Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

2796 ЗБІРНИК ЗАДАЧ
з теоретичної механіки

для студентів інженерних спеціальностей
денної форми навчання

Суми
Видавництво СумДУ
2010

Збірник задач з теоретичної механіки для студентів інженерних спеціальностей денної форми навчання / Укладач І.В. Павленко.– Суми: Вид-во СумДУ, 2010.– 199 с.

Кафедра загальної механіки і динаміки машин (ЗМ і ДМ).

ЗМІСТ

ВСТУП

Теоретична механіка – це наука, яка вивчає загальні закони механічної взаємодії та механічного руху матеріальних тіл.

Значущість теоретичної механіки під час підготовки сучасного інженера складно переоцінити, оскільки ця наука дає підґрунтя для вивчення спеціальних дисциплін інженерного спрямування, таких як опір матеріалів, теорія механізмів і машин, деталі машин тощо. На теоремах класичної механіки базується велика кількість наукових дисциплін: теорія коливань, теорія пружності, аерогідромеханіка, гідроаеропружність.

Курс теоретичної механіки складається з трьох розділів: статики, кінематики і динаміки.

Статикою називається розділ теоретичної механіки, який вивчає методи перетворення систем сил в еквівалентні системи і встановлює умови рівноваги систем сил, прикладених до твердих тіл.

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, який вивчає рух матеріальних тіл у просторі з геометричної точки зору – без урахування сил, що діють на тіла.

Динамікою називається розділ теоретичної механіки, який вивчає рух матеріальних тіл у просторі залежно від сил, що спричинили цей рух.

Метою цього збірника задач є формування у студента практичних навичок розв’язання задач теоретичної механіки, що стосуються проблем сучасного машинобудування, сприяння розвитку активної пізнавальної діяльності та розвитку логічного мислення.

Усі задачі розподілені за належністю до певного розділу теоретичної механіки, що сприяє структуруванню знань у студента із зазначеної дисципліни. Збірник також містить задачі підвищеної складності, які можуть бути використаними під час підготовки до олімпіад.

1 СТАТИКА

1.1 Система збіжних сил

Під час вивчення статики слід визначити основні поняття-абстракції: матеріальна точка, механічна система, абсолютно тверде тіло.

Матеріальною точкою називається матеріальне тіло, геометричними розмірами якого в даній задачі можна знехтувати.

Система матеріальних точок (механічна система) – це сукупність матеріальних точок, в якій положення і рух кожної точки залежить від положення і руху інших точок системи.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстані між будь-якими двома точками якого є незмінними.

Одним із найважливіших понять теоретичної механіки є поняття *сили* як основної міри механічної взаємодії тіл, що визначає інтенсивність і напрямок цієї взаємодії. Сила визначається числовим значенням (модулем), напрямом і точкою прикладення (рис. 1.1). Необхідно зазначити, що в задачах статики сила є ковзним вектором. Пряма, уздовж якої направлена сила, називається *лінією дії сили*.

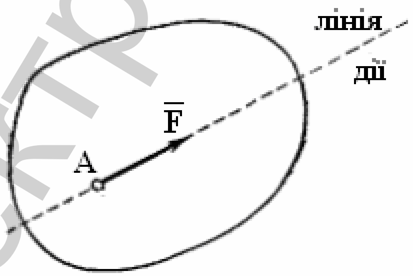


Рисунок 1.1 – Характеристики вектора сили

За одиницю сили беруть *ньютон* (Н). Силу позначають вектором $\overline{F}$ (від англ. «force» – сила).

Сукупність сил $\{\overline{F}_1; \overline{F}_2; \dots \overline{F}_n\}$, які діють на тіло, називають *системою сил*. Система сил називається *збіжною*, якщо лінії дії усіх сил системи перетинаються в одній точці (рис. 1.2).

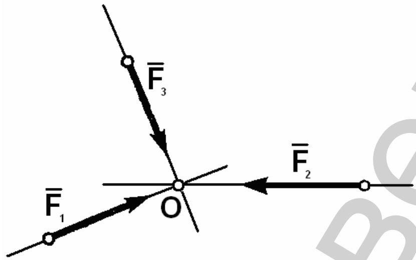


Рисунок 1.2 – Система збіжних сил

Системи сил, під дією кожної з яких тверде тіло знаходиться в однаковому кінематичному стані, називаються *еквівалентними*. Для системи збіжних сил завжди існує еквівалентна сила $\overline{R}$, яка називається *рівнодійною* і дорівнює геометричній сумі усіх сил системи (рис. 1.3):

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k, \tag{1.1}$$

де n – кількість сил системи.

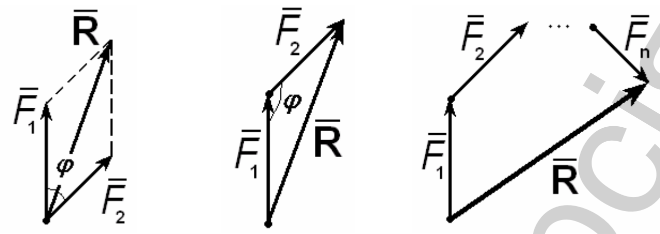
Існують геометричний і аналітичний способи визначення рівнодійної. Для додавання двох сил $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ використовують в основному геометричний метод трикутника (рис. 1.3 а) або геометричний метод паралелограма (рис. 1.3 б). У першому способі модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}, \tag{1.2}$$

де φ – кут між векторами двох сил. У другому способі модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\varphi}. \tag{1.3}$$

Аналітичний спосіб знаходження рівнодійної базується на понятті проекції сили на вісь.



а) б) в)

Рисунок 1.3 – Геометричні способи визначення рівнодійної системи збіжних сил:
а) метод трикутника; б) метод паралелограма;
в) метод силового багатокутника

Проекцією сили на вісь називається скалярний добуток вектора сили на орт осі (рис. 1.4):

$$F_x = \overline{F} \cdot \overline{i}, \tag{1.4}$$

де $\overline{F}$ – сила; x – вісь; $\overline{i}$ – орт осі.

Розкриваючи скалярний добуток, остання формула набирає вигляду

$$F_x = F \cos \alpha, \tag{1.5}$$

де α – кут між вектором сили і додатним напрямом осі.

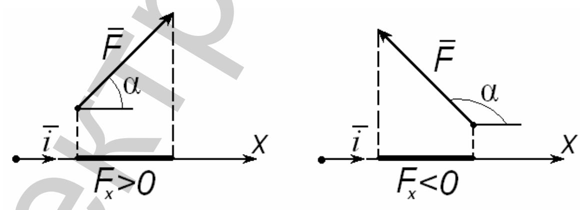


Рисунок 1.4 – Проекція сили на вісь

У випадку просторової системи n збіжних сил після введення системи ортогональних координат (xyz) модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \qquad (1.6)$$

де R_x, R_y, R_z – проекції рівнодійної на відповідні осі координат:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}. \qquad (1.7)$$

Розв'язання задач про рівновагу просторової системи збіжних сил базується на такій умові рівноваги: *для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна дорівнювала нулю*:

$$\overline{R} = 0. \qquad (1.8)$$

Графічно дану умову можна інтерпретувати таким чином: *для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник був замкнутим* (рис. 1.5).

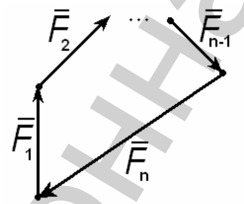


Рисунок 1.5 – Рівновага системи збіжних сил

Умова рівноваги в аналітичній формі набирає вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \qquad (1.9)$$

тобто *для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій цих сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювали нулю*.

Вищевказані умови рівноваги справедливі лише для *вільного тіла*, тобто тіла, переміщенням якого не перешкоджають інші тіла. Для невільного тіла в умову рівноваги необхідно включити сили, з якими інші тіла діють на дане тіло, – *реакції зв'язків* (рис. 1.6).

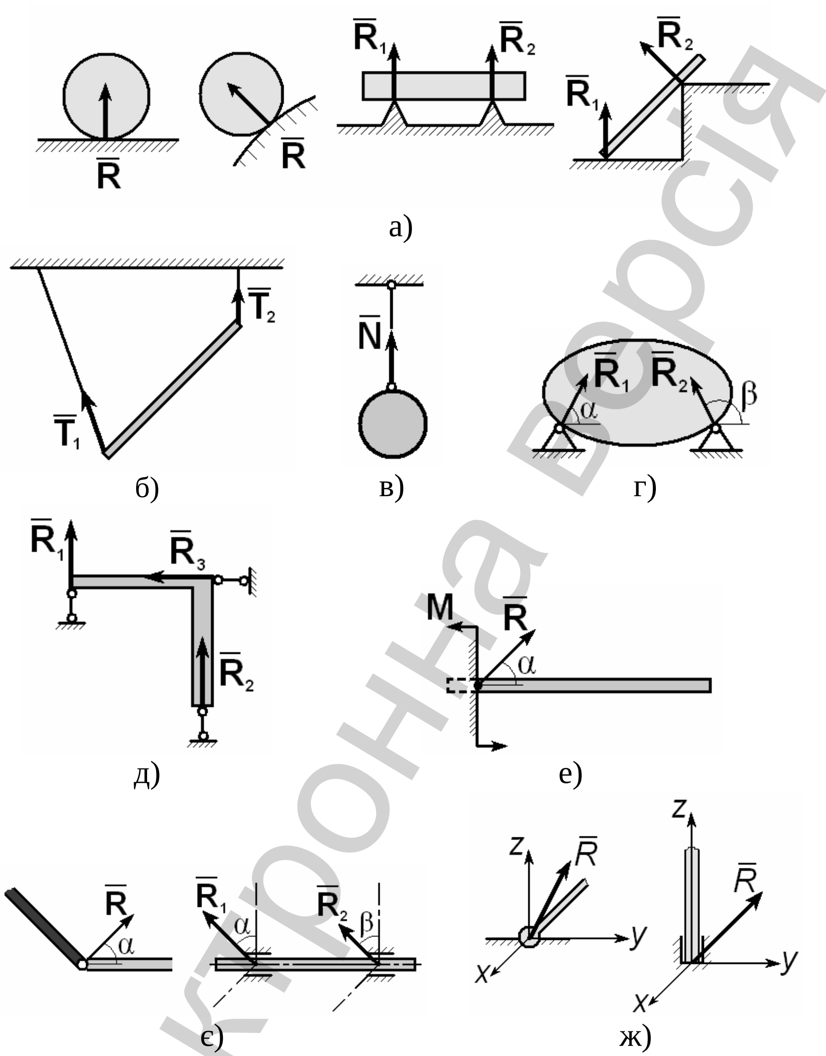


Рисунок 1.6 – Зв’язки та їх реакції:
а) нитка; б) двошарнірний стрижень; в) шарнірно-нерухома опора; г) шарнірно-рухома опора; д) закладення; е) закладення; є) циліндричний шарнір; ж) сферичний шарнір та підп’ятник

Реакція зв’язку спрямована в бік, протилежний до того, куди зв’язок не дає переміщуватися тілу (рис. 1.6 а-ж):

а) реакція гладкої поверхні спрямована по спільній нормалі до двох поверхонь, що знаходяться .у контакті;

б) реакція нитки спрямована уздовж нитки;

в) реакція двошарнірного стрижня спрямована уздовж лінії, що поєднує центри шарнірів;

г) реакція шарнірно-нерухомої опори спрямована довільно у площині, перпендикулярній до осі шарніра;

д) реакція шарнірно-рухомої опори спрямована перпендикулярно до напряму можливого переміщення опори;

е) внутрішні реактивні зусилля плоского закладення зводяться до однієї сили і однієї пари сил (див. п.1.2);

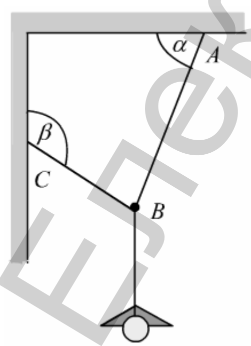
є) реакція циліндричного шарніра спрямована довільно в площині, перпендикулярній до осі шарніра;

ж) реакції сферичного шарніра та підп’ятника спрямовані довільно у просторі.

При визначенні сил, з якими тіло діє на зв’язки, потрібно використовувати *третій закон Ньютона*, відповідно до якого *для будь-якої дії одного матеріального тіла на інше має місце однакова за модулем і протилежна за напрямом протидія*.

При розв’язанні задач про рівновагу плоскої системи трьох збіжних сил можна використовувати *теорему про три сили*: *якщо вільне тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, які знаходяться в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці*.

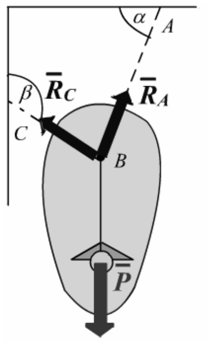
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

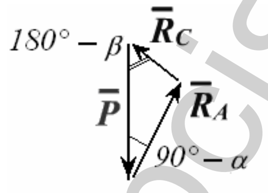


Задача 1.1

Електрична лампа вагою $P = 20$ Н підвішена до стелі на дроті *AB* і відтягнута до стіни мотузкою *BC*. Кути $\alpha = 60°$, $\beta = 135°$.

Визначити сили натягу R_A і R_C дроту та мотузки, нехтуючи вагою останніх.





Розв'язання

Оибираємо за об'єкти, рівновагу яких розглядаємо, вузол *B* і лампу. Відкидаємо зв'язки: дріт *AB* і мотузку *BC*, замінюючи їх реакціями зв'язків $\overline{R}_A$ і $\overline{R}_C$, а також додаємо активну силу – вагу лампи $\overline{P}$.

Складаємо рівняння рівноваги в геометричній формі:

$$\overline{P} + \overline{R}_A + \overline{R}_C = 0.$$

Із силового багатокутника, використовуючи теорему про синуси, визначаємо невідомі реакції:

$$R_A = \frac{P\sin(180° - \beta)}{\sin[180° - (90° - \alpha) - (180° - \beta)]} = -\frac{P\sin\beta}{\cos(\alpha + \beta)};$$

$$R_C = \frac{P\sin(90° - \alpha)}{\sin[180° - (90° - \alpha) - (180° - \beta)]} = -\frac{P\cos\alpha}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Визначаємо числові значення реакцій:

$$R_A = -\frac{20 \cdot \sin 135°}{\cos 195°} = 14{,}6(H);\; R_C = -\frac{20 \cdot \cos 60°}{\cos 195°} = 10{,}4(H).$$

Відповідь: сила натягу дроту R_A = 14,6 Н; сила натягу мотузки R_C = 10,4 Н.

ЗАДАЧІ

1.1.1

У центрі правильного шестикутника прикладені сили 1, 3, 5, 7, 9 і 11 Н, спрямовані до його вершин.

Знайти модуль і напрямок рівнодійної та зрівноважувальної сил.

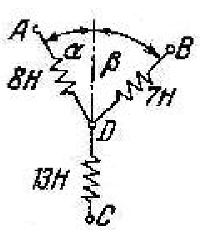
1.1.2

Силу 8 Н розкласти на дві сили по 10 Н кожна.

1.1.3

Два трактори, які їдуть по обидва боки річки, тягнуть плавуче тіло за допомогою двох тросів. Сили натягу тросів дорівнюють 0,8 кН і 0,96 кН; кут між ними дорівнює 60°.

Знайти силу опору води, яка діє на плавуче тіло, а також кути, які складають троси з берегами річки.



1.1.4

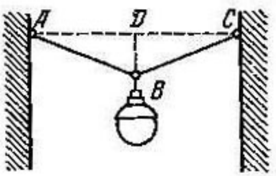
До кілець *A*, *B* і *C* трьох пружинних вагів, закріплених на горизонтальній дошці, прив’язані три мотузки, які натягнуто і закріплено в точці *D*. Показання вагів: 8, 7 і 13 Н.

Визначити кути α і β, які утворюються напрямами мотузок.

1.1.5

Стрижні *AC* і *BC* шарнірно з’єднані між собою та з вертикальною стіною. На циліндричний шарнір *C* діє вертикальна сила $P = 1$ кН.

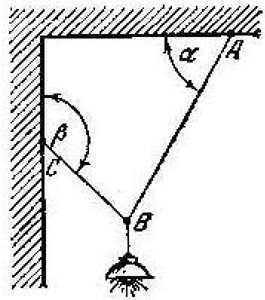
Визначити реакції стрижнів, якщо відомі значення кутів: $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.



1.1.6

Вуличний ліхтар підвішений в точці *B* до середини троса *ABC*, прикріпленого кінцями до вузлів *A* і *C*.

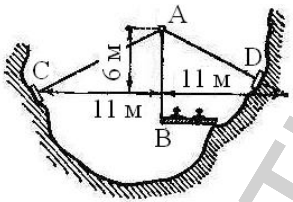
Визначити сили натягу T_1 і T_2 частин тросу *AB* і *BC*, якщо вага ліхтаря дорівнює 150 Н, довжина усього троса *ABC* дорівнює 20 м, а відхилення точки підвісу *BD* = 0,1 м. Вагою троса знехтувати.



1.1.7

Електрична лампа вагою 20 Н підвішена до стелі на дроті *AB*, а потім відтягнута до стіни мотузкою *BC*.

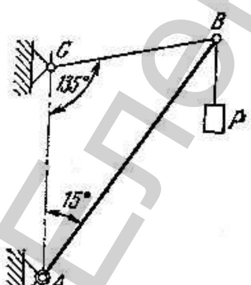
Визначити сили натягу T_A дроту *AB* і T_C мотузки *BC*, якщо відомо, що кут α = 60°, а кут *β* = 135°. Вагою дроту і мотузки знехтувати.



1.1.8

На гірській ділянці залізниці частина шляху підвішена так, як зображено на рисунку.

Вважаючи підвіску *AB* навантаженою силою *P* = 500 кН, знайти зусилля в стрижнях *AC* і *AD*.

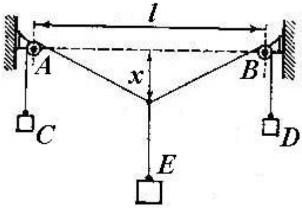


1.1.9

Щогловий кран складається із стріли *AB*, прикріпленої шарніром *A* до щогли, і ланцюга *CB*. До кінця *B* стріли підвішений вантаж *P* = 2 кН; кути *BAC* = 15°, *CAB* = 135°.

Визначити сили натягу *T* ланцюга *CB* і зусилля *Q* в стрілі *AB*.

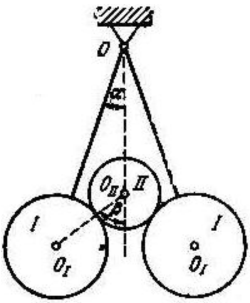
1.1.10*[*]



Через два блоки A і B, які знаходяться на одній горизонтальній прямій $AB = l$, перекинута мотузка $CAEBD$. До кінців C і D мотузки прив'язані гирі вагою p кожна, а до точки E – гиря вагою P.

Визначити відстань x точки E від прямої AB в положенні рівноваги, нехтуючи тертям у блоках та їх розмірами, а також вагою мотузки.

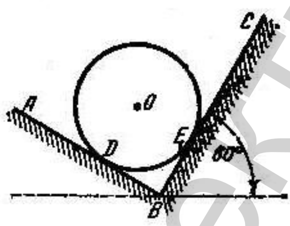
1.1.11*[*]



Два однакових циліндри I вагою P кожний підвішені на нитках до точки O. Між ними знаходиться циліндр II вагою Q. Система знаходиться в рівновазі. Циліндри I не торкаються один одного.

Визначити залежність між кутами α і β, вказаними на рисунку.

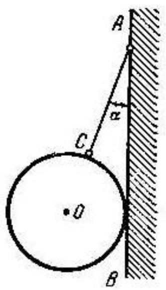
1.1.12



На двох взаємно перпендикулярних гладких похилих площинах AB і BC знаходиться в рівновазі однорідна куля O вагою 60 Н.

Визначити тиск кулі на кожну з площин, якщо відомо, що площина BC складає з горизонтом кут 60°.

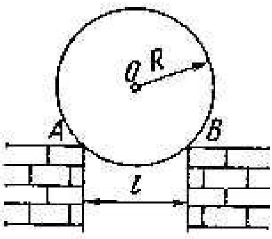
[*] – задачі підвищеної складності



1.1.13

До вертикальної гладкої стіни *AB* підвішена однорідна куля *O* на тросі *AC*. Трос складає зі стіною кут *α*; вага кулі *P*.

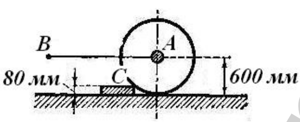
Визначити силу натягу троса *T*, а також тиск *Q* кулі на стіну.



1.1.14

Казан з рівномірно розподіленою уздовж довжини вагою *P* = 40 кН і радіусом *R* = 1 м лежить на виступах кам'яної кладки. Відстань між стінками кладки *l* = 1,6 м.

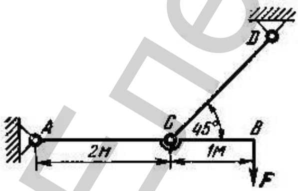
Нехтуючи тертям, знайти тиск казана на кладку в точках *A* і *B*.



1.1.15

Вага однорідного котка для трамбівки дорівнює 20 кН, а його радіус становить 600 мм.

Визначити горизонтальне зусилля *P*, яке необхідне для переміщення котка через кам'яну плиту висотою 80 мм, в положенні, вказаному на рисунку.

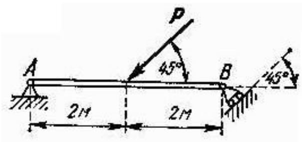


1.1.16

Балка *AB* підтримується в горизонтальному положенні стрижнем *CD*; кріплення в *A*, *C* і *D* – шарнірні.

Визначити реакції опор *A* і *D*, якщо на кінці балки діє вертикальна сила *F* = 5 кН. Розміри вказані на рисунку. Вагою знехтувати.

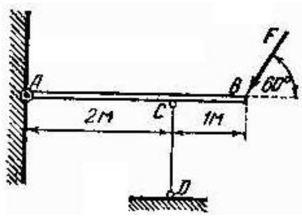
1.1.17



Балка *AB* шарнірно закріплена на опорі *A*, а кінцем *B* спирається на коток. Посередині балки під кутом 45° до її осі діє сила P = 2 кН.

Визначити реакції опор. Розміри вказані на рисунку.

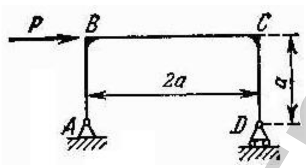
1.1.18



На рисунку зображена балка *AB*, яка утримується в горизонтальному положенні вертикальним стрижнем *CD*. На кінці балки діє сила F = 30 кН під кутом 60° до горизонту.

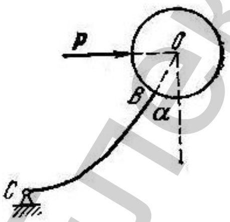
Беручи розміри з рисунка, визначити зусилля *S* в стрижні *CD* і тиск *Q* балки на стіну. Вагою стрижня і балки знехтувати.

1.1.19



Для рами, зображеної на рисунку, визначити опорні реакції R_A і R_D, які виникають у результаті дії горизонтальної сили *P*, прикладеної в точці *B*. Вагою рами знехтувати.

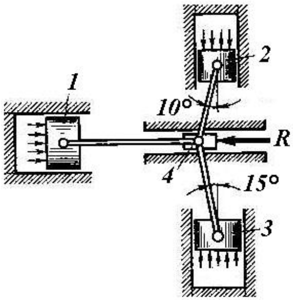
1.1.20



Повітряна куля вагою *G* утримується в рівновазі ланцюгом *BC*. На кулю діють піднімальна сила *Q* і горизонтальна сила вітру *P*.

Визначити силу натягу ланцюга в точці *B* і кут α.

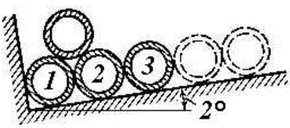
1.1.21



Повзун *4* зв’язаний шатунами з поршнями *1*, *2*, *3* пневмоциліндрів.

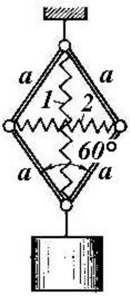
Визначити силу опору *R*, прикладену до повзуна, якщо тиски в циліндрах становлять p_1 = 1 МПа, p_2 = 2 МПа, p_3 = 3 МПа, а діаметри циліндрів становлять d_1 = 300 мм, d_2 = 200 мм, d_3 = 500 мм.

1.1.22*



При якій мінімальній кількості однакових труб нижнього ряду система не розкотиться? Тертя не враховувати.

1.1.23*



Динамометр із двома однаковими пружинами в ненавантаженому стані являє собою квадрат зі стороною *a* = 0,1 м.

Визначити сили в пружинах *1* і *2* при зважуванні вантажу, якщо під дією сили 4 Н кожна пружина деформується на 1 мм. Коефіцієнт жорсткості пружин вважати сталим.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що вивчає статика?

2 Що називається абсолютно твердим тілом?

3 Дайте визначення системи збіжних сил.

4 Скільки можна скласти рівнянь рівноваги для системи збіжних сил у просторі; у площині?

5 Сформулюйте теорему про три сили.

6 Що називається рівнодійною?

7 Які системи сил називаються еквівалентними?

8 Вкажіть напрямок реакції циліндричного шарніра; шарнірно-рухомої опори; підп’ятника.

9 Які існують способи знаходження рівнодійної?

10 Вкажіть необхідну і достатню векторну умову рівноваги системи збіжних сил.

11 Сформулюйте необхідну і достатню умову рівноваги системи збіжних сил у просторі; у площині.

12 Сформулюйте необхідну і достатню геометричну умову рівноваги довільної системи збіжних сил.

13 Яку максимальну кількість невідомих реакцій можна визначити при розв’язання задачі про рівновагу однoскладної системи збіжних сил у площині?

1.2 Плоска система сил

Плоскою системою сил називається система сил, лінії дії яких знаходяться в одній площині і не перетинаються в одній точці (рисунок 1.7).

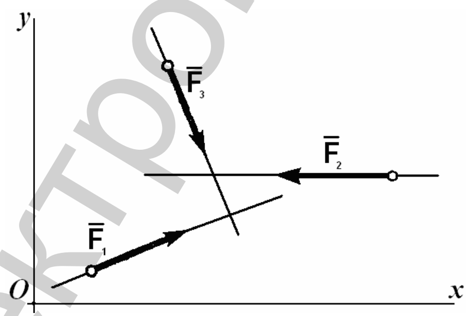


Рисунок 1.7 – Плоска система сил

Розв’язання задач про рівновагу плоскої системи сил базується на такій умові рівноваги: *для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент відносно будь-якого центра на площині дорівнювали нулю*:

$$\begin{cases} \overline{R} = 0; \\ M_O\left(\overline{R}\right) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Існує 3 форми запису скалярних рівнянь рівноваги плоскої системи сил. Перша з них

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; \\ \sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

відповідає такій умові: *для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на дві непаралельні осі координат, а також сума алгебраїчних моментів усіх сил відносно будь-якого центра на площині дорівнювали нулю*. Друга форма

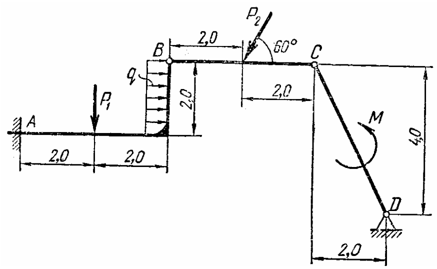
$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0; \\ \sum m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

відповідає такій умові: *для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми алгебраїчних моментів усіх сил відносно двох центрів на площині, а також сума проекцій усіх сил на вісь, не перпендикулярну до прямої, що проходить через два зазначені центри, дорівнювали нулю*. Третя форма

$$\begin{cases} \sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0; \\ \sum m_B\left(\overline{F}_k\right) = 0; \\ \sum m_C\left(\overline{F}_k\right) = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

відповідає такій умові: *для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми алгебраїчних моментів усіх сил відносно трьох центрів на площині, які не належать одній прямій, дорівнювали нулю.*

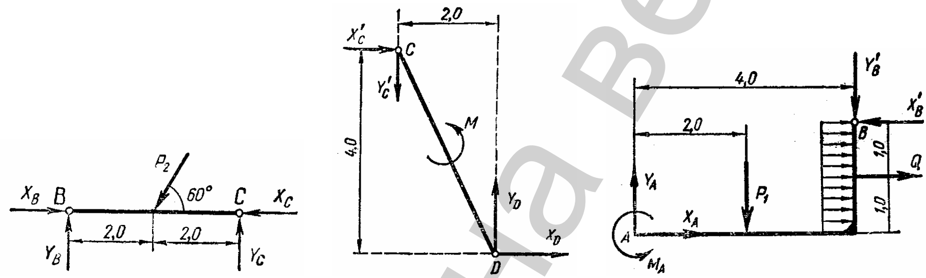
ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 1.2

Визначити реакції опор і силу тиску у проміжних шарнірах конструкції.

P_1 = 10 кН; P_2 = 15 кН; M = 40 кН·м; q = 1,6 кН/м.



Розв'язання

Розглянемо систему зрівноважувальних сил, прикладених до балки *BC*, і визначимо вертикальні складові реакцій шарнірів *B* і *C*. Система рівнянь рівноваги має вигляд

$$\begin{cases} \sum M_{iB} = 0: \quad -P_2 \cdot 2\sin 60° + Y_C \cdot 4 = 0; \\ \sum M_{iC} = 0: \quad -Y_B \cdot 4 + P_2 \cdot 2\sin 60° = 0; \\ \sum X_i = 0: \quad X_B - P_2 \cos 60° - X_C = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння системи

$$Y_C = \frac{P_2 \cdot 2\sin 60°}{4} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 0{,}866}{4} = 6{,}5(кН).$$

З другого рівняння знаходимо

$$Y_B = \frac{P_2 \cdot 2\sin 60°}{4} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 0{,}866}{4} = 6{,}5(кН).$$

Складові X_B і X_C визначаються з рівнянь рівноваги сил, прикладених до елемента *CD*.

Розглянемо систему зрівноважувальних сил, прикладених до елемента *CD*. Система рівнянь рівноваги має вигляд

$$\begin{cases} \sum Y_i = 0: \quad -Y_C^/ + Y_D = 0; \\ \sum M_{iC} = 0: \quad M + Y_D \cdot 2 + X_D \cdot 4 = 0; \\ \sum X_i: \quad X_C^/ + X_D = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння системи

$$Y_D = Y_C^/ = 6{,}5(кН).$$

З другого рівняння знаходимо

$$X_D = -\frac{M + Y_D \cdot 2}{4} = -\frac{40 + 6{,}5 \cdot 2}{4} = -13{,}3(кН).$$

З третього рівняння системи

$$X_C^/ = -X_D = 13{,}3(кН).$$

Таким чином, для елемента *BC*

$$X_B = P_2 \cos 60° + X_C = 15 \cdot 0{,}5 + 13{,}3 = 20{,}8(кН).$$

Розглянемо систему зрівноважувальних сил, прикладених до елемента *AB*. Система рівнянь рівноваги має вигляд

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: \quad X_A + Q - X_B^/ = 0; \\ \sum Y_i = 0: \quad Y_A - P_1 - Y_B^/ = 0; \\ \sum M_{iB} = 0: \quad M_A + X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 4 + P_1 \cdot 2 + Q \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

де $Q = q \cdot 2 = 1{,}6 \cdot 2 = 3{,}2(кН)$.

З першого рівняння системи

$$X_A = -Q + X_B^/ = -3{,}2 + 20{,}8 = 17{,}6(кН).$$

З другого рівняння знаходимо

$$Y_A = P_1 + Y_B^/ = 10 + 6{,}5 = 16{,}5(кН).$$

З третього рівняння маємо

$$M_A = -X_A \cdot 2 + Y_A \cdot 4 - P_1 \cdot 2 - Q \cdot 1 = -17{,}6 \cdot 2 + 16{,}5 \cdot 4 - 10 \cdot 2 - 3{,}2 \cdot 1 = 7{,}6(кН).$$

Для перевірки правильності проведених розрахунків необхідно переконатися в тому, що зберігається рівновага системи сил, прикладених до всієї конструкції:

$$\begin{cases} \sum X_i = X_A + Q - P_2 \cos 60^\circ + X_D = 17{,}6 + 3{,}2 - 15 \cdot 0{,}5 - 13{,}3 \equiv 0; \\ \sum Y_i = Y_A - P_1 - P_2 \sin 60^\circ + Y_D = 16.5 - 10 - 15 \cdot 0{,}866 + 6{,}5 \equiv 0. \end{cases}$$

Сумарні реакції становлять:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{17{,}6^2 + 16{,}5^2} = 24{,}1(кН);$$

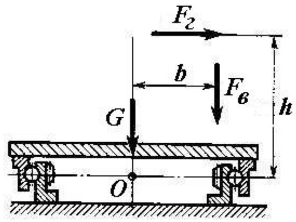
$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{20{,}8^2 + 6{,}5^2} = 21{,}8(кН);$$

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{13{,}3^2 + 6{,}5^2} = 14{,}8(кН).$$

Відповідь:

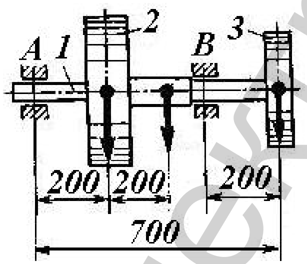
X_A = 17,6 кН; Y_A = 16,5 кН; R_A = 24,1 кН; X_B = 20,8 кН; Y_B = 6,5 кН; R_B = 21,8 кН; X_C = 13,3 кН; Y_C = 6,5 кН; R_C = 14,8 кН; M_A = 7,6 кН·м.

ЗАДАЧІ



1.2.1

Звести сили, які діють на платформу вагою *G*, до центра *O*.

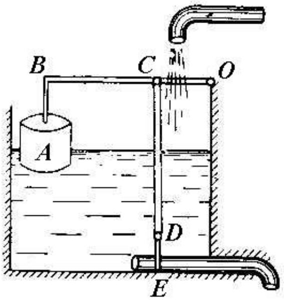


1.2.2

На валу *1* вагою G_1 = 2 кН закріплені шківи *2* і *3* вагою G_2 = 8 кН і G_3 = 1,6 кН.

Визначити реакції опор *A* і *B*.

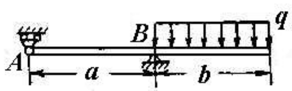
1.2.3



Регулятор складається з поплавка *A*, важеля *BO*, штоку *CD* і заслінки *DE*. В горизонтальному положенні важеля сила Архімеда зрівноважує власну вагу регулятора.

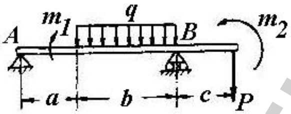
На скільки має піднятися вода для того, щоб заслінка повністю відкрилась, якщо для цього необхідно подолати вертикальну силу P = 50Н? Поплавок вважати циліндричним тілом з поперечним перерізом S = 0,01 м^2; інші геометричні розміри системи: BO = 500 мм, CO = 50 мм; питома вага води γ = 10 кН/м^3.

1.2.4



Визначити реакції опор балки.

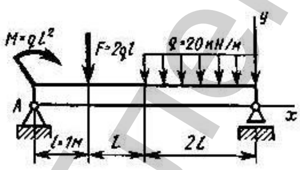
1.2.5



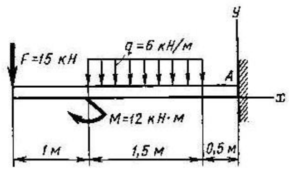
На балку діють рівномірно розподілене навантаження q = 80 Н/м, зосереджена сила P = 100 Н, а також дві пари сил з моментами m_1 = 50 Н·м і m_2 = 20 Н·м.

Визначити опорні реакції, якщо геометричні розміри a = c =2 м, b = 5 м.

1.2.6

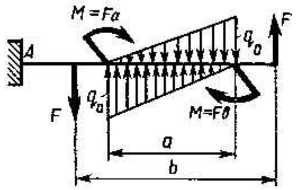


Визначити реакції опор однопрогонової балки.



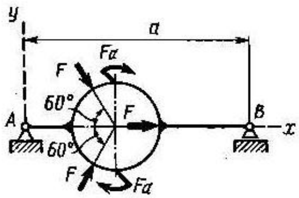
1.2.7

Визначити реакції жорсткого закріплення балки.



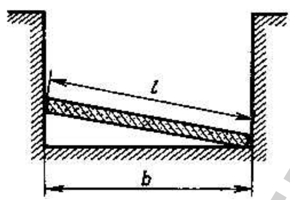
1.2.8

Для якого значення q_0 момент у жорсткому закріпленні балки дорівнює нулю?



1.2.9

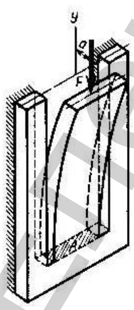
Визначити опорні реакції в *A* і *B*.



1.2.10

Бетонна плита лежить у траншеї з абсолютно твердими гладкими стінами.

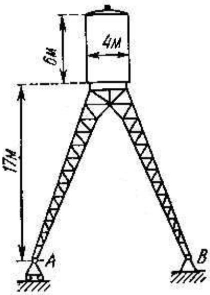
На скільки довжина плити має бути більшою за ширину траншеї, щоб горизонтальні сили, що розпирають стіни траншеї, були удвічі більшими за власну вагу пластини?



1.2.11

Під дією вертикальної сили *F* середня частина пластини відігнулася.

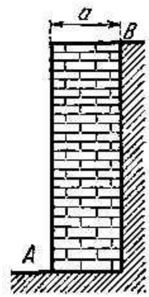
Які реакції при цьому виникають у перерізі *A*, якщо $M = F \cdot (a + b)$?



1.2.12

Водонапірна башта складається з циліндричного резервуара висотою 6 м та діаметром 4 м, закріпленого на чотирьох симетрично розташованих стовпах. Дно резервуара знаходиться на висоті 17 м над рівнем опор; вага башти становить 80 кН. Сила тиску вітру розраховується на максимальну площину вертикального перерізу резервуара, причому питомий тиск дорівнює 1,25 кПа.

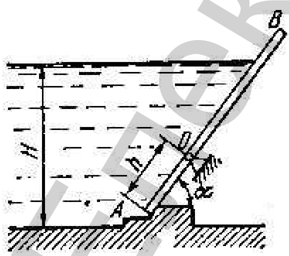
Визначити необхідну відстань *AB* між опорами стовпів з умови стійкості водонапірної башти.



1.2.13

Насип землі підпирається вертикальною кам’яною стіною *AB*.

Знайти необхідну товщину стіни *a*, якщо сила тиску землі на стіну направлена горизонтально і прикладена на 1/3 її висоти, дорівнюючи 60 кН/м (на метр довжини стіни). Питома вага кладки становить 20 кН/м^3.



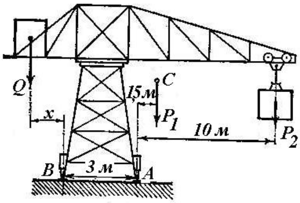
1.2.14

Прямокутний щит іригаційного каналу *AB* здатний обертатися навколо осі *O*. Якщо рівень води незначний, щит закритий; коли рівень води досягає певного значення *H*, щит обертається навколо осі *O*, відкриваючи канал.

Нехтуючи тертям і вагою щита, визначити висоту *H*, при якій відкривається щит.

1.2.15

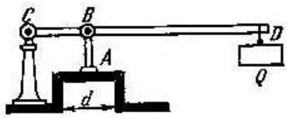
Центр ваги пересувного рейкового крана вагою $P_1 = 0{,}5$ МН знаходиться в точці C, відстань від якої до вертикальної площини, яка проходить через праву рейку, становить 1,5 м. Візок крана розрахований на підйом вантажу $P_2 = 0{,}25$МН; виліт її дорівнює 10 м.



Визначити найменшу вагу Q і найбільшу відстань x центра противаги до вертикальної площини, яка проходить через ліву рейку, з умови стійкості крана для усіх положень візка, з вантажем і без вантажу.

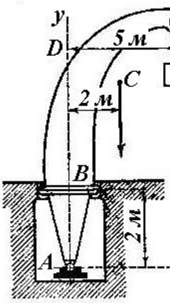
1.2.16

Запобіжний клапан A парового котла з'єднаний стрижнем AB з однорідним важелем CD довжиною 500 мм і вагою 10 Н, який здатний обертатися навколо нерухомої осі C. Діаметр клапана $d = 60$ мм, плече $BC = 70$ мм.



Який вантаж Q необхідно підвісити до кінця D важеля для того, щоб він відкривався, коли тиск пари сягне 1,1 МПа.

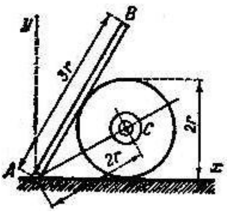
1.2.17



Кран у шахті, призначений для піднімання вантажу *P* = 40 кН, має підп’ятник *A*, а в точці *B* спирається на гладку циліндричну поверхню, вісь якої *Oy* вертикальна. Довжина хвоста *AB* = 2 м. Виліт крана *DE* = 5 м. Вага крана дорівнює 20 кН і прикладена до точки *C*, відстань до якої від вертикалі *Oy* дорівнює 2 м.

Визначити реакції опор *A* і *B*.

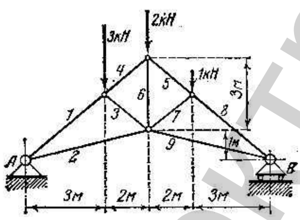
1.2.18



Однорідний брусок *AB* вагою 16 Н може обертатися навколо осі *A*, спирається на поверхню гладкого циліндра радіусом *r*, який лежить на гладкій горизонтальній площині й утримується ниткою *AC*. Геометричні розміри: *AC* = 2*r*; *AB* = 3*r*.

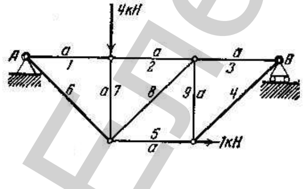
Визначити силу натягу нитки *T* і силу тиску бруска на шарнір *A*.

