МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.А. Літвіненко

ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
для студентів економічних спеціальностей денної форми навчання

СУМИ ВИД-ВО СУМДУ 2004

ПЕРЕДМОВА

Сучасна економічна освіта неможлива без глибоких знань математики. Особливе місце серед математичних дисциплін, що неодмінно потрібні економісту, займає теорія ймовірностей. Зазначимо, що в західних економічних вищих навчальних закладах вивчення економічних дисциплін базується, перш за все на статистичних методах, що дозволяють будувати та аналізувати реальні моделі економічних процесів. Обробка статистичної інформації передбачає врахування стохастичного характеру багатьох економічних процесів. Тому знання з теорії ймовірностей є невід'ємною частиною економічної освіти. Як і будь-яка математична дисципліна, теорія ймовірностей потребує вміння розв'язувати задачі, що досягається тільки практикою.

Цей навчальний посібник охоплює задачі на всі основні розділи теорії ймовірностей: елементи комбінаторики, випадкові події, додавання і множення ймовірностей, умовні ймовірності, формулу повної ймовірності, формулу Баєса, повторні випробування, формули Бернуллі, Муавра-Лапласа, Пуассона, дискретні та неперервні випадкові величини, їх характеристики, закон великих чисел, нерівності Чебишова. На початку кожного розділу пропонуються теоретичні відомості, що дозволять згадати основні поняття теорії ймовірностей, наведені формули, що використовуються при розв'язанні задач. Кожний розділ містить задачі для самостійного розв'язання. Посібник має додатки, у яких наведений табличний матеріал, необхідний при розв'язанні задач.

Запропонований навчальний посібник буде корисним як студентам економічних та математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, так і викладачам, тому що його використання дозволить підвищити ефективність навчання та вивільнити час на більш поглиблене вивчення предмета.

Навчальний посібник укладений відповідно до програми курсу теорії ймовірностей для економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Комбінаторика – це галузь математики, предметом якої є теорія скінченних множин. Значна кількість теорем і формул комбінаторики ґрунтується на двох елементарних правилах, які називаються правилами суми і добутку.

Правило суми – якщо деякий об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b – n способами, причому ніякий вибір a не збігається з жодним з виборів b, то один з об'єктів a або b можна вибрати $m+n$ способами.

Правило добутку - якщо деякий об'єкт a можна вибрати m способами і при кожному виборі об'єкта a об'єкт b можна вибрати n способами, то вибір пари (a, b) можна здійснити mn способами.

Правило суми та добутку можна узагальнити на будь-яку більшу кількість об'єктів.

У комбінаториці розглядають три типи сполук – розміщення, перестановки та комбінації.

Розміщеннями з n елементів по m називають сполуки, що складаються з m елементів, взятих з n, і відрізняються або складом елементів, або їх порядком. Кількість всіх можливих розміщень розраховують за формулою:

– без повторень

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!};$$

– з повтореннями

$$\overline{A}_n^m = n^m .$$

Перестановками n елементів називають сполуки, що відрізняються тільки порядком елементів. Кількість всіх можливих перестановок розраховують за формулою:

– без повторень

$$P_n = n!;$$

– з повтореннями

$$P_n(n_1, n_2, \ldots) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots}.$$

Комбінаціями з n елементів по m називають сполуки, що складаються з m елементів, взятих з n, і відрізняються тільки складом (порядок не має значення). Кількість всіх можливих комбінацій розраховують за формулою:

– без повторень

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

– з повтореннями

$$\overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Задачі

1 Скільки всіх чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 5, 6, 7?

2 Скільки існує двозначних чисел, у яких обидві цифри парні?

3 У розиграші першості з футболу беруть участь 18 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі, якщо будь-яка команда може отримати тільки одну медаль?

4 Скільки тризначних парних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри можуть повторюватися?

5 Скільки існує шестизначних чисел, що діляться на 5?

6 Скільки усього семизначних телефонних номерів, у кожному з яких жодна цифра не повторюється?

7 Скільки існує двозначних чисел, у яких цифра одиниць і цифра десятків різні і непарні?

8 Скільки усього шестизначних парних чисел можна скласти з цифр 1, 3, 4, 5, 7 і 9, якщо в кожному з цих чисел жодна цифра не повторюється?

9 Скількома способами можна розставити на полиці в один ряд сім книг різних авторів?

10 Скількома способами читач може вибрати дві книжки з п'яти наявних?

11 Дано п'ять різних чисел: a, b, c, d, f. Скільки можна скласти всіляких добутків з цих чисел, що складаються з:

а) двох різних множників;
б) трьох різних множників;
в) чотирьох різних множників;
г) п'яти різних множників?

12 У Ніни є 7 різних книг з математики, а у Славка – 9 різних книг з філософії. Скількома способами вони можуть обмінятися один з одним п'ятьма книгами?

13 З двох математиків і десяти економістів треба створити комісію у складі восьми чоловік. Скількома способами може бути складена комісія, якщо до неї повинен входити хоча б один математик?

14 Кожен телефонний номер складається із шести цифр. Скільки усього телефонних номерів, які не містять інших цифр, крім 2, 3, 5 і 7?

15 Скількома способами можна розмістити в ряд 2 зелені і 4 червоні лампочки?

16 Скількома способами можна переставити букви в слові, щоб виходили всілякі різні сполучення букв?

а) математика;

б) абракадабра.

17 У кондитерській є п'ять різних сортів тістечок. Скількома способами можна вибрати набір з чотирьох тістечок?

18 Скільки буде кісток доміно, якщо використовувати в їх утворенні всі цифри?

РОЗДІЛ 2 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

2.1 Основні визначення. Простір елементарних подій. Класичне, геометричне означення ймовірності. Операції над випадковими подіями

У будь-якій науці є основні поняття, на які вона спирається. У теорії ймовірностей до таких понять відносять *подію* та *рівноможливість*. Під подією будемо розуміти все те, що може настати, а може й не настати. Подія – це лише можливий результат досліду, явища або спостереження.

Дві події називають *несумісними*, якщо настання однієї з них виключає можливість настання іншої. У протилежному разі події називають *сумісними*.

Подія називається *достовірною* (*вірогідною*), якщо вона не може не настати в умовах даного досліду або явища.

Подія називається *неможливою*, якщо вона не може настати за умови виконання певного комплексу умов.

Дві події, одна з яких обов'язково повинна настати, але настання однієї виключає можливість настання іншої, називають *протилежними*.

У деякому випробуванні (явищі) події А, В,..., М називають *єдино можливими*, якщо хоча б одна з них обов'язково настане як результат випробування (явища).

Події А, В, ..., М утворюють *повну систему* (*групу*), якщо вони є єдино можливими та несумісними результатами деякого досліду (явища). Іноді їх називають простором елементарних подій.

Сумой скінченної кількості подій називають нову подію, яка полягає в тому, що настане хоча б одна з них.

Добутком скінченної кількості подій називають нову подію, яка полягає в тому, що вони настануть усі.

Класичне означення ймовірності – ймовірність події А дорівнює відношенню кількості випадків m, що сприяють їй, до загальної кількості n єдино можливих, рівно можливих та несумісних випадків, тобто:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Ймовірність будь-якої події не може бути від'ємною або більшою одиниці:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці. Ймовірність неможливої події довірнює нулю.

Задачі

19 Проводиться випробування: кидають гральний кубик. Необхідно:

а) навести приклади випадкових подій, достовірної, неможливої події;

б) записати простір елементарних подій;

в) записати наведені події через елементарні, розрахувати їх імовірності;

20 Випробування: кидають два гральних кубики. Записати простір елементарних подій. Записати через елементарні такі події:

а) сума очок дорівнює 5;

б) випало однакове число очок;

в) число очок різної парності.

Розрахувати імовірності цих подій.

21 Стрілець тричі стріляє по мішені. Записати простір елементарних подій. Записати через елементарні такі події:

а) стрілець влучив усього один раз;

б) влучив хоча б один раз;

в) жодного разу не влучив.

Розрахувати імовірності цих подій.

22 У відділі науково-дослідного інституту працюють кілька людей, кожний з який знає хоча б одну іноземну мову, 6 з них знають англійську, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – французьку і англійську, один – знає всі три мови. Визначити:

а) скільки чоловік працює у відділі;

б) скільки з них знає тільки англійську;

в) скільки з них знає тільки одну якусь мову.

23 Нехай A, B, C – деякі події. Записати вирази і нарисувати діаграми для подій, які полягають у тому, що:

а) відбулася тільки подія A;
б) відбулися події A і B, а подія C не відбулася;
в) відбулася хоча б одна з цих подій;
г) не відбулася жодна з цих подій;
д) відбулися всі три події;
е) відбулося не більше двох подій.

24 Слово «ІНТЕГРАЛ» складається з літер розрізної абетки. Навмання витягають 4 картки і викладають у ряд одна за одною у порядку появи. Яка імовірність того, що при цьому вийде слово «ЛІРА»?

25 Яка імовірність того, що при випадковому розміщенні в ряд кубиків, на яких написані літери «А», «Г», «И», «Л», «М», «О», «Р», «Т», вийде слово «АЛГОРИТМ»?

26 Телефонний номер складається з 5 цифр. Яка імовірність, що в навмання набраному номері:
а) усі цифри різні;
б) усі цифри непарні?

27 Яка імовірність того, що при випадковому розміщенні в ряд кубиків, на яких написані літери «О», «О», «О», «Л», «М», «Т», «К», вийде слово «МОЛОТОК»?

28 З п'яти видів листівок навмання вибираються 3 листівки. Яка імовірність того, що всі три листівки будуть різні?

29 На п'яти однакових кульках написані числа 1, 2, 3, 4, 5 по одному на кожній. Кульки покладені в урну і перемішані. Яка імовірність того, що, виймаючи навмання одну за одною 3 кульки (без повернення), одержимо всі 3 кульки непарного номера?

30 На один ряд із семи місць випадково розсаджуються 7 учнів. Знайти імовірність того, що 3 певних учні сидітимуть поруч.

31 На картках написані літери «А», «А», «А», «Н», «Н», «С». Яка імовірність того, що при довільному розкладанні карток вийде слово «АНАНАС»?

32 У групі вчиться 12 чоловік, з них 10 юнаків і 2 дівчини. На суботник відбирають 5 чоловік. Яка імовірність того, що в суботнику будуть брати участь обидві дівчини?

33 У шаховому турнірі беруть участь 16 чоловік, які будуть розподілені за жеребом на 2 групи по 8 чоловік у кожній. Яка імовірність того, що двоє найбільш сильних учасників будуть грати:

а) в одній групі;

б) у різних групах?

34 В урні 4 червоних і 6 зелених кульок. Виймають 3 кульки. Яка імовірність того, що серед них буде 2 червоного кольору?

35 На іспит виносяться 60 питань. Студент вивчив 50 питань. У білеті 3 питання. Яка імовірність того, що студент здасть іспит, якщо для цього потрібно знати відповідь хоча б на 2 питання?

36 З 10 лотерейних квитків 2 – виграшні. Яка імовірність того, що з 5 куплених квитків:

а) 1 виграшний;

б) 2 виграшні;

в) хоча б 1 виграшний?

37 Учасники жеребкування тягнуть із ящика жетони з номерами від 1 до 100. Знайти імовірність того, що номер першого навмання витягнутого жетона не містить цифри 5.

38 З ретельно перемішаного повного набору 28 кісток доміно навмання витягнута кістка. Знайти імовірність того, що другу навмання витягнуту кістку можна приставити до першої, якщо перша кістка:

а) виявилася дублем;

б) не є дублем.

39 У ящику 10 однакових деталей, позначених номерами 1,2,...,10. Навмання витягнуті шість деталей. Знайти імовірність того, що серед витягнутих деталей виявляться:

а) деталь під номером 1;

б) деталі під номерами 1 і 2.

40 У «секретному» замку на загальній осі чотири диски, кожний з який розділений на 5 занумерованих секторів. Замок відмикається тільки в тому випадку, якщо диски встановлені так, що цифри на них складають певне чотиризначне число. Знайти імовірність того, що при довільній установці дисків замок буде відімкнений.

