



## Chockbølge exiterende pulsationer af luftbobler i vand

Jensen, Finn Bruun; Jensen, Leif Bjørnø

*Publication date:*  
1971

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Jensen, F. B., & Jensen, L. B. (1971). Chockbølge exiterende pulsationer af luftbobler i vand. Kgs. Lyngby, Denmark: Technical University of Denmark (DTU).

## DTU Library

Technical Information Center of Denmark

---

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

AFM 71-03

RAPPORT BG-204

Afdelingen for Fluid Mekanik  
DEN POLYTEKNISKE LÆREANSTALT  
Bygning 404  
Lundtoftevej 100  
2800 Lyngby Tlf. 88 46 22

# CHOKBØLGE EXCITEREDE PULSATIONER AF LUFTBOBLER I VAND

AF

F. C. BRUUN JENSEN



AFDELINGEN  
FOR  
FLUID MEKANIK

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE  
LYNGBY 1971

## FORORD

Denne afhandling er en del af et licentiatstudium udført på Afdelingen for Fluid Mekanik ved Danmarks tekniske Højskole i årene 1969-71.

Jeg takker afdelingens leder professor K. Refslund for den interesse, han har vist projektet, og for megen værdifuld vejledning.

Jeg vil desuden takke lektor, lic. techn. Leif Bjørnø for mange udbytterige diskussioner og for den opmuntring, jeg har fået, når tilsyneladende uoverstigelige vanskeligheder opstod. Jeg er desuden taknemlig for hans kritiske gennemlæsning af manuskriptet til afhandlingen.

Lyngby, august 1971.

*Tim Børn Jensen*

INDHOLDSFORTEGNELSE

FORORD. . . . .	ii
ABSTRAKT . . . . .	v
ABSTRACT IN ENGLISH . . . . .	vi
NOMENKLATURLISTE . . . . .	vii
I. INTRODUKTION. . . . .	1
II. TEORI FOR BOBLEPULSATIONEN . . . . .	3
A. Inkompressibel væske . . . . .	3
B. Kompressibel væske. . . . .	4
III. LINEÆRE PULSATIONER . . . . .	7
A. Frie pulsationers egenfrekvens. . . . .	8
B. Dæmpning af boblepulsationen . . . . .	12
1. Termisk dæmpning . . . . .	12
2. Akustisk dæmpning . . . . .	13
3. Viskos dæmpning. . . . .	14
4. Den totale dæmpning . . . . .	15
C. Pulserende boblers termodynamik . . . . .	16
IV. ULINEÆRE PULSATIONER . . . . .	20
A. Frie pulsationers egenfrekvens. . . . .	22
B. Pulsationer i lydfelt. . . . .	24
C. Chokbølge exciterede pulsationer . . . . .	33
D. Boblestabilitet. . . . .	35
V. BEREGNING AF TRYKVARIATIONERNE I EN PULSERENDE BOBLE	39
VI. NUMERISKE METODER . . . . .	50
A. Grundlæggende træk ved Los Alamos metoderne . . . . .	51
B. Numerisk beregning af boblepulsationen . . . . .	53
VII. FORSØGSOPSTILLING OG MÅLEUDSTYR . . . . .	56

VIII. FORSØGSRESULTATER. . . . .	62
A. Maksimaltryk og impulstæthed for chokbølgen . .	62
1. Systematiske målefejl . . . . .	64
2. Korrektioner til målte $P_m$ og $I$ værdier. . .	67
3. Forsøgsresultater. . . . .	71
B. Kavitationsboblers indflydelse på boblefotograferingen. . . . .	77
C. Diffraktion af chokbølge bag plade med cirkulært hul . . . . .	84
D. Termodynamiske forhold for boblepulsationen . .	90
1. Beregningsresultater. . . . .	91
2. Forsøgsresultater. . . . .	95
E. Maksimaltrykket i en pulserende boble . . . .	101
1. Sammenligning mellem målte og beregnede maksimaltryk . . . . .	103
F. Boblers energiabsorption . . . . .	111
G. Højhastigheds fotografering af pulserende bobler	116
IX. KONKLUSION . . . . .	118
CONCLUSIONS IN ENGLISH . . . . .	120
APPENDIKS. . . . .	122
REFERENCELISTE . . . . .	124

ABSTRAKT

Denne rapport omhandler en teoretisk og eksperimentel undersøgelse af ulineære pulsationer af luftbobler i vand. Pulsationerne startes af chokbølgen fra en undervandsekspllosion. Der er anvendt en ladning på 0,8 g Tetryl, og undersøgelsen omfatter bobler af størrelsen 10 - 30 mm i diameter. Ved at omslutte boblen med en tynd gummihinde muliggøres direkte trykmåling inde i boblen. Maksimaltrykket er målt som funktion af boblediameteren og afstanden fra eksplosionsstedet. Resultatet er derefter sammenlignet med de beregnede tryk opnået ved numerisk løsning af den ulineære differentialligning for boblepulsationen. Endvidere er de termodynamiske forhold for en pulserende boble undersøgt såvel teoretisk som eksperimentelt. Endelig er den maksimalt absorberede energi i en pulserende boble beregnet, da denne størrelse er et udtryk for en enkelt bobles dæmpende egenskaber over for en chokbølge.

ABSTRACT

This report deals with a theoretical and experimental investigation of non-linear pulsations of air bubbles in water. The pulsations are initiated by the shock wave from an underwater explosion produced by a charge of 0.8 g Tetryl. The diameters of the bubbles studied are in the range 10-30 mm. By enclosing the bubble in a thin rubber membrane, direct pressure measurement inside the bubble is made possible. The maximum pressure is measured as a function of the bubble diameter and the distance from the explosion. The experimental results are compared with the calculated pressures obtained by a numerical solution of the non-linear differential equation for the bubble pulsation. In addition, the thermodynamic behaviour of a pulsating bubble is investigated both theoretically and experimentally. Finally, the maximum energy absorbed in a pulsating bubble is calculated as an expression of the attenuation effect of a single bubble on a shock wave.

NOMENKLATURLISTE

- a Afstanden fra eksplosionsstedet.
- A Dimensionsløst tryk  $\left[ = \frac{P_m}{P_{hy}} \right]$ .
- B Konstant ( $\approx 3000$  bar for vand).
- c Lydhastighed i væsken.
- $c_g$  Lydhastighed i gassen.
- C Lydhastighed i væsken ved bobleoverfladen.
- $C_k$  Kapacitet i målekredsen.
- $C_p$  Specifik varme pr masseenhed af gassen ved konstant tryk.
- $C_v$  Specifik varme pr masseenhed af gassen ved konstant volumen.
- $C'_g$  Specifik varme pr volumenenhed af gassen ved konstant volumen.
- $C'_v$  Specifik varme pr volumenenhed af væsken ved konstant volumen.
- $d_o$  Ligevægtsdiameter af boblen.
- $d_l$  Minimumdiameter af boblen.
- D Diameter af transducerens trykfølsomme flade.
- e Den akkumulerede energi pr fladeenhed af boblens tværsnitsareal  $\left[ = \frac{E}{\frac{\pi}{4}d_o^2} \right]$ .
- $e_c$  Energitæthed i chokbølgen.
- E Den maksimalt akkumulerede energi i boblen.
- f Frekvens.
- $f_o$  Lineære egenfrekvens for boblepulsationen.
- $f_A$  Svingningsfrekvens af lydfeltet.



- $F_0$     Fourier-tallet  $\left[ = \frac{\alpha_g \tau}{R_0^2} \right]$ .
- $g$     Funktion defineret på p 10.
- $h$     Enthalpi.
- $H$     Enthalpi i væsken ved bobleoverfladen.
- $I$     Impulstæthed i chokbølgen.
- $I^*$     Den målte impulstæthed i chokbølgen.
- $k_1$     Konstant (= 0 eller 1).
- $K_f$     Korrektionsfaktor.
- $\left. \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \right\}$     Hovedakserne i den ellipsoide, hvorved boblen approksimeres.
- $L_g$     Termisk diffusionslængde for gassen  $\left[ = \sqrt{\frac{\alpha_g}{\omega_A}} \right]$ .
- $L_v$     Termisk diffusionslængde for væsken  $\left[ = \sqrt{\frac{\alpha_v}{\omega_A}} \right]$ .
- $M$     Mach-tallet  $\left[ = \frac{u}{c} \right]$ .
- $n$     Mode-nummer for boblesvingningen.
- $P$     Tryk.
- $P^*$     Det målte trykforløb i chokbølgen.
- $P_0$     Trykket i boblen i ligevægtstilstanden.
- $P_1$     Maksimaltrykket i en pulserende boble.
- $P_\infty$     Trykket i væsken langt fra boblen.
- $P_A$     Trykamplituden i lydfeltet.
- $P_g$     Trykket inde i boblen.
- $P_{hy}$     Hydrostatisk tryk.
- $P_m$     Maksimaltrykket i chokbølgen  $P = P_m \cdot e^{-\frac{t}{\theta}}$ .
- $P_{m,0}$     Maksimaltrykket i chokbølgen uden anvendelse af beskyttelsesplade.

$P_{m,1}$	Funktion defineret på p 69.
$P_{m,1}^*$	Funktion defineret på p 70.
$P_v$	Trykket i væsken ved bobleoverfladen.
$q$	Varmeovergangstallet mellem gas og væske.
$Q$	Varmeenergi i boblen.
$Q_0$	Varmeenergi i boblen til $t = 0$ .
$r$	Afstanden fra symmetriaksen i fig 84.1.
$R$	Radius af boblen.
$\dot{R}$	$\frac{dR}{dt}$ .
$\ddot{R}$	$\frac{d^2R}{dt^2}$ .
$R_0$	Ligevægtsradius af boblen.
$R_k$	Ohmsk modstand i målekredsen.
$t$	Tid.
$t_1$	Chokbølgens rise-time.
$T_\infty$	Temperatur af væsken langt fra boblen.
$T_g$	Temperatur af gassen i boblen.
$u$	Partikelhastighed.
$W$	Sprængstofmængden i detonatoren i {kg}.
$x$	Sweep-hastighed på oscilloskopet.
$y$	Dimensionsløs radius $\left[ = \frac{R}{R_0} \right]$ .
$z$	Dimensionsløs tid $\left[ = \frac{t}{\theta} \right]$ .
$z_1$	$\frac{dy}{dz}$
$z_2$	$\frac{d^2y}{dz^2}$

$\alpha_g$	Temperaturledningsevne for gassen.
$\alpha_v$	Temperaturledningsevne for væsken.
$\beta$	Funktion defineret på p 10.
$\gamma$	Varmefyldeforholdet for gassen $\left[ = \frac{c_p}{c_v} \right]$ .
$\delta$	Dæmpningskonstant for boblepulsationen $\left[ = \frac{\Lambda}{\pi} \right]$ .
$\delta_A$	Akustisk dæmpningskonstant.
$\delta_T$	Termisk dæmpningskonstant.
$\delta_V$	Viskos dæmpningskonstant.
$\eta_v$	Dynamisk viskositet for væsken.
$\theta$	Tidskonstant for chokbølgen $P = P_m \cdot e^{-\frac{t}{\theta}}$ .
$\theta_1$ $\theta_2$	Tidskonstanter for et eksponentielt aftagende tryk.
$\theta_k$	Tidskonstant for målekredsen.
$\kappa$	Polytropeksponenten.
$\lambda_A$	Bølgelængde for lydfeltet $\left[ = \frac{c}{f_A} \right]$ .
$\lambda_c$	Bølgelængde for chokbølgen $(= c \cdot \theta)$ .
$\lambda_g$	Akustisk bølgelængde for gassen $\left[ = \frac{c_g}{f_A} \right]$ .
$\Lambda$	Logaritmisk dekrement for $R=R(t)$ .
$\mu$	Dimensionsløs parameter $\left[ = \frac{\lambda c}{d_0} \right]$ .
$\xi$	Funktion defineret på p 34.
$\rho$	Massefylde.
$\rho_0$	Massefylde af gassen i boblens ligevægtstilstand.
$\rho_\infty$	Massefylde af væsken langt fra boblen.
$\rho_v$	Massefylde af væsken.
$\sigma$	Overfladespænding.

$\tau$  Kontraktionstid for boblen.

$\tau^*$  Integrationsgrænse ved bestemmelse af  $I^*$ .

$\left. \begin{array}{l} \tau_1 \\ \tau_2 \end{array} \right\}$  Tider defineret i fig 65.1.

$$\phi = \sqrt{\frac{\pi f_0}{\alpha_g}}$$

$\psi$  Konstant ( $\approx 7$  for vand).

$\omega_A$  Cyklisk frekvens af lydfeltet.

## I. INTRODUKTION

Studiet af pulserende luftbobler i vand er i de senere år intensiveret ganske betydeligt. Dette skyldes dels en øget interesse for de fysiske fænomener i forbindelse med gasbobler i væsker, og dels at den tekniske udvikling nu har medført, at der ved hjælp af datamater og højhastigheds fotoudstyr kan foretages detaljerede studier af pulserende bobler.

En boble kan fysisk defineres som et lille volumen af et kompressibelt fluid, der befinder sig i et større volumen af et fluid, der normalt kan betragtes som inkompressibelt. Et sådant system kan bringes i svingninger, hvor væsken omkring boblen er den svingende masse, og hvor gassens kompressibilitet repræsenterer systemets stivhed.

Årsagen til den store interesse for studiet af gasbobler i væsker er dels, at disse spreder og dæmper lydbølger, og dels at der i en voldsomt pulserende boble opstår høje tryk og temperaturer, som kan virke ødelæggende på faste materialer i boblens nærhed, jvf kavitationsboblers erodering af skibspropeller.

I denne rapport koncentrerer interessen om boblers dæmpende egenskaber over for trykbølger. I de senere år har man flere gange benyttet sig af dette forhold ved havnebyggeri i bl a Canada [35] og Sverige [46]. Hvis et havneanlæg skal udvides under anvendelse af en undervandsekspllosion, må den eksisterende del beskyttes mod trykbølgen fra eksplosionen. Dette kan fx ske ved at lade trykbølgen passere et dæmpende luftbobletæppe, før den rammer kajanlægget.

Et nøjere kendskab til de vigtigste dæmpningsmekanismer i et bobletæppe vil være ønskeligt, idet man hidtil har været henvist til at benytte spredte empiriske resultater ved beregning af bobletæppers dæmpningseffekt over for en chokbølge. Studiet af bobletæppers dæmpningseffekt kan også betragtes

som en fortsættelse af et tidligere licentiatarbejde ved Afdelingen for Fluid Mekanik, idet BJØRNØ [6] har undersøgt chokbølgers dæmpning ved passage af plader af polyurethanskum nedsænket i vand. Målinger viser, at et bobletæppe har større dæmpningseffekt end en skumplade.

Forudsætningen for at kunne klarlægge de vigtigste dæmpningsmekanismer i et bobletæppe er et nøje kendskab til, hvad der sker med en enkelt luftboble i vand, som rammes af chokbølgen fra en undervandsekspllosion. Derfor har man i dette licentiatarbejde koncentreret undersøgelserne om en enkelt boble, og derefter på grundlag af de opnåede resultater søgt at opstille retningslinier for et bobletæppes udformning, når dæmpningseffekten skal være størst mulig.

Formålet med denne rapport er primært at give en fremstilling af resultaterne af egne forsøg og beregninger, men desuden har det været hensigten at give en koncentreret oversigt over tidligere arbejder inden for området "pulserende bobler". Disse arbejder, der omtales i kap III og IV, kan naturligt opdeles i to hovedgrupper omhandlende henholdsvis lineært og ulineært pulserende bobler. Dette skyldes, at boblepulsationen ved små udsving fra ligevægtsstillingen (lineære pulsationer) kan behandles analytisk ved linearisering af den beskrivende ulineære differentiaalligning, mens der må foretages en numerisk løsning af den fuldstændige differentiaalligning ved beregning af store udsving fra ligevægtsstillingen (ulineære pulsationer).

## II. TEORI FOR BOBLEPULSATIONEN

En teoretisk behandling af boblepulsationen kan kun foretages under visse simplificerende forudsætninger. De vigtigste er antagelsen om sfærisk symmetri for boblen og forudsætningen om ens tryk overalt i boblen. Symmetribetingelsen vil normalt være opfyldt for små bobler, idet den kuglesymmetriske form her stabiliseres af overfladespændingen. Det må dog samtidig kræves, at eventuelle trykpåvirkninger af boblen er kuglesymmetriske. Den anden betingelse om ens tryk overalt i boblen er med god tilnærmelse opfyldt, sålænge hastigheden af boblevæggen er lille i forhold til lydhastigheden i gasfasen [55]. I en simpel matematisk model af boblepulsationen vil det desuden være muligt at negligere en række fysiske egenskaber ved fluiderne som overfladespænding, viskositet, kompressibilitet, varmeledning m.m. Det må dog i hvert enkelt tilfælde nøje overvejes, hvorvidt alle disse fluideffekter er uden betydning for behandlingen af det betragtede problem.

En detaljeret gennemgang af teorien for boblepulsationen er omtalt i en række rapporter og artikler [20], [26], [29], [33], [34] og [55], og derfor vil kun de vigtigste resultater af teorien blive gengivet her. Adskillige ulineære differentiaalligninger kan opstilles til beskrivelse af boblepulsationen. FLYNN [20] omtaler således 4 forskellige ligninger, af hvilke én behandler væsken som inkompressibel, medens de 3 øvrige inkluderer kompressibilitetseffekten i beregningerne. Her vil den inkompressible plus den vigtigste af de kompressible beskrivelser blive omtalt.

### A. Inkompressibel væske.

Under den antagelse at væsken er inkompressibel, og dermed at lydhastigheden er uendelig, kan følgende ulineære differentiaalligning opstilles for boblepulsationen:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_V}(P_V - P_\infty) \quad (4.1)$$

hvor

- $R$  : boblens radius  
 $\dot{R}$  :  $\frac{dR}{dt}$   
 $\ddot{R}$  :  $\frac{d^2R}{dt^2}$   
 $\rho_V$  : væskens massefylde  
 $P_V$  : trykket i væsken ved bobleoverfladen  
 $P_\infty$  : trykket i væsken langt fra boblen

Denne simple ligning blev opstillet af RAYLEIGH [59] i 1917. En relation mellem trykket  $P_g$  inde i boblen og trykket  $P_V$  i væsken ved bobleoverfladen er givet af PLESSET [55]:

$$P_g = P_V + \frac{2\sigma}{R} + \frac{4\eta_V\dot{R}}{R} \quad (4.2)$$

hvor  $\sigma$  er overfladespændingen og  $\eta_V$  den dynamiske viskositet for væsken. For at kunne løse ligningssystemet (4.1) + (4.2) må  $P_\infty$  være givet som funktion af tiden.  $P_g$  kan indsættes som funktion af  $R$  ved hjælp af følgende udtryk:

$$P_g = P_0 \left[ \frac{R_0}{R} \right]^{3\kappa} \quad (4.3)$$

som gælder for en polytropisk tilstandsændring af gassen.  $P_0$  og  $R_0$  er størrelser, som refererer til boblens ligevægtstilstand, medens  $\kappa$  er polytropeksponenten. Karakteren af den termodynamiske proces for gassen bestemmer værdien af  $\kappa$ , idet  $\kappa=1$  svarer til isotermisk tilstandsændring og  $\kappa=1,4$  (for luft) svarer til en adiabatisk proces. For at kunne løse ligningssystemet må der specificeres en værdi for  $\kappa$ .

#### B. Kompressibel væske.

Som omtalt af FLYNN [20] findes der flere approksimative løsninger til bestemmelse af boblepulsationen i en kompressibel væske. Den bedst kendte er Kirkwood-Bethe approksimationen,



som giver følgende differentiaalligning:

$$R\ddot{R}(1 - \frac{\dot{R}}{C}) + \frac{3}{2}\dot{R}^2(1 - \frac{\dot{R}}{3C}) = H(1 + \frac{\dot{R}}{C}) + \frac{RH}{C}(1 - \frac{\dot{R}}{C}) \quad (5.1)$$

hvor H er entalpien i væsken ved bobleoverfladen, og C er væskens lydhastighed samme sted. Denne ligning blev først udledt af GILMORE [21]. Ligning (5.1) kan løses sammen med grænsebetingelsen (4.2), hvis H og C kendes som funktion af  $P_v$ . Til bestemmelse af H og C benyttes den isentropiske tilstands ligning for væsker [33]

$$\frac{P + B}{P_\infty + B} = \left[ \frac{\rho}{\rho_\infty} \right]^\psi \quad (5.2)$$

hvor B og  $\psi$  er konstanter, som for vand antager følgende værdier:  $B \approx 3000$  bar,  $\psi \approx 7$ .

Idet lydhastigheden er defineret som  $c = \sqrt{\left[ \frac{dP}{d\rho} \right]_s}$  fås af (5.2)

$$C = \sqrt{\frac{\psi}{\rho_\infty}} \cdot (P_\infty + B)^{\frac{1}{2\psi}} \cdot (P_v + B)^{\frac{\psi-1}{2\psi}} \quad (5.3)$$

Dette udtryk for C viser, at der skal optræde betydelige tryk i vandet før C ændres væsentligt.

$$\text{Eks: } P_v = 100 \text{ bar} \Rightarrow \frac{\Delta C}{C} = 1,5 \%$$

Entalpien i væsken ved boblevæggen er bestemt ved  $H = \int_{P_\infty}^{P_v} \frac{dP}{\rho}$  og derfor fås

$$H = \frac{\psi}{\psi-1} \cdot \frac{(P_\infty + B)^{\frac{1}{\psi}}}{\rho_\infty} \cdot \left[ (P_v + B)^{\frac{\psi-1}{\psi}} - (P_\infty + B)^{\frac{\psi-1}{\psi}} \right] \quad (5.4)$$

Hermed er der opstillet et ligningssystem til beregning af boblepulsationen. Det er imidlertid en approksimativ løsning, der opnås, og for at se hvor god løsningen er, har HICKLING & PLESSET [26] sammenlignet den med en løsning til de eksakte bevægelsesligninger for et kompressibelt fluid. En kritisk

parameter i beregningerne er boblevæggens hastighed  $\dot{R}$  i forhold til lydhastigheden  $C$  i væsken. Størrelsen  $\dot{R}/C$  kaldes boblevæggens machtal. Ved små værdier af  $\dot{R}/C$  kan væsken med god tilnærmelse regnes inkompressibel, og ifølge [26] gælder dette for  $\dot{R}/C$  mindre end 0,3. Kirkwood-Bethe approksimationen kan derimod benyttes indtil et machtal på ca 5.

### III. LINEÆRE PULSATIONER

Hvis en luftboble i vand udsættes for en trykpåvirkning vil den begynde at vibrere på en eller anden karakteristisk måde. De forskellige måder, hvorpå en boble kan vibrere, kaldes dens svingnings-"modes", og disse er beregnet af LAMB [42] i 1916. En grafisk fremstilling af de simpleste vibrationsformer er vist i fig 7.1. Den fuldt optrukne linie er boblens ligevægtsstilling, medens de stiplede linier viser yderpositionerne for boblevæggen. Det ses at 0. mode svarer til en simpel volumenpulsation med bibeholdt kuglesymmetrisk form. 1. mode er en translatorisk svingning, dvs en oscillation af massecentret med bibeholdt bobleform. 2. og højere ordens modes er udelukkende formændringer med fastholdt volumen. Hvis udsvingene fra ligevægtsstillingen er små, er de forskellige modes uafhængige. For  $n > 1$  er egenfrekvensen af svingningerne ifølge [42] givet ved

$$f_n = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{(n^2 - 1)(n + 2) \cdot \frac{\sigma}{\rho_v R_0}} \quad (7.1)$$

hvor  $n$  er mode-nummeret og  $\sigma$  overfladespændingen. 1. mode har ingen egenfrekvens, men 0. mode har en egenfrekvens, der blev beregnet af MINNAERT [49] til

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma P_\infty}{\rho_v}} \quad (7.2)$$

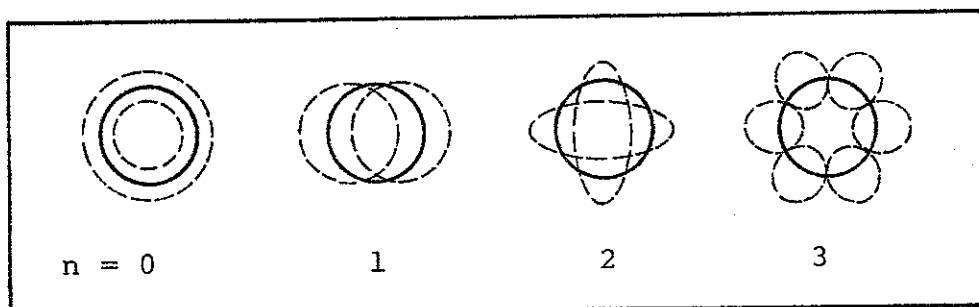


Fig 7.1 Forskellige svingningsformer for en boble [66].