1.2.19



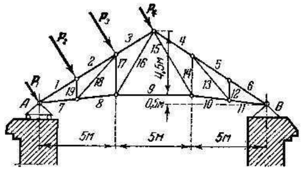
Визначити опорні реакції і зусилля в стрижнях стропильної ферми, зображеної на рисунку.

1.2.20



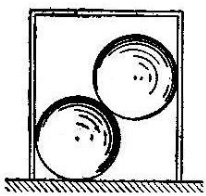
Визначити опорні реакції і зусилля розкісної ферми, зображеної на рисунку.

1.2.21



Визначити опорні реакції і зусилля навісної ферми, зображеної на рисунку.

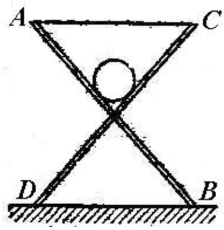
1.2.22*



Циліндричний стакан радіусом R стоїть відкритою стороною на гладкій горизонтальній підлозі; усередині знаходяться дві однакові однорідні кулі радіусом r і вагою P кожна.

Визначити вагу Q стакана, при якому система не може перекинутися. Тертям знехтувати.

1.2.23*



Два однакових однорідних стрижні $AB = CD = 2l$ вагою P кожний спираються на горизонтальну підлогу, а також з'єднані верхніми кінцями ниткою. Між верхніми половинами стрижнів знаходиться диск радіусом r і вагою Q. Кут $DOB = 2\alpha$.

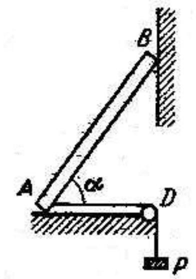
Визначити силу натягу нитки, нехтуючи тертям у системі.

1.2.24

Лебідка вагою 20 кН кріпиться до фундаменту шістьма болтами. Максимальна сила тяги $T = 80$ кН спрямована під кутом 30° до горизонту. Коефіцієнт тертя між основою лебідки і фундаментом 0,5.

Визначити силу затяжки болтів, необхідну для утримання лебідки.

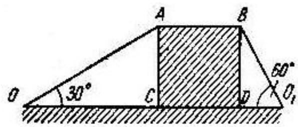
1.2.25*



Однорідний прямолінійний стрижень AB вагою Q спирається в точці B на шорстку вертикальну стіну. Коефіцієнт тертя між стрижнем і стіною дорівнює f. Точкою A стрижень спирається на горизонтальну гладку підлогу й утримується в рівновазі ниткою AD, перекинутою через блок D. До кінця нитки підвішений вантаж.

Визначити межі, в яких може змінюватися вага P вантажу, за умови зберігання системою рівноваги.

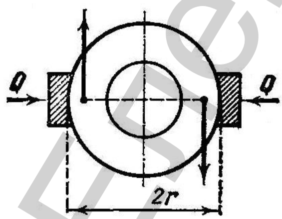
1.2.26



Квадратний ящик вагою Q знаходиться в рівновазі на горизонтальній гладкій підлозі. Коефіцієнт тертя між підлогою і ящиком дорівнює f. Через ящик перекинутий трос, закріплений своїми кінцями в точках O і O_1. Гілки троса утворюють з підлогою кути 30° і 60°.

Нехтуючи тертям між ящиком і тросом, визначити силу натягу троса, при якому ящик буде знаходитися у стані рівноваги.

1.2.27



До вала радіусом r прикладена пара сил з моментом M = 100 Н·м.

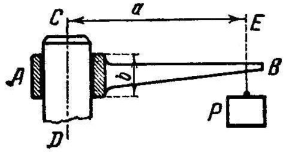
З якою силою Q необхідно притискати до вала гальмівні колодки, щоб колесо залишалося у спокої, якщо коефіцієнт тертя спокою f між колесом і колодками дорівнює 0,25?

1.2.28

Двері трамвая відсовуються з тертям у нижньому прорізі. Коефіцієнт тертя становить $f = 0{,}5$.

Визначити найбільшу висоту дверей h, на якій можна розмістити ручку дверей, щоб двері при відсуванні не перехилялися. Ширина дверей $l = 800$ мм; центр ваги знаходиться на їх вертикальній осі симетрії.

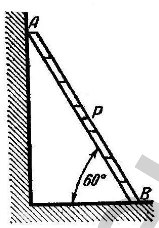
1.2.29



Горизонтальний стрижень AB має на кінці A отвір, яким надітий на вертикальний циліндричний стояк CD. Довжина втулки $b = 20$ мм. У точці E на відстані a від осі стояк до стрижня підвішений вантаж вагою P.

Визначити, нехтуючи вагою стрижня AB, відстань a таку, щоб під дією вантажу P стрижень залишався в рівновазі, якщо коефіцієнт тертя між стрижнем і стояком дорівнює $f = 0{,}1$.

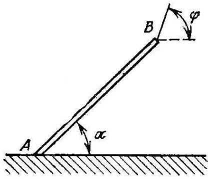
1.2.30*



Драбина AB вагою P стоїть на горизонтальній шорсткій підлозі (коефіцієнт тертя f), спираючись на гладку стіну.

Під яким кутом α до підлоги необхідно поставити драбину, щоб по ній змогла піднятися вгору людина вагою p?

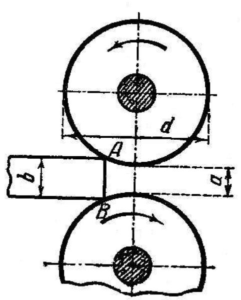
1.2.31



Однорідний брус спирається в точці *A* під кутом $\alpha = 45°$ на негладку горизонтальну підлогу (коефіцієнт тертя дорівнює *f*) і утримується в точці *B* мотузкою.

При якому значенні кута φ нахилу мотузки до горизонту брус починає ковзати?

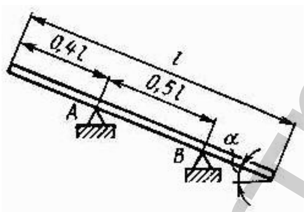
1.2.32



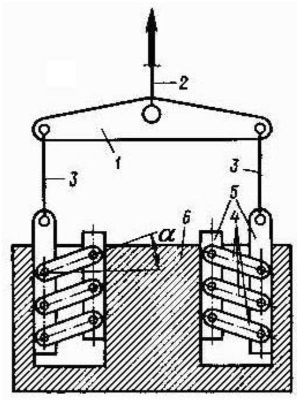
Прокатний стан складається з двох валів діаметром $d = 500$ мм, які обертаються в протилежні боки, вказані стрілкою на рисунку. Відстань між валами $a = 5$ мм.

Якої товщини *b* листи можна прокатувати на стані, якщо коефіцієнт тертя ковзання для розжареної сталі і чавунних валів $f = 0{,}1$?

1.2.33*



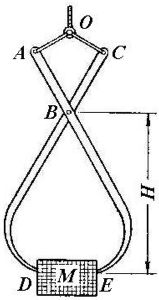
Тонка однорідна балка лежить на двох опорах *A* і *B*. При якому куті α балка зберігатиме рівновагу, якщо коефіцієнти тертя ковзання на опорах відповідно $f_A = 0{,}1$ і $f_B = 0{,}5$?



1.2.34

За допомогою траверси *1*, тросів *2*, *3* і заклинювального пристрою піднімають вантаж *6*. Пристрій складається із притискних планок *5*, шарнірно з’єднаних паралельними сережками *4*.

При якому куті α цей пристрій працездатний, якщо коефіцієнт тертя ковзання між планками і стінками заглиблень у тілі вантажу $f = 0{,}25$?

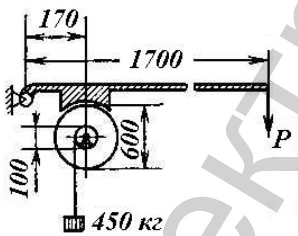


1.2.35

Ящик *M* вагою *P* утримується силами тертя кліщового захвату.

Визначити сили тиску кінців *D* і *E*, якщо $DE = AB = BC = 2a$, $H = 4a$; кути $OAB = OCB = 90°$, $AOC = 120°$.

Яким має бути найменший коефіцієнт тертя? Вагою деталей знехтувати.



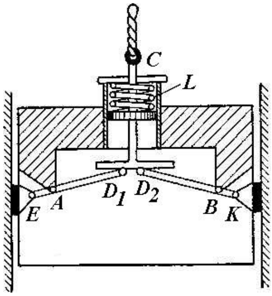
1.2.36

На барабан намотаний трос, до кінця якого підвішений вантаж 450 кг.

Визначити найменше значення сили *P*, прикладену до рукоятки колодкових гальм, при рівновазі барабана, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює 0,5. Розміри вказані на рисунку. Вагою рукоятки знехтувати.

1.2.37

Гальмівний запобіжник для підйомників працює від пружини *L*. Трос, на якому підвішена вантажна кліть, прикріплюється в точці *C*. У разі обриву троса пружина, подовжуючись, обертає навколо точок *A* і *B* важелі D_1E і D_2K, що притискають колодки до напрямної кліті.

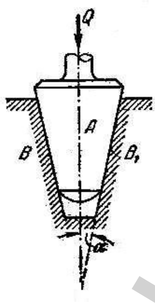


Знайти найменше значення сили пружини *F*, достатню для утримування кліті в рівновазі, якщо вага останньої з вантажем дорівнює *P*, коефіцієнт тертя колодок об напрямні *f*, а гострий кут між важелями і напрямними дорівнює α; $AD_1 = D_2B = 4EA = 4BK$.

1.2.38

Знайти скіс ґрунтового насипу з коефіцієнтом тертя $f = 0{,}8$.

1.2.39



Клин *A*, нахил якого $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}05$, забивається в заглиблення BB_1 зусиллям $Q = 60$ кН.

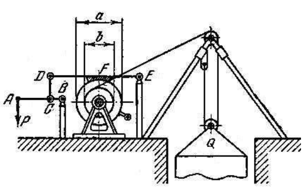
Визначити нормальний тиск *N* на боки клина, а також зусилля *P*, яке необхідне для того, щоб вийняти клин, якщо коефіцієнт тертя $f = 0{,}1$.

1.2.40

Чавунну станину верстата вагою 1,2 кН пересувають за допомогою канатів, нахилених під кутом 30° до горизонту, уздовж сухої горизонтальної дерев’яної підлоги. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,49.

Визначити кількість людей для рівномірного пересування станини, якщо сила однієї людини не перевищує 300 Н.

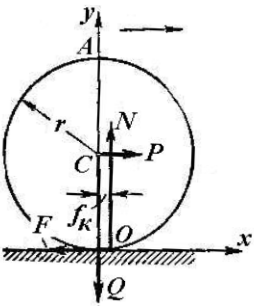
1.2.41



Для занурення вантажів до шахти застосовується гальмівний важіль *ABCDEF*, зображений на рисунку.

Визначити силу *P*, здатну утримувати вантаж *Q* вагою 8 кН, підвішений до рухомого блока, коефіцієнт тертя *f* = 0,4.

1.2.42



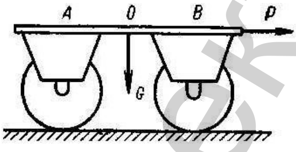
До центра ваги стального циліндричного котка діаметром *D* = 200 мм прикладена горизонтальна сила *P*.

Визначити значення цієї сили, яку необхідно для рівномірного кочення котка вздовж горизонтальної сухої плити, якщо вага котка *Q* = 250 Н; коефіцієнт тертя кочення $f_к$ = 5 мкм.

1.2.43

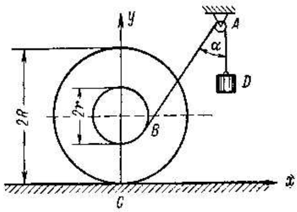
Визначити кут нахилу площини до горизонту, при якому ролик діаметром 100 мм рівномірно котиться вздовж площини, якщо коефіцієнт кочення становить 50 мкм.

1.2.44



Визначити значення сили *P*, під дією якої валізка вагою *G* рухається рівномірно вздовж рейкового шляху, якщо вага кожного колеса дорівнює *Q*, їх радіуси *R*, а коефіцієнт тертя кочення коліс об рейки дорівнює *k*; *AO* = *OB*.

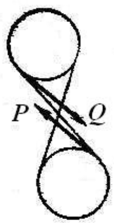
1.2.45



Котушка радіусом R і вагою P знаходиться в рівновазі на горизонтальній площині. На середню частину котушки радіусом r намотана нитка, яка перекинута через ідеальний блок A. До кінця нитки прикріплений вантаж D вагою Q. Ділянка нитки AB складає з вертикаллю кут α.

Визначити момент сил теря кочення в точці C.

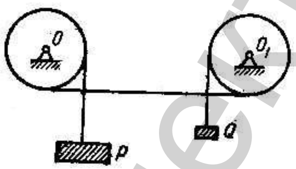
1.2.46



Під час швартування судна матрос накладає канат «вісімкою» на чавунні стовпи. Сила натягу каната дорівнює Q, а сила, з якою матрос утримує канат, дорівнює P. Кут обхвату канатом кожного стовпа дорівнює 210°.

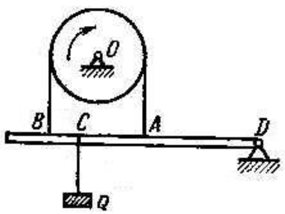
Визначити коефіцієнт тертя каната об стовпи, якщо відомо, що матрос здатен утримувати канат, наклавши три «вісімки».

1.2.47



Через два нерухомих вали з центрами O і O_1 перекинутий трос, до кінця якого підвішені вантажі P і Q, причому $P > Q$.

Визначити найменше значення коефіцієнта тертя між валами і тросом, при якому вантажі будуть знаходитися в рівновазі.



1.2.48

Трос *AB* обхоплює барабан, який обертається навколо центра *O*. Коефіцієнт тертя троса об барабан дорівнює *f*. Кінці троса *A* і *B* прикріплені до важеля *BAD*, який здатен обертатися навколо точки *D*. Відстані дорівнюють: $AD = a$, $BD = b$.

Нехтуючи вагою важеля *BAD*, знайти відстань $CD = c$, на якій необхідно підвісити вантаж *Q* до важеля, щоб тиск у точці *D* дорівнював нулю.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається плоскою системою сил?

2 Скільки скалярних рівнянь рівноваги можна скласти при розв'язанні задачі про рівновагу плоскої системи сил?

3 Що називається алгебраїчним моментом сили відносно центра на площині?

4 Сформулюйте правило знаків для визначення алгебраїчних моментів сил.

5 Чи має плоска система сил рівнодійну у загальному випадку?

6 У якому випадку плоска система сил має рівнодійну.

7 До якого найпростішого вигляду можна звести будь-яку плоску систему сил.

8 Які системи сил називаються статично-визначуваними.

9 Як визначається ступінь статичної невизначуваності плоскої системи сил?

10 Сформулюйте закон тертя Кулона.

11 Від чого залежить коефіцієнт тертя кочення?

12 Що називається кутом тертя ковзання?

13 Дайте визначення конуса тертя.

14 Який існує зв'язок між кутом тертя і коефіцієнтом тертя ковзання?

15 Вкажіть формулу Ейлера для тертя нитки об циліндричну поверхню.

16 Що називається тертям кочення?

17 Яка розмірність коефіцієнта тертя кочення?

18 Яку максимальну кількість невідомих реакцій зв'язків можна визначити, розглядаючи задачу про рівновагу односкладної плоскої системи сил.

19 Скільки існує форм запису алгебраїчних рівнянь рівноваги плоскої системи сил?

20 Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.

21 Сформулюйте теорему Вариньона.

22 Якими внутрішніми силовими факторами визначається реакція закладення у плоскій задачі статики?

23 Як враховується навантаження, розподілене по довжині стрижня, при розв'язанні задач статики?

24 За якою формулою визначається ступінь статичної невизначеності плоскої шарнірно-стрижневої конструкції?

25 Що називається парою сил?

26 Як визначається плече пари сил?

27 Чи можна переносити пару сил у площині її дії, не змінюючи при цьому результату дії пари на тіло?

28 Що називається моментом пари сил?

29 Сформулюйте правило знаків для визначення моменту пари сил.

1.3 Просторова система сил

Просторовою системою сил називається система сил, лінії дії яких розташовані довільно у просторі (рис. 1.8).

Для рівноваги просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент відносно будь-якої точки у просторі дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \overline{R} = 0; \\ \overline{M}_O\left(\overline{R}\right) = 0. \end{cases} \qquad (1.14)$$

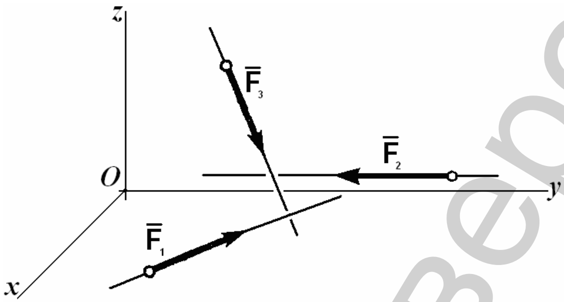
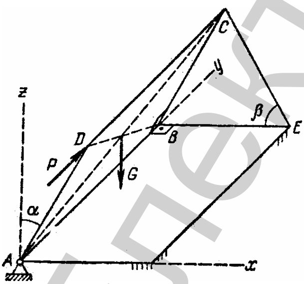


Рисунок 1.8 – Просторова система сил

У скалярній формі запису *для рівноваги просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил системи на три осі координат, а також суми моментів усіх сил відносно даних осей дорівнювали нулю*:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; & \sum m_x\left(\overline{F}_k\right) = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; & \sum m_y\left(\overline{F}_k\right) = 0; \\ \sum F_{kz} = 0; & \sum m_z\left(\overline{F}_k\right) = 0. \end{cases} \qquad (1.15)$$

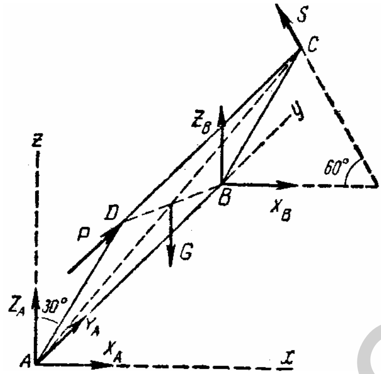
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 1.3

Визначити реакції опор просторової конструкції.

G = 1 кН; *P* = 2 кН; *AD* = *BC* = = 60 см; *AB* = *CD* = 100 см; α = 30°; β = = 60°; $\vec{P} \parallel Ay$; *A* – сферичний шарнір; B – петля.



Розв’язання

Розглянемо рівновагу сил, прикладених до рами: сили тяжіння $\vec{G}$, сили $\vec{P}$, реакції $\vec{S}$ стрижня *CE*, реакцій опор *A* і *B*: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{Z}_B$.

Складемо рівняння моментів відносно осі, яка проходить через точки *A* і *B*:

$$\sum M_{iy} = 0: \quad G\cdot\frac{BC}{2}\cdot\sin 30^\circ - S\cdot BC\cdot\sin 60^\circ = 0,$$

звідки $S = \dfrac{G\sin 30^\circ}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{1\cdot 0{,}5}{2\cdot 0{,}866} = 0{,}29\,(кН).$

Складемо рівняння моментів відносно осі *Ax*:

$$\sum M_{ix} = 0: \quad -P\cdot AD\cdot\cos 30^\circ - G\cdot\frac{AB}{2} + S\cdot\cos 30^\circ\cdot AB + Z_B\cdot AB = 0,$$

звідки $Z_B = P\dfrac{AD}{AB}\cos 30^\circ + 0{,}5G - S\cdot\cos 30^\circ = 1{,}29\,(кН).$

Складемо рівняння моментів відносно осі *Az*:

$$\sum M_{iz} = 0: \quad P\cdot AD\cdot\sin 30^\circ + S\cdot\cos 60^\circ\cdot AB - X_B\cdot AB = 0,$$

звідки $X_B = P\dfrac{AD}{AB}\sin 30^\circ + S\cdot\cos 60^\circ = 0{,}74\,(кН).$

Складемо систему рівнянь проекцій сил на осі координат:

$$\begin{cases} \sum X_i = 0: \quad X_A + X_B - S\cos 60° = 0; \\ \sum Y_i = 0: \quad Y_A + P = 0; \\ \sum Z_i = 0: \quad Z_A - G + Z_B + S\cos 30° = 0, \end{cases}$$

з яких знаходимо: $X_A = -X_B + S\cos 60° = -0{,}6(кН)$;

$$Y_A = -P = -2(кН); \; Z_A = G - Z_B - S\cos 30° = -0{,}54(кН).$$

Сумарні реакції зв'язків становлять:

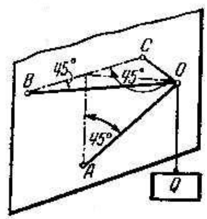
$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-0{,}6)^2 + (-2)^2 + (-0{,}54)^2} = 2{,}2(кН);$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{0{,}74^2 + 1{,}29^2} = 1{,}5(кН).$$

Відповідь: X_A = –0,6 кН; Y_A = –2 кН; Z_A = –0,54 кН; R_A = 2,2 кН; X_B = 0,74 кН; Y_B = 1,29 кН; R_B = 1,5 кН; S = 0,29 кН.

ЗАДАЧІ

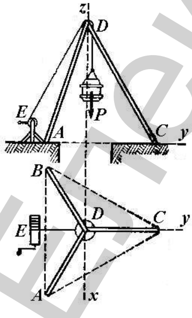
1.3.1



Вантаж Q = 100 Н підтримується брусом *AO*, шарнірно закріпленим у точці *A* і похиленим під кутом 45° до горизонту, та двома горизонтальними ланцюгами *BO* і *CO* однакової довжини; кути *CBO* = *BCO* = 45°.

Знайти зусилля *S* в брусі, а також сили натягу ланцюгів *T*.

1.3.2



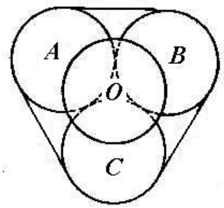
Для підйому з шахти вантажу P = 30 кН встановлені триніг *ABCD* і лебідка *E*.

Визначити зусилля в стояках тринога при рівномірному підніманні вантажу. Трикутник *ABC* рівнобічний; кути, утворені стрижнями і тросом *DE* із площиною *ABC*, дорівнюють 60°.

1.3.3

На гладкій підлозі стоїть триногий штатив. Нижні кінці його ніжок зв'язані шнурами таким чином, що ніжки і шнури штативу утворюють правильний тетраедр. До верхньої точки штатива підвішений вантаж вагою *P*.

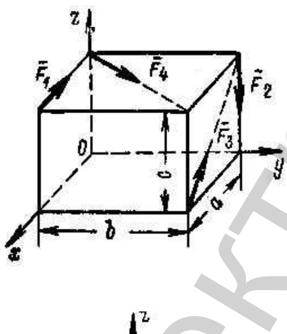
Визначити реакцію підлоги *R* в точках опори і силу натягу шнурів *T*, виразивши їх через *P*.



1.3.4*

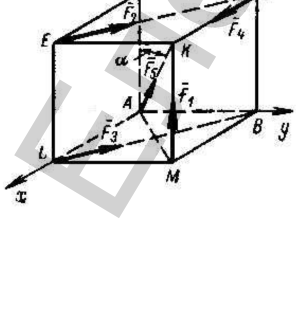
Три однорідні кулі *A*, *B*, *C* однакових діаметрів, розташовані на горизонтальній площині, взаємно дотикаються і обв'язані шнуром, який огинає їх в екваторіальній площині. Четверта однорідна куля *O* того самого діаметра і вагою 10 Н лежить на трьох нижніх кулях.

Визначити силу натягу *T* шнура, нехтуючи тертям.



1.3.5

Визначити моменти сил, прикладених до вершин прямокутного паралелепіпеда, відносно осей координат. Розміри вказані на рисунку.

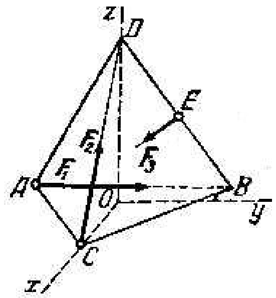


1.3.6

На куб зі стороною $a = 0{,}1$ м діють сили, рівні за модулем $F = 100$ Н, напрями дії яких вказані на рисунку.

Звести подану систему сил до найпростішого вигляду.

1.3.7

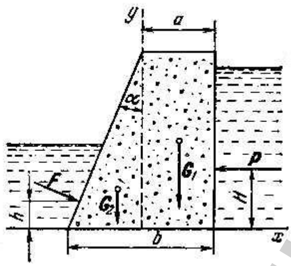


До правильного тетраедра *ABCD*, ребра якого дорівнюють *a*, прикладені сили: F_1 – уздовж ребра *AB*; F_2 – уздовж ребра *CD*; F_3 – до середини *E* ребра *BD*. Модулі сил F_1 і F_2 довільні, а проекції сили F_3 на вісі координат *x*, *y*, *z* дорівнюють відповідно $5/3 \cdot F_2 \cdot \cos 30°$; $-0,5F_2$; $-F_2 \operatorname{tg} 30°/\sin 45°$.

Чи зводиться задана система сил до однієї рівнодійної?

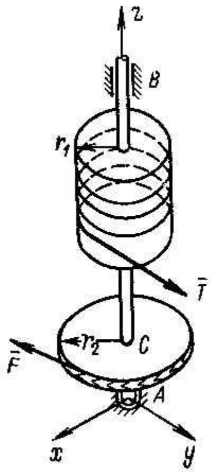
1.3.8

Рівнодійні $P = 8$ МН і $F = 5,2$ МН сил тиску води на греблю прикладені в середній вертикальній площині перпендикулярно до відповідних граней на відстані $H = 4$ м і $h = 2,4$ м від основи. Вага $G_1 = 12$ МН прямокутної частини греблі прикладена в її центрі, а вага $G_2 = 6$ МН трикутної частини – на відстані однієї третини довжини нижньої основи трикутного перерізу від вертикальної грані цього перерізу. Ширина греблі в її основі $b = 10$ м, а в верхній частині $a = 5$ м; $\operatorname{tg}\alpha = 5/12$.



Визначити рівнодійну сил реакції ґрунту під греблею.

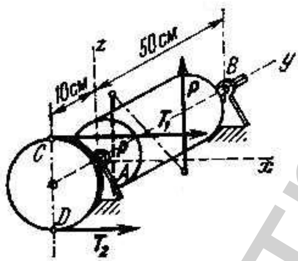
1.3.9



На барабан шпилю вагою 1,6 кН намотаний якірний ланцюг із силою натягу 20 кН. Барабан утримується в рівновазі силою *F*, прикладеною до шестірні *C* і спрямована уздовж дотичної до неї паралельно до *T*.

Визначити значення цієї сили, а також реакції підп’ятника *A* і підшипника *B*, якщо радіус барабана r_1 = 200 м; радіус шестерні r_2 = 400 м; відстань між центром шестерні та підп’ятником дорівнює 100 мм; *AB* = 1200 мм. Лінія дії сили *T* віддалена від площини шестерні на відстань 400 мм. Товщиною шестерні знехтувати.

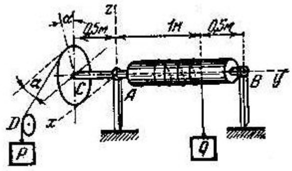
1.3.10



Ремінний шків *CD* динамо-машини має діаметр 200 мм; розміри вала вказані на рисунку. Натяг верхньої ведучої гілки ременя T_1 = 100 Н, нижньої веденої гілки T_2 = 100 Н.

Визначити обертовий момент *M* і реакції підшипників *A* і *B* при рівновазі системи, нехтуючи вагою частин машини, якщо *P* – *P* є парою сил тертя опору.

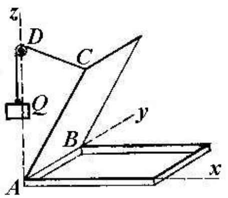
1.3.11



На вал *AB* коловорота намотана мотузка, яка підтримує вантаж *Q*. Діаметр колеса *C* на валу в 6 разів перевищує діаметр вала; інші розміри вказані на рисунку. Мотузка з вантажем *P* = 60 Н, намотана на колесо, збігає з колеса уздовж дотичної, нахиленої до горизонту під кутом α = 30°.

Визначити вагу *Q*, при якій коловорот залишатиметься в рівновазі, а також реакції підшипників *A* і *B*, нехтуючи силами тертям і вагою вала.

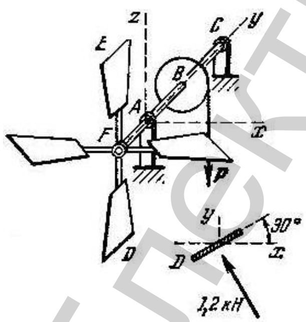
1.3.12



Однорідна прямокутна кришка вагою *P* = 400 Н утримується відкритою на 60° над горизонтом за рахунок противаги *Q*.

Визначити, нехтуючи силами тертя, вагу *Q* і реакції шарнірів *A* і *B*.

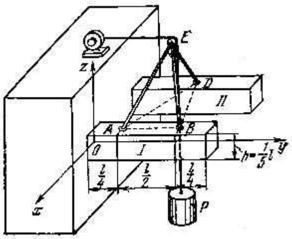
1.3.13



Енергозберігаючий повітряний генератор має чотири симетрично розташовані крила, площини яких складають з вертикальною віссю кути 30°. На відстані 2 м від осі *y* до кожного крила прикладена нормальна сила тиску повітря 1,2 кН. Вісь двигуна спирається в точці *A* на підшипник, а в точці *C* – на підп’ятник і утримується в спокої вертикальною силою тиску *P*.

Визначити силу *P* і реакції опор, якщо радіус колеса *B* дорівнює 1,2 м; *BC* = *AF* = 0,5 м; *AB* = 1 м.

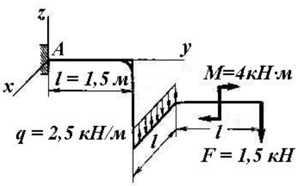
1.3.14*



Триніг *ABCD*, який має форму правильної піраміди, шарнірно закріплений на двох консольних балках. Через блок *E* перекинуто трос, який рівномірно піднімає вантаж *P* за допомогою лебідки.

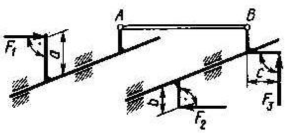
Визначити реакції закладення першої консолі, нехтуючи її вагою і силами тертя. Висота тринога *l*/2.

1.3.15



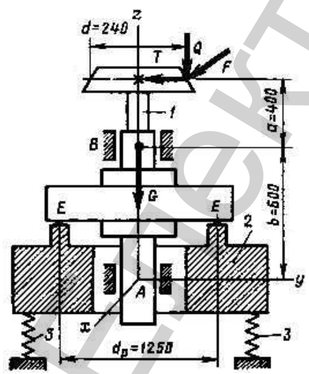
Визначити реакції закладення.

1.3.16



Нехтуючи тертям, знайти залежність між силами F_1, F_1, F_3 і геометричними розмірами *a*, *b*, *c* для зрівноваженої конструкції приладу.

1.3.17



Шліфувальний круг з конічною передачею і вертикальним валом *1* загальною вагою G = 2,5 кН приробляє деталь *2*.

Визначити реакції підшипників *A* і *B*, якщо складові сили зчеплення дорівнюють: $Q = 0{,}24F$; $T = 0{,}17F$. Коефіцієнт тертя на поверхні шліфування *E*, яка сприймає лише вертикальне навантаження, дорівнює $f = 0{,}07$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається просторовою системою сил?

2 Скільки векторних рівнянь рівноваги можна скласти при розв'язанні задачі про рівновагу просторової системи сил?

3 Скільки існує скалярних рівнянь, необхідних і достатніх для рівноваги просторової системи сил?

4 Чи має просторова система сил рівнодійну у загальному випадку?

5 Що називається головним вектором довільної просторової системи сил?

6 У якому випадку головний вектор дорівнює рівнодійній?

7 Що називається моментом сили відносно точки у просторі?

8 Що називається моментом сили відносно осі?

9 Який зв'язок між моментом сили відносно точки у просторі і моментом цієї сили відносно осі, яка проходить через вказану точку?

10 У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?

11 Сформулюйте правило знаків для визначення моменту сили відносно осі.

12 Сформулюйте теорему Вариньона для просторової системи сил.

13 Яку максимальну кількість невідомих реакцій зв'язків можна визначити при розв'язанні задачі про рівновагу односкладної просторової системи сил?

14 До якого найпростішого вигляду можна звести довільну просторову систему сил?

15 Скільки існує інваріантів просторової системи сил? Дайте їх визначення.

1.4 Центр ваги

Сили тяжіння окремих частин тіла до Землі направлені приблизно до його центра. Оскільки розміри тіл, що розглядаються в задачах механіки, малі щодо радіуса Землі, то ці сили умовно можна вважати паралельними. Рівнодійна цих паралельних сил є *вагою тіла*, а центр даної системи паралельних сил, в якому прикладена вага тіла, називається *центром ваги тіла*. Центр ваги твердого тіла займає положення, яке не залежить від орієнтації тіла у просторі.

Якщо позначити вагу окремих частин тіла $\overline{G}_k$, то координати центра ваги визначаються за такими формулами (рис 1.9):

$$x_C = \frac{\sum x_k G_k}{G};$$

$$y_C = \frac{\sum y_k G_k}{G}; \qquad (1.16)$$

$$z_C = \frac{\sum z_k G_k}{G},$$

де x_k, y_k, z_k – координати центрів ваги частин, G – вага тіла.

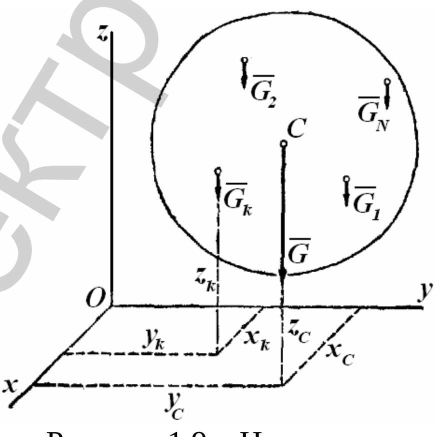


Рисунок 1.9 – Центр ваги

У разі якщо тіло має площину (або вісь) симетрії, центр його ваги знаходиться у цій площині (на цій осі).

У деяких задачах про знаходження центра ваги твердого тіла, яке має вісь симетрії, використовують дві теореми Гульдена. Відповідно до першої з них (рис. 1.10), *об'єм однорідного тіла обертання, отриманого обертанням плоскої фігури навколо осі, яка знаходиться в цій площині, але не перетинає її, дорівнює добутку площини фігури і довжини кола, описаного її геометричним центром*:

$$V = F \cdot 2\pi x_C . \tag{1.17}$$

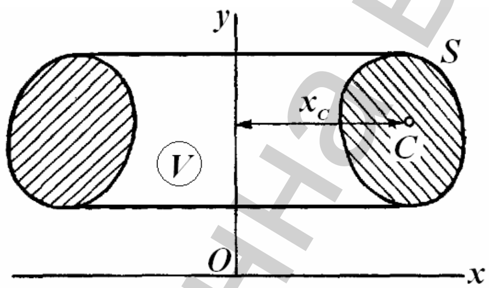


Рисунок 1.10 – Перша теорема Гульдена

Відповідно до другої теореми Гульдена (рис. 1.11) *площа однорідної поверхні обертання, отриманої обертанням плоскої кривої лінії навколо осі, яка знаходиться у площині кривої, але не перетинає її, дорівнює добутку довжини цієї кривої і довжини кола, описаного її центром ваги*:

$$S = L \cdot 2\pi x_C . \tag{1.18}$$

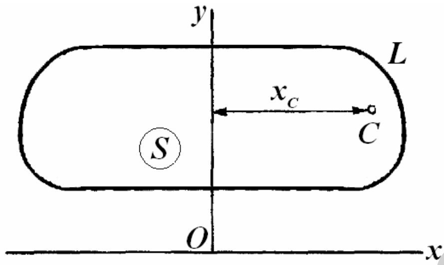
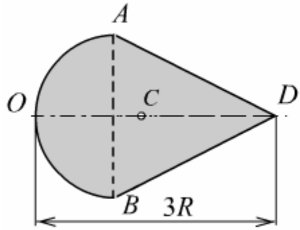


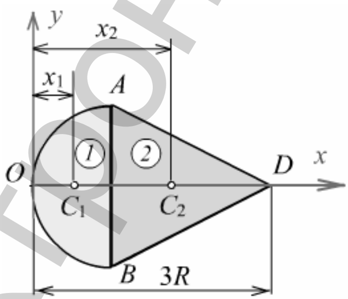
Рисунок 1.11 – Друга теорема Гульдена

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 1.4

Визначити положення центра ваги *C* плоскої пластини, обмеженої півколом *AOB* радіусом *R* і двома прямими однакової довжини *AD* = *BD*, причому *OD* = 3*R*.



Розв’язання

Розбиваємо фігуру на прості частини, центр ваги яких відомий або визначається нескладно. Вибираємо систему координат *xOy*. Площини окремих фігур: $S_1 = 0{,}5\pi R^2$; $S_2 = 2R^2$. Визначаємо координату *x* центра ваги трикутника: $x_2 = R + 2R/3 = 5R/3$. Для визначення координати x_1 центра ваги півкола застосуємо теорему Гульдена: $x_1 = R - \dfrac{V_1}{2\pi S_1}$, де $V_1 = \dfrac{4\pi}{3}R^3$ – об’єм кулі, утвореної шляхом обертання півкола *AOB* навколо осі *AB*. Отримаємо:

$$x_1 = R - \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{R^3}{2\pi\cdot 0{,}5\pi R^2} = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right)R\,.$$

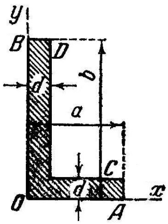
Визначаємо координату центра ваги всієї фігури:

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{0{,}5\pi R^2\cdot\left(1-\dfrac{4}{3\pi}\right)R + 2R^2\cdot\dfrac{5}{3}R}{0{,}5\pi R^2 + 2R^2} \approx 1{,}2R.$$

Оскільки фігура має вісь *x* симетрії, то $y_C = 0$.

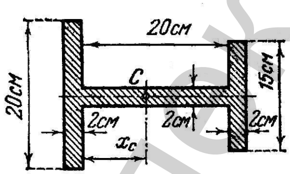
Відповідь: $x_C = 1{,}2R$; $y_C = 0$.

ЗАДАЧІ



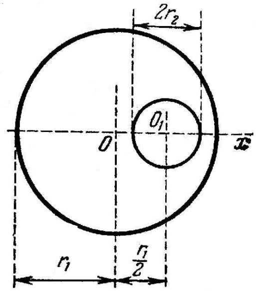
1.4.1

Знайти координати центра ваги поперечного перерізу нерівнобічного кутового профілю, розміри якого вказані на рисунку.



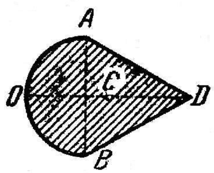
1.4.2

Знайти центр ваги поперечного перерізу двотаврового профілю, розміри якого вказані на рисунку.



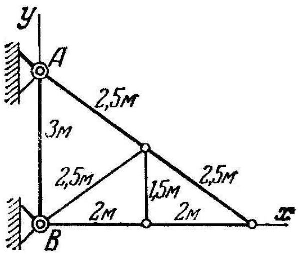
1.4.3

Визначити положення центра ваги тонкого однорідного диска з круглим отвором.



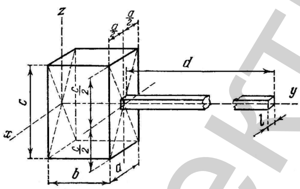
1.4.4

Визначити положення центра ваги *C* площини, обмеженої півколом *AOB* радіусом *R* та двома прямими лініями однакової довжини *AD* і *BD*, вважаючи *OD* = 3*R*.



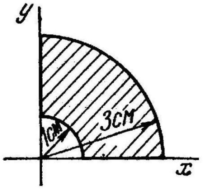
1.4.5

Знайти координати центра ваги плоскої ферми, яка складається зі стрижнів, якщо вага 1 м для усіх стрижнів однакова.



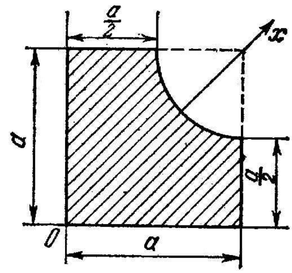
1.4.6

Знайти координати центра ваги дерев’яного молотка, який складається з прямокутного паралелепіпеда і рукоятки квадратного перерізу, якщо *a* = 100 мм; *b* = 80 мм; *c* = 180 мм; *d* = 400 мм; *l* = 30 мм.



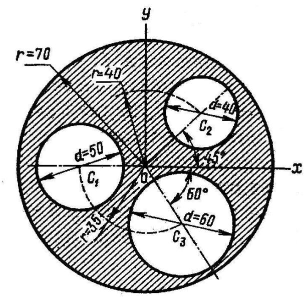
1.4.7

Визначити координати центра ваги четверті кільця.



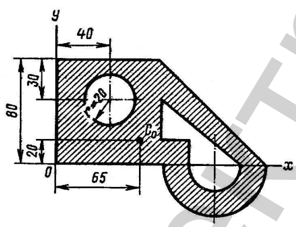
1.4.8

Знайти координати центра ваги фігури, зображеної на рисунку.



1.4.9

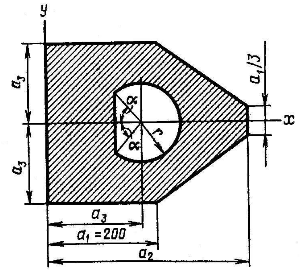
Визначити абсцису x_C центра ваги перерізу.



1.4.10*

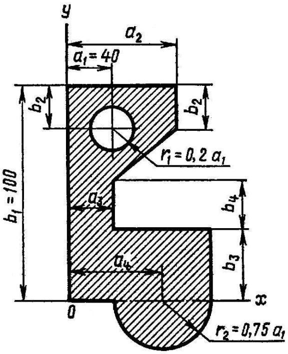
Центр ваги плоского поперечного перерізу площиною 100 см^2 знаходиться в точці C_O.