41 Знайти імовірність того, що точка, яка кинута в довільне місце всередину кола радіусом R, потрапить всередину вписаного у це коло:

а) правильного трикутника;
б) квадрата;
в) прямокутного рівнобедреного трикутника.

42 У коло радіусом 10 см кидають точку. Знайти імовірність того, що відстань від цієї точки до центра кола:

а) не перевищує 5 см;
б) більше 5 см;
в) розміщена в межах від 2 до 5 см.

43 Стрижень довжиною l розламали на дві частини. Знайти імовірність того, що довжина меншої частини:

а) не перевищить $\frac{l}{3}$;

б) перевищить $\frac{l}{3}$.

44 Круглий диск радіусом R розбитий на два сектори. Довжина дуги одного з них дорівнює радіусу R. По диску, який швидко обертається, зроблено постріл. Знайти імовірність влучення у цей сектор.

45 На паркет кидають монету діаметром d. Паркет складений із квадратів зі стороною a ($d<a$). Знайти імовірність того, що монета не перетне жодної з сторін квадратів паркету.

2.2 Додавання і множення імовірностей. Умовні імовірності

Теорема (додавання ймовірностей). Ймовірність суми скінченної кількості несумісних подій дорівнює сумі їх імовірностей:

$$P(A+B+\ldots)=P(A)+P(B)+\ldots.$$

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій, що утворюють повну систему, дорівнює одиниці.

Наслідок 2. Ймовірність події, протилежної до події А, дорівнює різниці між одиницею та ймовірністю події А:

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Ймовірність події А, яка знайдена у припущенні, що подія В настала, називається *умовною ймовірністю* події А відносно події В і позначається $P_B(A)$.

Теорема (множення ймовірностей). Ймовірність добутку подій А і В дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, відносно тієї, що взята першою, тобто:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

Події А і В називають *незалежними*, якщо умовна ймовірність однієї з них не змінюється при настанні іншої. У протилежному разі події А і В називають *залежними*.

Події А, В, С,..., К називають *попарно незалежними*, якщо незалежні між собою будь-які дві з них.

Події А, В, С,..., К називають *незалежними у сукупності*, якщо ймовірність кожної з них не змінюється при настанні інших подій (однієї або декількох у будь-якій комбінації і будь-якій кількості).

Теорема. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх імовірностей:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Теорема. Ймовірність добутку скінченної кількості подій дорівнює добутку їх умовних імовірностей відносно добутку подій, що передували кожній з них, тобто

$$P(ABC\ldots KL)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)\cdot\ldots\cdot P_{ABC\ldots K}(L).$$

Задачі

46 На тридцяти жетонах написані числа від 11 до 40. Яка імовірність того, що навмання взятий жетон буде занумерований числом, сума цифр якого дорівнює 2 або 5?

47 Кинуто два гральні кубики. Знайти імовірності таких подій:

а) сума очок, що випали, дорівнює 7;

б) сума очок, що випали, дорівнює 8, а різниця – 4;

в) сума очок, що випали, дорівнює 8, якщо відомо, що їх різниця дорівнює 4;

г) сума очок, що випали, дорівнює 5, а добуток – 4.

48 В урні 8 білих і 3 чорних кульки. З урни витягаються одна за одною 2 кульки. Яка імовірність того, що перша кулька буде білою, а друга – чорною? Розв’язати задачу за умови, що:

а) витягнута кулька повертається в урну;

б) не повертається в урну.

49 Два стрільці незалежно один від одного стріляють у ціль по одному разу. Імовірність влучення в ціль для 1-го стрільця дорівнює 0,6, а для 2-го – 0,7. Яка імовірність того, що:

а) обидва стрільці влучать у ціль;

б) перший влучить, а другий промахнеться;

в) влучить тільки один із стрільців;

г) влучить хоча б один із стрільців (2 способи).

50 Імовірність одного влучення в ціль при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти імовірність влучення в ціль при одному пострілі першою з гармат, якщо відомо, що для другої гармати ця імовірність дорівнює 0,8.

51 Імовірність того, що при одному вимірі деякої фізичної величини буде допущена помилка, що перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Зроблено три незалежних виміри. Знайти імовірність того, що тільки в одному з них допущена помилка перевищить задану точність.

52 Студент повинен здати з математики і залік, і іспит. Імовірність здачі заліку дорівнює 0,85. Якщо залік зданий, то студент допускається до здачі іспиту, імовірність здачі якого для даного студента дорівнює 0,95. Яка імовірність того, що студент здасть і залік, і іспит?

53 Студент прийшов на іспит, знаючи лише 20 питань з 30. Екзаменатор задав студенту 3 питання. Яка імовірність того, що студент знає відповіді на всі 3 питання?

54 У читальному залі є 6 підручників з теорії ймовірностей, з яких три в оправі. Бібліотекар навмання взяв 2 підручники. Знайти імовірність того, що обидва підручники виявляться в оправі.

55 В урні є п'ять кульок з номерами від 1 до 5. Навмання по одній витягають три кульки без повертання. Знайти імовірності таких подій:

а) послідовно будуть витягнуті кульки з номерами 1, 4, 5;

б) витягнуті кульки будуть мати номери 1, 4, 5 незалежно від того, у якій послідовності вони були витягнуті.

56 Для руйнування моста досить влучення однієї авіаційної бомби. Знайти імовірність того, що міст буде зруйнований, якщо на нього скинути 4 бомби, імовірності влучення яких відповідно дорівнюють 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

57 Верстатник працює на трьох верстатах. Імовірність того, що верстат працює без втручання майстра для 1-го верстата дорівнює 0,9, для 2-го – 0,8, для 3-го – 0,75. Яка ймовірність того, що хоча б один верстат пропрацює без втручання робітника? Розв’язати двома способами.

58 Для виробничої практики на 20 студентів надано 5 місць у Києві, 3 місця – в Мінську, інші – у Сумах. Яка імовірність того, що два певних студенти проходитимуть практику в одному місті?

59 У групі 30 спортсменів, з них 12 грають у баскетбол, 15 – у волейбол, 5 – і у волейбол, і у баскетбол, решта займаються іншими видами спорту. Яка імовірність того, що навмання вибраний спортсмен займається або тільки волейболом, або тільки баскетболом?

60 Чи сумісні події А і В, якщо відомо, що імовірність події А дорівнює ½, події В – 2/3?

61 Визначити імовірність того, що вибраний навмання виріб є першосортним, якщо відомо, що 4% усієї продукції – браковані, а 75% небракованих виробів задовольняють вимогам першого сорту.

62 Імовірність влучення в ціль при першому пострілі дорівнює 0,8. Якщо стрілець влучає в ціль при першому пострілі, то йому надають право стріляти в другу ціль. Імовірність влучення в обидві мішені для цього стрільця дорівнює 0,6. Яка імовірність влучення у другу ціль?

63 На розрізних картках написане слово «ЗАДАЧА». Навмання послідовно викладають 4 картки. Яка імовірність того, що вийде слово «ДАЧА»?

64 У коробці 2 червоних, 3 синіх і 2 зелених олівці. Послідовно дістають олівці один за одним. Яка імовірність того, що червоний олівець дістануть раніше синього?

65 У трьох ящиках лежить по 10 деталей. У першому ящику є 2 браковані деталі, у другому – 3, у третьому – 1. З кожного ящика беруть по одній деталі. Яка імовірність того, що:

а) усі три деталі виявляться бракованими;

б) усі три деталі – нормальні;

в) серед вибраних деталей виявиться хоча б одна стандартна;

г) серед вибраних деталей буде одна бракована?

66 Імовірність того, що в результаті трьох незалежних випробувань подія А відбудеться принаймні один раз, дорівнює 0,936. Знайти імовірність настання події А в одному випробуванні, якщо вона однакова для всіх випробувань.

67 Імовірність хоча б одного влучення стрільцем у мішень при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти імовірність влучення при одному пострілі.

68 Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,4. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб імовірність принаймні одного влучення була не меншою 0,9?

69 У картотеці є історії хвороб восьми пацієнтів. Якщо навмання взяти першу, потім другу, третю і т.д. історії хвороби, то якою в кожному випадку буде імовірність вилучення потрібної історії хвороби? Передбачається, що шукана історія хвороби є в картотеці. Розгляньте 2 варіанти:

а) узяті історії хвороб не повертаються в картотеку;
б) щоразу повертаються і хаотично розміщуються в ній.

70 В урні є 7 чорних і кілька білих кульок. Яка імовірність витягти білу кульку, якщо імовірність виймання чорної кульки дорівнює 1/6? Скільки білих кульок в урні?

71 Яка імовірність того, що в результаті кидання грального кубика:

а) 6 разів підряд випадуть одиниці;
б) 6 разів підряд випадуть тільки парні числа?

72 В урні 6 білих і 4 чорних кульки. Навмання виймають дві кульки. Яка імовірність того, що ці кульки однакового кольору?

73 Студент із 40 питань програми вивчив 30. Знайти імовірність того, що при опитуванні студент дість відповідь:

а) на перше поставлене питання;
б) на друге питання, якщо на перше він не відповів;
в) на одне з двох заданих питань.

74 Гральний кубик кидають один раз. Знайти імовірність того, що випаде число очок:

а) не більше 3;
б) непарне чи таке, що ділиться на 3;
в) непарне і таке, що ділиться на 3.

75 Обслуга трьох гармат, знайшовши майже одночасно 3 об'єкти супротивника, незалежно одно від одного вибрали цілі і зробили по одному пострілу. Яка імовірність обстрілу

а) одного;

б) двох;

в) трьох об'єктів супротивника?

76 Гармата може зробити по танку, що рухається, 3 постріли. Імовірність влучення при першому пострілі дорівнює 0,2, при другому – 0,4, при третьому – 0,6. Танк виходить з ладу в результаті двох влучень. Знайти імовірність виведення танка з ладу.

77 Імовірність того, що танк наїде на міну, дорівнює 0,3. Відомо, що міна за рахунок дефектів підривників спрацьовує з імовірністю 0,98. Яка імовірність того, що танк не підірветься на міні?

78 Бомбардувальник послідовно проходить три зони ППО. При проході першої зони він уражається з імовірністю 0,6, другої (за умови проходження першої) – 0,7 і третьої (за умови проходження перших двох) – 0,5. Знайти імовірність того, що він:

а) пройде всі зони;

б) буде уражений при проході другої зони;

в) не дійде до третьої зони.

79 На складання надійшло 3000 деталей з першого верстата і 2000 із другого. Перший верстат дає 0,2% браку, а другий – 0,3%. Знайти імовірність того, що взята навмання деталь з нерозсортованої продукції верстатів виявиться бракованою.

80 Серед 17 студентів групи, з яких 8 дівчат, розігрується 7 квитків, причому кожний може виграти тільки один квиток. Яка імовірність того, що серед власників квитків виявляться чотири дівчини?

81 Ліфт у п'ятиповерховому будинку відправляється з трьома пасажирами. Знайти імовірність того, що на кожному поверсі вийде не більше одного пасажира, припускаючи, що всілякі способи розподілу пасажирів по поверхах рівноймовірні.

82 У складальника є 10 деталей, що мало відрізняються одна від одної. З них 4 першого та по 2 другого, третього і четвертого видів. Яка імовірність того, що серед 6 узятих одночасно деталей три виявляться першого виду, 2 – другого і 1 – третього?

83 Прямокутні ґрати складаються з циліндричних прутів радіуса ***r***. Відстані між осями прутів дорівнюють відповідно ***a*** і ***b***. Знайти імовірність вільного проскакування кулі діаметра ***d*** крізь ґрати при одному пострілі без прицілювання, якщо траєкторія польоту кулі перпендикулярна до площини ґрат.

84 По танку робиться два одиночних постріли з однієї гармати. Імовірність влучення при першому пострілі дорівнює 0,7, при другому – 0,8. При одному влученні танк виходить з ладу з імовірністю 0,4, а при двох – вірогідно. Знайти імовірність того, що танк буде виведений з ладу.

