cosα, второе – на sinα и сложим

$$u_i^{гл}\cos\alpha + v_i^{гл}\sin\alpha = u_i\cos^2\alpha + u_i\sin^2\alpha. \tag{3.44}$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим соотношением ($\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$), получим

$$u_i = u_i^{гл}\cos\alpha + v_i^{гл}\sin\alpha. \tag{3.45}$$

Аналогично можно записать

$$u_j = u_j^{гл}\cos\alpha + v_j^{гл}\sin\alpha. \tag{3.46}$$

Если стержень испытывает, кроме осевых перемещений, также поперечные перемещения, то справедливы также соотношения:

$$v_i = -u_i^{гл}\sin\alpha + v_i^{гл}\cos\alpha. \tag{3.47}$$

$$v_j = -u_j^{гл}\sin\alpha + v_j^{гл}\cos\alpha. \tag{3.48}$$

Совокупность уравнений (3.45) – (3.48) образует матричное соотношение

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{гл} \\ v_i^{гл} \\ u_j^{гл} \\ v_j^{гл} \end{Bmatrix}, \tag{3.49}$$

или кратко

$$u = Tu^{гл}, \tag{3.50}$$

где $u^{гл}$ – вектор-столбец узловых перемещений элемента в глобальной системе координат;

T – матрица трансформации

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{3.51}$$

Аналогичным образом преобразуются приложенные к узлам силы

$$F = TF^{гл}, \tag{3.52}$$

где $F^{гл}$ – вектор-столбец сил в глобальной системе координат

$$F^{гл}=\begin{Bmatrix} F_{x_i}^{гл} \\ F_{y_i}^{гл} \\ F_{x_j}^{гл} \\ F_{y_j}^{гл} \end{Bmatrix}. \tag{3.53}$$

Уравнение равновесия элемента

$$Ku=F, \tag{3.54}$$

где K – матрица жёсткости элемента

$$K=\begin{array}{c} \begin{matrix} \quad u_i & \quad v_i & \quad u_j & \quad v_j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{3.55}$$

Подстановкой выражений (3.50) и (3.52) в уравнение (3.54) получим

$$KTu^{гл}=TF^{гл}. \tag{3.56}$$

Умножим обе части последнего выражения слева на T и, учтя очевидное тождество

$$T^T T=I, \tag{3.57}$$

получим:

$$T^T KTu^{гл}=F^{гл}, \tag{3.58}$$

или

$$K^{гл}u^{гл}=F^{гл}, \tag{3.59}$$

где $K^{гл}$ – глобальная матрица жёсткости элемента

$$K^{гл}=T^T KT=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

Напряжение в произвольно ориентированном стержневом элементе

$$\sigma = E\varepsilon = E\left\{-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right\}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = E\left\{-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right\}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i^{гл} \\ v_i^{гл} \\ u_j^{гл} \\ v_j^{гл} \end{Bmatrix}, \quad (3.61)$$

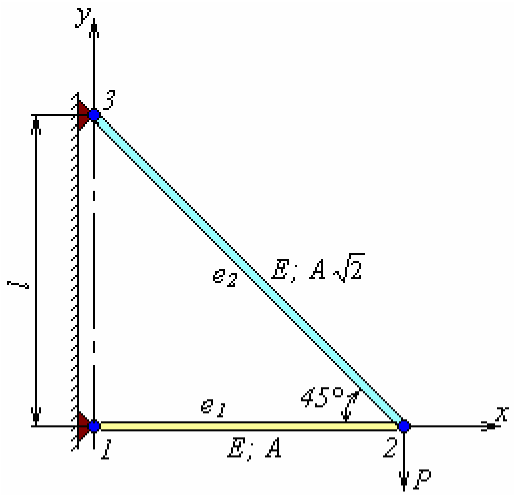
или после преобразований

$$\sigma = \frac{E}{l}\{-\cos\alpha \quad -\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad \sin\alpha\}\begin{Bmatrix} u_i^{гл} \\ v_i^{гл} \\ u_j^{гл} \\ v_j^{гл} \end{Bmatrix}. \quad (3.62)$$

ПРИМЕРЫ

Пример 3.7

Определить напряжения в стержнях плоского кронштейна, нагруженного силой P.



Решение

Глобальная матрица жёсткости элемента e_1 (индекс «гл» будем опускать):

$$K_{e1} = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Глобальная матрица жёсткости элемента e_2:

$$K_{e2} = \frac{EA}{2l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Глобальная матрица жёсткости системы

$$K=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия в глобальных координатах:

$u_1 = 0$;

$v_1 = 0$;

$u_3 = 0$;

$v_3 = 0$.

Силовые граничные условия:

$F_{x2} = 0$;

$F_{y2} = -P$.

Уравнение равновесия системы с учётом граничных условий

$$\frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 0 \\ -P \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для нахождения неизвестных смещений

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{cases} u_2 = -\dfrac{Pl}{EA}; \\ v_2 = -\dfrac{3Pl}{EA}. \end{cases}$$

Уравнение для определения неизвестных реакций

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{Pl}{EA} \\ -\frac{3Pl}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ -P \\ P \end{Bmatrix}.$$

Проверка условий равновесия конструкции

$$\begin{cases} F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} = P + 0 - P = 0; \\ F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} = 0 - P + P = 0. \end{cases}$$

Напряжения в стержнях e_1 и e_2:

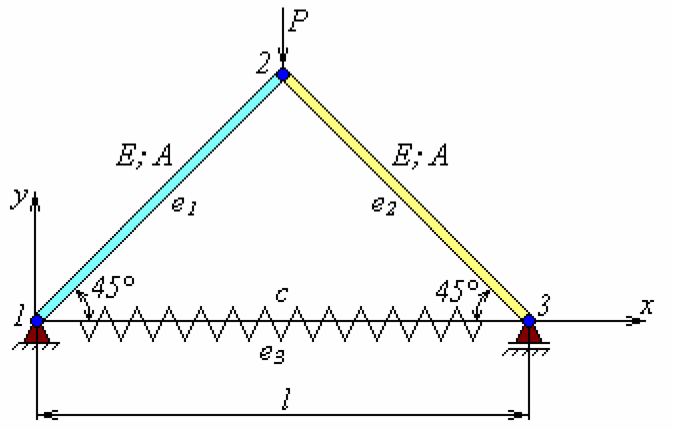
$$\sigma_{e1} = \frac{E}{l} \{-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{Pl}{EA} \\ -\frac{3Pl}{EA} \end{Bmatrix} = -\frac{P}{A};$$

$$\sigma_{e2} = \frac{E}{l\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \begin{Bmatrix} -\frac{Pl}{EA} \\ -\frac{3Pl}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P}{A}.$$

Таким образом, стержень e_1 сжимается, а стержень e_2 – растягивается.

Пример 3.8

Определить смещения узлов 2 и 3, а также реакции опор.



Решение

Глобальная матрица жёсткости элемента e_1:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ K_{e1} = \dfrac{EA}{2l} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Глобальная матрица жёсткости элемента e_2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ K_{e2} = \dfrac{EA}{2l} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Глобальная матрица жёсткости элемента e_3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ K_{e3} = & \begin{bmatrix} c & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Глобальная матрица жёсткости системы

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{2l}+c & \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & -c & 0 \\ \frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} \\ -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} \\ -c & 0 & -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l}+c & -\frac{EA}{2l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия в глобальных координатах:

$u_1 = 0;$

$v_1 = 0$

$v_3 = 0.$

Силовые граничные условия:

$F_{x2} = 0;$

$F_{y2} = -P;$

$F_{x3} = 0.$

Уравнение равновесия системы с учётом граничных условий

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{2l}+c & \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & -c & 0 \\ \frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} \\ -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} \\ -c & 0 & -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l}+c & -\frac{EA}{2l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & -\frac{EA}{2l} & \frac{EA}{2l} \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ F_{y3} \end{Bmatrix}.$$

Введём обозначение

$$k = \frac{EA}{l}.$$

Уравнение для нахождения неизвестных смещений

$$\begin{bmatrix} k & 0 & -\frac{k}{2} \\ 0 & k & \frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & \frac{k}{2} & \frac{k}{2}+c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{P}{4c}; \\ v_2 = -\dfrac{P(k+4c)}{4kc}; \\ u_3 = \dfrac{P}{2c}. \end{cases}$$

Проверка условий совместности деформаций

$$\begin{cases} u_3 = 2u_2; \\ \dfrac{P}{2c} = 2\cdot\dfrac{P}{4c}. \end{cases}$$

При неограниченном возрастании жёсткости c упругого элемента система не деформируется. При малых же значениях c система претерпевает значительные деформации (описание таких деформаций выходит за рамки линейной теории упругости).

Уравнение для определения неизвестных реакций

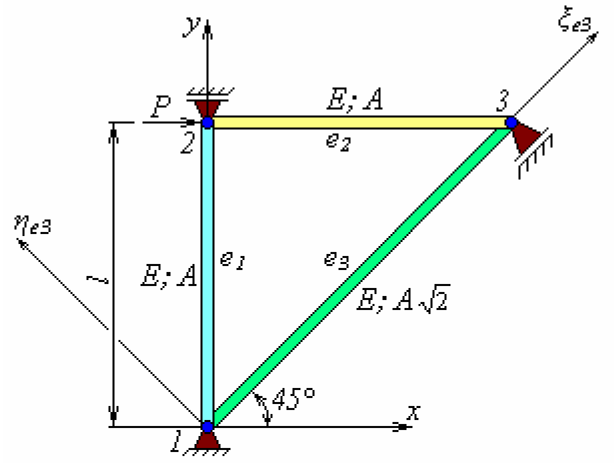
$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{2}+c & \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & -c & 0 \\ \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & \frac{k}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{P}{4c} \\ -\frac{P(k+4c)}{4kc} \\ \frac{P}{2c} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}P \\ \frac{1}{2}P \end{Bmatrix}.$$

Проверка условий равновесия конструкции

$$\begin{cases} F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} = 0 + 0 + 0 = 0; \\ F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} = \dfrac{1}{2}P - P + \dfrac{1}{2}P = 0. \end{cases}$$

Пример 3.9

Определить смещения узлов 2 и 3, а также реакции опор.



Решение

Глобальная матрица жёсткости элемента e_1:

$$K_{e1} = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Глобальная матрица жёсткости элемента e_2:

$$K_{e2} = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Глобальная матрица жёсткости элемента e_3:

$$K_{e3} = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Глобальная матрица жёсткости системы

$$K = \frac{EA}{2l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия:

$u_1 = 0;$

$v_1 = 0;$

$v_2 = 0;$

$v_3^{лок} = 0,$

где $v_3^{лок}$ – поперечное перемещение узла 3 в локальной системе координат $\xi_{e3}\eta_{e3}$:

$$v_3^{лок} = -u_3 \sin 45° + v_3 \cos 45° = \frac{v_3 - u_3}{\sqrt{2}} = 0,$$

откуда получаем в глобальной формулировке

$v_3 = u_3.$

Силовые граничные условия:

$F_{x2} = P;$

$F_{x3}^{лок} = 0,$

где

$$F_{x3}^{лок} = F_{x3} \cos 45° + F_{y3} \sin 45° = \frac{F_{x3} + F_{y3}}{\sqrt{2}},$$

откуда получаем

$F_{y3} = -F_{x3}.$

Уравнение равновесия системы с учётом граничных условий

$$\frac{EA}{2l}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ P \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ -F_{x3} \end{Bmatrix},$$

или в развёрнутом виде

$$\begin{cases} \dfrac{EA}{2l}\cdot\left(-u_3 - u_3\right) = F_{x1}; \\ \dfrac{EA}{2l}\cdot\left(-u_3 - u_3\right) = F_{y1}; \\ \dfrac{EA}{2l}\cdot\left(2u_2 - 2u_3\right) = P; \\ 0 = F_{y2}; \\ \dfrac{EA}{2l}\cdot\left(-2u_2 + 3u_3 + u_3\right) = F_{x3}; \\ \dfrac{EA}{2l}\cdot\left(u_3 + u_3\right) = -F_{x3}. \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{Pl}{EA}; \\ u_3 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Pl}{EA}; \\ v_3 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Pl}{EA}, \end{cases}$$

а также

$$\begin{cases} F_{x1} = -\dfrac{1}{2}P; \\ F_{y1} = -\dfrac{1}{2}P; \\ F_{y2} = 0; \\ F_{x3} = -\dfrac{1}{2}P; \\ F_{y3} = \dfrac{1}{2}P. \end{cases}$$

Проверка условий равновесия:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} F_{xi} = F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} = -\dfrac{1}{2}P + P - \dfrac{1}{2}P = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{3} F_{yi} = F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} = -\dfrac{1}{2}P + 0 + \dfrac{1}{2}P = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{3} M_3\left(\overrightarrow{F_i}\right) = F_{x1}\cdot l - F_{y1}\cdot l - F_{y2}\cdot l = -\dfrac{1}{2}Pl + \dfrac{1}{2}Pl - 0 = 0. \end{cases}$$

3.6 Балочный элемент

3.6.1 Матрица жёсткости балочного элемента

Для моделирования элементов конструкций, несущих изгибную нагрузку, используют балочный элемент (рисунок 3.7).

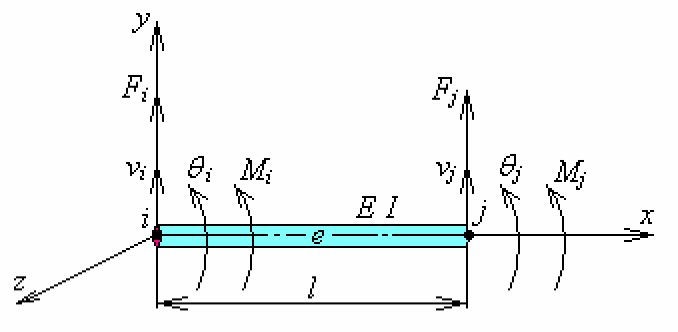


Рисунок 3.7 – Балочный элемент

Основными характеристиками балочного элемента являются длина l, момент инерции поперечного сечения I и модуль упругости материала E.

Линейный балочный элемент (рисунок 3.7) отграничен двумя узлами i и j, каждый из которых имеет две степени свободы: прогиб v и угол поворота сечения θ относительно оси z.

В силу малости деформаций справедлива зависимость

$$\theta = \frac{dv}{dx}. \tag{3.63}$$

В узлах действуют перерезывающая сила F и изгибающий момент M относительно оси z.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} = M(x). \tag{3.64}$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = F_i \cdot x - M_i. \tag{3.65}$$

Интегрируя дважды по x, получим

$$EIv(x) = F_i \frac{x^3}{6} - M_i \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, \tag{3.66}$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования, определяемые из граничных условий

$$\begin{cases} v(0) = v_i; \\ \theta(0) = \theta_j. \end{cases} \tag{3.67}$$

Таким образом

$$\begin{cases} C_1 = EI\theta_i; \\ C_2 = EIv_i, \end{cases} \tag{3.68}$$

следовательно

$$EIv(x) = F_i \frac{x^3}{6} - M_i \frac{x^2}{2} + EI\theta_i x + EIv_i; \tag{3.69}$$

$$EI\theta(x) = F_i \frac{x^2}{2} - M_i x + EI\theta_i. \tag{3.70}$$

С другой стороны, уравнение (3.64) можно записать в виде

$$EI\frac{d^2v}{dx_1^2} = F_j \cdot x_1 + M_j, \tag{3.71}$$

где введена новая координата

$$x_1 = l - x,$$

что соответствует зеркальному отображению введённой схемы балочного элемента (рисунок 3.8).