Det er her antaget, at pulsationen er adiabatisk, idet  $\gamma = C_p/C_v$  indgår i stedet for polytropeksponenten  $\kappa$ . En beregning af den energi, der er involveret i de forskellige svingningsformer, viser, at 0. mode er langt den vigtigste, og i det følgende vil kun volumenpulsationer blive omtalt.

Formel (7.2) til bestemmelse af  $f_0$  er opstillet for en sfærisk boble, men STRASBERG [65] har vist, at volumenpulsationens frekvens kun afhænger ganske lidt af boblens form. Således vil en ellipsoide med  $e=2$  (forholdet mellem storaksen og lilleaksen) have en egenfrekvens, som kun er 2% større end frekvensen for en sfærisk boble med samme volumen.

STRASBERG har også beregnet resonansfrekvensen for en boble, som berører en fast væg. Beregningerne er verificeret eksperimentelt af HOWKINS [28] for bobler med egenfrekvenser på 100-3000 Hz, og resultatet er en formindskelse af frekvensen med maksimalt 17% i forhold til pulsationer i et uendeligt medium.

#### A. Frie pulsationers egenfrekvens.

Siden MINNEART [49] i 1933 opstillede ligning (7.2) til beregning af en pulserende bobles egenfrekvens, har mange forskere arbejdet på at eftervise formlen eksperimentelt. Det har siden vist sig, at (7.2) ikke er helt korrekt under alle forhold, således må fx overfladespændingen inkluderes ved beregning af  $f_0$  for små bobler.

Den mest detaljerede bestemmelse af egenfrekvensen for en pulserende luftboble er gennemført af SHIMA [61] i 1970, idet han i sine beregninger har inkluderet såvel overfladespænding og viskositet som væskens kompressibilitet. Derimod har han negligeret diffusion og varmeledning. Udgangspunkt for beregningerne er Kirkwood-Bethe ligningen (5.1) for en kompressibel væske. Ved at antage små udsving fra ligevægtsstillingen for volumenpulsationerne kan ligningen lineariseres og resonansfrekvensen findes. Løsningen er:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \frac{1}{1 + FG} \sqrt{N(1 + FG) - \frac{1}{4}(G + FN)^2} \quad (9.1)$$

hvor

$$F = \frac{1}{\sqrt{\psi(1 + K)}} \sqrt{\frac{\rho_\infty}{P_\infty}}, \quad K = \frac{B}{P_\infty}$$

$$G = \frac{4\eta_V}{\rho_\infty R_0}$$

$$N = \frac{3\gamma}{\rho_\infty} \cdot \left[ P_\infty + \left[ 1 - \frac{1}{3\gamma} \right] \cdot \frac{2\sigma}{R_0} \right]$$

I beregningerne er forudsat adiabatisk tilstandsændring for luften i boblen. Indsættes i (9.1)  $\sigma = \eta_V = F = 0$ , dvs at henholdsvis overfladespænding, viskositet og kompressibilitet negligeres, fås Minnearts formel (7.2). Medregnes overfladespændingen fås

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma}{\rho_\infty} \cdot \left[ P_\infty + \left[ 1 - \frac{1}{3\gamma} \right] \cdot \frac{2\sigma}{R_0} \right]} \quad (9.2)$$

en formel, som er opstillet af ROBINSON & BUCHANAN [60]. Inkluderer yderligere viskositeten fås en formel opstillet af HOUGHTON [27].

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma}{\rho_\infty} \cdot \left[ P_\infty + \left[ 1 - \frac{1}{3\gamma} \right] \cdot \frac{2\sigma}{R_0} \right] - \left[ \frac{2\eta_V}{\rho_\infty R_0} \right]^2} \quad (9.3)$$

På grundlag af Shimas beregninger kan følgende konklusioner drages angående bestemmelsen af egenfrekvensen:

1. Kompressibilitet og viskositet kan negligeres for  $R_0 > 10^{-3}$  mm.
2. Overfladespændingen kan negligeres for  $R_0 > 10^{-2}$  mm.

Disse resultater fremgår af tabel 11.1, hvor egenfrekvenser udregnet efter de forskellige formler er sammenlignet. En alvorlig mangel ved Shimas formel (9.1) er, at den ikke tager hensyn til varmeledningen. Det gør derimod følgende formel for egenfrekvensen, som er opstillet af DEVIN [15]:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma P_\infty}{\rho_V}} \sqrt{\frac{g}{\beta}} \quad (10.1)$$

hvor  $g = 1 + \frac{2\sigma}{P_\infty R_0} - \frac{2\sigma}{3\gamma P_\infty R_0} \cdot \beta$

$$\beta = 1 + \frac{3(\gamma - 1)}{2\phi R_0} \left[ 1 + \frac{3(\gamma - 1)}{2\phi R_0} \right] \quad \text{for } 2\phi R_0 > 5$$

$$\beta = \gamma - \frac{(2\phi R_0)^4}{1890} \left[ 1 - \frac{2,1(\gamma - 1)^2}{\gamma} \right] \quad \text{for } 2\phi R_0 < 5$$

$$\phi = \sqrt{\frac{\pi f_0}{\alpha_g}}$$

$\alpha_g$  er temperaturledningsevnen for gassen.

Det ses, at (10.1) er identisk med Minnearts formel (7.2) bortset fra faktoren  $\sqrt{g/\beta}$ . Varmeledningens indflydelse på beregningsresultatet fremgår af tabel 11.1. En simplere formel for egenfrekvensen under hensyntagen til varmeledning og overfladespænding er opstillet af CHAPMAN & PLESSET [13] i 1970

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\kappa}{\rho_V} \cdot \left[ P_\infty + \left[ 1 - \frac{1}{3\kappa} \right] \cdot \frac{2\sigma}{R_0} \right]} \quad (10.2)$$

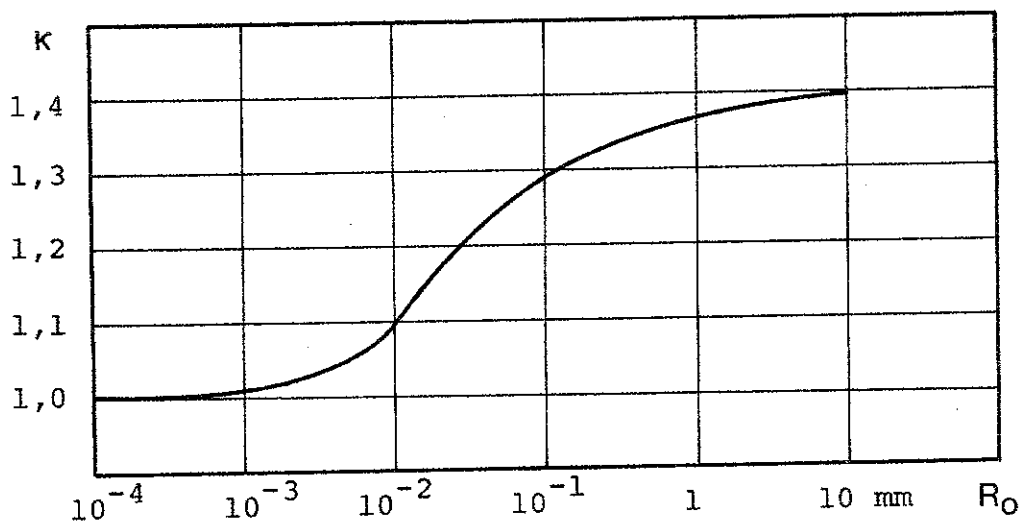


Fig 10.1 Polytropeksponenten for luftens tilstandsændring som funktion af boblens radius [13].

Formel (10.2) er identisk med (9.2), bortset fra at  $\gamma$  er erstattet med polytropeksponenten  $\kappa$ . Som omtalt senere pulserer store bobler adiabatisk ( $\kappa=1,4$ ), medens små bobler pulserer isotermisk ( $\kappa=1,0$ ). Chapman & Plesset har numerisk beregnet  $\kappa$  som funktion af  $R_0$  og angivet resultatet i kurveform, som vist i fig 10.1. Indsættes  $\kappa$ -værdier fra kurven i formel (10.2) fås de værdier for  $f_0$ , som er vist i sidste kolonne af tabel 11.1. Der er god overensstemmelse mellem  $f_0$ -værdierne beregnet efter henholdsvis (10.1) og (10.2), som begge inkluderer overfladespænding og varmeledning.

Ved at sammenligne resultaterne beregnet efter henholdsvis (9.2) og (10.2) ses, at varmeledningen kan negligeres for  $R_0 > 1$  mm. Man kan imidlertid også se bort fra varmeledningen for  $R_0 < 10^{-3}$  mm, hvis man i alle formlerne indsætter  $\kappa = 1$ . Samme resultat fås direkte af fig 10.1, som viser, at boblepulsationen er adiabatisk for  $R_0 > 1$  mm og isotermisk for  $R_0 < 10^{-3}$  mm. Ved beregning af egenfrekvensen anbefales det at benytte formel (10.2), idet denne må skønnes at give de nøjagtigste resultater og desuden er simpel at anvende.

$R_0$	Minneart	Robinson & Buchanan	Houghton	Shima	Devin	Chapman & Plesset
mm	(7.2)	(9.2)	(9.3)	(9.1)	(10.1)	(10.2)
10	$3,29 \cdot 10^2$	$3,29 \cdot 10^2$	$3,29 \cdot 10^2$	$3,29 \cdot 10^2$	$3,27 \cdot 10^2$	$3,27 \cdot 10^2$
1	$3,29 \cdot 10^3$	$3,29 \cdot 10^3$	$3,29 \cdot 10^3$	$3,29 \cdot 10^3$	$3,25 \cdot 10^3$	$3,25 \cdot 10^3$
$10^{-1}$	$3,29 \cdot 10^4$	$3,31 \cdot 10^4$	$3,31 \cdot 10^4$	$3,31 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^4$	$3,17 \cdot 10^4$
$10^{-2}$	$3,29 \cdot 10^5$	$3,47 \cdot 10^5$	$3,47 \cdot 10^5$	$3,47 \cdot 10^5$	$3,09 \cdot 10^5$	$3,06 \cdot 10^5$
$10^{-3}$	$3,29 \cdot 10^6$	$4,81 \cdot 10^6$	$4,73 \cdot 10^6$	$4,76 \cdot 10^6$	$3,89 \cdot 10^6$	$3,96 \cdot 10^6$

Tabel 11.1 Egenfrekvensen  $f_0$  i {Hz} for luftbobler i vand.  $P_\infty = 1$  atm,  $T_\infty = 0$  °C.

## B. Dæmpning af boblepulsationen.

Svingningsamplituden for en frit pulserende luftboble i vand vil aftage med tiden, hovedsagelig på grund af følgende tre dæmningsmekanismer:

1. Termisk dæmpning, som skyldes varmeledning mellem boblen og det omgivende fluid.
2. Akustisk dæmpning, som forårsages af den pulserende bobles energiudsendelse.
3. Viskos dæmpning, som skyldes de viskose kræfter i væsken ved bobleoverfladen.

Under antagelse af at boblen udfører lineære, harmoniske pulsationer kan ovenstående tre dæmningsbidrag bestemmes teoretisk, som vist af DEVIN [15]. Indføres dæmningskonstanten  $\delta = \Lambda/\pi$ , hvor  $\Lambda$  er det logaritmiske dekrement, vil den totale dæmpning kunne skrives som  $\delta = \delta_T + \delta_A + \delta_V$ . Her er  $\delta_T$ ,  $\delta_A$  og  $\delta_V$  dæmningskonstanterne for henholdsvis termisk, akustisk og viskos dæmpning.

1. Termisk dæmpning. I de to teoretiske ydertilfælde, hvor modstanden mod varmetransport mellem gas og væske enten er nul (isotermisk pulsation) eller uendelig stor (adiabatisk pulsation), vil den termiske dæmpning være nul, og tryk- og volumenændring for boblen vil være i fase. I virkeligheden er pulsationsprocessen polytropisk, hvilket resulterer i en faseforskel, som medfører, at kompressionsarbejdet udført af væsken på gassen er større end ekspansionsarbejdet udført af gassen på væsken [15]. Denne forskel i arbejde er i middel ensbetydende med en varmetransport fra gas til væske.

En teoretisk bestemmelse af den termiske dæmningskonstant  $\delta_T$  blev først foretaget af PFRIEM [53] i 1940, men som påvist af DEVIN [15] er Pfriems resultat unøjagtigt på grund af bortkastning af 2. ordens led i ligningerne. Devins egne beregninger resulterede i følgende udtryk for  $\delta_T$ :



$$\delta_T = \frac{\frac{\sinh(2\phi R_0) + \sin(2\phi R_0)}{\cosh(2\phi R_0) - \cos(2\phi R_0)} - \frac{1}{\phi R_0}}{\frac{2\phi R_0}{3(\gamma - 1)} + \frac{\sinh(2\phi R_0) - \sin(2\phi R_0)}{\cosh(2\phi R_0) - \cos(2\phi R_0)}} \quad (13.1)$$

hvor  $\phi = \sqrt{\frac{\pi f_0}{\alpha_g}}$

Optegnes  $\delta_T$  som funktion af  $2\phi R_0$  som vist i fig 13.1 ses, at den termiske dæmpning går mod nul for såvel  $2\phi R_0 \rightarrow 0$  (isotermisk pulsation) som for  $2\phi R_0 \rightarrow \infty$  (adiabatisk pulsation). Den maksimale værdi for  $\delta_T$  fås for  $2\phi R_0 = 5$ , hvilket svarer til en boble med  $R_0 \approx 10^{-2}$  mm og en resonansfrekvens på 330 kHz. Hvis udtrykket (10.1) for egenfrekvensen som funktion af  $R_0$  og  $\phi$  indføres i ligning (13.1), kan  $\delta_T$  findes som funktion af  $R_0$  for resonanssvingninger. Resultatet ses i fig 14.1 for luftbobler i vand ved normalt tryk og temperatur.

2. Akustisk dæmpning. En boble, som udfører volumenpulsationer i en kompressibel væske, vil tabe en del af sin energi gennem udsendelse af sfæriske trykbølger. Devins beregninger resulterede i følgende formel for  $\delta_A$ :

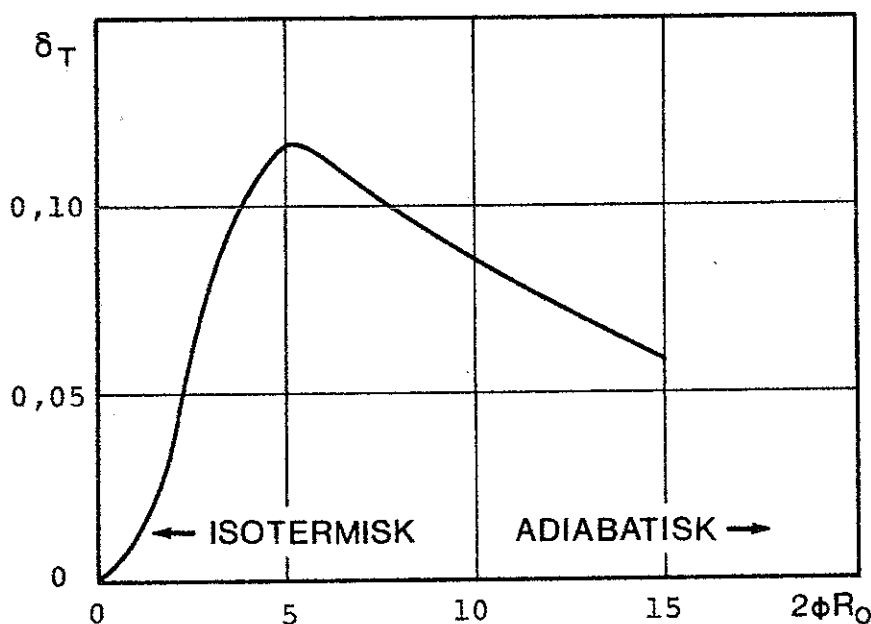


Fig 13.1 Den termiske dæmpningskonstant som funktion af den dimensionsløse parameter  $2\phi R_0$  [15].

$$\delta_A = 2\pi R_0 \cdot \frac{f_0}{c} \quad (14.1)$$

hvor  $f_0$  er egenfrekvensen bestemt ved ligning (10.1) og  $c$  er lydhastigheden i væsken. Formel (14.1) blev først opstillet af SMITH [62] i 1935. En grafisk fremstilling af (14.1) er vist i fig 14.1, og som det ses, er  $\delta_A$  tilnærmet konstant uafhængig af  $R_0$ .

3. Viskos dæmpning. Denne dæmpningsmekanisme har kun betydning ved høje pulsationsfrekvenser, dvs for små bobler. En fysisk forklaring på den viskose dæmpning gives af DEVIN [15]. Der betragtes et lille element af en kugleskal af væske nær boblevæggen. Under boblens ekspansion deformeres dette element, således at tykkelsen formindskes, medens overfladearealet forøges. Når boblen kontraherer finder den omvendte deformation sted. På grund af de viskose kræfters virkning under væskeelementets formændring sker der en vis energidissipation i væsken nær bobleoverfladen.

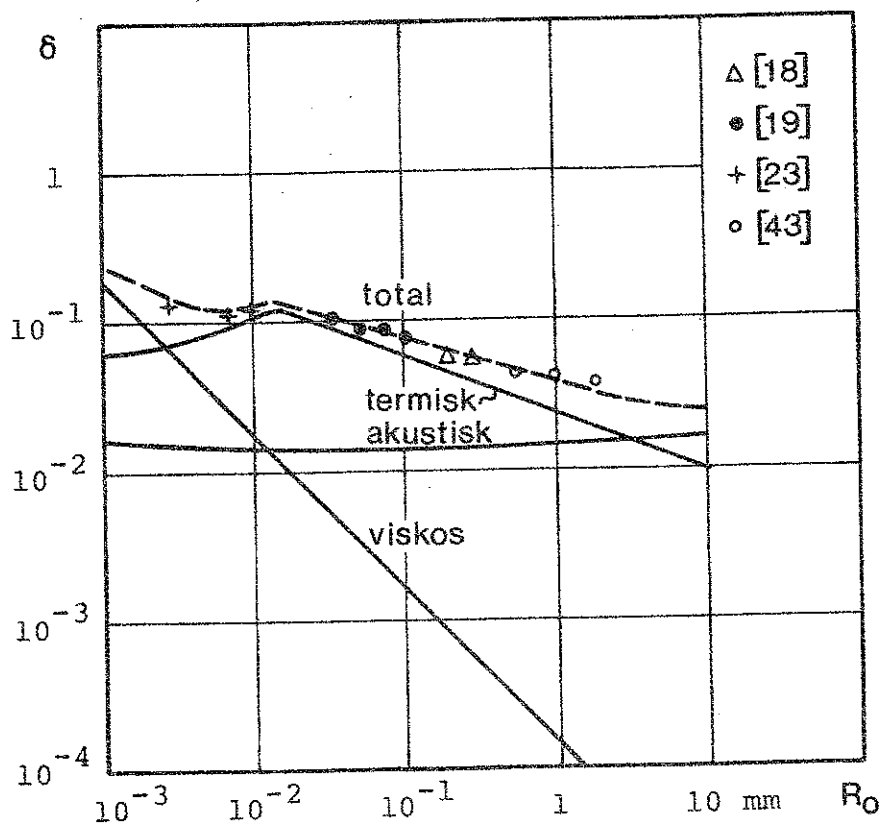


Fig 14.1 Den termiske, akustiske, viskose og totale dæmpningskonstant som funktion af boblens radius [15].

Devins beregninger resulterede i følgende formel for  $\delta_V$ :

$$\delta_V = \frac{2\eta_V}{\rho_V \pi R_0^2} \cdot \frac{1}{f_0} \quad (15.1)$$

hvor  $\eta_V$  er den dynamiske viskositet og  $f_0$  egenfrekvensen bestemt ved (10.1). Indtegning af  $\delta_V$  som funktion af  $R_0$  i fig 14.1 viser, at den viskose dæmpning kun har betydning for  $R_0 < 10^{-2}$  mm.

4. Den totale dæmpning. I fig 14.1 er også kurven for  $\delta = \delta_T + \delta_A + \delta_V$  indtegnet, og der bemærkes følgende karakteristika:

1. For  $R_0 < 10^{-3}$  mm skyldes dæmpningen hovedsagelig de viskose kræfter.
2. For  $R_0 > 10$  mm er den akustiske dæmpning vigtigst.
3. Den termiske dæmpning er vigtigst for  $10^{-2} < R_0 < 1$  mm.

Størrelsen af de enkelte dæmningsbidrag er også beregnet af CHAPMAN & PLESSET [13], som angiver kurveforløb, der stemmer nydeligt overens med kurverne i fig 14.1.

En eksperimentel bestemmelse af dæmningskonstanten for resonansbobler er gennemført af flere forskere [18], [19], [23], [41] og [43], og overensstemmelsen mellem teori og eksperimenter er god, hvilket fremgår af fig 14.1. En oversigt over disse eksperimentelle arbejder er givet af PETERS [52]. Der bemærkes en tendens til at måle for høje værdier af  $\delta$  for store bobler, hvilket kan skyldes, at andre dæmningsmekanismer får betydning. I nedenstående 4 punkter er forskellige forslag til alternative dissipationsfaktorer omtalt, men de har endnu ikke været underkastet en teoretisk behandling.

1. SMITH [62] har foreslået, at pulsationen kan give anledning til betydelig turbulens i væsken, især hvis boblen ikke er kuglesymmetrisk.
2. CARSTENSEN & FOLDY [11] har bemærket, at pulsationen kan give anledning til periodisk kondensation og fordampning af vanddampe i boblen.

3. Benjamin & Strasberg (se DEVIN [15]) mener, at der kan optræde kobling mellem volumenpulsationen af 0. orden og højere ordens svingningsmodes, hvilket vil resultere i større energidissipation.
4. HOUGHTON [27] har foreslået, at tangentielle hastighedskomponenter forårsaget af strømning omkring boblen kan interferere med de radielle komponenter, hvilket vil resultere i øget dæmpning. Dette er især relevant for store bobler.

### C. Pulserende boblers termodynamik.

De termodynamiske forhold for boblepulsationen er behandlet af DEVIN [15] og CHAPMAN & PLESSET [13] med det formål at bestemme varmeledningens indflydelse på pulsationens dæmpning og boblens egenfrekvens. En mere dybtgående undersøgelse er gennemført af PLESSET & HSIEH [56], som teoretisk har behandlet problemet for lineært pulserende bobler i et lydfelt. De har først undersøgt de termodynamiske forhold under antagelse af ens tryk og temperatur overalt i boblen, og dernæst med antagelse af temperaturgradient i boblen. Ud fra asymptotiske løsninger til ligningssystemet har de kunnet bestemme de gennemsnitlige termodynamiske forhold for boblepulsationen. Resultatet af beregningerne er angivet i tabelform af PLESSET [54], men en mere overskuelig grafisk fremstilling er vist i fig 17.1.