Визначити положення центра ваги перерізу за відсутності колового отвору?



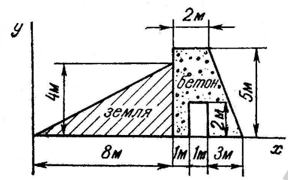
1.4.11

Визначити положення центра ваги симетричного перерізу, якщо задані такі геометричні співвідношення: $a_2 = 1{,}8a_1$; $a_3 = 0{,}8a_1$; $r/a_1 = 0{,}25$; $\alpha = 45°$.



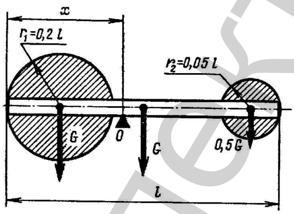
1.4.12

Визначити положення центра ваги перерізу, якщо задані такі геометричні співвідношення: $a_2 = 2{,}5a_1$; $a_3 = 0{,}6a_1$; $a_4 = 2a_1$; $b_2 = 0{,}2b_1$; $b_3 = 0{,}25b_1$; $b_4 = 0{,}2b_1$.



1.4.13*

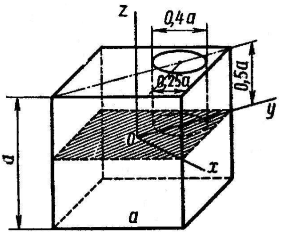
Знайти центр ваги поперечного перерізу греблі, якщо питома вага бетону дорівнює 24 кН/м^3, а питома вага земельного ґрунту становить 16 кН/м^3.



1.4.14*

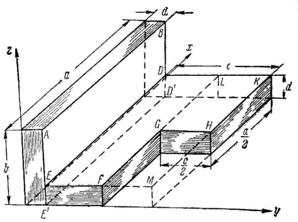
На однорідний тонкий стрижень довжиною *l*, вага якого дорівнює *G*, надіті кулі вагою *G* і 0,5*G*.

У якому місці слід розмістити опору *O*, щоб стрижень з кулями знаходився в рівновазі?



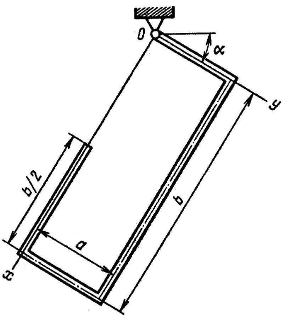
1.4.15*

Визначити положення центра ваги суцільного куба з циліндричним заглибленням.



1.4.16

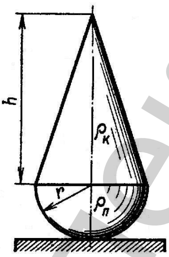
Визначити координати центра ваги однорідного тіла, зображеного на рисунку.



1.4.17*

Ламаний важіль зі стального дроту шарнірно підвішений у точці *O*.

Визначити кут *α* в положенні стійкої рівноваги.



1.4.18*

Тіло, склеєне з двох частин: конуса густиною $\rho_к$ і висотою *h*, а також півкулі густиною $\rho_п$ і радіусом *r*,– знаходиться на горизонтальній підлозі.

При яких значеннях співвідношення *h*/*r* забезпечується стійка рівновага тіла?

1.4.19*

Знайти центр ваги області, обмеженої лінією $y = b \cdot \cos(0{,}5\pi x/a)$ і координатними осями, якщо $a = 80$ м; $b = 9$ м.

1.4.20*

Знайти положення центра ваги горизонтального прямого стрижня довжиною l, густина якого розподілена вздовж осі за законом $\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\cdot x/l$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Як визначити суму, лінію дії і напрямок двох паралельних сил?

2 Як визначити різницю, лінію дії і напрямок двох паралельних сил?

3 Що називається центром паралельних сил?

4 Що називається центром ваги тіла?

5 Які існують способи визначення центра ваги?

6 Де знаходиться центр ваги тіла, симетричного відносно осі; симетричного відносно площини?

7 Охарактеризуйте метод від'ємних об'ємів; площин.

8 Сформулюйте першу теорему Гульдена. Для визначення центра ваги яких тіл вона використовується?

9 Сформулюйте другу теорему Гульдена. Для визначення центра ваги яких тіл вона використовується?

10 Як визначається центр ваги плоского неоднорідного тіла?

11 Як визначаються координати центра ваги просторового неоднорідного тіла, обмеженого прямою циліндричною поверхнею?

12 Як визначається координати центра ваги просторового неоднорідного тіла довільної конфігурації?

13 Опишіть метод шарнірного підвісу для експериментального визначення центра ваги плоских тіл; просторових тіл.

14 Опишіть метод вагів для експериментального визначення лінії, на якій знаходиться центр ваги тіла, яке має площину симетрії.

15 Сформулюйте принцип Торрічеллі для стійкої рівноваги абсолютно твердого тіла.

2 КІНЕМАТИКА

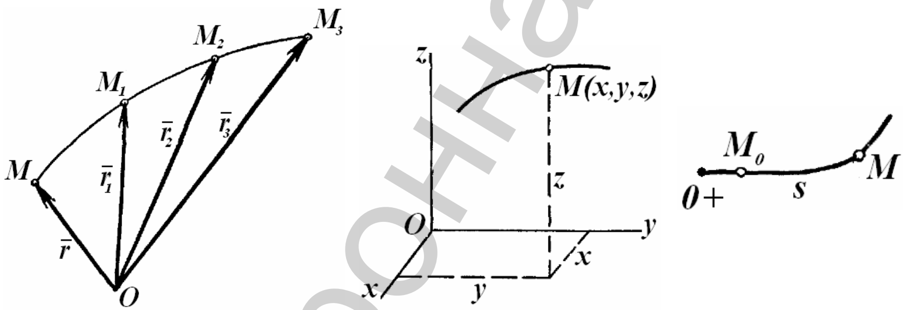
2.1 Кінематика точки

2.1.1 Траєкторія, рівняння руху

Під *механічним рухом* розуміють переміщення одних матеріальних тіл відносно інших. Рух матеріальної точки в кінематиці можна задати трьома способами: *векторним*, *координатним* і *натуральним*.

У векторному способі рух матеріальної точки задається *радіусом-вектором* цієї точки як векторфункцією, аргументом якої є час (рис. 2.1 а):

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{2.1}$$



а) б) в)

Рисунок 2.1 – Способи задання руху точки
а) векторний; б) координатний; в) натуральний

Траєкторія точки є геометричним місцем кінців радіуса-вектора точки, яка рухається. У векторному способі траєкторія точки збігається з годографом її радіуса-вектора.

У координатному способі (рис. 2.1 б) положення точки в системі координат $Oxyz$ визначається трьома координатами:

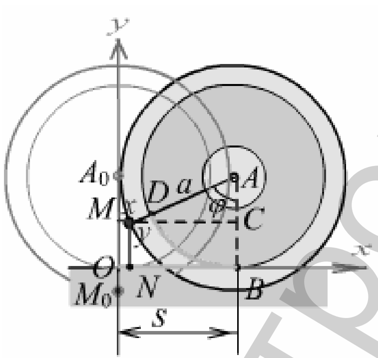
$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t). \end{cases} \qquad (2.2)$$

Остання система є системою параметричних рівнянь руху матеріальної точки, для встановлення траєкторії якої необхідно встановити залежність між координатами *x*, *y*, *z* шляхом виключення часу *t*.

У випадках, коли відома траєктрія точки, застосовують природний спосіб задання руху, який задається початком відліку *O*, зазначенням додатного напряму руху і дуговою (криволінійною) координатою *s* (рис. 2.1 в):

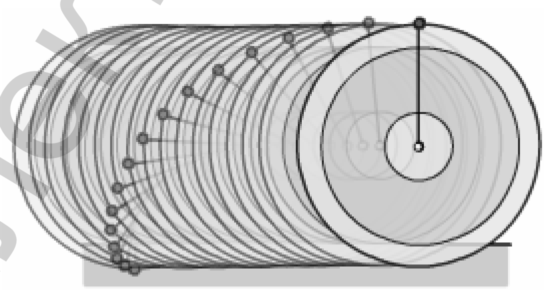
$$s = s(t). \qquad (2.3)$$

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 2.1.1

Визначити рівняння руху і форму траєкторії точки *M* колеса вагона радіусом *R*, яка віддалена від осі на відстані *a* і знаходиться в початковий момент нижче рейки на величину $(a - R)$. Вагон рухається по прямолінійному шляху зі швидкістю *v*.



Розв'язання

Зображуємо об'єкти руху (колесо і точку) в початковий ($t = 0$) і поточний t моменти часу. Координата x точки M: $x = ON = OB - NB = s - MC = vt - a\sin\varphi$, де $s = R\varphi$ – дуга кола, яка відповідає оберту колеса на кут $\varphi = s/R = vt/R$. Таким чином, $x = vt - a\sin(vt/R)$. Координата y точки M: $y = CB = AB - AC = R - a\cos\varphi$, або $y = R - a\cos(vt/R)$. Таким чином, рух точки M визначається такою системою параметричних рівнянь відносно параметра t:

$$\begin{cases} x = vt - a\sin\dfrac{vt}{R}; \\ y = R - a\cos\dfrac{vt}{R}. \end{cases}$$

Траєкторією точки є циклоїда.

Відповідь: точка M рухається по циклоїді за законом

$$x(t) = vt - a\sin\frac{vt}{R}; \quad y(t) = R - a\cos\frac{vt}{R}.$$

ЗАДАЧІ

2.1.1.1

За заданим рівнянням руху точки на довільній траєкторії побудувати через однакові проміжки часу шість положень точки; визначити відстань s уздовж траєкторії від початку відліку до кінцевого положення точки і пройдений шлях σ за вказаний проміжок часу (s і σ – в сантиметрах; час t – в секундах):
1) $s = 5 - 4t + t^2$; $0 \le t \le 5$; 2) $s = 1 + 2t - t^2$; $0 \le t \le 2{,}5$;
3) $s = 4\sin 10t$; $\pi/20 \le t \le 3\pi/10$.

2.1.1.2

За заданими рівняннями руху точки знайти рівняння її траєкторії в координатній формі та вказати на рисунку напрям руху:
1) $x = 3t - 5$; $y = 4 - 2t$; 2) $x = 2t$; $y = 8t^2$; 3) $x = 5\sin 10t$; $y = 3\cos 10t$;
4) $x = 2 - 3\cos 5t$; $y = 4\sin 5t - 1$; 5) $x = \mathrm{ch}(t)$; $y = \mathrm{sh}(t)$.

2.1.1.3

Побудувати траєкторію точки, радіус-вектор якої змінюється за законом

1) $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{e}t$;

2) $\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{e}\cos t$.

$\bar{r}_0$ і $\bar{e}$ – задані незмінні вектори.

2.1.1.4

За заданими рівняннями руху точки знайти рівняння її траєкторії. Вказати закон руху точки вздовж траєкторії, відраховуючи відстань від початкового положення точки:

1) $x = 3t^2$; $y = 4t^2$; 2) $x = 3\sin t$; $y = 3\cos t$;

3) $x = 5\cos 5t^2$; $y = 5\sin 5t^2$.

2.1.1.5

Мостовий кран рухається уздовж майстерні відповідно до рівняння $x = t$; по крану в поперечному напрямі котиться валізка за рівнянням $y = 1{,}5t$ (x і y – в метрах; t – в секундах). Ланцюг вкорочується зі швидкістю 0,5 м/с.

Визначити траєкторію центра ваги вантажу, якщо в початковий момент він знаходився в горизонтальній площині xy; вісь z спрямована вертикально вгору.

2.1.1.6

Рух точки, яка описує фігуру Ліссажу, задається рівняннями $x = 3\sin(t)$; $y = 2\cos(2t)$.

Знайти рівняння траєкторії, накреслити її та вказати напрями руху в різні моменти часу. Вказати найближчий після початку руху момент часу t_1, коли траєкторія перетне вісь x.

2.1.1.7

Рівняння руху електрона в магнітному полі визначається рівняннями $x = a\cdot\sin(kt)$; $y = a\cdot\cos(kt)$; $z = vt$, де a, k і v – константи. Визначити траєкторію електрона і закон його руху вздовж траєкторії.

2.1.1.8*

Визначити траєкторію точки, яка здійснює два коливальні рухи однакової частоти з різними амплітудами і фазами у взаємно перпендикулярних напрямах: $x = a\cdot\sin(kt + \alpha)$; $y = a\cdot\cos(kt + \beta)$.

2.1.1.9

Знайти рівняння траєкторії точки, яка рухається, здійснюючи одночасно два коливальні рухи різної частоти:

1) $x = a\cdot\sin 2\omega t$; $\mathrm{y} = \mathrm{a}\cdot\sin\omega t$;

2) $x = a\cdot\cos 2\omega t$; $\mathrm{y} = \mathrm{a}\cdot\cos\omega t$.

2.1.1.10

За заданими у векторній формі рівняннями руху точки визначити її траєкторію (i, j, k – орти осей x, y, z відповідно):
1) $r = (2t + 1)\cdot i + (2 - 3t)\cdot j$; 2) $r = (2 + 3t)\cdot i + (1 - 2t)\cdot j + (2 + t)\cdot k$;
3) $r = t^2\cdot i + (5 - 2t^2)\cdot k$; 4) $r = 3\cos(\pi t/6)\cdot i + [1 + 3\sin(\pi t/6)]\cdot j$;
5) $r = [2 + \sin(\pi t/3)]\cdot i + [1 + 2\cos(\pi t/3)]\cdot k$; 6) $r = 6\cos 2t\cdot j + t\cdot k$;
7) $r = (3 + 2\cos 2t)\cdot i + (2 - 3\sin 2t)\cdot j$; 8) $r = 3\sin(t^3)\cdot i + 2\cos(t^3)\cdot k$;
9) $r = \cos(2t)\cdot i + \sin(t)\cdot k$.

2.1.1.11

Визначити рівняння руху і траєкторію точки ободу колеса автомобіля радіусом 1 м, який рухається по прямолінійному шляху зі сталою швидкістю 20 м/с. Колесо рухається без проковзування; за початок координат узяти початкове положення точки на шляху, взятому за вісь Ox.

2.1.1.12

Снаряд рухається за законом $x = v_0\cdot\cos\alpha\cdot t$; $y = v_0\cdot\sin\alpha\cdot t - gt^2/2$, де v_0 – початкова швидкість; α – кут вильоту відносно горизонтальної осі x; g – прискорення вільного падіння.

Визначити траєкторію снаряда, висоту H, дальність L і час T польоту. При якому куті вильоту α_1 дальність польоту буде максимальною L_{max}? Знайти відповідні висоту H_1 і час T_1. Визначити кут вильоту α_2, при якому снаряд потрапить у точку $A(x; y)$.

2.1.1.13

Задані рівняння руху точки: $x = 2a \cdot \cos^2(kt/2)$; $y = a \cdot \sin(kt)$, де a і k – додатні константи.

Визначити траєкторію точки і закон руху уздовж траєкторії. Записати рівняння руху точки в полярній системі координат.

2.1.1.14

Точка бере участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних згасаючих коливаннях, рівняння яких мають такий вигляд: $x = A \cdot \exp(-ht) \cdot \cos(kt + \varepsilon)$; $y = A \cdot \exp(-ht) \cdot \sin(kt + \varepsilon)$, де $A > 0$, $h > 0$, $k > 0$, ε – константи.

Визначити рівняння руху в полярних координатах і знайти траєкторію точки.

2.1.1.15*

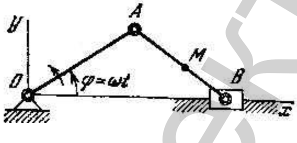
За заданими рівняннями руху точки в декартовій системі координат знайти її траєкторію, а також записати рівняння руху в сферичних координатах:

$$x = R \cdot \cos^2(kt/2);\ y = 0{,}5R \cdot \sin(kt);\ z = R \cdot \sin(kt/2).$$

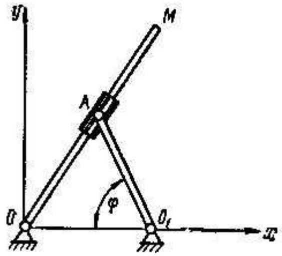
2.1.1.16

Кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 10$ рад/с. Довжина $OA = AB = 80$ см.

Знайти рівняння руху і траєкторію середньої точки M шатуна, а також рівняння руху повзуна B, якщо в початковий момент часу повзун знаходився в крайньому правому положенні. Вісі координат вказані на рисунку.



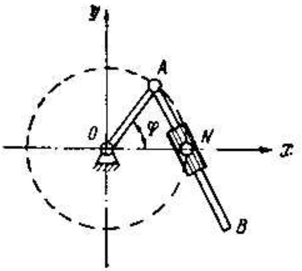
2.1.1.17



Куліса *OM* довжиною *l* приводиться в рух кривошипом O_1A, який обертається за законом $\varphi = kt^2$.

Скласти рівняння руху кінця куліси *M*, якщо $O_1O = O_1A$.

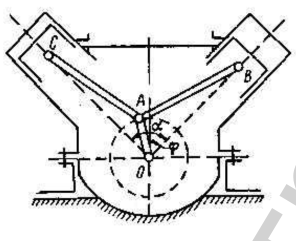
2.1.1.18



Стрижень *AB* довжиною *l* рухається таким чином, що одна з його точок описує коло радіусом $r < 0{,}5l$. Стрижень також проходить через нерухому точку *N*, яка лежить на зазначеному колі.

Скласти рівняння руху точки *B*, якщо $\varphi = \omega t$.

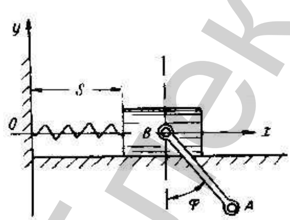
2.1.1.19



У двигуні внутрішнього згоряння кут між осями циліндрів $\alpha = 90°$. Колінчастий вал обертається за законом $\varphi = \omega t$.

Скласти рівняння руху поршнів *B* і *C*, якщо довжина кривошипа $OA = R$, а довжини шатунів *AB* і *AC* дорівнюють *L*.

2.1.1.20

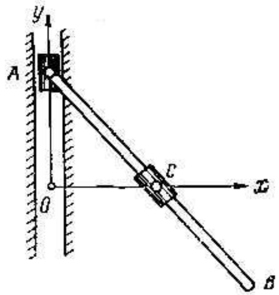


Стрижень *AB* довжиною *l* провертається відносно точки *B* за законом $\varphi = \omega t$, а повзун *B* здійснює коливання за законом $s = a + b \cdot \sin\omega t$.

Визначити траєкторію точки *A*.

2.1.1.21

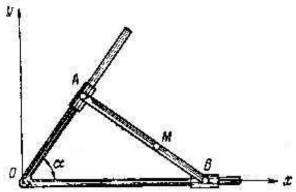
Стрижень AB довжиною l рухається таким чином, що кінець A ковзає уздовж нерухомої прямої Oy, а вісь стрижня AB увесь час перетинає нерухому точку C, віддалену від осі Oy на відстань $OC = a$.



Знайти рівняння кривої, по якій рухається точка B.

2.1.1.22

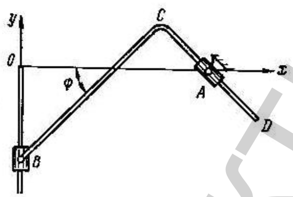
У механізмі, зображеному на рисунку, лінійка AB рухається таким чином, що її кінці A і B увесь час ковзають уздовж прямолінійних напрямних, які утворюють між собою кут α.



Визначити траєкторію точки M, якщо $AM = a$; $BM = b$.

2.1.1.23

Стрижень BCD, зігнутий під прямим кутом, переміщується таким чином, що точка B ковзає уздовж прямолінійної напрямної, а вісь CD увесь час перетинає нерухому точку A.



Визначити рівняння руху точки C та її траєкторію, якщо кут φ змінюється за законом $\varphi = kt$ $(0 \le \varphi < \pi/2)$, а також $BC = OA = a$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається матеріальною точкою?
2 Що називається механічним рухом.
3 Дайте визначення радіуса-вектора точки.

4 Що називається траєкторією точки?

5 Як пов’язані між собою координати декартової і полярної систем координат?

6 Як визначається радіус кривизни траєкторії точки, що рухається у плоскій декартовій системі координат?

7 Як визначається радіус кривизни траєкторії точки, що рухається у полярній системі координат?

2.1.2 Швидкість, прискорення

Швидкістю точки називається векторна величина, яка дорівнює похідній за часом від радіуса-вектора точки:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{2.4}$$

Швидкість точки позначається літерою *v* (від англ. «velocity»). Вектор швидкості спрямований по дотичній до траєкторії точки у бік збільшення дугової координати (рис. 2.2).

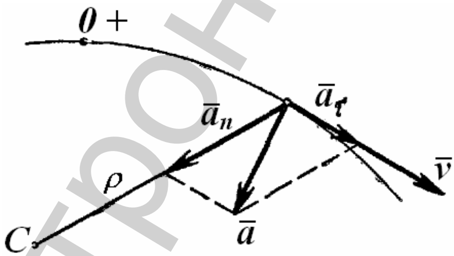


Рисунок 2.2 – Швидкість і прискорення точки

У координатному способі задання руху швидкість точки визначається за її проекціями на осі координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}. \tag{2.5}$$

У цьому випадку модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{2.6}$$

У природному способі задання руху модуль швидкості точки визначається як похідна від дугової координати:

$$v = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s}. \qquad (2.7)$$

Прискоренням точки називається векторна величина, яка дорівнює похідній від швидкості точки:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \qquad (2.8)$$

Прискорення також можна визначати як другу похідну від радіуса-вектора точки. Прискорення точки позначається літерою *a* (від англ. «acceleration»). Вектор прискорення спрямований у бік ввігнутості траєкторії точки (рис. 2.2).

У координатному способі задання руху прискорення точки визначається за її проекціями на осі координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \equiv \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x};$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \equiv \dot{v}_y = \frac{d^2y}{dt^2} \equiv \ddot{y}; \qquad (2.9)$$
$$a_x = \frac{dv_z}{dt} \equiv \dot{v}_z = \frac{d^2z}{dt^2} \equiv \ddot{z}.$$

У цьому випадку модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \qquad (2.10)$$

У природному способі задання руху прискорення визначають як геометричну суму двох компонент: тангенціального і нормального прискорення (рис. 2.2):

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (2.11)$$

При цьому *тангенціальне прискорення* спрямоване по дотичній до траєкторії точки, а його модуль визначається як похідна від модуля швидкості, або друга похідна від дугової координати:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2} \equiv \ddot{s}. \qquad (2.12)$$

Модуль тангенціального прискорення можна також визначити за такою формулою:

$$a_n = \frac{a_x v_y + a_y v_x}{v}. \qquad (2.13)$$

Нормальне прискорення спрямоване до центра кривизни траєкторії точки, а його модуль дорівнює відношенню квадрата швидкості точки до радіуса кривизни ρ траєкторії:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (2.14)$$

Радіус кривизни траєкторії можна визначити за формулою

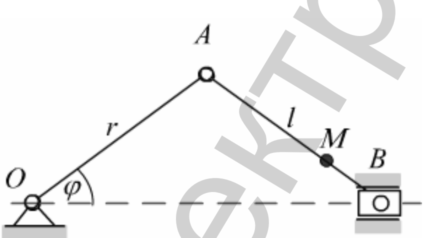
$$\rho = \frac{v^3}{\left| a_x v_y - a_y v_x \right|}. \qquad (2.15)$$

Модуль нормального прискорення можна також визначити за однією з таких формул:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}; \qquad (2.16)$$

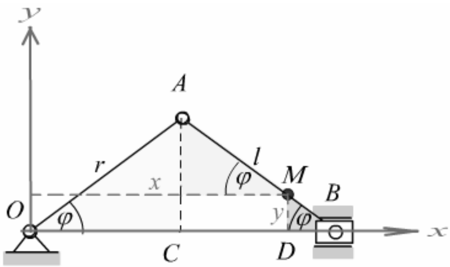
$$a_n = \frac{\left| a_x v_y - a_y v_x \right|}{v}. \qquad (2.17)$$

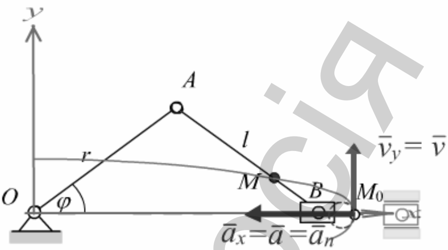
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

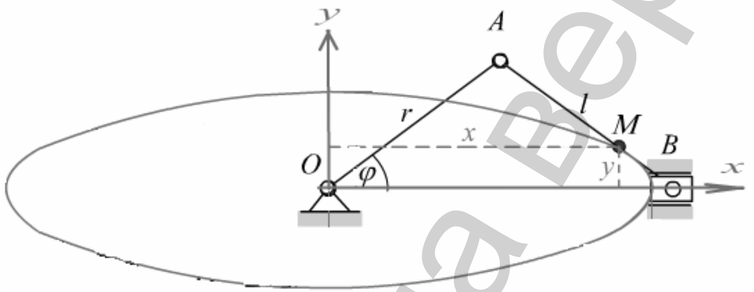


Задача 2.1.2

Знайти траєкторію точки *M* кривошипного механізму, для якого $OA = r$, $AB = l$, $BM = l/3$, $\varphi = 4\pi t$. Визначити швидкість, прискорення і радіус кривизни траєкторії точки в момент часу, коли $\varphi = 0$.







Розв’язання

Виберемо систему координат *xOy*. Визначаємо рівняння руху точки:

$$\begin{cases} x = OC + CD = OA \cdot \cos\varphi + AM \cdot \cos\varphi = (r + 2l/3)\cos 4\pi t; \\ y = MD = MB \cdot \sin\varphi = l/3 \cdot \sin 4\pi t. \end{cases}$$

Визначаємо траєкторію точки, виключаючи з рівнянь руху час t: $\cos 4\pi t = x/(r + 2l/3)$; $\sin 4\pi t = 3y/l$. За основною тригонометричною тотожністю $\cos^2 4\pi t + \sin^2 4\pi t \equiv 1$, звідки

$$\frac{x^2}{(r + 2l/3)^2} + \frac{y^2}{(l/3)^2} = 1.$$

Таким чином, траєкторією точки *M* є еліпс із центром на початку координат і півосями $r + 2l/3$ і $l/3$.

Визначаємо швидкість точки *M* за її проекціями: $v_x = \dot{x} = -4\pi(r + 2l/3)\sin 4\pi t$; $v_y = \dot{y} = 4\pi l/3 \cdot \cos 4\pi t$. У момент часу, коли $\varphi = 0$, маємо: $v_x = 0$; $v_y = 4\pi l/3$. При цьому положення точки *M* при $\varphi = 0$: $x_0 = r + 2l/3$; $y_0 = 0$. Модуль швидкості $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4\pi l/3$.

Визначаємо прискорення точки *M* за її проекціями: $a_x = \dot{v}_x = -16\pi^2(r + 2l/3)\cos 4\pi t$; $a_y = -16\pi^2 l/3 \sin 4\pi t$. В початковий момент, коли $\varphi = 0$, маємо: $a_x = -16\pi^2(r + 2l/3)$; $a_y = 0$. Модуль прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 16\pi^2(r + 2l/3)$. Дотичне прискорення точки *M*: $a_\tau = \dot{v} = (v_x a_x + v_y a_y)/v = 0$. Нормальне прискорення $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 16\pi^2(r + 2l/3)$. Радіус кривизни траєкторії у положенні точки *M*, яке відповідає $\varphi = 0$, $\rho = v^2 / a_n = l^2 / (9r + 6l)$.

Відповідь: траєкторія точки еліпс; радіус кривизни траєкторії у початковий момент часу $\rho = l^2 / (9r + 6l)$.

ЗАДАЧІ

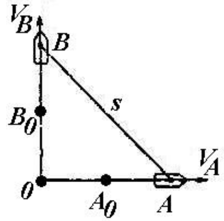
2.1.2.1

За заданими рівняннями руху точки визначити її траєкторію, а також швидкість *V*, прискорення *a* з його компонентами (тангенціальна a_τ і нормальна a_n складові) і радіус кривизни траєкторії в початковий момент часу:
1) $x = t^2$; $y = t^3/3$; 2) $x = 4 + 6t^2$; $y = 3t^2 - 1$; 3) $x = 2 + t^3$; $y = 4 - 3t^3$;
4) $x = 3t$; $y = 2/(t + 1)$; 5) $x = 2t$; $y = \exp(-4t)\cdot\sin(4t)$;
6) $x = t$; $y = \sin(t^2)$; 7) $x = 3t$; $y = 4t - 3t^2$; 8) $x = \mathrm{tg}(t)$; $y = \cos^2(t)$;
9) $x = \mathrm{tg}(t/2)$; $y = \sin(t)$.

2.1.2.2

Визначити рівняння руху точки уздовж траєкторії, а також значення дугової координати *s* і пройдений шлях *σ* у момент часу $t = 5$ с, якщо її швидкість задається рівняннями: 1) $V = 10$ см/с; 2) $V = 3 - t$, см/с; 3) $V = 2t + 1$, см/с; 4) $V = 0{,}2\pi\cdot\sin(8\pi t/15)$, см/с; 5) $V = [3 + 0{,}2\pi\cdot\cos(2\pi t/5)]$,см/с; 6) $V = (t - 1)(t - 2)$, см/с.

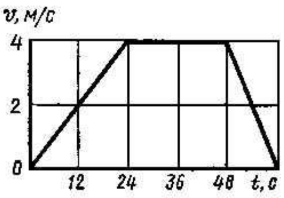
2.1.2.3



Два судна *A* і *B* пливуть у взаємно перпендикулярних напрямах з незмінними швидкостями 20 км/год.

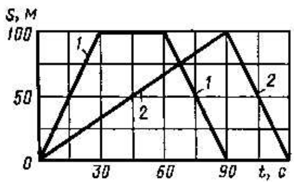
Визначити закон зміни відстані *s* між суднами, якщо в початковий момент часу вони займали положення A_0 і B_0, причому $OA_0 = OB_0 = 3$ км.

2.1.2.4



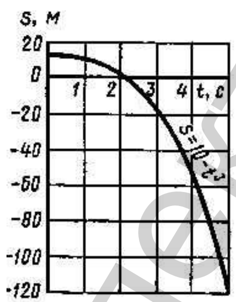
За графіком швидкостей точки побудувати графік її прискорень і визначити шлях *s*, пройдений точкою за час руху.

2.1.2.5

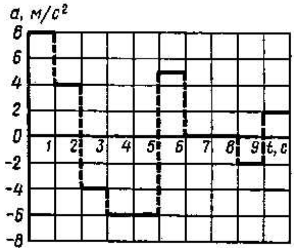


За наведеними графіками переміщень точок *1* і *2*, які рухаються уздовж однієї траєкторії, описати, як рухалися точки. Якому моменту відповідає точка перетину графіків?

2.1.2.6



За графіком переміщень точки, яка рухається прямолінійно, побудувати графік прискорень.



2.1.2.7

За графіком прискорень точки, яка рухається прямолінійно, побудувати графіки швидкостей і відстаней для таких початкових умов: $V(0) = 0$; $s(0) = 20$ м.

2.1.2.8

Рух точки на площині заданий параметричними рівняннями в полярних координатах: $r = 1 + t^2$; $\varphi = \text{arctg}(t)$.

Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки.

2.1.2.9

Задані рівняння руху точки у сферичних координатах: $R = \exp(t)$; $\varphi = 2t$; $\theta = t$.

Знайти швидкість і прискорення точки.

2.1.2.10

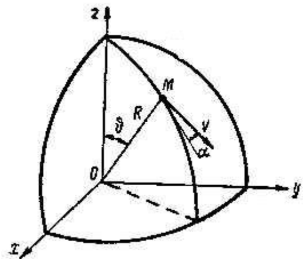
Точка рухається уздовж гіперболічної спіралі $r = a/\varphi$, причому радіальна швидкість її віддалення дорівнює u.

Знайти значення повної швидкості точки в залежності від кута φ.

2.1.2.11

Точка рухається в площині уздовж логарифмічної спіралі $r = a \cdot \exp(k\varphi)$, причому $\varphi = \omega t$ ($\omega = \text{const}$).

Знайти значення швидкості і прискорення в залежності від параметра r.



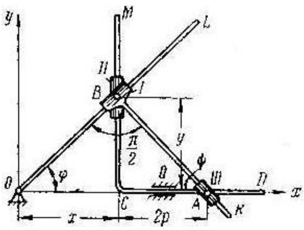
2.1.2.12

Човен рухається рівномірно зі швидкістю V, вектор якої утворює з географічним меридіаном сталий кут α.

Визначити прискорення човна залежно від кута θ між віссю Землі і радіусом R, проведеним з її центра в точку, яку займає човен.

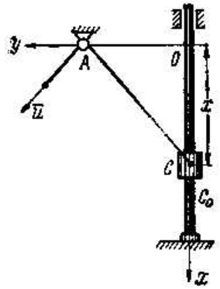
2.1.2.13

У механізмі, зображеному на рисунку, стрижень OL обертається навколо нерухомого шарніра O за законом $\varphi = \omega t$ (ω = const) і проходить у точці B через обертовий повзун I, з'єднаний шарнірно з повзуном II, який рухається уздовж вертикальної напрямної CM, яка здатна переміщуватися лише поступально. До повзуна I прикріплений стрижень BK, перпендикулярний до його осі і перетинаючий у точці A поворотний повзун III. Вісь цього повзуна закріплена на стрижні CD на відстані $CA = a$ від точки C.



Знайти криву, уздовж якої рухається точка B, а також її швидкість і прискорення.

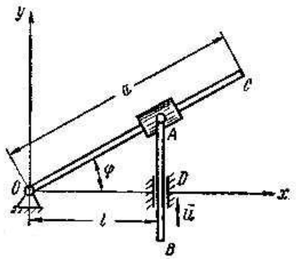
2.1.2.14



Вантаж C піднімається вертикально за допомогою троса, перекинутого через нерухомий блок A, віддалений від напрямної на відстань $AO = a$.

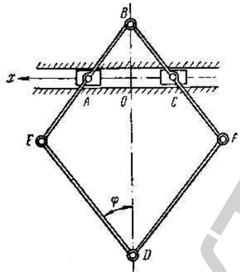
Визначити швидкість і прискорення вантажу C залежно від відстані $OC = x$, якщо вільний кінець троса тягнуть зі сталою швидкістю u.

2.1.2.15



У кулісному механізмі штанга AB рухається угору зі сталою швидкістю u. Скласти рівняння руху точки C куліси і визначити швидкість цієї точки в момент часу, коли $\varphi = \pi/4$, якщо в початковий момент часу $\varphi = 0$. Крім того $OC = a$; $OD = l$.

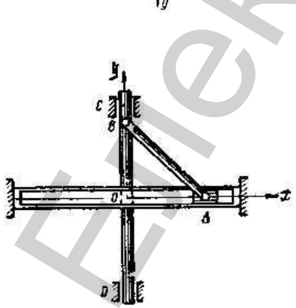
2.1.2.16



У механізмі проектора повзуни A і C віддаляються один від одного зі швидкістю V кожний.

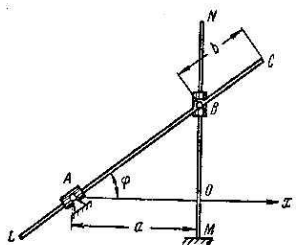
Визначити в момент, коли кут $BDE = \varphi$, швидкості шарнірів B, E, F і D, якщо $AE = CF = a$; $BE = BF = ED = FD = l$.

2.1.2.17



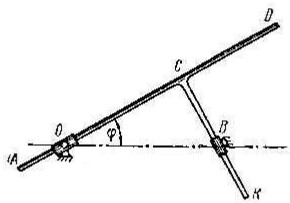
Шток здатний вільно переміщуватися вздовж напрямних C і D за допомогою шатуна AB довжиною l, кінець якого рухається за законом $x = OA = a\cdot\sin\omega t$. Визначити швидкість штока в залежності від x.

2.1.2.18



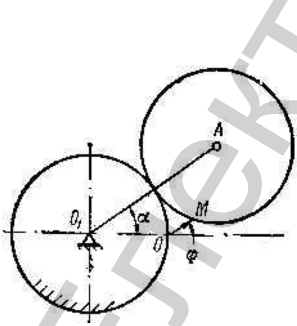
У даному механізмі стрижень *LC* проходить через обертовий повзун у точці *A*, а в точці *B* шарнірно закріплений на повзуні, який рухається по напрямній *MN*. Знайти траєкторію точки *C*, її швидкість і прискорення, якщо $AO = a$; $BC = b$; кут $AON = 90°$; $\varphi = \omega t$.

2.1.2.19*



Два стрижні *AD* і *CK* з’єднані між собою під прямим кутом, рухаючись таким чином, що стрижень *AD* увесь час проходить через нерухому точку *O*, а стрижень *CK* – через точку *B*, причому $OB = 2a$. Вважаючи точку *O* за полюс полярної системи координат, *OB* – за полярну вісь, визначити в полярних координатах траєкторію точки *D*, віддаленої від точки *C* на відстань $CD = 2r$. Знайти швидкість і прискорення точки *D*, якщо кут $\varphi = kt$.

2.1.2.20*



Сателіт планетарної передачі радіусом *R* обкатується без ковзання навколо нерухомої шестірні тим самим радіусом за допомогою кривошипа O_1A, який обертається за законом $\alpha = kt$. Знайти полярні рівняння руху будь-якої точки *M* ободу сателіта, якщо в початковий момент вона була точкою зіткнення з нерухомою шестернею. Початкове положення точки взяти за полюс, а MO_1 – за полярну вісь.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається середньою швидкістю точки?

2 Що називається миттєвою швидкістю точки?

3 Як визначаються проекції швидкості точки за відомою системою параметричних рівнянь руху в декартовій просторовій системі координат?

4 Як визначаються компоненти швидкості точки за відомою системою параметричних рівнянь руху в циліндричній системі координат?

5 Як визначаються компоненти швидкості точки за відомою системою параметричних рівнянь руху в тороїдальній системі координат?

6 Як спрямований вектор швидкості точки відносно траєкторії?

7 Що називається середнім прискоренням точки?

8 Що називається миттєвим прискоренням точки?

9 Як визначаються проекції прискорення точки за відомою системою параметричних рівнянь руху в декартовій просторовій системі координат?

10 Як визначаються компоненти прискорення точки за відомою системою параметричних рівнянь руху в циліндричній системі координат?

11 Як визначаються компоненти прискорення точки за відомою системою параметричних рівнянь руху в тороїдальній системі координат?

12 Як спрямований вектор прискорення точки відносно траєкторії?

13 Що називається натуральним тригранником? Які назви мають його осі?

14 У якій площині знаходиться прискорення точки?

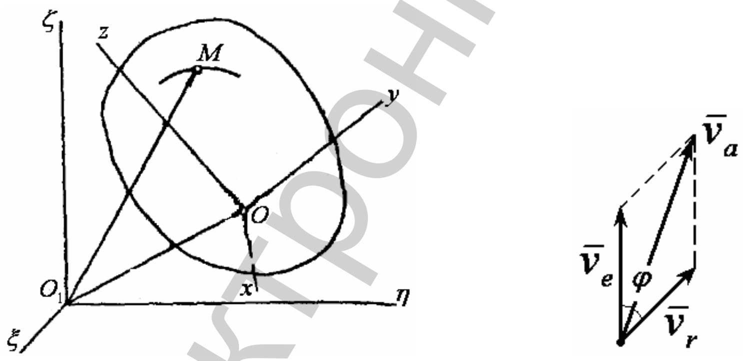
15 Як визначити тангенціальне прискорення точки за відомим законом зміни швидкості в часі?

16 Як визначити нормальне прискорення точки за відомою швидкістю і радіусом кривизни траєкторії у даний момент часу?

17 Назвіть формули для визначення нормального і тангенціального прискорень точки за відомими проекціями швидкості і повного прискорення під час руху даної точки у плоскій декартовій системі координат.

2.1.3 Складний рух точки

Під *складним рухом матеріального об'єкта* розуміють такий рух, у якому точка одночасно бере участь у двох і більше рухах. При розв'язанні задач на складний рух точки *M* вводять дві системи відліку: *нерухому* $O_1\xi\eta\zeta$, пов'язану з деяким умовно нерухомим об'єктом, і рухому $Oxyz$, незмінно пов'язану з об'єктом, рух якої розглядається (рис. 2.3).



а) б)

Рисунок 2.3 – Складний рух точки:
а) системи відліку; б) трикутник швидкостей

Рух точки *M* відносно нерухомої системи відліку називається *абсолютним* (позначається індексом «*a*» від англ. «absolute»), а відносно рухомої системи відліку – *відносним* (позначається індексом «*r*» від англ. «relative»). Рух рухомої системи відліку відносно нерухомої називається *переносним* (позначається індексом «*e*»).

Швидкість точки, яка здійснює складний рух, у будь-який момент часу визначається із застосуванням теореми про додавання швидкостей: *абсолютна швидкість* $\overline{v}_a$ *точки дорівнює геометричній сумі її переносної* $\overline{v}_e$ *і відносної* $\overline{v}_r$ *швидкостей* (рис. 2.3 б):

$$\overline{v}_a = \overline{v}_e + \overline{v}_r\,. \qquad (2.18)$$

Модуль абсолютної швидкості визначається за теоремою косинусів

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\varphi}, \qquad (2.19)$$

де φ – кут між векторами переносної і відносної швидкостей.