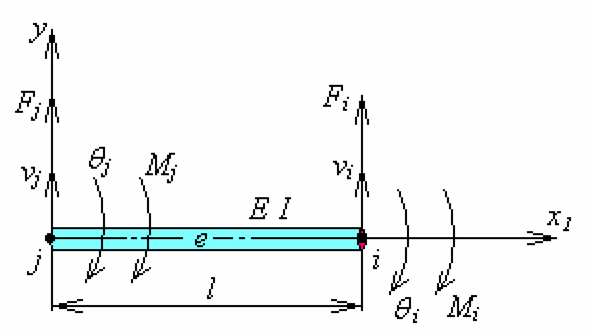


Рисунок 3.8 – Вспомогательная система координат

Интегрируя уравнение (3.71) дважды по x, получим

$$EIv(x_1) = F_j \frac{x_1^3}{6} + M_j \frac{x_1^2}{2} + C_3 x_1 + C_4, \tag{3.72}$$

где C_3, C_4 – константы интегрирования, определяемые граничными условиями

$$\begin{cases} v(0) = v_j; \\ \theta(0) = -\theta_j. \end{cases} \tag{3.73}$$

Таким образом

$$\begin{cases} C_3 = -EI\theta_j; \\ C_4 = EIv_j, \end{cases} \tag{3.74}$$

следовательно

$$EIv(x_1) = F_j \frac{x_1^3}{6} + M_j \frac{x_1^2}{2} - EI\theta_j x_1 + EIv_j; \tag{3.75}$$

$$EI\theta(x_1) = F_j \frac{x_1^2}{2} + M_j x_1 - EI\theta_j. \tag{3.76}$$

Определим из уравнений (3.69), (3.70) v_j и θ_j:

$$EIv_j = F_i \frac{l^3}{6} - M_i \frac{l^2}{2} + EI\theta_i l + EIv_i; \tag{3.77}$$

$$EI\theta_j = F_i \frac{l^2}{2} - M_i l + EI\theta_i. \tag{3.78}$$

Определим из уравнений (3.75), (3.76) v_i и θ_i:

$$EIv_i = F_j \frac{l^3}{6} + M_j \frac{l^2}{2} - EI\theta_j l + EIv_j; \tag{3.79}$$

$$-EI\theta_i = F_j \frac{l^2}{2} + M_j l - EI\theta_j. \tag{3.80}$$

Решая систему четырёх уравнений (3.77) – (3.80) относительно F_i, M_i, F_j, M_j, получим

$$\begin{cases} F_i = \dfrac{12EI}{l^3} v_i + \dfrac{6EI}{l^2}\theta_i - \dfrac{12EI}{l^3} v_j + \dfrac{6EI}{l^2}\theta_j; \\ M_i = \dfrac{6EI}{l^2} v_i + \dfrac{4EI}{l}\theta_i - \dfrac{6EI}{l^2} v_j + \dfrac{2EI}{l}\theta_j; \\ F_j = -\dfrac{12EI}{l^3} v_i - \dfrac{6EI}{l^2}\theta_i + \dfrac{12EI}{l^3} v_j - \dfrac{6EI}{l^2}\theta_j; \\ M_j = \dfrac{6EI}{l^2} v_i + \dfrac{2EI}{l}\theta_i - \dfrac{6EI}{l^2} v_j + \dfrac{4EI}{l}\theta_j, \end{cases} \tag{3.81}$$

или в матричной форме записи

$$Ku = F, \tag{3.82}$$

где u – вектор-столбец узловых перемещений и углов поворота

$$u = \begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ u_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}; \tag{3.83}$$

F – вектор-столбец сил и изгибающих моментов

$$F = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}; \tag{3.84}$$

K – матрица жёсткости балочного элемента

$$K = \frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}. \tag{3.85}$$

3.6.2 Функция формы балочного элемента

Определим функцию прогиба в любом сечении балочного элемента (рисунок 3.9). В качестве таковой выберем кубический полином

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \tag{3.86}$$

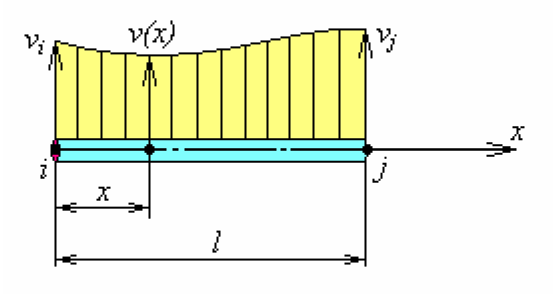


Рисунок 3.9 – Функция прогиба балочного элемента

Дифференцируя функцию прогиба по x, получим

$$\theta(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2. \tag{3.87}$$

Неизвестные параметры a_0, a_1, a_2, a_3 определим из граничных условий

$$\begin{cases} v(0) = v_i; \\ \theta(0) = \theta_i; \\ v(l) = v_j; \\ \theta(l) = \theta_j. \end{cases} \tag{3.88}$$

Получим

$$\begin{cases} v_i = a_0; \\ \theta_i = a_1; \\ v_j = a_0 + a_1 l + a_2 l^2 + a_3 l^3; \\ \theta_j = a_1 + 2a_2 l + 3a_3 l^2. \end{cases} \tag{3.89}$$

Решение (3.89) даёт

$$\begin{cases} a_0 = v_i = \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}u; \\ a_1 = \theta_i = \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\}u; \\ a_2 = -\left[\dfrac{2\theta_i + \theta_j}{l} + \dfrac{3(v_i - v_j)}{l^2}\right] = \left\{-\dfrac{3}{l^2} \quad -\dfrac{2}{l} \quad \dfrac{3}{l^2} \quad -\dfrac{1}{l}\right\}u; \\ a_3 = \dfrac{\theta_i + \theta_j}{l^2} + \dfrac{2(v_i - v_j)}{l^3} = \left\{\dfrac{2}{l^3} \quad \dfrac{1}{l^2} \quad -\dfrac{2}{l^3} \quad \dfrac{1}{l^2}\right\}u. \end{cases} \tag{3.90}$$

В итоге

$$v(x) = v_i + \theta_i x - \left[\frac{2\theta_i + \theta_j}{l} + \frac{3(v_i - v_j)}{l^2}\right]x^2 + \left[\frac{\theta_i + \theta_j}{l^2} + \frac{2(v_i - v_j)}{l^3}\right]x^3; \tag{3.91}$$

$$\theta(x) = \theta_i - 2\left[\frac{2\theta_i + \theta_j}{l} + \frac{3(v_i - v_j)}{l^2}\right]x + 3\left[\frac{\theta_i + \theta_j}{l^2} + \frac{2(v_i - v_j)}{l^3}\right]x^2, \tag{3.92}$$

или в матричной форме

$$v(x) = \Phi u; \tag{3.93}$$

$$\theta(x) = \frac{d\Phi}{dx}u, \tag{3.94}$$

где Φ – функция формы балочного элемента

$$\Phi = \left\{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad \left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right)l \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad \left(-\xi^2 + \xi^3\right)l\right\}, \tag{3.95}$$

а также

$$\frac{d\Phi}{dx} = \left\{\frac{6}{l}\left(-\xi + \xi^2\right) \quad 1 - 4\xi + 3\xi^2 \quad \frac{6}{l}\left(\xi - \xi^2\right) \quad -2\xi + 3\xi^2\right\}. \tag{3.96}$$

Здесь введён безразмерный параметр

$$\xi = \frac{x}{l}. \tag{3.97}$$

3.6.3 Энергетический подход к определению матрицы жёсткости

Матрица жёсткости балочного элемента (3.85) была ранее получена в п.3.6.1 исходя из дифференциального уравнения изогнутой оси балки.

Существует более универсальный способ получения матриц жёсткости, одинаково применимый для различных типов конструкций и элементов, – энергетический метод. Его суть заключается в том, что матрица жёсткости K определяется из следующего выражения:

$$K_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}, \qquad (3.98)$$

где U –внутренняя потенциальная энергия деформации;

q – узловые перемещения ($q_1 = v_1;\ q_2 = \theta_1; q_3 = v_2;\ q_4 = \theta_2;\ldots$).

Для случая поперечного изгиба балки внутренняя потенциальная энергия изгиба балки определяется по формуле

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\right]^2 dx. \qquad (3.99)$$

Поскольку функция прогиба заведомо не определена, выберем в качестве таковой кубический полином (3.86). Получим

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)\right]^2 dx = 2EI\left(a_2^2 l + 3a_2 a_3 l^2 + 3a_3^2 l^3\right), \qquad (3.100)$$

что с учётом (3.90) даёт

$$U = 2EI\left(\frac{3}{l^3}v_i^2 + \frac{3}{l^2}v_i\theta_i - \frac{6}{l^3}v_i v_j + \frac{3}{l^2}v_i\theta_j + \frac{1}{l}\theta_i^2 - \frac{3}{l^2}\theta_i v_j + \frac{1}{l}\theta_i\theta_j + \frac{3}{l^3}v_j^2 - \frac{3}{l^2}v_j\theta_j + \frac{1}{l}\theta_j^2\right). \qquad (3.101)$$

Таким образом, внутренняя потенциальная энергия изгиба балки представляет собой квадратичную форму относительно узловых перемещений.

Таким образом, согласно формуле (3.98) матрица жёсткости принимает вид

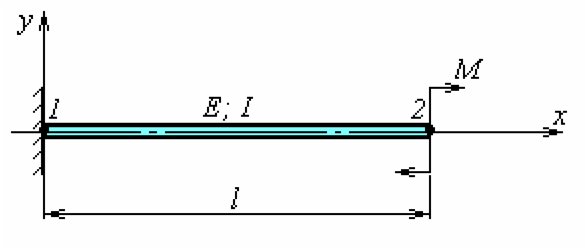
$$K=\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \qquad (3.102)$$

что совпадает с ранее полученным выражением (3.85).

ПРИМЕРЫ

Пример 3.10

Определить функцию прогиба и углов поворота балки.



Решение

Матрица жёсткости элемента

$$K = \frac{2EI}{l^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия

$v_1 = 0;$

$\theta_1 = 0.$

Силовые граничные условия:

$F_2 = 0;$

$M_2 = -M.$

Уравнение равновесия системы с учётом граничных условий

$$\frac{2EI}{l^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ 0 \\ -M \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для нахождения неизвестных смещений

$$\frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -M \end{Bmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{cases} v_2 = -\dfrac{Ml^2}{2EI}; \\ \theta_2 = -\dfrac{Ml}{EI}. \end{cases}$$

Уравнение для определения неизвестных реакций

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{Ml^2}{2EI} \\ -\dfrac{Ml}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M \end{Bmatrix}.$$

Проверка условий равновесия

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} F_{yi} = F_{y1} + F_{y2} = 0 + 0 = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{2} M_1\left(\vec{F_i}\right) = M_1 + M_2 = M - M = 0. \end{cases}$$

Параметры функции прогиба

$$\begin{cases} a_0 = v_1 = 0; \\ a_1 = \theta_1 = 0; \\ a_2 = -\left[\dfrac{2\theta_1 + \theta_2}{l} + \dfrac{3(v_1 - v_2)}{l^2}\right] = -\dfrac{M}{2EI}; \\ a_3 = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{l^2} + \dfrac{2(v_1 - v_2)}{l^3} = 0. \end{cases}$$

Функция прогиба

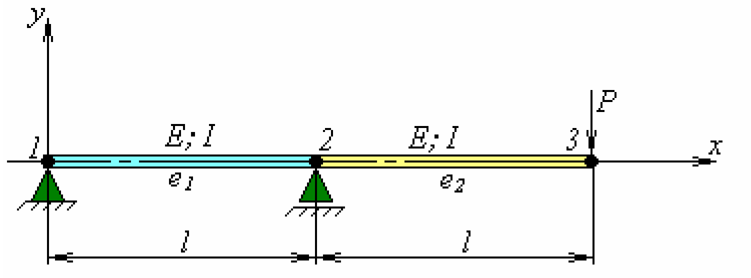
$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = -\frac{Mx^2}{2EI}.$$

Функция углов поворота

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = -\frac{Mx}{EI}.$$

Пример 3.11

Определить функцию прогиба и углов поворота балки.



Решение

Матрица жёсткости элемента e_1:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ K_{e1} = \dfrac{2EI}{l^3} & \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ K_{e2} = \dfrac{2EI}{l^3} & \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости системы

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ K = \dfrac{2EI}{l^3} & \begin{bmatrix} 6 & 3l & 6 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & 2l^2 & 3l & l^2 & 0 & 0 \\ -6 & -3l & 12 & 0 & -6 & 3l \\ 3l & l^2 & 0 & 4l^2 & -3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & -3l & 6 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия:

$v_1 = 0;$

$v_2 = 0.$

Силовые граничные условия:

$M_1 = 0;$

$M_2 = 0;$

$F_3 = -P;$

$M_3 = 0.$

Уравнение равновесия системы с учётом граничных условий

$$\frac{2EI}{l^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3l & 6 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & 2l^2 & 3l & l^2 & 0 & 0 \\ -6 & -3l & 12 & 0 & -6 & 3l \\ 3l & l^2 & 0 & 4l^2 & -3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & -3l & 6 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для нахождения неизвестных смещений

$$\frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 2l^2 & l^2 & 0 & 0 \\ l^2 & 4l^2 & -3l & l^2 \\ 0 & -3l & 6 & -3l \\ 0 & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{1}{6}\dfrac{Pl^2}{EI}; \\ \theta_2 = -\dfrac{1}{3}\dfrac{Pl^2}{EI}; \\ v_3 = -\dfrac{2}{3}\dfrac{Pl^3}{EI}; \\ \theta_3 = -\dfrac{5}{6}\dfrac{Pl^2}{EI}. \end{cases}$$

Уравнение для определения неизвестных реакций

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & 3l & 6 & 3l & 0 & 0 \\ -6 & -3l & 12 & 0 & -6 & 3l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6}\frac{Pl^2}{EI} \\ 0 \\ -\frac{1}{3}\frac{Pl^2}{EI} \\ -\frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EI} \\ -\frac{5}{6}\frac{Pl^2}{EI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 2P \end{Bmatrix}.$$

Проверка условий равновесия

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{1} F_{yi} = F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} = -P + 2P - P = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{3} M_1\left(\overrightarrow{F_i}\right) = F_2 \cdot l - P \cdot 2l = 2Pl - P \cdot 2l = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{3} M_2\left(\overrightarrow{F_i}\right) = -F_1 \cdot l - P \cdot l = -P \cdot l - P \cdot l = 0. \end{cases}$$

Параметры функции прогиба для элемента e_1 в локальных координатах

$$\begin{cases} a_0 = v_1 = 0; \\ a_1 = \theta_1 = \frac{1}{6}\frac{Pl^2}{EI}; \\ a_2 = -\left[\frac{2\theta_1 + \theta_2}{l} + \frac{3(v_1 - v_2)}{l^2}\right] = 0; \\ a_3 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{l^2} + \frac{2(v_1 - v_2)}{l^3} = -\frac{1}{6}\frac{P}{EI}. \end{cases}$$

Функция прогиба

$$v_{e1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = \frac{1}{6}\frac{Pl^2}{EI} x_1\left(l^2 - x_1^2\right).$$

Функция углов поворота

$$\theta_{e1}(x) = \frac{dv_{e1}(x)}{dx_1} = \frac{1}{6}\frac{Pl^2}{EI}\left(l^2 - 3x_1^2\right).$$

Параметры функции прогиба для элемента e_2 в локальных координатах

$$\begin{cases} b_0 = v_2 = 0; \\ b_1 = \theta_2 = -\dfrac{1}{3}\dfrac{Pl^2}{EI}; \\ b_2 = -\left[\dfrac{2\theta_2 + \theta_3}{l} + \dfrac{3(v_2 - v_3)}{l^2}\right] = -\dfrac{1}{2}\dfrac{Pl}{EI}; \\ b_3 = \dfrac{\theta_2 + \theta_3}{l^2} + \dfrac{2(v_2 - v_3)}{l^3} = \dfrac{1}{6}\dfrac{P}{EI}. \end{cases}$$

Функция прогиба

$$v_{e2}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = -\frac{1}{6}\frac{P}{EI} x_2\left(2l^2 + 3lx_2 - x_2^2\right).$$

Функция углов поворота

$$\theta_{e2}(x) = \frac{dv_{e2}(x)}{dx_2} = -\frac{1}{6}\frac{P}{EI}\left(2l^2 + 6lx_2 - 3x_2^2\right).$$

В глобальных координатах $\left(x_1 = x;\ x_2 = x + l\right)$

$$\begin{cases} v_{e1}(x) = \dfrac{1}{6}\dfrac{Pl^2}{EI} x\left(l^2 - x^2\right);. \\ \theta_{e1}(x) = \dfrac{1}{6}\dfrac{Pl^2}{EI}\left(l^2 - 3x^2\right); \\ v_{e2}(x) = -\dfrac{1}{6}\dfrac{P}{EI}(x - l)\left(5lx - 2lx - x^2\right); \\ \theta_{e2}(x) = -\dfrac{1}{6}\dfrac{P}{EI}\left(12lx - 7l^2 - 3x^2\right). \end{cases}$$

3.6.4 Учёт равномерно распределённой нагрузки

В случаях, когда требуется учесть распределённую поперечную нагрузку, действующую вдоль оси стержня, необходимо заменить её статически эквивалентной системой сосредоточенных в узлах поперечных сил и изгибающих моментов.

Заменим распределённую нагрузку постоянной интенсивности q, действующую по всей длине балочного элемента (рисунок 3.10 а), статически эквивалентной системой сосредоточенных сил и моментов, приложенных в узлах элемента (рисунок 3.10 б).