Som det ses, er kurvebladet inddelt i 3 områder, det isoterme, det adiabatisk og et overgangsområde. I figuren er desuden vist kurven for resonansbobler, og det bemærkes, at boblerne pulserer adiabatisk for  $R_0 > 10^{-1}$  mm og isotermisk for  $R_0 < 10^{-3}$  mm. Specielt for resonansbobler fås dog et nøjagtigere billede af de termodynamiske forhold ud fra kurven i fig 10.1, som viser Chapman & Plesset's beregning af  $\kappa$  som funktion af  $R_0$ . Der fås følgende resultat:

$$R_0 > 1 \text{ mm: adiabatisk}$$

$$R_0 < 10^{-3} \text{ mm: isotermisk}$$

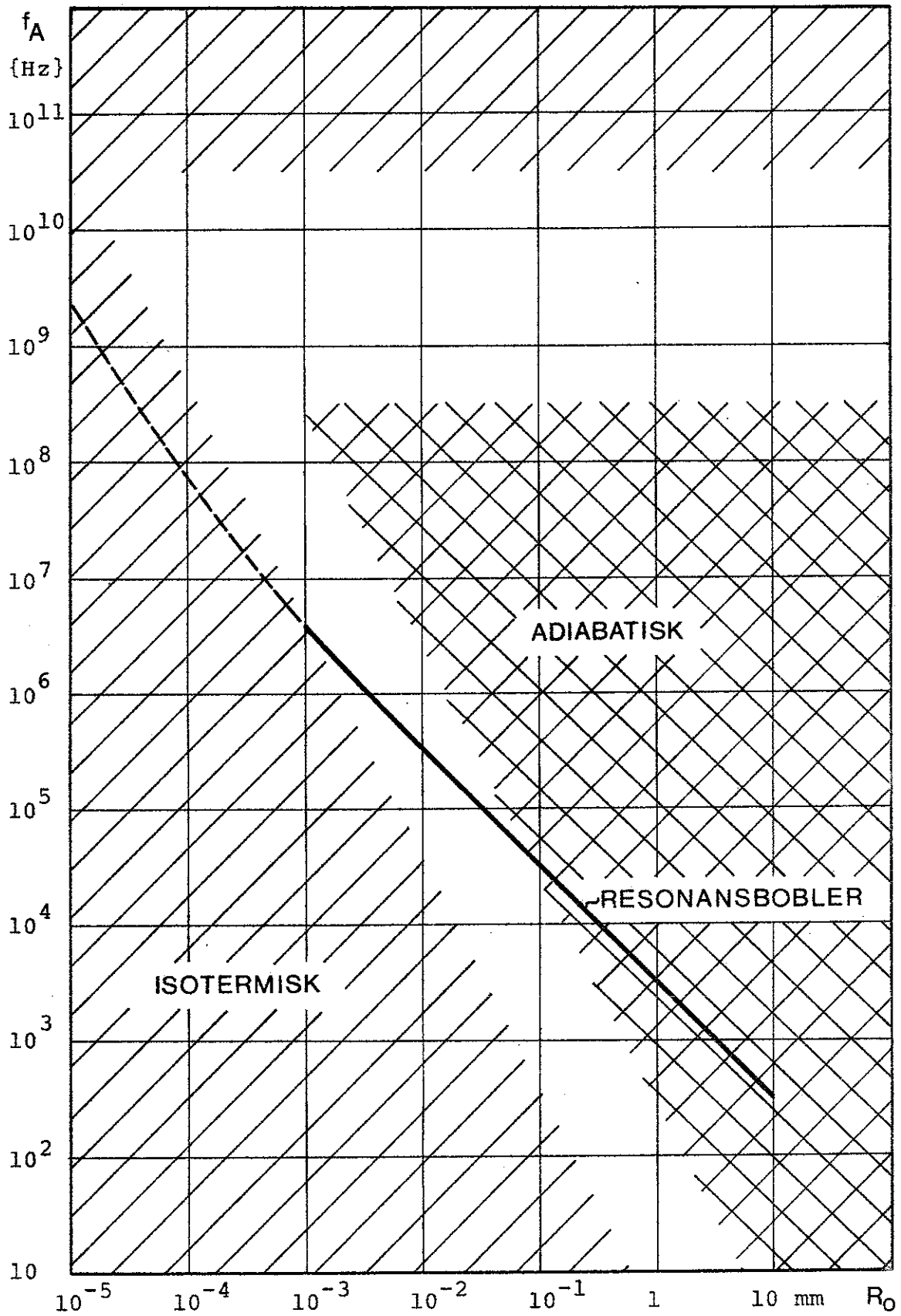


Fig 17.1 De termodynamiske forhold for en pulserende boble i et lydfelt.  $f_A$  er lydfeltets frekvens og  $R_0$  boblens ligevægtsradius.

En boble med  $R_0 = 10^{-1}$  mm vil som vist i fig 17.1 pulsere isotermisk ved meget lave og meget høje frekvenser, medens pulsationen er adiabatisk i mellemområdet. Dette overraskende resultat kan forklares ved fysiske overvejelser. Hertil kræves en definition af nogle karakteristiske længder, som Plesset & Hsieh opererer med:

$$L_g = \sqrt{\frac{\alpha_g}{\omega_A}} \quad : \text{ termisk diffusionslængde for gassen}$$

$$L_v = \sqrt{\frac{\alpha_v}{\omega_A}} \quad : \text{ termisk diffusionslængde for væsken}$$

$$\lambda_g = \frac{c_g}{f_A} \quad : \text{ akustisk bølgelængde for gassen}$$

$\omega_A$  er her den cykliske frekvens i lydfeltet, og  $\alpha$  er temperaturledningsevnen.  $L_g$  og  $L_v$  er karakteristiske længder for varmeledning, når varmekildens temperatur svinger med frekvensen  $\omega_A$ .

De termodynamiske forhold for boblepulsationen kan ifølge PLESSET [54] beskrives ved de karakteristiske længder. Dette er vist i tabel 18.1, hvor  $C'_g$  og  $C'_v$  er den specifikke varme pr volumenenhed for henholdsvis gas og væske.

Frekvens- område	Sammenligning af længder	Relevant kriterium	Termodynamiske forhold
meget høje	$\lambda_g \ll L_g \ll R_0$	$\frac{L_g}{\lambda_g} \gg 1$	isotermisk
høje	$L_g < \lambda_g < R_0$	$\frac{L_g}{\lambda_g} < 1$	adiabatisk
moderate	$L_g < R_0 < \lambda_g$	$\frac{L_g}{R_0} < 1$	adiabatisk
lave	$R_0 < L_g < \lambda_g$	$\frac{C'_v L_v}{C'_g R_0} \gg 1$	isotermisk

Tabel 18.1 Sammenligning mellem karakteristiske længder ved bestemmelse af de termodynamiske forhold for boblepulsationen [54].

Resultatet for lave og moderate frekvenser er ikke overraskende, og sammenligningen af de karakteristiske længder fører umiddelbart til et fysisk acceptabelt resultat. Hvis der nu betragtes frekvenser så høje at  $\lambda_g < R_o$ , kan egenskaber hos det omgivende fluid ikke længere være af betydning for tilstanden i boblens indre. De termodynamiske forhold for gasboblen kan derfor bestemmes, som om man har at gøre med et homogent medium. I et sådant medium vil svingningerne være adiabatisk for  $L_g/\lambda_g < 1$  og isothermiske for  $L_g/\lambda_g > 1$ . Som det ses, er dette ræsonnement i overensstemmelse med de teoretiske resultater.

#### IV. ULINEÆRE PULSATIONER

Som omtalt i kap II er ligningen for boblepulsationen en u-lineær differentiaalligning. Kun ved meget små udsving fra ligevægtsstillingen kan man med god tilnærmelse linearisere denne ligning og dermed opnå den række af simple formler for pulsationen, som er angivet i forrige kapitel. Ved store udsving fra ligevægtsstillingen er pulsationen beskrevet enten ved ligning (4.1) eller (5.1), og disse ulineære differentiaalligninger kan kun løses ad numerisk vej. Dette betyder, at der ikke kan opstilles eksplicitte udtryk for egenfrekvens, dæmpning e.l. for pulsationen. Der må i stedet gennemregnes en række eksempler, og løsningerne må angives på grafisk form. De karakteristiske træk ved en typisk ulineær pulsation fremgår af fig 20.1, hvor radius for boblen er optegnet som funktion af tiden. Til sammenligning er vist R-t kurven for en lineær pulsation.

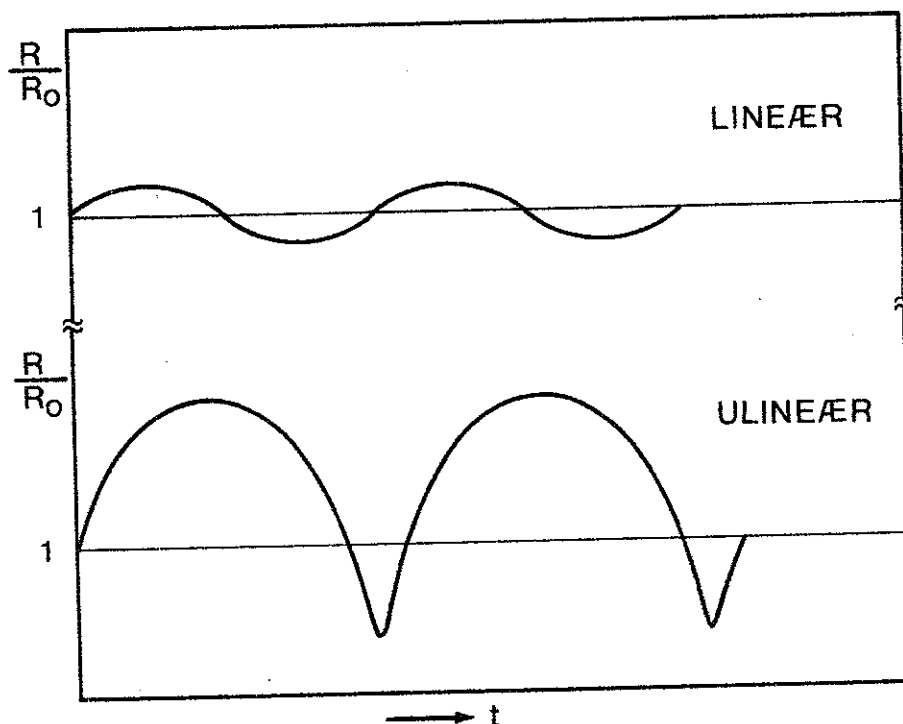


Fig 20.1 Sammenligning mellem radius-tid kurverne for en typisk lineær og ulineær pulsation.



Som det ses af fig 20.1, resulterer de ulineære effekter i en længere ekspansionsfase og en kortere kompressionsfase. Under den kortvarige kompression kan boblevæggen opnå meget høje hastigheder, og hvis disse bliver af samme størrelsesorden som lydhastigheden i væsken, må kompressibilitetseffekter for væsken medregnes, og følgelig må Kirkwood-Bethe ligningen (5.1) anvendes til beskrivelse af boblepulsationen.

Ved meget store udsving fra ligevægtsstillingen optræder der høje tryk og temperaturer i boblen i kontraktionsfasen. Disse forhold i forbindelse med boblevæggens høje hastighed kan forklare de fysiske fænomener, som er karakteristiske for kavitation. Forskellige teorier har i tidens løb været fremsat om kavitationens opståen og om årsagerne til de drastiske effekter, der optræder i forbindelse hermed. Der er dog enighed om, at fænomenerne skyldes kollaps af kavitationsbobler, som indeholder en ukendt blanding af luft og vanddamp. Disse bobler udvikles ud fra små partikler i væsken - de såkaldte kavitationskim - som kan være små uopløste luftbobler eller faste partikler med luftlommer. Udsættes disse kim for trykvariationer, begynder luftvolumenet at pulsere, og med den rette trykpåvirkning kan et voldsomt kollaps blive resultatet.

En nøjere gennemgang af de specielle forhold i forbindelse med kavitationsbobler vil ikke blive givet her. Der henvises i stedet til bøger af FLYNN [20] og KNAPP, DAILY & HAMMITT [40]. En fortegnelse over den store litteraturmængde, der eksisterer om kavitationsproblemer, findes ligeledes i disse bøger.

Et specielt eksempel på ulineære boblepulsationer skal kort omtales. Ved detonation af et kemisk eksplosiv i vand dannes en gasboble med høj temperatur og tryk. Denne boble vil ekspandere meget hurtigt under udsendelse af en chokbølge i vandet. Derefter vil boblen udføre ulineære pulsationer, som fortsætter, indtil boblen når vandoverfladen. Der er her tale om meget store bobler med en maksimaldiameter på ca 30 cm for en ladning på 1 g TNT.

Omfattende teoretiske og eksperimentelle undersøgelser af den pulserende gasboble fra en underyandsekspllosion blev ud-

ført under 2. verdenskrig. En oversigt over dette arbejde er givet af COLE [14].

Til simulering af undervandsekspllosioner benyttes ofte en elektrisk udladning i vand. Ved denne proces dannes også en ulineært pulserende gasboble, hvilket eksperimentelt er påvist af MELLEN [48].

#### A. Frie pulsationers egenfrekvens.

Medens materialet om lineære pulsationers egenfrekvens er meget omfattende, er der kun publiceret et par artikler, som omhandler egenfrekvensen ved store svingningsamplituder. Dette skyldes hovedsagelig, at løsning af den beskrivende differentiaalligning kræver anvendelse af en datamat, et hjælpemiddel som kun har været almindeligt anvendt de sidste 10 år.

Den mest systematiske bestemmelse af egenfrekvensen er gennemført af LAUTERBORN [44] i 1968. Hans udgangspunkt er følgende differentiaalligning, som løses numerisk:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_V} \cdot \left[ P_0 \cdot \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} - P_\infty \right] \quad (22.1)$$

Denne ligning er identisk med (4.1), idet der er antaget adiabatisk tilstandsændring for luften i boblen. Medens overfladespændingen er medregnet, er viskose og kompressible effekter i væsken negligeret.

Ligning (22.1) løses med følgende begyndelsesbetingelser:  $R = R_{\max}$  og  $\dot{R} = 0$  til  $t = 0$ . Dette betyder fysisk, at en boble med ligevægtsradius  $R_0$  ekspanderes til  $R = R_{\max}$ , hvorefter den slippes løs. Ligning (22.1) beskriver en udæmpet svingning, hvis frekvens kan findes som funktion af  $R_{\max}/R_0$ . I fig 23.1 er resultatet angivet for forskellige boblestørrelser, idet frekvensen  $f$  er gjort dimensionsløs ved division med den lineære egenfrekvens bestemt af formel (9.2).

Fig 23.1 viser, at der findes to grænsekurver (a) og (e) for kurveskaren. Forklaringen herpå fås ved at sammenligne ledene  $2\sigma/R$  og  $P_\infty$  i ligning (22.1). Hvis boblen er så lille, at  $2\sigma/R_{\max} \gg P_\infty$  fås kurve (e), medens kurve (a) fås for store bobler med  $2\sigma/R_0 \ll P_\infty$ .

Et forsøg på at opstille en tilnærmelsesformel til bestemmelse af frekvensen som funktion af  $R_{\max}$  og  $R_0$  er gjort af såvel GÜTH [22] som LAUTERBORN [44]. Her skal blot angives Lauterborn's formel, som gælder for  $R_{\max} > 2R_0$ :

$$f = \frac{1}{1,83 \cdot R_{\max} \sqrt{\rho}} \sqrt{P_\infty \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R_{\text{kor}}} \right)^{3\gamma} \right] + \frac{2\sigma}{R_{\text{kor}}} \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R_{\text{kor}}} \right)^{3\gamma-1} \right]} \quad (23.1)$$

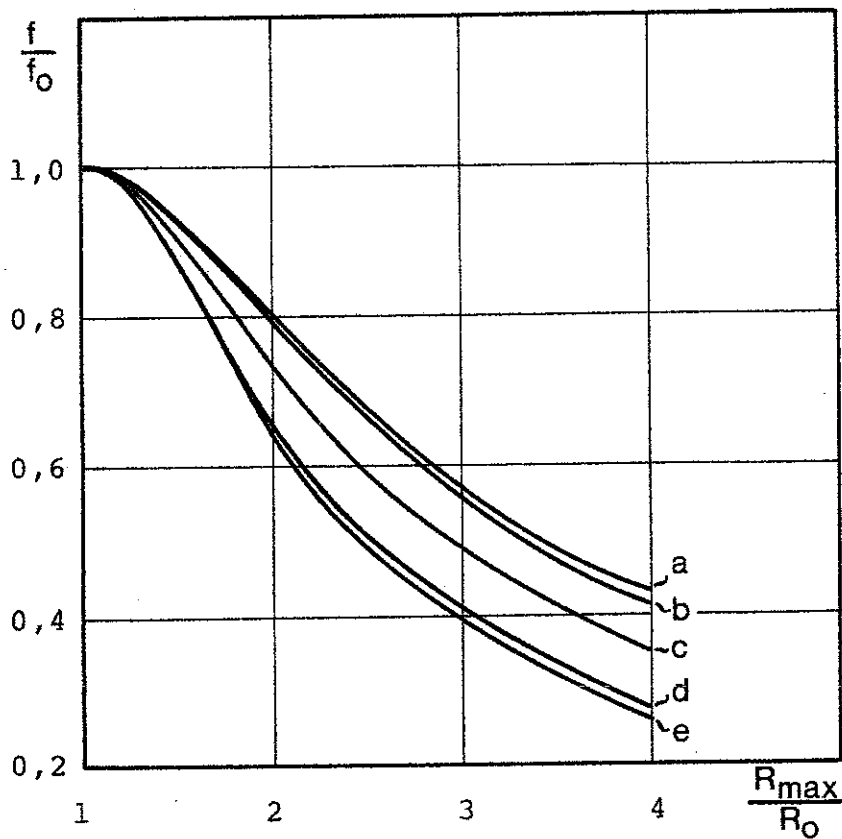


Fig 23.1 Pulsationsfrekvensen  $f$  som funktion af svingningsamplituden  $R_{\max}$  for en luftboble i vand [44].

- |    |                       |                    |
|----|-----------------------|--------------------|
| a: | $R_0 \geq 10^{-1}$ mm | $P_\infty = 1$ bar |
| b: | $R_0 = 10^{-2}$ mm    | $\gamma = 1,33$    |
| c: | $R_0 = 10^{-3}$ mm    |                    |
| d: | $R_0 = 10^{-4}$ mm    |                    |
| e: | $R_0 \leq 10^{-5}$ mm |                    |

I (23.1) er  $R_{kor} = 0,915 \cdot R_{max}$ , hvor faktoren 0,915 er en korrektion til Lauterborn's formel, som er indført af HUND [32].

Det i fig 23.1 viste resultat for den ulineære egenfrekvens som funktion af svingningsamplituden skal tages med et vist forbehold. Som nævnt er både varmeledning, viskositet og kompressibilitet negligeret, og som vist af SHIMA [61] for lineære pulsationer, er dette ikke tilladeligt. En stærkt ulineær svingning vil på grund af ovennævnte faktorer dæmpes kraftigt, således at pulsationsfrekvensen til stadighed ændres og konvergerer mod den lineære egenfrekvens. Det kvalitativt korrekte resultat, der kan udledes af fig 23.1, er at pulsationsfrekvensen aftager med voksende svingningsamplitude.

En nøjagtigere bestemmelse af egenfrekvensen kunne opnås ved numerisk løsning af Kirkwood-Bethe approksimationen (5.1) sammen med en varmeledning ligning. Dette er imidlertid en kompliceret beregningsopgave, som endnu ikke er gennemført.

Generelt er forskningsresultater vedrørende ulineære boblepulsationer sparsomme. Der eksisterer således ingen undersøgelser over de forskellige dæmpningsfaktorers størrelse ved ulineære pulsationer, ligesom de termodynamiske forhold kun er undersøgt for lineære svingninger.

### B. Pulsationer i lydfelt.

En undersøgelse af boblers opførsel under varierende tryk-påvirkning er af stor vigtighed for en bedre forståelse af sådanne fænomener som kavitation ved ultralyd, udbredelse af trykbølger i vand, kogning, samt flere andre fysiske processer inden for fluid mekanikken. I dette afsnit studeres bobler under påvirkning af en sinusformet trykvariation, medens næste afsnit behandler chokexciterede pulsationer.

Udgangspunktet for beregningerne er den ulineære differenttialligning for boblepulsationen:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_V} \cdot (P_V - P_\infty) \quad (25.1)$$

hvor der for trykket i væsken langt fra boblen indsættes  $P_\infty = P_A \cdot \sin(\omega_A t)$ . Her er  $P_A$  den påtrykte svingningsamplitude og  $\omega_A = 2\pi f_A$  er den cykliske frekvens. Der forudsættes altså kuglesymmetrisk belastning af boblen, hvilket kun gælder med tilnærmelse for  $\lambda_A \gg d_0$ , hvor  $\lambda_A$  er bølgelængden for den påtrykte svingning og  $d_0$  boblediameteren. Denne betingelse kan omformes til

$$\frac{f_A}{f_0} \ll 225 \quad (25.2)$$

idet der indsættes  $\lambda_A = c/f_A$ , hvor  $c = 1500$  m/s er lydhastigheden i vand, og desuden benyttes følgende tilnærmede udtryk for den lineære egenfrekvens:  $f_0 = 6,6/d_0$  {Hz} for  $d_0$  i {m}.

Løsning af ligning (25.1) for forskellige værdier af  $P_A$  og  $\omega_A$  giver et indtryk af de komplicerede svingningsformer, der kan registreres hos en boble i et lydfelt. En oversigt over de hidtil publiserede artikler herom er givet i tabel 25.1, sammen med variationsområder for  $f_A/f_0$  og  $P_A/P_{hy}$ , hvor  $P_{hy}$  er det hydrostatiske tryk. Som det ses, er betingelsen  $\lambda_A \gg d_0$  opfyldt i alle beregningerne, da  $[f_A/f_0]_{\max} = 4,0 \ll 225$ .

Forfattere (publikationsår)	$f_A/f_0$	$P_A/P_{hy}$
NOLTINGK & NEPPIRAS [51], (1950)	0,07 -3,5	4,0
FLYNN [20], (1964)	0,25 -2,0	0,2 -1,0
BOROTNIKOVA & SOLOUKHIN [8], (1964)	0,05 -3,5	1,5 -100
SOLOMON & PLESSET [63], (1967)	0,001 -0,6	0,2 -2,0
AKULICHEV [1], (1967)	0,15 -1,5	0,5 -300
AKULICHEV [2], (1968)	0,0003-0,15	2,0 -300
CHAN & YANG [12], (1969)	0,55 -1,2	0,05-0,2
LAUTERBORN [45], (1970)	0,25 -4,0	0,01-0,9

Tabel 25.1 Oversigt over teoretiske arbejder vedrørende ulineare boblepulsationer i lydfelt.

Der skal nu gives en kort oversigt over de enkelte arbejder, idet der især lægges vægt på de simplificerende forudsætninger for beregningerne, samt på de generelle konklusioner, som kan drages på grundlag af beregningsresultaterne.

Den første beregning af ulineære, tvungne svingninger af en gasboble i et lydfelt blev gennemført af NOLTINGK & NEPPIRAS [51] i 1950. De løste ligning (25.1) numerisk under antagelse af isotermisk pulsation og med inkludering af boblens overfladespænding. Der blev benyttet exciteringsfrekvenser såvel over som under den lineære egenfrekvens, men med en fast amplitude på 4 bar. Boblediameteren varierede mellem  $10^{-2}$  og  $10^{-3}$  mm. Deres beregninger viste, at amplituden af den ulineære boblepulsation er stærkt afhængig af forholdet  $f_A/f_0$ , idet de største amplituder optræder ved exciteringsfrekvenser lavere end egenfrekvensen.

Samme resultat opnåede FLYNN [20] i 1964, hvilket fremgår af fig 27.1, som viser et par typiske svingningsforløb. Også han benyttede ligning (25.1) til beskrivelse af boblepulsationen, men betragtede lidt større bobler, fra  $10^{-1}$ - $10^{-2}$  mm i diameter. Flynn viste desuden, at svingningsmønstret og amplitudestørrelsen er meget afhængig af, om pulsationsprocessen regnes isotermisk eller adiabatisk.

BOROTNIKOVA & SOLOUKHIN [8] har under antagelse af adiabatisk pulsation udført beregninger for meget store værdier af tryk-amplituden  $P_A$  (max 100 bar), og opnået samme resultat som Noltingk & Neppiras. Et par karakteristiske svingningsforløb er vist i fig 28.1 og 28.2. Det ses, at  $R/R_0$  antager større værdier for  $P_A = 1,5$  bar og  $f_A < f_0$  end for  $P_A = 50$  bar og  $f_A > f_0$ . Desuden bemærkes, at svingningsamplituderne vokser med tiden, hvilket kun kan forklares ved, at boblerne akkumulerer mere og mere energi under den tvungne svingning.