Прискорення точки, яка здійснює складний рух, у будь-який момент часу визначається із застосуванням теореми Коріоліса: *абсолютне прискорення* $\overline{a}_a$ *точки дорівнює геометричній сумі її переносної* $\overline{a}_e$, *відносної* $\overline{a}_r$ *і коріолісова* $\overline{a}_c$ *прискорень*:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c\,. \qquad (2.20)$$

Прискорення Коріоліса, яке характерізує зміну з часом переносної швидкості у відносному рухові точки і відносної швидкості у її переносному рухові, визначається як подвійний векторний добуток кутової швидкості переносного руху і лінійної швидкості відносного руху точки:

$$\overline{a}_c = 2\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r\,. \qquad (2.21)$$

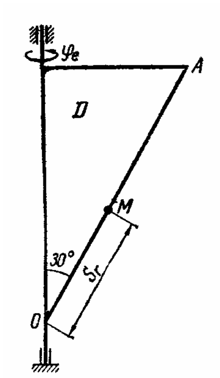
У разі поступального переносного руху ($\overline{\omega}_e = 0$) прискорення Коріоліса дорівнює нулю, а модуль абсолютного прискорення визначається за теоремою косинусів

$$a_a = \sqrt{a_e^2 + a_r^2 + 2a_e a_r\, cos\left(\overline{a}_{e,}\hat{\ }\overline{a}_r\right)}. \qquad (2.22)$$

У загальному випадку абсолютне прискорення визначається за його проекціями на осі системи координат:

$$a_a = \sqrt{\left(a_{ex} + a_{rx} + a_{cx}\right)^2 + \left(a_{ey} + a_{ry} + a_{cy}\right)^2 + \left(a_{ez} + a_{rz} + a_{cz}\right)^2}\,. \qquad (2.23)$$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



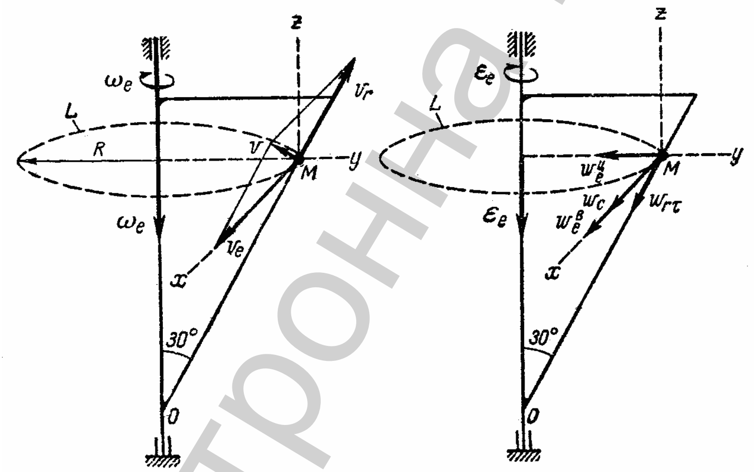
Задача 2.1.3

За заданими рівняннями відносного руху точки *M* і переносного руху тіла *D* визначити для часу $t = t_1$ абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки *M*.

$\varphi_e = 0{,}9t^2 - 9t^3$ (рад);

s_r = OM = 16 – 8cos($3\pi t$) (см);

t_1 = 2/9 с.



Розв'язання

Вважатимемо, що в розрахунковий момент часу площина креслення збігається з площиною трикутника *D*. Положення точки *M* на тілі *D* визначається відстанню $s_r = OM$. При t = 2/9 с

$$s_r = 16 - 8\cos\left(3\pi \cdot \frac{2}{9}\right) = 20\left(см\right).$$

Абсолютну швидкість точки знайдемо як геометричну суму відносної і переносної швидкостей: $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$. Відносна швидкість

$$V_r = \frac{ds_r}{dt} = 24\pi \sin(3\pi t).$$

При t = 2/9 с $V_r = 24 \cdot 3{,}14 \cdot \sin\left(3\pi \cdot \frac{2}{9}\right) = 65{,}2\,(см/с).$

Додатний знак V_r свідчить про те, що вектор $\vec{V}_r$ спрямований у бік зростання s_r.

Переносна швидкість $V_e = R\omega_e$, де R – радіус кола L, по якому рухається та точка тіла, з якою в даний момент часу збігається точка M: $R = s_r \sin 30° = 20 \cdot 0{,}5 = 10\,(см)$; ω_e – кутова швидкість тіла:

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 1{,}8t - 27t^2\,(рад/с).$$

При t = 2/9 с $\omega_e = 1{,}8 \cdot \frac{2}{9} - 27 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 = -0{,}93\,(рад/с).$

Від'ємний знак ω_e свідчить про те, що трикутник у даний момент часу обертається навколо осі Oz у бік, протилежний до напрямку відліку додатного кута φ. Тому вектор $\vec{\omega}_e$ спрямований уздовж осі Oz донизу. Переносна швидкість $V_e = 10 \cdot 0{,}93 = 9{,}3\,(см/с)$. Вектор $\vec{V}_e$ спрямований по дотичній до кола L у бік обертання тіла. Оскільки $\vec{V}_e$ і $\vec{V}_r$ взаємно перпендикулярні, то модуль абсолютної швидкості

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{9{,}3^2 + 65{,}2^2} = 65{,}9\,(см/с).$$

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного и коріолісового прискорень:

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c,$$

або в розгорнутому вигляді

$$\vec{w} = \vec{w}_{r\tau} + \vec{w}_{rn} + \vec{w}_e^{\,В} + \vec{w}_e^{\,Ц} + \vec{w}_c.$$

Відносне дотичне прискорення

$$w_{r\tau} = \frac{d^2 s_r}{dt^2} = -72\pi^2 \cos(3\pi t).$$

При t = 2/9 с $w_{r\tau} = -355(см/с)$, від'ємний знак $w_{r\tau}$ свідчить про те, що вектор $\vec{w}_{r\tau}$ спрямований у бік від'ємних значень s_r. Відносне нормальне прискорення $w_{rn} = 0$, оскільки траєкторія відносного руху – пряма (радіус кривизни $\rho = \infty$). Переносне обертове прискорення $w_e^B = R\varepsilon_e$, де ε_e – кутове прискорення тіла D:

$$\varepsilon_e = \frac{d^2 \varphi_e}{dt^2} = 1{,}8 - 54t.$$

При t = 2/9 с $\varepsilon_e = -10{,}2\left(рад/с^2\right)$. Однакові знаки ω_e і ε_e свідчать про те, що обертання трикутника D пришвидшене; напрямки векторів $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\varepsilon}_e$ збігаються. Вектор $\vec{w}_e^B$ спрямований у той бік, що і $\vec{V}_e$: $w_e^B = 10 \cdot 10{,}2 = 102(см/с)$. Переносне відцентрове прискорення $\omega_e^Ц = R\omega_e^2 = 9(см/с)$. Вектор $\vec{w}_e^Ц$ спрямований до центра кола L. Прискорення Коріоліса $\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$, його модуль

$$w_c = 2\,\omega_e V_r \sin\left(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r\right) = 0{,}5\left(см/с^2\right).$$

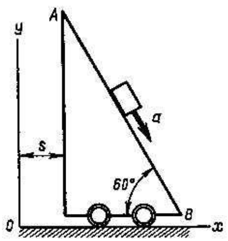
Відповідно до правила векторного добутку вектор $\vec{w}_c$ спрямований перпендикулярно до площини трикутника в той бік, що і вектори $\vec{V}_e$ і $\vec{w}_e^B$. Модуль абсолютного прискорення точки M знаходимо аналітичним способом:

$$\begin{cases} w_x = w_e^B + w_C = 102 + 61 = 163\left(см/с^2\right); \\ w_y = -w_e^Ц - w_{r\tau}\cos 60^\circ = -9 - 355 \cdot 0{,}5 = -186\left(см/с^2\right); \\ w_z = -w_{r\tau}\cos 30^\circ = -355 \cdot 0{,}866 = -308\left(см/с^2\right). \end{cases}$$

Таким чином, $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = 395\left(см/с^2\right)$.

Відповідь: $V = 65{,}9$ $см/с$; $w = 395$ $см/с^2$.

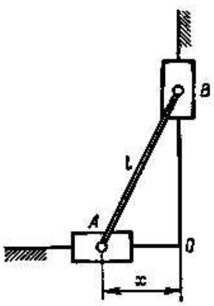
ЗАДАЧІ



2.1.3.1

Клин *AB* рухається по горизонталі за законом $s = 2t^2$, м. Уздовж поверхні клина зі стану спокою почало спускатися тіло зі сталим відносно клина прискоренням $a = 1{,}8$ м/с^2.

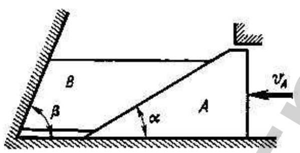
Визначити абсолютну швидкість тіла в момент часу $t_1 = 2$ с.



2.1.3.2

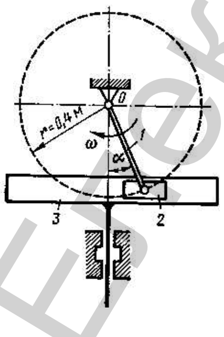
Повзуни *A* і *B* за допомогою шарнірів з’єднані стрижнем довжиною *l*.

Показати, що для будь-якого значення *x* виконується співвідношення $V_A/V_B = (l^2/x^2 - 1)^{1/2}$, де V_A і V_B – абсолютні швидкості повзунів.



2.1.3.3

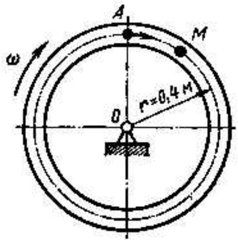
Яким співвідношенням пов’язані модулі швидкостей повзунів *A* і *B* клинової пари?



2.1.3.4

У даному механізмі кривошип *1* обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 10$ рад/с. Повзун *2*, шарнірно з’єднаний з кривошипом, ковзає всередині прорізу куліси *3*, надає кулісі зворотно-поступального руху.

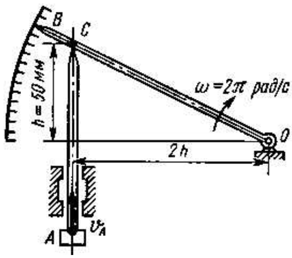
Визначити швидкість куліси V_3, коли $\alpha = 30°$.



2.1.3.5

Трубка, яка має форму круглого кільця, обертається рівномірно в площині рисунка навколо нерухомої точки *O* з кутовою швидкістю $\omega = 2\pi$ рад/с. Кулька *M* рухається всередині трубки за законом $s = AM = 1{,}2\pi t$, м.

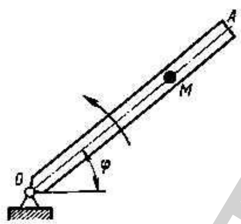
Визначити абсолютну швидкість кульки в момент часу $t_1 = 2$ с.



2.1.3.6

Штовхальник *A* тангенсного механізму вимірювального пристрою піднімається рівномірно, повертаючи стрілку *OB*.

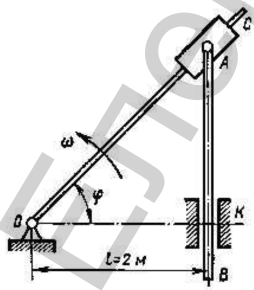
Визначити в заданому положенні механізму швидкість штовхальника.



2.1.3.7

Прямолінійна трубка обертається навколо нерухомої осі *O* за законом $\varphi = 0{,}5t$, рад. Усередині трубки рухається кулька *M* за законом $s = 0{,}4t$, м.

Визначити абсолютну швидкість кульки в момент часу $t_1 = 2$ с.

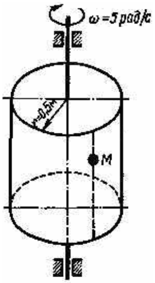


2.1.3.8

Кривошип *OC* кулісного механізму обертається рівномірно навколо осі *O* з кутовою швидкістю $\omega = 2$ рад/с. Повзун *A* рухається уздовж кривошипу і штовхає стрижень *AB*.

Визначити швидкість кінця *B* стрижня при $\varphi = 60°$.

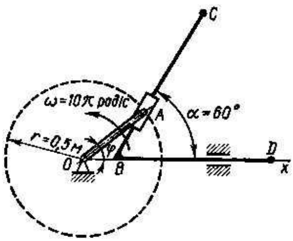
2.1.3.9



Циліндр рівномірно обертається навколо власної осі. Точка *M* рухається уздовж твірної циліндра зі сталою відносною швидкістю V_r = 2 м/с.

Визначити абсолютну швидкість точки *M*.

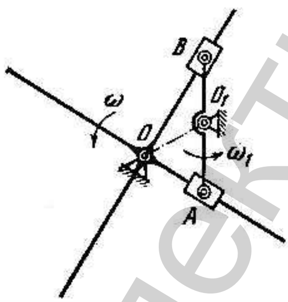
2.1.3.10



Кривошип *OA* рівномірно обертається навколо осі *O*. Повзун *A* при цьому пересувається уздовж похилої кутової куліси *CBD*.

Визначити абсолютну, відносну і переносну швидкості повзуна *A* в момент, коли кривошип утворює з віссю *x* кут φ = 40°.

2.1.3.11*

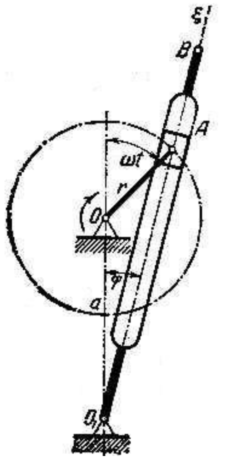


$OO_1 = AO_1 = O_1B = a.$

Для передачі обертання одного вала іншому, паралельному першому, застосовується муфта, яка є оберненим еліптичним циркулем із закріпленим кривошипом OO_1. Кривошип *AB* обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_1 навколо осі O_1 і приводить до обертання хрестовину навколо осі *O* разом з іншим валом.

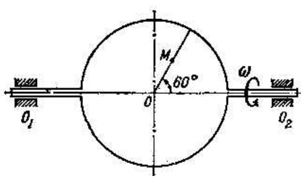
Визначити кутову швидкість ω обертання хрестовини, а також переносну і відносну (відносно хрестовини) швидкості точки *A* повзуна; визначити переносне, відносне і коріолісове прискорення точки *A*.

2.1.3.12



Виразити як функцію часу кутове прискорення ε куліси поперечно-стругального верстата, якщо кривошип довжиною r обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω. Відстань між осями обертання кривошипа і куліси a, причому $a > r$.

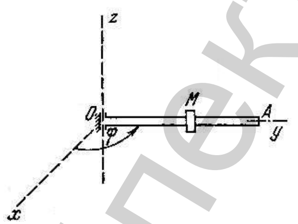
2.1.3.13



Уздовж радіуса диска, який обертається навколо осі O_1O_2 з кутовою швидкістю $\omega = 2t$ рад/с, в напрямі від центра диска O до його ободу рухається точка M за законом $OM = 4t^2$ см. Радіус OM утворює з віссю O_1O_2 кут 60°.

Визначити значення абсолютного прискорення точки M в момент $t = 1$ с.

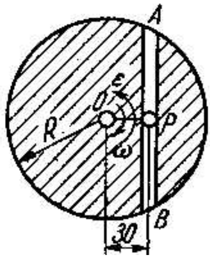
2.1.3.14*



Шайба M рухається по горизонтальному стрижню OA за законом $OM = 0{,}5t^2$ см. В той же час стрижень обертається навколо вертикальної осі Oz: $\varphi = t^2 + t$ рад.

Визначити радіальну і трансверсальну складові абсолютної швидкості та абсолютного прискорення шайби в момент часу $t = 2$ с.

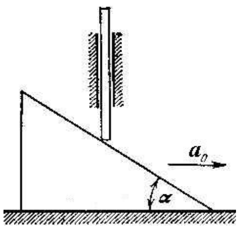
2.1.3.15



Кулька *P* рухається зі швидкістю 1,2 м/с від *A* до *B* уздовж хорди *AB* диска, який обертається навколо осі, яка проходить через його центр *O* перпендикулярно до площини диска.

Знайти абсолютне прискорення кульки у момент, коли він знаходиться на найкоротшій відстані від центра диска *OP* = 0,3 м. В цей момент кутова швидкість диска дорівнює 3 рад/с, а кутове уповільнення становить 8 рад/с^2.

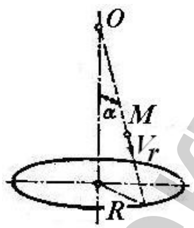
2.1.3.16



Стрижень ковзає у вертикальних напрямних, спираючись нижнім кінцем на гладку похилу поверхню трикутної призми, яка рухається горизонтально вправо зі сталим прискоренням a_0.

Знайти прискорення стрижня.

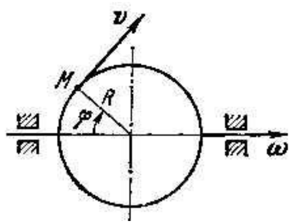
2.1.3.17



Точка *M* рівномірно рухається по твірній колового конуса з віссю *OA* від вершини до основи з відносною швидкістю V_r; кут $MOA = \alpha$. В момент часу $t = 0$ відстань $OM_0 = a$. Конус рівномірно обертається навколо власної осі з кутовою швидкістю ω.

Знайти абсолютне прискорення точки *M*.

2.1.3.18



По ободу диска радіусом *R*, який обертається навколо свого діаметра зі сталою кутовою швидкістю *ω*, рухається точка *M* зі сталою за модулем швидкістю *V*.

Знайти абсолютне прискорення точки *M* як функцію кута *φ*, який утворює радіус-вектор точки з віссю обертання диска.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається складним рухом точки?
2. Дайте визначення відносного, переносного і абсолютного рухів.
3. Сформулюйте теорему про додавання швидкостей у складному рухові точки.
4. Що характеризує прискорення Коріоліса? Вкажіть формулу для його визначення.
5. У яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?
6. Сформулюйте теорему Коріоліса про додавання прискорень у складному рухові точки.

2.2 Кінематика твердого тіла

2.2.1 Поступальний рух

Поступальним рухом твердого тіла називається такий рух, в якому будь-яка пряма, що поєднує дві точки тіла, рухається паралельно до самої себе (рис. 2.4).

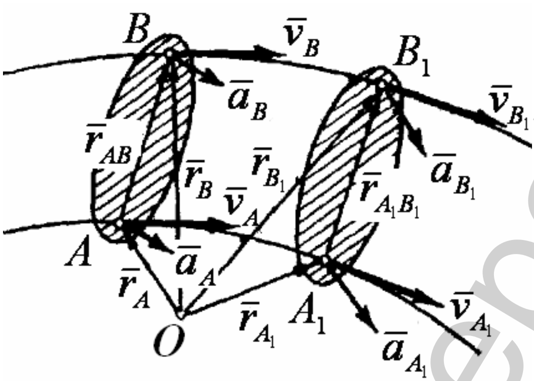


Рисунок 2.4 – Поступальний рух твердого тіла

Рух точок тіла, що рухається поступально, досліджується із застосуванням такої теореми: *всі точки твердого тіла, що рухається поступально, описують конгруентні траєкторії і в кожний момент часу мають однакові швидкості й прискорення*. Загальні для усіх точок тіла швидкість і прискорення називаються *швидкістю* і *прискоренням поступального руху твердого тіла*.

У випадку *рівномірного поступального руху*, тобто руху тіла зі сталою швидкістю, закон руху

$$s = s_0 + vt, \tag{2.24}$$

де s_0 – початкове значення дугової координати (при $t = 0$).

У випадку *рівнозмінного поступального руху*, тобто руху тіла зі сталим прискоренням, закон руху

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \tag{2.25}$$

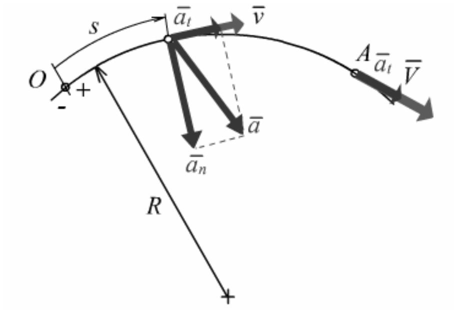
а швидкість

$$v = v_0 + a_\tau t, \tag{2.26}$$

де v_0 – початкова швидкість (при $t = 0$), a_τ – тангенціальне прискорення точок тіла.

У випадку, коли $a_\tau = const > 0$, рух називається рівноприскореним; у випадку, коли $a_\tau = const < 0$, рух є рівносповільненим.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 2.2.1

При відході тепловоза від станції швидкість зростає рівномірно і досягає значення v = 72 км/год за T = 3 хв. Шлях має радіус кривизни R = 800 м.

Визначити нормальне, дотичне і повне прискорення тепловоза через $t = 2$ хв з моменту відходу від станції.

Розв'язання

Зобразимо траєкторію тепловоза і позначимо його положення в початковий і поточний моменти часу. В точці O беремо початок відліку дугової координати s і призначимо додатний напрямок зміни координати s у бік руху. Запишемо закон рівнозмінного руху: $v = v_0 + a_\tau t$, де a_τ – дотичне прискорення. Для моменту часу $t = T$ отримаємо $a_\tau = (v - v_0)/T = (72 - 0)/3 = 24$ (км/год^2) = 0,11 (м/с^2).

Визначаємо швидкість тепловоза у момент часу $t = 2$ хв: $v = v_0 + a_\tau t = 0 + 0{,}111 \cdot 120 = 13{,}32$ (м/с^2). Нормальне прискорення $a_n = v^2 / R = 13{,}32^2 / 800 = 0{,}22$ (м/с^2). Повне прискорення тепловоза $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}11^2 + 0{,}22^2} = 0{,}25$ (м/с^2).

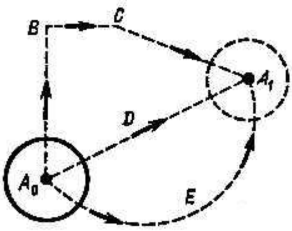
Відповідь: a_τ = 0,11 м/с^2; a_n = 0,22 м/с^2; a = 0,25 м/с^2.

ЗАДАЧІ

2.2.1.1

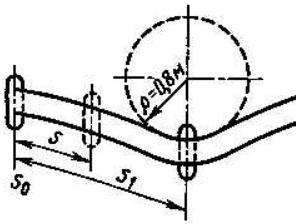
Підводний човен рухається вперед, одночасно занурюючись у воду.

Чи є вказаний рух човна поступальним?



2.2.1.2

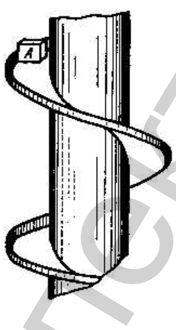
Яким із трьох вказаних шляхів тіло, яке знаходиться на площині, рухаючись поступально, здатне з положення A_0 переміститися в положення A_1?



2.2.1.3

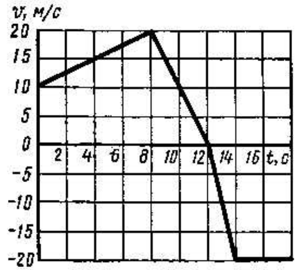
Тіло рухається поступально по криволінійним напрямним за законом $s = 0{,}07t^2$ м (відлік починається з положення s_0).

Визначити дотичне і нормальне прискорення тіла в положенні $s_1 = 1{,}4$ м.



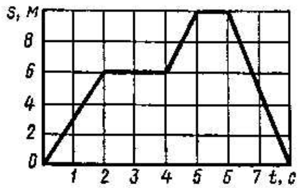
2.2.1.4

Чи здатен невеликий брусок A спускатися по гвинтовому жолобу, рухаючись поступально?



2.2.1.5

За графіком швидкості тіла, яке рухається поступально прямолінійно, побудувати графік прискорення.



2.2.1.6

За графіком поступального криволінійного руху тіла побудувати графік тангенціального прискорення.

2.2.1.7

Які із зазначених стверджень правильні?
1) тіло рухається поступально рівномірно;
2) тіло рухається поступально і рівномірно сповільнено;
3) тіло рухається поступально рівномірно по дузі кола.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається поступальним рухом твердого тіла?

2 Сформулюйте властивості траєкторій, швидкостей і прискорень точок тіла, яке рухається поступально.

3 Як визначаються швидкість і тангенціальне прискорення тіла, що рухається поступально, за відомою зміною у часі криволінійної координати будь-якої точки цього тіла?

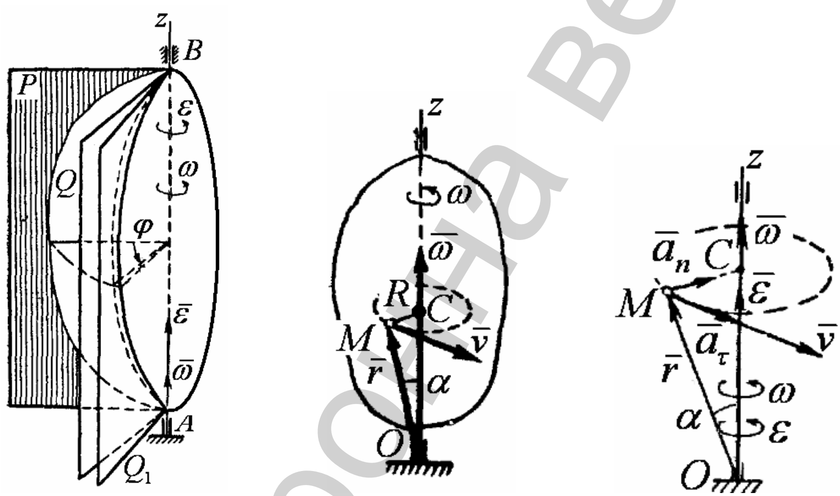
4 Вкажіть закон рівномірного поступального руху твердого тіла.

5 Вкажіть закон рівнозмінного поступального руху твердого тіла.

2.2.2 Обертальний рух

Обертальним рухом твердого тіла називається рух, у якому залишаються нерухомими усі точки тіла, що належать одній прямій – *осі обертання*. Положення тіла, яке обертається навколо нерухомої осі z, визначається *кутовою координатою* – кутом обертання площини, проведеній в тілі, відносно свого початкового положення. (рис. 2.5 а):

$$\varphi = \varphi(t). \tag{2.27}$$



а) б) в)

Рисунок 2.5 – Обертальний рух твердого тіла:
а) кутові характеристики; б) швидкість; в) прискорення

Величина, яка характеризує швидкість обертального руху і дорівнює похідній від кутової координати, називається *кутовою швидкістю твердого тіла*:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}. \tag{2.28}$$

Вектор кутової швидкості, який визначається як добуток модуля кутової швидкості та орта $\bar{k}$ осі обертання

$$\overline{\omega} = \omega \cdot \bar{k}, \tag{2.29}$$

спрямований уздовж даної осі.

Величина, яка дорівнює похідній від кутової швидкості, називається *кутовим прискоренням твердого тіла*:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \equiv \ddot{\varphi}. \qquad (2.30)$$

Вектор кутового прискорення, який визначається як добуток модуля кутового прискорення та орта $\bar{k}$ осі обертання

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}, \qquad (2.31)$$

спрямований уздовж даної осі.

У випадку *рівномірного обертання*, тобто обертання тіла зі сталою кутовою швидкістю, закон руху

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \qquad (2.32)$$

де φ_0 – початкове значення кутової координати (при $t = 0$).

У випадку *рівнозмінного обертання*, тобто обертання тіла зі сталим кутовим прискоренням, закон руху

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad (2.33)$$

а кутова швидкість

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad (2.34)$$

де ω_0 – початкове значення кутової швидкості (при $t = 0$).

У випадку, коли $\varepsilon = const > 0$, обертальний рух називається рівноприскореним; у випадку, коли $\varepsilon = const < 0$, обертальний рух є рівносповільненим.

Швидкість точки *M*, яка належить тілу, що обертається навколо нерухомої осі, визначається за такою формулою (рис. 2.5 б):

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \qquad (2.35)$$

де $\bar{r}$ – радіус-вектор точки. Модуль швидкості

$$v = \omega R, \qquad (2.36)$$

де *R* – *радіус обертання точки* – найкоротша відстань від точки до осі обертання.

Оскільки будь-яка точка *M*, яка належить тілу, що обертається навколо нерухомої осі, має траєкторію у вигляді кола, то прискорення точки визначається як геометрична сума нормального $\overline{a}_n$ і тангенціального $\overline{a}_\tau$ прискорень:

$$\overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_\tau . \qquad (2.37)$$

Останні, у свою чергу, визначаються за такими формулами (рис. 2.5 в):

$$\overline{a}_n = \overline{\omega} \times \overline{v} = \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}); \qquad (2.38)$$

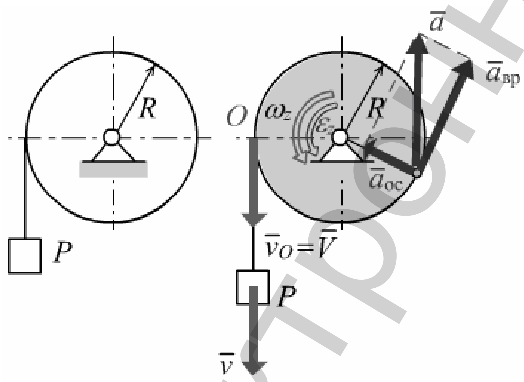
$$\overline{a}_\tau = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}. \qquad (2.39)$$

За модулем

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}; \qquad (2.40)$$

$$a_\tau = \varepsilon R. \qquad (2.41)$$

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 2.2.2

Вал радіусом $R = 10$ см обертається під дією ваги гирі P, підвішеної до нитки. Рух гирі задається рівнянням $x = 100t^2$ (см).

Визначити кутову швидкість і кутове прискорення вала, а також повне прискорення точки на поверхні в момент часу t.

Розв’язання

Вводимо вісь координат Ox. Вибираємо як об’єкт руху вантаж P. Вантаж рухається поступально за законом $x = 100t^2$ (см). Швидкість вантажу $v = \dot{x} = 200t$ (см/с). Унаслідок нерозтяжності нитки швидкість точки нитки у місті збігу останньої з валу $v_O = 200t$ (см/с). Вибираємо в якості об'єкта руху вал. Кутова швидкість вала $\omega = v_O / R = 200t / 10 = 20t$ (рад/с). Кутове прискорення вала $\varepsilon = \dot{\omega} = 20$ (рад/с^2). Доцентрове прискорення точок на поверхні вала $a_{oc} = \omega^2 R = (20t)^2 \cdot 10 = 4000t^2$ (см/с^2). Дотичне прискорення $a_{вр} = \varepsilon R = 20 \cdot 10 = 200$ (см/с^2). Повне прискорення точок

$$a = \sqrt{a_{oc}^2 + a_{вр}^2} = \sqrt{\left(4000t^2\right)^2 + 200^2} = 200\sqrt{1 + 400t^4} \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: $\omega = 20t$ рад/с; $\varepsilon = 200$ рад/с^2;

$$a = 200\sqrt{1 + 400t^4} \text{ см/с}^2.$$

ЗАДАЧІ

2.2.2.1

Визначити кутову швидкість: 1) секундної стрілки механічного годинника; 2) хвилинної стрілки механічного годинника; 3) годинної стрілки механічного годинника; 4) обертання Землі навколо власної осі; 5) парової турбіни Лаваля, яка здійснює 15000 об/хв.

2.2.2.2

Тіло починає обертатися рівноприскорено зі стану спокою, здійснюючи 3600 обертів за перші 2 хвилини.

Визначити кутове прискорення тіла.

2.2.2.3

Вал починає обертатися рівноприскорено зі стану спокою; в перші 5 с він здійснює 12,5 оберта.

Визначити кутову швидкість через 5 с після початку руху.

2.2.2.4

Махове колесо починає обертатися зі стану спокою рівноприскорено, маючи через 10 хв після початку руху кутову швидкість 4π рад/с. Скільки обертів здійснить колесо за ці 10 хв?

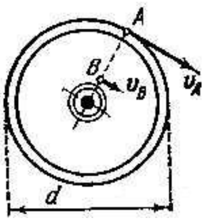
2.2.2.5

Колесо, яке має нерухому вісь, отримало початкову швидкість 2π рад/с. Здійснивши 10 обертів рівносповільненого руху, воно внаслідок тертя в підшипниках зупинилося.

Визначити кутове прискорення колеса.

2.2.2.6

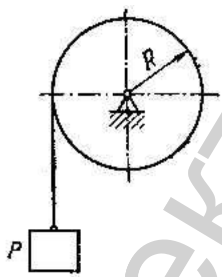
Визначити швидкість V і прискорення a точки, яка знаходиться на поверхні Землі в м. Суми, беручи до уваги лише обертання Землі навколо власної осі. Широта м. Суми становить 50°54'; середній радіус Землі 6370 км.



2.2.2.7

Точка A шківа, яка знаходиться на його ободі, рухається зі швидкістю 50 см/с, а точка B, яка знаходиться на тому самому радіусі з точкою A, рухається зі швидкістю 10 см/с; відстань AB = 20 см.

Визначити кутову швидкість ω і діаметр d шківа.



2.2.2.8

Вал радіусом R = 10 см приводиться до руху гирею P, підвішеною на мотузці. Закон руху гирі: $x = 100t^2$, м. Визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε вала, а також повне прискорення a точки поверхні вала в момент часу t.

2.2.2.9

Основною характеристикою сепараторів є критерій k_p, який показує, в скільки разів нормальне прискорення на поверхні циліндра перевищує g = 9,8 м/с^2. Визначити k_p сепаратора з циліндром діаметром d = 0,6 м і частотою n = 350 об/хв.

2.2.2.10*

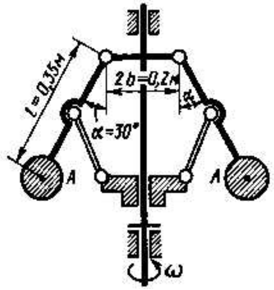
При запуску турбіни максимальне тангенціальне прискорення в будь-якій точці робочих лопаток не повинне перевищувати за модулем 0,02% нормального прискорення робочого режиму.

Скільки обертів зробить турбіна від моменту пуску до моменту досягнення робочої швидкості?

2.2.2.11

Маховик обертається навколо нерухомої осі. При цьому точка на відстані $r = 0{,}3$ м від осі рухається за законом $s = 3t + t^3$, м.

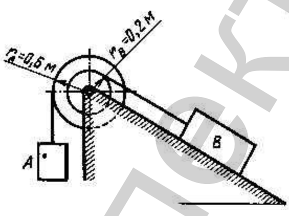
Знайти кутові швидкість і прискорення маховика в момент часу $t_1 = 3$ с.



2.2.2.12

Вал відцентрового регулятора обертається з частотою $n = 250$ об/хв.

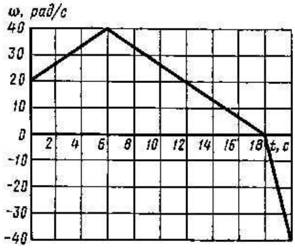
Знайти нормальні прискорення центрів вантажів *A*.



2.2.2.13

Вантажі *A* і *B* зв'язані жорстким тросом, який намотаний на східчастий барабан. Вантаж *A* піднімається зі сталим прискоренням $a_A = 3$ м/с^2.

Визначити кутові швидкість і прискорення барабана в момент, коли вантаж *B* має швидкість $V_B = 6$ м/с.

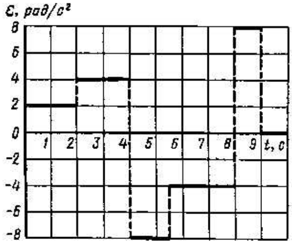


2.2.2.14

За заданим графіком кутових швидкостей тіла, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, визначити кутові переміщення його за проміжок часу:

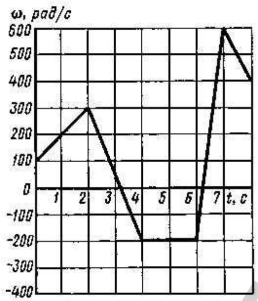
1) від $t_0 = 0$ до $t_1 = 18$ с;

2) від $t_0 = 0$ до $t_1 = 20$ с.



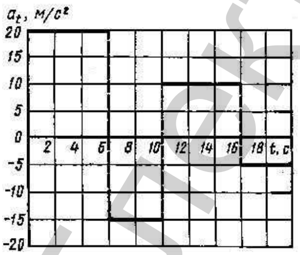
2.2.2.15

За заданим графіком кутових прискорень тіла, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, побудувати графік його кутових швидкостей, беручи початкову кутову швидкість $\omega_0 = 0$.



2.2.2.16

За заданим графіком кутових швидкостей тіла, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, побудувати графік його кутових прискорень і переміщень, беручи початковий кут обертання $\varphi_0 = 0$.



2.2.2.17

За графіком тангенціального прискорення точки *M* тіла, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, побудувати графік кутових швидкостей і прискорень тіла. Точка *M* віддалена на відстані $r = 2$ м від осі обертання тіла.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається обертальним рухом тіла відносно осі?

2 Що називається середньою кутовою швидкістю обертання тіла навколо нерухомої осі?

3 Що називається миттєвою кутовою швидкістю обертання тіла навколо нерухомої осі?

4 Як визначити лінійну швидкість будь-якої точки тіла за відомою кутовою швидкістю обертання тіла і радіусом обертання?

5 Що називається середнім кутовим прискоренням обертання тіла навколо нерухомої осі?

6 Що називається миттєвим кутовим прискоренням обертання тіла навколо нерухомої осі?

7 Як визначити тангенціальне прискорення будь-якої точки тіла за відомим кутовим прискоренням обертання тіла і радіусом обертання?

8 Як визначити нормальне прискорення будь-якої точки тіла за відомим кутовим прискоренням обертання тіла і радіусом обертання?

9 Назвіть закон рівномірного обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі.

10 Назвіть закон рівнозмінного обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі.

2.2.3 Плоскопаралельний рух

Плоскопаралельним (плоским) рухом твердого тіла називається рух, у якому кожна точка тіла рухається в площині, паралельній деякій нерухомій площині (рис. 2.6). Рух усіх точок твердого тіла, яке рухається плоскопаралельно, однозначно визначається рівняннями руху окремого відрізка, проведеного в тілі, паралельного нерухомій площині:

$$\begin{cases} x_O = x(t); \\ y_O = y(t); \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \qquad (2.42)$$

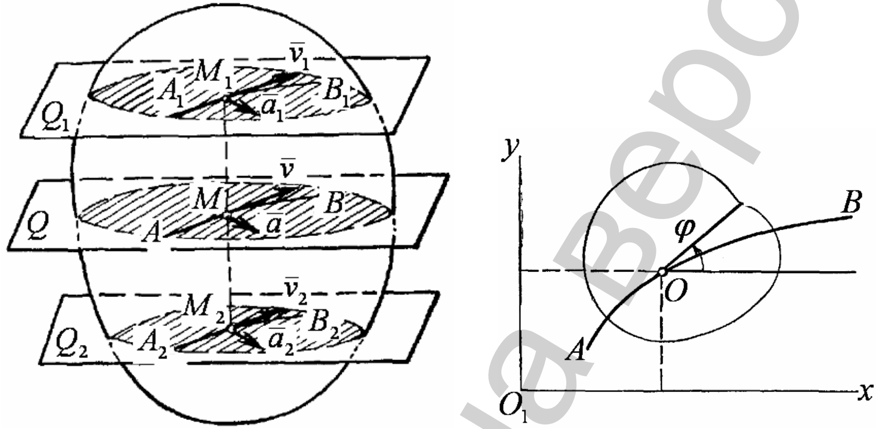


Рисунок 2.6 – Плоскопаралельний рух твердого тіла

Визначення швидкостей точок тіла, яке рухається плоскопаралельно, проводиться із застосуванням таких теорем:

а) *швидкість* $\bar{v}_A$ *точки A тіла, що рухається плоскопаралельно, дорівнює геометричній сумі швидкості* $\bar{v}_O$ *полюса і швидкості* $\bar{v}_{AO}$ *обертального руху даної точки відносно полюса* (рис. 2.7 а):

$$\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \overline{OA}, \qquad (2.43)$$

де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість плоскопаралельного руху тіла, яка не залежить від вибору полюса; швидкість $\bar{v}_{AO} \perp OA$;

б) *проекції швидкостей точок тіла, яке рухається плоскопаралельно, на вісь, яка проходить через ці точки, однакові між собою* (рис. 2.7 б).

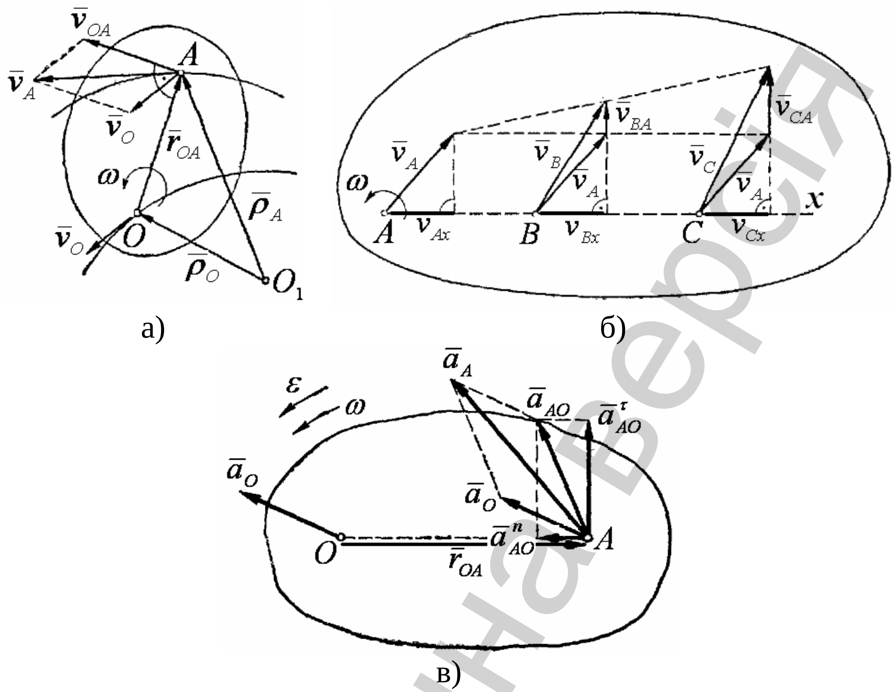


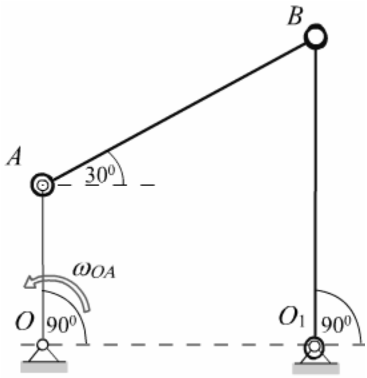
Рисунок 2.7 – Теореми плоского руху твердого тіла:
а) теорема про швидкості; б) теорема про проекції швидкостей;
в) теорема про прискорення

Визначення прискорень точок тіла, яке рухається плоскопаралельно, проводиться із застосуванням такої теореми: *прикорення* $\overline{a}_A$ *точки A тіла, що рухається плоскопаралельно, дорівнює геометричній сумі прискорення* $\overline{a}_O$ *полюса і прискорення* $\overline{a}_{AO}$ *обертального руху даної точки відносно полюса* (рис. 2.7 в)

$$\overline{a}_A = \overline{a}_O + \overline{a}_{AO} = \overline{a}_O + \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau = \overline{a}_O + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{OA}\right) + \overline{\varepsilon} \times \overline{OA}, \quad (2.44)$$

де $\overline{\varepsilon}$ – кутове прискорення плоскопаралельного руху тіла, яке не залежить від вибору полюса; прискорення $\overline{a}_{OA}$ напрямлене уздовж вектора $\overline{AO}$; прискорення $\overline{a}_{OA}^\tau \perp OA$.