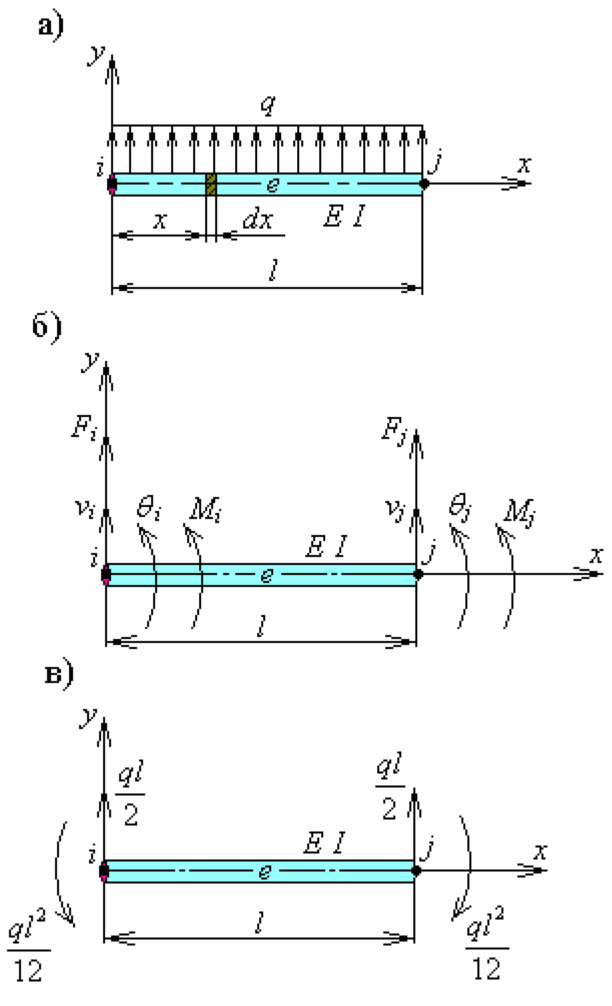


Рисунок 3.10 – Учёт равномерно распределённой нагрузки

Перерезывающее усилие, действующее на элементарном участке *dx*:

$$dF = qdx. \tag{3.105}$$

Элементарная работа перерезывающей силы на перемещении *v(x)*:

$$\delta W = v(x)\cdot dF = v(x)\cdot qdx = \Phi u\, qdx. \tag{3.106}$$

Работа распределённой нагрузки

$$W = \int \delta W = \int_0^l \Phi u\, qdx = ql\cdot\left(\int_0^1 \Phi\, d\xi\right)u = \left\{\frac{ql}{2} \quad \frac{ql^2}{12} \quad \frac{ql}{2} \quad -\frac{ql^2}{12}\right\}u. \tag{3.107}$$

Работа эквивалентной системы нагружения (рисунок 3.10 б)

$$W = F_i v_i + M_i\theta_i + F_j v_j + M_j\theta_j = F^T u = \left\{F_i \quad M_i \quad F_j \quad M_j\right\}u. \tag{3.108}$$

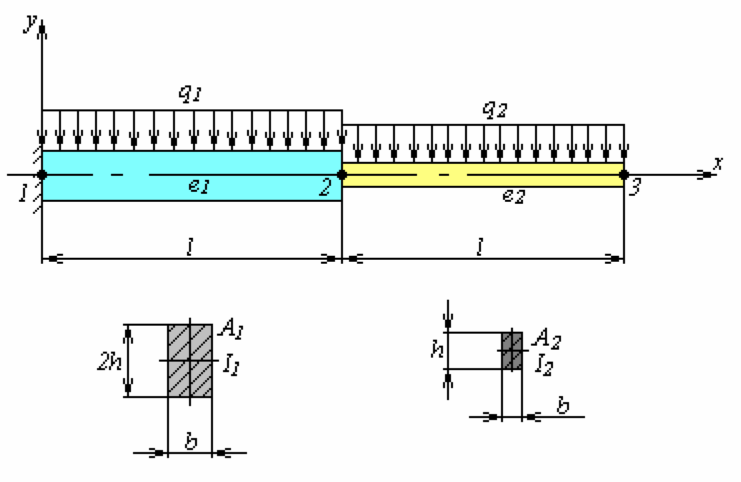
Сравнивая (3.107) и (3.108), получим (рисунок 3.10 в)

$$\begin{cases} F_i = \dfrac{ql}{2}; \\ M_i = \dfrac{ql^2}{12}; \\ F_j = \dfrac{ql}{2}; \\ M_j = -\dfrac{ql^2}{12}. \end{cases} \tag{3.109}$$

ПРИМЕРЫ

Пример 3.12

Определить деформации узлов 2 и 3 балочной конструкции под собственным весом.



Решение

Геометрические характеристики сечений:

– площади:

$$A_1 = b \cdot 2h = 2bh;$$
$$A_2 = bh.$$

– моменты инерции:

$$I_1 = \frac{b \cdot (2h)^3}{12} = \frac{2}{3} bh^3;$$
$$I_2 = \frac{1}{12} bh^3.$$

Введём обозначения:

$$A = bh;$$
$$I = \frac{1}{12} bh^3.$$

Получим:

$$A_1 = 2A;$$
$$A_2 = A,$$

а также:

$I_1 = 8I;$

$I_2 = I.$

Интенсивности поперечных нагрузок:

$$q_1 = \frac{P_1}{l} = \frac{m_1 g}{l} = \frac{\rho A_1 l g}{l} = \rho A_1 g = 2\rho A g;$$

$$q_2 = \frac{P_2}{l} = \frac{m_2 g}{l} = \frac{\rho A_2 l g}{l} = \rho A_2 g = \rho A g.$$

Введём обозначение

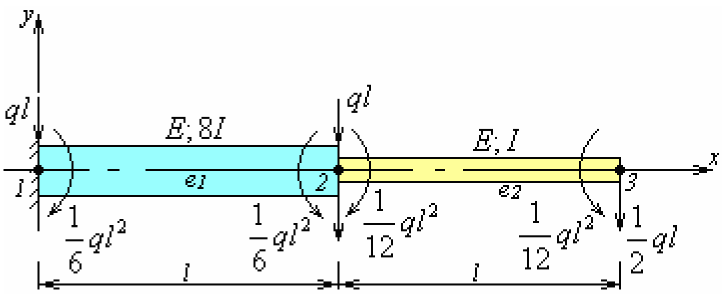
$q = \rho A g.$

Получим:

$q_1 = 2q;$

$q_2 = q.$

Заменим нагрузку q_1 и q_2 статически эквивалентной системой сил и моментов:



Матрица жёсткости элемента e_1:

$$K_{e1} = \frac{2EI}{l^3} \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 48 & 24l & -48 & 24l \\ 24l & 16l^2 & -24l & 8l^2 \\ -48 & -24l & 48 & -24l \\ 24l & 8l^2 & -24l & 16l^2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_2:

$$K_{e2} = \frac{2EI}{l^3} \begin{array}{c} \begin{matrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости системы

$$K=\frac{2EI}{l^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 48 & 24l & -48 & 24l & 0 & 0 \\ 24l & 16l^2 & -24l & 8l^2 & 0 & 0 \\ -48 & -24l & 54 & -21l & -6 & 3l \\ 24l & 8l^2 & -21l & 18l^2 & -3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & -3l & 6 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Кинематические граничные условия:

$v_1=0;$

$\theta_1=0.$

Силовые граничные условия:

$F_1=F_{1R}-ql;$

$M_1=M_{1R}-\dfrac{1}{6}ql^2;$

$F_2=-\dfrac{3}{2}ql;$

$M_2=\dfrac{1}{12}ql^2;$

$F_3=-\dfrac{1}{2}ql;$

$M_3=\dfrac{1}{12}ql^2.$

Уравнение равновесия системы с учётом граничных условий

$$\frac{2EI}{l^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 48 & 24l & -48 & 24l & 0 & 0 \\ 24l & 16l^2 & -24l & 8l^2 & 0 & 0 \\ -48 & -24l & 54 & -21l & -6 & 3l \\ 24l & 8l^2 & -21l & 18l^2 & -3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & -3l & 6 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1R}-ql \\ M_{1R}-\dfrac{1}{6}ql^2 \\ -\dfrac{3}{2}ql \\ \dfrac{1}{12}ql^2 \\ -\dfrac{1}{2}ql \\ \dfrac{1}{12}ql^2 \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для нахождения неизвестных перемещений

$$\frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} 54 & -21l & -6 & 3l \\ -21l & 18l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2}ql \\ \frac{1}{12}ql^2 \\ -\frac{1}{2}ql \\ \frac{1}{12}ql^2 \end{Bmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{cases} v_2 = -\frac{5}{48}\frac{ql^4}{EI}; \\ \theta_2 = -\frac{1}{6}\frac{ql^3}{EI}; \\ v_3 = -\frac{19}{48}\frac{ql^4}{EI}; \\ \theta_3 = -\frac{1}{3}\frac{ql^3}{EI}. \end{cases}$$

Уравнение для определения неизвестных реакций

$$\begin{Bmatrix} F_{1R} \\ M_{1R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql \\ \frac{1}{6}ql^2 \end{Bmatrix} + \frac{2EI}{l^3}\begin{bmatrix} -48 & 24l \\ -24l & 8l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\frac{5}{48}l \\ -\frac{1}{6} \end{Bmatrix}\cdot\frac{ql^3}{EI} = \begin{Bmatrix} 3ql \\ \frac{5}{2}ql^2 \end{Bmatrix}.$$

Проверка условий равновесия

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} F_{xi} = 3ql - 2q\cdot l - q\cdot l = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{3} M_1\left(\vec{F_i}\right) = \frac{5}{2}ql^2 - 2q\cdot l\cdot\frac{l}{2} - q\cdot l\cdot\left(l + \frac{l}{2}\right) = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{3} M_2\left(\vec{F_i}\right) = \frac{5}{2}ql^2 - 3ql\cdot l + 2q\cdot l\cdot\frac{l}{2} - q\cdot l\cdot\frac{l}{2} = 0. \end{cases}$$

3.6.5 Учёт равномерно распределённого изгибающего момента

Заменим распределённый изгибающий момент постоянной интенсивности *m*, действующий по всей длине балочного элемента (рисунок 3.11 а), статически эквивалентной системой сосредоточенных сил и моментов, приложенных в узлах элемента (рисунок 3.11 б).

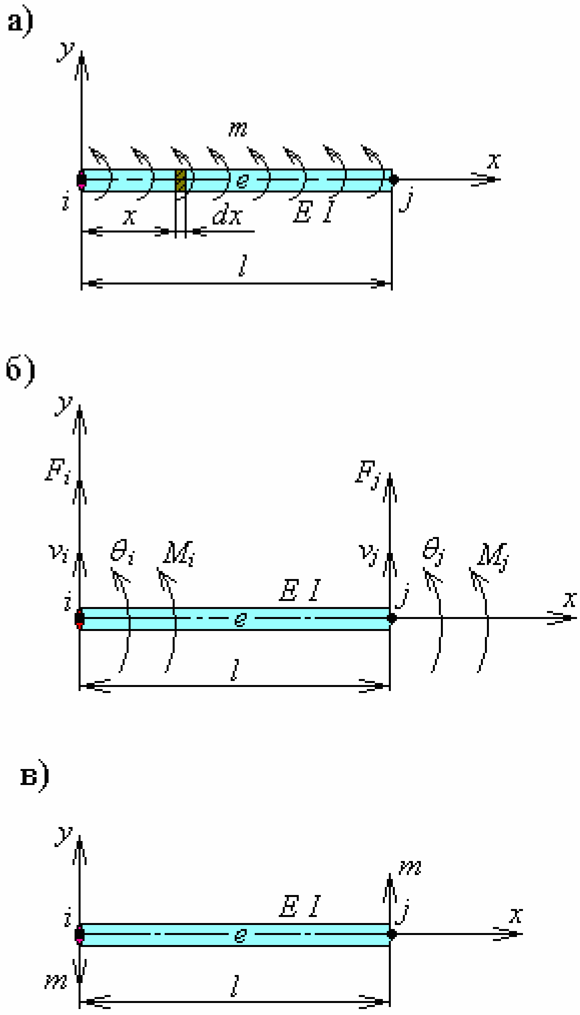


Рисунок 3.11 – Учёт равномерно распределённого изгибающего момента

Изгибающий момент, действующий на элементарном участке *dx*:

$$dM = mdx. \tag{3.110}$$

Элементарная работа изгибающего момента на угле поворота сечения $\theta(x)$:

$$\delta W = \theta(x) \cdot dM = \theta(x) \cdot m dx = \frac{d\Phi}{dx} u \cdot m\, dx. \qquad (3.111)$$

Работа распределённого изгибающего момента

$$W = \int \delta W = \int_0^l \frac{d\Phi}{dx} u\, m dx = ml \cdot \left(\int_0^1 \frac{d\Phi}{dx} d\xi \right) u = \{-m \quad 0 \quad m \quad 0\} u. \qquad (3.112)$$

Работа эквивалентной системы нагружения (рисунок 3.11 б)

$$W = F_i v_i + M_i \theta_i + F_j v_j + M_j \theta_j = F^T u = \{F_i \quad M_i \quad F_j \quad M_j\} u. \qquad (3.113)$$

Сравнивая (3.112) и (3.113), получим (рисунок 3.11 в)

$$\begin{cases} F_i = -m; \\ M_i = 0; \\ F_j = m; \\ M_j = 0. \end{cases} \qquad (3.114)$$

3.6.6 Учёт податливости опор

Абсолютно жёсткие опоры – есть идеализация реальных конструкций (рисунок 3.12 а). Но практический смысл имеет рассмотрение опор с ограниченной жёсткостью. Поскольку нахождение точных значений жесткостей весьма затруднительно, то имеет место изучение влияния их на деформацию конструкции (расчёты на жёсткость). При использовании необходимо введение дополнительных упругих элементов (рисунок 3.12 б).

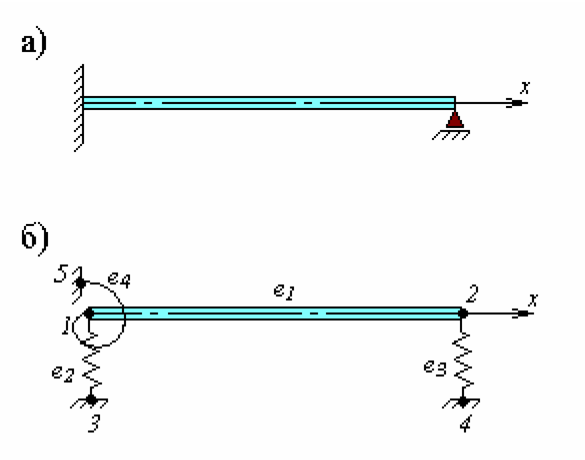


Рисунок 3.12 – Учёт податливости опор

Для упругого элемента с продольной жёсткостью c (рисунок 3.13 а), при деформации которого возникает восстанавливающая сила, матрица жёсткости имеет вид

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_i & v_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (3.115)$$

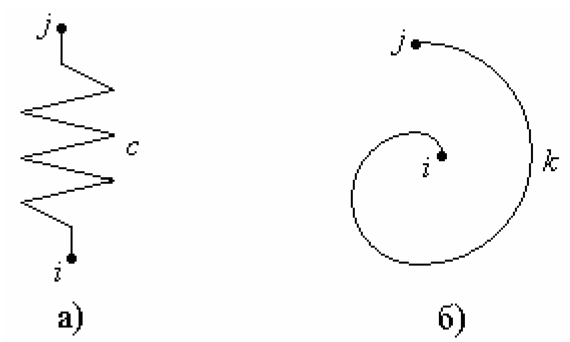


Рисунок 3.13 – Введение упругих элементов

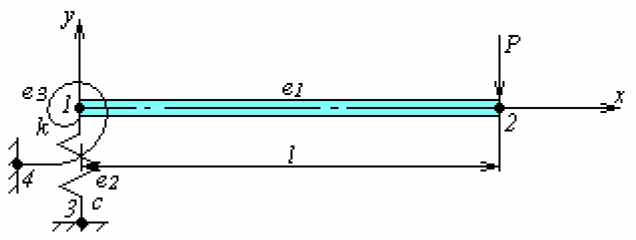
Для упругого элемента с угловой жёсткостью k (рисунок 3.13 б), при деформации которой возникает восстанавливающий момент, матрица жёсткости имеет вид

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \theta_i & \theta_j \end{array} \\ \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (3.116)$$

ПРИМЕРЫ

Пример 3.13

Рассмотреть влияние податливости заделки на деформацию консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой на свободном конце.