De viste resultater skal nok tages med forbehold, idet væsken er regnet inkompressibel. Dette er som omtalt i kap II kun tilladeligt for  $\dot{R}/C < 0,3$ , og denne ulighed er næppe opfyldt i alle ovennævnte beregningstilfælde, da boblevæggens hastighed under kontraktionsfasen vokser med voksende udsving fra ligevægtsstillingen. Også på andre områder er lig-

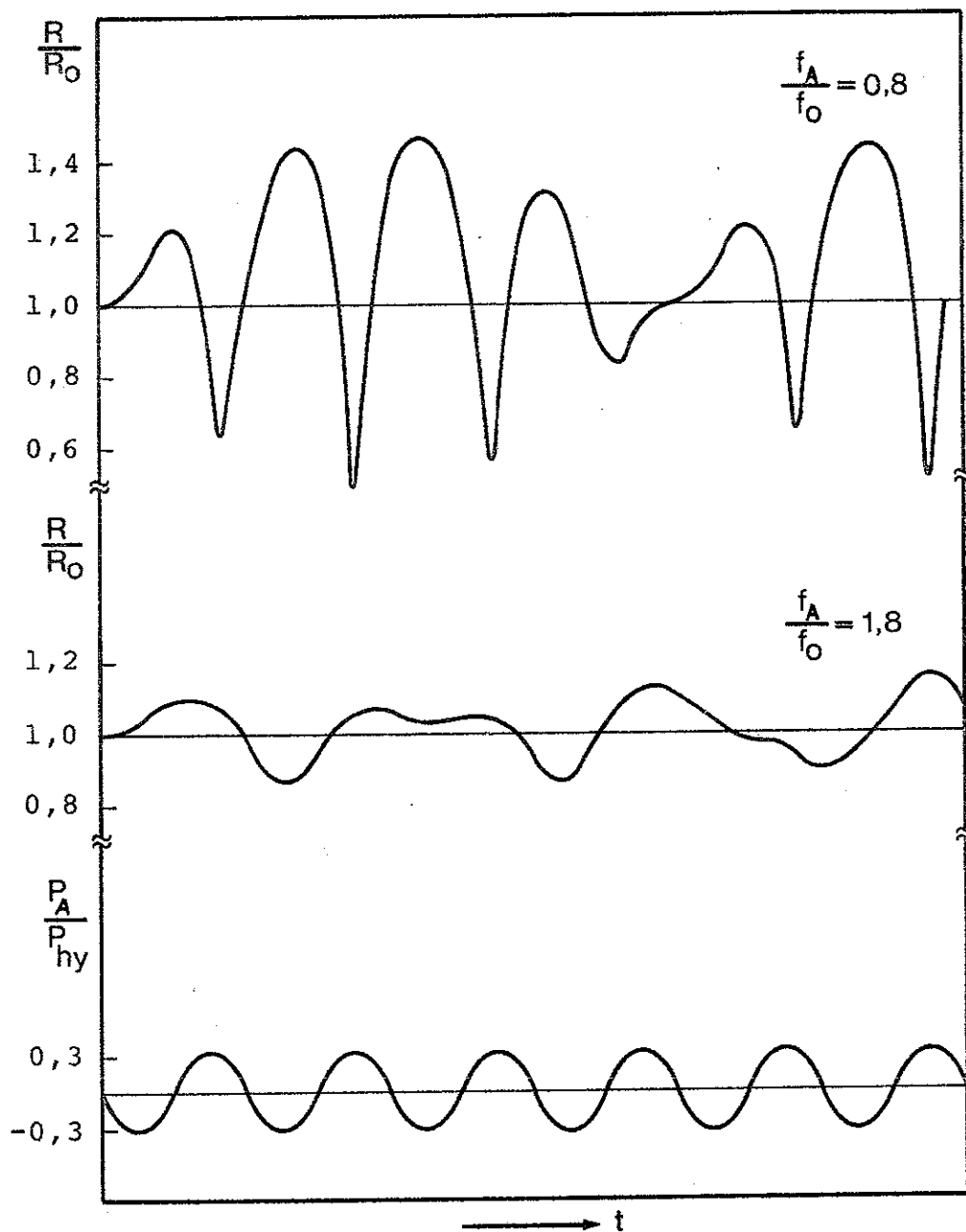


Fig 27.1 Typiske svingningsforløb for boble i lydfelt for henholdsvis  $f_A < f_0$  og  $f_A > f_0$ . Nederst er vist trykvariationen i lydfeltet [20].

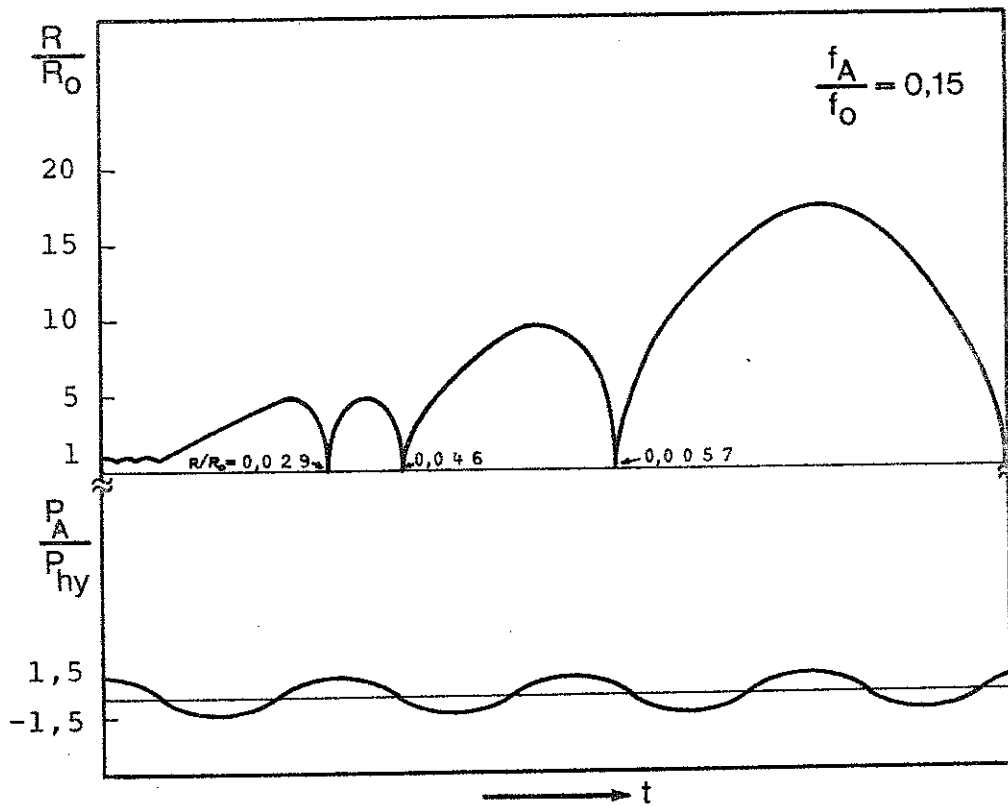


Fig 28.1 Typisk svingningsforløb for boble i lydfelt [8].

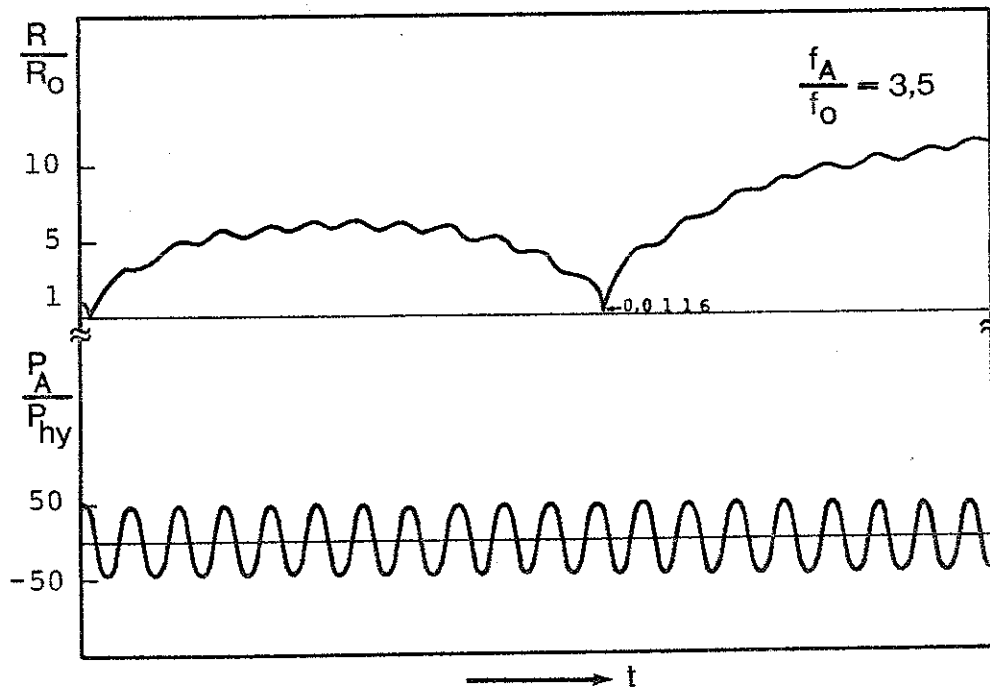


Fig 28.2 Typisk svingningsforløb for boble i lydfelt [8].



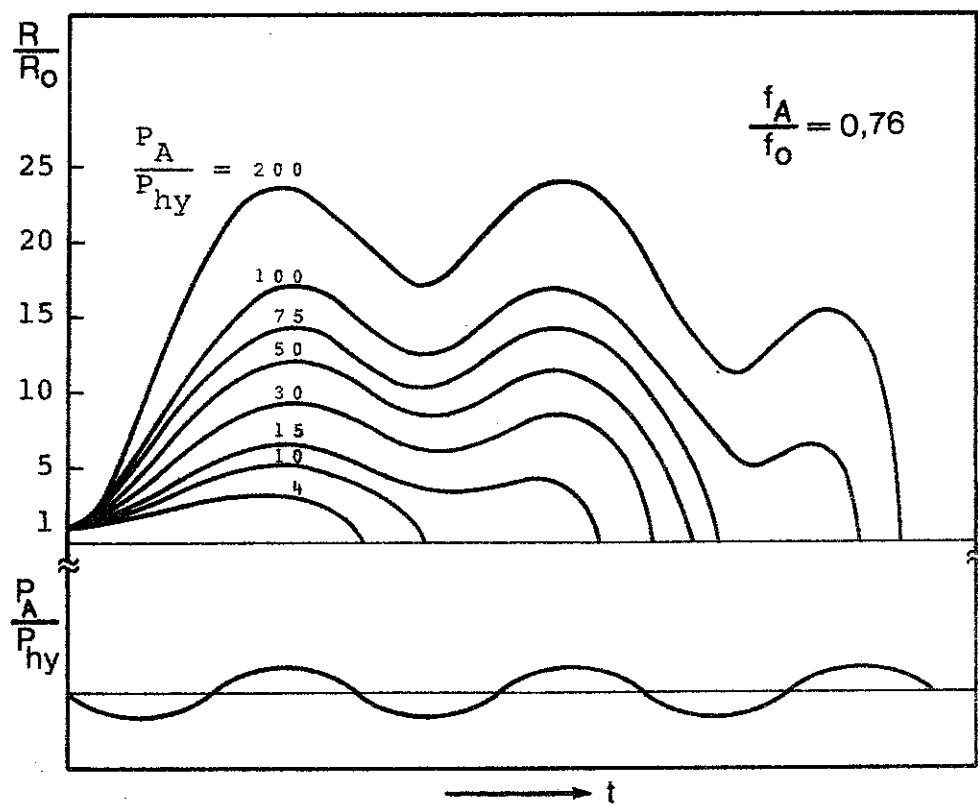


Fig 29.1 Typiske svingningsforløb for boble i lyd-felt [1].

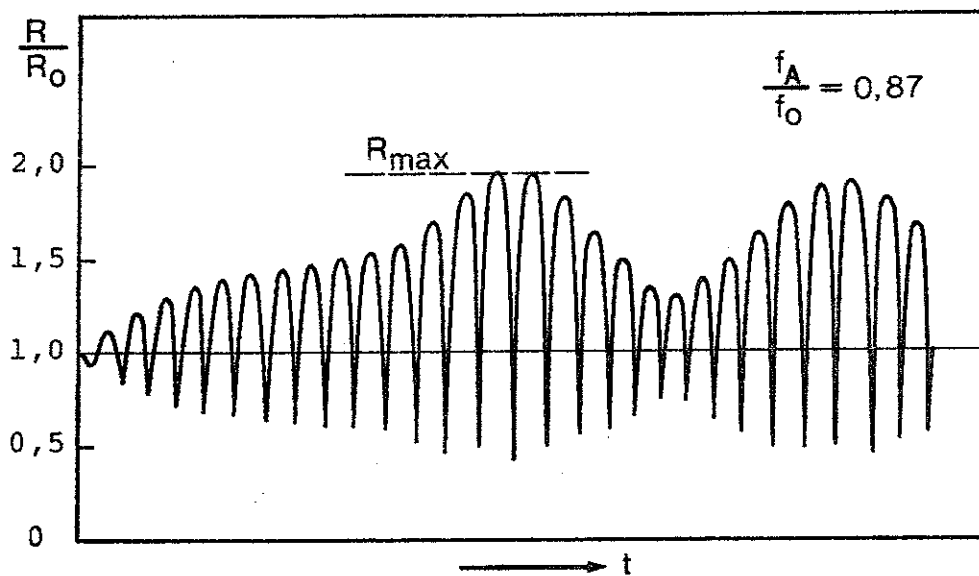


Fig 29.2 Typisk svingningsforløb for boble i lyd-felt [12].

ningerne her og i alle øvrige eksempler i dette kapitel idealiserede, idet der ses bort fra usymmetri i bobleformen, ligesom muligheden for opsplitning af boblen under pulsationen negligeres.

Til sidst kan nævnes, at Borotnikova & Soloukhin også har beregnet boblesvingningen, når belastningen er et periodisk signal bestående af positive firkantpulser.

SOLOMON & PLESSET [63] har i deres beregninger fra 1967 kun behandlet tilfælde, hvor exciteringsfrekvensen er lavere end den lineære egenfrekvens. Der er regnet på bobler af størrelsen  $10^{-1}$ - $10^{-3}$  mm i diameter og benyttet exciteringsfrekvenser på 3-20 kHz. Medens Borotnikova & Soloukhin betragter pulsationen som adiabatisk, regner Solomon & Plesset den isotermsk. De fundne kurver for boblepulsationen for forskellige værdier af  $P_A$ ,  $f_A$  og  $d_0$  viser samme karakteristiske svingningsmønstre, som tidligere fundet af Flynn.

AKULICHEV [1], [2] har udført sine beregninger for store tryk-amplituder på op til 300 bar. Han benytter ligning (25.1) med antagelse af adiabatisk pulsation til at beregne svingningsforløbet for forskellige værdier af  $P_A$ . Et typisk resultat er vist i fig 29.1, hvoraf det fremgår, at der kan optræde flere lokale minima på R-t kurven, inden  $R/R_0$  bliver mindre end 1. Undersøgelsen omfatter bobler med diametre på  $10^{-2}$ - $10^{-3}$  mm, som påtrykkes svingningsfrekvenser på 10 - 500 kHz.

CHAN & YANG [12] har studeret boblepulsationer i et lydfelt med meget små trykamplituder ( $P_A < 0,2$  bar) og med exciteringsfrekvenser nær den lineære egenfrekvens. Formålet med deres beregninger var at finde boblesvingningens maksimalamplitude som funktion af den påtrykte frekvens. Et eksempel på Chan & Yang's beregningsresultater er vist i figur 29.2, hvoraf det fremgår, at den maksimale amplitude  $R_{max}$  først optræder efter adskillige pulsationer.

En mere detaljeret undersøgelse af samme problem er gennemført af LAUTERBORN [45] i 1970. Hans beregninger er det første forsøg på en virkelig systematisk bestemmelse af boblepulsationens amplitude som funktion af  $f_A$  og  $P_A$ . Han løser ligning (25.1) numerisk under antagelse af adiabatisk pulsa-

tion og med inkludering af boblens overfladespænding. De beregnede resonanskurver er vist i fig 31.1, hvor (e) er kurven for den ulineære egenfrekvens som funktion af  $R_{\max}/R_0$ . Det bemærkes, at resonanskurvens bredde vokser med voksende trykamplitude  $P_A$ , samtidig med at den stejle venstre flanke rykker mod lavere frekvenser.

Udvides det undersøgte frekvensområde, konstateres det, at pulsationsamplituden har flere lokale maksima, hvilket ses af fig 32.1.

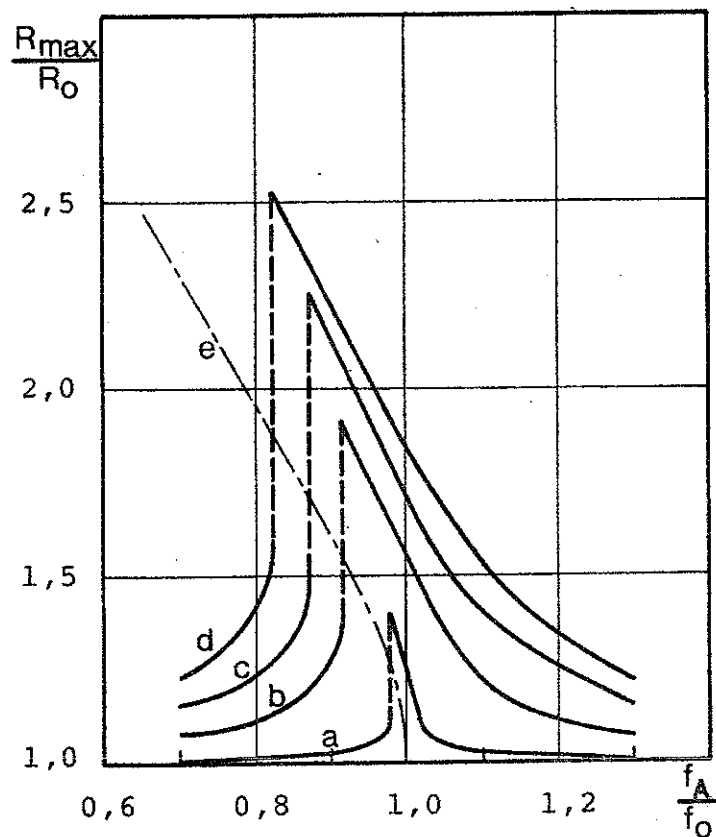


Fig 31.1 Svingsningsamplituden  $R_{\max}$  som funktion af exciteringsfrekvensen  $f_A$  for en luftboble i vand [45].

- |    |                          |                    |
|----|--------------------------|--------------------|
| a: | $P_A = 0,01$ bar         | $R_0 = 10^{-2}$ mm |
| b: | $P_A = 0,1$ bar          | $P_{hy} = 1$ bar   |
| c: | $P_A = 0,2$ bar          | $\gamma = 1,33$    |
| d: | $P_A = 0,3$ bar          |                    |
| e: | egenfrekvens for boblen. |                    |

De sekundære resonansspidsers beliggenhed i spektret er særdeles veldefineret for små trykamplituder ( $P_A < 0,5$  bar), idet de optræder, når forholdet mellem exciteringsfrekvensen og den lineære egenfrekvens er en brøk af små heltal. Der findes altså resonansspidser for  $f_A/f_0 = 1/2, 1/3 \dots$  (harmonisk resonans),  $f_A/f_0 = 2/1, 3/1 \dots$  (subharmonisk resonans),  $f_A/f_0 = 2/3, 3/2 \dots$  (ultraharmonisk resonans).

Af disse mange resonanstilfælde har den første subharmoniske ( $f_A/f_0 = 2$ ) været genstand for specielle undersøgelser. Således har ELLER & FLYNN [17] foretaget en teoretisk beregning af boblepulsationen for  $f_A/f_0 = 2$ , og NEPPIRAS [50] har eksperimentelt påvist eksistensen af resonansspidsen.

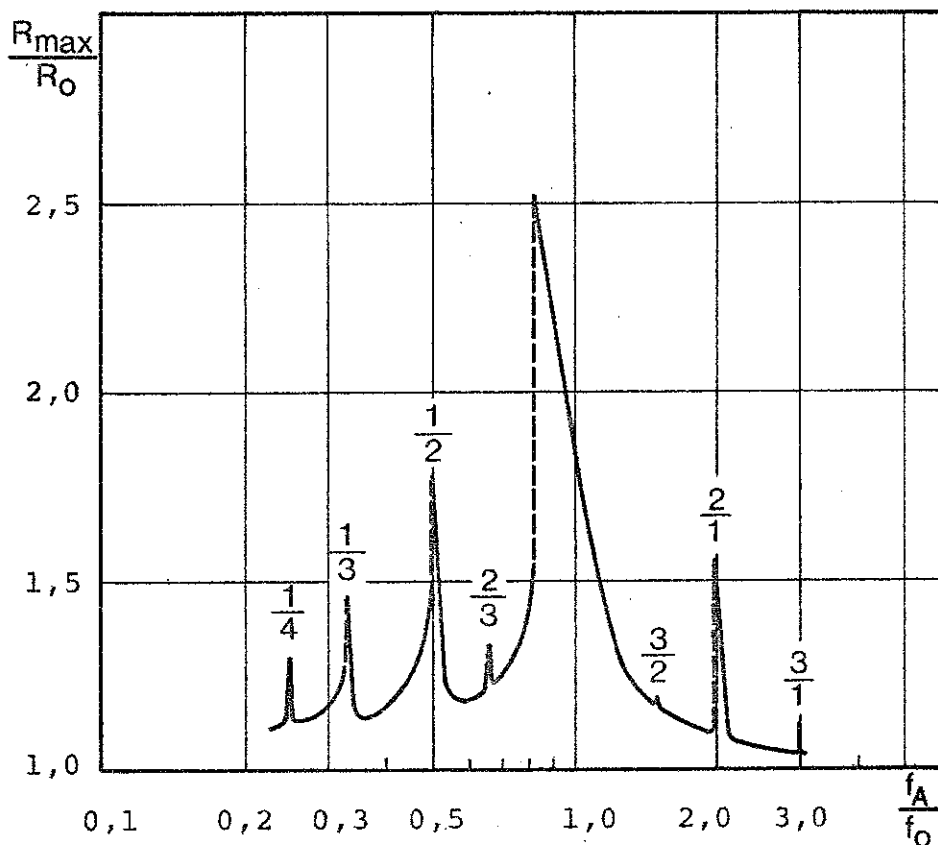


Fig 32.1 Svingsningsamplituden  $R_{\max}$  som funktion af exciteringsfrekvensen  $f_A$  for en luftboble i vand [45].

$$R_0 = 10^{-2} \text{ mm}$$

$$\gamma = 1,33$$

$$P_{hy} = 1 \text{ bar}$$

$$P_A = 0,3 \text{ bar}$$

### C. Chokbølge exciterede pulsationer.

Da denne licentiatrapport primært omhandler chokexciterede pulsationer af luftbobler i vand, er en oversigt over de hidtil gennemførte undersøgelser af disse fænomener af særlig interesse. Studiet af chokexciterede boblepulsationer har fundet sted i Sovjetunionen siden 1961, men som det fremgår af det følgende, er der kun publiceret ganske få artikler om emnet.

Udgangspunktet for en teoretisk bestemmelse af boblepulsationen er igen den ulineære differentialligning (25.1), idet der for trykket i væsken langt fra boblen indsættes

$$P_{\infty} = P_m \cdot e^{-\frac{t}{\theta}} \quad (33.1)$$

Her er  $P_m$  maksimaltrykket og  $\theta$  tidskonstanten for en chokbølge med eksponentielt aftagende tryk bag fronten, se fig 33.1. Forudsætningen for at benytte ligning (25.1) er, at bølgelængden for choket er meget større end boblediameteren, således at belastningen af boblen kan regnes kuglesymmetrisk. For en chokbølge af ovennævnte type kan bølgelængden passende defineres ved  $\lambda_c = c \cdot \theta$ , hvor  $c$  er væskens lydhastighed.