2.3 Формула повної імовірності. Формула Баєсса

Задача 1. Нехай потрібно знайти ймовірність події F, яка може настати тільки з деякою з подій $A_1, A_2, ..., A_n$, що утворюють повну систему, якщо відомі їх імовірності $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ та умовні ймовірності події F відносно кожної з них, тобто $P_{A_1}(F)$, $P_{A_2}(F)$, ..., $P_{A_n}(F)$.

Така задача розв'язується за допомогою спеціальної формули, яка називається *формулою повної ймовірності*:

$$P(F) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(F) + P(A_2)\cdot P_{A_2}(F) + \ldots + P(A_n)\cdot P_{A_n}(F) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P_{A_i}(F).$$

Задача 2. Нехай у результаті випробування настала подія F, яка могла настати тільки з деякою з подій $A_1, A_2, ..., A_n$, що утворюють повну систему. Відомі їх імовірності $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ та умовні ймовірності події F відносно кожної з них, тобто $P_{A_1}(F)$, $P_{A_2}(F)$, ...,

$P_{A_n}(F)$. Треба знайти ймовірність $P_F(A_i)$ усіх гіпотез про те, в результаті якої з подій A_i ($i = 1,2,..., n$) настала подія F.

Така задача розв'язується за допомогою так званої *формули Баєса*:

$$P_F(A_i) = \frac{P(A_i)\cdot P_{A_i}(F)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P_{A_i}(F)}.$$

Задачі

85 Є дві урни по 10 кульок у кожній. У першій 6 білих і 4 чорних кульки, у другій – порівну білих і чорних. З кожної урни дістають по одній кульці. Яка імовірність того, що:

а) обидві вийняті кульки білого кольору;

б) вийняті кульки різних кольорів?

86 Є дві урни по 10 кульок у кожній. У першій 6 білих і 4 чорних кульки, у другій – порівну білих і чорних. З вибраної навмання урни дістають одну кульку. Яка імовірність того, що вона білого кольору?

87 Є 2 урни. У першій урні – 5 білих і 4 чорних кульки, у другій – 6 білих і 7 чорних. З першої урни в другу перекладають, не дивлячись, одну кульку. Після цього з другої урни дістають одну кульку. Яка імовірність того, що ця кулька буде білою?

88 Радіолампи виробляються двома заводами, причому перший з них поставляє 70% усієї продукції, а другий – 30%. З кожних 100 ламп першого заводу 80 стандартних, а з 100 ламп другого заводу – лише 60 стандартних. Знайти імовірності таких подій:

а) замовник одержав стандартну лампу;

б) лампа виготовлена першим заводом, якщо відомо, що вона виявилася стандартною.

89 У деякій галузі 30% продукції виробляється на першій фабриці, 25% – на другій, решта – на третій. На першій фабриці брак складає 1% від загального обсягу виробленої продукції, на другій – 1,5%, на третій – 2%. Куплена покупцем продукція виявилася бракованою. Яка імовірність того, що вона була виготовлена на першій фабриці?

90 Є 5 урн, з яких дві – першого складу: по 5 білих і 3 чорних кульки, одна – другого складу: 3 білих і 2 чорних, інші дві – третього складу: по 5 білих і 5 чорних кульок. З навмання вибраної урни вийняли одну кульку. Яка імовірність того, що ця кулька виявиться білою?

91 У групі 10 студентів, з них 3 вчаться на «відмінно», 4 – на «добре», 2 – на «посередньо» і 1 – погано. В екзаменаційних білетах 20 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 20 питань, добре підготовлений – на 16, посередньо – на 10, погано – на 5. Викликаний студент відповів на 3 послідовно заданих запитання. Знайти імовірність того, що цей студент підготовлений:

а) відмінно;

б) погано.

92 Є три однакових на вигляд урни. У першій – 3 білих і 4 чорних кульки, у другій – 5 білих і 7 чорних, у третій – тільки білі кульки. Навмання з однієї урни витягають одну кульку. Знайти імовірність того, що вона біла.

93 В урну, що містить дві кульки, опущена біла кулька, після чого з неї навмання витягують одну кульку. Знайти імовірність того, що витягнута кулька виявиться білою, якщо рівноможливі всі припущення про первісний склад кульок (за кольором).

94 Є дві урни. У першій – 5 білих і 4 чорних кульки, у другій – 6 білих і 4 чорних. З першої урни в другу перекладають три кульки, а потім із другої урни дістають одну кульку. Яка імовірність того, що вона біла?

95 У першій урні є 10 кульок, з них 8 білих; у другій урні – 20 кульок, з них 4 білих. З кожної урни навмання витягли по одній кульці, а потім з цих двох кульок навмання взята одна. Знайти імовірність того, що вона виявиться білою.

96 Імовірності того, що під час роботи цифрової електронної машини відбудеться збій в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті або інших пристроях співвідносяться як 3:2:5. Імовірності виявлення перебоїв в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті та в інших пристроях відповідно дорівнюють 0,8; 0,9; 0,9. Знайти імовірність того, що перебої у роботі машини будуть виявлені.

97 У піраміді 10 гвинтівок, з яких 4 з оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілець влучить у мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця імовірність дорівнює 0,8. Стрілець влучив у мішень з навмання взятої гвинтівки. Що імовірніше: стрілець стріляв із гвинтівки з оптичним прицілом чи без нього?

98 Три стрільці одночасно вистрілили в мішень, у результаті чого в ній з'явилася одна пробоїна. Імовірність влучення першого стрільця дорівнює 0,3, другого – 0,5, третього – 0,8. Знайти імовірність того, що в мішень влучив:

а) перший стрілець;
б) другий;
в) третій.

99 Лиття в болванках надходить із двох заготівельних цехів: 70% з першого цеху, інше – із другого. При цьому матеріал першого цеху має 10% браку, а другого – 20% браку. Знайти імовірність того, що одна взята навмання болванка виявиться без дефекту.

100 Є три однакових на вигляд урни. У першій – 4 білих і 6 чорних кульки, у другій – усі білі, у третій – усі чорні кульки. З вибраної навмання урни витягають одну кульку. Знайти імовірність того, що:

а) кулька чорна;

б) кулька була витягнута з першої урни, якщо вона виявилася білою.

101 Студент знає відповіді на 25 білетів з 30. Один білет уже витягли до нього. Яка імовірність, що студент знає той білет, що випав йому?

102 Слово «КОМБІНАТОРИКА» складається з літер розрізної абетки. Дві літери загубилися. Яка імовірність того, що на вийнятій з тих, що залишилися, картці написана голосна літера?

103 В одній групі вчаться 24 студенти, в іншій – 36, у третій – 40. На «відмінно» вчаться 6 студентів з першої групи, 6 – з другої і 4 – з третьої. Навмання вибраний студент одержав «відмінно». Яка імовірність того, що він вчиться в першій групі?

104 На іспит виносяться 30 питань. З 25 студентів 10 знають відповіді на всі запитання, 8 – на 25 запитань, 5 – на 20 запитань і двоє – на 15 запитань. Викликаний студент відповів на поставлене запитання. Яка імовірність того, що він:

а) знає відповіді на всі запитання;

б) знає відповіді на половину запитань?

105 У групі вчаться 20 дівчат і 10 юнаків. Домашнє завдання не виконали 4 дівчини і 3 юнаки. Навмання викликаний студент виявився не підготовленим. Яка імовірність того, що це юнак?

106 Стрілець A влучає в мішень з імовірністю 0,6, стрілець B – з імовірністю 0,5, а стрілець C – з імовірністю 0,4. Стрільці зробили залп по мішені. Відомо, що є два влучення. Що більш ймовірно: влучив стрілець C чи ні?

РОЗДІЛ 3 ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ

3.1 Формула Бернуллі. Найімовірніша кількість успіхів

Подія, яка може настати в кожному випробуванні з однією й тією ж імовірністю, що не змінюється, якщо стають відомі результати попередніх випробувань, називається *незалежною.* Передбачається також, що випробування можуть бути повторені як завгодно велику кількість разів.

Формула Бернуллі. Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна, то ймовірність $P_n(m)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A настане m разів, розраховується таким чином:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad \text{де } q = 1 - p.$$

Найімовірніша кількість успіхів – це кількість настання події в n незалежних випробуваннях, якщо ймовірність здійснення події саме цю кількість разів найбільша. Найімовірніша кількість успіхів (m_0) у серії з n незалежних випробувань задовольняє таку нерівність:

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Задачі

107 Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для даного стрільця постійна і дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що:

а) стрілець влучить два рази підряд;
б) при трьох пострілах буде не менше двох влучень;
в) при трьох пострілах буде рівно два влучення.

108 Побудувати многокутник імовірності для випадку, коли імовірність деякої події постійна в кожному випробуванні і дорівнює 2/3, якщо проведено 4 випробування.

109 Знайти найбільш ймовірну кількість влучень у мішень при 5 пострілах, використовуючи умову попередньої задачі.

110 Знайти найбільш ймовірну кількість випадань герба при 25 киданнях монети.

111 Імовірність того, що стрілець влучить в ціль при одному пострілі, дорівнює 0,7. Робиться 5 пострілів. Яка імовірність того, що:

а) з’явиться хоча б одна пробоїна;

б) з’явиться не менше чотирьох пробоїн?

112 Імовірність виходу з ладу кожного приладу дорівнює 0,4. Що імовірніше: вихід з ладу двох приладів при випробуванні чотирьох чи вихід з ладу трьох приладів при випробуванні шести, якщо прилади випробовуються незалежно один від одного?

113 Імовірність появи деякої події хоча б один раз при п'ятьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,99757. Визначити:

а) яка постійна імовірність появи цієї події при одному випробуванні?

б) яка найімовірніша кількість успіхів у даних умовах?

114 Нехай імовірність виходу з ладу кожного з моторів літака дорівнює q, причому мотори відмовляють незалежно один від одного. Літак може залишатися в повітрі, якщо працює не менше половини його моторів. При яких значеннях q потрібно віддати перевагу двомоторному літаку порівняно з чотиримоторним?

115 Імовірність того, що подія відбудеться в одному незалежному випробуванні, дорівнює 0,95. Визначити:

а) скільки потрібно зробити випробувань, щоб найімовірніша кількість успіхів дорівнювала 100?

б) якою повинна бути імовірність настання події при одному випробуванні, щоб при 20 незалежних випробуваннях найімовірніша кількість успіхів дорівнювала 15?

116 Імовірність влучення в «десятку» при одному пострілі дорівнює 0,2. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб з імовірністю, не меншою 0,9, влучити в «десятку» хоча б один раз?

117 Знайти імовірність того, що в родині з 5 дітей – двоє хлопчиків, якщо вважати імовірність народження хлопчика і дівчинки однаковою.

118 В урні 20 білих і 5 чорних кульок. Послідовно виймають 6 кульок, причому після кожного вибору кульки повертають в урну. Яка імовірність того, що серед вибраних кульок:

а) рівно 4 білих;

б) не менше 4 білих.

119 У цеху 6 моторів. Для кожного мотора імовірність того, що він у даний момент ввімкнений, дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що в даний момент:

а) ввімкнено 4 мотори;

б) ввімкнені всі мотори;

в) вимкнені всі мотори.

120 Знайти імовірність того, що подія А відбудеться в п'ятьох незалежних випробуваннях не менше двох разів, якщо в кожному випробуванні імовірність появи події А дорівнює 0,3.

121 Подія В відбувається у випадку, якщо подія А відбудеться не менше двох разів. Знайти імовірність того, що настане подія В, якщо буде зроблено 6 незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність появи події А дорівнює 0,4.

122 У коло вписаний квадрат. Знайти імовірність того, що серед чотирьох точок, кинутих у коло, у квадрат потраплять

а) дві точки;

б) хоча б дві точки.

3.2 Локальна теорема Муавра-Лапласа. Формула Пуассона

Якщо кількість випробувань досить велика, то розрахунки за формулою Бернуллі стають дуже незручними і складними. У такому випадку користуються однією з наближених формул – локальною формулою Мавра-Лапласа або формулою Пуассона.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна і відрізняється від нуля або одиниці, а кількість випробувань достатньо велика, то ймовірність $P_n(m)$ того, що в *n* незалежних випробуваннях подія *A* настане *m* разів, приблизно дорівнює:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad \text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $f(x)$ має такі властивості:

1. Вона є парною, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
2. Вона монотонно спадає при додатних значеннях *x*. $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$.
3. Якщо $x > 5$, то можна вважати, що $\varphi(x) \approx 0$.