Решение

Матрица жёсткости элемента e_1:

$$K_{e1} = \frac{2EI}{l^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_2:

$$K_{e2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_3:

$$K_{e3} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости системы

$$
K=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_4 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
\dfrac{12EI}{l^3}+c & \dfrac{6EI}{l^2} & -\dfrac{12EI}{l^3} & \dfrac{6EI}{l^2} & -c & 0\\
\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l}+k & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{2EI}{l} & 0 & -k\\
-\dfrac{12EI}{l^3} & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{12EI}{l^3} & -\dfrac{6EI}{l^2} & 0 & 0\\
\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{2EI}{l} & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l} & 0 & 0\\
-c & 0 & 0 & 0 & c & 0\\
0 & -k & 0 & 0 & 0 & k
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Кинематические граничные условия:

$v_3 = 0;$

$\theta_4 = 0.$

Силовые граничные условия:

$F_1 = 0;$

$M_1 = 0;$

$F_2 = -P;$

$M_2 = 0.$

Уравнение равновесия с учётом граничных условий

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_4 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
\dfrac{12EI}{l^3}+c & \dfrac{6EI}{l^2} & -\dfrac{12EI}{l^3} & \dfrac{6EI}{l^2} & -c & 0\\
\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l}+k & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{2EI}{l} & 0 & -k\\
-\dfrac{12EI}{l^3} & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{12EI}{l^3} & -\dfrac{6EI}{l^2} & 0 & 0\\
\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{2EI}{l} & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l} & 0 & 0\\
-c & 0 & 0 & 0 & c & 0\\
0 & -k & 0 & 0 & 0 & k
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} v_1\\ \theta_1\\ v_2\\ \theta_2\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ -P\\ 0\\ F_3\\ M_4 \end{Bmatrix}.
$$

Уравнение для нахождения неизвестных перемещений

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3}+c & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}+k & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{P}{c}; \\ \theta_1 = -\frac{Pl}{k}; \\ v_2 = -\frac{P}{c} - \left(\frac{1}{k} + \frac{l}{3EI}\right) Pl^2; \\ \theta_2 = -\frac{Pl}{k} - \frac{Pl^2}{2EI}. \end{cases}$$

При неограниченном возрастании жёсткости заделки ($c \to \infty; k \to \infty$) получается известное решение

$$\begin{cases} v_2 = -\frac{Pl^3}{3EI}; \\ \theta_2 = -\frac{Pl^2}{2EI}, \end{cases}$$

а также кинематические граничные условия:

$$v_1 = 0;$$
$$\theta_1 = 0.$$

Уравнение для определения неизвестных реакций

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{P}{c} \\ -\frac{Pl}{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ Pl \end{Bmatrix}.$$

В силу третьего закона Ньютона при отбрасывании упругих связей получаем соответственно реакции в узле 1:

$$F_{1R} = -F_3 = -P;$$
$$M_{1R} = -M_4 = -Pl,$$

что удовлетворяет условиям равновесия конструкции.

3.7 Расчёт рамных конструкций

3.7.1 Произвольное расположение балочного элемента

Рассмотрим общий случай, когда балочный элемент составляет с осью *x* прямоугольной системы координат произвольный угол α (рисунок 3.14).

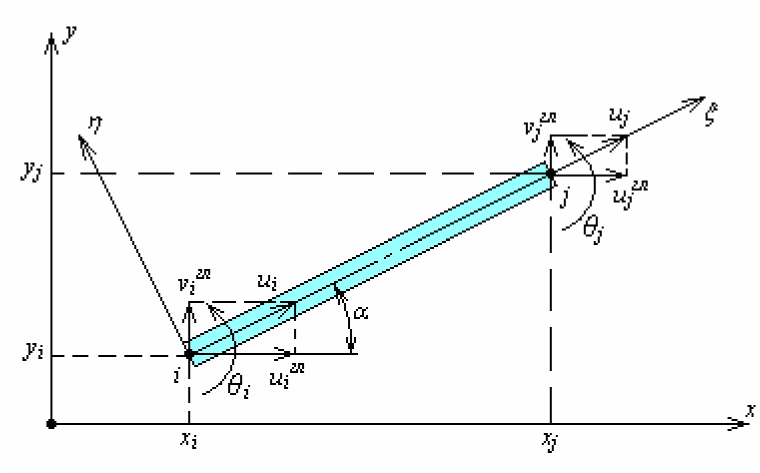


Рисунок 3.14 – Произвольное расположение балочного элемента на плоскости

Введём в рассмотрение две прямоугольные системы координат:

– локальная ξη, связанная со стержневым элементом;

– глобальная xy.

Связь между смещениями узлов *i* и *j* определяется следующими зависимостями (см. п.3.5):

$$u_i = u_i^{гл} \cos\alpha + v_i^{гл} \sin\alpha, \tag{3.117}$$

$$u_j = u_j^{гл} \cos\alpha + v_j^{гл} \sin\alpha, \tag{3.118}$$

$$v_i = -u_i^{гл} \sin\alpha + v_i^{гл} \cos\alpha, \tag{3.119}$$

$$v_j = -u_j^{гл} \sin\alpha + v_j^{гл} \cos\alpha. \tag{3.120}$$

Заметим, что углы поворота в узлах *i* и *j* равны для любой системы координат:

$$\theta_i = \theta_i^{гл}; \tag{3.121}$$

$$\theta_j = \theta_i^{гл}. \tag{3.122}$$

Совокупность уравнений (3.117) – (3.122) образует матричное соотношение

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^{гл} \\ v_i^{гл} \\ \theta_i^{гл} \\ u_j^{гл} \\ v_j^{гл} \\ \theta_j^{гл} \end{Bmatrix}, \tag{3.123}$$

или кратко

$$u = T u^{гл}, \tag{3.124}$$

где $u^{гл}$ – вектор-столбец узловых перемещений элемента в глобальной системе координат;

T – матрица трансформации

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.125}$$

Глобальная матрица жёсткости элемента согласно формуле (3.60) равна

$$K^{гл} = T^T K T, \tag{3.126}$$

где матрица жёсткости балочного элемента в локальной системе координат с учётом растягивающих (сжимающих) усилий N_i и N_j, перерезывающих усилий Q_i и Q_j, а также изгибающих моментов M_i и M_j равна

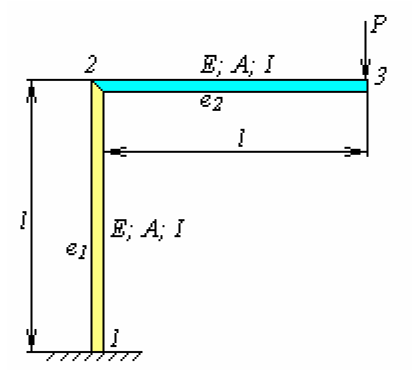
$$
K^{эл}=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_i & v_i & \theta_i & u_j & v_j & \theta_j \end{array}\\
\begin{pmatrix}
\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0\\
0 & \frac{12E\cdot I}{L^3} & \frac{6E\cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12E\cdot I}{L^3} & \frac{6E\cdot I}{L^2}\\
0 & \frac{6E\cdot I}{L^2} & \frac{4E\cdot I}{L} & 0 & -\frac{6E\cdot I}{L^2} & \frac{2E\cdot I}{L}\\
-\frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E\cdot A}{L} & 0 & 0\\
0 & -\frac{12E\cdot I}{L^3} & -\frac{6E\cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12E\cdot I}{L^3} & -\frac{6E\cdot I}{L^2}\\
0 & \frac{6E\cdot I}{L^2} & \frac{2E\cdot I}{L} & 0 & -\frac{6E\cdot I}{L^2} & \frac{4E\cdot I}{L}
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad (3.127)
$$

Элементы этой матрицы состоят из элементов матрицы жёсткости стержня и элементов матрицы жёсткости балки.

ПРИМЕРЫ

Пример 3.14

Определить деформации узлов 2 и 3, а также реакции опоры.



Решение

Матрица жёсткости элемента *e*$_1$:

$$K_{e1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_1 & v_1 & \theta_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента e_2:

$$
K_{e2}=\begin{array}{c}
\begin{matrix} u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 & \theta_3 \end{matrix}\\
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Матрица жёсткости конструкции

$$
K=\begin{array}{c}
\begin{matrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 & \theta_3 \end{matrix}\\
\begin{bmatrix}
\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0\\
-\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3}+\frac{EA}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3}+\frac{EA}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\
-\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\
0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Кинематические граничные условия:

$u_1 = 0;$

$v_1 = 0;$

$\theta_1 = 0.$

Силовые граничные условия:

$F_{x2} = 0;$

$F_{y2} = 0;$

$M_2 = 0;$

$F_{x3} = 0;$

$F_{y3} = -P;$

$M_3 = 0.$

Уравнение равновесия системы с учётом граничных условий

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3}+\frac{EA}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3}+\frac{EA}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
-\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}.
$$

Уравнение для нахождения неизвестных смещений

$$
\begin{bmatrix}
\frac{12EI}{l^3}+\frac{EA}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{l^3}+\frac{EA}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
\frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix},
$$

откуда находим

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Pl^3}{EI}; \\ v_2 = -\dfrac{Pl}{EA}; \\ \theta_2 = -\dfrac{Pl^2}{EI}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_3 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Pl^3}{EI}; \\ v_3 = -\dfrac{Pl}{EA} - \dfrac{4}{3}\dfrac{Pl^2}{EI}; \\ \theta_3 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{Pl^2}{EI}. \end{cases}$$

Уравнение для определения неизвестных реакций

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\dfrac{12EI}{l^3} & 0 & -\dfrac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{6EI}{l^2} & 0 & \dfrac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ Pl \end{Bmatrix}.$$

Проверка условий равновесия

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} F_{xi} = F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} = 0 + 0 + 0 = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{3} F_{yi} = F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} = P + 0 - P = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{3} M_1\left(\vec{F_i}\right) = M_1 + F_{x3} \cdot l = Pl - P \cdot l = 0. \end{cases}$$

4 МКЭ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

4.1 Плоский треугольный элемент

4.1.1 Треугольный трехузловой элемент

Рассмотрим трехузловой треугольный элемент (рисунок 4.1 а).

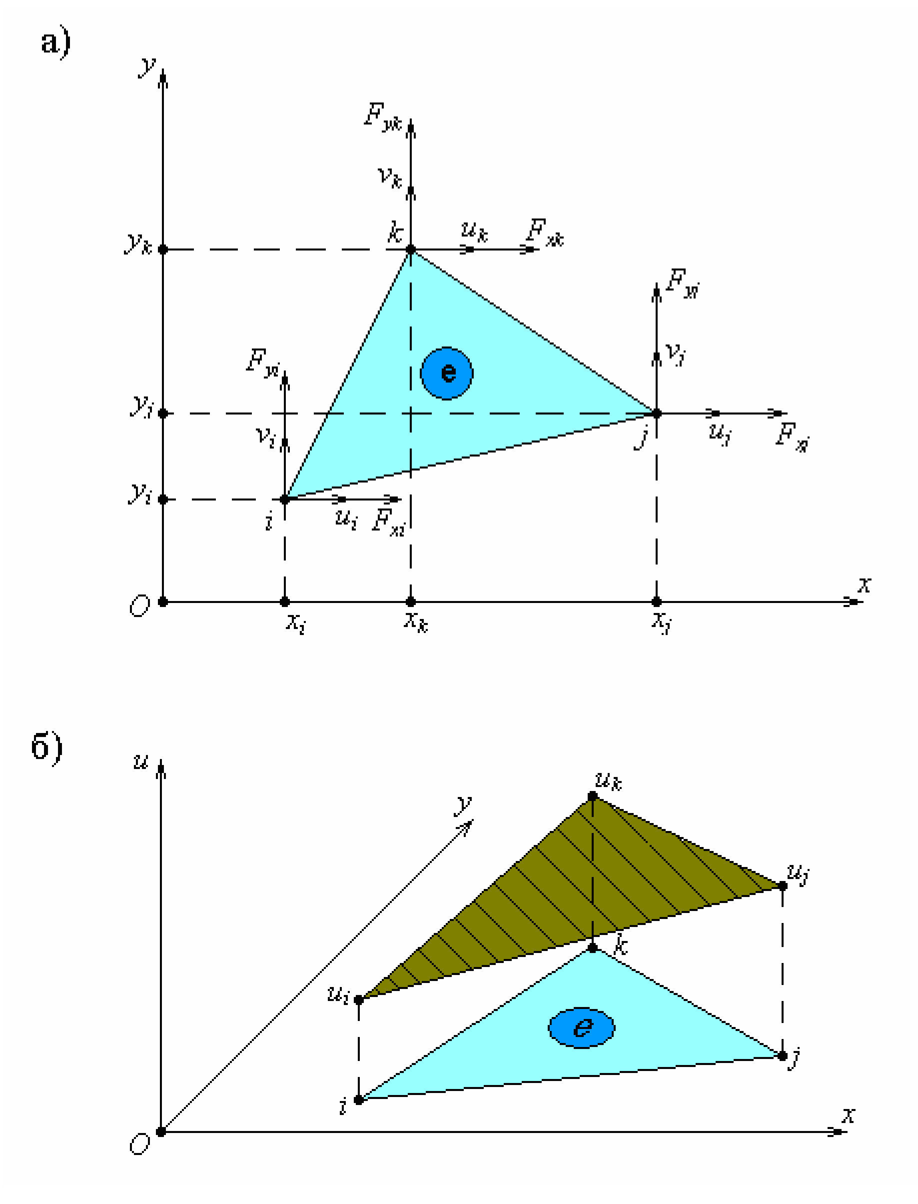


Рисунок 4.1 – Плоский треугольный элемент

В пределах элемента перемещения представим в виде (рисунок 4.1 б):

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \tag{4.1}$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y. \tag{4.2}$$

Неизвестные параметры α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 найдём из условий:

$$\begin{cases} u(x_i, y_i) = u_i; \\ u(x_j, y_j) = u_j; \\ u(x_k, y_k) = u_k; \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} v(x_i, y_i) = v_i; \\ v(x_j, y_j) = v_j; \\ v(x_k, y_k) = v_k, \end{cases} \tag{4.4}$$

или, с учётом (4.1) и (4.2):

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i = u_i; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j = u_j; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k = u_k; \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i = v_i; \\ \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j = v_j; \\ \beta_1 + \beta_2 x_k + \beta_3 y_k = v_k, \end{cases} \tag{4.6}$$

что в матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}; \tag{4.7}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix}. \tag{4.8}$$

Определяя из (4.7) и (4.8) неизвестные параметры α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 и внося их (4.1) и (4.2), получим:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y) \cdot u_i + (a_j + b_j x + c_j y) \cdot u_j + (a_k + b_k x + c_k y) \cdot u_k\right]; \tag{4.9}$$

$$v(x,y)=\frac{1}{2\Delta}\left[(a_i+b_i x+c_i y)\cdot v_i+(a_j+b_j x+c_j y)\cdot v_j+(a_k+b_k x+c_k y)\cdot v_k\right], \quad (4.10)$$

где введены обозначения:

$$a_i=\begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix}; \qquad a_j=\begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_i & y_i \end{vmatrix}; \qquad a_k=\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}; \quad (4.11)$$

$$b_i=\begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_k & 1 \end{vmatrix}; \qquad b_j=\begin{vmatrix} y_k & 1 \\ y_i & 1 \end{vmatrix}; \qquad b_k=\begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_j & 1 \end{vmatrix}; \quad (4.12)$$

$$c_i=\begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_k \end{vmatrix}; \qquad c_j=\begin{vmatrix} 1 & x_k \\ 1 & x_i \end{vmatrix}; \qquad c_k=\begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{vmatrix}; \quad (4.13)$$

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}. \quad (4.14)$$

Величина Δ имеет определённый геометрический смысл: она по модулю равна площади треугольного элемента.

Запишем обобщённый закон Гука в обратной форме (2.31)

$$\sigma=A\varepsilon, \quad (4.15)$$

а также соотношения Коши (2.12) для плоского напряжённого состояния

$$\varepsilon=Du, \quad (4.16)$$

где D – матрица дифференцирования:

$$D=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Выражения (4.9) и (4.10) в матричной форме имеют вид

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \qquad (4.18)$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 – функции формы элемента (рисунок 4.2):

$$\Phi_1(x, y) = a_i + b_i x + c_i y; \qquad (4.19)$$

$$\Phi_2(x, y) = a_j + b_j x + c_j y; \qquad (4.20)$$

$$\Phi_3(x, y) = a_k + b_k x + c_k y. \qquad (4.21)$$

Заметим, что функция формы Φ_1 принимает значение *1* в узле i и *0* в узлах j, k; функция формы Φ_2 принимает значение *1* в узле j и *0* в узлах k, i; функция формы Φ_3 принимает значение *1* в узле k и *0* в узлах i, j.