Numerisk løsning af (25.1) sammen med (33.1) under antagelse af adiabatisk pulsation er gennemført af KEDRINSKIJ [38]

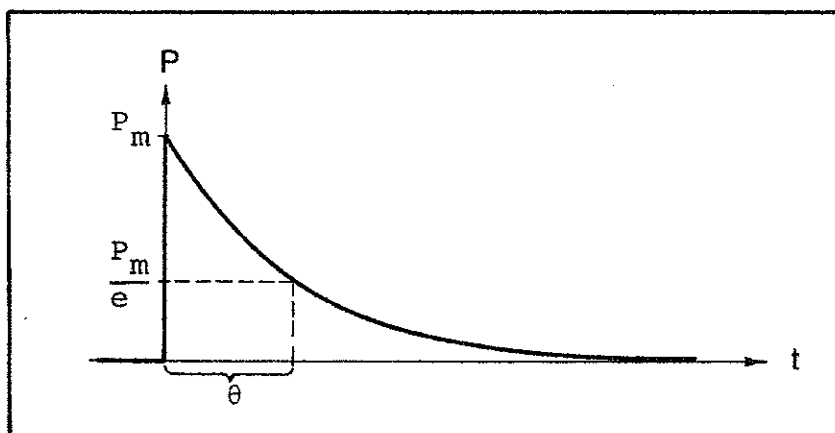


Fig 33.1 Tryk-tid kurve for chokbølge med eksponentielt aftagende tryk bag fronten.

for forskellige værdier af  $P_m$  og  $\lambda_c/d_o$ . I alle beregninger er bølgelængden større end boblediameteren, idet betingelsen  $\lambda_c > 7,5 \cdot d_o$  er opfyldt. Kedrinskij ønskede primært at finde boblens minimumradius som funktion af chokbølgens parametre, og han angiver følgende tilnærmelsesformel:

$$\left( \frac{R_o}{R_{\min}} \right)^{3\gamma - 1} = 1 + \frac{\xi A^2 (\gamma - 1)}{1 + \xi A} \quad (34.1)$$

hvor  $\xi = \left( \frac{\theta}{R_o} \right)^2 \cdot \frac{P_{hy}}{\rho_v}$  og  $A = \frac{P_m}{P_{hy}}$

I tabelform sammenlignes de approksimative værdier med de eksakte, beregnet af ligning (25.1). Største afvigelse på 6% optræder ved små værdier af  $\xi$ , hvor bølgelængden  $\lambda_c \approx 10 \cdot d_o$ .

I en artikel fra 1961 har også SOLOUKHIN [64] beskæftiget sig med chokexciterede pulsationer. Han har studeret en luftboble i vand, som rammes af chokbølgen fra en elektrisk udledning. De karakteristiske parametre i forsøget er  $d_o = 7$  mm,  $P_m = 10$  bar og  $\theta = 100$   $\mu$ s. Bølgelængden for choket bliver da  $150$  mm  $\gg d_o$ , og følgelig kan ligning (25.1) benyttes til en teoretisk bestemmelse af boblepulsationen.

Den beregnede R-t kurve søger Soloukhin at eftervise eksperimentelt ved højhastigheds fotografering af den pulserende boble. Denne er under forsøget indesluttet i en tynd gummi-hinde, hvorved den hindres i at stige op til vandoverfladen. I fig 35.1 er vist såvel den beregnede som den målte R-t kurve, og som det ses, fås omtrent samme værdi for  $(R/R_o)_{\min}$  i de to tilfælde. Bortset herfra er overensstemmelsen mellem kurveforløbene kun acceptabel de første  $100$   $\mu$ s.

Soloukhin's artikel [64] er den eneste, som behandler chokexciterede pulsationer såvel teoretisk som eksperimentelt. I et forsøg på at fremskaffe yderligere materiale herom, blev der indledt en korrespondance med Dr. R.I. Soloukhin, hvilket resulterede i en kort rapport af KEDRINSKIJ & SOLOUKHIN [39]. Denne gav dog ingen væsentlige nye informa-

tioner, så det materiale, der for øjeblikket eksisterer om chokexciterede boblepulsationer, er meget sparsomt.

En detaljeret undersøgelse - såvel teoretisk som eksperimentel - af trykvariationerne inde i en luftboble, som rammes af chokbølgen fra en undervandsekspllosion, er omtalt i de resterende kapitler af denne rapport. Med forbillede i Soloukhin's undersøgelser gøres boblen stationær ved hjælp af en gummiballon, og diameterændringer registreres ved fotografiering.

#### D. Boblestabilitet.

I de foregående afsnit er der for den pulserende boble forudsat, at dens ligevægtsdiameter  $d_0$  er konstant, samt at boblen under pulsationen beholder sin sfæriske form. Imidlertid er hverken bobleform eller størrelse stabil, hvilket bl. a. fremgår af de boblefotografier, der er optaget af HUND [31]. Også FLYNN [20] har foretaget fotografiske studier af pulserende bobler, og han nævner, at der kan optræde endog

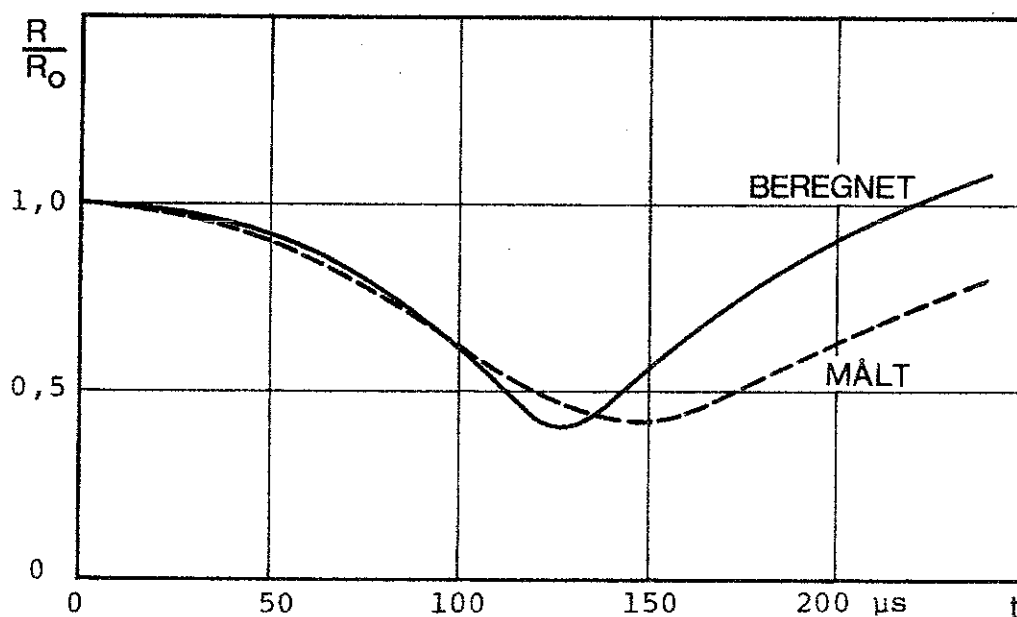


Fig 35.1 Sammenligning mellem beregnet og målt  $R$ - $t$  kurve for luftboble i vand, som rammes af chokbølge [64].

store afvigelser fra den kuglesymmetriske form, hvilket i visse tilfælde kan resultere i opsplitning af boblerne.

En teoretisk undersøgelse af stabiliteten af den sfæriske form af en radielt oscillerende gasboble er gennemført af bl. a. BIRKHOFF [5], PLESSET & MITCHELL [57] og PLESSET [54]. De har alle forsøgt at fastslå, hvorvidt en lille perturbation - repræsenteret ved kugleharmoniske funktioner - af den sfæriske overflade vil vokse eller aftage. Resultatet af beregningerne er ret kompliceret, men generelt gælder, at boblers ekspansion er stabil, medens kontraktionen er ustabil. Imidlertid har også faktorer som pulsationsamplitudens og overfladespændingens størrelse betydning for stabiliteten af den sfæriske form.

Ændring af en bobles ligevægtsstørrelse kan fx ske ved diffusion af gas fra væsken til boblen eller omvendt. Dette forhold viser sig ved, at bobler som genereres i en væske, der ikke er mættet med pågældende gas, efterhånden vil opløses og forsvinde, medens bobler i en overmættet væske på grund af diffusion vil vokse. Ganske specielle forhold gør sig gældende, hvis boblen er bragt i pulsationer af et lydfelt, idet der da optræder et fænomen, der kaldes ensrettet diffusion, og som medfører, at også bobler i en umættet væske vil vokse.

Under boblepulsationen vil trykket i boblen og dermed gas-koncentrationen variere. Således vokser koncentrationen under kompressionen, og gas diffunderer fra boblen til væsken, medens processen går i modsat retning under ekspansionen. Nu er diffusionsmængden proportional med bl. a. overfladearealet af boblen, og dette er i middel størst i ekspansionsfasen, når diffusionen foregår fra væsken til boblen. Yderligere er den tid boblen tilbringer i den ekspanderede fase voksende med voksende ulinearitet for pulsationen, hvilket også øger diffusionen fra væsken til boblen. I middel resulterer ovenstående forhold i en nettoforøgelse af gasindholdet i boblen, og ligevægtsdiametere  $d_0$  vokser.

En oversigt over de hidtil publicerede artikler om ensrettet diffusion er givet af KAPUSTINA [37] i 1970. De to stan-



dardreferencer for en teoretisk behandling af diffusionsproblemet er af henholdsvis HSIEH & PLESSET [30] og ELLER & FLYNN [16]. En eksperimentel bestemmelse af ændringen af boblestørrelsen som funktion af tiden på grund af ensrettet diffusion er gennemført af KAPUSTINA [36]. Forsøgsresultaterne er vist i fig 37.1 for forskellige trykamplituder af lydfeltet. Det ses, at boblestørrelsen vokser ganske betragteligt i løbet af de ca 10 min, diffusionsprocessen er iagttaget.

I kapitlet om pulserende bobler i et lydfelt er boblernes gasindhold regnet konstant. Dette gælder med god tilnærmelse, sålænge der kun betragtes nogle få pulsationer, men hvis en boble studeres i flere millisekunder, må der tages hensyn til den ensrettede diffusion. Som det fremgår af fig 37.1 er

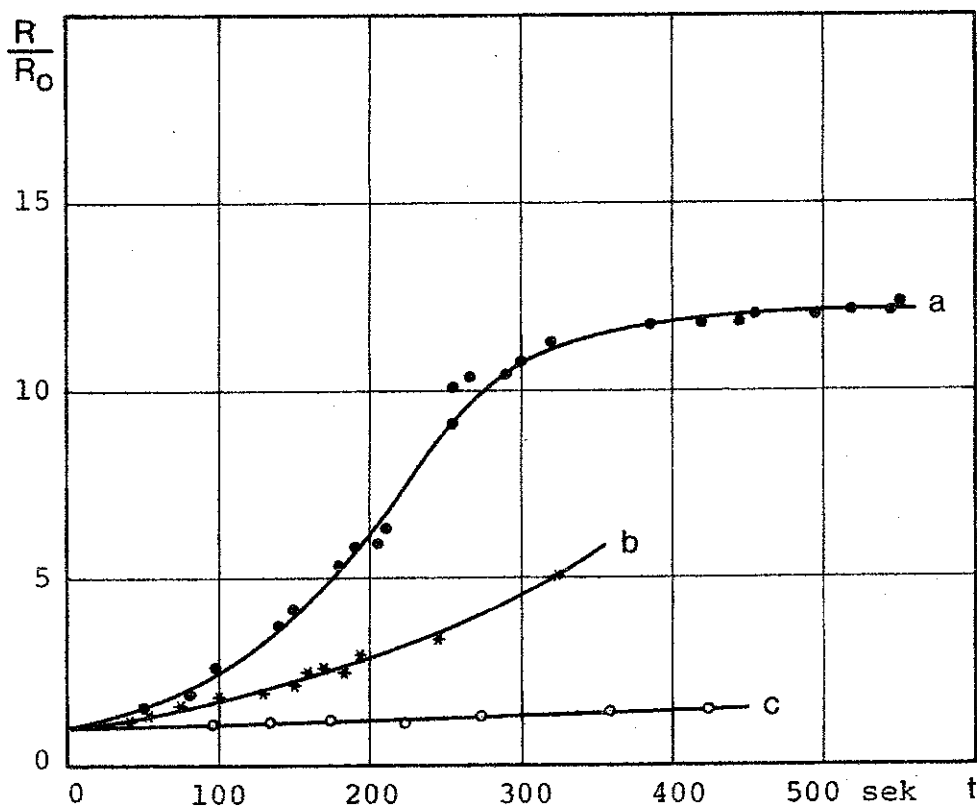


Fig 37.1 Ændring af en bobles ligevægtsstørrelse på grund af ensrettet diffusion [36].

a:  $P_A = 1,46$  bar

b:  $P_A = 0,69$  bar

c:  $P_A = 0,14$  bar

$R_0 = 0,1$  mm

$\frac{f_A}{f_0} = 0,8$

diffusionshastigheden meget afhængig af trykamplitudens størrelse, og det er tvivlsomt, om diffusionen overhovedet kan negligeres i de tilfælde, hvor  $P_A$  antager så høje værdier som 100-300 bar.

### V. BEREGNING AF TRYKVARIATIONERNE I EN PULSERENDE BOBLE

En luftboble i vand, som rammes af chokbølgen fra en under- vandsekspllosion, vil pulsere ulineært omkring sin ligevægts- stilling. På grund af energitab til det omgivende vand vil svingningsamplituden aftage med tiden, således at det stør- ste tryk i boblen registreres under første kontraktion, se fig 39.1.

Når boblens volumen antager sin minimumværdi ( $P=P_1$ ) er par- tikelhastigheden i det omgivende vand nul, og den totale energi forbundet med boblepulsationen er derfor til stede som trykenergi inde i boblen. Denne energi, som er taget fra chokbølgen, er et udtryk for en enkelt bobles dæmpende egenskaber, og derfor har det interesse at bestemme netop denne størrelse. En bobles energiabsorption kan beregnes alene ud fra kendskab til  $P_1$ , hvis de termodynamiske forhold for boblepulsationen er kendt. Som omtalt i de følgende ka- pitler viser forsøgene, at boblepulsationen med god tilnær- melse kan regnes adiabatisk for de aktuelle boblestørrelser,

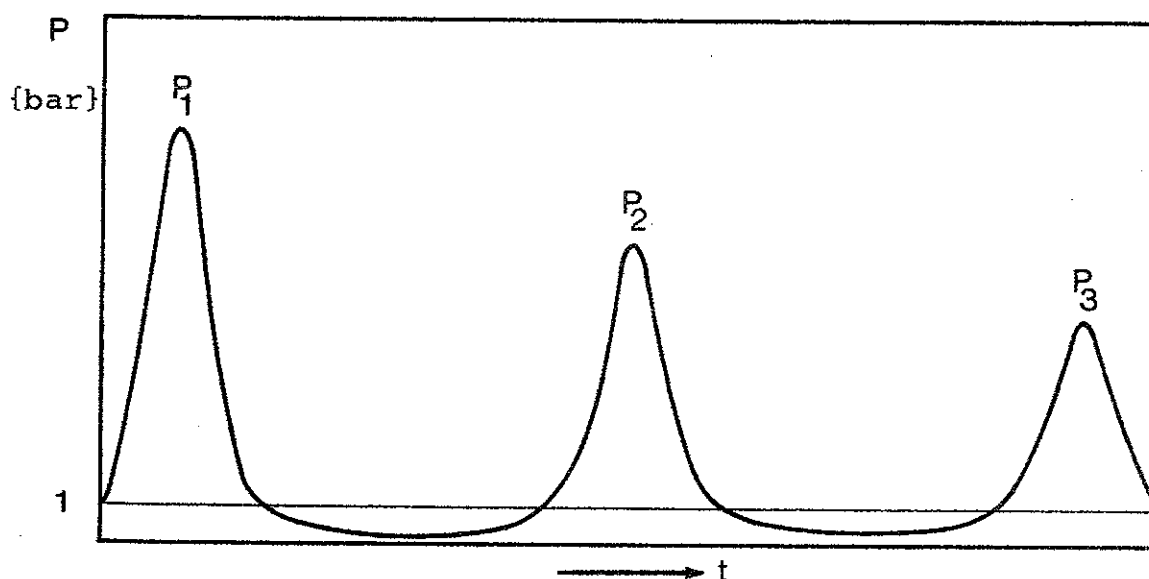


Fig 39.1 Typisk trykforløb i ulineært pulserende boble.

således at eneste ukendte parameter ved beregning af den maksimalt akkumulerede energi i boblen er maksimaltrykket  $P_1$ .

I dette kapitel foretages en teoretisk bestemmelse af  $P_1$  som funktion af  $d_0$ ,  $P_m$  og  $\theta$ , hvor  $d_0$  er boblens ligevægtsdiаметer, og  $P_m$  er maksimaltrykket og  $\theta$  tidskonstanten for en chokbølge med eksponentielt aftagende tryk bag fronten. Beregningerne er gennemført for følgende parameterverdier:

$$\begin{aligned} d_0 &= 10 - 30 \text{ mm} \\ P_m &= 25 - 150 \text{ bar} \\ \theta &= 10 - 20 \text{ } \mu\text{s} \end{aligned}$$

Disse er valgt således, at en eksperimentel verificering af beregningsresultatet er mulig.

Som tidligere omtalt er en pulserende luftbobles bevægelse bestemt ved følgende ulineære differentiaalligning af 2. orden:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_v} \cdot (P_g - P_\infty) \quad (40.1)$$

hvor  $P_g$  er trykket inde i boblen og  $P_\infty$  trykket i væsken langt fra boblen. Der er i denne ligning indbygget en række forudsætninger, af hvilke de vigtigste er:

1. Væsken betragtes som inkompressibel.
2. Alle dissipative processer negligeres.
3. Der ses bort fra overfladespænding og varmeledning.
4. Der forudsættes kuglesymmetri i alle parametre, også i belastningen  $P_\infty$  af boblen.

De 3 første forudsætninger medfører, at ligning (40.1) beskriver en udæmpet svingning, hvilket ikke er i overensstemmelse med de faktiske forhold. Dæmpningens indflydelse på trykforløbet i boblen under første kontraktion er imidlertid ringe, og da man kun er interesseret i at bestemme  $P_1$ , ligger der ikke i punkterne 1-3 nogen hindring for at opnå rimelig overensstemmelse mellem målte og beregnede  $P_1$ -verdier.

Forudsætningen i punkt 4 om kuglesymmetrisk belastning af boblen er ikke opfyldt for de aktuelle parameterverdier. Dette skyldes, at chokbølgen tilnærmet er en plan bølge, som rammer boblen fra den ene side, men det skyldes først og fremmest, at betingelsen  $\lambda_c \gg d_0$  ikke er opfyldt. De fineres bølgelængden for choket ved  $\lambda_c = c \cdot \theta$  og indføres den dimensionsløse størrelse  $\mu = \lambda_c / d_0$ , kan parameterintervallet for  $\lambda_c$  og  $d_0$  skrives som  $0,5 \leq \mu \leq 3,0$ . Det ses, at bølgelængde og boblediameter er af samme størrelsesorden, hvilket medfører, at trykbelastningen på boblens bagside er betydeligt mindre end på forsiden. Målinger har vist, at trykket på bagsiden kun er nogle få procent af trykket på forsiden af boblen for  $\mu = 1$ . Er bølgelængden stor i forhold til boblestørrelsen ( $\mu \gg 1$ ) diffrakteres choket så kraftigt bag boblen, at belastningen med god tilnærmelse kan regnes kuglesymmetrisk. Derimod er diffraktionen forsvindende i kortbølgegrænsen ( $\mu \ll 1$ ), hvor der findes en skarpt afgrænset skyggezone bag boblen.

Da punkt 4 ikke er opfyldt for de aktuelle parameterverdier, må der forventes en vis uoverensstemmelse mellem målte og beregnede maksimaltryk i boblerne. Årsagen til at ligning (40.1) alligevel vil blive anvendt ved en teoretisk behandling af boblepulsationen er, at det ikke er muligt at opstille en nogenlunde simpel matematisk model, som beskriver pulsationen for en usymmetrisk belastning. Visse nye numeriske metoder, som omtales i næste kapitel, synes dog at kunne overvinde disse vanskeligheder, men endnu er metoderne ikke udviklet tilstrækkeligt til at kunne benyttes i forbindelse med pulserende bobler.

Selv om der ved løsning af (40.1) ikke opnås korrekte værdier for maksimaltrykket i boblerne, kunne der måske forventes en nogenlunde korrekt funktionsafhængighed mellem  $P_1$  og relevante parametre som  $\lambda_c / d_0$  og  $P_m / P_{hy}$ . Denne mulighed sammen med den kendsgerning, at ligning (40.1) for øjeblikket er den eneste mulighed for en teoretisk behandling af boblepulsationen, har gjort en løsning af (40.1) ønskelig.

Antages pulsationen at være adiabatisk kan trykket  $P_g$  inde

i boblen skrives som en funktion af  $R$  ved hjælp af følgende ligning:

$$P_g = P_{hy} \left[ \frac{R_0}{R} \right]^{3\gamma} \quad (42.1)$$

hvor  $\gamma = 1,4$  for atmosfærisk luft. For trykket i væsken langt fra boblen indføres:

$$P_\infty = P_m \cdot e^{-\frac{t}{\theta}} + k_1 P_{hy} \quad (42.2)$$

som er ligningen for en chokbølge med eksponentielt aftagende tryk bag fronten.  $k_1$  er en konstant, som kan antage værdien 0 eller 1.

KEDRINSKIJ [38] har i sine beregninger benyttet  $k_1 = 0$ , hvilket betyder at  $P_\infty \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow \infty$ . Dette synes imidlertid ikke at være en fysisk realistisk model, idet et tryk på 0 i vandet omkring boblen medfører, at denne efter kontraktionen vil ekspandere i det uendelige og altså kun udføre  $\frac{1}{2}$  svingning. Indsættes  $k_1 = 1$  vil trykket i væsken nærme sig det hydrostatiske tryk for  $t \rightarrow \infty$ , og boblen vil følgelig kunne pulsere omkring sin ligevægtsstilling.

Hvilken af de to ovenfor nævnte approksimationer der i dette tilfælde bør benyttes, lader sig vanskeligt afgøre på forhånd, og beregningerne er derfor gennemført for såvel  $k_1 = 0$  som  $k_1 = 1$ .

Hvis der indføres de dimensionsløse størrelser

$$y = \frac{R}{R_0}, \quad z = \frac{t}{\theta}, \quad \mu = \frac{\lambda_c}{d_0}, \quad A = \frac{P_m}{P_{hy}}$$

kan ligning (40.1) under anvendelse af (42.1) og (42.2) skrives på følgende form:

$$y \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{3}{2} \left[ \frac{dy}{dz} \right]^2 = \frac{4P_{hy}}{\rho_v c^2} \cdot \mu^2 \left[ y^{-3\gamma} - A \cdot e^{-z} - k_1 \right] \quad (43.1)$$

hvor størrelsen  $\frac{4P_{hy}}{\rho_v c^2}$  er en konstant.

Ved indsættelse af  $P_{hy} = 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho_v = 10^3 \text{ kg/m}^3$  og  $c = 1500 \text{ m/s}$  fås talværdien for konstanten til  $1,78 \cdot 10^{-4}$ .

Ved numerisk løsning af ligning (43.1) kan maksimaltrykket i boblen findes, og det ses, at  $P_1$  kun er en funktion af  $\mu$  og  $A$ . For at kunne løse ligningen må den omskrives til 2 sammenhørende 1. ordens differentiaalligninger, hvilket sker ved en simpel substitution:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{dy}{dz} \\ z_2 &= \frac{d^2 y}{dz^2} = -1,5 \cdot \frac{\left[ \frac{dy}{dz} \right]^2}{y} + 1,78 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{\mu^2}{y} \left[ y^{-4,2} - A e^{-z} - 1 \right] \end{aligned} \right\} (43.2)$$

Der er her indsat  $\gamma = 1,4$  og  $k_1 = 1$ . Datamatprogrammet til løsning af ligningssystemet (43.2) er vist som appendiks, p 122. Det er opbygget omkring en standard procedure Mersn, som integrerer n sammenhørende 1. ordens differentiaalligninger under anvendelse af en 4. ordens Runge-Kutta metode. Programmet indeholder desuden en procedure, som ved hjælp af en parabolisk approksimation udregner  $y_{\min}$  hørende til første boblekontraktion. Maksimaltrykket kan derefter findes af følgende formel, som gælder for en adiabatisk tilstandsændring:

$$P_1 = (y_{\min})^{-4,2} - P_{hy} \quad \{\text{baro}\} \quad (43.3)$$

hvor {baro} indicerer, at der regnes i overtryk.