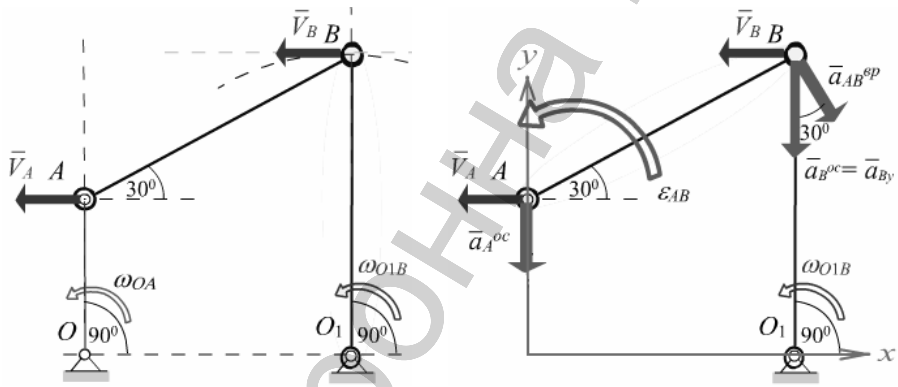
ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 2.2.3

Стрижень *OA* шарнірного чотириланкового механізму $OABO_1$ рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω_0.

Визначити кутову швидкість і кутове прискорення ланки *AB*, а також прискорення шарніра *B* у вказаному положенні, якщо $AB = 2OA = 2a$.



Розв'язання

Визначаємо рухливі стрижні: кривошип *OA*, шатун *AB*, коромисло O_1B. Розбиваємо ланки на дві групи за типом здійснюваного ними руху. Простий рух здійснюють дві ланки: кривошип *OA* обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через точку *O*, коромисло O_1B обертається навколо нерухомої осі O_1. Шатун *AB* здійснює плоскопаралельний рух.

Визначаємо швидкості і прискорення. Розглянемо як об'єкт руху кривошип *OA*. Швидкість точки *A* $v_A = \omega_{OA} \cdot OA = \omega_0 a$. Вектор $\bar{v}_A$ перпендикулярний до *OA*. Кутове прискорення кривошипа $\varepsilon_{OA} = \dot{\omega}_{OA} = 0$, оскільки його обертання є рівномірним ($\omega = \omega_0 = const$). Тангенціальне прискорення точки A $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0$. Нормальне прискорення точки A $a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = \omega_0^2 a$ спрямоване до центра обертання *O*. Сумарне прискорення $a_A = \sqrt{\left(a_A^\tau\right)^2 + \left(a_A^n\right)^2} = \omega_0^2 a$.

Розглянемо як об'єкт руху шатун *AB*. У даний момент часу миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності (перпендикуляри до $\bar{v}_A$ і $\bar{v}_B$ паралельні між собою). Тому кутова швидкість шатуна дорівнює нулю, а швидкість $\bar{v}_B = \bar{v}_A$; $v_B = \omega_0 a$.

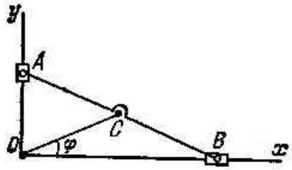
Розглянемо які об'єкт руху коромисло O_1B і визначимо кутову швидкість: $\omega_{O_1B} = v_B / O_1B = \omega_0 a / (2a) = 0{,}5\omega_0$. Напрямок ω_{O_1B} визначається напрямом обертання $\bar{v}_B$ навколо точки O_1. Визначаємо нормальне прискорення точки *B*: $a_B^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = (0{,}5\omega_0)^2 \cdot 2a = 0{,}5\omega_0^2 a$.

Розглянемо як об'єкт руху шатун *AB*. Запишемо теорему про додавання прискорень: $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$, де $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0$, $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB = \varepsilon_{AB} \cdot 2a$. Кутове прискорення ε_{AB} невідоме. В проекціях на осі *x* і *y*: $a_{Bx} = a_{BA}^\tau \sin 30° = \varepsilon_{AB} \cdot a$; $a_{By} = -a_B^n = -a_A^n - a_{BA}^\tau \cos 30° = -\left(\omega_0^2 + \varepsilon_{AB}\sqrt{3}\right)a$. З останнього рівняння $\varepsilon_{AB} = \left(a_B^n / a - \omega_0^2\right)/\sqrt{3} = \left(0{,}5\omega_0^2 - \omega_0^2\right)/\sqrt{3} = -0{,}29\omega_0^2$. Знак вказує на те, що кутове прискорення коромисла *AB* спрямоване в бік, протилежний до його кутової швидкості. Тоді $a_{Bx} = -0{,}29\omega_0^2 a$. Визначаємо модуль прискорення точки *B*: $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{\left(-0{,}29\omega_0^2\right)^2 + \left(-0{,}5\omega_0^2 a\right)^2} = 0{,}58\omega_0^2 a$.

Відповідь: $\omega_{AB} = 0$; $\varepsilon_{AB} = -0{,}29\omega_0^2$; $a_B = 0{,}58\omega_0^2 a$.

ЗАДАЧІ

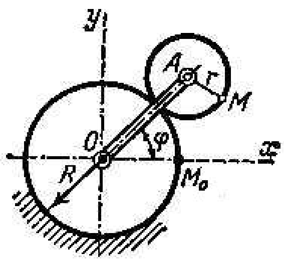
2.2.3.1



Лінійка еліпсографа приводиться до руху за допомогою кривошипа OC, який обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_0 навколо осі O.

Беручи за полюс повзун B, записати рівняння плоского руху лінійки, якщо $OC = BC = AC = r$. В початковий момент часу лінійка AB була розміщена горизонтально.

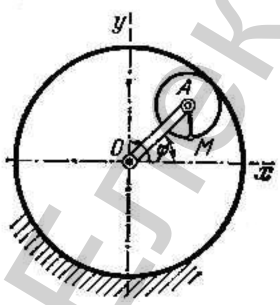
2.2.3.2



Сателіт радіусом r, який котиться по нерухомій шестірні радіусом R, рухається за допомогою кривошипа OA, який обертається рівноприскорено з кутовим прискоренням ε_0 навколо осі O нерухомої шестірні.

Скласти рівняння руху сателіта, вибравши за полюс центр A, якщо при $t = 0$ кутова швидкість кривошипа $\omega_0 = 0$, а початковий кут обертання $\varphi_0 = 0$.

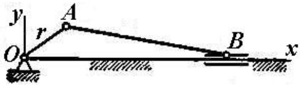
2.2.3.3



Сателіт радіуса r, який котиться всередині нерухомої шестерні радіуса R, рухається за допомогою водила OA, який обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω_0 навколо осі O нерухомої шестерні.

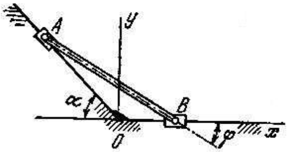
Скласти рівняння руху сателіта, вибравши за полюс центр A, якщо при $t = 0$ кут обертання кривошипа $\varphi_0 = 0$.

2.2.3.4



Знайти рівняння руху шатуна $AB = 3r$, якщо кривошип $OA = r$ обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω_0. За полюс обрати точку A на осі пальця кривошипа; при $t = 0$ кут $\alpha = 0$.

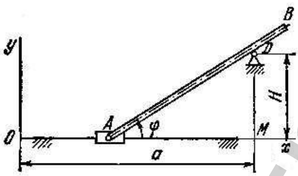
2.2.3.5



Повзуни A і B, які рухаються уздовж прямолінійних напрямних, з'єднані стрижнем $AB = l$. Повзун A рухається зі сталою швидкістю V_A.

Записати рівняння руху стрижня, враховуючи, що повзун A почав рухатися з точки O. За полюс узяти точку A.

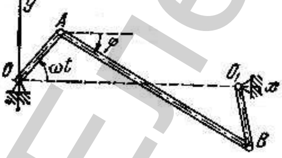
2.2.3.6



Кінець A стрижня $AB = l$, який спирається на штифт D, ковзає по прямолінійній напрямній зі сталою швидкістю V.

Написати рівняння руху стрижня і його кінця B. Початок руху кінця A збігається з точкою O. За полюс узяти точку A.

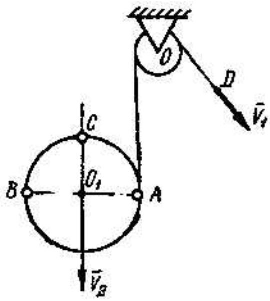
2.2.3.7



Кривошип антипаралелограма рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω.

Беручи за полюс точку A, скласти рівняння руху ланки AB, якщо $OA = O_1B = a$ і $OO_1 = AB = b$ ($a > b$). В початковий момент часу $OA \parallel OO_1$.

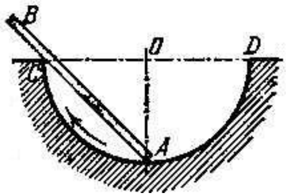
2.2.3.8



Циліндр радіусом *R* обмотаний тросом, перекинутим через блок *O*. Кінець троса тягнуть зі швидкістю V_1, в той час як центр циліндра має швидкість V_2.

Визначити кутову швидкість циліндра, вважаючи вертикальною ділянку троса від циліндра до блока. Знайти швидкості точок *B* і *C*.

2.2.3.9



Пряма *AB* рухається в площині рисунка, увесь час проходячи через точку *C*, причому кінець *A* знаходиться на півколі *CAD*.

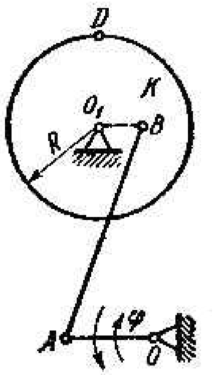
Визначити швидкість точки *C* прямої в момент, коли радіус *OA* перпендикулярний до *CD*, якщо швидкість точки *A* становить 4 м/с.

2.2.3.10

Стрижень *AB* = 0,5 м рухається в площині рисунка. Вектор швидкості V_A, модуль якого 2 м/с, утворює з віссю стрижня кут 45°.

Визначити модуль швидкості точки *B*, якщо вектор V_B утворює з віссю стрижня кут 60°. Визначити кутову швидкість стрижня.

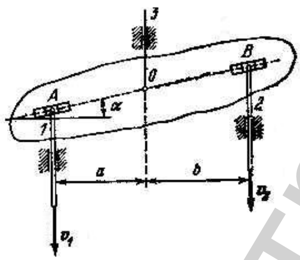
2.2.3.11



Точильний верстат приводиться в рух за допомогою педалі $OA = 240$ мм, яка здійснює коливальний рух навколо осі O з амплітудою 30° і частотою, яка відповідає одному повному коливанню за 4 с. Точильний камінь K радіусом R обертається навколо осі O_1 за допомогою стрижня AB.

Знайти швидкість точки D обода точильного каменя в початковий момент часу, якщо в цей момент вісь педалі OA, а також лінія O_1B знаходилися в горизонтальному положенні.

2.2.3.12

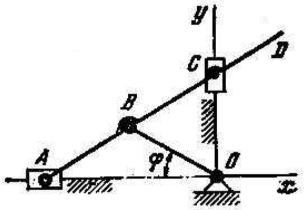


На рисунку зображений підсумовуючий механізм, який складається зі стрижнів *1* і *2*, які рухаються уздовж вертикальних напрямних і з'єднані з коромислом AB за допомогою циліндричних шарнірів, які ковзають у прорізі AOB. Стрижні рухаються зі швидкостями V_1 і V_2.

Довести, що швидкість стрижня *3*, з'єднаного з центром O коромисла AB, дорівнює за модулем $V = V_1/(1 + a/b) + V_2/(1 + b/a)$.

Знайти також кутову швидкість коромисла AB.

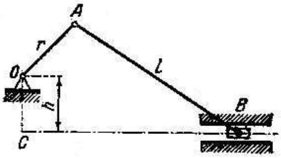
2.2.3.13



Стрижень *OB* обертається навколо осі *O* зі сталою кутовою швидкістю 2 рад/с, приводячи до руху стрижень *AB*, точки *A* і *C* якого рухаються по осях *Ox* і *Oy* відповідно.

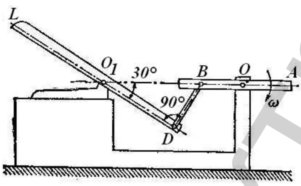
Визначити швидкість точки *D* стрижня при $\varphi = 45°$ і знайти рівняння траєкторії цієї точки, якщо $AB = OB = BC = CD = 12$ см.

2.2.3.14



Знайти швидкість повзуна *B* нецентрального кривошипно-шатунного механізму для двох горизонтальних і двох вертикальних положень кривошипа, якщо $r = 2h = 40$ см та $l = 200$ см. Кутова швидкість кривошипа $\omega = 1{,}5$ рад/с.

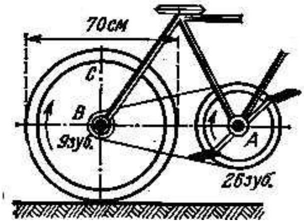
2.2.3.15



Лезо *L* ножиців для різання металу приводиться до руху за допомогою шарнірно-важільного механізму *AOBD*.

Визначити швидкість шарніра *D* і кутову швидкість ланки *BD*, якщо $OB = 50$ мм, $O_1D = 100$ мм. В положенні, вказаному на рисунку, кутова швидкість важеля *AB* дорівнює 2 рад/с.

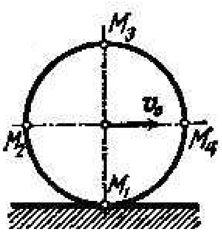
2.2.3.16



Ланцюгова передача велосипеда складається з цепа, який обхоплює зубчасте колесо *A* (з 26 зубцями) і шестерню *B* (з 9 зубцями). Шестерня *B* незмінно з'єднана із заднім колесом *C*, діаметр якого дорівнює 700 мм.

Визначити швидкість велосипеда, якщо колесо *A* робить один оберт за секунду.

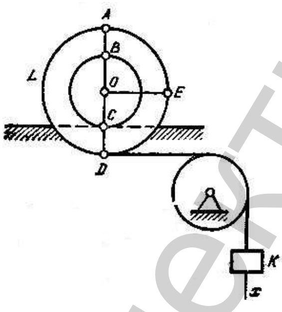
2.2.3.17



Колесо радіусом $R = 0{,}5$ м котиться без проковзування уздовж прямолінійної ділянки шляху. Швидкість його центра є незмінною і дорівнює $V_0 = 10$ м/с.

Знайти кутову швидкість колеса, а також швидкості точок M_1, M_2, M_3, M_4.

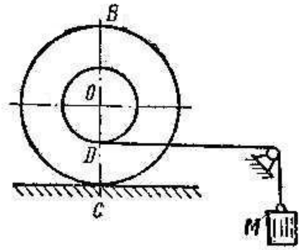
2.2.3.18



Вантаж *K*, зв'язаний за допомогою нерозтяжної нитки з котушкою *L*, опускається донизу за законом $x = 2t^2$ м. При цьому котушка котиться без проковзування уздовж горизонтальної рейки.

Визначити швидкості точок *C*, *A* *B*, *O* і *E* котушки в момент часу $t = 1$ с в положенні, вказаному на рисунку, якщо $OD = 2 \cdot OC = 0{,}2$ м, а відрізки *AD* і *OE* перпендикулярні між собою. Знайти кутову швидкість котушки.

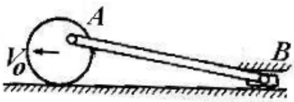
2.2.3.19



Вантаж *M*, зв'язаний за допомогою нерозтяжної нитки з котушкою *O*, опускається донизу і в даний момент часу має швидкість *V* та прискорення *a*. При цьому котушка котиться без проковзування уздовж горизонтальної рейки.

Визначити прискорення точок *C* і *B* котушки, якщо *OD* = *r*; *OC* = *R*.

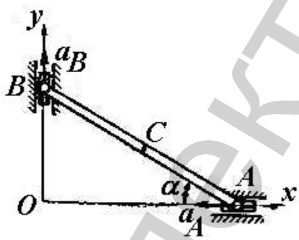
2.2.3.20



Колесо радіусом *R* котиться без проковзування по горизонтальній площині зі сталою швидкістю центра V_O і приводить до руху повзун *B* за допомогою шатуна *AB* = *l*.

Визначити прискорення повзуна в моменти, коли точка *A* знаходиться в крайньому верхньому і крайньому нижньому положеннях, якщо радіус обертання точки *A* навколо центра колеса становить *R*/2.

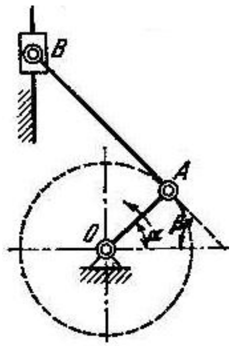
2.2.3.21



Визначити положення миттєвого центра прискорень лінійки еліпсографа довжиною *l* в момент, коли кут $\alpha = 30°$, якщо вектори прискорень точок *A* і *B* мають вказані на рисунку напрями, а їх модулі зв'язані співвідношенням

$$a_A = 1{,}732 a_B.$$

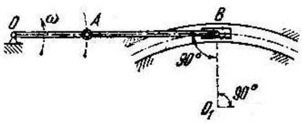
2.2.3.22



Кривошип OA довжиною 200 мм обертається рівномірно з кутовою швидкістю 10 рад/с, приводячи до руху шатун AB = 1000 мм; повзун B рухається уздовж вертикалі.

Знайти кутову швидкість і кутове прискорення шатуна AB, а також прискорення повзуна B у момент, коли кривошип і шатун перпендикулярні між собою, утворюючи з горизонтальною віссю кути $\alpha = \beta = 45°$.

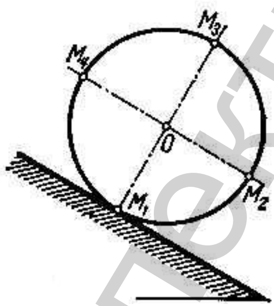
2.2.3.23



Повзун B кривошипно-повзунного механізму рухається по дуговій напрямній.

Визначити дотичне і нормальне прискорення повзуна в положенні, вказаному на рисунку, якщо OA = 10 см; AB = 20 см. Кутові швидкість і прискорення кривошипа дорівнюють ω = 2 рад/с і ε = 0.

2.2.3.24



Знайти прискорення точок M_1, M_2, M_3 і M_4 колеса радіусом 0,5 м, яке спускається без проковзування уздовж прямолінійного похилого шляху, якщо в даний момент часу швидкість центра O колеса дорівнює 1 м/с, а прискорення центра O становить 3 м/с^2.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається плоскопаралельним рухом твердого тіла?

2 Що називається миттєвим центром швидкостей тіла, що рухається плоскопаралельно?

3 Як визначаються швидкості точок тіла, яке рухається плоскопаралельно, за відомою кутовою швидкістю і відстанню до миттєвого центра швидкостей?

4 Як визначити швидкість будь-якої точки тіла, що рухається плоскопаралельно за відомою швидкістю полюса?

5 Сформулюйте теорему про проекції швидкостей двох точок тіла, що рухається плоскопаралельно.

6 Як визначити прискорення будь-якої точки тіла, що рухається плоскопаралельно за відомим прискоренням полюса?

7 Що називається миттєвим центром прискорень тіла, що рухається плоскопаралельно?

8 Чи збігається миттєвий центр швидкостей з миттєвим центром прискорень у загальному випадку?

9 Охарактеризуйте графоаналітичний спосіб визначення швидкостей і прискорень точок тіла, що рухається плоско-паралельно, кутової швидкості і кутового прискорення цього тіла.

2.2.4 Перетворення рухів

У рамках розділу кінематики твердого тіла розглядаються такі теми:

а) додавання обертів навколо осей, які перетинаються;

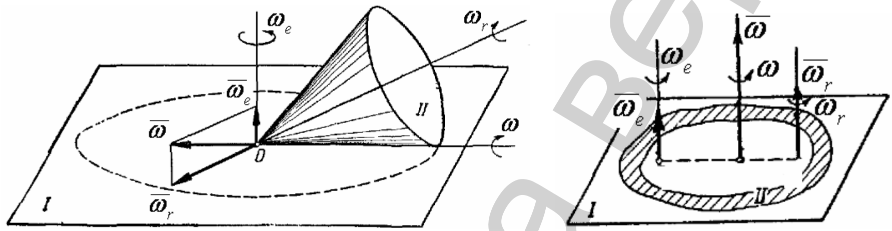
б) додавання обертів навколо паралельних осей;

в) загальний випадок додавання обертів.

Вісь обертання, положення якої у просторі змінюється з часом, називається *миттєвою віссю обертання тіла*. Миттєва вісь обертання є геометричним місцем точок твердого тіла, швидкості яких у даний момент часу дорівнюють нулю. Вектор кутової швидкості тіла спрямований уздовж миттєвої осі обертання (рис. 2.8 а).

Відповідно до *теореми про додавання кутових швидкостей кутова швидкість абсолютного обертання тіла дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей переносного і відносного рухів* (рис. 2.8):

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r . \qquad (2.44)$$



а) б)

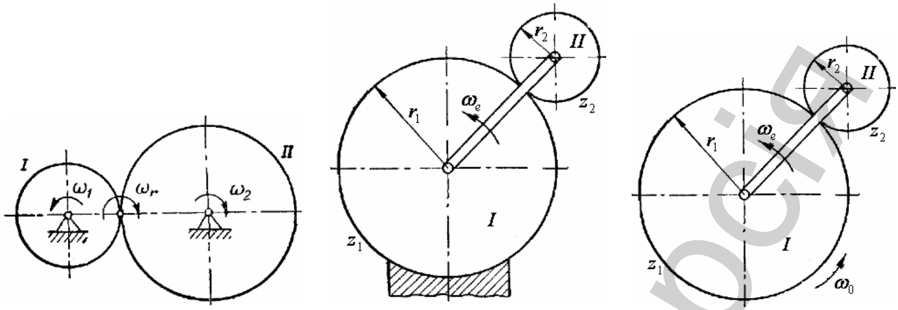
Рисунок 2.8 – Додавання обертових рухів твердого тіла:
а) випадок пересічних осей; б) випадок паралельних осей

Практичне застосування теорії перетворення рухів застосовується насамперед для проектування зубчатих передач (рис. 2.9 – 2.10):

а) *рядовою зубчатою передачею* називається зубчата передача, утворена колесами, осі яких є нерухомими (рис. 2.9 а, 2.10 а);

б) *планетарною зубчатою передачею* називається зубчата передача, одне колесо якої є нерухомим, а друге – котиться по ньому за допомогою кривошипа (рис. 2.9 б, 2.10 б);

в) *диференціальною зубчатою передачею* називається зубчата передача, одне колесо якої обертається навколо нерухомої осі, а друге – котиться по ньому за допомогою кривошипа (рис. 2.9 в, 2.10 в).



а) б) в)

Рисунок 2.9 – Циліндричні зубчаті передачі:
а) рядова; б) планетарна; в) диференціальна

При розрахунку рядових зубчатих передач (рис. 2.9 а, 2.10 б) використовують пропорційну залежність між кутовими швидкостями ω (або частотами n) обертання колес та їх радіусами r і кількістю зубців z

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} = \pm\frac{r_2}{r_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}. \qquad (2.45)$$

Знак «–» відповідає зовнішньому зчепленню, знак «+» – внутрішньому.

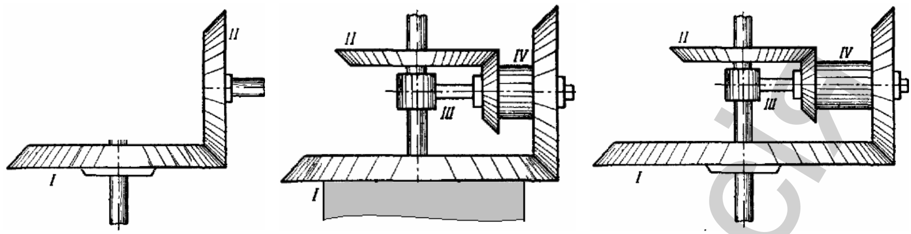
При розрахунках планетарних (рис. 2.9 б, 2.10 б) та диференціальних (рис. 2.9 в, 2.10 в) зубчастих передач використовують залежність (2.45) для відносних кутових швидкостей

$$\frac{\omega_2^r}{\omega_1^r} = \frac{n_2^r}{n_1^r} = \pm\frac{r_2}{r_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}. \qquad (2.46)$$

При цьому кутова швидкість ω^r визначається як різниця абсолютної кутової швидкості ω колеса та його переносної швидкості ω^e

$$\omega^r = \omega - \omega^e. \qquad (2.47)$$

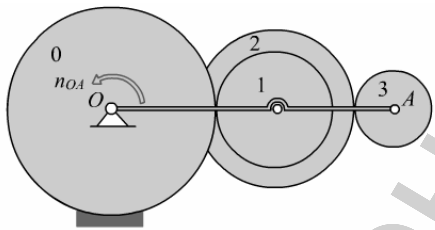
Остання, у свою чергу, дорівнює кутовій швидкості обертання кривошипа навколо власної осі.



а) б) в)

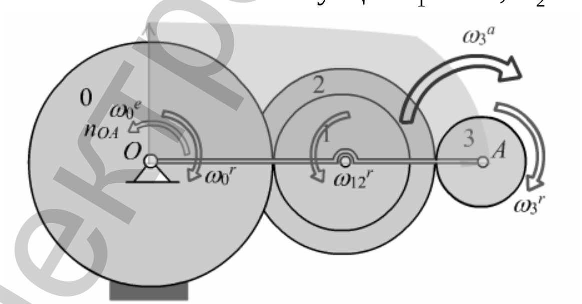
Рисунок 2.10 – Конічні зубчаті передачі:
а) рядова; б) планетарна; в) диференціальна

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 2.2.4

Визначити частоту обертання сателіта з кількістю зубців $z_3 = 25$, якщо кривошип *OA* обертається навколо осі *O* нерухомої шестерні (з числом зубців $z_0 = 60$) з частотою $n_{OA} = 30$ об/хв і несе вісь подвійної шестерні з числами зубців $z_1 = 40$, $z_2 = 50$.



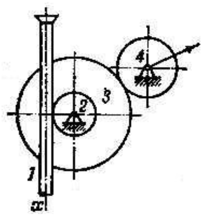
Розв’язання

Для розв’язання задачі застосуємо метод Вілліса (метод зупинки кривошипа *OA*). «Зупинимо» переносний рух кривошипа. Складні рухи шестерень перетворюються в прості обертання навколо нерухомих центрів. Оскільки колесо *O* нерухоме, то його абсолютна кутова швидкість дорівнює нулю: $0=\omega_0^e+\omega_0^r$, звідки $\omega_0^r=-\omega_0^e=-\omega_{OA}$. Співвідношення між кутовими швидкостями (відносними при рухові кривошипа) обертнено пропорційні радіусам зчеплень: $\omega_0^r/\omega_{12}^r=-r_1/r_0$; $\omega_{12}^r/\omega_3^r=-r_3/r_2$. Отримаємо $\omega_{12}^r=-\omega_0^r\cdot r_0/r_1=\omega_{OA}\cdot r_0/r_1$; $\omega_3^r=-\omega_{12}^r\cdot r_2/r_3=-\omega_{OA}\cdot r_0 r_2/(r_1 r_3)$. Абсолютна кутова швидкість колеса *3* $\omega_3^a=\omega_3^e+\omega_3^r=\omega_{OA}\left[1-r_0 r_2/(r_1 r_3)\right]$. З урахуванням пропорційності кутової швидкості до швидкості обертання, а також радіусів коліс – до числа зубців, $n_3^a=n_{OA}\left[1-z_0 z_2/(z_1 z_3)\right]$.

$$n_3^a=30\cdot\left[1-60\cdot 50/(40\cdot 25)\right]=-60 \text{ (об/хв)}.$$

Відповідь: $n_3^a=-60$ об/хв.

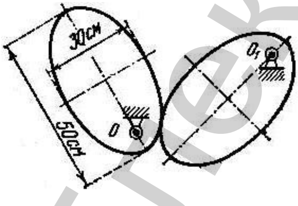
ЗАДАЧІ



2.2.4.1

Визначити кутову швидкість стрілки механізму індикатора, якщо рух рейки вимірювального штифта задається рівнянням $x = a\cdot\sin(kt)$.

Радіуси коліс *1, 2, 3*: r_2, r_3, r_4.



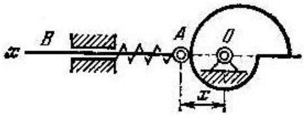
OO_1 = 500 мм

2.2.4.2

Для отримання періодичних кутових швидкостей зчеплені два однакових еліптичних колеса з півосями 250 і 150 мм, одне з яких обертається навколо осі *O* з кутовою швидкістю 28,274 рад/с. Осі *O* і O_1 паралельні і проходять через фокуси.

Визначити найменше і найбільше значення кутової швидкості колеса O_1.

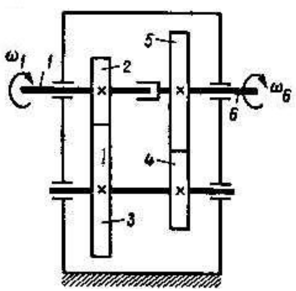
2.2.4.3*



Знайти закон руху і побудувати графік зворотно-поступального руху стрижня *AB*, якщо задане рівняння профілю кулака

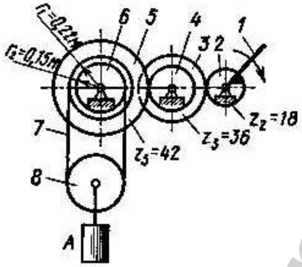
$$r = (20 + 15\varphi/\pi)\ \text{см};\ 0 < \varphi < 2\pi.$$

2.2.4.4



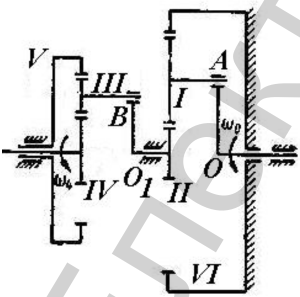
Визначити передатне відношення u_{2-5} співвісного двоступеневого циліндричного редуктора, якщо кількість зубців його коліс дорівнює: $z_2 = 18$; $z_3 = 54$; $z_5 = 40$. Яка кількість зубців колеса *4*?

2.2.4.5



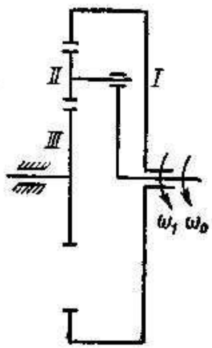
З якою швидкістю відбудеться вертикальне переміщення вантажу *A*, якщо обертати рукоятку *1* з частотою $n_1 = 1{,}5$ об/с?

2.2.4.6



У диференціальному механізмі колесо *VI* є нерухомим; кривошип *OA* має кутову швидкість ω_0; колесо *IV* має кутову швидкість ω_4.

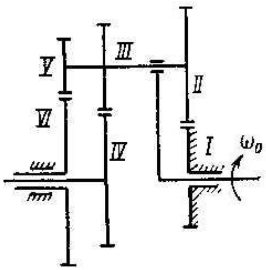
Визначити кутову швидкість колеса *V*, якщо $r_1 = 100$ мм; $r_2 = 40$ мм; $r_3 = 40$ мм; $r_4 = 80$ мм;



2.2.4.7

У диференціальній передачі колесо *I* і кривошип обертаються з частотами відповідно n_0 і n_I.

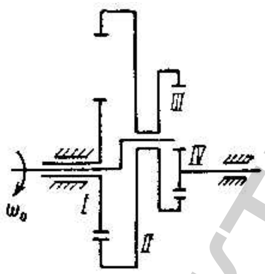
Визначити частоту обертання колеса *III*, якщо радіуси третього і другого коліс $r_3 = 2r_2 = 100$ мм.



2.2.4.8

У планетарній передачі водило обертається з частотою n_0.

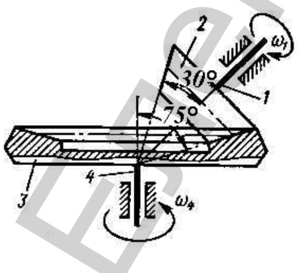
Визначити частоти обертання коліс *IV* і *VI*, якщо радіуси коліс дорівнюють $r_1 = 50$ мм; $r_2 = 150$ мм; $r_3 = 100$ мм; $r_5 = 500$ мм.



2.2.4.9

В планетарній передачі кривошип має кутову швидкість ω_0.

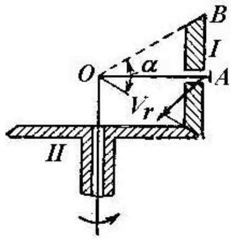
Знайти кутові швидкості обертання зубчатих коліс *I* і *IV*, якщо радіуси коліс дорівнюють r_1, r_2, r_3.



2.2.4.10*

Ведений вал *4* конічної передачі з внутрішнім зчепленням здійснив 250 об і зупинився.

Скільки обертів за той самий час здійснить головний вал *1*?



2.2.4.11*

Визначити в момент часу $t = 1$ с абсолютне прискорення точки *B*, якщо закон обертання колеса *II*: $\varphi = 0{,}25t^2$ рад, а відносна швидкість точки *A* дорівнює $V_r = 2t$ см/с.

Взяти $OA = 8$ см; кут $\alpha = 60°$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається миттєвою віссю обертання?

2 Чому дорівнює швидкість точок твердого тіла, які в даний момент часу знаходяться на осі обертання?

3 Сформулюйте теорему про додавання кутових прискорень.

4 Що називається рядовою зубчатою передачею? Як визначається передаточне число рядової зубчатої передачі?

5 Які зубчаті передачі називаються рядовими?

6 Яка існує залежність між кутовими швидкостями і числами зубців двох зубчатих коліс, які входять до рядового зубчатого зчеплення?

7 Яка зубчата передача називається планетарною?

8 Яка зубчата передача називається диференціальною?

9 У чому полягає метод Вілліса для розрахунку диференціальних передач?

10 Яка існує залежність між кутовими швидкостями і числами зубців двох зубчатих коліс, які входять до диференціального зубчатого зчеплення?

3 ДИНАМІКА

3.1 Динаміка матеріальної точки

3.1.1 Пряма задача

Динаміка матеріальної точки базується на результатах досліджень і спостережень, узагальнених до рівня законів із застосуванням кінематики і геометрії. Спираючись на принцип інерції Галілея, Ісаак Ньютон сформулював основні закони руху:

а) *Перший закон Ньютона* (закон інерції): *будь-яка матеріальна точка продовжує утримуватися у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки прикладені до неї сили не змінять цей стан*;

б) *Другий закон Ньютона* (основний закон динаміки матеріальної точки): *секундна зміна кількості руху матеріальної точки дорівнює рівнодійній усіх сил, прикладених до точки*:

$$\frac{d\overline{q}}{dt} = \overline{F}; \tag{3.1}$$

в) *Третій закон Ньютона* (закон рівності сил дії і протидії): *будь-якій дії є рівна і протилежна за напрямом протидія*.

Під *інерцією* розуміють здатність матеріального тіла зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху. Кількісною мірою інерції тіла є *маса тіла*.

Кількістю руху матеріальної точки називається векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості:

$$\overline{q} = m\overline{v}. \tag{3.2}$$

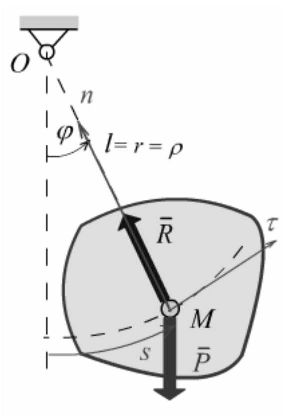
У разі, якщо маса точки є незмінною, основний закон динаміки матеріальної точки набирає такого вигляду:

$$m\overline{a} = \overline{F}, \tag{3.3}$$

де $\overline{a}$ – прискорення точки.

Прямою задачею динаміки матеріальної точки називається задача, в якій за заданими законом руху і масою точки необхідно визначити рівнодійну усіх сил, прикладених до неї. Пряма задача зводиться до диференціювання закону руху з метою встановлення прискорення і рівнодійної усіх сил (3.3).

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 3.1.1

Матеріальна точка M вагою $P = 10$ Н підвішена до троса довжиною $l = 2$ м і здійснює коливання за законом $\varphi = \pi / 6 \cdot \sin 2\pi t$ (рад), де φ – кут відхилення троса від вертикалі.

Визначити силу натягу троса у верхньому і нижньому положеннях матеріальної точки.

Розв'язання

Обираємо за об'єкт руху матеріальну точку. Відкидаємо зв'язки (трос), замінюючи їх реакціями (сила натягу троса $\overline{R}$). Додаємо активні сили (сила тяжіння $\overline{P}$). Запишемо основний закон динаміки матеріальної точки: $m\overline{a} = \overline{P} + \overline{R}$. У проекціях на натуральні осі τ і n: $m\ddot{s} = -P \sin\varphi$; $m\dot{s}^2 / \rho = R - P\cos\varphi$, де $\rho = l$ – радіус кривизни траєкторії точки. Визначаємо $\dot{s}$, враховуючи, що $s = l\varphi$: $\dot{s} = \pi^2 l / 3 \cdot \cos 2\pi t$. Таким чином, $R = P\cos(\pi / 6 \cdot \sin 2\pi t) + \pi^4 Pl / (9g) \cdot \cos^2 2\pi t$. У нижньому положенні точки ($t = 0$) сила натягу троса $R_{max} = P + \pi^4 Pl / (9g) = 32{,}1$ (Н), у верхньому ($t = 0{,}25$ с) – $R_{min} = P\sqrt{3} / 2 = 8{,}67$ (Н).

Відповідь: $R_{max} = 31{,}2$ Н; $R_{min} = 8{,}67$ Н.

ЗАДАЧІ

3.1.1.1

У шахті спускається рівноприскорено ліфт масою 280 кг. За перші 10 с він проходить 35 м.

Визначити силу натягу троса, до якого прикріплений ліфт.

3.1.1.2

Горизонтальна платформа, на якій знаходиться вантаж масою 1,02 кг, спускається вертикально з прискоренням 4 м/с^2.

Знайти силу тиску, яку здійснює вантаж на платформу.

3.1.1.3

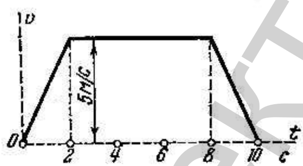
До тіла масою 3 кг, яке лежить на столі, прив’язана нитка, інший кінець якої прикріплений у точці *A*.

Яке зусилля необхідно надати точці *A*, піднімаючи тіло вертикально вгору, щоб нитка перервалася при силі натягу 42 Н?

3.1.1.4

Камінь масою 300 г, прив’язаний до нитки довжиною 1 м, рухається за колом у вертикальній площині.

Визначити найменшу кутову швидкість ω каменя, при якій нитка розірветься, якщо вона рветься при натягу 9 Н.



3.1.1.5

Під час підйому клітки ліфта масою 480 кг графік швидкостей має вигляд, зображений на рисунку.

Визначити сили натягу троса за проміжки часу [0; 2], [2; 8], [8; 10] с.

3.1.1.6

Автомобіль масою 1 т рухається зі швидкістю 36 км/год по опуклому мосту з радіусом кривизни 50 м.

Визначити силу тиску автомобіля на міст у момент проходження через найвищу точку (середину) моста.

3.1.1.7

Кулька масою 100 г падає під дією сили тяжіння і сили опору повітря. Закон руху кульки $y = 4{,}9t - 2{,}45\cdot[1 - \exp(-\,2t)]$, м.

Визначити силу опору як функцію швидкості кульки.

3.1.1.8*

Точка масою m рухається по еліпсу $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ з прискоренням, паралельним до осі y. При $t = 0$ координати точки були $(0;\, b)$, а початкова швидкість становила V_0.

Визначити силу, яка діє на точку в залежності від місцезнаходження її на траєкторії.

3.1.1.9

Матеріальна точка масою 3,27 кг рухається відповідно до закону $x = 0{,}3\cos 3t$; $y = 0{,}1\sin 3t$, м.

Визначити силу F, під дією якої здійснюється рух точки, в залежності від радіуса-вектора точки.

3.1.1.10

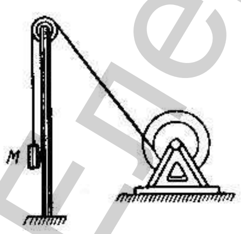
Матеріальна точка масою m рухається відповідно до закону $x = a\cdot\cos\omega t$; $y = b\cdot\sin\omega t$; $z = bt$.

Визначити силу F, під дією якої здійснюється рух точки.

3.1.1.11

Точка вагою P рухається по колу за законом $s = r\cdot\exp(2t)$.