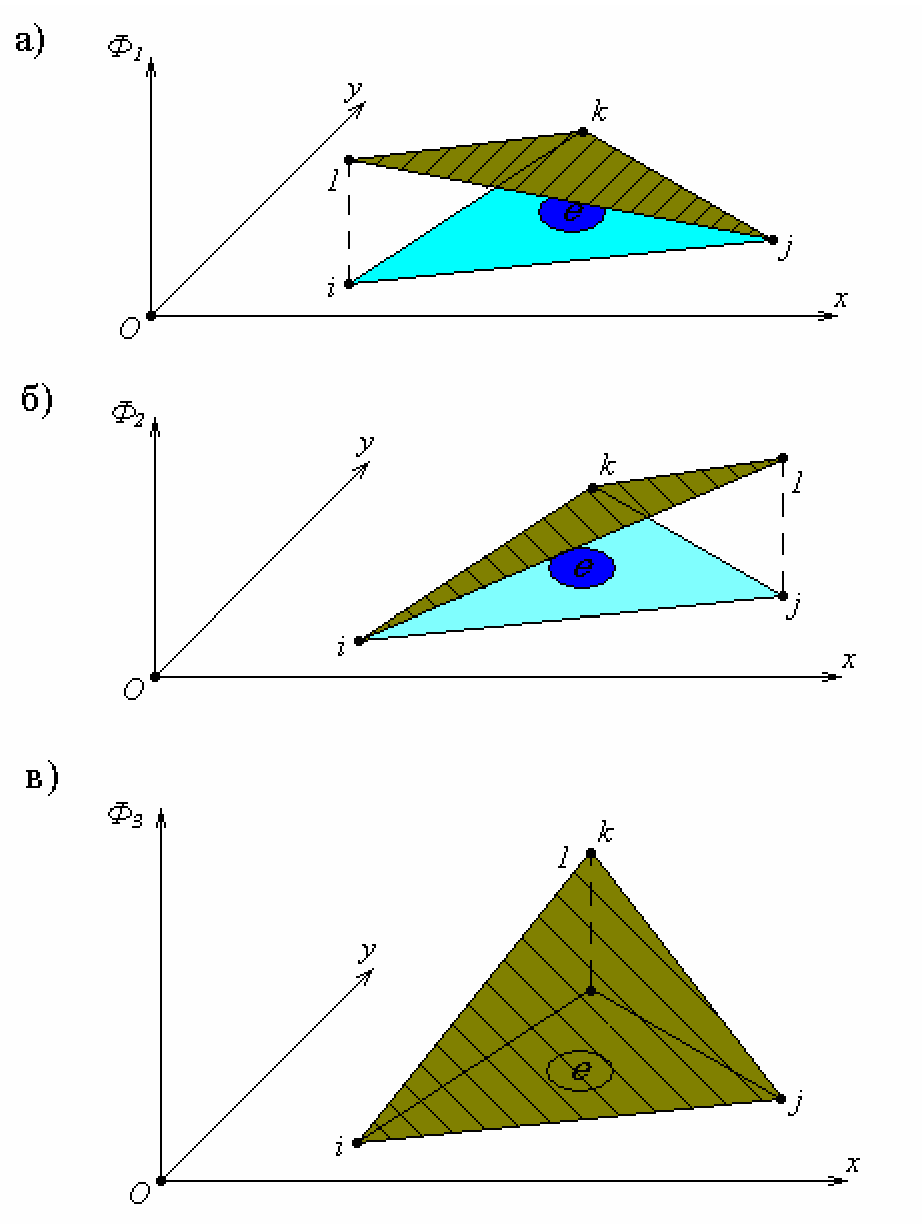


Рисунок 4.2 – Функции формы элемента

Подстановка выражения (4.18) в зависимость (4.16) даёт

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad (4.22)$$

или после преобразований

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \tag{4.23}$$

что аналогично в матричном виде

$$\varepsilon = Bu, \tag{4.24}$$

где B – матрица Коши

$$B = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

Таким образом, деформации внутри рассматриваемого элемента принимают постоянное значение.

Вычислим внутреннюю энергию деформации элемента

$$U = \iiint\limits_{\Omega} U_{уд}\, d\Omega, \tag{4.26}$$

где Ω - объём элемента;

$U_{уд}$ – удельная энергия деформации (отнесённая к единице объёма), равная

$$U_{уд} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) = \frac{1}{2}\sigma^T \varepsilon. \tag{4.27}$$

Величина $U_{уд}$ внутри данного элемента принимает постоянное значение. При постоянной толщине элемента h получим

$$U = U_{уд} \cdot h\Delta = \frac{h\Delta}{2}\sigma^T \varepsilon. \tag{4.28}$$

Работа внешних сил по соответствующим узловым перемещениям составляет

$$V = (F_{xi}h)\cdot u_i + (F_{yi}h)\cdot v_i + (F_{xj}h)\cdot u_j + (F_{yj}h)\cdot v_j + (F_{xk}h)\cdot u_k + (F_{yk}h)\cdot v_k = hu^T F, \quad (4.29)$$

где $F_i \cdot h$, $F_j \cdot h$, $F_k \cdot h$ – узловые силы, приходящиеся на всю толщину элемента;

F – вектор-столбец узловых сил

$$F = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{Bmatrix}. \quad (4.30)$$

В рамках линейной теории упругости внутренняя энергия деформации равна половине работы внешних сил по соответствующим перемещениям (теорема Клайперона)

$$U = \frac{1}{2}V, \quad (4.31)$$

то с учётом выражений (4.28) и (4.29) получим:

$$\frac{h\Delta}{2}\sigma^T \varepsilon = \frac{h}{2}u^T F, \quad (4.32)$$

$$\sigma^T \varepsilon \cdot \Delta = u^T F. \quad (4.33)$$

Подстановка в последнее уравнение выражения (4.15) даёт

$$(A\varepsilon)^T \varepsilon \cdot \Delta = u^T F, \quad (4.34)$$

что эквивалентно (также с учётом симметричности матрицы A)

$$\varepsilon^T A\varepsilon \cdot \Delta = u^T F. \quad (4.35)$$

Учтём соотношение (4.24)

$$(Bu)^T A(Bu) \cdot \Delta = u^T F, \quad (4.36)$$

что равносильно

$$u^T (B^T AB) u \cdot \Delta = u^T F, \quad (4.37)$$

$$(B^T AB\Delta) u = F, \quad (4.38)$$

или кратко

$$Ku = F, \quad (4.39)$$

где K – матрица жёсткости элемента

$$K = B^T AB\Delta. \tag{4.40}$$

4.1.2 Треугольный шестиузловой элемент

Ранее рассмотренный трехузловой элемент является линейным, поскольку на нём линейно аппроксимируется рассматриваемая физическая величина (в данном случае смещение). Для уменьшения погрешности вычислений необходимо увеличить количество линейных элементов. Избежать этого позволяет введение элементов с квадратичной или кубической аппроксимацией, то есть увеличение количества узлов каждого элемента.

Рассмотрим шестиузловой элемент (рисунок 4.3) с тремя узлами по углам и тремя узлами посередине сторон.

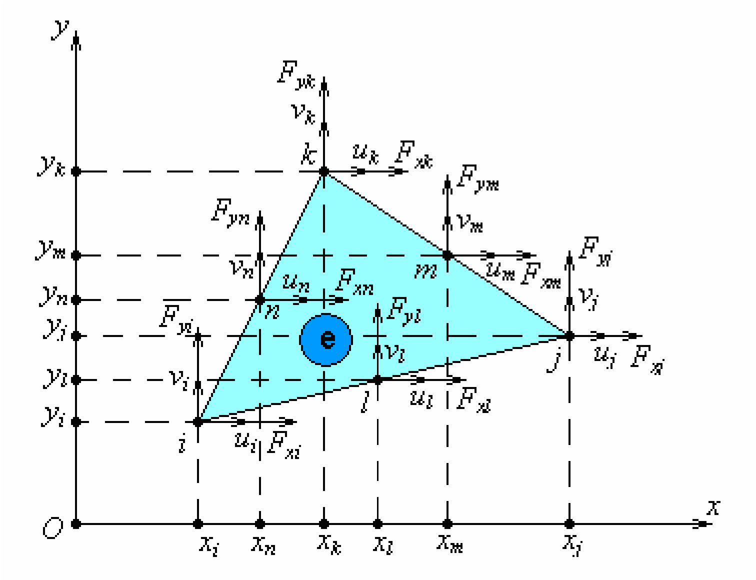


Рисунок 4.3 – Треугольный шестиузловой элемент

Поле смещений на конечном элементе можно аппроксимировать полным квадратичным полиномом:

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2; \tag{4.41}$$

$$v(x,y)=\beta_1+\beta_2 x+\beta_3 y+\beta_4 x^2+\beta_5 xy+\beta_6 y^2. \qquad (4.42)$$

Неизвестные параметры α_1, α_2, …,α_6 и β_1, β_2, …,β_6 найдём из условий:

$$\begin{cases} u(x_i,y_i)=u_i; \\ u(x_j,y_j)=u_j; \\ \quad \dots \\ u(x_n,y_n)=u_n; \end{cases} \qquad (4.43)$$

$$\begin{cases} v(x_i,y_i)=v_i; \\ v(x_j,y_j)=v_j; \\ \quad \dots \\ v(x_n,y_n)=v_n, \end{cases} \qquad (4.44)$$

или с учётом выражений (4.41) и (4.42):

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 x_i+\alpha_3 y_i+\alpha_4 x_i^2+\alpha_5 x_i y_i+\alpha_6 y_i^2=u_i; \\ \alpha_1+\alpha_2 x_j+\alpha_3 y_j+\alpha_4 x_j^2+\alpha_5 x_j y_j+\alpha_6 y_j^2=u_i; \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1+\alpha_2 x_n+\alpha_3 y_n+\alpha_4 x_n^2+\alpha_5 x_n y_n+\alpha_6 y_n^2=u_n; \end{cases} \qquad (4.45)$$

$$\begin{cases} \beta_1+\beta_2 x_i+\beta_3 y_i+\beta_4 x_i^2+\beta_5 x_i y_i+\beta_6 y_i^2=v_i; \\ \beta_1+\beta_2 x_j+\beta_3 y_j+\beta_4 x_j^2+\beta_5 x_j y_j+\beta_6 y_j^2=v_i; \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_1+\beta_2 x_n+\beta_3 y_n+\beta_4 x_n^2+\beta_5 x_n y_n+\beta_6 y_n^2=v_n, \end{cases} \qquad (4.46)$$

что аналогично в матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix}; \qquad (4.47)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \dots \\ v_n \end{Bmatrix}. \qquad (4.48)$$

Определяя из уравнений (4.47), (4.48) неизвестные параметры α_1, α_2, …,α_6 и β_1, β_2, …,β_6 и внося их в выражения (4.41), (4.42), получим:

$$\begin{aligned} u(x,y) = &\left(a_i + b_i x + c_i y + p_i x^2 + q_i xy + r_i y^2\right)u_i + \\ &+\left(a_j + b_j x + c_j y + p_j x^2 + q_j xy + r_j y^2\right)u_j + \ldots \\ &..+\left(a_n + b_n x + c_n y + p_n x^2 + q_n xy + r_n y^2\right)u_n; \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) = &\left(a_i + b_i x + c_i y + p_i x^2 + q_i xy + r_i y^2\right)v_i + \\ &+\left(a_j + b_j x + c_j y + p_j x^2 + q_j xy + r_j y^2\right)v_j + \ldots \\ &\ldots+\left(a_n + b_n x + c_n y + p_n x^2 + q_n xy + r_n y^2\right)v_n, \end{aligned} \tag{4.50}$$

или в матричной форме записи

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 & \Phi_5 & 0 & \Phi_6 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 & \Phi_5 & 0 & \Phi_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ \ldots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}, \tag{4.51}$$

где Φ_1, Φ_2, …,Φ_6 – функции формы элемента (рисунок 4.4)

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y) = M_{1,1} + M_{2,1}x + M_{3,1}y + M_{4,1}x^2 + M_{5,1}xy + M_{6,1}y^2; \\ \Phi_2(x,y) = M_{1,2} + M_{2,2}x + M_{3,2}y + M_{4,2}x^2 + M_{5,2}xy + M_{6,2}y^2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_6(x,y) = M_{1,6} + M_{2,6}x + M_{3,6}y + M_{4,6}x^2 + M_{5,6}xy + M_{6,6}y^2; \end{cases} \tag{4.52}$$

$M_{p,q}$ – элементы следующей матрицы ($p,q=1,2,\ldots,6$)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix}^{-1}. \tag{4.53}$$

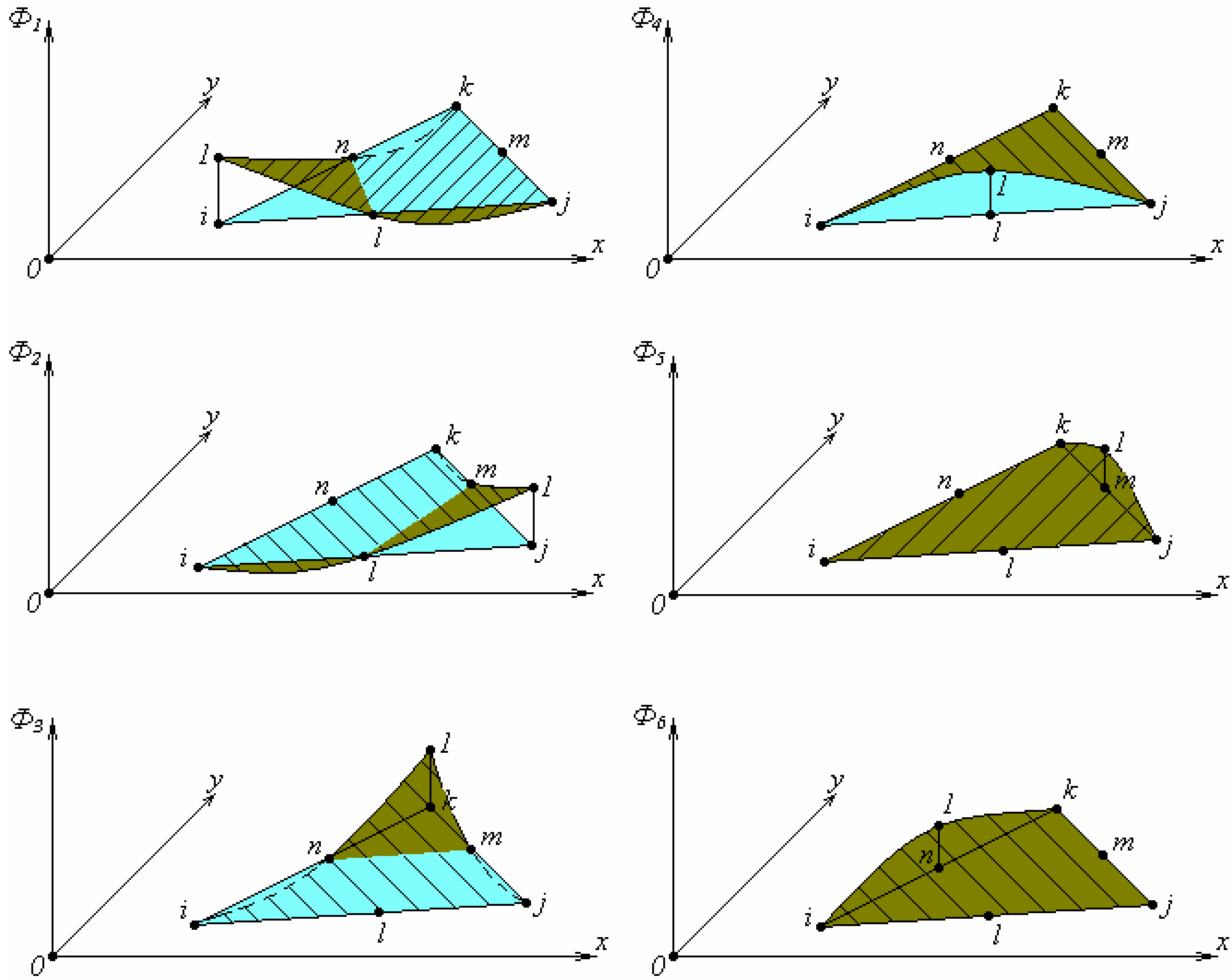


Рисунок 4.4 – Функции формы элемента

Матрица Коши принимает вид

$$B(x,y)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \dots & \Phi_6 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & \dots & 0 & \Phi_6 \end{bmatrix}. \qquad (4.54)$$

Заметим, что компоненты матрицы Коши являются функциями координат x, y. В данном случае деформации внутри шестиузлового треугольного элемента аппроксимируются линейной зависимостью.

Внутренняя энергия деформации элемента согласно формулы (4.26) с учётом выражений (4.27), (4.15) и (4.24) равна

$$U = \iiint\limits_{\Omega} U_{уд}\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{2} (A\varepsilon)^T \varepsilon\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T A\varepsilon\, d\Omega =$$
$$+ \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{2} (Bu)^T A(Bu) d\Omega = u^T \left(\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{2} B^T AB\, d\Omega \right) u = \frac{1}{2} h u^T \left(\iint\limits_{S} B^T AB\, dS \right) u, \qquad (4.55)$$

где интегрирование ведётся по площади элемента.