I stedet for at anvende  $A = P_m/P_{hy}$  som den primære parameter i beregningerne sammen med  $\mu$ , er der benyttet afstanden  $a$  mellem boble og eksplosionssted, hvilket letter sammenligningen mellem de teoretiske og eksperimentelle resultater.

Som vist i kapitel VIIIA, kan  $A$  for den i forsøgene anvendte detonator (type 6) udtrykkes som funktion af  $a$  ved ligningen

$$A = 37,5 \cdot a^{-1,13} \quad (44.1)$$

hvor  $a$  indsættes i {m}.

Beregningerne er gennemført for  $\mu = 0,5 - 3,0$  og  $a = 30 - 150$  cm. Den totale regnetid på DTH-GIER er ca  $1\frac{1}{2}$  time. Resultaterne er vist i fig 45.1, hvor de stiplede kurver gælder for  $k_1 = 1$  (FBJ), og de fuldt optrukne for  $k_1 = 0$  (Kedrinskij).

Som ventet giver Kedrinskij approksimationen de laveste  $P_1$  værdier, da trykket i vandet går mod 0 og derved bremser boblekontraktionen kraftigt. Det ses desuden, at de to beregningsmetoder konvergerer resultatmæssigt dels for  $a \rightarrow 0$  og dels for  $\mu \rightarrow \infty$ . Dette skyldes i første tilfælde, at trykpåvirkningen af boblen vokser med aftagende  $a$ , således at indflydelsen fra chokbølgens hale på det beregnede maksimaltryk bliver procentvis mindre. I det andet tilfælde vokser bølgelængden i forhold til boblestørrelsen, således at maksimaltrykket nås, inden trykket i vandet er faldet til under hydrostatisk tryk.

Medens de to beregningsmetoder giver samme resultat for små værdier af  $a$  og store værdier af  $\mu$ , giver de i det aktuelle parameterområde meget forskellige værdier af  $P_1$ . Det er derfor af stor betydning, at have nøje kendskab til trykforløbet i chokbølgens hale, men som omtalt i kapitel VIIIA, lader dette tryk sig meget vanskeligt bestemme eksperimentelt. Da de benyttede matematiske modeller repræsenterer yderpunkterne for mulige trykforløb i chokbølgens hale, kan man i stedet lade beliggenheden af de eksperimentelt fundne  $P_1$ -kurver i forhold til de beregnede afgøre, hvilken af de to modeller, der er mest realistisk. En sammenligning mellem målte og beregnede maksimaltryk er foretaget i kapitel VIIIE.

De her gennemførte beregninger dækker kun et meget snævert variationsområde for  $\mu$ , men det har interesse at kende det principielle forløb af hele kurven  $P_1 = P_1(\mu)$ , og derfor undersøges kurveforløbet for  $\mu$  gående mod grænserne 0 og  $\infty$ .



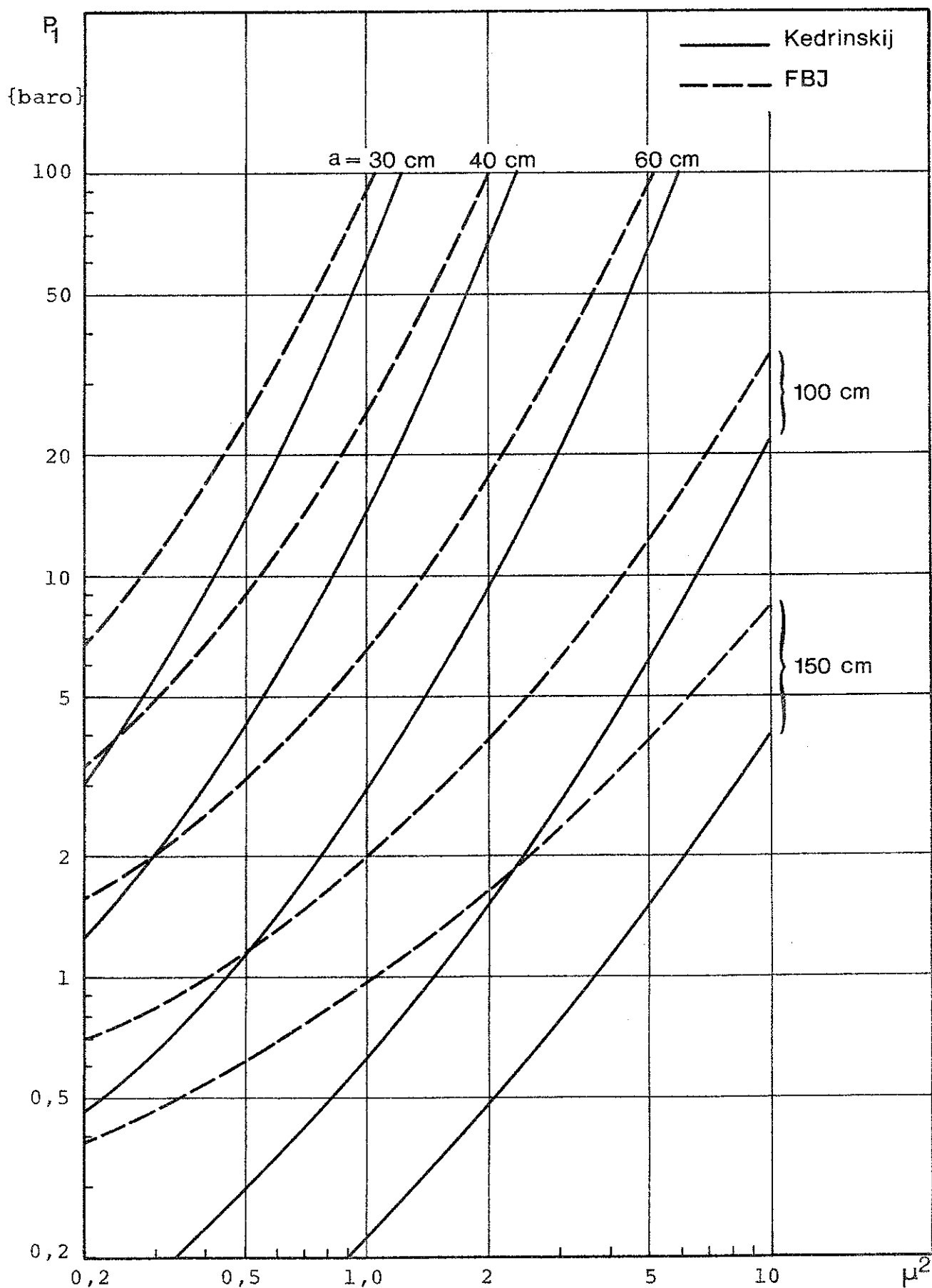


Fig 45.1 Sammenligning mellem beregnede maksimaltryk i boblerne ved anvendelse af henholdsvis FBJ og Kedrinskij approksimationen.  $\mu$  er forholdet mellem bølgelængden for choket og boblens ligevægtsdiameter.

Fysiske overvejelser fører umiddelbart til betingelsen  $P_1 \rightarrow 0$  for  $\mu \rightarrow 0$ . Derimod må differentialligning (40.1) løses for at finde  $P_1$  for  $\mu \rightarrow \infty$ . Dette grænsetilfælde svarer til påvirkning af boblen med en stepfunktion. Indsættes  $P_\infty = P_m$  i ligning (40.1) og indføres samtidig de dimensionsløse størrelser  $y = R/R_0$  og  $A = P_m/P_{hy}$  fås følgende differentialligning for boblepulsationen:

$$y\ddot{y} + \frac{3}{2}\dot{y}^2 = \frac{P_{hy}}{\rho_v R_0^2} (y^{-3\gamma} - A) \quad (46.1)$$

Da trykpåvirkningen af boblen ikke længere er en funktion af tiden, men derimod konstant lig  $A$ , kan (46.1) integreres, og der fås

$$\frac{3}{2} \frac{\rho_v R_0^2}{P_{hy}} y^3 \dot{y}^2 + \frac{1}{\gamma-1} [y^{3(1-\gamma)} - 1] + A[y^3 - 1] = 0 \quad (46.2)$$

Indsættes heri  $\dot{y} = 0$  fås følgende ligning til bestemmelse af ekstremalværdierne for  $y = y(t)$ :

$$\frac{1}{\gamma-1} [y^{3(1-\gamma)} - 1] + A[y^3 - 1] = 0 \quad (46.3)$$

Som det ses, er  $y = 1$  løsning, hvilket svarer til boblens maksimaldiameter. Ligningen har imidlertid også løsningen  $y = y_{\min}$  svarende til minimumvolumenet, og indsættes i (46.3)  $P_1/P_{hy} = (y_{\min})^{-3\gamma}$ , som gælder for en adiabatisk tilstandsændring, fås følgende ligning til bestemmelse af maksimaltrykket  $P_1$ :

$$\left[ \frac{P_1}{P_{hy}} \right]^{-\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{P_1}{P_{hy}} + A(\gamma - 1) \right] = 1 + A(\gamma - 1) \quad (46.4)$$

Her er  $P_1$  givet implicit som funktion af  $A$  for  $\mu \rightarrow \infty$ . Denne formel kan dog forenkles, idet  $P_1/P_{hy} \gg A(\gamma-1)$  for  $A \geq 10$ , og der fås da følgende simple formel:

$$\frac{P_1}{P_{hy}} = \left[ 1 + A(\gamma - 1) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (46.5)$$

Med kendskab til  $P_1 = P_1(\mu)$  for  $\mu \approx 1$  samt for  $\mu \rightarrow 0$  og  $\infty$  kan det principielle forløb af kurven optegnes, som vist i fig 47.1.

Det er tidligere vist, at den beregnede værdi af  $P_1$  er meget afhængig af trykforløbet i chokbølgens hale, og det skal nu undersøges, om også trykforløbet i starten af chokbølgen har indflydelse på beregningsresultatet. Dette sker ved at beregne maksimaltrykket i en given boble, som udsættes for forskellige trykpåvirkninger, se fig 48.1. Der er benyttet henholdsvis en firkantpuls, en trekantpuls og et chok med eksponentielt trykfald bag fronten, alle med samme bølgelængde og impulstæthed  $I$ , hvor  $I$  er defineret ved ligningen

$$I = \int_0^{\infty} (P - P_{hy}) dt \quad (47.1)$$

I fig 48.1 er impulstætheden repræsenteret ved de skraverede arealer.

Der fås i de 3 beregningstilfælde samme værdi for  $P_1$  inden for et par procents nøjagtighed. Dette resultat gælder dog kun så længe  $\mu \leq 1$ , idet der da er tale om impulsbelastning af boblen, således at  $I$  er en karakteristisk parameter i be-

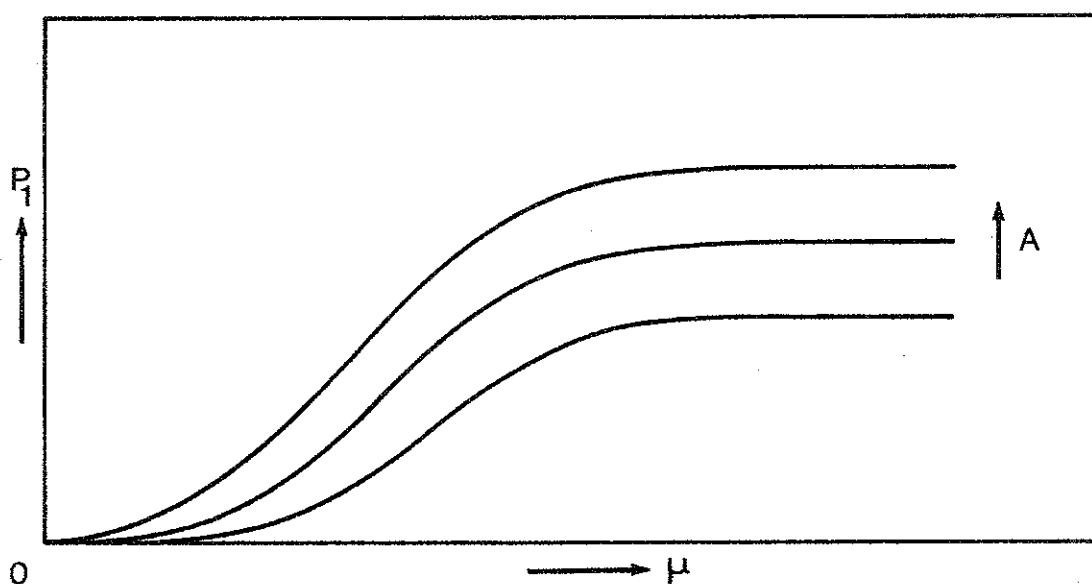


Fig 47.1 Det principielle forløb af kurven  $P_1 = P_1(\mu)$  for varierende maksimaltryk  $A$  i chokbølgen.

regningerne. Bestemmelsen af  $P_1 = P_1(\mu)$  i det foregående er gennemført for  $\mu \approx 1$ , hvilket betyder, at impulstætheden  $I$  i den teoretiske model skal være korrekt, hvorimod valget af bølgeformen ikke er kritisk.

Et bevis for at  $I$  er en karakteristisk parameter i beregningerne for  $0,5 \leq \mu \leq 3,0$  fås ved at plote beregningsresultaterne for  $P_1$  i et koordinatsystem som funktion af  $(I/d_0)^2$ . Resultatet er vist i fig 49.1 for såvel Kedrinskij som FBJ approksimationen. Det ses, at de beregnede værdier samles om en enkelt kurve med en spredning på  $\pm 5\%$ . Den største afvigelse fra kurven fås for  $\mu = 3,0$ , medens overensstemmelsen bliver bedre jo mindre  $\mu$  er.

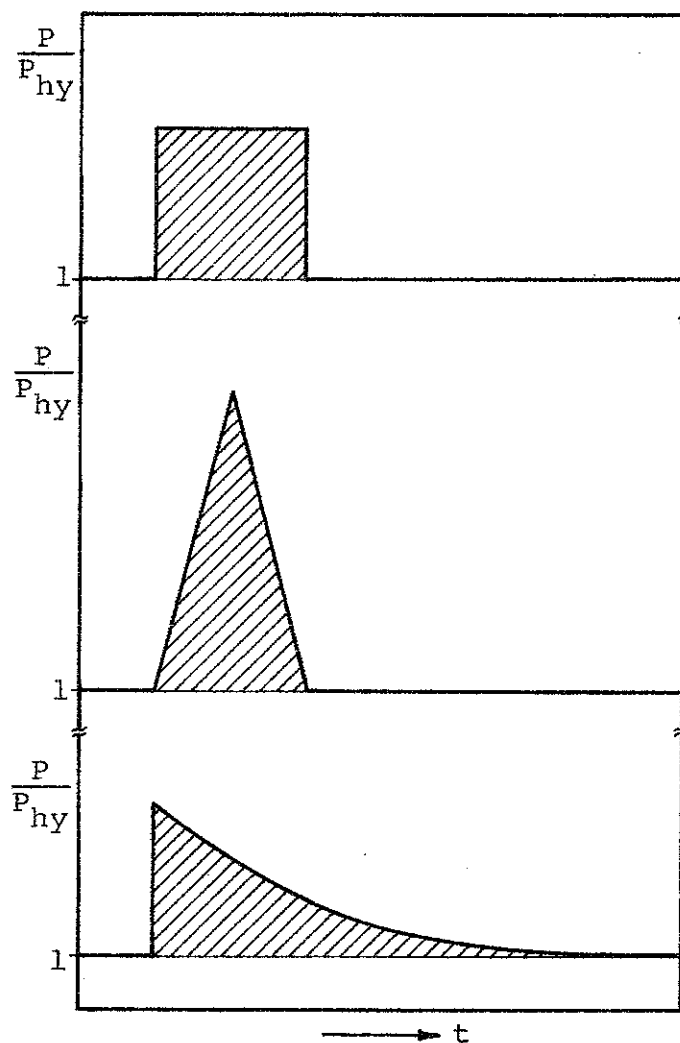


Fig 48.1. Forskellige trykpåvirkninger anvendt ved den teoretiske bestemmelse af maksimaltrykket i en pulserende boble.

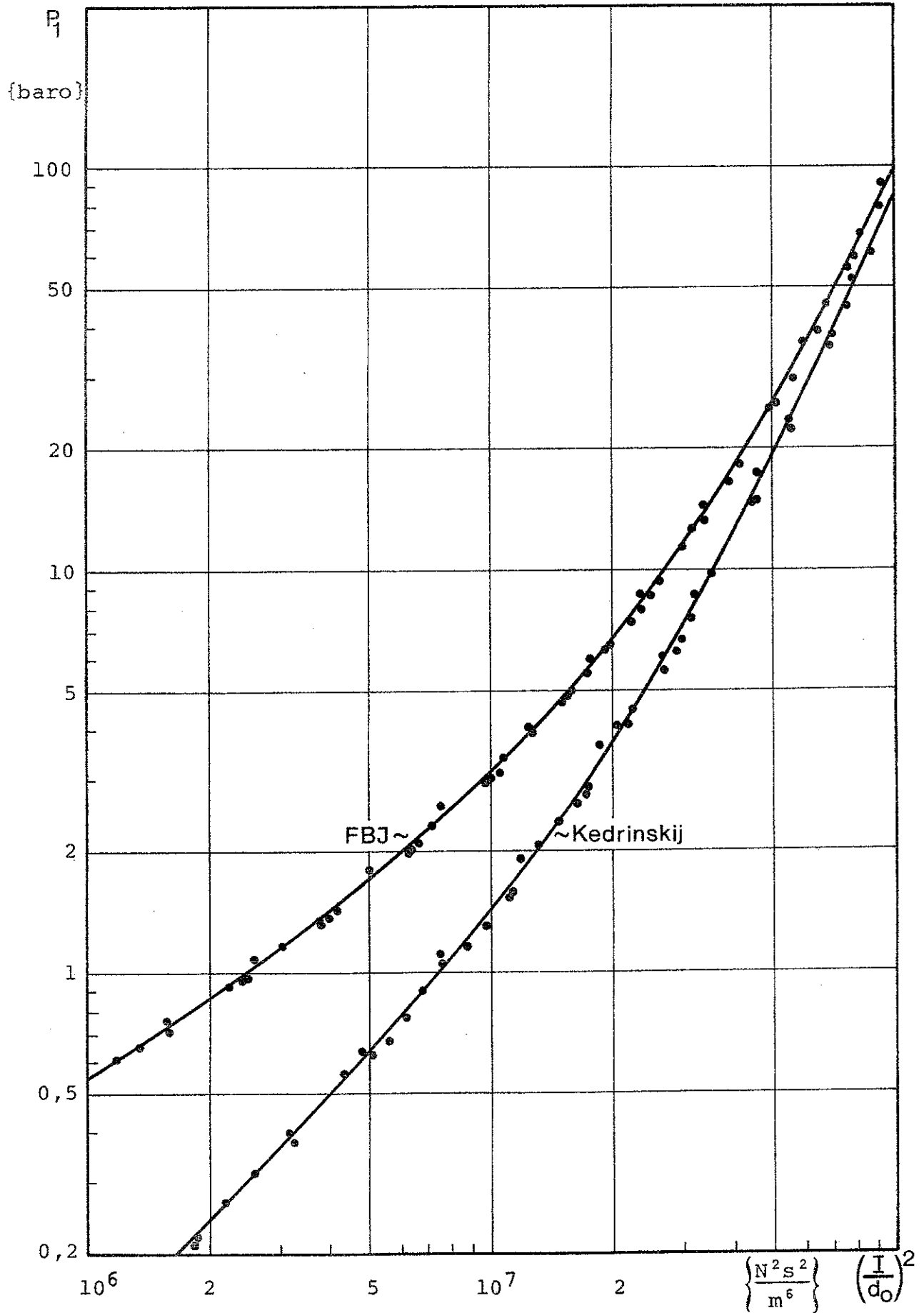


Fig 49.1 Beregningsresultaterne for maksimaltrykket  $P_1$  plottet som funktion af  $(I/d_0)^2$ , hvor  $I$  er impulstettheden i chokbølgen.

## VI. NUMERISKE METODER

I erkendelse af at den klassiske differentiaalligning (4.1) til bestemmelse af boblepulsationen ikke giver helt tilfredsstillende resultater for  $\mu \approx 1$ , se kap VIIIE, blev der indledt et litteraturstudium for at finde frem til alternative metoder til beregning af  $P_g = P_g(t)$ . Dette resulterede i, at interessen samledes om visse numeriske metoder udviklet ved Los Alamos Scientific Laboratory, New Mexico, USA. Disse metoder kan benyttes til beregning af transiente strømningsproblemer i flere dimensioner, og deres udgangspunkt er de fuldstændige Navier-Stokes ligninger. Reference [24] giver en oversigt over de vigtigste varianter, der i dag eksisterer af den grundlæggende Particle-in-Cell metode (PIC), som blev udviklet i Los Alamos i 1955.

De nye numeriske metoder har muliggjort løsning af en del komplicerede strømningsproblemer, som det ikke hidtil har været mulig at behandle teoretisk. Metoderne er nært knyttet sammen med udviklingen inden for datamatteknikken, da de stiller store krav til såvel regnehastighed som lagerkapacitet. I det følgende vil der blive givet en oversigt over metodernes fordele og ulemper, samt en kort beskrivelse af de grundlæggende principper for metoderne.

Ved numerisk behandling af problemer i fluid dynamikken skelnes der mellem kompressibel og inkompressibel strømning [58]. Hvis strømningshastigheden  $u$  er af samme størrelsesorden som lydhastigheden  $c$ , må fluidets kompressibilitet tages i betragtning, hvorimod strømmingen kan regnes inkompressibel for  $u \ll c$ . Da lydhastigheden  $c$  er den hastighed, hvormed en lille forstyrrelse udbreder sig i fluidet, vil der beregningsmæssigt være betydelig forskel på de to typer strømning. Således vil et fluidelement for  $u \approx c$  udelukkende være påvirket af fluidet umiddelbart omkring elementet, hvorimod et element for  $u \ll c$  vil være påvirket af alle øvrige dele af fluidet.

Ovenstående forhold har medført, at de numeriske metoder naturligt er blevet inddelt i to hovedgrupper:

1. Metoder til beregning af kompressibel strømning ( $u \approx c$ ). Disse er repræsenteret ved Particle-in-Cell metoden (PIC) [3].
2. Metoder til beregning af inkompressibel strømning ( $u \ll c$ ). Disse er repræsenteret ved Marker-and-Cell metoden (MAC) [67].

Uheldigvis har opdelingen mellem disse to grupper været så skarp, at ingen metode har kunnet behandle strømningproblemer i det mellemliggende hastighedsområde.

#### A. Grundlæggende træk ved Los Alamos metoderne.

For at kunne behandle et kontinuum numerisk indlægges et 3-dimensionalt net, som opdeler dette i et endeligt antal celler. Disse celler har til opgave at definere små områder, inden for hvilke relevante parametre som tryk, tæthed, hastighed og energi kan regnes konstante. Jo flere celler der indlægges i fluidet, jo nærmere kommer man en differentiell beskrivelse, men samtidig vokser kravene til datamaten.

Cellerne kan enten betragtes som faste i rummet, idet fluidet så bevæger sig fra celle til celle, og der tales da om et eulersk net. Hvis cellerne derimod bevæger sig med fluidet, således at det til stadighed er den samme fluidmængde, der befinder sig i en given celle, kaldes nettet lagrangsk.

For at kunne visualisere strømmingen anbringes der "marker" partikler i cellerne. Disse partikler flyttes med den lokale strømningshastighed, og ved til forskellige tider at plotte partiklernes positioner i nettet, fås et billede af ændringen i strømningsmønsteret. Dette er især en hjælp ved bestemmelse af frie overfladers beliggenhed og form. Denne måde at visualisere strømmingen på refererer til MAC-metoden, medens der i PIC-metoden tillægges partiklerne andre egenskaber. Således repræsenteres fluidet udelukkende ved partikler i PIC-metoden, og der anbringes adskillige partikler i hver celle, og hver partikel tillægges masse. Også her

vil et plot af partiklernes positioner til forskellige tidspunkter afsløre ændringer i strømningsbilledet, men samtidig vil en stor partikel-tæthed indicere stor densitet og højt tryk på det pågældende sted i fluidet.