Теорема Пуассона. Якщо ймовірність *p* настання події *A* в кожному випробуванні постійна, але мала, а кількість випробувань достатньо велика, але добуток $np = \lambda$ залишається невеликим (не більше 10), то ймовірність $P_n(m)$ того, що в *n* незалежних випробуваннях подія *A* настане *m* разів, приблизно дорівнює

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Задачі

123 Знайти імовірність того, що при 10 незалежних випробуваннях подія А відбудеться 4 рази, якщо імовірність її появи в кожному випробуванні постійна і дорівнює 0,3. Для цього:

а) скористатися формулою Бернуллі;

б) скористатися локальною формулою Муавра-Лапласа.

124 Знайти імовірність того, що подія А відбудеться рівно 70 разів у 243 випробуваннях, якщо імовірність появи цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,25.

125 Імовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,4. Знайти імовірність того, що при 600 пострілах в мішень буде влучено

а) 250 разів;

б) 50 разів.

126 Автоматичне штампування клем дає 10% відхилень від стандарту. Скільки стандартних клем варто очікувати з імовірністю 0,0587 з 400 клем?

127 Імовірність виготовлення деталі вищого гатунку на даному верстаті дорівнює 0,5. Знайти імовірність того, що серед навмання взятих 64 деталей половина – вищого гатунку.

128 Імовірність появи події А в кожному випробуванні дорівнює 0,6.Знайти імовірність того, що в 2400 випробуваннях

а) подія А відбудеться 1400 разів;

б) скільки разів повинна відбутися подія А, щоб імовірність цієї кількості успіхів дорівнювала 0,00225.

129 Імовірність влучення в мішень стрільцем при одному пострілі дорівнює 0,75. Зроблено 100 пострілів. Знайти:

а) найбільш імовірну кількість влучень;

б) відповідну йому імовірність.

130 Яка імовірність того, що при 80 кидках грального кубика шістка випаде 10 разів?

131 Нехай імовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,004. Знайти імовірність того, що серед 1000 деталей виявиться п'ять нестандартних. Порівняти відповідь, отриману за формулою Муавра-Лапласа і формулою Пуассона (значення, отримане за формулою Бернуллі, $\approx 0{,}1552$).

132 Робітниця прядильного цеху обслуговує 800 веретен. Імовірність обривання пряжі за проміжок часу t дорівнює 0,005. Знайти:

а) найбільш ймовірну кількість обривання пряжі і відповідну імовірність;

б) імовірність того, що буде не більше 1 обривання пряжі.

133 Серед насіння пшениці – 0,6% насіння бур'яну. Навмання вибирають 1000 насінин. Яка імовірність знайти серед них:

а) рівно 6 насінин бур'яну;

б) не менше 3 насінин бур'яну?

134 З умов випуску лотереї відомо, що виграє 1/20 усіх випущених квитків. Визначити:

а) скільки потрібно купити квитків, щоб імовірність виграшу була не менше 0,99;

б) яка імовірність того, що серед 200 квитків виграє не менше 5.

135 Для кожного абонента імовірність зателефонувати на комутатор протягом години дорівнює 0,01. Комутатор обслуговує 300 абонентів. Знайти імовірність того, що протягом години зателефонують:

а) 4 абоненти;

б) хоча б один абонент.

136 Апаратура містить 2000 однаково надійних елементів, імовірність відмови яких для кожного дорівнює 0,0005. Знайти імовірність відмови апаратури, якщо це відбувається при відмові хоча б одного з елементів.

3.3 Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна і відрізняється від нуля або одиниці, а кількість випробувань достатньо велика, то ймовірність $P_n(m)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A настане кількість разів, що перебуває в межах від a до b включно ($a<b$), приблизно дорівнює:

$$P_n(a \le m \le b) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right],$$

де $\Phi(x) = \frac{2}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $\quad x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$, $\quad x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}$.

Функція $\Phi(x)$ має такі властивості:

1. Вона є непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. Вона монотонно зростає при додатних значеннях x. $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x) = 1$.
3. Якщо $x > 5$, то можна вважати, що $\Phi(x) \approx 1$.

Наслідок 1. Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна і відрізняється від нуля або одиниці, а кількість випробувань достатньо велика, то ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях абсолютна величина відхилення кількості настання події A від додатку np не перевищить додатного числа r, приблизно дорівнює

$$P_n(|m-np|\le r)\approx \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{npq}}\right).$$

Наслідок 2. Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна і відрізняється від нуля або одиниці, а кількість випробувань достатньо велика, то ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях абсолютна величина відхилення частоти настання події A від її ймовірності p не перевищить певного додатного числа Δ, приблизно дорівнює

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le \Delta\right)\approx \Phi\left(\Delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Задачі

137 Підприємство виробляє 20% бракованої продукції. Визначити імовірність того, що в партії з 100 виробів виявиться:

а) 30 бракованих виробів;
б) хоча б один бракований виріб;
в) не більше 10 бракованих.

138 Пакувальник укладає 900 деталей, перевірених ВТК чи виготовлених робітниками, що мають особисте клеймо. Особистим клеймом позначено 10% усіх деталей. Знайти імовірність того, що серед упакованих деталей виявиться від 100 до 120 деталей з особистим клеймом.

139 Імовірність для кожного з 100 верстатів бути ввімкненим дорівнює 0,8. Яка імовірність того, що в довільний момент часу будуть ввімкнені від 70 до 86 верстатів?

140 Імовірність того, що деталь не пройшла перевірку ВТК, дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей виявиться неперевірених:

а) від 70 до 100 деталей;

б) менше половини всіх деталей.

141 Деяке підприємство випускає 99,2% стандартних виробів. Яка імовірність того, що серед 5000 навмання відібраних деталей цього підприємства кількість нестандартних не перевищить 60?

142 Імовірність настання події у кожному з 100 незалежних випробувань постійна і дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що подія відбудеться:

а) не менше 75 разів і не більше 90 разів;

б) не менше 75 разів;

в) не більше 74 разів.

143 Імовірність появи події у кожному незалежному випробуванні дорівнює 0,8. Скільки потрібно зробити випробувань, щоб з імовірністю 0,9 можна було очікувати, що подія відбудеться не менше 75 разів?

144 Імовірність того, що деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,1. Знайти імовірність того, що серед випадково відібраних 400 деталей відносна частота появи нестандартних виробів відхилиться від імовірності 0,1 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,03.

145 Імовірність того, що деталь виявиться бракованою, дорівнює 0,1. Знайти, скільки деталей треба відібрати, щоб з імовірністю, що дорівнює 0,9544, можна було стверджувати, що відносна частота появи бракованих виробів (серед відібраних) відхилиться від постійної імовірності 0,1 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,03.

146 Відділ технічного контролю перевіряє на стандартність 900 деталей. Імовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,9. Знайти з імовірністю 0,95 межі, в які потрапить кількість стандартних виробів з перевірених.

147 Імовірність появи події у кожному з 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від його імовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

148 Імовірність появи події у кожному незалежному випробуванні дорівнює 0,5. Знайти кількість випробувань, при якому з імовірністю 0,7698 можна чекати, що відносна частота появи події відхилиться від його імовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

149 Гральний кубик кидають 80 разів. Знайти з імовірністю 0,99 межі, у яких буде укладатися кількість випадань шістки.

РОЗДІЛ 4 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

4.1 Дискретні випадкові величини. Закон розподілу

Випадковою величиною називають змінну, яка може набувати тих чи інших значень залежно від різних обставин.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина її значень скінченна.

Прикладами дискретних випадкових величин зі скінченною кількістю значень можуть бути кількість народжених дітей протягом доби в населеному пункті, кількість пасажирів автобуса тощо.

Функція $p(x)$, що пов’язує значення випадкової величини з відповідними їм імовірностями, являє собою *закон розподілу* дискретної випадкової величини. Його зручно подавати у вигляді таблиці:

Значення	x_1	x_2	...	x_n
Імовірність	p_1	p_2	...	p_n

Усі можливі значення випадкової величини утворюють повну групу, тому сума їх імовірностей дорівнює одиниці

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

Задачі

150 У студентській групі організована лотерея. Розігруються дві речі – вартістю 10 грн і 30 грн. Скласти закон розподілу суми чистого виграшу для студента, який придбав один квиток за 1 грн., якщо всього продано 50 квитків.

151 Скласти закон розподілу кількості влучень у мішень при 4 пострілах, якщо імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,1.

152 Скласти закон розподілу імовірності випадкової величини – кількості очок, що випали на верхній грані грального кубика при 1 кидку.

153 Нехай імовірність виготовлення нестандартного виробу дорівнює 0,06. Контролер бере з партії виріб і відразу перевіряє його якість. Якщо виріб виявляється нестандартним, подальші випробування припиняються, а партія затримується. Якщо ж виріб виявляється стандартним, контролер бере наступний і т.д., але всього перевіряє не більше 5 виробів. Скласти закон розподілу кількості виробів, що перевіряються.

154 Накидаються кільця на кілочок або до 1-го влучення, або до повного закінчення всіх кілець, кількість яких дорівнює 5. Скласти закон розподілу випадкової величини – кількості кинутих кілець, якщо імовірність накидання кільця на кілочок при кожному кидку дорівнює 0,9. Використовуючи складений закон, знайти імовірність того, що кількість кидків буде менше 4.

155 З 25 контрольних робіт, серед яких 5 написані на «відмінно», навмання витягають 3 роботи. Скласти закон розподілу кількості робіт, оцінених на «відмінно», що опинилися у вибірці.

156 Проводяться незалежні випробування, у кожному з яких імовірність настання деякої випадкової події $\boldsymbol{A}$ постійна і дорівнює $\boldsymbol{p}$. Скласти закон розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$ – кількості випробувань, які треба зробити до першої появи випадкової події $\boldsymbol{A}$.

157 Три стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Імовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,7, для другого – 0,4, для третього – 0,8. Скласти закон розподілу кількості влучень у мішень.

158 За умовами лотереї із задачі № 150 два студенти придбали по одному квитку вартістю 1 грн кожен. Скласти закон розподілу суми виграшу для другого студента, якщо перший виграв річ вартістю 30 грн.

159 Є 6 квитків у театр, з яких 4 на місця в першому ряді. Навмання беруть 3 квитки. Скласти закон розподілу кількості квитків першого ряду, що опинилися у вибірці. Використовуючи складений закон, знайти імовірність того, що у вибірці буде більше 2 квитків у перший ряд.

160 Монета підкидається 4 рази. Скласти закон розподілу кількості випадання герба і побудувати многокутник імовірностей.

161 Імовірність влучення стрільця в мішень дорівнює 0,5. Стрілець, маючи в запасі 6 патронів, веде вогонь по мішені до першого влучення або до повного закінчення всіх патронів. Скласти закон розподілу випадкової величини – кількості витрачених патронів.

162 З 15 жетонів, занумерованих цілими числами від1 до 15, навмання витягають 3 жетони. Скласти закон розподілу кількості вибраних жетонів, номери яких кратні 5.

163 У грошовій лотереї випущено 100 квитків. Розігрується один виграш у 50 грн. і десять виграшів вартістю 1 грн. Знайти закон розподілу випадкової величини X – вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного квитка.

164 Можливі такі значення випадкової величини: $x_1=2$; $x_2=5$; $x_3=8$. Відомі імовірності перших двох значень: $p_1=0,4$; $p_2=0,15$. Знайти імовірність того, що випадкова величина матиме значення x_3.

165 З двох гармат по черзі стріляють у мішень до першого влучення однією з гармат. Імовірність влучення в мішень першою гарматою дорівнює 0,3, другою – 0,7. Починає стріляти перша гармата. Скласти закони розподілу випадкових величин:

а) кількості зроблених пострілів;
б) кількості снарядів, витрачених першою гарматою;
в) кількості снарядів, витрачених другою гарматою.