Работа внешних сил по соответствующим узловым перемещениям равна

$$V = h u^T F, \qquad (4.56)$$

где F – вектор узловых сил

$$F = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ \ldots \\ F_{xn} \\ F_{yn} \end{Bmatrix}. \qquad (4.57)$$

Выражение (4.31) принимает вид

$$\frac{1}{2} h u^T \left(\iint\limits_{S} B^T AB\, dS \right) u = \frac{1}{2} h u^T F, \qquad (4.58)$$

что равносильно

$$Ku = F, \qquad (4.59)$$

где K – матрица жёсткости элемента

$$K = \iint\limits_{S} B^T AB\, dS. \qquad (4.60)$$

4.2 Плоский четырёхугольный элемент

4.2.1 Четырёхугольный четырёхузловой элемент

Рассмотрим четырёхузловой элемент (рисунок 4.5). Поле смещений на нём можно аппроксимировать неполным квадратичным полиномом

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy; \tag{4.61}$$

$$v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy. \tag{4.62}$$

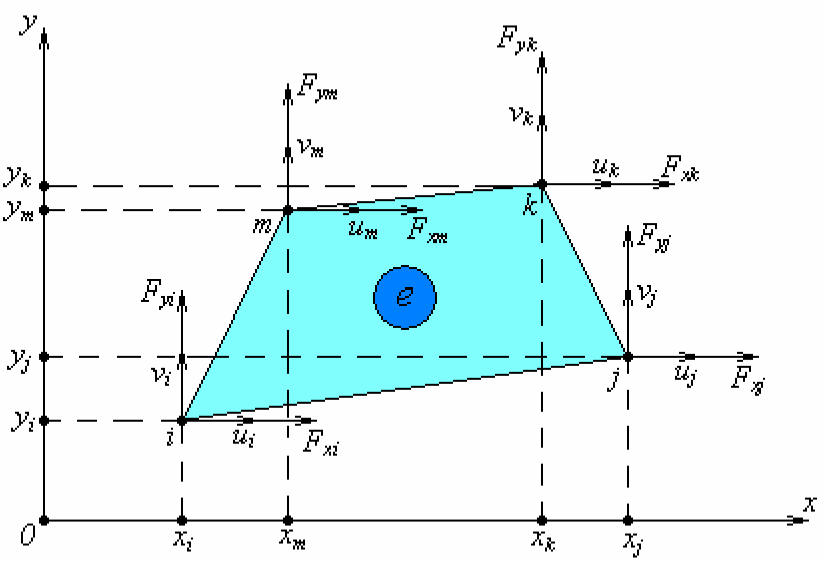


Рисунок 4.5 – Четырёхугольный четырёхузловой элемент

Неизвестные параметры α_1, α_2, α_3, α_4 и β_1, β_2, β_3, β_4 найдём из условий:

$$\begin{cases} u(x_i, y_i) = u_i; \\ u(x_j, y_j) = u_j; \\ u(x_k, y_k) = u_k; \\ u(x_m, y_m) = u_m; \end{cases} \tag{4.63}$$

$$\begin{cases} v(x_i, y_i) = v_i; \\ v(x_j, y_j) = v_j; \\ v(x_k, y_k) = v_k; \\ v(x_m, y_m) = v_m, \end{cases} \tag{4.64}$$

или с учётом выражений (4.61) и (4.62):

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i y_i = u_i; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 x_j y_j = u_i; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k + \alpha_4 x_k y_k = u_k; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_n + \alpha_3 y_n + \alpha_4 x_n y_n = u_m; \end{cases} \tag{4.65}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i + \beta_4 x_i y_i = v_i; \\ \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j + \beta_4 x_j y_j = v_i; \\ \beta_1 + \beta_2 x_k + \beta_3 y_k + \beta_4 x_k y_k = v_k; \\ \beta_1 + \beta_2 x_n + \beta_3 y_n + \beta_4 x_n y_n = v_m, \end{cases} \tag{4.66}$$

что аналогично в матричной форме записи

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_m & y_m & x_m y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \alpha_k \\ \alpha_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_m \end{Bmatrix}; \tag{4.67}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_m & y_m & x_m y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \\ \beta_k \\ \beta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \\ v_m \end{Bmatrix}. \tag{4.68}$$

Определяя из уравнений (4.67), (4.68) неизвестные параметры α_1, α_2, α_3, α_4 и β_1, β_2, β_3, β_4 и внося их в выражения (4.61), (4.62), получим:

$$\begin{aligned} u(x,y) = &\left(a_i + b_i x + c_i y + d_i xy\right)u_i + \left(a_j + b_j x + c_j y + d_j xy\right)u_j + \ldots \\ &\ldots + \left(a_k + b_k x + c_k y + d_k xy\right)u_k + \left(a_m + b_m x + c_m y + d_m xy\right)u_m; \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) = &\left(a_i + b_i x + c_i y + d_i xy\right)v_i + \left(a_j + b_j x + c_j y + d_j xy\right)v_j + \ldots \\ &\ldots + \left(a_k + b_k x + c_k y + d_k xy\right)v_k + \left(a_m + b_m x + c_m y + d_m xy\right)v_m, \end{aligned} \tag{4.70}$$

или в матричной форме записи:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}, \tag{4.71}$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3,Φ_4 – функции формы элемента (рисунок 4.6)

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y) = M_{1,1} + M_{2,1}x + M_{3,1}y + M_{4,1}xy; \\ \Phi_2(x,y) = M_{1,2} + M_{2,2}x + M_{3,2}y + M_{4,2}xy; \\ \Phi_3(x,y) = M_{1,3} + M_{2,3}x + M_{3,3}y + M_{4,3}xy; \\ \Phi_4(x,y) = M_{1,4} + M_{2,4}x + M_{3,4}y + M_{4,4}xy; \end{cases} \tag{4.72}$$

$M_{p,q}$ – элементы следующей матрицы ($p,q=1,2,3,4$)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_m & y_m & x_m y_m \end{bmatrix}^{-1}. \tag{4.73}$$

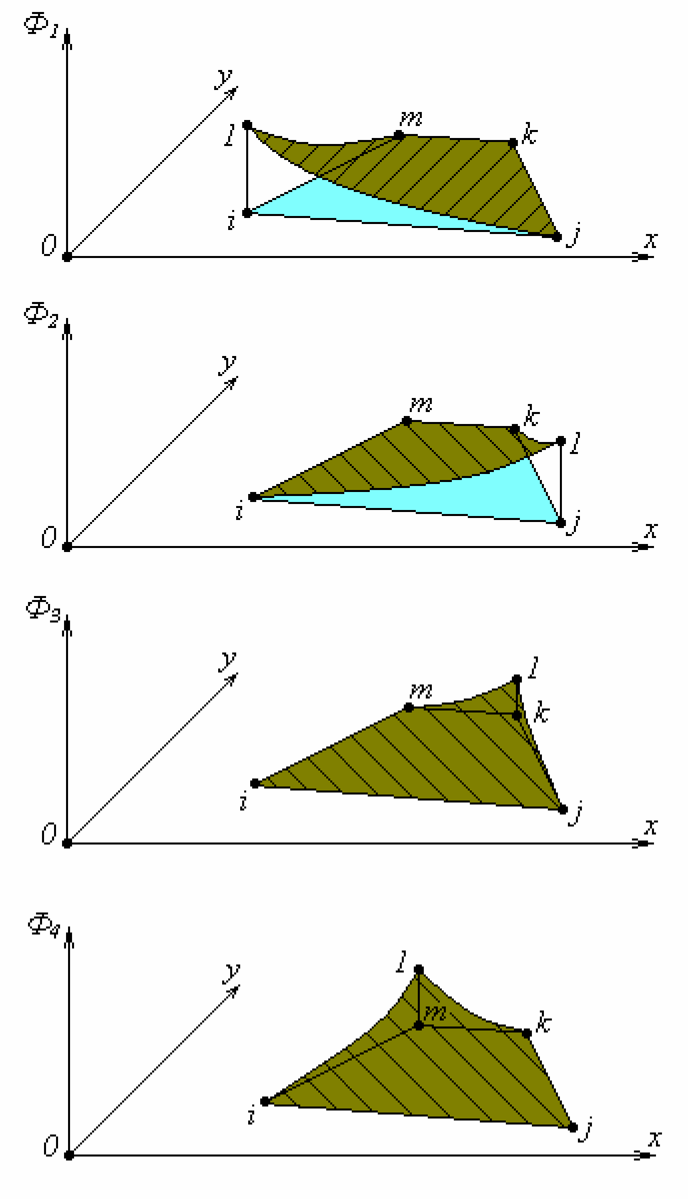


Рисунок 4.6 – Функции формы элемента

Матрица Коши принимает вид

$$B(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0\\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial\Phi_3}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial\Phi_4}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial\Phi_3}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial\Phi_4}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi_3}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi_3}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi_4}{\partial y} & \dfrac{\partial\Phi_4}{\partial x}\end{bmatrix}. \tag{4.74}$$

Внутренняя энергия деформации элемента толщиной h согласно формуле (4.55) равна

$$U=\frac{1}{2}hu^T\left(\iint_S B^T AB\,dS\right)u, \tag{4.75}$$

где интегрирование ведётся по площади элемента.

Работа внешних сил по соответствующим узловым перемещениям равна

$$V=hu^TF, \tag{4.76}$$

где F – вектор узловых сил

$$F=\begin{Bmatrix}F_{xi}\\ F_{yi}\\ F_{xj}\\ F_{yj}\\ F_{xk}\\ F_{yk}\\ F_{xm}\\ F_{ym}\end{Bmatrix}. \tag{4.77}$$

Выражение (4.31) принимает вид

$$\frac{1}{2}hu^T\left(\iint_S B^T AB\,dS\right)u=\frac{1}{2}hu^TF, \tag{4.78}$$

что равносильно

$$Ku = F, \tag{4.79}$$

где K – матрица жёсткости элемента

$$K = \iint_S B^T A B \, dS. \tag{4.80}$$

4.2.2 Четырёхугольный восьмиузловой элемент

Рассмотрим восьмиузловой элемент (рисунок 4.7) с четырьмя узлами по углам и четырьмя узлами посередине сторон. Поле смещений на нём можно аппроксимировать неполным кубическим полиномом

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 y^3; \tag{4.81}$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 y^3. \tag{4.82}$$

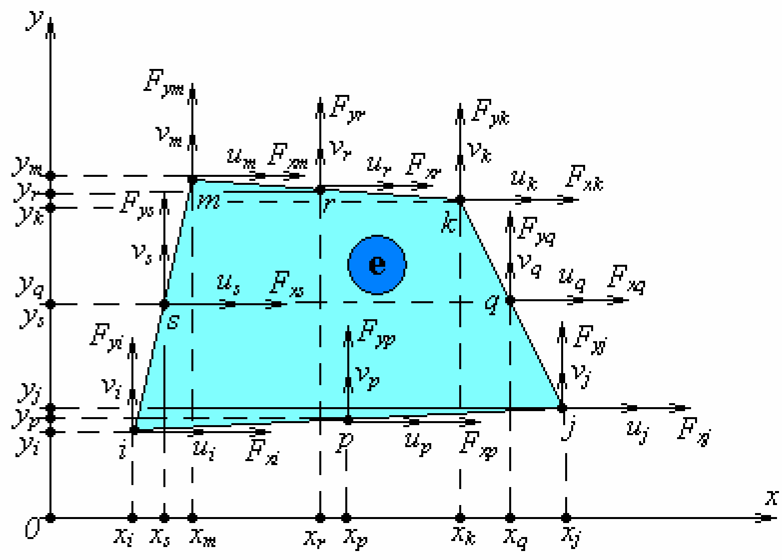


Рисунок 4.7 – Четырёхугольный восьмиузловой элемент

Неизвестные параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_8$ найдём из условий:

$$\begin{cases} u(x_i, y_i) = u_i; \\ u(x_j, y_j) = u_j; \\ \qquad \ldots \\ u(x_s, y_s) = u_s; \end{cases} \tag{4.83}$$

$$\begin{cases} v(x_i, y_i) = v_i; \\ v(x_j, y_j) = v_j; \\ \qquad \ldots \\ v(x_s, y_s) = v_s, \end{cases} \tag{4.84}$$

или с учётом выражений (4.81) и (4.82):

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 x_i y_i + \alpha_6 y_i^2 + \alpha_7 x_i^3 + \alpha_8 y_i^3; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 x_j^2 + \alpha_5 x_j y_j + \alpha_6 y_j^2 + \alpha_7 x_j^3 + \alpha_8 y_j^3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_s + \alpha_3 y_s + \alpha_4 x_s^2 + \alpha_5 x_s y_s + \alpha_6 y_s^2 + \alpha_7 x_s^3 + \alpha_8 y_s^3; \end{cases} \tag{4.85}$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i + \beta_4 x_i^2 + \beta_5 x_i y_i + \beta_6 y_i^2 + \beta_7 x_i^3 + \beta_8 y_i^3; \\ \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j + \beta_4 x_j^2 + \beta_5 x_j y_j + \beta_6 y_j^2 + \beta_7 x_j^3 + \beta_8 y_j^3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1 + \beta_2 x_s + \beta_3 y_s + \beta_4 x_s^2 + \beta_5 x_s y_s + \beta_6 y_s^2 + \beta_7 x_s^3 + \beta_8 y_s^3, \end{cases} \tag{4.86}$$

что аналогично в матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & y_i^3 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 & x_j^3 & y_j^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_s & y_s & x_s^2 & x_s y_s & y_s^2 & x_s^3 & y_s^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \ldots \\ u_s \end{Bmatrix}; \tag{4.87}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & y_i^3 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 & x_j^3 & y_j^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_s & y_s & x_s^2 & x_s y_s & y_s^2 & x_s^3 & y_s^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \ldots \\ v_s \end{Bmatrix}. \tag{4.88}$$

Определяя из последних двух матричных уравнений неизвестные параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_8$ и внося их в выражения (4.81) и (4.82), получим:

$$\begin{aligned} u(x,y) = & \left(a_i + b_i x + c_i y + d_i x^2 + f_i xy + g_i y^2 + h_i x^3 + t_i y^3\right) u_i + \\ & + \left(a_j + b_j x + c_j y + d_j x^2 + f_j xy + g_j y^2 + h_j x^3 + t_j y^3\right) u_j + \ldots \\ & .. + \left(a_s + b_s x + c_s y + d_s x^2 + f_s xy + g_s y^2 + h_s x^3 + t_s y^3\right) u_s; \end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) = & \left(a_i + b_i x + c_i y + d_i x^2 + f_i xy + g_i y^2 + h_i x^3 + t_i y^3\right) v_i + \\ & + \left(a_j + b_j x + c_j y + d_j x^2 + f_j xy + g_j y^2 + h_j x^3 + t_j y^3\right) v_j + \ldots \\ & .. + \left(a_s + b_s x + c_s y + d_s x^2 + f_s xy + g_s y^2 + h_s x^3 + t_s y^3\right) v_s, \end{aligned} \tag{4.90}$$

или в матричной форме записи

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \ldots & \Phi_8 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & \ldots & 0 & \Phi_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ \ldots \\ u_s \\ v_s \end{Bmatrix}, \tag{4.91}$$

где Φ_1, Φ_2, …, Φ_8 – функции формы элемента (рисунок 4.8):

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y) = M_{11} + M_{21}x + M_{31}y + M_{41}x^2 + M_{51}xy + M_{61}y^2 + M_{71}x^3 + M_{81}y^3; \\ \Phi_2(x,y) = M_{12} + M_{22}x + M_{32}y + M_{42}x^2 + M_{52}xy + M_{62}y^2 + M_{72}x^3 + M_{82}y^3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_8(x,y) = M_{18} + M_{28}x + M_{38}y + M_{48}x^2 + M_{58}xy + M_{68}y^2 + M_{78}x^3 + M_{88}y^3. \end{cases} \tag{4.92}$$

Здесь $M_{\xi\eta}$ – элементы следующей матрицы

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & y_i^3 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 & x_j^3 & y_j^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_s & y_s & x_s^2 & x_s y_s & y_s^2 & x_s^3 & y_s^3 \end{bmatrix}^{-1}. \tag{4.93}$$