Den matematiske model, som beskriver et fluids dynamik, er de fuldstændige Navier-Stokes ligninger plus kontinuitets- og energiligningen. Disse differentiaalligninger omskrives til differensform og benyttes til udregning af ændringen i tilstandsstørrelserne i de enkelte celler til tiden  $t+\delta t$ , når tilstanden er kendt til tiden  $t$ . Ud fra givne begyndelses- og randbetingelser er det således muligt at regne sig frem gennem tiden i små spring  $\delta t$  og derved få kendskab til, hvorledes strømningsbilledet ændrer sig.

Den nære analogi mellem den numeriske beregningsgang og det fysiske eksperiment ses tydeligt, hvis marker partiklernes positioner til forskellige tidspunkter plottes på en film. Denne vil da vise strømningsbilledets ændring i tiden, nøjagtigt som havde man fotograferet eksperimentet i laboratoriet.

Ved at betragte nogle eksempler på LA-metodernes anvendelse [3], [4] fås det indtryk, at ethvert instationært strømningsproblem kan løses med disse metoder. Der er dog visse begrænsninger angående strømningshastigheden, idet  $u$  som tidligere nævnt skal opfylde en af følgende betingelser:  $u \approx c$  eller  $u \ll c$ . Mange forskellige strømningsproblemer er løst numerisk, og overensstemmelsen med eksperimenterne er god.

Til løsning af inkompressible strømningsproblemer skal der benyttes en datamat med et lager på mindst 64K, og man kan da klare sig med regnetider på 5 - 15 min (CDC 6600) ved konventionelle problemer [4]. Ved beregning af kompressible strømninger er kravet til lagerkapacitet i datamaten normalt større, og regnetider på 1 - 2 timer er ikke usædvanlige.



## B. Numerisk beregning af boblepulsationen.

En gennemgang af betingelserne for anvendelse af Los Alamos metoderne viser, at disse ikke kan benyttes til beregning af boblepulsationen. Dette skyldes, at en luftboble i vand består af såvel et kompressibelt område (boblen) som et inkompressibelt område (vandet). Derfor kan hverken PIC eller MAC-metoden benyttes.

Et eksempel på at PIC-metoden under specielle forhold kan anvendes til at beregne  $R=R(t)$  for en luftboble i vand, som rammes af en chokbølge, er vist af MADER [47]. Han har imidlertid benyttet så kraftig en chokbølge ( $P_m = 120000$  bar), at partikelhastigheden i vandet opfylder betingelsen  $u \approx c$ . Derfor kan væsken betragtes som kompressibel, og følgelig kan PIC-metoden anvendes. Resultatet af beregningerne for en 30 mm boble ses i fig 54.1, hvor boblen er vist henholdsvis 3,5 og 5,0  $\mu s$  efter at den rammes af chokbølgen. Overensstemmelsen mellem de beregnede resultater og nogle high-speed fotografier af boblen er god [47].

For om muligt at overvinde vanskelighederne ved en numerisk behandling af boblepulsationen blev der indledt en korrespondance med Dr. Francis H. Harlow i Los Alamos. Han anbefalede at anvende en ny version af MAC-metoden, som var under udarbejdelse, til løsning af problemet. Et fortryk omhandlende denne såkaldte ICE-metode forelå primo 1971 [25].

ICE er en forkortelse af Implicit Continuous-Fluid Eulerian. Ved at indføre visse ændringer i differensligningerne er der skabt en numerisk metode, som kan anvendes på strømningsproblemer i hele hastighedsområdet  $0 < M < \infty$ , hvor  $M = u/c$  er mach-tallet for strømmingen. Endnu er den kun benyttet til ganske få beregninger, men resultaterne ser lovende ud. ICE-metoden kan anvendes ved strømning såvel med som uden fri overflade, og den gør brug af den fuldstændige viskose spændingstensor i modsætning til PIC-metoden, som opererer med en kunstig viskositet. Der ser således ikke ud til at være

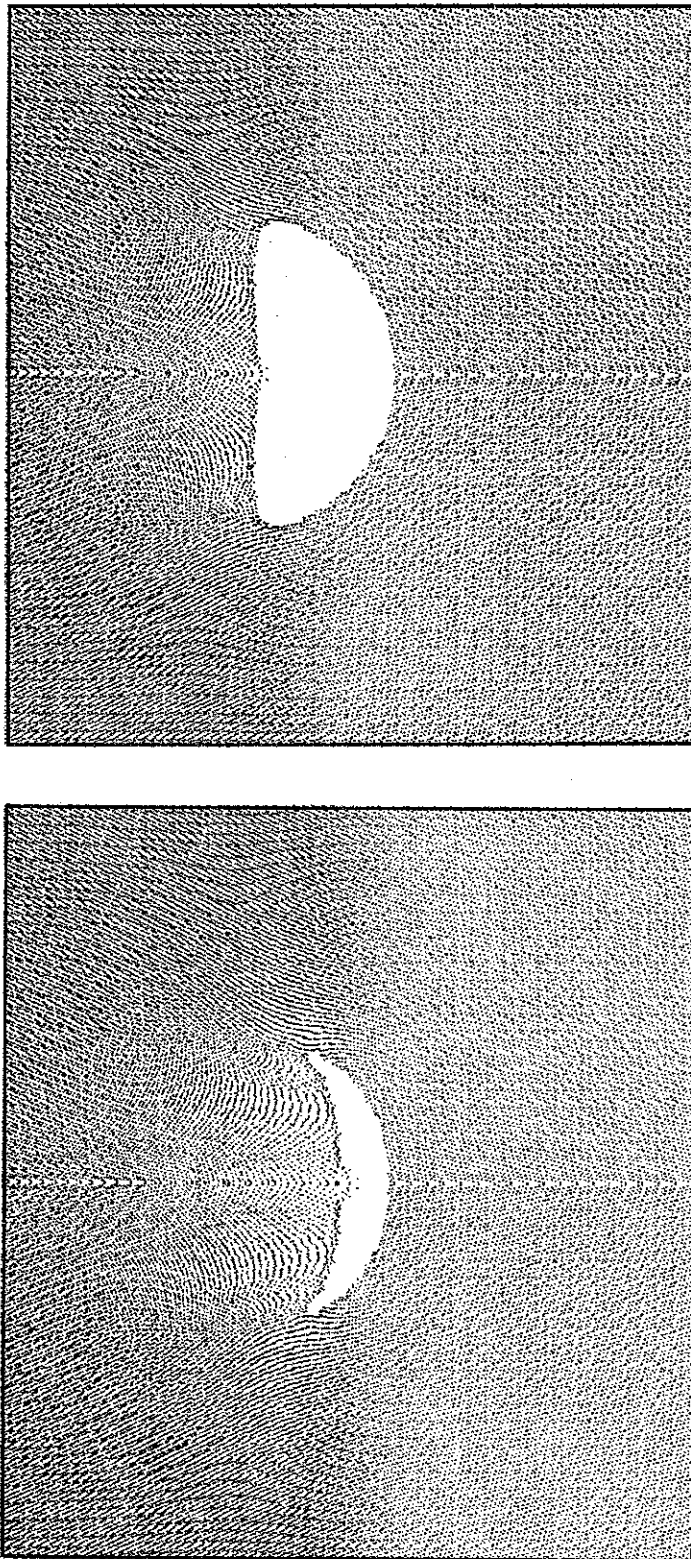


Fig 54.1 Numerisk beregning af deformation og volumenændring for boble, som rammes af chokbølge. Billederne er optegnet 3,5 og 5,0  $\mu$ s efter kollisionen [47].

nogen indskrænkning i ICE-metodens anvendelighed i sammenligning med PIC og MAC metoderne.

Hvis ICE-metoden viser sig at være så anvendelig som forventet, skulle den kunne benyttes til en teoretisk behandling af boblepulsationen. På den anden side forekommer det også at være den eneste numeriske metode, der i dag kan benyttes til løsning af dette problem.

Den foreløbige rapport [25] er ikke særlig detaljeret, og først når en endelig rapport foreligger med flowdiagrammer og et fuldstændigt datamatprogram, kan der gøres et forsøg på at beregne tilstandsstørrelserne i en pulserende luftboble i vand. En sådan rapport kan næppe ventes før i 1972.

## VII. FORSØGSOPSTILLING OG MÅLEUDSTYR

I dette kapitel beskrives dels den vandkanal, hvori forsøgene er udført, og dels en kombineret boble- og transducerholder, som er specielt konstrueret med henblik på trykmåling i pulserende bobler. Desuden omtales detonatoren, som er benyttet til frembringelse af chokbølgen. Måleapparatet omfatter primært forskellige tryktransducere, men også oscilloskoper, fotograferingsudstyr og belysningskilder indgår i måleopstillingen. Dette udstyr omtales ligeledes i det følgende.

Alle eksperimenterne er udført i afdelingens vandkanal, som er en åben kanal med dimensionerne 0,6 x 0,7 x 7 m. Den er opbygget af 5 mm jernplade, som er svejset sammen til sektioner af 1 m's længde. Sektionerne er derefter boltet sammen, og hele kanalen er anbragt på 80 cm høje bukke. Et snit gennem forsøgssektionen er vist i fig 56.1. Som det ses, er der anbragt vinduer såvel i siderne som i bunden af kanalen, således at en boble kan fotograferes fra flere sider samtidig. Det skal endelig nævnes, at der ikke er indført foranstaltninger til hindring af bølgerreflektioner fra kanalvæggene.

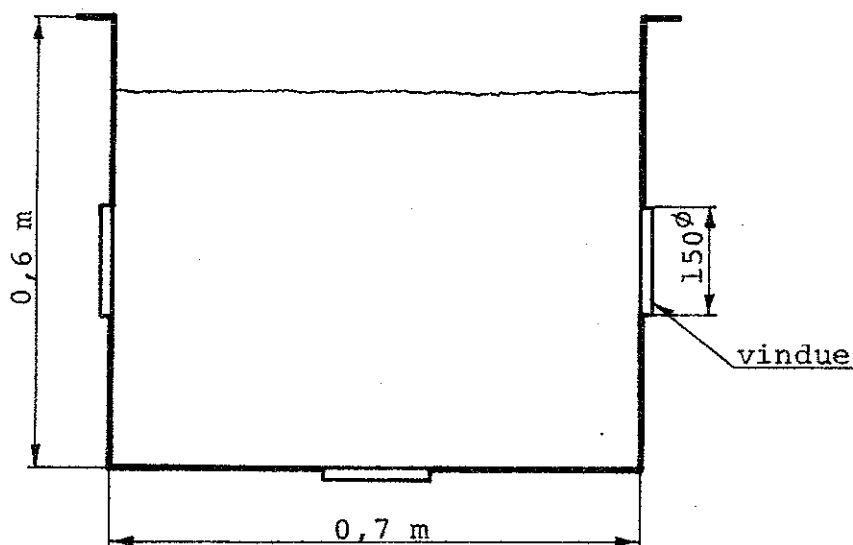


Fig 56.1 Tværsnit af forsøgskanalen.

For at kunne foretage direkte trykmålinger i en pulserende boble må luftvolumenet tvinges til at pulsere omkring transduceren, hvilket sker ved at indeslutte boblen i en tynd gummiinde, som fæstnes til transducerholderen. Dette arrangement er vist i fig 57.1. Det ses, at den yderste tynde del af holderen ( $5 \text{ mm}^\phi$ ) foruden at rumme ledningerne fra transduceren også indeholder et kanylerør ( $0,7 \text{ mm}^\phi$ ), gennem hvilket lufttilførslen til boblen foregår. Ballonen, som omslutter luftvolumenet, har en vægtykkelse på ca  $0,05 \text{ mm}$ , og den er monteret på holderen ved hjælp af et gummibånd. Selve transducerhovedet sidder inde i boblen for enden af holderen.

Til frembringelse af chokbølgen er der benyttet en aluminium sprængkapsel af type 6, fremstillet hos Nobel Dynamit i Tyskland. Den består af en primærladning på  $0,25 \text{ g}$ , hvoraf 70% er blyacid og 30% blytrinitroresorcinat, samt af en underladning på  $0,55 \text{ g}$  tetryl. Dette giver en total ladningsvægt på  $0,8 \text{ g}$ . Detonatoren, som tændes elektrisk ved hjælp af en  $6 \text{ V}$  akkumulator, er samme type som anvendt af BJØRNØ [6].

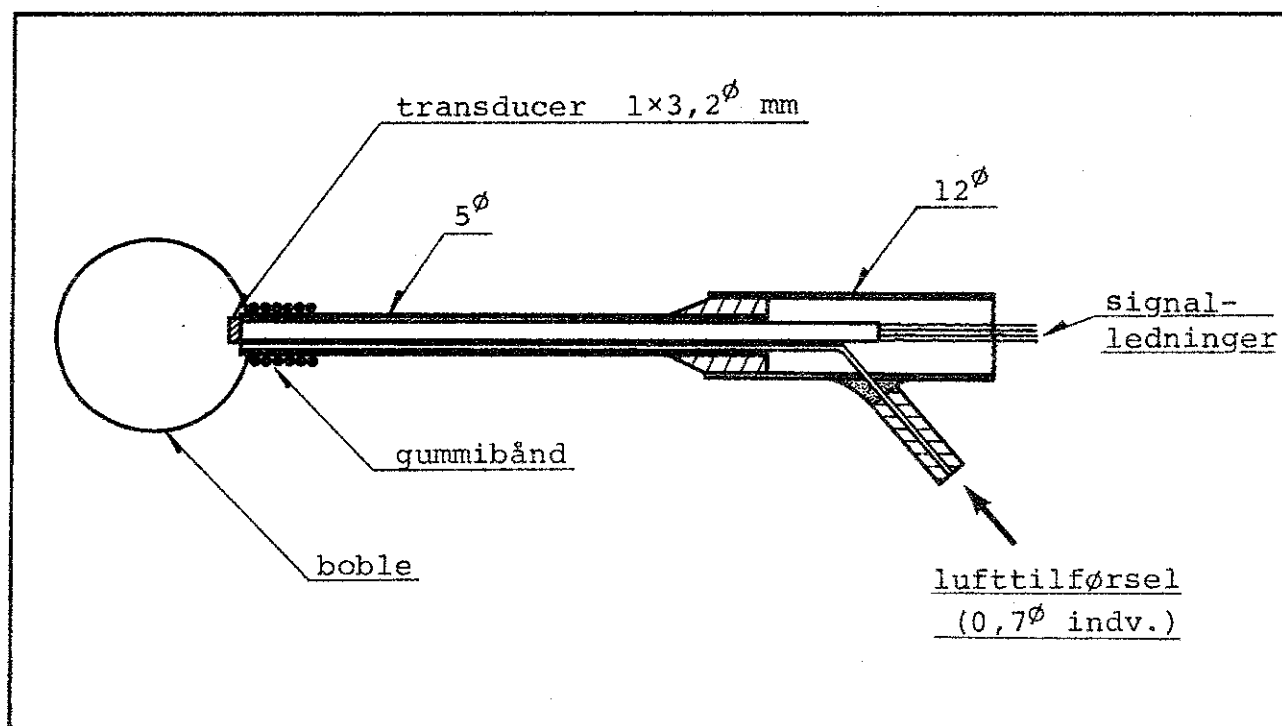


Fig 57.1 Kombineret boble- og transducerholder.

Til måling af chokbølgen fra undervandsekspllosionen er der benyttet en turmalin-transducer fremstillet af Crystal Research Inc., Cambridge, Mass., USA. Det trykfølsomme element består af en stabel turmalinskiver med en diameter på  $1/8''$  (3,2 mm). En nøjere beskrivelse af transducerens konstruktion er givet af BJØRNØ [6]. Registrering af trykvariationerne i en pulserende boble er foretaget med en strain-gauge transducer af fabrikat Kulite. Det trykfølsomme element er her en membran, hvis udbøjning måles ved hjælp af en påklæbet strain-gauge (SG).

Et omfattende forsøgsarbejde er gennemført for at finde frem til de bedst egnede transducere til de nævnte måleopgaver. Dette arbejde er refereret i [9], og resultaterne fremgår af tabel 59.1, hvor karakteristiske data for de undersøgte transducere er opsummeret. Som det ses, råder Afdelingen for Fluid Mekanik over 4 typer tryktransducere, omfattende forskellige krystaltransducere samt et par SG-transducere. De anvendte piezoelektriske eller elektrostriktive krystalmaterialer er turmalin, kvarts og blyzirkonattitanat (PZT).

Tabellen viser, at turmalin-transducere har en meget høj egenfrekvens, hvilket gør den specielt anvendelig til måling af højfrequente trykforløb. Forsøgsresultaterne viser, at det er den eneste af de omtalte transducere, som kan benyttes til måling af chokbølgen fra en undervandsekspllosion, da de øvrige får anslået egenfrekvensen. På grund af den relativt lave lækmodstand på  $1 \text{ M}\Omega$  i målekredsen, er turmalin-transducere ikke anvendelig til måling af lavfrekvente trykforløb ( $f < 5 \text{ kHz}$ ), idet krystallen da taber en stor del af sin ladning, hvilket resulterer i fejlmåling.

Af tabel 59.1 ses desuden, at krystaltransducerne er meget temperaturfølsomme, hvilket skyldes den pyroelektriske effekt. For turmalin vil en opvarmning på  $1^\circ \text{C}$  således give samme ladningsdannelse som et trykfald på 10 bar. Dette medfører, at krystaltransducerne alle er uegnede til måling i luft, hvor store tryksvingninger normalt er ledsaget af store temperatursvingninger.

Nedenstående tabelværdier skal opfattes som tilnærmelsesværdier og er kun beregnet som vurderingsgrundlag for størrelsesordenen af optrædende parametre.

Transducer	Trykfølsom flade	Egenfrekvens	Frekvensmåleområde	Dynamisk trykmåleområde	Statisk temp. følsomhed	Trykfølsomhed
	mm $\phi$	kHz	kHz	bar	$\frac{\text{bar}}{^{\circ}\text{C}}$	$\frac{\text{mV}}{\text{bar}}$
Turmalin 1	3,2	1500	5 < f < 1500	5 < P < 500	- 10	21
Turmalin 2	6,4	1500	5 < f < 1500	5 < P < 500	- 10	89
Kvarts	3,0	175	0 < f < 100	0,05 < P < 300	- 2,0	240*
PZT	1,1	500	0 < f < 100	0,01 < P < 100	+ 2,5	2600*
SG 1	2,2	130	0 $\leq$ f < 130	0,1 < P < 7	0	23
SG 2	2,2	500	0 $\leq$ f < 500	1 < P < 70	0	2,3

\*) Maksimal forstærkning på ladningsforstærkeren.

Fig 59.1 Karakteristiske data for tryktransducere tilhørende Afdelingen for Fluid Mekanik [9].

SG-transducere er den eneste af de omtalte transducere, der ikke er temperaturfølsom, og som derfor er velegnet til trykmåling i luft. Der rådes over to transducere af samme geometriske størrelse men beregnet for forskellige trykområder. Da de begge har coatede membraner, kan de også benyttes til måling i vand, men egenfrekvensen er for lav til registrering af chokbølger. Det bemærkes, at SG-transducerne som de eneste af de omtalte transducere også kan anvendes til statiske trykmålinger.

Konklusionen af transducerundersøgelsen er, at de forskellige typer hver for sig er anvendelige til ganske specielle måleopgaver. Derimod savnes endnu den ideelle transducer med meget lille geometrisk udstrækning, høj egenfrekvens, stor trykfølsomhed, ingen temperaturfølsomhed og anvendelig til såvel lave som høje tryk i både luft og vand.

Ved at benytte en turmalin-transducer til måling af chokbølgen og en SG-transducer til trykmåling i boblerne har det vist sig muligt at opnå pålidelige og reproducerbare måleresultater. Det ville dog være ønskeligt at anvende endnu mindre transducere, men de ovenfor omtalte er de mindste, der forhandles i dag.

Til registrering af transducersignalerne er der benyttet to oscilloskoper af mærket Tektronix, dels en type 555 til de højfrekvente chokbølgemålinger, og dels en type 502A til de mere lavfrekvente trykmålinger i boblerne.

Affotografering af oscilloskopskærmen er foretaget med et polaroidkamera ved indledende målinger, medens der er brugt et småbilledkamera i de endelige forsøg. Det anvendte fotoudstyr bestod desuden af to konventionelle småbilledkameraer samt et high-speed kamera af mærket Fastax. Dette sidste, som har en maksimal billedfrekvens på 8000 B/s, er benyttet til at optage en række 16 mm film af pulserende luftbobler i vand.

Som belysningskilde ved optagelse af high-speed filmene er der anvendt en 1000 W lampe, medens der ved optagelse af enkeltbilleder af boblerne er brugt en blinkende lyskilde af



mærket Strobotac fra General Radio. De fotografiske undersøgelser er foregået med mørklagt forsøgssektion og åbent kamera, og eksponeringen er sket ved trigning af lyskilden til et enkelt blink. Eksponeringstiden er bestemt af blinkets varighed, som for Strobotac'en er 0,8 - 3,0  $\mu$ s afhængig af den ønskede lysintensitet. De anvendte film er Kodak Plus-X ved modlysfotografering og Ilford HP-4 ved fotografering med sidelys.

### VIII. FORSØGSRISULTATER

#### A. Maksimaltryk og impulstæthed for chokbølgen.

Studiet af chokexciterede boblepulsationer forudsætter nøje kendskab til chokbølgens udseende i forskellige afstande fra eksplosionsstedet. De parametre, der ønskes bestemt, er maksimaltrykket  $P_m$  og impulstætheden  $I$  begge som funktion af afstanden  $a$ .

På grund af forsøgsanlæggets begrænsede dimensioner vil der i kanalen optræde en del reflekterede bølger, der ligesom hovedchokbølgen har indflydelse på boblepulsationen. Man er imidlertid kun interesseret i at bestemme trykvariationen i boblerne forårsaget af selve chokbølgen, og derfor må man søge at undgå alle reflekterede bølger.

Måling af trykforløbet midt i kanalen med en 1/8" turmalin transducer er vist i fig 63.1 for  $a = 50$  cm. Til venstre ses det karakteristiske chokbølgeforløb med en stejl front efterfulgt af et tilnærmet eksponentielt trykfald. Den ekstra top på kurven ca 140  $\mu$ s efter fronten er den reflekterede bølge fra kanalens bund. Denne reflektion kan imidlertid undgås ved på bunden at anbringe en energiabsorberende plade opbygget som vist i fig 62.1. Messingpladen tjener her som kontravægt, medens gummipladen skal hindre vandindtrængning i skummet.



Fig 62.1 Skumplade til dæmpning af bølge-reflektioner fra kanalbunden.

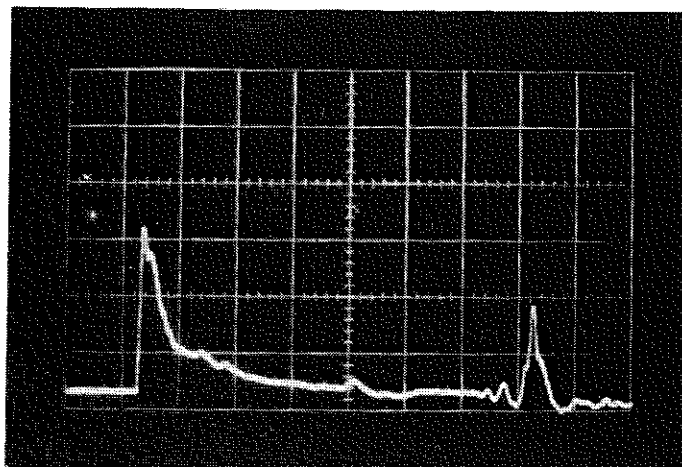


Fig 63.1 Chokbølge målt med 1/8" turmalin transducer.

$x = 20 \mu\text{s}/\text{div}$ ,  $a = 50 \text{ cm}$ .