4.2. Математичні операції над випадковими величинами. Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення. Функція розподілу

Добуток kX випадкової величини *X* на постійну величину *k* – це нова випадкова величина, яка з тими самими імовірностями, що і випадкова величина *X*, набуває значень, що дорівнюють добутку на *k* значень випадкової величини *X*.

Квадрат випадкової величини *X* – це нова випадкова величина, яка з тими самими імовірностями, що і випадкова величина *X*, набуває значень, що дорівнюють квадратам її значень.

Сума випадкових величини *X* та *У* – це нова випадкова величина, яка набуває всіх значень виду $x_i + y_j \quad (i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., m)$ з імовірностями p_{ij}, що виражають імовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення x_i, а *У* – значення y_j, тобто

$$p_{ij} = P(X = x_i;\ Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P_{X=x_i}(Y = y_j).$$

Якщо випадкові величини *X* та *У* незалежні, то ці імовірності дорівнюють

$$p_{ij} = P(X = x_i;\ Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$

Аналогічно визначаються різниця та добуток випадкових величин *X* та *У*.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх її значень на відповідні їм імовірності:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Властивості математичних сподівань:

1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює цій постійній, тобто $M(X = const) = const$.
2. Постійний множник можна виносити за символ математичного сподівання, тобто $M(kX) = k \cdot M(X)$.
3. Математичне сподівання суми (різниці) випадкових величин дорівнює сумі (різниці) їх математичних сподівань, тобто
$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$
4. Математичне сподівання добутку випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань, тобто

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

5. Якщо всі значення випадкової величини X зменшити (збільшити) на одне й те саме число C, то математичне сподівання її зменшиться (збільшиться) на те саме число C, тобто
$$M(X \pm C) = M(X) \pm C.$$

Дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення її від математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

або $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

або

$$D(X) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \ldots + (x_n - M(X))^2 p_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$$

Властивості дисперсій:

1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю, тобто
$$D(X = const) = 0.$$
2. Постійний множник можна виносити за символ дисперсії, якщо піднести його до квадрата, тобто
$$D(kX) = k^2 \cdot D(X).$$
3. Дисперсія суми (різниці) випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій, тобто
$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ випадкової величини – це арифметичне значення кореня квадратного з її дисперсії, тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Теорема. Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої по біноміальному закону, тобто кількості настання події A в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких вона може настати з постійною імовірністю p, дорівнює np, а дисперсія дорівнює npq, де $q = 1 - p$, тобто

$$M(X) = np, \ D(X) = npq.$$

Функція розподілу випадкової величини – функція $F(x)$, що виражає для кожного x імовірність того, що випадкова величина набуде якого-небудь значення, меншого x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Імовірність того, що випадкова величина X набуде якого-небудь значення, що задовольняє нерівність $x_1 \le X < x_2$, дорівнює приросту її функції розподілу на цьому інтервалі, тобто

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Функція розподілу будь-якої випадкової величини не спадає і змінюється від 0 до 1 при зміні x від $-\infty$ до $+\infty$.

Задачі

166 Команда складається з двох стрільців. Кількість очок, що вибиваються кожним з них при одному пострілі, є випадковими величинами X_1 і X_2, які задані законами розподілу:

X_1	1	2	3
p	0,2	0,5	0,3

X_2	1	2
p	0,6	0,4

Результати стрільби одного стрільця не впливають на результати стрільби іншого. Необхідно:

а) скласти закон розподілу кількості очок, що вибиваються командою, якщо стрільці зроблять по одному пострілу;

б) розрахувати математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкових величин X_1, X_2 та їх суми;

в) скласти закон розподілу випадкової величини – кількості балів, що може вибити перший стрілець, якщо за кожне очко дають 10 балів. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

167 Випадкові величини X і Y задані законами розподілу:

X	–2	–1	0	1
p	0,2	0,3	0,4	0,1

Y	–1	1	2
p	0,6	0,1	0,3

Скласти закони розподілу таких випадкових величин і розрахувати їх характеристики:

а) сума $(X + Y)$;

б) різниця ($\boldsymbol{X - Y}$);

в) квадрат ($\boldsymbol{X^2}$);

г) добуток ($\boldsymbol{XY}$);

д) середнє арифметичне.

168 Три випадкових величини задані законами розподілу:

$\boldsymbol{X}$	–2	–1	0	1
$\boldsymbol{p}$	0,2	0,3	0,4	0,1

$\boldsymbol{Y}$	–1	1	2
$\boldsymbol{p}$	0,6	0,1	0,3

$\boldsymbol{Z}$	–1	1
$\boldsymbol{p}$	0,6	0,1

а) розрахувати математичні сподівання, дисперсії і середні квадратичні відхилення цих випадкових величин;

б) скласти закон розподілу суми цих випадкових величин;

в) розрахувати відповідні характеристики для суми і зробити перевірку за їх властивостями.

169 Знайти математичне сподівання випадкової величини Z, якщо відомі математичні сподівання випадкових величин X та Y – $M(X) = 5$, $M(Y) = 2$:

а) $Z = 2X + 4Y$;

б) $Z = XY - 2X$;

в) $Z = X - 4$.

170 Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$, а також відомі математичні сподівання цієї величини і її квадрата: $M(X)=0,1$; $M(X^2)=0,9$. Знайти імовірності p_1, p_2, p_3, що відповідають значенням x_1, x_2, x_3 (скласти закон розподілу).

171 Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – кількості появ події А в двох незалежних випробуваннях, якщо імовірності появи події у цих випробуваннях постійні і відомо, що $M(X)=1,2$.

172 Випадкова величина X може мати тільки два значення: +С і –С з однаковою імовірністю. Знайти дисперсію цієї величини.

173 Монета підкидається 3 рази. Необхідно:

а) скласти закон розподілу випадкової величини – кількості випадань герба;

б) знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини;

в) знайти функцію розподілу цієї випадкової величини і побудувати її графік;

г) використовуючи закон розподілу і функцію розподілу знайти імовірність того, що герб випаде не менше 2 разів.

174 Дискретна випадкова величина задана законом розподілу.

X	–2	–1	0	1
p	0,2	0,3	0,4	0,1

Необхідно:

а) знайти функцію розподілу цієї випадкової величини і побудувати її графік;

б) використовуючи функцію розподілу знайти імовірність того, що випадкова величина матиме значення, не менше 1, але не більше 3.

4.3 Неперервні випадкові величини. Щільність імовірності. Математичне сподівання і дисперсія неперервних випадкових величин

Випадкова величина називається *неперервною*, якщо її функція розподілу неперервна у всіх точках, за винятком, можливо, скінченної кількості точок на будь-якому скінченному інтервалі.

Прикладами неперервних випадкових величин можуть бути: діаметр деталі, зріст людини, дальність польоту снаряда тощо.

Щільністю ймовірності $f(x)$ неперервної випадкової величини називають похідну її функції розподілу $F(x)$, тобто

$$f(x) = F'(x).$$

Зазначимо, що щільність імовірності $f(x)$ випадкової величини X та її функція розподілу $F(x)$ взаємно визначають одна одну:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Теорема. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде будь-якого значення з інтервалу (a, b), дорівнює визначеному інтегралу від її щільності ймовірності в межах від a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Звідси легко отримати, що $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Математичним сподіванням $M(X)$ неперервної випадкової величини X, щільністю імовірності якої є функція $f(x)$, називають величину інтеграла

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

у випадку, коли він сходиться абсолютно, а *дисперсією* $D(X)$ називають величину інтеграла

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - a^2,$$

якщо він сходиться [де $a = M(X)$].

Задачі

175 Хвилинна стрілка електронного годинника пересувається стрибками щохвилини. Ви поглянули на годинник. Вони показують a хвилин. Тоді для Вас істинний час у цей момент буде випадковою величиною. Знайти її функцію розподілу. Знайти імовірність того, що в цю мить годинник покаже час, що відрізняється від істинного не більше ніж на 20 с.

176 Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}5x & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Знайти імовірність того, що в результаті випробування X матиме значення:

а) менше 0,2;
б) менше 3;
в) не менше 3;
г) не менше 5.

177 Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le -1, \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4} & при \quad -1<x\le \frac{1}{3}, \\ 1 & при \quad x>\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X матиме значення з інтервалу (0; 1/3).

178 Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ x^2 & при \quad 0<x\le 1, \\ 1 & при \quad x>1. \end{cases}$$

Знайти імовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань випадкова величина X рівно три рази набуватиме значення, що належить інтервалу (0,25; 0,75).

179 Випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ x & при \quad 0<x\le 1, \\ 1 & при \quad x>1. \end{cases}$$

Знайти щільність імовірності.

180 Випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ \dfrac{1-\cos x}{2} & при \quad 0<x\le \pi, \\ 1 & при \quad x>\pi. \end{cases}$$

Знайти щільність імовірності.

181 Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \cos x & \text{при} \quad 0 < x \le \pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

182 Задано щільність розподілу імовірності випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 2x & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Знайти імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X матиме значення, що належить інтервалу (0,5; 1).

183 Випадкова величина задана щільністю імовірності:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -\pi/2, \\ a\cos x & \text{при} \quad -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a.

184 Випадкова величина задана щільністю імовірності:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{\sin x}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Знайти:

а) функцію розподілу;

б) імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина матиме значення з інтервалу (0; $\pi/4$).

185 Щільність імовірності випадкової величини X задана так: $f(x) = \dfrac{A}{1+x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$. Знайти коефіцієнт A та імовірність того, що випадкова величина X матиме яке-небудь значення з інтервалу (0; 5).

186 Знайти функцію розподілу випадкової величини, щільність імовірності якої отримана у попередній задачі.

187 Випадкова величина X задана на всій осі Ox функцією розподілу $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{2}$. Знайти можливе значення x^*, що задовольняє умову: з імовірністю ¼ випадкова величина X матиме значення, більше x^*.

188 Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1, \\ x - \frac{1}{2} & при \quad 1 < x \le 2, \\ 0 & при \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти:

а) функцію розподілу $F(x)$;

б) математичне сподівання і дисперсію.

189 Випадкова величина X задана щільністю імовірності $f(x) = 2x$ в інтервалі (0; 1), поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення величини X.

190 Випадкова величина X задана щільністю імовірності $f(x) = c(x^2 + 2x)$ в інтервалі (0; 1), поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти:

а) параметр c;

б) математичне сподівання величини X.

191 Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, що задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ x & при \quad 0<x\le 1,\\ 1 & при \quad x>1.\end{cases}$$

192 Знайти математичне сподівання випадкової величини X, що задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \frac{x}{4} & при \quad 0<x\le 4,\\ 1 & при \quad x>4.\end{cases}$$

4.4 Рівномірно розподілені випадкові величини. Нормально розподілені випадкові величини

Неперервна випадкова величина називається *рівномірно розподіленою*, якщо її щільність імовірності має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \ -\infty<x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & при \ a\le x\le b,\\ 0, & при \ b<x<\infty.\end{cases}$$

Нормально розподіленою називають випадкову величину, для якої щільність імовірності задана таким чином:

$$f_н(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a і σ – відповідно математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення (σ^2 – дисперсія).

Теорема. Імовірність того, що випадкова величина X, розподілена за нормальним законом, набуде якого-небудь значення з інтервалу (x_1, x_2), така:

$$P(x_1<X<x_2)=\frac{1}{2}\left[\varPhi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\varPhi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right].$$

Теорема. Імовірність того, що відхилення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, від її математичного сподівання a, не перевищить за абсолютною величиною $\Delta > 0$, така:

$$P(|X-a| \le \Delta) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

Задачі

193 Випадкова величина X рівномірно розподілена. Щільність імовірності її $f(x)=c$ при $0 \le x \le 10$ і $f(x)=0$ при всіх інших значеннях x. Знайти її математичне сподівання і дисперсію.

194 Знайти математичне сподівання і дисперсію неперервної випадкової величини X, розподіленої рівномірно в інтервалі (a, b).

195 Ціна поділу шкали амперметра дорівнює 0,1 А. Показання округляють до найближчого цілого значення. Знайти імовірність того, що при відліку буде зроблена помилка, яка перевищує 0,02 А.