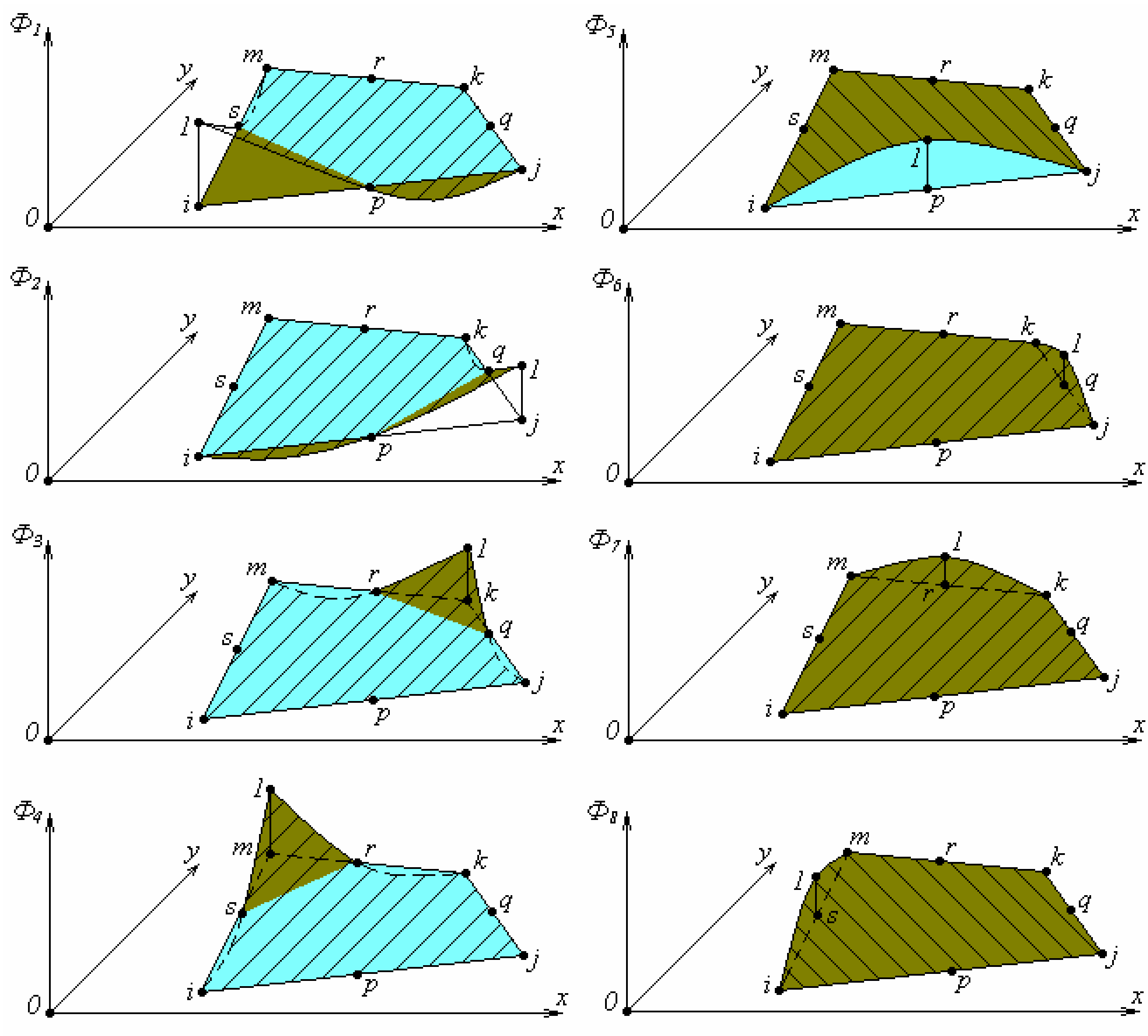


Рисунок 4.8 – Функции формы элемента

Матрица Коши принимает вид

$$B(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Phi_1 & 0 & \dots & \Phi_8 & 0\\ 0 & \Phi_1 & \dots & 0 & \Phi_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \Phi_8}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \Phi_8}{\partial y}\\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \Phi_8}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_8}{\partial x}\end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

Внутренняя энергия деформации элемента толщиной h согласно формуле (4.55)

$$U = \frac{1}{2} h u^T \left(\iint_S B^T A B \, dS \right) u, \tag{4.95}$$

где интегрирование ведётся по площади элемента.

Работа внешних сил по соответствующим узловым перемещениям составляет

$$V = h u^T F, \tag{4.96}$$

где F – вектор узловых сил

$$F = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ \ldots \\ F_{x8} \\ F_{y8} \end{Bmatrix}. \tag{4.97}$$

Выражение (4.31) принимает вид

$$\frac{1}{2} h u^T \left(\iint_S B^T A B \, dS \right) u = \frac{1}{2} h u^T F, \tag{4.98}$$

что равносильно

$$K u = F, \tag{4.99}$$

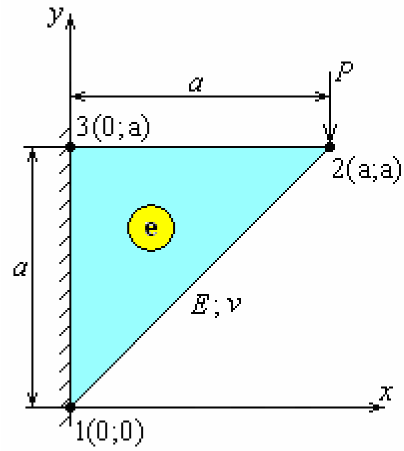
где K – матрица жёсткости элемента

$$K = \iint_S B^T A B \, dS. \tag{4.100}$$

ПРИМЕРЫ

Пример 4.1

Определить напряжения в треугольной пластине от заданной нагрузки P.



Решение

Рассмотрим пластину как один треугольный элемент **e**. Площадь элемента:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \frac{a^2}{2}.$$

Параметры функций форм:

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2;$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{vmatrix} = 0;$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a;$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a;$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a;$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a.$$

Матрица Коши

$$B = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\cdot\frac{a^2}{2}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & a \\ -a & 0 & 0 & a & a & -a \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрица закона Гука

$$A = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица жёсткости элемента

$$K = \Delta\cdot B^T A^T B = \frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & -(1-\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu \\ 0 & 2 & -2\nu & 0 & 2\nu & -2 \\ 0 & -2\nu & 2 & 0 & -2 & 2\nu \\ -(1-\nu) & 0 & 0 & 1-\nu & 1-\nu & -(1-\nu) \\ -(1-\nu) & 2\nu & -2 & 1-\nu & 3-\nu & -(1+\nu) \\ 1-\nu & -2 & 2\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 3-\nu \end{bmatrix}.$$

Кинематические граничные условия:

$u_1 = 0$; $v_1 = 0$; $u_3 = 0$; $v_3 = 0$.

Силовые граничные условия:

$F_{x2} = 0$; $F_{y2} = -P$.

Разрешающее матричное уравнение с учётом граничных условий

$$\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} \quad u_1 & \quad v_1 & \quad u_2 & \quad v_2 & \quad u_3 & \quad v_3 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
1-\nu & 0 & 0 & -(1-\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu \\
0 & 2 & -2\nu & 0 & 2\nu & -2 \\
0 & -2\nu & 2 & 0 & -2 & 2\nu \\
-(1-\nu) & 0 & 0 & 1-\nu & 1-\nu & -(1-\nu) \\
-(1-\nu) & 2\nu & -2 & 1-\nu & 3-\nu & -(1+\nu) \\
1-\nu & -2 & 2\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 3-\nu
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 0 \\ -P \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для определения неизвестных смещений

$$\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1-\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} u_2 = 0; \\ v_2 = -4(1+\nu)\dfrac{P}{E}. \end{cases}$$

При ν = 0,3 получим

$$\begin{cases} u_2 = 0; \\ v_2 = -5{,}2\dfrac{P}{E}. \end{cases}$$

Уравнения для определения неизвестных реакций

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} 0 & -(1-\nu) \\ -2\nu & 0 \\ -2 & 1-\nu \\ 2\nu & -(1-\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -4(1+\nu)\dfrac{P}{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ -P \\ P \end{Bmatrix}.$$

Проверка условий равновесия

$$\begin{cases} F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} = P = 0 - P = 0; \\ F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} = 0 - P + P = 0; \\ \sum m_3\left(\vec{F}_k\right) = F_{x1}\cdot a - P\cdot a = P\cdot a - P\cdot a = 0. \end{cases}$$

Деформации элемента

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix}0&0&1&0&-1&0\\0&-1&0&0&0&1\\-1&0&0&1&1&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\-4(1+\nu)\dfrac{P}{E}\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4(1+\nu)\dfrac{P}{E\,a}\\0\\-4(1+\nu)\dfrac{P}{E\,a}\end{Bmatrix}.$$

При $\nu = 0{,}3$

$$\begin{cases}\varepsilon_x=5{,}2\dfrac{P}{E\,a};\\ \varepsilon_y=0;\\ \gamma_{xy}=-5{,}2\dfrac{P}{E\,a}.\end{cases}$$

Напряжения в элементе

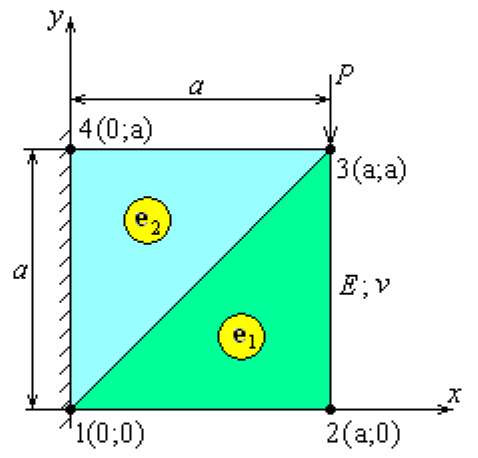
$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\0&0&\dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}4(1+\nu)\dfrac{P}{E\,a}\\0\\-4(1+\nu)\dfrac{P}{E\,a}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{4P}{(1-\nu)a}\\ \dfrac{4P}{(1-\nu)a}\\ -\dfrac{2P}{a}\end{Bmatrix}.$$

При $\nu = 0{,}3$

$$\begin{cases}\sigma_x=5{,}714\dfrac{P}{a};\\ \sigma_y=5{,}714\dfrac{P}{a};\\ \tau_{xy}=-2\dfrac{P}{a}.\end{cases}$$

Пример 4.2

Определить напряжения в квадратной пластине от заданной нагрузки *P*.



Решение

Разобьём пластину двумя треугольными элементами $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$.

Площади элементов:

$$\Delta_{e1} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = \frac{a^2}{2};$$

$$\Delta_{e2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = \frac{a^2}{2}.$$

Параметры функций форм элемента $\mathbf{e_1}$:

$a_1^{e1} = a^2$; $a_2^{e1} = 0$; $a_3^{e1} = 0$;

$b_1^{e1} = -a$; $b_2^{e1} = a$; $b_3^{e1} = 0$;

$c_1^{e1} = 0$; $b_2^{e1} = -a$; $b_3^{e1} = a$.

Параметры функций форм элемента $\mathbf{e_2}$:

$a_1^{e2} = a^2$; $a_2^{e2} = 0$; $a_3^{e2} = 0$;

$b_1^{e2} = 0$; $b_2^{e2} = a$; $b_3^{e2} = -a$;

$c_1^{e2} = -a$; $b_2^{e2} = 0$; $b_3^{e2} = a$.

Матрица Коши элемента e_1:

$$B_{e1}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Матрица Коши элемента e_2:

$$B_{e2}=\frac{1}{a}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Матрица закона Гука для обоих элементов

$$A=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}.$$

Матрица жёсткости элемента **e₁**:

$$K_{e1}=\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}2 & 0 & -2 & 2\nu & 0 & -2\nu\\ 0 & 1-\nu & 1-\nu & -(1-\nu) & -(1-\nu) & 0\\ -2 & 1-\nu & 3-\nu & -(1+\nu) & -(1-\nu) & 2\nu\\ 2\nu & -(1-\nu) & 1(1+\nu) & 3-\nu & 1-\nu & -2\\ 0 & -(1-\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu & 1-\nu & 0\\ -2\nu & 0 & 2\nu & -2 & 0 & 2\end{bmatrix}\end{array}.$$

Матрица жёсткости элемента **e₂**:

$$K_{e2}=\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}1-\nu & 0 & 0 & -(1-\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu\\ 0 & 2 & -2\nu & 0 & 2\nu & -2\\ 0 & -2\nu & 2 & 0 & -2 & 2\nu\\ -(1-\nu) & 0 & 0 & 1-\nu & 1-\nu & -(1-\nu)\\ -(1-\nu) & 2\nu & -2 & 1-\nu & 3-\nu & -(1+\nu)\\ 1-\nu & -2 & 2\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 3-\nu\end{bmatrix}\end{array}.$$

Матрица жёсткости системы

$$K=\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 3-\nu & 0 & -2 & 2\nu & 0 & -(1+\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu \\ 0 & 3-\nu & 1-\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 0 & 2\nu & -2 \\ -2 & 1-\nu & 3-\nu & -(1+\nu) & -(1-\nu) & 2\nu & 0 & 0 \\ 2\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 3-\nu & 1-\nu & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu & 3-\nu & 0 & -2 & 2\nu \\ -(1+\nu) & 0 & 2\nu & -2 & 0 & 3-\nu & 1-\nu & -(1-\nu) \\ -(1-\nu) & 2\nu & 0 & 0 & -2 & 1-\nu & 3-\nu & -(1+\nu) \\ 1-\nu & -2 & 0 & 0 & 2\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 3-\nu \end{bmatrix}\end{array}.$$

Кинематические граничные условия:

$u_1=0$; $v_1=0$; $u_4=0$; $v_4=0$.

Силовые граничные условия:

$F_{x2}=0$; $F_{y2}=0$; $F_{x3}=0$; $F_{y4}=-P$.

Разрешающее уравнение с учётом граничных условий

$$\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 3-\nu & 0 & -2 & 2\nu & 0 & -(1+\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu \\ 0 & 3-\nu & 1-\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 0 & 2\nu & -2 \\ -2 & 1-\nu & 3-\nu & -(1+\nu) & -(1-\nu) & 2\nu & 0 & 0 \\ 2\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 3-\nu & 1-\nu & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu & 3-\nu & 0 & -2 & 2\nu \\ -(1+\nu) & 0 & 2\nu & -2 & 0 & 3-\nu & 1-\nu & -(1-\nu) \\ -(1-\nu) & 2\nu & 0 & 0 & -2 & 1-\nu & 3-\nu & -(1+\nu) \\ 1-\nu & -2 & 0 & 0 & 2\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 3-\nu \end{bmatrix}\end{array}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix}.$$

Уравнение для нахождения неизвестных смещений

$$\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} 3-\nu & -(1+\nu) & -(1-\nu) & 2\nu \\ -(1+\nu) & 3-\nu & 1-\nu & -2 \\ -(1-\nu) & 1-\nu & 3-\nu & 0 \\ 2\nu & -2 & 0 & 3-\nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix},$$

откуда находим

$$
\begin{cases}
u_2 = -\dfrac{4\left(1-\nu^2\right)}{7+2\nu-\nu^2}\dfrac{P}{E};\\
v_2 = -\dfrac{4(1+\nu)\left(4+\nu-\nu^2\right)}{7+2\nu-\nu^2}\dfrac{P}{E};\\
u_3 = \dfrac{4\left(1-\nu^2\right)(1+\nu)}{7+2\nu-\nu^2}\dfrac{P}{E};\\
v_3 = -\dfrac{4(1+\nu)\left(5-\nu^2\right)}{7+2\nu-\nu^2}\dfrac{P}{E}.
\end{cases}
$$

При $\nu = 0{,}3$ получим

$$
\begin{cases}
u_2 = -0{,}46\dfrac{P}{E};\\
v_2 = -2{,}92\dfrac{P}{E};\\
u_3 = 0{,}63\dfrac{P}{E};\\
v_3 = -3{,}14\dfrac{P}{E}.
\end{cases}
$$

Уравнение для определения неизвестных реакций

$$
\begin{Bmatrix} F_{x1}\\ F_{y1}\\ F_{x4}\\ F_{y4} \end{Bmatrix} = \frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} -2 & 2\nu & 0 & -(1+\nu)\\ 1-\nu & -(1-\nu) & -(1+\nu) & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1-\nu\\ 0 & 0 & 2\nu & -(1-\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P\\ \dfrac{2\left(1-\nu^2\right)}{7+2\nu-\nu^2}P\\ -P\\ \dfrac{5+2\nu+\nu^2}{7+2\nu-\nu^2}P \end{Bmatrix}.
$$

При $\nu = 0{,}3$ получим

$$
\begin{cases}
F_{x1} = P;\\
F_{y1} = 0{,}24P;\\
F_{x4} = -P;\\
F_{y4} = 0{,}76P.
\end{cases}
$$

Полученный результат удовлетворяет уравнениям равновесия.