Визначити рівнодійну усіх сил, під дією яких відбувається рух точки, як функцію часу.



3.1.1.12

Вантаж M вагою P піднімається за допомогою троса, який намотується на барабан радіусом R, який обертається з кутовим прискоренням ε.

Визначити силу натягу троса.

3.1.1.13

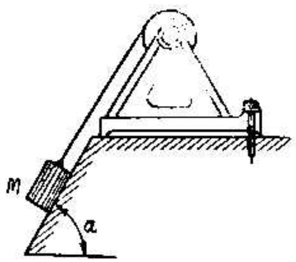
Човен рухається рівноприскорено по спусковій доріжці стапеля з нахилом 1:15, проходячи шлях 90 м за 31 с.

Визначити коефіцієнт тертя човна об спускову доріжку.

3.1.1.14

Стрічковий підйомник з кутом нахилу *α* до горизонту піднімає руду.

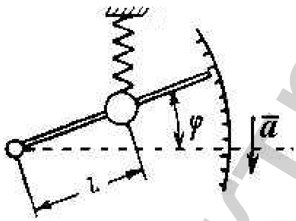
Визначити коефіцієнт тертя такий, щоб руда не сповзала зі стрічки, рухаючись із прискоренням *a*.



3.1.1.15

Вантаж *M* вагою *P* піднімається за допомогою лебідки по похилій площині з кутом нахилу *α* до горизонту.

Визначити силу натягу троса, якщо барабан радіусом *r* обертається за законом $\varphi = at^2/2$, а коефіцієнт тертя вантажу об похилу площину дорівнює *f*.



3.1.1.16*

На рисунку наведена спрощена схема акселерометра. Пружина має жорсткість *c*; відстань від осі стрілки до кульки вагою *P* дорівнює *l*.

Визначити прискорення *a* тіла, якщо пристрій показує відхилення стрілки від горизонту на кут *φ*. Масою стрілки знехтувати.

3.1.1.17

Прямолінійний рух матеріальної точки масою *m* задається рівнянням $x = a \cdot \ln(1 + V_0 \cdot t/a)$.

Визначити силу, яка діє на точку, як функцію часу і як функцію швидкості точки.

3.1.1.18

Під дією деякої сили швидкість точки масою m, яка рухається прямолінійно, змінюється за законом $V = a\cdot\ln(b/t)$.

Знайти силу як функцію швидкості.

3.1.1.19*

Закон проникнення снаряда в броню виражається за допомогою формули Дідіона $s = cr\rho/\beta\cdot\ln[(\alpha + \beta V_0^2)/(\alpha + \beta V^2)]$, де V_0 – початкова швидкість; V – швидкість після проходження шляху s; r – радіус снаряда; ρ – середня густина снаряда; α, β – коефіцієнти матеріалу броні; c – константа.

Визначити залежність сили опору від швидкості снаряда.

3.1.1.20

Матеріальна точка масою 200 г рухається відповідно до закону $x = 8t^2 + 3$; $y = 3t – 4$, м.

Визначити силу F, під дією якої здійснюється рух точки, в момент часу $t = 1$ с.

3.1.1.21*

Довести, що за відсутності тертя час руху тіла зі стану спокою під дією сили тяжіння уздовж хорди кола не залежить від кута нахилу хорди до горизонту.

3.1.1.22

Пісочний годинник стоїть на підлозі ліфта, який рухається з прискоренням $a < g$.

Чи буде годинник давати похибку? В якому випадку годинник зупиниться?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Сформулюйте другий закон Ньютона.

2 У чому полягає пряма задача динаміки матеріальної точки?

3.1.2 Обернена задача

Оберненою (основною) задачею динаміки матеріальної точки називається задача, в якій за заданими масою точки і системою прикладених до неї сил необхідно визначити закон руху. Обернена задача зводиться до інтегрування основного закону динаміки (3.3), яке в проекеціях на осі x, y, z декартової системи координат має вигляд

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \\ m\ddot{z} = \sum F_{kz}, \end{cases} \tag{3.4}$$

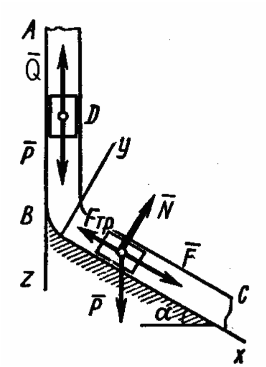
а в проекціях на осі натурального тригранника –

$$\begin{cases} m\ddot{s} = \sum F_{k\tau}; \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \end{cases} \tag{3.5}$$

де s – дугова координата точки; ρ – радіус кривизни траєкторії.

Залежно від того, від яких аргументів залежать проекції рівнодійної на вибрані осі, обирається метод інтегрування систем диференціальних рівнянь (3.4) – (3.5), для однозначного розв'язання яких у будь-якому разі необхідно задовольняти *початкові умови задачі* – фіксовані значення переміщень і швидкостей у задані моменти часу: при $t = t_1$ $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ (або $s = s_1$); при $t = t_2$ $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$ (або $s = s_2$) або $v_x = v_{x1}$, $v_y = v_{y1}$, $v_z = v_{z1}$ (або $v = v_1$). Як початкові умови задачі можуть також бути пов'язані між собою значення переміщення і швидкості в конкретний момент часу.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 3.1.2

Вантаж D масою m, отримавши в точці A початкову швидкість V_A, рухається по зігнутій трубі ABC, розміщеній у вертикальній площині. На ділянці AB на вантаж, окрім сили тяжіння, діє стала сила Q. Тертям вантажу об трубу на ділянці AB знехтувати. В точці B вантаж, не змінюючи своєї швидкості, переходить на ділянку BC, де на нього, окрім сили тяжіння, діють сила тертя (коефіцієнт тертя $f = 0{,}2$) і змінна сила $F(t)$.

Вважаючи вантаж матеріальною точкою, знайти закон його руху на ділянці BC, тобто $x = f(t)$.

$m = 2$ кг; $V_A = 5$ м/с; $l_{AB} = 2{,}5$ м; $Q = 10$ Н; $F_x(t) = 16\sin(4t)$; $\alpha = 30°$.

Розв'язання

Розглянемо рух матеріальної точки на ділянці AB. Зобразимо точку в довільному положенні та активні сили $\vec{P} = m\vec{g}$ і $\vec{Q}$. Проводимо вісь z з початком в точці A і складаємо диференціальне рівняння руху в проекції на цю вісь:

$$m\frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz}.$$

Сума проекцій усіх сил на вісь z $\sum F_{kz} = mg - Q.$ Враховуючи, що $V_z = V$, отримаємо: $mV\frac{dV}{dz} = mg - Q,$ або $VdV = \left(g - \frac{Q}{m}\right)dz.$ Інтегруючи обидві частини рівності, отримаємо $\frac{V^2}{2} = \left(g - \frac{Q}{m}\right)z + C_1,$ де C_1 – стала інтегрування, яка визначається з початкових умов задачі: при $t = 0$ $V = V_A$, $z = 0$, тобто $\frac{V_A^2}{2} = \left(g - \frac{Q}{m}\right) \cdot 0 + C_1$, звідки знаходимо $C_1 = \frac{V_A^2}{2}$. Таким чином, $\frac{V^2}{2} = \left(g - \frac{Q}{m}\right) z + \frac{V_A^2}{2}$, або $V = \sqrt{V_A^2 + 2\left(g - \frac{Q}{m}\right) z}$.

Швидкість точки в положенні *B* (вважаємо g = 9,81 м/с^2)

$$V_B = \sqrt{V_A^2 + 2\left(g - \frac{Q}{m}\right) l_{AB}} = \sqrt{5^2 + 2 \cdot \left(9{,}81 - \frac{10}{2}\right) \cdot 2{,}5} = 7\,(м/с).$$

Розглянемо рух матеріальної точки на ділянці *BC*. Зобразимо точку в довільному положенні та усі сили: $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\overrightarrow{F_{тр}}$ і $\vec{F}(t)$. Проведемо з точки *B* осі координат *x* і *y*. Складемо рівняння руху матеріальної точки в проекції на вісь *x*:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx} = mg\sin\alpha - F_{тр} + F_x(t),$$

де $F_{тр} = fN$. Для визначення *N* складаємо рівняння руху точки в проекції на вісь *y*: $ma_y = \sum F_{ky} = N - mg\cos\alpha$. Оскільки $a_y = 0$, отримаємо $N = mg\cos\alpha$. Таким чином, $F_{тр} = fmg\cos\alpha$. Крім того, $F_x(t) = 16\sin(4t)$. Рівняння руху вантажу в проекції на вісь *x* набуває вигляду $m\frac{dV_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t)$, або

$$dV_x = \left[g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \frac{16}{m}\sin(4t)\right]dt = [3{,}2 + 8\sin(4t)]dt.$$

Після інтегрування отримаємо $V_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2$, де C_2 – стала інтегрування, яка визначається з початкової умови: при t = 0 V_x = V_B, тобто $V_x(0) = 3{,}2 \cdot 0 - 2\cos(4 \cdot 0) + C_2 = V_B$, звідки знаходимо $C_2 = V_B + 2 = 7 + 2 = 9\,(м/с)$. Таким чином,

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 9 + 3{,}2t - 2\cos(4t).$$

Інтегруючи останнє рівняння за часом, отримаємо $x = 9t + 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + C_3$, де C_3 – стала інтегрування, яка визначається з початкової умови: при $t = 0$ $x = 0$, тобто

$$x(0) = 9\cdot 0 + 1{,}6\cdot 0^2 - 2\sin(4\cdot 0) + C_3 = 0,$$

звідки знаходимо $C_3 = 0$. Отримаємо шуканий закон руху матеріальної точки: $x(t) = 9t + 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t)$.

Відповідь: $x(t) = 9t + 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t)$.

ЗАДАЧІ

3.1.2.1

Камінь падає в шахту без початкової швидкості. Звук удару каменя об дно шахти почувся через 6,5 с від початку падіння.

Знайти глибину шахти, вважаючи швидкість звука 330 м/с.

3.1.2.2

Важке тіло спускається по гладкій площині, нахиленій під кутом 30° до горизонту.

Знайти, за який час тіло пройде шлях 9,6 м, якщо в початковий момент його швидкість дорівнювала 2 м/с.

3.1.2.3

Тіло маси *m* внаслідок отриманого поштовху пройшло по негладкій горизонтальній площині за 5 с відстань 24,5 м і зупинилось. Визначити коефіцієнт тертя *f*.

3.1.2.4

За який час і на якій відстані може бути зупинений гальмами вагон трамвая, який їде по горизонтальному шляху зі швидкістю 10 м/с, якщо опір руху при гальмуванні становить 0,3 ваги вагона.

3.1.2.5

Важка точка піднімається по шорсткій похилій площині, яка становить кут 30° з горизонтом. У початковий момент швидкість дорівнювала 15 м/с. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,1.

Який шлях і за який час пройде точка до зупинки?

3.1.2.6

Знайти найбільшу швидкість падіння кулі радіусом $r = 8$ см і масою 10 кг, приймаючи, що опір повітря $R = 0{,}24\sigma V^2$ (Н), де σ – площа проекції тіла на площину, перпендикулярну до напряму руху.

3.1.2.7

Дві геометрично рівні однорідні кулі виготовлені з різних матеріалів, густина яких γ_1 і γ_2, падають у повітрі.

Вважаючи опір повітря пропорційним квадрату швидкості, визначити співвідношення максимальних швидкостей куль.

3.1.2.8

На яку висоту H і за який час T підніметься тіло вагою p, кинуте вгору зі швидкістю V_0, якщо опір повітря дорівнює $k^2 pV^2$?

3.1.2.9

Тіло вагою p падає в повітрі без початкової швидкості. Опір повітря $R = k^2 pV^2$. Якою буде швидкість тіла через час t після початку руху? Яке граничне значення швидкості?

3.1.2.10

Знайти рівняння руху точки маси m, яка падає без початкової швидкості на Землю. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості; коефіцієнт пропорційності k.

3.1.2.11

Тіло маси 2 кг, кинуте вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с, витримує опір повітря $0{,}4V$ (Н). Знайти час досягання найвищого положення.

3.1.2.12

Матеріальна точка маси m здійснює прямолінійний рух під дією сили $F = F_0 \cdot \cos\omega t$, де F_0 і ω – константи. В початковий момент точка мала швидкість V_0.

Знайти рівняння руху точки.

3.1.2.13

Частинка із зарядом e знаходиться в однорідному електричному полі зі змінним напруженням $E = A \cdot \sin(kt)$.

Визначити рух частинки, якщо відомо, що в електричному полі на частинку діє сила $F = eE$. Впливом сили тяжіння знехтувати. Початкове положення частинки взяти за початок відліку; початкова швидкість частинки дорівнює нулю.

3.1.2.14

Визначити рух важкої кулі уздовж умовного прямолінійного каналу, який проходить через центр Землі. Визначити швидкість кулі при проходженні центру Землі, а також час руху. Середній радіус Землі становить 6370 км; прискорення вільного падіння на поверхні Землі дорівнює 9,8 м/с^2.

3.1.2.15

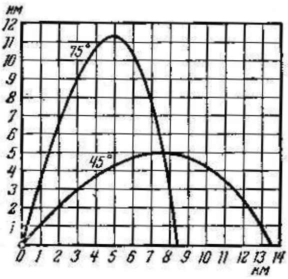
Тіло падає на Землю з висоти h без початкової швидкості. Опором повітря знехтувати.

Знайти час T досягнення поверхні Землі. Якої швидкості V досягне тіло за цей час? Радіус Землі R, прискорення вільного падіння на поверхні Землі g.

3.1.2.16

Рух тіла в неоднорідному середовищі сповільнюється під дією сили опору $F = 2V^2/(3 + s)$, де V – швидкість тіла; s – пройдений шлях.

Визначити пройдений шлях як функцію часу, якщо початкова швидкість $V_0 = 5$ м/с.



3.1.2.17

Морське знаряддя викидає снаряд масою 18 кг зі швидкістю 700 м/с. Траєкторія снаряда зображена на рисунку в двох випадках: початковий кут 45°, або 75°.

Для кожного із двох випадків визначити, на скільки кілометрів збільшилися б висота і дальність польоту за відсутності опору повітря.

3.1.2.18

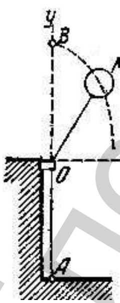
При куті кидання α снаряд має горизонтальну дальність l_α. Визначити горизонтальну дальність для кута кидання $\alpha/2$.

3.1.2.19

Тіло вагою P, кинуте з початковою швидкістю V_0 під кутом α до горизонту. Опір повітря $R = kPV$.

Визначити найбільший підйом h тіла. Знайти рівняння руху. На якій відстані s точка досягне найвищого положення?

3.1.2.20



Пружна нитка, закріплена в точці A, проходить через нерухоме гладке кільце O; до вільного кінця її прикріплена кулька M масою m. Довжина недеформованої нитки $AO = l$; для її подовження на 1 м необхідно докласти силу k^2m. Витягнувши нитку по прямій AB таким чином, що її довжина збільшилася вдвічі, кульці надали горизонтальну швидкість V_0.

Визначити траєкторію кульки, нехтуючи силою тяжіння. Сила натягу нитки пропорційна її подовженню.

3.1.2.21*

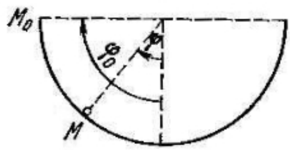
Точка M масою m притягується до n нерухомих центрів C_1, C_2, …, C_n силами, пропорційними відстаням точки M до відповідного центра: $F_i = k \cdot m \cdot MC_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Точка M і центри C_i знаходяться на одній площині Oxy.

Визначити траєкторію точки M, якщо в початковий момент часу $t = 0$: $x = x_0$; $y = y_0$; $V_x = 0$; $V_y = V_{y0}$. Дією сили тяжіння знехтувати.

3.1.2.23

Важка точка маси m падає з положення (0; h) вертикальної площини Oxy під дією сили тяжіння, паралельної осі y, і сили відштовхування від осі y, пропорційної відстані до цієї осі з коефіцієнтом пропорційності c. Початкова швидкість спрямована паралельно до осі x і дорівнює V_0.

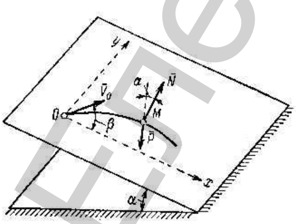
Визначити траєкторію точки, а також момент часу t_1 перетину осі x.



3.1.2.22*

Точка M масою m рухається по гладкій внутрішній поверхні порожнього циліндра радіусом r. В початковий момент кут $\varphi_0 = 90°$, а швидкість точки дорівнює нулю.

Визначити швидкість точки M і реакцію поверхні для положення точки, яке відповідає куту $\varphi = 30°$.



3.1.2.24

Точка M рухається по похилій площині, яка складає кут α з горизонтом.

Визначити рівняння руху точки, якщо початкова швидкість V_0 утворює кут β з лінією найбільшого нахилу.

3.1.2.25

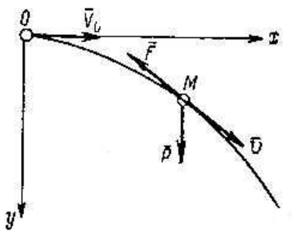
Матеріальній точці, яка знаходиться на поверхні Землі, надано у вертикальному напрямі початкову швидкість, яка дорівнює другій космічній швидкості: $V_0 = (2gR)^{1/2}$.

Визначити рівняння руху точки, нехтуючи опором повітря.

3.1.2.26

Вільна матеріальна точка масою m рухається прямолінійно з початковою швидкістю V_0 під дією лише сили опору $F = kV^{1/3}$.

Визначити час t_1 до зупинки і відповідний шлях s. Встановити залежність швидкості точки від пройденого шляху.



3.1.2.27

Матеріальній точці M масою m, яка знаходиться в полі сили тяжіння, надано початкову швидкість V_0, паралельну до горизонту.

Визначити рівняння руху точки, враховуючи силу опору, яка залежить від швидкості точки векторним співвідношенням $F = -kV$.

3.1.2.28

Тіло рухається по похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом.

Знайти час руху тіла, якщо в початковий момент його швидкість дорівнювала нулю. Коефіцієнт тертя f; довжина пройденого шляху L.

3.1.2.29

Потяг загальною вагою P рухається по прямолінійній горизонтальній колії і має на початку гальмування швидкість V_0.

Визначити сумарну силу тертя, якщо довжина гальмівного шляху дорівнює s.

3.1.2.30

Вантаж, скинутий з пікіруючого літака на висоті h, має початкову швидкість V_0, спрямовану під кутом α до вертикалі.

На якій відстані (по горизонталі) від точки скидання вантаж впаде на землю, якщо знехтувати опором повітря?

3.1.2.31

На тіло вагою P, яке знаходиться на горизонтальній шорсткій поверхні, протягом часу t_1 діє горизонтальна стала сила Q.

Визначити відстань, пройдену тілом до зупинки, якщо коефіцієнт тертя його об площину дорівнює f. Початкова швидкість тіла дорівнює нулю.

3.1.2.32

Парашутист масою 90 кг спускається без початкової швидкості. Площа проекції розкритого парашута на площину, перпендикулярну до напряму руху, становить $S = 64$ м^2.

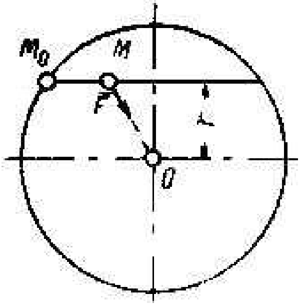
Визначити максимальну швидкість парашутиста, якщо сила опору повітря визначається за формулою $F = C\rho SV^2$, де константа $C = 0{,}45$; густина повітря $\rho = 0{,}125$ кг/м^3.

3.1.2.33*

Батискаф, маючи сталу від'ємну плавучість, занурюється вертикально. Сила опору води пропорційна квадрату швидкості руху.

Визначити, з якої глибини занурення h рух апарата можна вважати рівномірним з відносною похибкою $\mu = (V_{гр} - V)/V_{гр}$, якщо $V_{гр}$ – гранична швидкість занурення для заданої плавучості; відношення плавучості до ваги батискафа дорівнює λ. Початкова швидкість дорівнює нулю. Визначити час, після закінчення якого занурення можна вважати рівномірним.

3.1.2.34



Точка M масою m рухається по горизонтальній хорді кола радіусом R під дією сили, обернено пропорційної до відстані від точки до центра кола (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Найкоротша відстань від хорди до центра кола дорівнює r.

Знайти швидкість точки в момент проходження середини хорди, якщо в початковий момент вона займала крайнє положення M_0 і була відпущена без початкової швидкості. Силами тертя знехтувати.

3.1.2.35

Визначити швидкість руху штучного супутника Землі навколо планети, вважаючи радіус Землі R значно більшим, ніж висота орбіти супутника.

3.1.2.36*

4 жовтня 1957 р. був запущений перший у світі штучний супутник Землі. В момент його виведення на орбіту на висоті h супутник мав швидкість V_0, розміщену під кутом α до вертикалі, яка проходить через центр Землі ($\alpha < 90°$). Радіус Землі дорівнює R. Початкова швидкість V_0 супутника задовольняла нерівності: $(gR)^{1/2} < V_0 < (2gR)^{1/2}$.

Довести, що рух штучного супутника Землі відбувався за еліптичною траєкторією.

За яких умов рух супутника відбуватиметься

1) по колу;

2) по параболі;

3) по гіперболі?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 У чому полягає обернена задача динаміки матеріальної точки?

2 Яким чином розв'язується обернена задача динаміки у випадку, коли рівнодійна усіх сил, прикладених до точки, є функцією часу?

3 Яким чином розв'язується обернена задача динаміки у випадку, коли рівнодійна усіх сил, прикладених до точки, є функцією швидкості точки?

4 Яким чином розв'язується обернена задача динаміки у випадку, коли рівнодійна усіх сил, прикладених до точки, є функцією переміщення точки?

5 Які початкові умови має задовольняти загальний інтеграл диференціального рівняння другого закону Ньютона при розв'язанні оберненої задачі динаміки матеріальної точки?

3.1.3 Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

У випадках, коли рівнодійна усіх сил, що діють на матеріальну точку, є незмінною або функцією лише часу, а основні параметри задачі – час і швидкість,– замість прямого інтегрування рівняння (3.3) застосовують *теорему про зміну кількості руху матеріальної точки*, яка формулюється таким чином: *зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної усіх сил, прикладених до точки, за той самий проміжок часу*:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \bar{S}\left(\bar{F}\right), \tag{3.6}$$

де $\bar{v}_0$ і $\bar{v}_1$ – початкове і кінцеве значення швидкості точки; імпульс рівнодійної

$$\bar{S}\left(\bar{F}\right) = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F} dt. \tag{3.7}$$

У загальному випадку *імпульсом сили* називається векторна величина, яка дорівнює інтегралу за часом від вектора цієї сили.

У проекціях на осі декартової системи координат рівняння (3.6) набирає вигляду

$$\begin{cases} mv_{1x} - mv_{0x} = S_x\left(\overline{F}\right); \\ mv_{1y} - mv_{0y} = S_y\left(\overline{F}\right); \\ mv_{1z} - mv_{0z} = S_z\left(\overline{F}\right), \end{cases} \qquad (3.8)$$

де *проекція імпульсу сили* на будь-яку вісь дорівнює інтегралу за часом від проекції сили на дану вісь:

$$S_x\left(\overline{F}\right) = \int_{t_0}^{t_1} F_x dt. \qquad (3.9)$$

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1.3

Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, модуль якої змінюється з часом за законом $F = 4F_{\max} t\left(T - t\right)/T^2$, де T – час руху точки, $F_{\max}$ – найбільше значення сили.

Визначити швидкість v_1 точки у момент часу $t = T$, якщо початкова швидкість $v_0 = 0$.

Розв’язання

Запишемо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки: $m\overline{v}_1 - m\overline{v}_0 = \overline{S}\left(\overline{F}\right)$, де $\overline{S}\left(\overline{F}\right)$ – кількість руху точки. В проекції на напрямок руху отримаємо

$$mv_1 - m\cdot 0 = \int_0^T F dt = 4F_{\max}/T^2 \int_0^T t\left(T - t\right)dt = 2/3\cdot F_{\max} T,$$

звідки $v_1 = 2F_{\max} T/\left(3m\right)$.

Відповідь: $v_1 = 2F_{\max} T/\left(3m\right)$.

ЗАДАЧІ

3.1.3.1

Залізничний потяг рухається по горизонтальній прямолінійній ділянці шляху. При гальмуванні сила опору становить 0,1 ваги потяга. В момент початку гальмування швидкість дорівнює 20 м/с.

Знайти час гальмування.

3.1.3.2

По шорсткій похилій площині, яка з горизонтом утворює кут 30°, спускається важке тіло без початкової швидкості.

Визначити, через який час T тіло матиме швидкість 1 м/с, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,2.

3.1.3.3

Потяг масою 400 т входить на підйом 0,006 зі швидкістю 15 м/с. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,005. Через 50 с швидкість потяга зменшилася до 12,5 м/с.

Знайти силу тяги тепловоза.

3.1.3.4

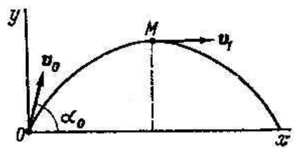
Яким має бути коефіцієнт тертя f об асфальт автомобіля, який гальмує, якщо при швидкості 20 м/с він зупиняється через 6 с після початку гальмування?

3.1.3.5

Куля масою 20 г вилітає зі ствола гвинтівки зі швидкістю 650 м/с, пролітаючи ствол за час 0,95 мс.

Визначити середнє значення тиску газів, які викидають кулю, якщо площа перерізу каналу ствола становить 150 мм^2.

3.1.3.6



Знайти імпульс рівнодійної усіх сил, які діють на снаряд за час, коли він з початкового положення *O* переходить у найвище положення *M*. Узяти V_0 = 500 м/с; α_0 = 60°; V_1 = 200 м/с; маса снаряда 100 кг.

3.1.3.7

Точка рівномірно рухається по колу зі швидкістю 0,2 м/с, здійснюючи повний оберт за час 4 с.

Знайти імпульс *S* сил, які діють на точку, за час одного півперіода, якщо маса точки 5 кг. Визначити середнє значення сили.

3.1.3.8

При розгоні саней, маса яких 5 кг, хлопець вагою 300 Н кожні 3,5 с робить поштовх з горизонтальною силою 250 Н тривалістю 0,3 с.

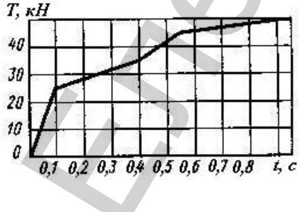
Знайти швидкість саней через 1 хв, якщо початкова швидкість становить 2 м/с, а коефіцієнт тертя об дорогу 0,06.

3.1.3.9

Пожежник масою 100 кг, стоячи на горизонтальній підлозі з коефіцієнтом тертя 0,3, направив донизу під кутом 30° до горизонту брандспойт, з якого б’є струмінь води зі швидкістю 30 м/с. Діаметр отвору брандспойта 15 мм.

Чи зможе пожежник утриматися на місці?

3.1.3.10



Визначити швидкість крилатої ракети масою 1,2 т з похилих напрямних під кутом 30° до горизонту, якщо сила тяги *T* двигуна змінюється з часом за наведеним графіком. Коефіцієнт тертя 0,18; час руху 0,95 с.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається кількістю руху матеріальної точки?

2 Як спрямований вектор кількості руху відносно траєкторії точки?

3 Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі.

4 Що називається імпульсом сили?

5 Як визначається проекція імпульсу сили на вісь?

6 Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі.

7 Для яких типів задач слід використовувати теорему про зміну кількості руху матеріальної точки?

8 У яких випадках справедливий закон збереження кількості руху матеріальної точки?

3.1.4 Теорема про зміну моменту кількості руху

У випадках, коли рівнодійна усіх сил, що діють на матеріальну точку, є незмінною або функцією лише часу, а основними параметрами задачі є час і швидкість або кутова швидкость, замість прямого інтегрування рівняння (3.3) застосовують *теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки*, яка формулюється таким чином: *секундна зміна моменту кількості руху матеріальної точки відносно будь-якого центра в даний момент часу дорівнює моменту рівнодійної усіх сил, прикладених до точки, відносно того самого центра*:

$$\frac{d}{dt}\left[\overline{m}_O\left(m\overline{v}\right)\right] = \overline{m}_O\left(\overline{F}\right), \tag{3.10}$$

де *момент кількості руху* – векторна величина, яка дорівнює векторному добутку радіуса-вектора і кількості руху точки:

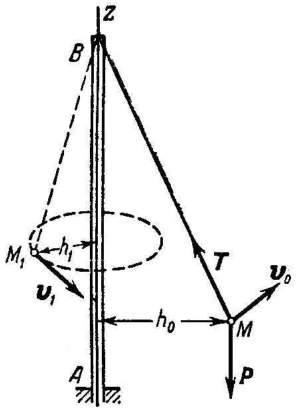
$$\overline{m}_O\left(m\overline{v}\right) = \overline{r} \times \left(m\overline{v}\right). \tag{3.11}$$

У випадку, коли лінія дії рівнодійної усіх сил, прикладених до точки, в будь-який момент часу проходить через один центр *О* (випадок *центральної сили*), теорема про зміну моменту кількості руху відносно цього центра перетворюється на *закон збереження моменту кількості руху матеріальної точки*

$$\overline{m}_O\left(m\overline{v}\right) = \overrightarrow{const}. \qquad (3.12)$$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1.4



Кулька M прив'язана до нитки MBA, частина якої продіта крізь вертикальну трубку. В момент, коли кулька знаходиться на відстані h_0 від осі z трубки, їй надають початкову швидкість v_0, перпендикулярну до площини MBA. Одночасно нитку починають повільно втягувати в трубку.

Знайти, яку швидкість v_1 матиме кулька, коли її відстань від осі z буде дорівнювати h_1.

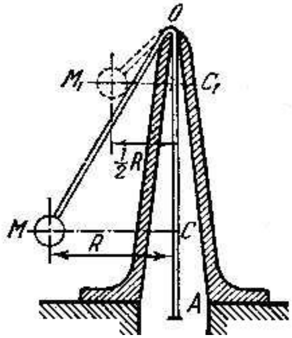
Розв'язання

На кульку діють сила тяжіння $\overline{P}$ і реакція нитки $\overline{T}$. Моменти цих сил відносно осі z дорівнюють нулю, оскільки лінія дії сили тяжіння паралельна даній осі, а лінія дії реакції нитки перетинає вісь. Таким чином, зміна моменту кількості руху матеріальної точки набирає вигляду $d\left[m_z\left(m\overline{v}\right)\right]/\,dt = 0$. Після інтегрування отримаємо закон збереження моменту кількості руху $m_z\left(m\overline{v}\right) = const = mvh$. Для двох різних положень точки складаємо рівність $mv_0h_0 = mv_1h_1$, звідки $v_1 = v_0h_0\,/\,h_1$.

Відповідь: $v_1 = v_0h_0\,/\,h_1$.

ЗАДАЧІ

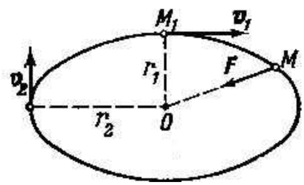
3.1.4.1



Гирка M прив'язана до кінця нерозтяжної нитки MOA, частина якої просунута через вертикальну трубку. Гирка рухається навколо осі трубки по колу радіусом $MC = R$ з частотою 120 об/хв. Повільно втягуючи нитку OA в трубку, вкорочують зовнішню частину нитки до довжини OM_1, при якій гирка рухається по колу з радіусом $R/2$.

Скільки обертів за хвилину робить гирка, рухаючись по меншому колу?

3.1.4.2



Точка M рухається навколо нерухомого центра під дією центральної сили.

Знайти швидкість V_2 в найбільш віддалений від центра точці траєкторії, якщо швидкість точки в найближчому до нього положенні V_1 = 30 м/с, а r_2 в 5 разів перевищує r_2.

3.1.4.3

Два математичних маятники, підвішені на нитках довжинами l_1 і l_2 ($l_1 > l_2$), здійснюють коливання однакової амплітуди. Обидва маятники одночасно почали рухатися в одному напрямку зі своїх крайніх відхилених положень.

Знайти умову, яку повинні задовольняти довжини l_1 і l_2 для того, щоб маятники після закінчення деякого проміжку часу одночасно повернулися в положення рівноваги.

3.1.4.4*

Точка масою m під дією центральної сили рухається по лемніскаті, рівняння якої в полярній системі координат таке: $r = a \cdot \cos 2\varphi$. В початковий момент часу $r = r_0$, а початкова швидкість V_0 спрямована під кутом α до прямої, яка з'єднує точку із силовим центром.

Визначити значення сили F як функцію координати r.[1)]

3.1.4.5

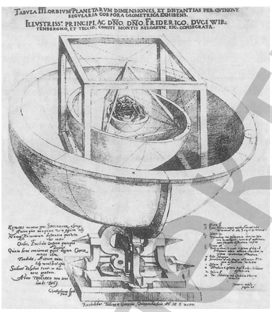
Точка M масою m рухається навколо нерухомого центра O під дією центральної сили F, яка залежить лише від відстані точки від центра $MO = r$.

Знаючи, що швидкість точки $V = a/r$, де a – константа, знайти значення сили F і траєкторію точки.

3.1.4.6

У деякій точці Землі секундний маятник відраховує час правильно. Після перенесення в інше місце він відстає на T секунд на добу.

Визначити прискорення вільного падіння в новому положенні секундного маятника.



3.1.4.7*

Довести другий закон Кеплера, відповідно до якого відрізок прямої, що з'єднує Сонце і планети, які обертаються навколо нього, відсікає однакові площини за рівні проміжки часу.

[1)] У задачах на рух точки під дією центральної сили потрібно застосовувати відому формулу Біне $F = -mc/r^2 \cdot [d^2(1/r)/d\varphi^2 + 1/r]$, де c – подвійна секторна швидкість точки: $c = 2r^2 \cdot d\varphi/dt = \text{const}$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра у просторі?

2 Як визначається момент кількості руху матеріальної точки відносно нерухомої осі?

3 Сформулюйте правило знаків для визначення моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомої осі.

3 Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно точки у просторі; відносно осі.

4 Для яких типів задач слід використовувати теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки?

5 У яких випадках справедливий закон збереження моменту кількості руху матеріальної точки?

3.1.5 Робота, потужність

Елементарною роботою сили називається скалярний добуток векторів сили та елементарного переміщення точки

$$\delta A\left(\overline{F}\right) = \overline{F} \cdot d\overline{r}. \tag{3.13}$$

Для елементарної роботи використовують знак варіації «δ», оскільки у загальному випадку елементарна робота не є повним диференціалом.

Існує три форми запису елементарної роботи (рис. 3.1). Перша з них є визначенням (3.13). Друга форма формулюється так: *елементарна робота сили дорівнює добутку тангенціальної складової сили та елементарної дугової координати точки*

$$\delta A\left(\overline{F}\right) = F_\tau \cdot ds. \tag{3.14}$$

Відповідно до третьої форми, *елементарна робота сили дорівнює сумі добутків проекцій цієї сили на нескінченно малі зміни відповідних координат*

$$\delta A\left(\overline{F}\right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{3.15}$$

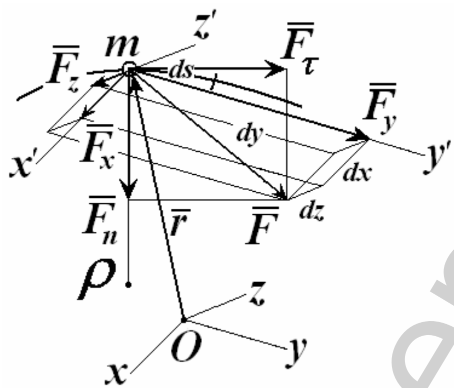


Рисунок 3.1 – Елементарна робота сили

Роботою сили на скінченному переміщенні називається сума усіх елементарних робіт на даному переміщенні:

$$A(\overline{F}) = \sum \delta A_k(\overline{F}). \tag{3.16}$$

Залежно від способу задання руху точки роботу сили можна визначати за допомогою однієї з трьох таких формул:

$$A(\overline{F}) = \int_{r_0}^{r_1} \overline{F} d\overline{r}; \tag{3.17}$$

$$A(\overline{F}) = \int_{s_0}^{s_1} F_\tau ds; \tag{3.18}$$

$$A(\overline{F}) = \int_{(M_0 M_1)} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{3.19}$$

Формула (3.18) пояснює геометричний зміст роботи сили: *робота сили при переміщенні точки з положення* M_0 *до положення* M_1, *яким відповідають значення дугових координат* s_0 *і* s_1 *відповідно, дорівнює площі під графіком залежності тангенціальної складової даної сили* F_τ *від дугової координати* s (рис. 3.2).

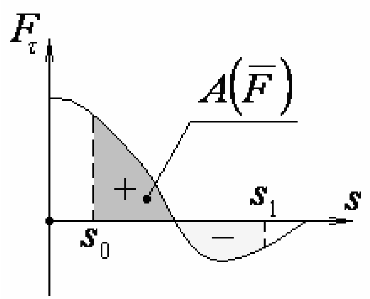


Рисунок 3.2 – Геометричний зміст роботи сили на скінченному переміщенні

Робота сили тяжіння $A(\overline{G})$ дорівнює узятому з відповідним знаком добутку модуля G цієї сили і вертикальної складової H переміщення точки

$$A(\overline{G}) = \pm G \cdot H. \tag{3.20}$$

Знак «+» відповідає переміщенню точки знизу-вгору.

Робота лінійної сили пружності $A(\overline{F}_{пр})$ дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності k і різниці квадратів величин початкової Δ_0 та кінцевої Δ_1 деформіцій

$$A(\overline{F}_{пр}) = \frac{1}{2} k \left(\Delta_0^2 - \Delta_1^2\right). \tag{3.21}$$

Робота не змінної за модулем і напрямом сили тертя $\overline{F}_m = \overrightarrow{const}$ дорівнює взятому із знаком «–» добутку модуля цієї сили і зміни дугової координати:

$$A(\overline{F}_m) = -F_m (s_1 - s_0). \tag{3.22}$$

Потужністю називається скалярна величина, яка дорівнює похідній за часом від роботи сили

$$N = \frac{dA}{dt}. \tag{3.23}$$

Потужність можна визначити як скалярний добуток сили і швидкості

$$N = \overline{F} \cdot \overline{v} \tag{3.24}$$

або як добуток тангенціальної складової сили і модуля швидкості матеріальної точки:

$$N = F_\tau v. \qquad (3.25)$$

У разі, коли точка обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω під дією пари сил з моментом M, потужність

$$N = M\omega. \qquad (3.26)$$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1.5

Визначити роботу сили тяжіння $F = GMm/(R+h)^2$, яка діє на тіло у полі тяжіння Землі.

G – гравітаційна стала; M – маса Землі; R – середній радіус Землі; m – маса тіла; h – висота положення тіла, яка змінюється від h_0 до h_1.

Розв'язання

Визначаємо елементарну роботу сили F: $\delta A(\overline{F}) = -Fdh = -GMm/(R+h)^2\, dh$. Інтегруючи, отримаємо повну роботу сили тяжіння:

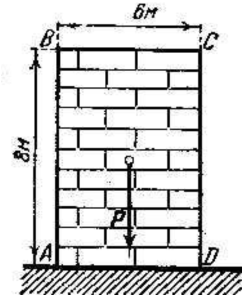
$$A(\overline{F}) = -GMm\int_{h_0}^{h_1}(R+h)^{-2}\, dh = GMm\left[(R+h_0)^{-1} - (R+h_1)^{-1}\right].$$

У разі, якщо $h \ll R$, $A(\overline{F}) \approx GMm(h_0 - h_1)/R^2 = mg(h_0 - h_1)$, де $g = GM/R^2$ – прискорення вільного падіння на поверхні Землі.

Відповідь: $A(\overline{F}) = GMm(h_0 - h_1)/R^2$.

ЗАДАЧІ

3.1.5.1



Бетонний блок *ABCD*, розміри якого вказані на рисунку, має масу 4 т.

Визначити роботу, яку необхідно витратити на перекидання блока навколо ребра *D*.

3.1.5.2

Визначити найменшу роботу, яку необхідно витратити для того, щоб підняти на 5 м тіло масою 2 т, рухаючи його по похилій площині, яка утворює з горизонтом кут 30°. Коефіцієнт тертя 0,5.

3.1.5.3

Визначити потужність машини, яка піднімає 84 рази за хвилину молот масою 200 кг на висоту 750 мм, якщо коефіцієнт корисної дії [1)] машини 0,7.

3.1.5.4

Шліфувальний круг діаметром 600 мм обертається з частотою 120 об/хв. Споживана потужність 1,2 кВт. Коефіцієнт тертя круга об деталь 0,2.

З якою силою круг притискає деталь?

3.1.5.5

Визначити потужність двигуна поздовжньо-стругального верстата, якщо довжина робочого ходу 2 м, його тривалість 10 с, сила різання 11,76 кН. Коефіцієнт корисної дії верстата 0,8. Рух вважати рівномірним.

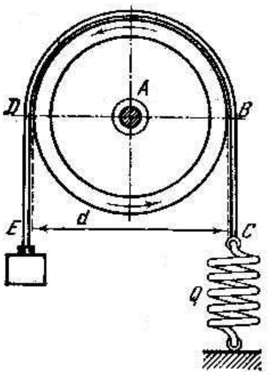
[1)] Коефіцієнтом корисної дії називається відношення корисної роботи до повної витраченої роботи.

3.1.5.6*

При ходьбі на лижах на дистанцію 20 км по горизонтальному шляху центр ваги лижника здійснює гармонійні коливання з амплітудою 80 мм і періодом 4 с. Маса лижника дорівнює 80 кг, а коефіцієнт тертя лиж об сніг 0,05.