196 Нехай вага пійманої риби підлягає нормальному закону з параметрами: a = 375 г, σ = 25 г. Знайти імовірність того, що вага однієї пійманої риби буде:

а) від 300 до 425 г;
б) не більше 450 г;
в) більше 300 г.

197 Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення цієї величини відповідно дорівнюють 30 і 10. Знайти імовірність того, що X матиме значення, яке належить інтервалу (10; 50).

198 Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 10 і 2. Знайти імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X матиме значення з інтервалу (12; 14).

199 Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, що розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), що дорівнює 50 мм. Фактично довжина виготовлених деталей не менше 32 мм і не більше 68 мм. Знайти імовірність того, що довжина навмання взятої деталі:

а) більше 55 мм;

б) менше 40 мм.

200 Нехай діаметр виготовленої в цеху деталі є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з параметрами: $a = 4{,}5$ см і $\sigma = 0{,}05$ см. Знайти імовірність того, що розмір діаметра взятої навмання деталі відрізняється від математичного сподівання не більше ніж на 1 мм.

201 Випадкова величина X нормально розподілена. Її математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення дорівнюють відповідно 20 і 10. Знайти імовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше 3.

202 Випадкові похибки вимірювання підлягають нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ мм і математичним сподіванням $a = 0$. Знайти імовірність того, що з трьох незалежних вимірів похибка хоча б одного не перевищить за абсолютною величиною 4 мм.

203 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a = 10$. Імовірність попадання X в інтервал (10; 20) дорівнює 0,3. Чому дорівнює імовірність попадання X в інтервал (0; 10)?

204 Середнє квадратичне відхилення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, дорівнює 2 см, а математичне сподівання дорівнює 16 см. Знайти межі, у яких з імовірністю 0,95 варто очікувати значення випадкової величини.

205 Автомат виготовляє кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менше 0,7 мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена нормально із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,4$ мм, знайти, скільки в середньому буде придатних кульок серед ста виготовлених.

РОЗДІЛ 5 ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. НЕРІВНОСТІ ЧЕБИШОВА

Якщо в певних умовах імовірність події дуже мала, то при одноразовому її виконанні можна бути впевненим в тому, що ця подія не відбудеться, і в практичній діяльності вважати, що вона є неможливою.

Імовірність, якою можна знехтувати у даному дослідженні, називають рівнем значущості.

Під *законом великих чисел* розуміють сукупність пропозицій, у яких стверджується, що з імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, відхилення середнього арифметичного достатньо великої кількості випадкових величин від постійної величини – середнього арифметичного їх математичних сподівань, не перевищить заданого, як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$.

Загальне сучасне постановлення задачі, формулювання закону великих чисел, розвиток ідей та методів доведення теорем, що відносять до цього закону, належить російським ученим Чебишову, Маркову, Ляпунову.

Лема Чебишова. Якщо серед значень випадкової величини X немає від'ємних, то ймовірність того, що вона набуде якого-небудь значення, більшого від додатного числа A, не більше дробу, чисельник якого – математичне сподівання випадкової величини, а знаменник – число A, тобто

$$P(X > A) \le \frac{M(X)}{A}.$$

Нерівності Чебишова:

1) Імовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання перевищить за абсолютною величиною додатне число ε, не більше дробу, чисельник якого – дисперсія випадкової величини, а знаменник – квадрат ε:

$$P\left(\left|X - a\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

2) Імовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання не перевищить за абсолютною величиною додатне число ε, не менше різниці між одиницею та дробом, чисельник якого – дисперсія випадкової величини, а знаменник – квадрат ε:

$$P\left(\left|X-a\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

3) Нерівність Чебишова для частоти події має вигляд

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебишова. Якщо дисперсії незалежних випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n обмежені однією і тією самою постійною C, а їх кількість достатньо велика, то як завгодно близька до одиниці ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань не перевищить за абсолютною величиною певного додатного числа ε, яке б мале воно не було:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Задачі

206 Кількість води, необхідна протягом доби підприємству для технічних потреб, є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 125 м^3. Оцінити імовірність того, що в найближчу добу витрата води на підприємстві перевищить 500 м^3.

207 Середня добова витрата електроенергії в населеному пункті для особистих потреб складає 4000 кВт·ч. Оцінити імовірність того, що в найближчу добу витрата електроенергії в цьому населеному пункті не перевищить 10000 кВт·ч.

208 Швидкість вітру протягом доби в даній місцевості є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 15 м/с. Оцінити імовірність того, що в найближчу добу швидкість вітру в цій місцевості перевищить 40 м/с.

209 Середнє споживання електроенергії в травні (за багато років) у даному мікрорайоні дорівнює 360000 кВт·год. Необхідно:

а) користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 10^6 кВт·год;

б) оцінити ту саму ймовірність, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40000 кВт·год.

210 Математичне сподівання річної кількості опадів у даній місцевості дорівнює 55 см. Оцінити ймовірність того, що в цій місцевості випаде за рік не менше 175 см опадів.

211 Середня річна кількість сонячних днів у даній місцевості дорівнює 75. Оцінити ймовірність того, що протягом року у цій місцевості буде не більше 200 сонячних днів.

212 Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента за час *T* дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишова оцінити імовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, що відмовили, і середньою кількістю (математичним сподіванням) відмов за *час* Т виявиться:

а) менше двох;

б) не менше двох.

213 В освітлювальну мережу паралельно ввімкнено 20 ламп. Імовірність того, що за час *T* лампа буде ввімкнена, дорівнює 0,8. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити імовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю ввімкнених ламп і середньою кількістю (математичним сподіванням) ввімкнених ламп за час *T* виявиться:

а) менше трьох;

б) не менше трьох.

214 Імовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює ½. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити імовірність того, що кількість *X* появ події *A* розміщено в межах від 40 до 60, якщо буде зроблено 100 незалежних випробувань.

215 Імовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює ¼. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити імовірність того, що кількість X появ події розміщено в межах від 150 до 250, якщо буде зроблено 800 випробувань.

216 Нехай імовірність виробництва нестандартної деталі в деяких технологічних умовах дорівнює 0,1. Чому не можна застосувати нерівність Чебишова для оцінки імовірності того, що кількість нестандартних серед 10000 деталей буде в межах від 950 до 1030 включно? Якою повинна бути права межа, щоб застосування нерівності Чебишова стало можливим? Розв'язати задачу при відповідній зміні правої межі.

217 Нехай схожість насіння деякої рослини складає 70%. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити імовірність того, що при посіві 10000 насінин відхилення частини тих, що зійшли, від імовірності того, що зійде кожне з них, не перевищить за абсолютною величиною 0,01.

218 Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити імовірність того, що $|X - M(X)| < 0,2$.

219 Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити імовірність того, що $|X - M(X)| < \sqrt{0,4}$.

220 Середня швидкість вітру на певній висоті дорівнює 25 км/год. Оцінити швидкість вітру, яку можна очікувати на цій висоті з імовірністю, не меншою ніж 0,9, якщо σ=4,5км/год.

221 При визначенні курсу літака середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання дорівнює $\sigma = 2'$. Вважаючи математичне сподівання похибки вимірювання таким, що дорівнює нулю, оцінити ймовірність того, що похибка при вимірюванні курсу літака буде більшою за $5'$.

222 Здійснюється серія з n послідовних незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює $p = \frac{1}{3}$. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що у цій серії частота успіхів відхиляється від імовірності за модулем не більше ніж на 0,01, якщо:

а) $n = 9000$;

б) $n = 75000$. Порівняти ці оцінки з результатами застосування інтегральної теореми Муавра-Лапласа.

ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ

д1 На підприємстві брак складає в середньому 2% загального випуску виробів. Серед придатних вироби першого сорту складають 95%. Яка імовірність того, що навмання взятий виріб виявиться першого сорту, якщо виріб узятий:

а) з тих, що пройшли перевірку;

б) із загальної маси виготовленої продукції?

д2 Нехай імовірність того, що покупцю необхідне взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що п'ять перших покупців запитають взуття 41-го розміру.

д3 До механізму входять три однакові деталі. Робота механізму порушується, якщо при його складанні будуть поставлені всі три деталі розміром, більшим від зазначеного на кресленні. У складальника залишилося 12 деталей, з яких п'ять – більшого розміру. За умови, що складальник бере деталі навмання, знайти імовірність:

а) нормальної;

б) ненормальної роботи першого складеного з цих деталей механізму.

д4 Робітник обслуговує три верстати. Імовірність того, що протягом зміни вимагатиме його уваги перший верстат, дорівнює 0,7, другий - 0,75, третій - 0,8. Знайти імовірність того, що протягом зміни уваги робітника вимагатимуть які-небудь два верстати.

д5 Серед вироблюваних робітником деталей у середньому 4% браку. Яка імовірність того, що серед узятих на випробування п'яти деталей не виявиться ні однієї бракованої?

д6 Для повідомлення про аварію встановлені два незалежно працюючі сигналізатори-автомати. Імовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор, дорівнює 0,95; другий – 0,9. Знайти імовірність того, що при аварії надійде сигнал:

а) хоча б від одного сигналізатора;

б) тільки від одного сигналізатора.

д7 Імовірність виграшу по одному квитку лотереї дорівнює 1/7. Яка імовірність того, що власник п'яти квитків лотереї виграє:

а) по всіх п'ятьох;
б) ні по жодному;
в) хоча б по одному квитку?

д8 До механізму входять три однакові деталі. Робота механізму порушується, якщо при його складанні будуть поставлені або всі деталі більші, або всі деталі менші від позначеного на кресленні розміру. У складальника залишилося 15 деталей, з яких 10 за розміром більші, а інші – менші від необхідного. Знайти імовірність ненормальної роботи першого складеного з цих деталей механізму, якщо складальник бере деталі навмання.

д9 При прийманні партії виробів підлягає перевірці половина виробів. Умова приймання – наявність браку у вибірці менше 2%. Обчислити імовірність того, що партія з 100 виробів, що містить 5% браку, буде прийнята.

д10 У шестиламповому радіоприймачі (усі лампи різні) перегоріла одна лампа. З метою усунення несправності навмання вибрану лампу заміняють справною із запасного комплекту, після чого відразу перевіряють роботу приймача. Яка імовірність того, що приймач буде нормально працювати після заміни:

а) однієї;
б) двох;
в) трьох;
г) чотирьох;
д) п'яти;
е) шести ламп?

д11 Робітник обслуговує чотири верстати. Імовірність того, що протягом години перший верстат не вимагатиме уваги робітника, дорівнює 0,3, другий – 0,4, третій – 0,7, четвертий – 0,4. Знайти імовірність того, що протягом години жоден верстат не вимагатиме уваги робітника.

д12 Серед 60 електричних лампочок три нестандартні. Знайти імовірність того, що дві взяті одночасно електролампочки виявляться нестандартними.

д13 У мішку змішані нитки, серед яких 30% білих, а інші – червоні. Визначити імовірність того, що вийняті навмання дві нитки будуть:

а) одного кольору;

б) різні за кольором.

д14 У зв'язці є п'ять різних ключів, з яких тільки одним можна відімкнути двері. Навмання вибирається ключ і робиться спроба відімкнути ним двері. Ключ, який виявився невідповідним, більше не використовується. Знайти імовірність того, що:

а) двері будуть відімкнені першим ключем;

б) для відімкнення дверей буде використано не більше двох ключів.

д15 Радист тричі викликає кореспондента. Імовірність того, що буде прийнятий перший виклик, дорівнює 0,2, другий - 0,3, третій - 0,4. Події, які полягають в тому, що даний виклик буде почутий, незалежні. Знайти імовірність того, що кореспондент почує виклик радиста.

д16 Два стрільці роблять по одному пострілу у мішень. Нехай імовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,7, для другого - 0,8. Знайти імовірність того, що влучать у мішень:

а) обидва;

б) тільки один;

в) жоден не влучить.

д17 Деталь проходить три операції обробки. Імовірність того, що вона виявиться бракованою після першої операції, дорівнює 0,02, після другої - 0,03, третьої - 0,02. Знайти імовірність того, що деталь буде небракованою після трьох операцій, припускаючи, що поява браку на окремих операціях - незалежні події.