Деформации элемента e_1:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{e1} \\ \varepsilon_y^{e1} \\ \gamma_{xy}^{e1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{4\left(1-\nu^2\right)}{7+2\nu-\nu^2}\dfrac{P}{E\,a} \\ -\dfrac{4\left(1-\nu^2\right)}{7+2\nu-\nu^2}\dfrac{P}{E\,a} \\ -\dfrac{8\left(1+\nu\right)^2}{7+2\nu-\nu^2}\dfrac{P}{E\,a} \end{Bmatrix}.$$

При $\nu = 0{,}3$ получим

$$\begin{cases} \varepsilon_x^{e1} = -0{,}49\dfrac{P}{E\,a}; \\ \varepsilon_x^{e1} = -0{,}49\dfrac{P}{E\,a}; \\ \gamma_{xy}^{e1} = -1{,}8\dfrac{P}{E\,a}. \end{cases}$$

Деформации элемента e_2:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{e2} \\ \varepsilon_y^{e2} \\ \gamma_{xy}^{e2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{4\left(1-\nu^2\right)\left(1+\nu\right)}{7+2\nu-\nu^2}\dfrac{P}{E\,a} \\ 0 \\ -\dfrac{4\left(5-\nu^2\right)\left(1+\nu\right)}{7+2\nu-\nu^2}\dfrac{P}{E\,a} \end{Bmatrix}.$$

При $\nu = 0{,}3$ получим

$$\begin{cases} \varepsilon_x^{e2} = 0{,}63\dfrac{P}{E\,a}; \\ \varepsilon_x^{e2} = 0; \\ \gamma_{xy}^{e2} = -3{,}4\dfrac{P}{E\,a}. \end{cases}$$

Напряжения в элементе e_1:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{e1} \\ \sigma_y^{e1} \\ \tau_{xy}^{e1} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{e1} \\ \varepsilon_y^{e1} \\ \gamma_{xy}^{e1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4(1+\nu)}{7+2\nu-\nu^2}\frac{P}{a} \\ \frac{4(1+\nu)}{7+2\nu-\nu^2}\frac{P}{a} \\ \frac{4(1+\nu)}{7+2\nu-\nu^2}\frac{P}{a} \end{Bmatrix}.$$

При $\nu = 0{,}3$ получим

$$\begin{cases} \sigma_x^{e1} = 0{,}69\dfrac{P}{a}; \\ \sigma_x^{e1} = 0{,}69\dfrac{P}{a}; \\ \tau_{xy}^{e1} = 0{,}69\dfrac{P}{a}. \end{cases}$$

Напряжения в элементе e_2:

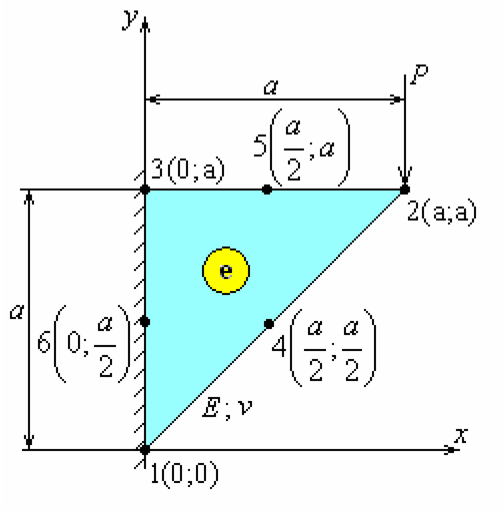
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{e2} \\ \sigma_y^{e2} \\ \tau_{xy}^{e2} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{e2} \\ \varepsilon_y^{e2} \\ \gamma_{xy}^{e2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4(1+\nu)}{7+2\nu-\nu^2}\frac{P}{a} \\ \frac{4(1+\nu)}{7+2\nu-\nu^2}\frac{P}{a} \\ -\frac{2\nu(5-\nu^2)}{7+2\nu-\nu^2}\frac{P}{a} \end{Bmatrix}.$$

При $\nu = 0{,}3$ получим

$$\begin{cases} \sigma_x^{e2} = 0{,}69\dfrac{P}{a}; \\ \sigma_x^{e2} = 0{,}21\dfrac{P}{a}; \\ \tau_{xy}^{e2} = -1{,}31\dfrac{P}{a}. \end{cases}$$

Пример 4.3

Определить напряжения в треугольной пластине от заданной нагрузки *P*.



Решение

Матрица *M* имеет вид

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a & a^2 & a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 \\ 1 & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a^2}{4} & \frac{a^2}{4} & \frac{a^2}{4} \\ 1 & \frac{a}{2} & a & \frac{a^2}{4} & \frac{a^2}{2} & a^2 \\ 1 & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 & \frac{a^2}{4} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{4}{a} & 0 & -\frac{4}{a} \\ -\frac{3}{a} & 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{4}{a} \\ 0 & \frac{2}{a^2} & \frac{2}{a^2} & 0 & -\frac{4}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{a^2} & -\frac{4}{a^2} & \frac{4}{a^2} & \frac{4}{a^2} \\ \frac{2}{a^2} & 0 & \frac{2}{a^2} & 0 & 0 & -\frac{4}{a^2} \end{bmatrix}.$$

Функции формы элемента:

$$\Phi_1(x,y)=1-\frac{3}{a}y+\frac{2}{a^2}y^2;$$

$$\Phi_2(x,y)=-\frac{1}{a}x+\frac{2}{a^2}x^2;$$

$$\Phi_3(x,y)=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}y+\frac{2}{a^2}x^2-\frac{4}{a^2}xy+\frac{2}{a^2}y^2;$$

$$\Phi_4(x,y)=\frac{4}{a}x-\frac{4}{a^2}xy;$$

$$\Phi_5(x,y) = -\frac{4}{a^2}x^2 + \frac{4}{a^2}xy;$$

$$\Phi_6(x,y) = -\frac{4}{a}x + \frac{4}{a}y + \frac{4}{a^2}xy - \frac{4}{a^2}y^2.$$

Матрица Коши принимает вид

$$B(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{a}+\frac{4}{a^2}y \\ 0 & -\frac{3}{a}+\frac{4}{a^2}y & 0 \\ -\frac{1}{a}+\frac{4}{a^2}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a}+\frac{4}{a^2}x \\ \frac{1}{a}+\frac{4}{a^2}x-\frac{4}{a^2}y & 0 & -\frac{1}{a}-\frac{4}{a^2}x+\frac{4}{a^2}y \\ 0 & -\frac{1}{a}-\frac{4}{a^2}x+\frac{4}{a^2}y & \frac{1}{a}+\frac{4}{a^2}x-\frac{4}{a^2}y \\ \frac{4}{a}-\frac{4}{a^2}y & 0 & -\frac{4}{a^2}x \\ 0 & -\frac{4}{a^2}x & \frac{4}{a}-\frac{4}{a^2}y \\ -\frac{8}{a^2}x+\frac{4}{a^2}y & 0 & \frac{4}{a^2}x \\ 0 & \frac{4}{a^2}x & -\frac{8}{a^2}x+\frac{4}{a^2}y \\ -\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}y & 0 & \frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}x-\frac{8}{a^2}y \\ 0 & \frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}x-\frac{8}{a^2}y & -\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}y \end{bmatrix}^T.$$

Компоненты подынтегральной матрицы $k = B^T AB$:

$$k_{1,1} = \frac{1}{2}(3a-4y)^2\frac{E}{(1+\nu)a^4};$$

$$k_{1,2} = 0;$$

$$k_{1,3} = 0;$$

$$k_{1,4} = \frac{1}{2}(a-4x)\frac{3a-4y}{(1+\nu)a^4};$$

…

$$k_{12,11}=\frac{8(y-a)}{1-\nu}\cdot\frac{(a+x-2y)E}{a^4};$$

$$k_{12,12}=-8E\cdot\frac{\nu(a-4)^2-3a^2+(10y-4x)a+8xy-9y^2-2x^2}{(1-\nu^2)a^4}.$$

Матрица жёсткости системы

$$K=\frac{E}{12(1-\nu^2)}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 & u_6 & v_6 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccccccc}
3(1-\nu) & 0 & 0 & 1-\nu & 1-\nu & -(1-\nu) & 0 & -4(1-\nu) & 0 & 0 & -4(1-\nu) & 4(1-\nu)\\
 & 6 & 2\nu & 0 & -2\nu & 2 & -8\nu & 0 & 0 & 0 & 8\nu & -8\\
 & & 6 & 0 & 2 & -2\nu & 0 & -8\nu & -8 & 8\nu & 0 & 0\\
 & & & 3(1-\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu & -4(1-\nu) & 0 & 4(1-\nu) & -4(1-\nu) & 0 & 0\\
 & & & & 3(3-\nu) & -3(1+\nu) & 0 & 0 & -8 & 4(1-\nu) & -4(1-\nu) & 8\nu\\
 & & & & & 3(3-\nu) & 0 & 0 & 8\nu & -4(1-\nu) & 4(1-\nu) & -8\\
 & & & & & & 8(3-\nu) & -4(1+\nu) & -8(1-\nu) & 4(1+\nu) & -16 & 4(1+\nu)\\
 & & & & \text{Симм.} & & & 8(3-\nu) & 4(1+\nu) & -16 & 4(1+\nu) & -8(1-\nu)\\
 & & & & & & & & 8(3-\nu) & -4(1+\nu) & 0 & -4(1+\nu)\\
 & & & & & & & & & 8(3-\nu) & -4(1+\nu) & 0\\
 & & & & & & & & & & 8(3-\nu) & -4(1+\nu)\\
 & & & & & & & & & & & 8(3-\nu)
\end{array}\right]\end{array}.$$

При этом компоненты матрицы жёсткости определялись по формуле

$$K_{i,j}=\int_0^a dx\int_x^a k_{i,j}\,dy.$$

Кинематические граничные условия:

$u_1=0$; $v_1=0$; $u_3=0$; $v_3=0$; $u_6=0$; $v_6=0$.

Силовые граничные условия:

$F_{x2}=0$; $F_{y2}=-P$; $F_{x4}=0$; $F_{y4}=0$; $F_{x5}=0$; $F_{y5}=0$.

Разрешающее уравнение с учётом граничных условий

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 & u_6 & v_6
\end{array}\\
\dfrac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix}
3(1-\nu) & 0 & 0 & 1-\nu & 1-\nu & -(1-\nu) & 0 & -4(1-\nu) & 0 & 0 & -4(1-\nu) & 4(1-\nu)\\
 & 6 & 2\nu & 0 & -2\nu & 2 & -8\nu & 0 & 0 & 0 & 8\nu & -8\\
 & & 6 & 0 & 2 & -2\nu & 0 & -8\nu & -8 & 8\nu & 0 & 0\\
 & & & 3(1-\nu) & -(1-\nu) & 1-\nu & -4(1-\nu) & 0 & 4(1-\nu) & -4(1-\nu) & 0 & 0\\
 & & & & 3(3-\nu) & -3(1+\nu) & 0 & 0 & -8 & 4(1-\nu) & -4(1-\nu) & 8\nu\\
 & & & & & 3(3-\nu) & 0 & 0 & 8\nu & -4(1-\nu) & 4(1-\nu) & -8\\
 & & & & & & 8(3-\nu) & -4(1+\nu) & -8(1-\nu) & 4(1+\nu) & -16 & 4(1+\nu)\\
 & & & \text{Симм.} & & & & 8(3-\nu) & 4(1+\nu) & -16 & 4(1+\nu) & -8(1-\nu)\\
 & & & & & & & & 8(3-\nu) & -4(1+\nu) & 0 & -4(1+\nu)\\
 & & & & & & & & & 8(3-\nu) & -4(1+\nu) & 0\\
 & & & & & & & & & & 8(3-\nu) & -4(1+\nu)\\
 & & & & & & & & & & & 8(3-\nu)
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ u_2\\ v_2\\ 0\\ 0\\ u_4\\ v_4\\ u_5\\ v_5\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} F_{x1}\\ F_{y1}\\ 0\\ -P\\ F_{x3}\\ F_{y3}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ F_{x6}\\ F_{y6} \end{Bmatrix}.
\end{array}
$$

Уравнение для нахождения неизвестных смещений

$$
\frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix}
6 & 0 & 0 & -8\nu & -8 & 8\nu\\
0 & 3(1-\nu) & -4(1-\nu) & 0 & 4(1-\nu) & -4(1-\nu)\\
0 & -4(1-\nu) & 8(3-\nu) & -4(1+\nu) & -8(1-\nu) & 4(1-\nu)\\
-8\nu & 0 & -4(1+\nu) & 8(3-\nu) & 4(1+\nu) & -16\\
-8 & 4(1-\nu) & -8(1-\nu) & 4(1+\nu) & 8(3-\nu) & -4(1+\nu)\\
8\nu & -4(1-\nu) & 4(1-\nu) & -16 & -4(1+\nu) & 8(3-\nu)
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_2\\ v_2\\ u_4\\ v_4\\ u_5\\ v_5 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0\\ -P\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix}.
$$

При $\nu = 0{,}3$ получим

$$
\begin{cases}
u_2 = 5{,}87\dfrac{P}{E};\\[2mm]
v_2 = -19{,}40\dfrac{P}{E};\\[2mm]
u_4 = -1{,}26\dfrac{P}{E};\\[2mm]
v_4 = -4{,}51\dfrac{P}{E};\\[2mm]
u_5 = 4{,}20\dfrac{P}{E};\\[2mm]
v_5 = -5{,}19\dfrac{P}{E}.
\end{cases}
$$

Уравнение для определения неизвестных реакций

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x6} \\ F_{y6} \end{Bmatrix} = \frac{E}{12\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} 0 & 1-\nu & 0 & -4(1-\nu) & 0 & 0 \\ 2\nu & 0 & -8\nu & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -(1-\nu) & 0 & 0 & -8 & 4(1-\nu) \\ -2\nu & 1-\nu & 0 & 0 & 8\nu & -4(1-\nu) \\ 0 & 0 & -16 & 4(1+\nu) & 0 & -4(1+\nu) \\ 0 & 0 & 4(1+\nu) & -8(1-\nu) & -4(1+\nu) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}.$$

При $\nu = 0{,}3$ получим

$$\begin{cases} F_{x1} = -0{,}088P; \\ F_{y1} = 0{,}600P; \\ F_{x3} = -2{,}088P; \\ F_{y3} = 0{,}688P; \\ F_{x6} = 2{,}176P; \\ F_{y6} = -0{,}288P. \end{cases}$$

Проверка условий равновесия

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{kx} = F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4} + F_{x5} + F_{x6} = -0{,}088P + 0 - 2{,}088P + 0 + 0 + 2{,}176 = 0; \\ \sum \vec{F}_{ky} = F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} + F_{y5} + F_{y6} = 0{,}600P - P + 0{,}688P + 0 + 0 - 0{,}288P = 0; \\ \sum m_3\left(\vec{F}_k\right) = F_{x1}\cdot a + F_{y2}\cdot a + F_{x4}\cdot\frac{a}{2} + F_{y4}\cdot\frac{a}{2} + F_{y5}\cdot\frac{a}{2} + F_{x6}\cdot\frac{a}{2} = -0{,}088P\cdot a - P\cdot a + \\ \qquad + 0\cdot\frac{a}{2} + 0\cdot\frac{a}{2} + 0\cdot\frac{a}{2} + 2{,}176P\cdot a = 0. \end{cases}$$

Деформации элемента

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = B(x, y)\cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{12(1+\nu)\left(8\nu^2 + 3\nu - 9\right)}{8\nu + 9}\cdot\dfrac{P}{E\,a^2}(x - 2y + a) \\ -\dfrac{24(1+\nu)}{8\nu + 9}\cdot\dfrac{P}{E\,a^2}\,x \\ -\dfrac{12(1+\nu)}{8\nu + 9}\cdot\dfrac{P}{E\,a^2}\left[8(1+\nu)x + 2y - a\right] \end{Bmatrix}.$$

Напряжения в элементе

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{12P}{a^2}(x-2y+a) \\ -\frac{12P}{a^2}\left[\frac{8\nu^2+11\nu+2}{8\nu+9}x+\nu(2y-a)\right] \\ -\frac{6P}{a^2}\cdot\frac{8(1+\nu)x+2y-a}{8\nu+9} \end{Bmatrix}.$$

Линии нулевых деформаций

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0: \quad x-2y+a=0; \\ \varepsilon_y = 0: \quad x=0; \\ \gamma_{xy} = 0: \quad 8(1+\nu)x+2y-a=0. \end{cases}$$

Линии нулевых напряжений

$$\begin{cases} \sigma_x = 0: \quad x-2y+a=0; \\ \sigma_y = 0: \quad \frac{8\nu^2+11\nu+2}{\nu(8\nu+9)}x+2y-a=0; \\ \tau_{xy} = 0: \quad 8(1+\nu)x+2y-a. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Писаренко Г.С., Агарев В.А. и др. Сопротивление материалов: Учебник для вузов.– К.: Высшая школа, 1979.

2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности.– М.: Высшая школа, 1970.–288с.

3. Сабоннадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л. Метод конечных элементов и САПР. Пер. с франц.– М.: Мир, 1989.–190с.

4. Gallagher R.H. Finite Element Analysis.– New Jersey: Prentice-Hall, 1975.

5. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник: В 3 т.– М.: Машиностроение, 1968.– Т. 1.–567с.

6. Каплун А.П., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство.– М.: Едиториал УРСС, 2004.

7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике.– М., 1964.–608с., илл.

Навчальне видання

Павленко Іван Володимирович

Метод скінчених елементів
в задачах опору метеріалів і лінійної теорії пружності

Навчальний посібник
(Російською мовою)

Редактор Н.В.Лисогуб
Комп'ютерне верстання І.В.Павленка

Підп. до друку
Формат 60×84/16. Папір офс. Друк офс.
Ум. друк. арк.   Обл.-вид. арк.   Ум. фарбовідб.
Тираж 350 пр. Вид. № 175.
Зам. №

Видавництво СумДУ при Сумському державному університеті
40007, м.Суми, вул. Р.-Корсакова, 2
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру ДК № 2365 від 08.12.2005 р.
Надруковано у друкарні СумДУ
40007, м.Суми, вул. Р.-Корсакова, 2