Визначити роботу і середню потужність лижника на марші, якщо всю дистанцію він пройшов за півтори години. Вважати, що робота гальмування лижника становить 0,4 від роботи підйому центра ваги на ту саму висоту.

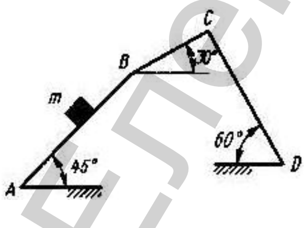
3.1.5.7



Для вимірювання потужності двигуна на його шків *A* надіта стрічка з дерев'яними колодками. Права гілка *BC* стрічки утримується пружинними вагами *Q*, а ліва гілка *DE* натягується вантажем.

Визначити потужність двигуна, якщо він обертається рівномірно з частотою 120 об/хв. При цьому пружинні ваги показують натяг 36,24 Н. Маса вантажу дорівнює 1 кг; діаметр шківа становить 636 мм. Різниця натягів гілок *BC* і *DE* стрічки дорівнює силі, яка гальмує шків. Визначити роботу цієї сили.

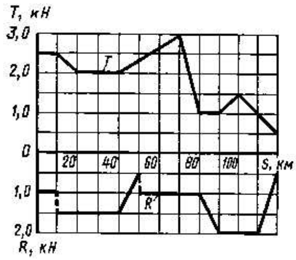
3.1.5.8



Повзун масою 5 кг рухається по гладкій ламаній напрямній *ABCD*.

Визначити роботу сили тяжіння повзуна при переміщенні його з положення *A* в положення *D*, якщо *AB* = 2·*BC* = *CD* = 10 м.

3.1.5.9



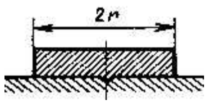
За наведеними графіками активної сили *T* і сили опору *R* руху тіла на горизонтальній ділянці шляху довжиною 120 км встановити, як зміниться швидкість тіла до кінця проходження ділянки. Визначити середнє значення сил *T* і *R*.

3.1.5.10

Насос викачує воду з глибини 20 м. При цьому вода виливається з патрубка внутрішнього діаметра 800 мм зі швидкістю 18 м/с.

Визначити корисну потужність насоса[1].

3.1.5.11*



Однорідний диск масою *m* і радіусом *r* лежить на горизонтальному столі; коефіцієнт тертя між ними *f*. Диск не може зсунутися, оскільки в його центрі є невеликий конічний виступ.

Яку роботу необхідно здійснити, щоб рівномірно повернути диск на 270°, якщо вважати, що тиск площини зіткнення диска зі столом є сталим.

[1] Корисна потужність насоса визначається за формулою $N = \gamma QH$, де γ – питома вага робочої рідини, Н/м^3; Q – об’єм робочої рідини, який перекачується за одиницю часу, м^2/с; H – висота підйому рідини, м.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається елементарною роботою сили?

2 Вкажіть три форми запису виразу для елементарної роботи сили.

3 У яких випадках елементарна робота сили дорівнює нулю?

4 Що називається роботою сили на скінченному переміщенні?

5 Вкажіть три форми запису виразу для роботи сили на скінченому переміщенні.

6 За якими формулами визначаються робота сили тяжіння; сили пружності; сталої сили тертя?

7 Чому дорівнює робота нормальної реакції на скінченному переміщенні точки по криволінійній траєкторії?

8 Що називається потужністю?

9 Як визначається потужність за відомою силою і швидкістю?

10 Як визначається потужність під час обертання точки навколо нерухомої осі під дією обертового моменту?

11 Що називається коефіцієнтом корисної дії?

3.1.6 Теорема про зміну кінетичної енергії точки

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна величина, яка дорівнює половині добутку її маси на квадрат швидкості: $mv^2/2$.

У випадках, коли рівнодійна усіх сил, що діють на матеріальну точку, є незмінною або функцією лише переміщення, а основні параметри задачі – швидкість і переміщення,– замість прямого інтегрування рівняння (3.3) застосовують *теорему про зміну кінетичної енергії точки*, яка формулюється таким чином: *зміна кінетичної енергії матеріальної точки під час проходження деякого переміщення* *дорівнює роботі рівнодійної усіх сил, прикладених до точки, на відповідному переміщенні*:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(\overline{F}), \tag{3.27}$$

де $\overline{v}_0$ і $\overline{v}_1$ – початкове і кінцеве значення швидкості точки.

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 3.1.6

Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сили, модуль якої змінюється за законом $F = 4F_{\max} s(l - s)/l^2$, де l – переміщення точки, $F_{\max}$ – найбільше значення сили.

Визначити швидкість v_1 точки після переміщення l, якщо початкова швидкість $v_0 = 0$.

Розв’язання

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки: $mv_1^2/2 - mv_0^2/2 = A(\overline{F})$, де $A(\overline{F})$ – робота сили $\overline{F}$ на переміщенні l матеріальної точки:

$$A(\overline{F}) = \int_0^l F ds = 4F_{\max}/l^2 \int_0^l s(l - s) ds = 2/3 \cdot F_{\max} l .$$

Теорема про зміну кінетичної енергії набирає вигляду

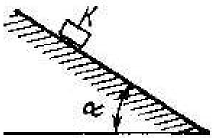
$$mv_1^2/2 - m \cdot 0^2/2 = 2/3 \cdot F_{\max} l ,$$

звідки $v_1 = 2\sqrt{F_{\max} s/(3m)}$.

Відповідь: $v_1 = 2\sqrt{F_{\max} s/(3m)}$.

ЗАДАЧІ

3.1.6.1



Тіло *K* знаходиться у спокої на шорсткій похилій площині з кутом нахилу до горизонту α. Коефіцієнт тертя спокою $f_0 > \mathrm{tg}\alpha$. В деякий момент тілу надали початкову швидкість V_0, спрямовану уздовж площини донизу.

Визначити шлях *s*, який пройде тіло до зупинки, якщо коефіцієнт тертя руху дорівнює *f*.

3.1.6.2

По похилій площині, яка становить кут 30° до горизонту, спускається без початкової швидкості важке тіло; коефіцієнт тертя дорівнює 0,1.

Яку швидкість матиме тіло після проходження відстані 2 м від початку руху?

3.1.6.3

Снаряд маси 24 кг вилітає з двометрового ствола знаряддя зі швидкістю 500 м/с.

Визначити середнє значення сили тиску газів на снаряд.

3.1.6.4

Визначити коефіцієнт тертя ковзання бруса, який рухається з початковою швидкістю V_0 по горизонтальній шорсткій площині, проходячи до зупинки відстань *s*.

3.1.6.5

Визначити масу молотка, який вбиває цвях у стіну, якщо при кожному ударі цвях зі швидкістю 1,25 м/с заглиблюється в стіну на 1,5 мм, а сила опору при цьому становить 700 Н.

3.1.6.6

Метеорит масою 39 кг упав на Землю, занурившись у ґрунт на 1,875 м. Встановлено, що опір ґрунту становить 0,5 МН.

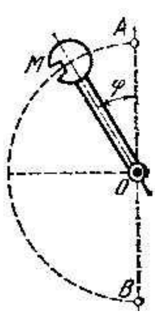
З якою швидкістю метеорит досяг поверхні Землі?

3.1.6.7

Потяг масою 500 т рухається з вимкненим двигуном. Сила опору при цьому становить $R = (7650 + 500V)$, Н.

Визначити, яку відстань проїде потяг до зупинки, якщо початкова його швидкість дорівнює 15 м/с.

3.1.6.8



Головна частина установки для випробування матеріалів ударом являє собою важку стальну відливку *M*, прикріплену до стрижня $OM = 981$ мм, який здатний обертатися майже без тертя навколо нерухомої горизонтальної осі *O*.

Нехтуючи масою стрижня і розмірами тіла *M*, визначити швидкість відливки *M* в нижньому положенні *B*, якщо вона падає з верхнього положення *A* з незначною початковою швидкістю.

3.1.6.9

Пружина має в ненапруженому стані довжину 200 мм. Сила, здатна змінити довжину пружини на 10 мм, становить 1,96 Н.

З якою швидкістю вилетить з горизонтальної трубки кулька масою 30 г, якщо пружину на початку стиснути на 100 мм.

3.1.6.10

Матеріальна точка масою m здійснює прямолінійні коливання за законом $x = a \cdot \sin(kt + \beta)$.

Нехтуючи силами опору, побудувати графік зміни кінетичної енергії T точки в залежності від координати x, якщо початкова швидкість точки дорівнювала нулю.

3.1.6.11

Тіло кинуто з поверхні Землі вертикально вгору зі швидкістю 1 км/с.

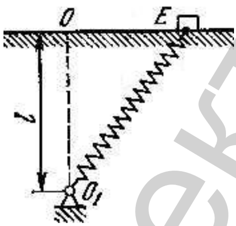
Визначити висоту H підйому тіла. Радіус Землі 6370 км.

3.1.6.12

Шахтний ліфт масою 6 т спускається зі швидкістю 12 м/с.

Яку силу тертя між ліфтом і стінками повинен мати запобіжний пристрій, здатний зупинити ліфт після проходження ним шляху 10 м у разі переривання троса ліфтової кабіни. Силу тертя вважати незмінною.

3.1.6.13*



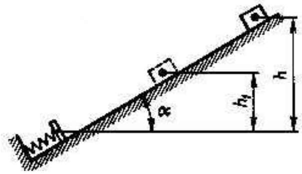
Тіло E маси m знаходиться на гладкій горизонтальній площині. До тіла прикріплена пружина жорсткості c, інший кінець якої прикріплений до шарніра O_1. Довжина недеформованої пружини дорівнює l_0. Відстань $OO_1 = l$. В початковий момент тіло E відхилене від положення рівноваги O на величину $OE = a$ і відпущене без початкової швидкості.

Визначити швидкість тіла в момент проходження ним положення рівноваги.

3.1.6.14*

Кільце масою 200 г ковзає по дроту в формі параболи $y = x^2$. Кільце почало рухатися з положення (3; 9) м. Початкова швидкість дорівнює нулю.

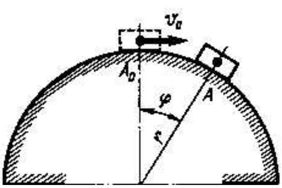
Визначити швидкість кільця і силу тиску кільця на дріт у момент проходження нижньої точки параболи.



3.1.6.15

Брусок спускається без початкової швидкості з висоти h по похилій площині з коефіцієнтом тертя f; потім, ударившись об пружину, тіло піднімається на висоту h_1.

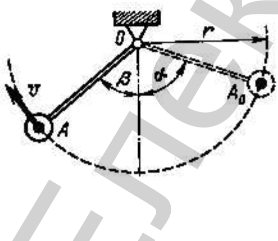
Визначити відношення h_1/h.



3.1.6.16*

Брусок масою m, який знаходиться в положенні A_0 на гладкій півкулі радіусом r, отримав початкову швидкість V_0.

На якому куті φ брусок залишить півкулю? Чому дорівнює цей кут для нескінченно малої швидкості V_0?

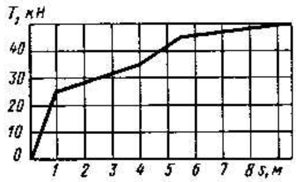


3.1.6.17

Вантаж A, прикріплений до тонкого невагомого стрижня, який обертається навколо осі O, відхилений від вертикалі на кут α і відпущений без початкової швидкості.

Визначити швидкість вантажу в момент, коли стрижень, пройшовши найнижче положення, утворить з вертикаллю кут β.

3.1.6.18



Визначити швидкість зльоту ракети масою 1,2 т із похилих напрямних, розташованих під кутом α до горизонту і довжиною 9,5 м, якщо сила тяги T ракетного двигуна змінюється відповідно до наведеного графіка. Коефіцієнт тертя між головними повзунами ракети і напрямними дорівнює 0,18.

3.1.6.19

Визначити *II* космічну швидкість, а саме найменшу швидкість, яку необхідно надати об'єкту (наприклад, космічному літальному апарату), для подолання гравітаційного поля Землі. Вважається, що після надання тілу цієї швидкості воно не отримує негравітаційного прискорення (двигун вимкнений, атмосфера відсутня). Радіус Землі дорівнює 6370 км.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається кінетичною енергією матеріальної точки?

2 Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі.

3 Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі.

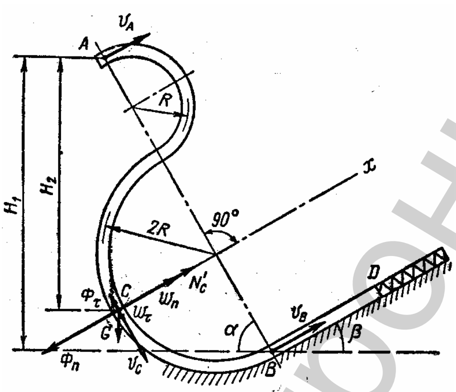
4 Для яких типів задач слід використовувати теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки?

3.1.7 Змішані задачі

Змішаними задачами динаміки матеріальної точки називаються задачі, для розв’язання яких необхідно застосовувати комбінації загальних теорем динаміки матеріальної точки: теореми про зміну кількості руху, моменту кількості руху, кінетичної енергії.

Доцільним є розв’язання змішаних задач динаміки матеріальної точки шляхом почергового розгляду руху точки на окремих ділянках траєкторії.

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



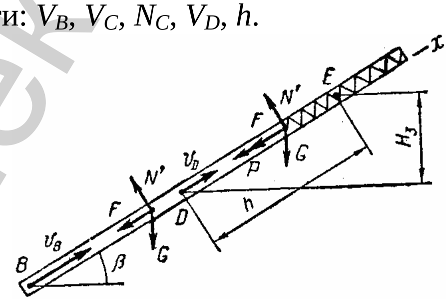
Задача 3.1.7

Куля, яку беруть за матеріальну точку, рухається з положення *A* всередині трубки у вертикальній площині.

Знайти швидкість кулі в положеннях *B* і *C*, а також тиск кулі на стінку в положенні *C*. Тертям на криволінійних ділянках знехтувати.

m = 0,5 кг; V_A = 0,8 м/с; τ_{BD} = 0,1с; R = 0,2 м; f = 0,1; α = 60°; β = 30°; c = 1000 Н/м.

Визначити: V_B, V_C, N_C, V_D, h.



Розв'язання

Для визначення швидкостей V_B і V_C застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки. Рух кулі на ділянках AC і AB траєкторії здійснюється під дією сили тяжіння $\vec{G}$.

$$\frac{mV_B^2}{2}-\frac{mV_A^2}{2}=\sum A\left(\overrightarrow{F_k}\right)=G\cdot H_1=mg\cdot AB\cdot\sin\alpha=6mgR\sin\alpha;$$

$$V_B^2-V_A^2=12gR\sin\alpha;\; V_B=\sqrt{V_A^2+12gR\sin\alpha}=4{,}59\,(м/с);$$

$$\frac{mV_C^2}{2}-\frac{mV_A^2}{2}=G\cdot H_2=mg\left(4R\sin\alpha+2R\cos\alpha\right);$$

$$V_C^2-V_A^2=4gR\left(2\sin\alpha+\cos\alpha\right);$$

$$V_C=\sqrt{V_A^2+4gR\left(2\sin\alpha+\cos\alpha\right)}=4{,}26\,(м/с).$$

Визначаємо тиск кулі на стінку в положенні C. Відповідно до принципу Д'Аламбера для матеріальної точки, геометрична сума активних сил, реакцій зв'язків і сили інерції точки дорівнює нулю: $\vec{G}+\vec{N}_C^{/}+\vec{\Phi}=0$. Силу інерції матеріальної точки можна розкласти на нормальну і тангенціальну складові: $\vec{\Phi}=\vec{\Phi}_n+\vec{\Phi}_\tau$. Сума проекцій сил $\vec{G}$, $\vec{N}_C^{/}$ і $\vec{\Phi}$ на вісь x має дорівнювати нулю: $N_C^{/}-G\cos\alpha-\Phi_n=0$. Звідси $N_C^{/}=G\cos\alpha+\Phi_n=m\left(g\cos\alpha+0{,}5V_C^2/R\right)=25{,}2\,(H)$. Тиск N_C кулі на стінку трубки за модулем дорівнює знайденій реакції $N_C^{/}$ і спрямований у протилежний бік.

Швидкість кулі в положенні D знайдемо, застосувавши на ділянці BD теорему про зміну кількості руху матеріальної точки: $mV_{Dx}-mV_{Bx}=\sum S_x\left(\overrightarrow{F_k}\right)$.

До точки прикладені сили $\vec{G}$, $\overrightarrow{N^{/}}$, $F_{тр}=fN^{/}=fmg\cos\alpha$. Оскільки $V_{Dx}=V_D$, $V_{Bx}=V_B$, а також

$$\sum S_x\left(\overrightarrow{F_k}\right)=-G\sin\beta\cdot\tau_{BD}-F_{тр}\cdot\tau_{BD}=-mg\tau_{BD}\left(\sin\beta+f\cos\beta\right),$$

отримаємо: $mV_D - mV_B = -mg\tau_{BD}(\sin\beta + f\cos\beta)$, звідки

$$V_D = V_B - g\tau_{BD}(\sin\beta + f\cos\beta) = 4{,}01(м/с).$$

Для визначення максимального стискання h пружини застосуємо на ділянці DE теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки:

$$\frac{mV_E^2}{2} - \frac{mV_D^2}{2} = \sum A(\overrightarrow{F_k}) = -G \cdot H_3 - F_{тр} \cdot h - \frac{ch^2}{2} =$$

$$= -mgh\sin\beta - fmgh\cos\beta - \frac{ch^2}{2}.$$

Враховуючи, що $V_E = 0$, отримаємо квадратне рівняння

$$h^2 + \frac{mg(\sin\beta + f\cos\beta)}{c}h - \frac{mV_D^2}{c} = 0,$$

розв'язки якого

$$h = -\frac{mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{c} \pm \sqrt{\left[\frac{mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{c}\right]^2 + \frac{mV_D^2}{c}} =$$

$$= -0{,}003 \pm 0{,}090\,(м).$$

Беремо за шукану величину додатне значення кореня рівняння: $h = -0{,}003 + 0{,}090 = 0{,}087$ (м).

Відповідь: $V_B = 4{,}59\ м/с$; $V_C = 4{,}26\ м/с$; $N_C = 25{,}2\,H$; $h = 0{,}087$ м.

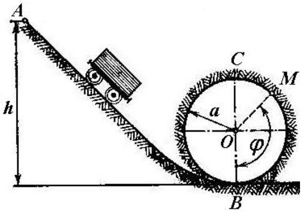
ЗАДАЧІ

3.1.7.1

Вантаж масою 1 кг підвішений на нитці довжиною 0,5 м, інший кінець якої прикріплений у точці *O*. В початковий момент вантаж відхилили на кут 60°, надавши швидкість 2,1 м/с.

Визначити силу натягу нитки в найнижчому положенні. На яку висоту підніметься точка відносно найнижчого положення? Якою повинна бути початкова швидкість, щоб вантаж зміг здійснити рух по замкнутому колу?

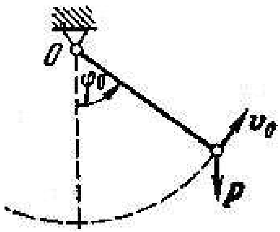
3.1.7.2



По рейках *ABC*, які є прямолінійними на ділянці *AB* та коловими на ділянці *BC* з радіусом *a*, знаходиться валізка масою *m*.

З якої висоти *h* необхідно пустити валізку без початкової швидкості, щоб вона змогла проїхати увесь шлях по замкнутому колу, не відриваючись від рейок?

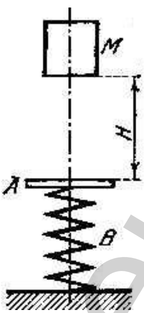
3.1.7.3



Важка відливка масою *m* прикріплена до стрижня довжиною *l*, який здатен обертатися без тертя навколо нерухомої осі *O*. Початкове відхилення від вертикалі дорівнює φ_0.

Визначити зусилля в стрижні як функцію кута φ відхилення стрижня від вертикалі, нехтуючи масою стрижня.

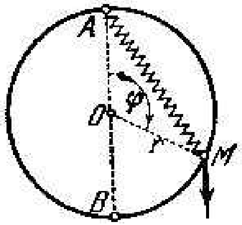
3.1.7.4



Вантаж *M* вагою *P* падає без початкової швидкості з висоти *H* на плиту *A*, яка лежить на спіральній пружині *B*. Від дії вантажу *M*, який впав, пружина стискається на величину *h*.

Не враховуючи ваги плити *A* і сил опору, визначити час *T* стискання пружини, а також імпульс *S* сили пружності за цей час.

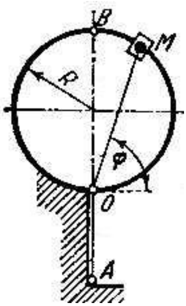
3.1.7.5



Вантаж M масою 5 кг, підвішений на пружині до верхньої точки круглого кільця радіусом $r = 0{,}2$ м, розташованого у вертикальній площині, падає, ковзаючи по кільцю без тертя.

Знайти, якою повинна бути жорсткість пружини, щоб тиск вантажу на кільце в нижній точці B дорівнював нулю. Відомо, що початкова довжина недеформованої пружини $AM = 200$ мм. Початкова швидкість вантажу дорівнює нулю. Масою пружини знехтувати.

3.1.7.6

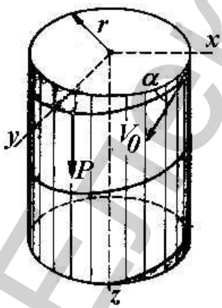


Кільце M вагою Q ковзає по дузі кола радіусом R, розташованої у вертикальній площині. До кільця прив’язана пружна нитка MOA з без початкової деформації (коли точка M знаходилася в точці O) та жорсткістю c.

У початковий момент кільце знаходиться в точці B і отримує як завгодно малий поштовх вправо.

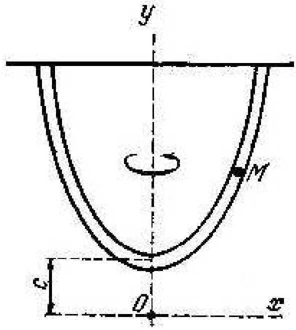
Знайти тиск точки M на кільце.

3.1.7.7*



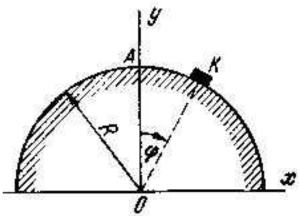
Точка M масою m рухається по внутрішній поверхні круглого циліндра радіусом r з вертикальною віссю z.

Визначити силу тиску точки на циліндр. Початкова швидкість точки V_0 складає кут α з горизонтальною площиною Oxy.



3.1.7.8*

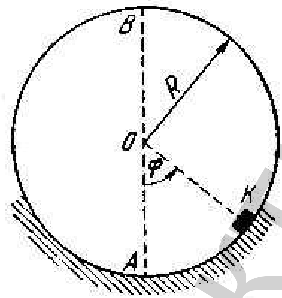
У формі якої плоскої кривої слід зігнути трубку, щоб кулька, яка знаходиться всередині, знаходилася у відносному спокої (оберталася разом з трубкою навколо осі *y* з частотою ω).



3.1.7.9*

Тіло *K* розміщене у верхній точці *A* нерухомого напівциліндра радіусом *R*.

Яку початкову горизонтальну швидкість V_0 необхідно надати тілу, щоб воно після початку руху зупинилося на циліндричній поверхні? Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює *f*.



3.1.7.10*

Тіло *K* розміщене у нижній точці *A* нерухомого шорсткого циліндра радіусом *R*.

Яку початкову горизонтальну швидкість V_0 необхідно надати тілу, щоб воно досягла верхньої точки *B*? Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює *f*.

3.1.7.11*

Кільцю, надітому на горизонтально розміщений дріт у формі круглого кільця радіусом *a*, надали швидкість V_0. Коефіцієнт тертя кільця об кільце дорівнює *f*.

Визначити час руху кільця до зупинки.

3.1.7.12

Конічний маятник довжиною *l* описує в горизонтальній площині коло радіусом *a*.

Визначити період обертання маятника.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Комбінації яких теорем використовуються під час розв’язання змішаних задач динаміки матеріальної точки?

2 При застосуванні яких теорем розбиття траєкторії точки на ділянки не обов’язкове?

3 Комбінацію яких теорем слід застосувати, якщо за відомим переміщенням і початковою швидкістю матеріальної точки необхідно визначити час руху точки під дією системи сил, незмінних у часі?

3.1.8 Відносний рух точки

У випадку, коли необхідно дослідити рух матеріальної точки в неінерціальній системі відліку, застосовують *основне рівняння відносного руху*

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_c, \qquad (3.28)$$

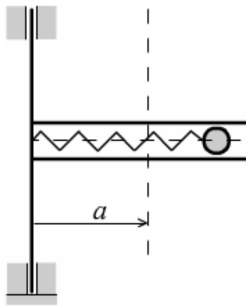
відповідно до якого *добуток маси точки на вектор її прискорення дорівнює геометричній сумі рівнодійної усіх сил, прикладених до точки (з урахуванням реакцій зв’язків), і переносної та коріолісової сил інерції*. Останні визначаються як

$$\overline{\Phi}_e = -m\overline{a}_e; \qquad (3.29)$$

$$\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}_c = -2m\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r. \qquad (3.30)$$

Інтегрування рівняння (3.28) дозволяє визначити параметри відносного руху (переміщення, швидкість тощо).

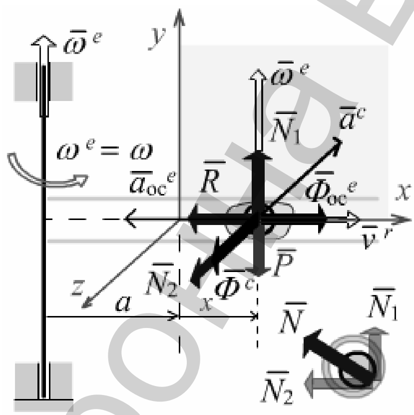
ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 3.1.8

Кулька масою *m*, прикріплена до кінця пружини з коефіцієнтом жорсткості *c*, знаходиться всередині трубки на відстані *a* від вертикальної осі.

Визначити відносний рух кульки, якщо трубка обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega < \sqrt{c/m}$.



Розв’язання

Обираємо як об’єкт руху кульку, вважаючи її матеріальною точкою. Відкидаємо зв’язки (трубку і пружину), замінюючи їх реакціями (сила пружності $\overline{R}$, модуль якої $R = cx$, і нормальні реакції $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$). Додаємо активні сили (сила тяжіння $\overline{P}$). Вводимо рухому систему відліку xyz, жорстко пов’язану з трубкою з центром в початковому положенні (на відстань a від осі). Складаємо рівняння відносного руху матеріальної точки: $ma^r = \overline{P} + \overline{R} + \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{\Phi}^e + \overline{\Phi}^c$, де $\overline{\Phi}^e = -m\overline{a}^e$ – переносна сила інерції; $\overline{\Phi}^c = -m\overline{a}^c = -2m\overline{\omega}^e \times \overline{v}^r$

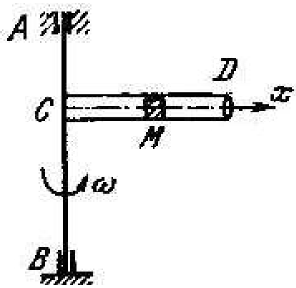
– коріолісова сила інерції. Тут $\overline{\omega}^e$ – вектор кутової швидкості переносного руху (обертання трубки навколо осі), $\overline{v}^r$ – вектор лінійної відносної швидкості кульки.

Визначимо модуль переносного прискорення і відповідну силу інерції: $a^e = a^e_{oc} = \omega^2(a+x)$; $\Phi^e_{oc} = m\omega^2(a+x)$. Модуль прискорення Коріоліса і відповідна сила інерції дорівнюють: $a^c = 2\omega^e v^r \sin 90^\circ = 2\omega\dot{x}$ і $\Phi^c = 2m\omega\dot{x}$. Рівняння відносного руху в проекції на вісь x набирає такого вигляду: $m\ddot{x} = -cx + m\omega^2(a+x)$. У канонічній формі маємо: $\ddot{x} + (k^2 - \omega^2)x = a\omega^2$, де $k = \sqrt{c/m}$ – власна частота коливань маси m на пружині жорсткістю c. Оскільки за умови задачі $k^2 - \omega^2 > 0$, загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку $x = C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t + a\omega^2 / k_1^2$, де $k_1 = \sqrt{k^2 - \omega^2}$ – частота коливань маси на пружині при обертовому рухові трубки. Константу C_2 визначимо з початкової умови: при $t = 0$ $\dot{x} = 0$, звідки $C_2 = 0$. Тоді $x = C_1 \cos k_1 t + a\omega^2 / k_1^2$. Константу C_1 визначимо з початкової умови: при $t = 0$ $x = 0$, звідки $C_1 = -a\omega^2 / k_1^2$. Таким чином, закон руху кульки набирає вигляду $x = 2a\omega^2 / k_1^2 \sin^2(k_1 t / 2)$.

Відповідь: $x = 2a\omega^2 / k_1^2 \sin^2(k_1 t / 2)$.

ЗАДАЧІ

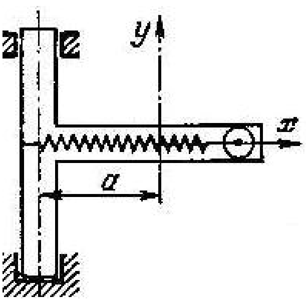
3.1.8.1



Горизонтальна трубка *CD* рівномірно обертається навколо осі *AB* з кутовою швидкістю *ω*. Всередині трубки знаходиться тіло *M*.

Визначити швидкість *V* тіла відносно трубки в момент його вильоту, якщо в початковий момент $V = 0$; $x = x_0$. Довжина трубки *L*. Тертям знехтувати. Визначити час руху тіла в трубці.

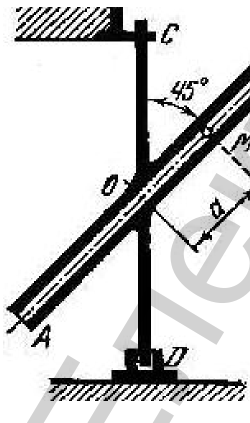
3.1.8.2*



Кулька масою *m*, прикріплена до кінця горизонтальної пружини жорсткістю *c*, знаходиться в положенні рівноваги в трубці на відстані *a* від вертикальної осі.

Визначити відносний рух кульки під час обертання трубки зі сталою кутовою швидкістю *ω*.

3.1.8.3



Трубка *AB* обертається зі сталою кутовою швидкістю *ω* навколо вертикальної осі *CD*, становлячи з нею кут 45°. У трубці знаходиться важка кулька *M*.

Визначити відносний рух кульки, якщо початкова швидкість дорівнює нулю, а початкова відстань $OM = a$. Тертям знехтувати.

3.1.8.4*

Визначити, як змінюється прискорення вільного падіння в залежності від широти місця φ внаслідок обертання Землі навколо власної осі. Радіус Землі 6370 км.

3.1.8.5

У скільки разів треба збільшити кутову швидкість обертання Землі навколо власної осі, щоб важка точка, яка знаходиться на її поверхні на екваторі, мала б нульову вагу?

3.1.8.6

Важка точка здатна рухатися без тертя по вертикальному кільцю радіусом R, яке обертається навколо власного діаметра зі сталою кутовою швидкістю ω.

Знайти положення відносної рівноваги точки і визначити її рух у разі отримання у цьому стані відносної швидкості V_0, напрямленої в бік підйому.

3.1.8.7

Пружинний вібродатчик використовується для вимірювання вертикального прискорення потяга, кутова частота коливань якого дорівнює 10 рад/с. База приладу становить одне ціле з корпусом одного з вагонів. До бази приладу кріпиться пружина з коефіцієнтом жорсткості 17,64 кН/м. До пружини прикріплений вантаж маси 1,75 кг. Амплітуда відносного руху вантажу вібродатчика дорівнює 1,25 мм за результатами запису приладу. Знайти максимальне вертикальне прискорення потяга. Визначити амплітуду вібрацій потяга.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається переносною силою інерції?

2 Що називається силою інерції Коріоліса? У яких випадках вона дорівнює нулю?

3 Сформулюйте основний закон відносного руху матеріальної точки.

3.2 Динаміка механічної системи

3.2.1 Теорема про рух центра мас

Під час розв’язання задач динаміки механічної системи доцільно поділяти усі сили на зовнішні та внутрішні:

а) *зовнішніми* називають сили, які діють на точки механічної системи з боку матеріальних об’єктів, які не входять до даної системи;

б) *внутрішніми* називають сили, які діють на точки механічної системи з боку матеріальних об’єктів, які входять до даної системи.

Зовнішні сили $\overline{F}^{e}$ позначають індексом «*e*» (від англ. «exterior»). Внутрішні сили $\overline{F}^{i}$ позначають індексом «*i*» (від англ. «interior»).

Проведена класифікація дозволяє спрощувати задачу про дослідження динаміки механічної системи, оскільки внутрішні сили володіють такими властивостями: *головний вектор і головний момент усіх внутрішніх сил системи відносно будь-якого центра дорівнюють нулю*:

$$\begin{cases} \sum \overline{F}_k^{\,i} = 0; \\ \sum \overline{m}_O\left(\overline{F}_k^{\,i}\right) = 0. \end{cases} \qquad (3.31)$$

При дослідженні поступального руху механічної системи достатньо визначити закон і параметри руху однієї з точок системи. За таку точку зручно обирати центр мас, для визначення прискорення якого застосовують *теорему про рух центра мас механічної системи*

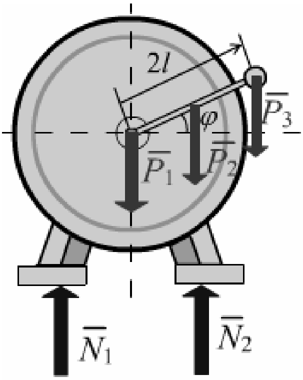
$$M\,\overline{a}_C = \sum \overline{F}_k^{\,e}, \qquad (3.32)$$

яка формулюється таким чином: *добуток маси механічної системи на прискорення її центра мас дорівнює головному вектору усіх зовнішніх сил, які діють на дану механічну систему*.

У проекціях на осі декартової системи координат теорема про рух центра мас записується таким чином:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e; \\ M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e; \\ M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e. \end{cases} \quad (3.33)$$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 3.2.1

Електродвигун масою M_1 встановлений на гладкому горизонтальному фундаменті без кріплень. На валу двигуна під прямим кутом закріплений однорідний стрижень довжиною $2l$ і масою M_2, на кінці якого насаджений точковий вантаж масою M_3. Кутова швидкість обертання вала ω.

Визначити горизонтальний рух двигуна $x = x(t)$.

Розв'язання

Обираємо за об'єкт руху механічну систему, яка складається з електродвигуна M_1, стрижня M_2 і вантажу M_2. Відкидаємо зв'язки (фундамент), замінюючи їх реакціями (нормальні реакції $\overline{N}_1$,$\overline{N}_2$). Додаємо активні сили (сили тяжіння $\overline{P}_1 = M_1\overline{g}$, $\overline{P}_2 = M_2\overline{g}$, $\overline{P}_3 = M_3\overline{g}$). Записуємо теорему про рух центру мас механічної системи: $M\overline{a}_C = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{N}_1 + \overline{N}_2$, де $M = M_1 + M_2 + M_3$ – маса системи, $\overline{a}_C$ – прискорення центра мас. Вибираємо систему координат з початком в центрі вала двигуна. В проекції на вісь x отримаємо: $M\ddot{x}_C = 0$, звідки $M\dot{x}_C = const$. Оскільки проекція початкової швидкості на вісь x дорівнює нулю, то $M\dot{x}_C = 0$. Звідси $Mx_C = const$ – закон збереження центра мас механічної

системи. У початковий момент часу ($t = 0$) $M x_C = M_2 \cdot l + M_3 \cdot 2l$.
У поточний момент часу t маємо

$$M x_C = M_1 \cdot x + M_2 \cdot (x + l\cos\varphi) + M_3 \cdot (x + 2l\cos\varphi),$$

де $\varphi = \omega t$ – кут обертання вала двигуна. Таким чином,

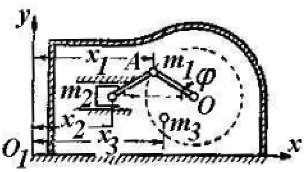
$$M_1 \cdot x + M_2 \cdot (x + l\cos\varphi) + M_3 \cdot (x + 2l\cos\varphi) = M_2 \cdot l + M_3 \cdot 2l.$$

У результаті $x = l(1 - \cos\omega t)(M_2 + 2M_3)/(M_1 + M_2 + M_3)$. Таким чином, двигун здійснює коливання з періодом $2\pi/\omega$.

Відповідь: $x = l(1 - \cos\omega t)(M_2 + 2M_3)/(M_1 + M_2 + M_3)$.

ЗАДАЧІ

3.2.1.1



Поршневий двигун встановлений без кріплень на горизонтальному фундаменті. Кривошип обертається зі сталою кутовою швидкістю *ω*.

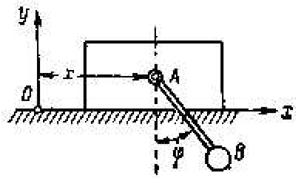
Визначити горизонтальний рух корпуса двигуна, якщо маси рухомих частин m_1 і m_2, зосереджених відповідно в пальці кривошипа і в центрі поршня. Маса корпуса m_3. В початковий момент поршень займав крайнє ліве положення.

Довжина шатуна дорівнює довжині кривошипа; $OA = r$.

3.2.1.2

На нерухомій неприв'язаній шлюпці вагою P знаходяться дві людини вагою P_1 і P_2. Що відбудеться зі шлюпкою, якщо перша людина переміститься у напрямку корми на відстань l_1, а друга – на відстань l_2 в інший бік?

3.2.1.3



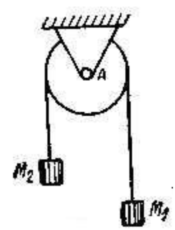
Еліптичний маятник складається з тіла A масою m_1, здатного переміщуватися поступально по гладкій горизонтальній площині, і вантажу B масою m_2, зв'язаного з тілом A стрижнем довжиною l. В початковий момент стрижень відхилили на кут φ_0 і відпустили без початкової швидкості.

Нехтуючи вагою стрижня, визначити зміщення тіла A в залежності від кута φ.

3.2.1.4

Однорідний прямий конус висотою h з кутом 2α при вершині поставлений вершиною на гладку горизонтальну площину.

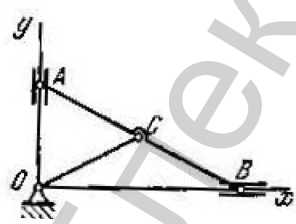
Знайти відстань s, на яку зміститься вершина конуса до моменту його падіння на площину.



3.2.1.5

Вантажі M_1 і M_2 вагою P_1 і P_2 ($P_1 > P_2$) підвішені до кінців троса, перекинутого через невагомий блок A, рухаючись із прискоренням a.

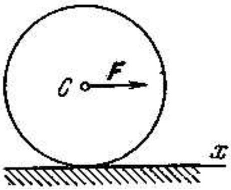
Визначити тиск блока на вісь.



3.2.1.6

Визначити головний вектор зовнішніх сил, прикладених до лінійки еліпсографа AB масою M. Кривошип OC обертається зі сталою кутовою швидкістю ω; $OC = AC = BC = l$.

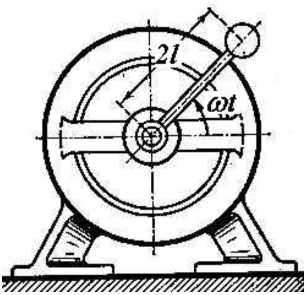
3.2.1.7



Колесо котиться з ковзанням по горизонтальній прямій під дією горизонтальної сили F.

Знайти закон руху центра мас C колеса, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f, а сила $F = 5fP$, де P – вага колеса. В початковий момент колесо знаходиться у стані спокою.

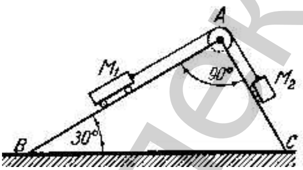
3.2.1.8



Електродвигун масою M_1 встановлений без кріплень на гладкому горизонтальному фундаменті. На валу двигуна під прямим кутом закріплений одним кінцем однорідний стрижень довжиною $2l$ масою M_2, на інший кінець якого насаджений вантаж масою M_3. Кутова швидкість вала дорівнює ω.

Визначити кутову швидкість ω, для якої електродвигун підстрибуватиме над фундаментом, а також найбільше горизонтальне зусилля R, яке діятиме на болти у разі закріплення двигуна.

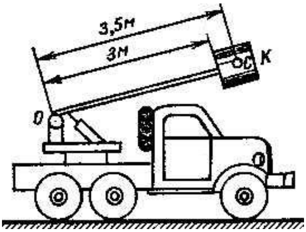
3.2.1.9



Два вантажі масою M_1 і M_2 з’єднані нерозтяжною ниткою, перекинутою через блок A.

Знайти переміщення гладкого клина масою M по горизонтальній площині при опусканні вантажу M_1 на висоту 10 см. Масою нитки і блока знехтувати; $M = 4M_1 = 16M_2$.

3.2.1.10



Рухомий поворотний кран для ремонту вуличної електромережі встановлений на незагальмованому автомобілі масою 1 т, який знаходиться в стані спокою.

Нехтуючи тертям, визначити переміщення автомобіля після повороту крана *OK* масою 100 кг на кут 60°. Маса люльки *C* становить 200 кг.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Які сили називаються внутрішніми?

2 Сформулюйте дві основні властивості внутрішніх сил.

3 Які сили називаються зовнішніми?

4 Що називається масою механічної системи?

5 Сформулюйте теорему про рух центра мас механічної системи.

6 Для яких типів задач динаміки використовується теорема про рух центра мас?

7 У яких випадках справедливий закон збереження центра мас механічної системи?