д18 Робітник обслуговує чотири верстати. Імовірність того, що протягом години перший верстат не вимагатиме уваги робітника, дорівнює 0,7, другий - 0,4, третій - 0,4, четвертий - 0,3. Знайти імовірність того, що хоча б один верстат протягом години не вимагатиме уваги робітника.

д19 Чотири мисливці домовилися стріляти по дичині у визначеній послідовності. Наступний мисливець робить постріл лише у випадку промаху попереднього. Імовірності влучення в ціль кожним з мисливців однакові і кожна дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що буде зроблено:

а) один;
б) два;
в) три;
г) чотири постріли.

д20 Екзаменаційний білет містить три запитання. Імовірність того, що студент відповість на перше і друге запитання, дорівнює кожна 0,9, на третє - 0,8. Знайти імовірність того, що студент здасть іспит, якщо для цього необхідно відповісти:

а) на всі запитання;
б) принаймні на два запитання білета.

д21 Серед деталей, що надходять до складання, з першого верстату 0,1% бракованих, із другого - 0,2%, із третього - 0,25%, з четвертого - 0,5%. Продуктивності верстатів співвідносяться як 4:3:2:1 відповідно. Узята навмання деталь виявилася стандартною. Знайти імовірність того, що вона виготовлена:

а) на першому;
б) на другому;
в) на третьому;
г) на четвертому верстаті.

Як перевірити правильність обчислень цих імовірностей?

д22 Для участі в студентських відбірних спортивних змаганнях виділено з першої групи чотири студенти, з другої - шість, з третьої - п'ять студентів. Імовірності того, що відібраний студент із першої, другої, третьої груп потрапить у збірну інституту, дорівнюють відповідно 0,5, 0,4 і 0,3. Навмання вибраний учасник змагань потрапив у збірну. До якої з цих трьох груп він імовірніше всього належить?

д23 Брак у продукції заводу внаслідок дефекту A складає 5%, причому серед забракованої за ознакою A продукції в 10% випадків виявляється дефект B, а в продукції, що не має дефекту A, дефект B виявляється в 1% випадків. Знайти імовірність того, що дефекту B не буде у всій продукції.

д24 Брак у продукції заводу внаслідок дефекту A складає 4%, а внаслідок дефекту B – 3,5%. Придатна продукція заводу складає 95%. Знайти імовірність того, що:

а) серед продукції, що не містить дефекту A, виявиться дефект B;

б) серед забракованої за ознакою A продукції виявиться дефект B.

д25 Є п'ять гвинтівок, з яких три з оптичним прицілом. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом складає для певного стрільця 0,95, без оптичного прицілу - 0,8. Знайти імовірність влучення в ціль, якщо стрілець зробить один постріл з навмання взятої гвинтівки.

д26 З першого верстата на складання надходить 40%, із другого - 30%, із третього - 20%, з четвертого - 10% усіх деталей. Серед деталей першого верстата 0,1% бракованих, другого - 0,2%, третього - 0,25%, четвертого - 0,5%. Знайти імовірність того, що деталь, яка надійшла на складання, бракована.

д27 Скільки разів потрібно зробити випробування, щоб з імовірністю, не меншою k, можна було стверджувати, що принаймні один раз відбудеться подія, імовірність настання якої в кожному випробуванні дорівнює p?

д28 Серед насіння соняшника іноді виявляють насінини, не сприйнятливі до певної поширеної хвороби. Скільки потрібно посіяти насіння, щоб з імовірністю, не меншою 0,999, очікувати, що виросте хоча б одна рослина, не сприйнятлива до цієї хвороби, якщо для кожної рослини імовірність бути сприйнятливою до неї дорівнює 0,9999999?

д29 Нехай імовірність влучення в рухому ціль при одному пострілі постійна і дорівнює 0,05. Скільки необхідно зробити пострілів для того, щоб з імовірністю, не меншою 0,75, мати хоча б одне влучення?

д30 Заводом послана автомашина за різними матеріалами на чотири бази. Імовірність наявності потрібного матеріалу на першій базі дорівнює 0,9, на другій - 0,95, на третій - 0,8, на четвертій - 0,6. Знайти імовірність того, що тільки на одній базі не виявиться потрібного матеріалу.

д31 Імовірність виграшу по одному квитку лотереї дорівнює 1/7. Яка імовірність того, що людина, яка має шість квитків:

а) виграє по двох квитках;
б) виграє по трьох квитках;
в) не виграє по двох квитках?

д32 Вважаючи імовірності народження хлопчика і дівчинки однаковими, знайти імовірність того, що серед 10 немовлят шість виявляться хлопчиками.

д33 На автобазі є 12 автомашин. Імовірність виходу на лінію кожної з них дорівнює 0,8. Знайти імовірність нормальної роботи автобази в найближчий день, якщо для цього необхідно мати на лінії не менше восьми автомашин.

д34 Схожість насіння деякої рослини складає 70%. Яка імовірність того, що з 10 посіяних насінин зійдуть:

а) вісім;
б) принаймні вісім;

в) не менше трьох?

д35 Нехай імовірність того, що навмання взята деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Знайти імовірність того, що серед узятих навмання п'яти деталей не більше двох виявляться нестандартними.

д36 Нехай імовірність того, що покупцю необхідне взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що з п'яти перших покупців взуття цього розміру буде необхідне:

а) одному;

б) принаймні одному.

д37 Нехай імовірність того, що телевізор потребуватиме ремонту протягом гарантійного терміну, дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що протягом гарантійного терміну із шести телевізорів:

а) не більше одного потребуватиме ремонту;

б) хоча б один потребуватиме ремонту.

д38 Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,9. Яка імовірність того, що серед 10 деталей виявиться не більше однієї нестандартної?

д39 Нехай імовірність порушення герметичності банки консервів дорівнює 0,0005. Знайти імовірність того, що серед 2000 банок дві виявляться з порушенням герметичності.

д40 Імовірність виробництва бракованої деталі дорівнює 0,008. Знайти найімовірнішу кількість бракованих серед 1000 деталей та імовірність такої їх кількості у партії.

д41 Нехай імовірність того, що пасажир спізниться до відправлення потяга, дорівнює 0,02. Знайти найбільш ймовірну кількість з 855 пасажирів тих, що спізнилися.

д42 Нехай імовірність того, що грошовий автомат при опусканні однієї монети спрацює неправильно, дорівнює 0,03. Знайти найімовірнішу кількість випадків правильної роботи автомата, якщо буде опущено 150 монет.

д43 Оптова база обслуговує 12 магазинів. Від кожного з них заявка на товари на наступний день може надійти з імовірністю 0,3. Знайти найімовірнішу кількість заявок на наступний день та імовірність одержання базою такої кількості заявок.

д44 Імовірність того, що грошовий автомат при опусканні однієї монети спрацює правильно, дорівнює 0,97. Скільки потрібно опустити монет, щоб найімовірніша кількість випадків правильної роботи автомата дорівнювала б 100?

д45 Скільки потрібно взяти деталей, щоб найімовірніша кількість придатних дорівнювала б 50, якщо імовірність того, що навмання взята деталь буде бракованою, дорівнює 0,1?

д46 Імовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,4. Знайти імовірність 100 влучень з 320 пострілів.

д47 Знайти імовірність того, що з 500 посіяних насінин не зійде 130, якщо схожість насінин оцінюється імовірністю 0,75.

д48 Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Яка імовірність того, що серед 1000 немовлят буде 480 дівчаток?

д49 Імовірність настання події в кожному випробуванні дорівнює 0,8. Знайти найбільше відхилення частоти цієї події від імовірності її настання, яке можна чекати з імовірністю 0,9127 при 4900 випробуваннях.

д50 Майстерня з гарантійного ремонту телевізорів обслуговує 2000 абонентів. Імовірність того, що куплений телевізор потребуватиме гарантійного ремонту, дорівнює 0,3. Припускаючи, що подія, імовірність якої 0,9973, вірогідна, знайти межі кількості телевізорів, що потребуватимуть гарантійного ремонту.

д51 На прядильній фабриці робітниця обслуговує 750 веретен. При обертанні веретена пряжа рветься у випадкові моменти часу через нерівномірність натягу, нерівності та інши причини. Вважаючи, що імовірність обривання пряжі на кожному з веретен протягом деякого проміжку часу t дорівнює 0,008, знайти імовірність того, що за цей час відбудеться не більше 10 обривань.

д52 При штампуванні металевих клем виходить у середньому 90% придатних. Знайти імовірність того, що серед 900 клем буде від 790 до 820 (включно) придатних.

д53 Імовірність неточного складання приладу дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що серед 500 приладів виявиться від 410 до 430 (включно) точних.

д54 Схожість насінин певної рослини складає 90%. Знайти імовірність того, що з 800 посіяних насінин зійде не менше 700.

д55 Нехай імовірність того, що покупцю необхідне взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що з 750 покупців не більше 120 матимуть потребу у взутті цього розміру.

д56 Підприємство має 2400 агрегатів. У кожен агрегат входить деяка деталь, імовірність виходу з ладу якої за час t дорівнює 1/6. Виходячи з цього відділ постачання заготовив на час t 400 запасних деталей цього типу. Знайти імовірність того, що ця кількість запасних деталей забезпечить безперебійну роботу всіх агрегатів протягом часу t.

д57 Імовірність влучення у мішень при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти:

а) межі кількості влучень у мішень при 600 пострілах, щоб імовірність невиходу за ці межі дорівнювала б 0,993;

б) таку кількість пострілів по мішені, при якій з імовірністю 0,993 можна чекати, що відхилення частоти влучень від імовірності 0,6 не перевищить 0,03 (за абсолютною величиною).

д58 Імовірність того, що покупцю необхідне чоловіче взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Якщо буде 10 000 покупців, то:

а) яка імовірність того, що частина тих, кому необхідне взуття цього розміру, відхилиться від імовірності 0,2 не більше ніж на 0,005 (за абсолютною величиною);

б) яке з імовірністю 0,9973 можна чекати найбільше відхилення від імовірності 0,2 частини тих покупців, яким необхідне взуття 41-го розміру?

д59 Імовірність промислового вмісту металу в кожній пробі руди дорівнює 0,4. Припускаючи, що подія, імовірність якої 0,997, вірогідна, знайти межі кількості проб із промисловим вмістом металу серед 1000 проб.

д60 Скільки потрібно перевірити деталей, щоб з імовірністю:

а) 0,9; **б)** 0,99; **в)** 0,999

можна було очікувати, що абсолютна величина відхилення частоти придатних деталей від імовірності 0,9 того, що деталь буде придатною, не перевищить 0,01 (за абсолютною величиною)?

д61 Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Імовірність влучення в неї першим стрільцем дорівнює 0,5, другим – 0,4. Скласти закон розподілу кількості влучень у мішень.

д62 Імовірність влучення в ціль при одному пострілі з гармати дорівнює 0,4. Робиться шість пострілів. Скласти закон розподілу кількості:

а) влучень;

б) невлучень у ціль.

д63 Імовірність того, що в бібліотеці необхідна студенту книга вільна, дорівнює 0,3. Скласти закон розподілу кількості бібліотек, що відвідає студент, якщо в місті чотири бібліотеки.

д64 Обрив зв'язку відбувся на одній з п'яти ланок телефонного кабелю. Монтер послідовно перевіряє ланки для виявлення місця обриву. Скласти закон розподілу кількості обстежених ланок, якщо імовірність обриву зв'язку однакова для всіх ланок.

д65 Імовірність того, що грошовий автомат при опусканні монети спрацює правильно, дорівнює 0,97. Скласти закон розподілу кількості опускань монет в автомат до першого правильного спрацьовування автомата.

д66 Є п'ять різних ключів, з яких тільки один підходить до замка. Скласти закон розподілу кількості випробувань при відмиканні замка, якщо випробуваний ключ у подальших спробах відімкнути замок:

а) не бере участі;

б) бере участь.

д67 Мисливець стріляє по дичині до першого влучення, але встигає зробити не більше чотирьох пострілів. Скласти закон розподілу кількості промахів, якщо імовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,7. Обчислити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

д68 У лотереї на 100 квитків розігруються дві речі, вартість яких 210 і 60 грн. Скласти закон розподілу суми виграшу для людини, що має:

а) один квиток;

б) два квитки.

Вартість квитка 3 грн. Переконатися в справедливості властивості математичного сподівання для суми залежних випадкових величин.

д69 Скласти закон розподілу випадкової величини, що виражає кількість влучень у мішень при чотирьох пострілах, якщо імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,3. Обчислити її математичне сподівання і дисперсію, користуючись тільки їх визначеннями, а результати перевірити за формулами цих характеристик для випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом.

д70 На двох автоматичних верстатах виробляються однакові вироби. Відомі закони розподілу кількості бракованих виробів, вироблених протягом зміни на кожному з верстатів:

для першого верстата

Кількість бракованих виробів	0	1	2	3
Імовірність	0,1	0,6	0,2	0,1

для другого верстата

Кількість бракованих виробів	0	1	2
Імовірність	0,5	0,3	0,2

Скласти закон розподілу кількості бракованих виробів, вироблених протягом зміни двома верстатами разом. На цьому прикладі перевірити виконання властивості математичних сподівань $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ і властивості дисперсій $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

д71 Дано закон розподілу випадкової величини X:

Значення	– 2	0	1	3
Імовірність	0,1	0,5	0,3	0,1

Скласти закони розподілу випадкових величин X^2 і $3X$.

д72 Випадкова величина X рівномірно розподілена. Її щільність імовірності $f(x)=A$, якщо $a\le x\le b$ і $f(x)=0$, якщо $x<a$ і $x>b$. Визначити коефіцієнт A.

д73 Два баскетболісти по черзі закидають м'яч у кошик з імовірністю влучення при кожному кидку для першого 0,8, для другого – 0,7. Усього робиться п'ять кидків. Скласти закони розподілу кількості влучень для кожного гравця, якщо починає кидати перший баскетболіст, а також закон розподілу загальної кількості влучень.

д74 Дано закони розподілу двох незалежних випадкових величин:

Значення (X)	2	4	6	8
Імовірність	0,4	0,2	0,1	0,3

Значення (Y)	0	1	2
Імовірність	0,5	0,25	0,25

Скласти закон розподілу їхньої різниці, а потім перевірити виконання таких властивостей математичних чекань і дисперсій: $M(X-Y)=M(X)-M(Y)$; $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

д75 Дано закони розподілу двох незалежних випадкових величин:

Значення (X)	– 4	0	4
Імовірність	0,25	0,5	0,25

Значення (Y)	2	4
Імовірність	0,5	0,5

Скласти закон розподілу їх середнього арифметичного.

д76 Дано закони розподілу двох незалежних випадкових величин:

Значення (X)	-1	0	1
Імовірність	0,2	0,3	0,5

Значення (Y)	0	1	3
Імовірність	0,1	0,3	0,6

Скласти закон розподілу їхнього добутку. Перевірити виконання такої властивості математичних сподівань: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

д77 Знайти функцію розподілу кількості влучень у ціль, якщо стрільцем зроблено шість пострілів, а імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,2. Користуючись цією функцією, обчислити імовірність того, що в ціль буде влучено не менше одного, але менше п'яти разів.

д78 Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, заданої щільністю імовірності:

а) $f(x) = 0$ при $-\infty < x < 1$ і $f(x) = \dfrac{A}{x^4}$, якщо $1 \le x < +\infty$;

б) $f(x) = 0$, якщо $-\infty < x < 0$ і $f(x) = \dfrac{x^2}{9}$, якщо $0 \le x < 3$;

$f(x) = 0$, якщо $3 < x < +\infty$;

в) $f(x)=\dfrac{2a-x}{2a^2}$ при $0\le x\le 2a$ і $f(x)=0$ при $x<0$ і $x>2a$.

д79 Випадкова величина X рівномірно розподілена. Щільність імовірності її $f(x)=a$ при $1\le x\le 10$ і $f(x)=0$ при $x<1$ і $x>10$. Визначити її математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

д80 Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X, якщо щільність імовірності її $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}$ при $|x|<2$ і $f(x)=0$ при $|x|\ge 2$.

д81 Функція $f(x)=\dfrac{2A}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<+\infty)$ є щільністю імовірності випадкової величини X. Знайти коефіцієнт A. Обчислити імовірність того, що випадкова величина X матиме:

а) яке-небудь значення з інтервалу (0; 2);

б) яке-небудь значення, менше одиниці;

в) значення, не менші від нуля в двох незалежних спостереженнях.

д82 Зріст дорослого чоловіка є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Нехай її математичне сподівання дорівнює 170 см, а дисперсія – 36. Обчислити імовірність того, що хоча б один з навмання вибраних чотирьох чоловіків буде мати зріст від 168 до 172 см.

д83 Функція $f(x)=0$ при $-\infty<x<1$ і $f(x)=\dfrac{A}{x^4}$, якщо $1\le x<+\infty$. Знайти:

а) значення A, при якому ця функція буде щільністю імовірності деякої випадкової величини X;

б) функцію розподілу цієї випадкової величини;

в) імовірність того, що випадкова величина X матиме яке-небудь значення з інтервалу (2; 4);

г) імовірність того, що в чотирьох незалежних випробуваннях вона жодного разу не виявиться в інтервалі (1; 2).

д84 Функція $f(x)=0$, якщо $-1<x<1$ і $f(x)=\frac{A}{x^4}$, якщо $|x|\geq 1$.

Знайти:

а) значення A, при якому ця функція буде щільністю імовірності деякої випадкової величини;

б) імовірність того, що ця випадкова величина прийме яке-небудь значення, більше двох.

д85 Функція $f(x)=0$, якщо $-\infty<x<0$ і $f(x)=\frac{x^2}{9}$, якщо $0\leq x<3$; $f(x)=0$, якщо $3<x<+\infty$. Чи може ця функція бути щільністю імовірності деякої випадкової величини? Якщо так, то знайти імовірність того, що ця випадкова величина:

а) прийме значення з інтервалу (1; 2);

б) у трьох незалежних випробуваннях два рази попаде в інтервал (1; 2).

д86 Щільність імовірності випадкової величини X $f(x)=\frac{2a-x}{2a^2}$ при $0\leq x\leq 2a$ і $f(x)=0$ при $x<0$ і $x>2a$. Знайти її функцію розподілу, побудувати графіки $f(x)$ і функції розподілу.

д87 Зріст дорослої жінки є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з параметрами: a=164 см; σ=5,5 см. Знайти щільність імовірності і функцію розподілу цієї випадкової величини.

д88 Розмір діаметра деталі, що випускається цехом, розподіляється за нормальним законом з параметрами: a=5 см;

σ^2=0,81. Знайти імовірність того, що діаметр навмання взятої деталі:

а) складе від 4 до 7 см;

б) відрізняється від математичного сподівання не більше ніж на 2 см.

д89 Результати вимірювання відстані між двома населеними пунктами підлягають нормальному закону з параметрами: a=16 км; σ=100 м. Знайти імовірність того, що відстань між цими пунктами:

а) не менше 15,8 км;

б) не більше 16,25 км;

в) від 15,75 до 16,3 км.

д90 Діаметр деталі, виготовленої цехом, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Дисперсія її дорівнює 0,0001, а математичне сподівання – 2,5 см. Знайти межі, в яких з імовірністю 0,9973 укладений діаметр навмання взятої деталі.

д91 Вихід молодняка в інкубаторі складає в середньому 75% кількості закладених яєць. Оцінити імовірність того, що з 8000 закладених в інкубатор яєць вилупиться від 5950 до 6050 (включно) курчат. Для розв'язання застосувати нерівність Чебишова.

д92 Імовірність запізнення пасажира на потяг дорівнює 0,007. Оцінити імовірність того, що з 20000 пасажирів буде від 100 до 180 (включно) таких, що спізнилися. Для розв'язання застосувати нерівність Чебишова.

д93 Імовірність того, що покупцю буде потрібне чоловіче взуття 42-го розміру, дорівнює 0,25. За допомогою нерівності Чебишова оцінити імовірність того, що відхилення частини покупців, яким необхідне взуття 42-го розміру, від імовірності 0,25 не перевищить за абсолютною величиною 0,06, якщо очікується 2500 покупців.

д94 Кількість води, необхідна протягом доби підприємству для технічних потреб, є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 85 $м^3$, а середнє квадратичне відхилення - 15 $м^3$. Чому не можна застосувати нерівність Чебишова для оцінки імовірності того, що в найближчу добу витрата води на підприємстві складе від 60 $м^3$ до 100 $м^3$? Як потрібно змінити праву межу, щоб застосування нерівності Чебишова стало можливим? Розв'язати задачу при відповідній зміні правої межі.

д95 Імовірність виготовлення деталі з дефектами дорівнює 0,8. Чому не можна застосувати нерівність Чебишова для оцінки імовірності того, що частина дефектних деталей серед 4000 виготовлених буде перебувати в межіх від 0,78 до 0,83? Розв'язати задачу при відповідній зміні правої межі.

д96 Імовірність того, що покупець зробить покупку в магазині, дорівнює 0,65. Чому не можна застосувати нерівність Чебишова для оцінки імовірності того, що з 2000 покупців кількість тих, що зробили покупки, буде в межах від 1260 до 1360 включно? Розв'язати задачу при відповідній зміні лівої межі.

д97 Нехай імовірність того, що грошовий автомат при опусканні однієї монети спрацює правильно, дорівнює 0,95. За допомогою нерівності Чебишова оцінити імовірність того, що:

а) при 2500 опусканнях монет частість випадків правильної роботи автомата відхилиться (за абсолютною величиною) від імовірності 0,95 не більше, ніж на 0,02;

б) при 2000 опусканнях монет кількість випадків правильної роботи автомата буде укладена в межах від 1860 до 1940 (включно).

д98 Скільки треба перевірити деталей, щоб з імовірністю, не меншою 0,98, можна було очікувати, що абсолютна величина відхилення частоти придатних деталей від імовірності деталі бути придатною, що дорівнює 0,95, не перевищить 0,01 (застосувати нерівність Чебишова)?

д99 Дисперсія кожної з 2500 незалежних випадкових величин не перевищує 5. За допомогою нерівності Чебишова оцінити імовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середніх арифметичних їх математичних сподівань не перевищить 0,4.

д100 Середнє квадратичне відхилення кожної з 2134 незалежних випадкових величин не перевищує 4. За допомогою нерівності Чебишова оцінити імовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середніх арифметичних їхніх математичних сподівань не перевищить 0,5.

ДОДАТОК А

Значення локальної функції Муавра-Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Цілі та десяті частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139

Продовження

Цілі та десяті частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

ДОДАТОК Б

Значення інтегральної функції Муавра-Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Цілі та десяті частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6679	6729	6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7944	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9392	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9533
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904

Продовження

Цілі та десяті частки x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	9907	9910	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9928
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9951	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	99720
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	9981	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986
3,2	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,3	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,4	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9995
3,5	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997	9997
3,6	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998
3,7	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,9	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

ДОДАТОК В

Значення функції Пуассона: $P(X=m)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5	0,000000	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6	0,000000	0,000000	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036
7	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000003

m \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000696	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8	0,000001	0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008102
9	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000191	0,002701
10	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000038	0,000810
11	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000007	0,000221
12	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000055
13	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000013
14	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003
15	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001

m \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007567
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833
6	0,104196	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,112599
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736
12	0,000642	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18	0,000000	0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091
19	0,000000	0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20	0,000000	0,000000	0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21	0,000000	0,000000	0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003	0,000016	0,000073
25	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000006	0,000029
26	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000002	0,000011
27	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000004
28	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для экон. специальностей вузов.– М.: Статистика, 1977.– 279 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для втузов.– М.: Высш. шк., 1977.– 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.– М.: Высш. шк., 1979.– 400 с.
4. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей: Підручник.– К.: Вища шк., 1994.– 192 с.
5. Виленкин Н.Я. Комбинаторика.– М.: Наука, 1969.– 328 с.
6. Иноземцев О.И. Теория вероятностей. В трех частях.– Сумы, 1991.