3.2.2 Теорема про зміну кількості руху механічної системи

Кількістю руху механічної системи називається векторна величина, яка дорівнює геометричній сумі кількостей рухів усіх точок системи:

$$\overline{Q} = \sum m_k \bar{v}_k . \qquad (3.34)$$

Вектор кількості руху системи, який прикладений до центра мас, можна визначати як добуток маси системи і швидкості її центра мас:

$$\overline{Q} = M\bar{v}_C. \tag{3.35}$$

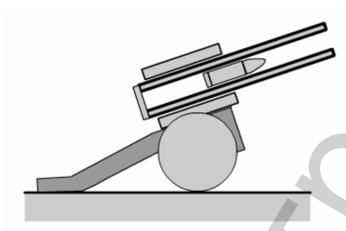
Теорема про зміну кількості руху механічної системи формулюється таким чином: *зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює сумі імпульсів усіх зовнішніх сил, прикладених до системи, за той самий проміжок часу*:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}\left(\overline{F}_k^{\,e}\right). \tag{3.36}$$

У проекціях на осі декартової системи координат останнє рівняння набирає вигляду

$$\begin{cases} Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_x\left(\overline{F}_k^{\,e}\right); \\ Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_y\left(\overline{F}_k^{\,e}\right); \\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_z\left(\overline{F}_k^{\,e}\right). \end{cases} \tag{3.37}$$

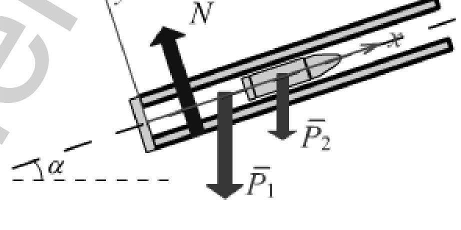
ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 3.2.2

Визначити швидкість v_1 вільного відкату ствола знаряддя під час вильоту.

Маса ствола знаряддя становить $M_1 = 11$ т. Маса снаряда $M_2 = 54$ кг. Швидкість снаряда біля дулового зрізу $v_2 = 900$ м/с.



Розв'язання

Обираємо за об'єкт руху механічну систему, яка складається зі ствола M_1 і снаряда M_2. Відкидаємо зв'язки (лафет), замінюючи їх реакціями (нормальна реакція). Додаємо активні сили (сили тяжіння $\overline{P_1}$ і $\overline{P_2}$). Записуємо теорему про зміну кількості руху механічної системи:

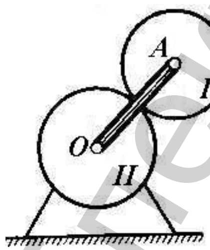
$$\overline{Q_1} - \overline{Q_0} = \overline{S}\left(\overline{P_1}\right) + \overline{S}\left(\overline{P_2}\right) + \overline{S}\left(\overline{N}\right),$$

де $\overline{Q_0}$ і $\overline{Q_1}$ – кількості руху механічної системи у початковий та розрахунковий моменти часу; $\overline{S}\left(\overline{P_1}\right)$, $\overline{S}\left(\overline{P_2}\right)$, $\overline{S}\left(\overline{N}\right)$ – імпульси сил тяжіння і нормальної реакції. В проекції на вісь x отримаємо $Q_1 - Q_0 = -P_1 t \sin\alpha - P_2 t \sin\alpha = -\left(P_1 + P_1\right) t \sin\alpha$. Для достатньо малого значення часу вильоту t $Q_1 - Q_0 \approx 0$ – теорема про збереження кількості руху механічної системи ($Q = const$). Оскільки $Q_0 = 0$, то також $Q_1 = 0$. Але $Q_1 = M_1 v_1 + M_2 v_2$. Таким чином, $v_1 = -v_2 M_2 / M_1 = -900 \cdot 54 / \left(11 \cdot 10^3\right) = -4{,}4$ (м/с). Знак «–» вказує на те, що швидкість при відкаті спрямована в бік, протилежний руху снаряда.

Відповідь: $v_1 = -4{,}4$ м/с.

ЗАДАЧІ

3.2.2.1



Сателіт I радіусом r і вагою P_1 котиться по нерухомій шестерні II з тим самим радіусом за допомогою кривошипа OA вагою P_2, який обертається з кутовою швидкістю ω_0.

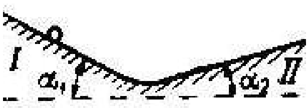
Визначити кількість руху системи, вважаючи кривошип однорідним стрижнем.

3.2.2.2

Тілу, яке знаходиться на похилій площині під кутом 45° до горизонту, надана початкова швидкість 9,81 м/с, напрямлена в бік підйому.

Визначити час руху тіла до зупинки, якщо коефіцієнт тертя дорівнює 0,2.

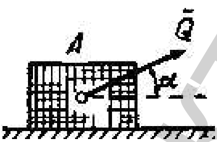
3.2.2.3



Важка точка поміщена на похилу площину *I* з кутом α_1 до горизонту і відпускається без початкової швидкості. Після досягнення точкою найнижчого положення вона піднімається угору по похилій площині *II* з кутом α_2 до горизонту.

Визначити час підйому t_2, якщо відомий час спуску t_1. Тертям знехтувати.

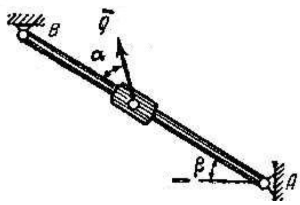
3.2.2.4



Тіло *A* масою 9,81 кг переміщується по горизонтальній площині під дією сталої сили *Q*, яка утворює з площиною кут 30°.

Визначити значення сили *Q*, якщо за час 5 с швидкість точки зросла від 2 м/с до 4 м/с, а коефіцієнт тертя становить 0,15. Під яким кутом α до горизонту необхідно прикласти силу *Q*, щоб вона була мінімальною? Яким при цьому є значення сили *Q*?

3.2.2.5



Повзун масою 19,62 кг рухається уздовж стрижня *AB*, розміщеного під кутом $\beta = 30°$ до горизонту, під дією сили Q = 700 Н, яка утворює кут $\alpha = 45°$ з віссю стрижня.

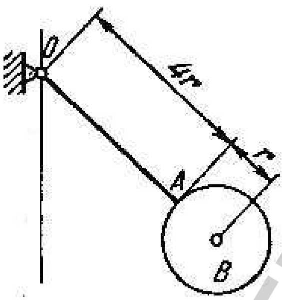
Визначити час, протягом якого швидкість повзуна збільшиться на 2 м/с, якщо коефіцієнт тертя f = 0,2.

3.2.2.6

У човні вагою G, який знаходиться у стані спокою, стоїть людина вагою P.

З якою швидкістю V буде переміщуватися човен, якщо людина почне рухатися по ньому з відносною швидкістю u? Опором води знехтувати.

3.2.2.7

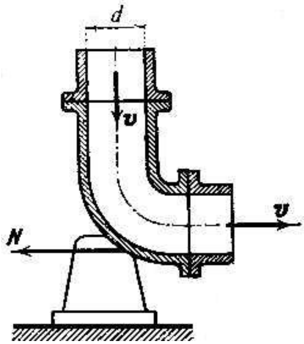


Визначити головний вектор кількостей руху маятника, який складається з однорідного стрижня *OA* масою M_1 і довжиною $4r$, та однорідного диска *B* масою M_2 і радіусом r, якщо кутова швидкість маятника в даний момент дорівнює ω.

3.2.2.8

Снаряд маси 12 кг, який летів зі швидкістю 15 м/с, розірвався в повітрі на дві частини. Швидкість осколка маси 8 кг зросла в напрямку руху до 25 м/с.

Визначити швидкість другого осколка.



3.2.2.9*

Визначити горизонтальну силу тиску[1)] N води на опору коліна труби діаметром 300 мм, по якій тече вода зі швидкістю 2 м/с.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається кількістю руху механічної системи?

2 Як можна визначити кількість руху механічної системи за відомими її масою системи і швидкістю центра мас?

3 Сформулюйте теорему про зміну кількості руху механічної системи в інтегральній формі.

4 Для яких типів задач слід використовувати теорему про зміну кількості руху механічної системи?

5 У яких випадках справедливий закон збереження кількості руху механічної системи?

3.2.3 Теорема про зміну кінетичного моменту

Кінетичним моментом механічної системи відносно заданого центра називається векторна величина, яка дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху усіх точок системи відносно даного центра:

$$\overline{K}_O = \sum \overline{m}_O\left(m_k \overline{v}_k\right). \tag{3.38}$$

[1)] Реактивна сила струменя рідини, який рухається зі швидкістю V і масовими втратами $\dot{m}$ визначається за формулою $R = \dot{m}\, V$.

Кінетичний момент твердого тіла відносно заданої осі z можна визначити як добуток момента інерції тіла відносно цієї осі та кутової швидкості обертання тіла:

$$K_z = I_z \omega. \qquad (3.39)$$

Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи формулюється таким чином: *секундна зміна кінетичного моменту механічної системи відносно будь-якого центра в даний момент часу дорівнює моменту рівнодійної усіх зовнішніх сил, прикладених до системи, відносно того самого центра*:

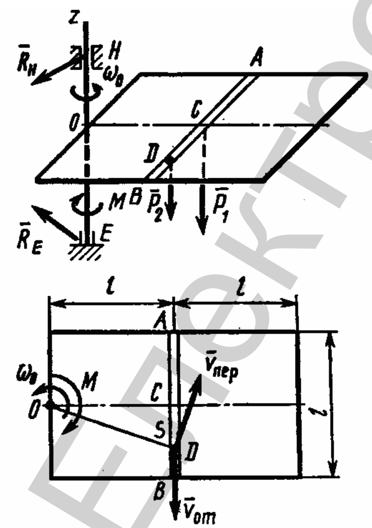
$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \sum \overline{m}_O\left(\overline{F}_k^e\right). \qquad (3.40)$$

У випадку обертання тіла навколо нерухомої осі z останню формулу в проекції на вісь z із застосуванням залежності (3.52) можна переписати у такому вигляді

$$I_z \varepsilon = \sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right), \qquad (3.41)$$

де ε – кутова швидкість обертання тіла.

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 3.2.3

Горизонтальна прямокутна платформа зі сторонами l і $2l$ (l = 0,5 м) масою m_1 = 16 кг обертається з кутовою швидкістю ω_0 = 2 рад/с навколо вертикальної осі z, що віддалена від центра мас C на відстані $OC = l$. В початковий момент часу по жолобу платформи починає рухатися куля D масою m_2 = 10 кг за законом $s = 0{,}4t^2$ (м). На платформу діє пара сил з моментом $M = 6t$ (Н·м). Визначити залежність кутової швидкості обертання платформи від часу.

Розв'язання

Розглянемо механічну систему, яка складається з платформи і кулі (матеріальної точки) D. Для визначення ω застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту системи відносно осі z:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right).$$

На систему діють сили тяжіння $\overrightarrow{P_1}$ і $\overrightarrow{P_2}$, реакції зв'язків $\overrightarrow{R_E}$ і $\overrightarrow{R_H}$, а також момент M. Оскільки сили $\overrightarrow{P_1}$ і $\overrightarrow{P_2}$ паралельні осі z, а реакції $\overrightarrow{R_E}$ і $\overrightarrow{R_H}$ цю вісь перетинають, то їх моменти відносно осі обертання дорівнюють нулю. Враховуючи за додатний напрямок визначення моменту напрямок ω_0, отримаємо

$$\frac{dK_z}{dt} = -6t.$$

Поділивши змінні, після інтегрування $K_z = -3t^2 + C_1$, де C_1 – стала інтегрування. Для даної механічної системи $K_z = K_z^{пл} + K_z^D$, де $K_z^{пл}$ і K_z^D – кінетичні моменти платформи і кулі D відповідно. Оскільки платформа обертається навколо осі z, то $K_z^{пл} = I_z\omega.$ Значення моменту інерції I_z знайдемо за теоремою Гюйгенса $I_z = I_z^/ + m_1 l^2$, де $I_z^/$ – момент інерції платформи відносно осі $z^/$, паралельній осі z (вісь $z^/$ проходить через центр мас C платформи). Як відомо,

$$I_z^/ = \frac{1}{12}m_1\left[(2l)^2 + l^2\right] = \frac{5}{12}m_1 l^2.$$

Тоді

$$I_z = \frac{5}{12}m_1 l^2 + m_1 l^2 = \frac{17}{12}m_1 l^2.$$

Таким чином,

$$K_z^{пл} = \frac{17}{12}m_1 l^2\omega.$$

Для визначення K_z^D розглянемо рух кулі D як складний: рух по платформі є відносним, а обертання платформи навколо осі z є переносним. Абсолютна швидкість кулі $\vec{V}_D = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}$. Оскільки куля рухається за законом $s = 0{,}4t^2$, то $V_{отн} = \dot{s} = 0{,}8t$. Переносна швидкість $V_{пер} = \omega \cdot OD = \omega \cdot \sqrt{l^2 + s^2} = \omega \cdot \sqrt{l^2 + 0{,}16t^4}$. За теоремою Вариньона

$$K_z^D = m_z\left(m_2 \vec{V}_{отн}\right) + m_z\left(m_2 \vec{V}_{пер}\right) = -m_2 V_{отн} \cdot OC + m_2 V_{пер} \cdot OD =$$
$$= -m_2 \cdot 0{,}8t \cdot l + m_2 \cdot \omega \cdot \left(l^2 + 0{,}16t^4\right).$$

Отримаємо

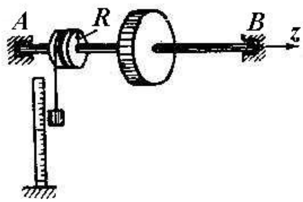
$$K_z = \frac{17}{12} m_1 l^2 \omega - m_2 \cdot 0{,}8t \cdot l + m_2 \cdot \omega \cdot \left(l^2 + 0{,}16t^4\right) = \left(8{,}17 + 1{,}6t^2\right)\omega - 4t.$$

Таким чином, $\left(8{,}17 + 1{,}6t^2\right)\omega - 4t = -3t^2 + C_1$. Сталу інтегрування визначимо з початкової умови: при $t = 0$ $\omega = \omega_{0.}$ Тобто $\left(8{,}17 + 1{,}6 \cdot 0^2\right) \cdot \omega_0 - 4 \cdot 0 = -3 \cdot 0^2 + C_1$, звідки отримуємо $C_1 = 8{,}17\omega_0 = 16{,}34$ (кг·м^2/с). Закон зміни кутової швидкості обертання платформи у часі $\omega(t) = \left(16{,}34 + 4t - 3t^2\right)/\left(8{,}17 + 1{,}6t^4\right)$.

Відповідь: $\omega(t) = \dfrac{16{,}34 + 4t - 3t^2}{8{,}17 + 1{,}6t^4}$.

ЗАДАЧІ

3.2.3.1



У дослідній установці для визначення моментів інерції дослідна деталь закріплюється на шпинделі *AB*, на якому насаджений барабан радіусом *R*. На барабан намотана нитка, до кінця якої прикріплений вантаж вагою *P*.

Нехтуючи силами тертя і опором повітря, визначити момент інерції деталі, якщо вантаж, відпущений без початкової швидкості, проходить відстань *h* за час *t*. Момент інерції вала з барабаном I_0. Центр ваги деталі знаходиться на осі шпинделя.

3.2.3.2

Гвинт судна має момент інерції *I* і приводиться до обертового руху зі стану спокою за рахунок обертового моменту *M*. На гвинт діють сили опору води, момент яких дорівнює $M_{оп} = k\omega^2$.

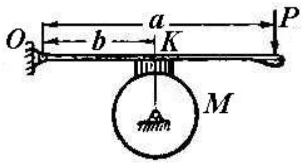
Визначити середню кутову швидкість гвинта за проміжок часу, протягом якого кутова швидкість становитиме ω_1.

3.2.3.3

Ротор гіроскопа масою 30 кг в момент вимикання здійснював 12000 об/хв.

Визначити момент відносно осі обертання сили опору, прикладених до ротора, якщо ротор зупинився через 30 хв. Осьовий радіус інерції ротора дорівнює 100 мм.

3.2.3.4



Шків M, який обертається з кутовою швидкістю ω_0, гальмується за допомогою ручних гальм.

З якою силою P треба притиснути рукоятку, щоб шків зупинився через час t? Коефіцієнт тертя f; довжина рукоятки a; $OK = b$. Момент інерції шківа I, його радіус r. Визначити кількість обертів шківа до його зупинки.

3.2.3.5*

Однорідний суцільний диск радіусом R, який обертається з кутовою швидкістю ω_0 навколо осі, яка перпендикулярна до площини диска і перетинає його центр мас, поміщений на шорстку горизонтальну поверхню.

Знайти час до зупинки диска, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f.

3.2.3.6

Маховик, момент інерції якого I, на початку гальмування мав кутову швидкість ω_0.

Визначити час, протягом якого кутова швидкість маховика зменшиться вдвічі, якщо момент сил опору пропорційний квадрату кутової швидкості з коефіцієнтом пропорційності k. Визначити число обертів, здійснених маховиком за даний проміжок часу. Якою при цьому є середня кутова швидкість?

3.2.3.7*

Гвинт судна має момент інерції I і приводиться до стану спокою сталим обертовим моментом M. Момент опору води при цьому пропорційний кутовій швидкості гвинта.

Знаючи граничну кутову швидкість $\omega_{гр}$, визначити час, протягом якого обертання гвинта можна вважати рівномірним з відносною похибкою не більше λ.

3.2.3.8

Для зменшення похибок у показах гіроскопічних приладів унаслідок руху човнів, прилади конструюють таким чином, щоб період їх власних коливань дорівнював періоду коливань математичного маятника, довжина якого дорівнює радіусу Землі R = 6370 км.

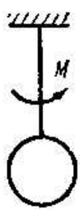
Визначити вищезазначений період.

3.2.3.9

Однорідний стрижень довжиною $2l$ здатний коливатися у вертикальній площині навколо однієї зі своїх точок як фізичний маятник.

Знайти, де повинна бути розташована точка підвісу, щоб період коливань був найменшим.

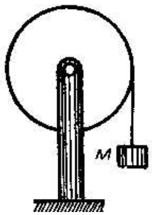
3.2.3.10



Прилад Релея для вимірювання звукового тиску складається з тонкого диска радіусом a масою m, підвішеного до кварцової нитки. В результаті впливу на диск звукової хвилі виникає скручувальний момент $M = 4/3 \cdot \rho a^3 u^2$, де ρ – густина повітря; $u = u_0 \cdot \sin\omega t$ – швидкість звукової хвилі.

Визначити амплітуду вимушених коливань диска, якщо пружний коефіцієнт нитки при скручуванні дорівнює c, а момент сил тертя визначається як $\alpha\omega$.

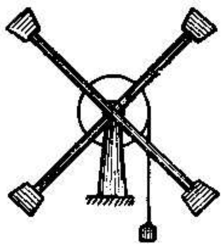
3.2.3.11



Вантаж *M* вагою *P* прикріплений до троса, який намотаний на суцільний циліндричний барабан, здатний обертатися навколо горизонтальної осі.

Визначити прискорення вантажу під час його падіння, а також сумарний тиск барабана на підшипники, якщо вага барабана дорівнює *Q*.

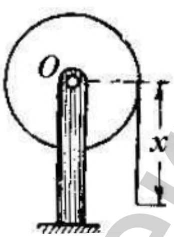
3.2.3.12



Чотири однакові точкові вантажі вагою P_1 кожний обертаються на хрестовині у вертикальній площині. Відстані від вантажів до осі обертання однакові і дорівнюють *l*. Хрестовина приводиться до руху за допомогою вантажу вагою P_2, прикріпленого до нитки, намотаної на барабан.

Визначити силу натягу *T* троса, якщо радіус барабана *r*. Масою барабана і троса, а також тертям знехтувати.

3.2.3.13*



На однорідний круглий циліндр радіусом *r* і вагою *P*, який здатний обертатися навколо горизонтальної осі, намотаний трос довжиною *l* і вагою *Q*.

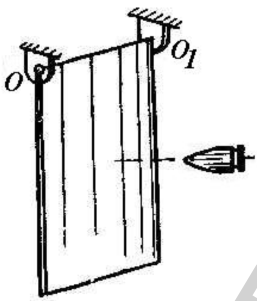
Визначити кутове прискорення барабана в залежності від довжини звисаючої частини троса. Вважати, що центр ваги намотаної частини троса збігається з центром барабана. Визначити кутове прискорення барабана за умови, коли до кінця троса підвішений вантаж вагою P_1.

3.2.3.14

Однорідний диск радіусом r і вагою P здатний вільно обертатися навколо вертикальної осі AB з кутовою швидкістю ω_0. В деякий момент від центра диска уздовж його радіуса починає рухатися точка M вагою Q зі сталою відносною швидкістю u.

Визначити кутову швидкість ω диска після виходу точки з центра як функцію часу t. Чому дорівнює кутова швидкість ω_1 диска в момент, коли точка досягне кінця диска? Тертям знехтувати.

3.2.3.15



Дерев’яна дошка довжиною l і вагою P здатна обертатися без тертя навколо горизонтальної осі OO_1. В середину дошки заглиблюється куля вагою P_1, яка попередньо летіла перпендикулярно до площин дошки зі швидкістю V_0.

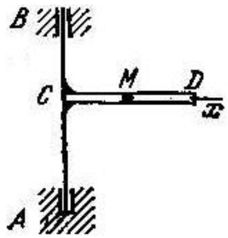
Визначити кутову швидкість, якої набуде дошка після потрапляння кулі.

3.2.3.16

Однорідний круглий диск масою 50 кг і діаметром 600 мм котиться без проковзування по гладкій горизонтальній поверхні, здійснюючи навколо власної осі 60 об/хв.

Визначити головний момент кількостей руху диска відносно осі, яка проходить через його центр перпендикулярно до площини руху.

3.2.3.17



Горизонтальна трубка *CD* здатна вільно обертатися навколо вертикальної осі *AB*. Момент інерції трубки *I*. Всередині трубки на відстані $CM = a$ від осі знаходиться кулька *M* масою *m*. В початковий момент часу трубці надається кутова швидкість ω_0.

Визначити кутову швидкість трубки у момент вильоту кульки із трубки.

3.2.3.18*

Маятник складається із невагомого стрижня і двох закріплених на ньому вантажів, відстань між якими *l*. Верхній вантаж має масу m_1, нижній – масу m_2.

Визначити, на якій відстані *x* від нижнього вантажу необхідно розташувати вісь підвісу для того, щоб період малих коливань маятника був найменшим. Вантажі вважати матеріальними точками.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається кінетичним моментом механічної системи відносно точки у просторі?

2 Як визначається кінетичний момент механічної системи, яка обертається навколо нерухомої осі?

3 Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно точки у просторі; відносно осі.

4 Для яких типів задач слід використовувати теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи?

5 У яких випадках справедливий закон збереження кінетичного моменту механічної системи?

3.2.4 Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичних енергій усіх точок системи:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \qquad (3.42)$$

Кінетична енергія $T_{пост}$ тіла, яке рухається поступально, дорівнює половині добутку маси M тіла і квадрата швидкості $\bar{v}$ будь-якої її точки, наприклад, центра мас:

$$T_{пост} = \frac{M v_C^2}{2}. \qquad (3.43)$$

Кінетична енергія $T_{об}$ тіла, яке обертається навколо нерухомої осі z, дорівнює половині добутку моменту інерції I_z тіла навколо осі обертання і квадрата кутової швидкості ω:

$$T_{об} = \frac{I_z \omega^2}{2}. \qquad (3.44)$$

Кінетична енергія $T_{пл}$ тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює половині добутку момента інерції I_p тіла навколо осі, яка проходить через миттєвий центр швидкостей p перпендикулярно до площини руху, і квадрата кутової швидкості ω:

$$T_{пл} = \frac{I_p \omega^2}{2}. \qquad (3.45)$$

Під *миттєвим центром швидкостей* розуміють точку тіла, яке рухається плоскопаралельно, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю: $\bar{v}_p = 0$.

У випадку, коли відома швидкість центра мас тіла, яке здійснює плоскопаралельний рух, для визначення кінетичної енергії застосовують *теорему Кеніга*, відповідно до якої *кінетична енергія плоскопаралельного руху тіла дорівнює сумі кінетичних енергій поступальної складової руху та обертання* *навколо осі, яка проходить через центр мас перпендикулярно до площини руху*:

$$T_{пл} = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{I_{zC}\omega^2}{2}. \qquad (3.46)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи формулюється таким чином: *зміна кінетичної енергії механічної системи при проходженні її точками деяких переміщень дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок тіла, на відповідних переміщеннях*:

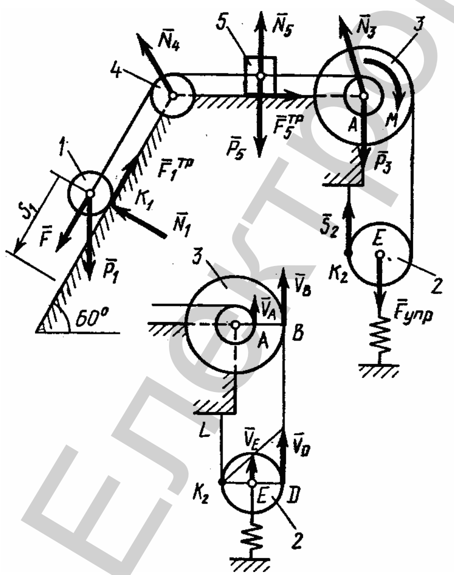
$$T_1 - T_0 = \sum A\left(\overline{F}_k^{\,e}\right) + \sum A\left(\overline{F}_k^{\,i}\right), \qquad (3.47)$$

де T_0 і T_1 – початкова і кінцева кінетичні енергії системи.

У випадку, коли механічна система є *незмінюваною*, тобто *відстані між будь-якими двома точками якої під час руху не змінюються* (наприклад, абсолютно тверде тіло), сума робіт усіх внутрішніх сил дорівнюватиме нулю:

$$\sum A\left(\overline{F}_k^{\,i}\right) = 0. \qquad (3.48)$$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ



Задача 3.2.4

Механічна система складається з вантажів *1* і *2*, ступінчастого шківа *3* з радіусами R_3 = 0,3 м, r_3 = 0,1 м і радіусом інерції ρ_3 = 0,2 м, невагомого блока *4* радіусом R_4 = 0,2 м і призми 5. Коефіцієнт тертя вантажів з площиною f = 0,1. Тіла системи з'єднані між собою нитками, перекинутими через блоки і намотаними на шків 3. Ділянки ниток паралельні відповідним площинам.

До тіла *2* прикріплена пружина. Під дією сили F, що залежить від переміщення *s*, система починає рух зі стану спокою. Деформація пружини в початковий момент дорівнює нулю. На шків *3* діє сталий момент тертя M = 0,6 Н·м.

Визначити значення кутової швидкості ω_3 тіла *3* в момент, коли $s = s_1$ = 0,2 м. Ковзанням знехтувати. m_1 = 8 кг; m_2 =0 кг; m_3 = 4 кг; m_4 = 0 кг; m_5 = 10 кг; c = 240 Н/м; F = 20(3+2*s*), (Н).

Розв'язання

Розглянемо рух механічної системи, яка складається з вагомих тіл *1, 3, 5* і невагомих тіл *2, 4*, з'єднаних нитками. На систему діють активні сили $\vec{F}$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_5$, реакції $\vec{N}_1$, $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$, $\vec{N}_5$, натяг нитки $\vec{S}_2$, сила пружності $\vec{F}_{упр}$, сили тертя $\vec{F}_1^{\,тр}$, $\vec{F}_5^{\,тр}$ і момент *M*. Для визначення ω_3 застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи $T - T_0 = \sum A_k^e$.

Визначаємо початкове і кінцеве значення кінетичної енергії T_0 і T. Оскільки в початковий момент часу система знаходилася в спокою, то $T_0 = 0$. Величина T дорівнює сумі кінетичних енергій усіх тіл системи: $T = T_1 + T_3 + T_5$. Враховуючи, що тіло *1* рухається плоскопаралельно, тіло *5* – поступально, тіло *3* обертається навколо нерухомої осі, отримаємо $T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1}\omega_1^2$; $T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$; $T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_5^2$.

Усі лінійні та кутові швидкості, які входять в останні залежності, необхідно виразити через шукану ω_3. Для цього попередньо відмітимо, що $V_{C1} = V_5 = V_A$, де *A* – будь-яка точка ободу радіусом r_3 шківа *3*; точка K_1 – миттєвий центр швидкостей катка *1*, радіус якого позначимо r_1. Тоді

$$V_{C1} = V_5 = \omega_3 r_3; \qquad \omega_1 = \frac{V_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{C1}}{r_1} = \frac{\omega_3 r_3}{r_1};$$

Моменти інерції: $I_{C1} = \frac{1}{2} m_1 r_3^2$; $I_3 = m_3 \rho_3^2$. Таким чином,

$$T=\left(\frac{3}{4}m_1r_3^2+\frac{1}{2}m_3\rho_3^2+\frac{1}{2}m_5r_3^2\right)\omega_3^2.$$

Знайдемо суму робіт усіх сил. Введемо позначення: s_5 – переміщення тіла *5* ($s_5 = s_1$); φ_3 – кут обертання шківа *3*; λ_0 і λ_1 – початкове і кінцеве подовження пружини. Отримаємо

$$A\left(\vec{F}\right)=\int_0^{s_1}20(3+2s)ds=20\left(3s_1+s_1^2\right);\qquad A\left(\vec{P}_1\right)=P_1s_1\sin 60°;$$

$$A\left(\vec{F}_5^{\,тр}\right)=-F_5^{тр}s_5=-fP_5s_1;\quad A(M)=-M\varphi_3;\quad A\left(\vec{F}_{упр}\right)=\frac{c}{2}\left(\lambda_0^2-\lambda_1^2\right).$$

Роботи всіх інших сил дорівнюють нулю, оскільки точки K_1 і K_2, де прикладені сили $\vec{N}_1$, $\vec{F}_1^{\,тр}$ і $\vec{S}_2$,– миттєві центри швидкостей; точки, де прикладені сили $\vec{P}_3$, $\vec{N}_3$ і $\vec{N}_4$ – нерухомі; реакція $\vec{N}_5$ перпендикулярна до напрямку руху тіла *5*.

За умовою задачі початкова деформація пружини $\lambda_0=0$. Тоді $\lambda_1=s_E$, де s_E – переміщення точки *E* (кінця пружини). Значення s_E і φ_3 необхідно виразити через переміщення s_1. Для цього врахуємо, що оскільки $\omega_3=V_A/r_3=V_{C1}/r_3$, то $\varphi_3=s_1/r_3$; оскільки $V_D=V_B=\omega_3R_3$, то $V_E=0{,}5V_D=0{,}5\omega_3R_3$. Тоді $\lambda_1=s_E=0{,}5\varphi_3R_3=0{,}5s_1R_3/r_3$. Для знайдених значень φ_3 і λ_1 сума робіт

$$\sum A\left(\vec{F}_k^{\,e}\right)=20\left(3s_1+s_1^2\right)+P_1s_1\sin 60°-fP_5s_1-M\frac{s_1}{r_3}-\frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2.$$

У результаті маємо рівняння

$$\left(\frac{3}{4}m_1r_3^2+\frac{1}{2}m_3\rho_3^2+\frac{1}{2}m_5r_3^2\right)\omega_3^2=20\left(3s_1+s_1^2\right)+P_1s_1\sin 60°-$$

$$-fP_5s_1-M\frac{s_1}{r_3}-\frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2,$$

з якого кутова швидкість

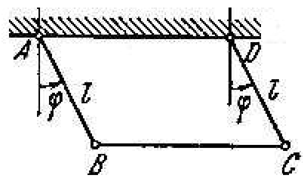
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{20\left(3s_1 + s_1^2\right) + P_1 s_1 \sin 60° - fP_5 s_1 - M\,\dfrac{s_1}{r_3} - \dfrac{c}{8}\dfrac{R_3^2}{r_3^2}\,s_1^2}{\dfrac{3}{4}m_1 r_3^2 + \dfrac{1}{2}m_3\rho_3^2 + \dfrac{1}{2}m_5 r_3^2}}.$$

Підставляючи в останню рівність числові значення величин, знаходимо кутову швидкість ω_3 = 8,1 рад/с.

Відповідь: ω_3 = 8,1 рад/с.

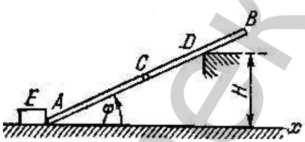
ЗАДАЧІ

3.2.4.1



Визначити кінетичну енергію плоского механізму, який складається з трьох стрижнів *AB*, *BC* і *CD*, прикріплених шарнірами *A*, *D* до стелі і з’єднаними між собою шарнірами *B*, *C*. Маси стрижнів *AB* і *CD* однакові і дорівнюють M_1. Маса стрижня *BC* дорівнює M_2. Довжини *BC* = *AD*; *AB* = *CD* = *l*. Стрижень *AB* обертається з кутовою швидкістю *ω* навколо точки *A*.

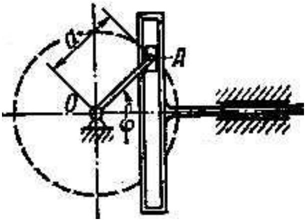
3.2.4.2



Однорідний тонкий стрижень *AB* масою *M* спирається на кут *D*, а кінцем *A* ковзає по горизонтальній напрямній. Упор *E* переміщується вправо зі сталою швидкістю *V*.

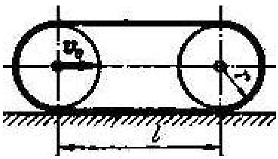
Визначити кінетичну енергію стрижня в залежності від кута *φ*, якщо довжина стрижня дорівнює 2*l*, а перевищення кута *D* по відношенню до горизонтальної напрямної становить *H*.

3.2.4.3



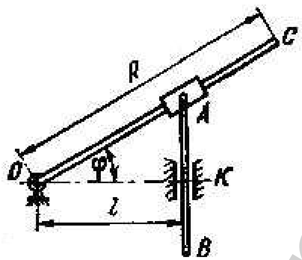
Визначити кінетичну енергію кулісного механізму. Момент інерції кривошипа $OA = a$ відносно осі обертання O дорівнює I_0; маса куліси m. Масою каменя A знехтувати. В яких положеннях механізму кінетична енергія досягає максимуму (мінімуму)?

3.2.4.4*



Визначити кінетичну енергію гусениці трактора, який рухається зі швидкістю V_0. Відстань між осями коліс дорівнює l; радіуси коліс r; маса одного погонного метра гусеничного ланцюга γ.

3.2.4.5



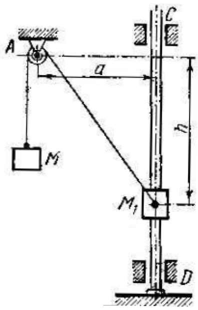
Механізм складається з важеля OC довжиною R масою m_1, повзуна A масою m_2 і стрижня AB масою m_3.

Виразити кінетичну енергію механізму в залежності від кутової швидкості ω і кута φ обертання важеля, вважаючи повзун точковою масою, а важіль – однорідним стрижнем; $OK = l$.

3.2.4.6

На вал діаметром 60 мм наділи колесо діаметром 500 мм, яке обертається з частотою 180 об/хв.

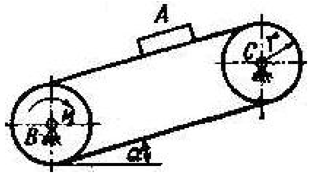
Визначити коефіцієнт тертя ковзання між валом і підшипниками, якщо після вимикання приводу колесо до зупинки здійснило 90 обертів. Масу колеса вважати рівномірно розподіленою по його ободу. Масою вала знехтувати.



3.2.4.7

До кінців гнучкої нерозтяжної нитки, перекинутої через блок *A* незначних розмірів (віддалений від осі *CD* на відстань *a*), підвішені два вантажі масами *M* і M_1. Під дією власної ваги блок M_1 почав переміщуватися без початкової швидкості, пройшовши донизу відстань *h*.

Знайти швидкість блока *M*.



3.2.4.8

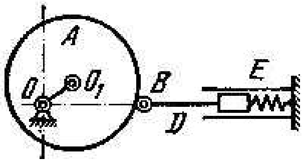
Транспортер, стрічка якого нахилена під кутом *α* до горизонту, приводиться до руху зі стану спокою приводом, приєднаним до нижнього шківа *B*, за рахунок обертового моменту *M*.

Визначити швидкість стрічки транспортера *V* в залежності від її переміщення *s*, якщо маса вантажу *A* дорівнює M_1, а шківи *B* і *C* радіусом *r* і масою M_2 кожний є однорідним круглим циліндром. Масою стрічки знехтувати.

3.2.4.9*

Яку початкову швидкість, паралельну лінії найбільшого нахилу похилої площини під кутом *α* до горизонту, треба надати осі колеса радіусом *r* для того, щоб воно піднялося на висоту *h*. Коефіцієнт тертя кочення $f_к$.

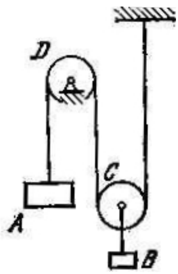
3.2.4.10



У кулачковому механізмі, розміщеному в горизонтальній площині, ексцентрик *A* (циліндр діаметром *d* масою *M* з ексцентриситетом $OO_1 = d/4$) приводить до зворотно-поступального руху ролик *B* зі штангою *D*. Пружина *E* жорсткістю *c* забезпечує контакт ролика з ексцентриком. У крайньому лівому положенні штанги пружина не напружена.

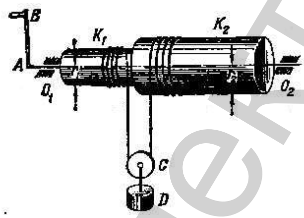
Яку кутову швидкість необхідно надати ексцентрику для переміщення штанги зліва-направо? Масою ролика, штанги і пружини знехтувати.

3.2.4.11



Вантаж *A* масою M_1 опускається за допомогою троса, перекинутого через диск *D*, піднімаючи вантаж *B* маси M_2, прикріплений до осі диска *C*. Визначити швидкість вантажу *A* в момент, коли він опуститься на висоту *h*. Масою троса і тертям знехтувати.

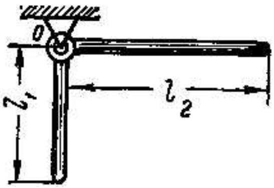
3.2.4.12



У диференціальному коловороті жорстко з'єднані вали K_1 і K_2 з радіусами r_1, r_2 і моментами інерції I_1, I_2 обертаються за допомогою рукоятки *AB*, до якої прикладений момент *m*. Блок *C* підвішений на нитці, ліва гілка якої намотана на вал K_1, а права – на K_2. До блоку підвішений вантаж *D* масою *M*.

Знайти кутову швидкість обертання рукоятки після підйому *D* на висоту *s*. Масою нитки, блока і рукоятки знехтувати.

3.2.4.13



Два важких однорідних стрижні довжиною l_1 і l_2 однакової густини і поперечного перерізу, жорстко з'єднані між собою під прямим кутом, здатні обертатися навколо осі O, перпендикулярної до площини рисунка. В початковий момент більший стрижень розміщений горизонтально і відпущений без початкової швидкості.

Знайти швидкість кінця меншого стрижня в момент, коли він займе горизонтальне положення. Тертям знехтувати.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1 Що називається кінетичною енергією механічної системи?

2 Як визначається кінетична енергія механічної системи, яка рухається поступально?

3 Як визначається кінетична енергія механічної системи, яка обертається навколо нерухомої осі?

4 Сформулюйте теорему Кеніга.

5 Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі.

6 Для яких механічних систем сума робіт усіх внутрішніх сил дорівнює нулю?

7 Для яких типів задач слід використовувати теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов.– В 3-х томах.– Т 1: Статика и кинематика.– 9-е издание, перераб.– М.: Наука, 1990.– 672 с.

2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учебное пособие для втузов.– В 3-х томах.– Т. 2: Динамика.– 8-е издание, перераб.– М.: Наука, 1991.– 640 с.

3. Бать М.И., Кельзон А.С., Сороков С.А. Сборник задач по теоретической механике для техникумов.– М.: Физматгиз, 1958.– 320 с.

4. Бражниченко Н.А., Кан В.Л., Минцберг Б.Л. и др. Сборник задач по теоретической механике.– Л.: Судпромгиз, 1962.– 564 с.

5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие / под ред. Н.В.Бутенина, А.И.Лурье, Д.Р.Меркина.– 36-е изд., исправл.– М.: Наука, 1986.– 448 с.

6. Николаи Е.Л. Теоретическая механика: учебник.– В 2-х томах.– Ч. 1: Статика, кинематика.– 20-е изд., стериот.– М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962.– 280 с.

7. Николаи Е.Л. Теоретическая механика: учебник.– В 2-х томах.– Ч. 2: Динамика.– 13-е изд., стериот.– М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958.– 484 с.

8. Новожилов И.В., Зацепин М.Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ: учеб. пособие для втузов.– М.: Высшая школа, 1986.– 136 с.

9. Приходько А.Н., Сафронов М.Н. Курс теоретической механики для техникумов.– М.: Государственное издание технической литературы, 1956.– 516 с.

10. Файн А.М. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие.– М.: Высшая школа, 1978.– 189 с.

11. Яблонский А.А. Курс теоретической механики.– В 2-х томах.– М.: Высшая школа, 1977.

12. Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.– Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов.– М.: Высшая школа, 1985.– 368 с.

13. Бондаренко А.Н. Теоретическая механика в примерах и задачах: Методическая разработка.– Новосибирск: Московский государственный университет путей сообщения, 2002.

Навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ
для студентів інженерних спеціальностей денної форми навчання

Відповідальний за випуск В.А. Марцинковський
Редактор Н.А. Гавриленко
Комп'ютерне верстання І.В. Павленко

Підп. до друку 05.02.2010.
Формат 80×64/16. Ум. друк. арк. 11,63 . Обл.-вид. арк. 7,06. Тираж 300 пр. Зам. №
Собівартість видання грн. к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Р.-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.