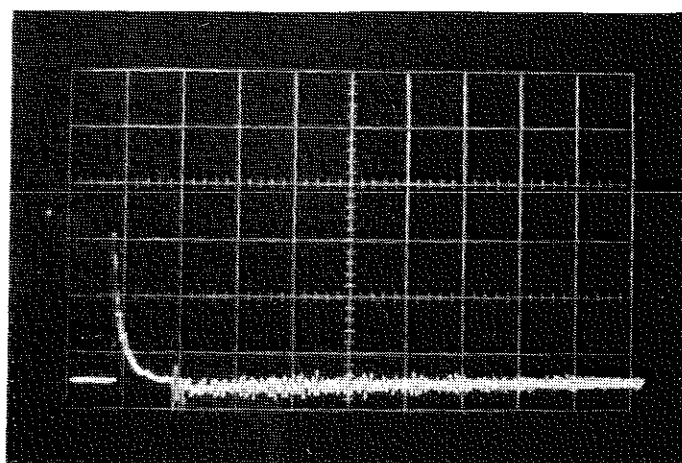


Fig 63.2 Chokbølgens udseende ved anvendelse af skumplade til dæmpning af refleksioner fra kanalbunden.

$x = 100 \mu\text{s}/\text{div}$ ,  $a = 50 \text{ cm}$ .

Med anvendelse af skumpladen målt det trykforløb, der er vist i fig 63.2. Det ses, at bundreflektionen nu er forsvundet, og at der iøvrigt ingen reflekterede bølger findes de første 900  $\mu$ s efter chokfronten. Der kommer altså ingen reflektioner fra kanalvæggene, hvilket er ret overraskende.

Da man som tidligere omtalt kun er interesseret i at bestemme maksimaltrykket  $P_1$  i den pulserende boble, skal de reflekterede bølger blot undgås indtil minimumvolumenet nås. Forsøgene viser, at dette sker 200 - 600  $\mu$ s efter at chokbølgen har ramt boblen, og følgelig vil trykforløbet i fig 63.2 resultere i maksimaltryk, som udelukkende er forårsaget af hovedchokbølgen.

Måling af trykforløbet i kanalen er foretaget for  $a = 25 - 150$  cm med en  $1/8$ " turmalin-transducer, og der er udført tre målinger for hver  $a$ -værdi. Forsøgsopstillingen ses i fig 64.1.

1. Systematiske målefejl. Som vist i fig 65.1 er der 2 vigtige kilder til fejlmåling ved registrering af chokbølgeforløbet, dels fortegning på grund af transducerens endelige størrelse, og dels fortegning forårsaget af ladningstab i målekredsen. I første tilfælde skyldes den systematiske fejlmåling, at transducersignalet er proportionalt med middelbelastningen på den trykfølsomme flade, hvorved variationer i trykket hen over fladen ikke registreres. Kun når bølgelængden

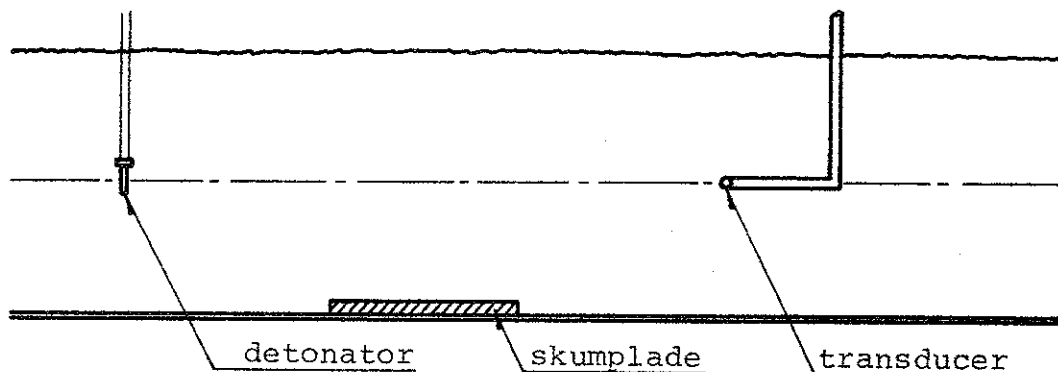


Fig 64.1 Forsøgsopstilling til måling af chokbølgen i forskellige afstande fra eksplosionsstedet.

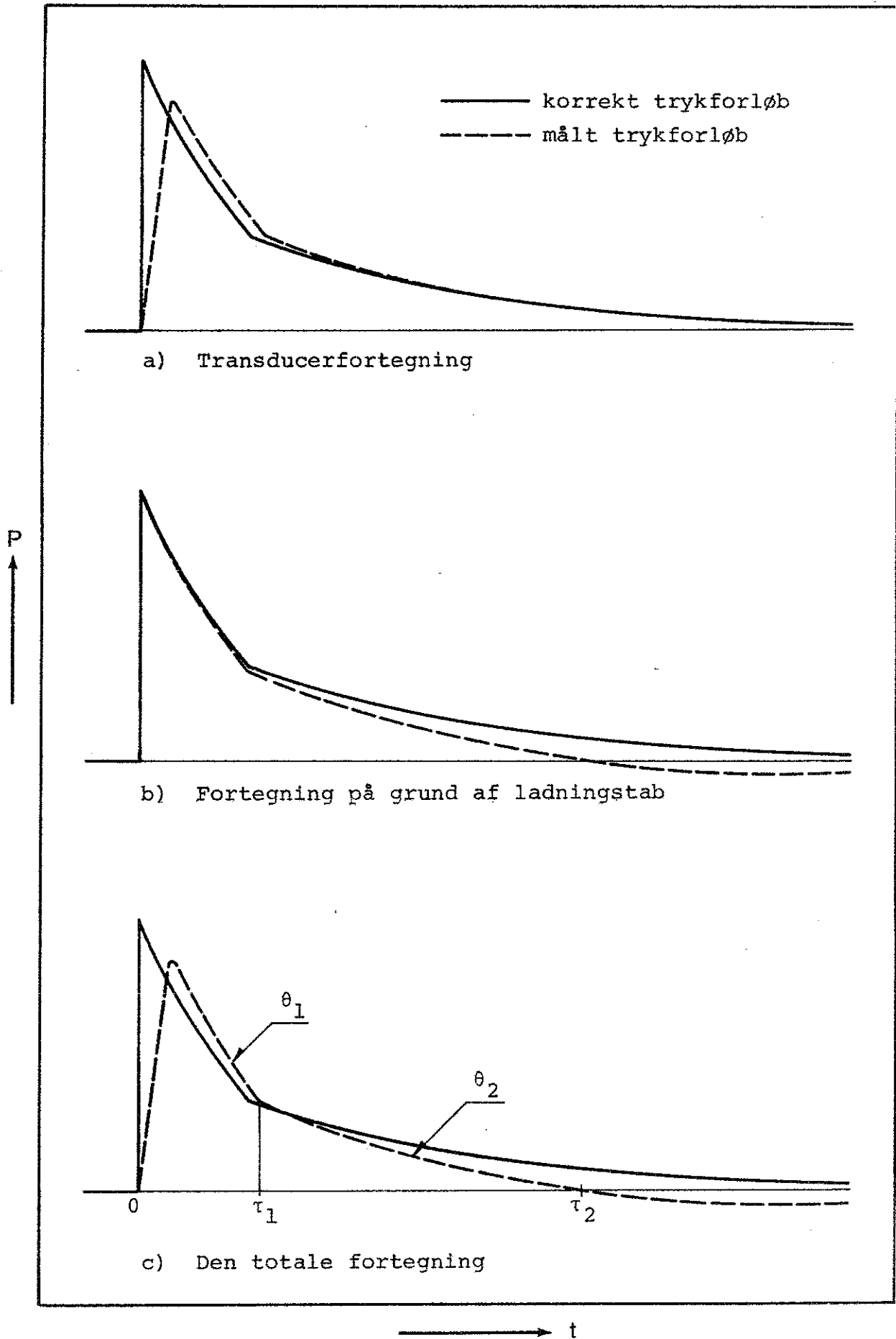


Fig 65.1 Illustration af de systematiske målefejl ved registrering af trykforløbet i chokbølgen.

for trykvariationen er stor i forhold til diameteren af den følsomme flade gengives trykforløbet korrekt. Ved måling af den aktuelle chokbølge med en 1/8" transducer registreres en for lav  $P_m$ -værdi, som vist i fig 65.1 a.

Den anden kilde til systematisk fejlmåling er ladningstab, som skyldes den relativt lave indgangsimpedans på 1 M $\Omega$  for det anvendte oscilloskop. Et diagram af målekredsen er vist i fig 66.1. Her er TT turmalin-transducere med en indre modstand på ca  $10^8 \Omega$ . Ladningstab gennem  $R_k$  kan karakteriseres ved størrelsen  $\theta_k = R_k C_k$ , som er kredsens tidskonstant. Påtrykkes en bestemt spænding til tiden  $t = 0$ , vil denne være faldet til  $1/e$  af sin oprindelige værdi til tiden  $t = \theta_k$ . For den anvendte målekreds er  $R_k = 10^6 \Omega$  og  $C_k = 357 \text{ pF}$ , hvorved tidskonstanten bliver 357  $\mu\text{s}$ .

Forudsætningen for at måle nogenlunde korrekt med turmalintransducere koblet direkte på oscilloskopet er, at trykændringerne sker i løbet af så kort en tid  $\Delta t$ , at  $\Delta t \ll \theta_k$ . Da man ved måling af chokbølgen er interesseret i trykforløbet indtil 600  $\mu\text{s}$  efter fronten, vil ladningstabet medføre betydelig fejlmåling i chokbølgens hale, hvilket fremgår af fig 65.1 b.

En sammenligning mellem det korrekte trykforløb og det faktisk målte på grund af transducerfortegning og ladningstab

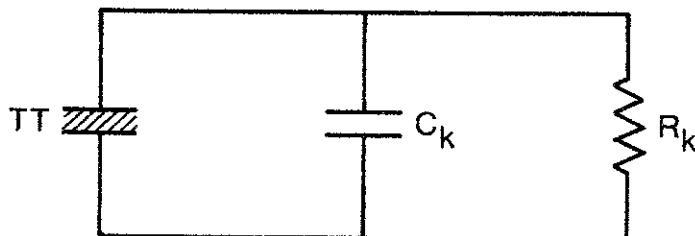


Fig 66.1 Diagram af målekredsen, som benyttes ved registrering af chokbølgen.

TT: turmalin-transducer

$C_k$ : kredsens kapacitet

$R_k$ : oscilloskopets indgangsimpedans

er vist i fig 65.1 c. Der er her antaget, at det korrekte forløb kan approksimeres ved to eksponentiaalfunktioner med forskellig tidskonstant  $\theta_1$  og  $\theta_2$ , hvilket har vist sig at være en bedre tilnærmelse end anvendelse af en enkelt eksponentiaalfunktion. Det antages desuden, at  $P \rightarrow P_{hy}$  for  $t \rightarrow \infty$ , hvilket svarer til FBI approksimationen i kapitel V.

Som nævnt tidligere lader det faktiske trykforløb i chokbølgen have sig vanskeligt bestemme på grund af ladningstab i mælkerødsen. Imidlertid nævner COLE [14], at overtrykket i chokbølgen har en varighed på ca 10% af eksplosionsgasbølens svingningstid, der for den anvendte detonator er ca 20 ms. Derfor må overtrykfasen forventes at have en varighed på ca 2 ms. Da man kun er interesseret i trykforløbet de første 600  $\mu$ s efter chokfronten, må antagelsen  $P > P_{hy}$  være rimelig, og følgelig er  $P \rightarrow P_{hy}$  for  $t \rightarrow \infty$  en udmærket approksimation. Man kommer altså her til samme konklusion som i kapitel V, at kedrinskij approksimationen  $P \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow \infty$  ikke er fysisk realistisk.

2. Korrektioner til målte  $P_m$  og I værdier. Af hensyn til

beregning af korrektionen for  $P_m$  og I ønskes  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $t_1$  og  $t_2$  bestemt eksperimentelt. Størrelserne er defineret i fig 65.1 c. Ved at optegne det målte chokbølgeforløb i et semilogaritmisk koordinatsystem kan  $\theta_1$  og  $\theta_2$  umiddelbart bestemmes som hældningskoefficienterne for de to linjestykker, hvorved kurveforløbet kan approksimeres.  $t_1$  fastlægges ud fra linjestykkernes skæringspunkt, medens  $t_2$  bestemmes ud fra de oprindelige oscilloskop-fotografier.

Forsøgsresultaterne der er gengivet i tabel 68.1 viser, at hverken  $\theta_1$  eller  $\theta_2$  andres systematisk med voksende a. De angivne middelværdier vil derfor blive benyttet ved beregning af korrektionsfaktorerne. Spredningen på  $\theta$ -værdierne er  $\pm 7,5\%$ . Også  $t_2$  kan regnes konstant, målenøjagtigheden taget i betragtning. Derimod aftager  $t_1$  med voksende a, hvilket betyder, at energien i chokbølgen hale vokser procentuelt med voksende afstand fra eksplosionsstedet.

I det følgende udregnes korrektionsfaktoren til den I-værdi, som fås ved planimetriering af den målte tryk-tid kurve. Som vist i ref. [10] kan man i denne forbindelse negligere transducerforøgningen og nøjes med at tage hensyn til ladnings-

tabet.

Ved beregning af korrektionsfaktoren for  $P^m$  kan man se bort fra ladningstab og nøjes med at tage hensyn til transducerforøgningen. Under antagelse af eksponentielt trykfald bag chokfronten kan korrektionen beregnes som funktion af tidskonstanten  $\theta$  og diameteren  $D$  af den trykfølssomme flade. Dette er vist i reference [10], hvor der også er optegnet kurver for sammenhængen mellem målte og korrekte  $\theta$ -værdier. Med  $\theta_1 = 8,7 \mu s$  og  $D = 3,2 \text{ mm}$  er det ikke nødvendigt at korrigere den målte  $\theta$ -værdi. Derimod skal maksimaltrykkene øges med 17%, idet korrektionsfaktoren for  $P^m$  findes til

$$P^m: K_f = 1,17 \quad (68.1)$$

Tabel 68.1 Eksperimentelt bestemte parameter-værdier for chokbølgen (se fig 65.1).

Middelværdier:  $\theta_1 = 8,7 \mu s$ ,  $\theta_2 = 22 \mu s$

a	$\theta_1$	$\theta_2$	$t_1$	$t_2$
25	8,3	23,5	11	80
30	8,8	22,0	10	80
40	8,4	20,0	9,5	80
50	8,8	21,5	8,5	80
60	8,8	20,5	8,0	80
80	8,8	22,5	7,5	75
100	8,9	20,5	7,0	75
125	8,7	23,0	6,5	-
150	8,9	-	-	-
cm	$\mu s$	$\mu s$	$\mu s$	$\mu s$



Idet det korrekte trykforløb i chokbølgen antages at være som vist i fig 69.1, kan  $p=p(t)$  skrives

$$\left. \begin{aligned}
 & p = P_m \cdot e^{-\frac{\theta_1}{t}} && \text{for } 0 < t \leq t_1 \\
 & p = P_{m,1} \cdot e^{-\frac{\theta_2}{t}} && \text{for } t_1 < t < \infty
 \end{aligned} \right\} (69.1)$$

hvor  $P_{m,1} = P_m \cdot e^{-t_1 \left[ \frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right]}$

Der er her regnet i overtryk, hvilket er kendetegnende for alle trykangivelser i dette kapitel.

Impulstætheden for chokbølgen er bestemt ved følgende udtryk:

$$I = \int_{t_1}^0 P_m \cdot e^{-\frac{\theta_1}{t}} dt + \int_{\infty}^{t_1} P_{m,1} \cdot e^{-\frac{\theta_2}{t}} dt$$

Ved integration og indsatelse af  $P_{m,1}$  fås:

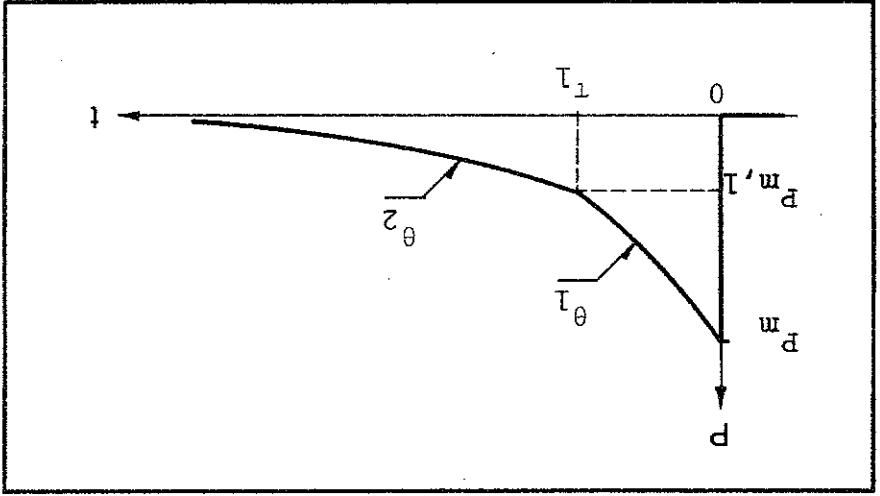


Fig 69.1 Idealiseret chokbølge sammensat af to eksponentialfunktioner med forskellige tidskonstanter.

$$(70.1) \quad I = P_m \theta_1 \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{\theta_1}{T_1} t} + \frac{\theta_1}{\theta_2} e^{-\frac{\theta_1}{T_2} t} - \frac{\theta_1}{T_1} \right]$$

På grund af ladningstab i mælkredsen vil et eksponentielt aftagende tryk beskrevet ved ligningen  $P = P_m \cdot \exp(-t/\theta)$  i følge COLE [14] registreres som

$$(70.2) \quad P = P_m \cdot e^{-\frac{t}{\theta}} \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{\theta}{T_1} t} \left( \frac{\theta}{T_1} - 1 \right) - e^{-\frac{\theta}{T_2} t} \left( \frac{\theta}{T_2} - 1 \right) \right]$$

hvor  $\theta_k$  er mælkredsens tidskonstant. Indsættes dette udtryk for  $P$  i (69.1) fås følgende ligningssystem for det målte

trykforløb:

$$(70.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{for } 0 \leq t \leq T_1 \\ \text{for } T_1 < t < \infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} P^* = P_m \cdot e^{-\frac{t}{\theta_1}} \cdot \left[ \frac{\theta_1}{T_1} - \frac{\theta_1}{T_2} \right] \\ P^* = P_m \cdot e^{-\frac{t}{\theta_2}} \cdot \left[ \frac{\theta_1}{T_1} - \frac{\theta_1}{T_2} \right] \cdot (t - T_1) \cdot \left[ \frac{\theta_2}{T_2} - \frac{\theta_1}{T_1} \right] \end{array}$$

$$\text{hvor } P_{m,1}^* = P_m \cdot e^{-\frac{\theta_1}{T_1} t} \cdot \left[ \frac{\theta_1}{T_1} - \frac{\theta_1}{T_2} \right]$$

Impulsen  $I^*$  findes ved at integrere (70.3) fra 0 til en fast øvre integrationsgrænse  $t^*$ , og der fås

$$(70.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} I^* = P_m \cdot \left[ \frac{\theta_1}{T_1} - \frac{\theta_1}{T_2} \right] \cdot \left[ e^{-\frac{\theta_1}{T_1} t^*} - e^{-\frac{\theta_1}{T_2} t^*} \right] \\ \quad + \left[ \frac{\theta_1}{T_1} - \frac{\theta_1}{T_2} \right] \cdot \left[ e^{-\frac{\theta_1}{T_1} t^*} - e^{-\frac{\theta_1}{T_2} t^*} \right] \cdot \left[ \frac{\theta_1}{T_1} - \frac{\theta_1}{T_2} \right] \cdot \left[ \frac{\theta_1}{T_1} - \frac{\theta_1}{T_2} \right] \end{array} \right.$$

Korrektionsfaktoren kan nu beregnes af (70.1) og (70.4) som  $K_F = I/I^*$ . Af de indgående parametre kan  $\theta_1$  og  $\tau_1$  med god tilnærmelse bestemmes direkte ud fra de målte tryk-tid kurver. Derimod er den målte  $\theta_2$ -værdi på 22  $\mu\text{s}$  givet vis for lav, da ladningstabet har stor indflydelse på trykforløbet i chokbølgens hale. En mere korrekt værdi for  $\theta_2$  kan imidlertid udregnes, idet man fra målingerne kender det tids-

punkt  $\tau_2$ , hvor  $P^* = 0$ . Af (70.3) fås

$$P^* = 0 \quad \text{for} \quad \theta_k - \theta_2 \cdot e^{-\left(\tau_2 - \tau_1\right) \left[\frac{\theta_2}{\tau_1} - \frac{\theta_k}{\tau_1}\right]} = 0$$

Indsættes  $\theta_k = 357 \mu\text{s}$  og  $\tau_2 - \tau_1 = 70 \mu\text{s}$  finder man, at ligningen er opfyldt for  $\theta_2 = 24,2 \mu\text{s}$ .

Beregning af korrektionsfaktoren for forskellige  $\tau_1$ -værdier viser, at  $K_F$  kun varierer ubetydeligt for  $\tau_1$  mellem 6 og 11  $\mu\text{s}$ . Indsættes de repræsentative værdier  $\theta_1 = 8,7 \mu\text{s}$ ,  $\theta_2 = 24,2 \mu\text{s}$ ,  $\tau_1 = 10 \mu\text{s}$  og  $\tau = 50 \mu\text{s}$  fås

$$I: \quad K_F = 1,21 \quad (71.1)$$

Hvis der som øvre integrationsgrænse i stedet vælges  $\tau = 100 \mu\text{s}$  fås  $K_F = 1,16$ . Ved bestemmelsen af  $I$  i det følgende er der udelukkende benyttet  $\tau = 50 \mu\text{s}$ .

3. Forsøgsresultater. De opnåede forsøgsresultater er vist i tabel 72.1. Maksimaltrykkene er her korrigeret med faktoren 1,17 og impulstæthederne med 1,21. De enkelte måleværdier er udregnet som middelværdien af tre målinger, og spredningen er  $\pm 3\%$  for  $P_m$ -værdierne og  $\pm 10\%$  for  $I$ -værdierne. I fig 73.1 og 74.1 er måleresultaterne for henholdsvis  $P_m$  og  $I$  plottet som funktion af  $a$  og sammenlignet med følgende tilnærmelsesudtryk:

$$P_m = 550 \cdot \left[ \frac{a}{\sqrt{W}} \right]^{1,13} \quad \{\text{baro}\} \quad (71.2)$$

$$I = 6,70 \cdot 10^3 \cdot \frac{a}{W^{3/2}} \quad \left\{ \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \right\} \quad (71.3)$$

I formlerne indsættes  $a$  i {m} og  $w$  i {kg}.  $w$  er den totale sprængstofmængde, som for en detonator af type 6 er 0,0008 kg.

De fundne udtryk for  $P_m$  og  $I$  kan sammenlignes med BJØRNØ'S resultater [6]:

$$P_m = 506 \cdot \left[ \frac{a}{\sqrt{w}} \right]^{1,10} \quad \text{{baro}} \quad (72.1)$$

$$I = 5,90 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{w} \cdot \left[ \frac{a}{\sqrt{w}} \right]^{0,87} \left[ \frac{m}{Ns} \right] \quad (72.2)$$

Der bemærkes visse divergenser både med hensyn til størrelsen af konstanterne og eksponenterne i de to sæt formler. De mulige årsager hertil søges klarlagt i det følgende.

a	$P_m$	$P_{m,formel}$	I	$I_{formel}$
cm	baro	baro	$\frac{m}{Ns}$	$\frac{m}{Ns}$
25	185	180	230	231
30	144	146	189	192
40	106	106	143	144
50	81,6	82,0	118	116
60	67,6	66,7	98,6	96,3
80	48,3	48,2	69,8	72,2
100	36,6	37,5	55,5	57,8
125	30,0	29,2	49,5	46,2
150	23,3	23,7	35,5	38,5

Tabel 72.1 Målte værdier af maksimaltryk og impulstæthed for chokbølgen sammenlignet med beregnede værdier efter de empiriske udtryk (71.2) og (71.3).

Fig 73.1 Maksimaltrykket i chokbølgen som funksjon af afstanden fra eksplosjonsstedet.

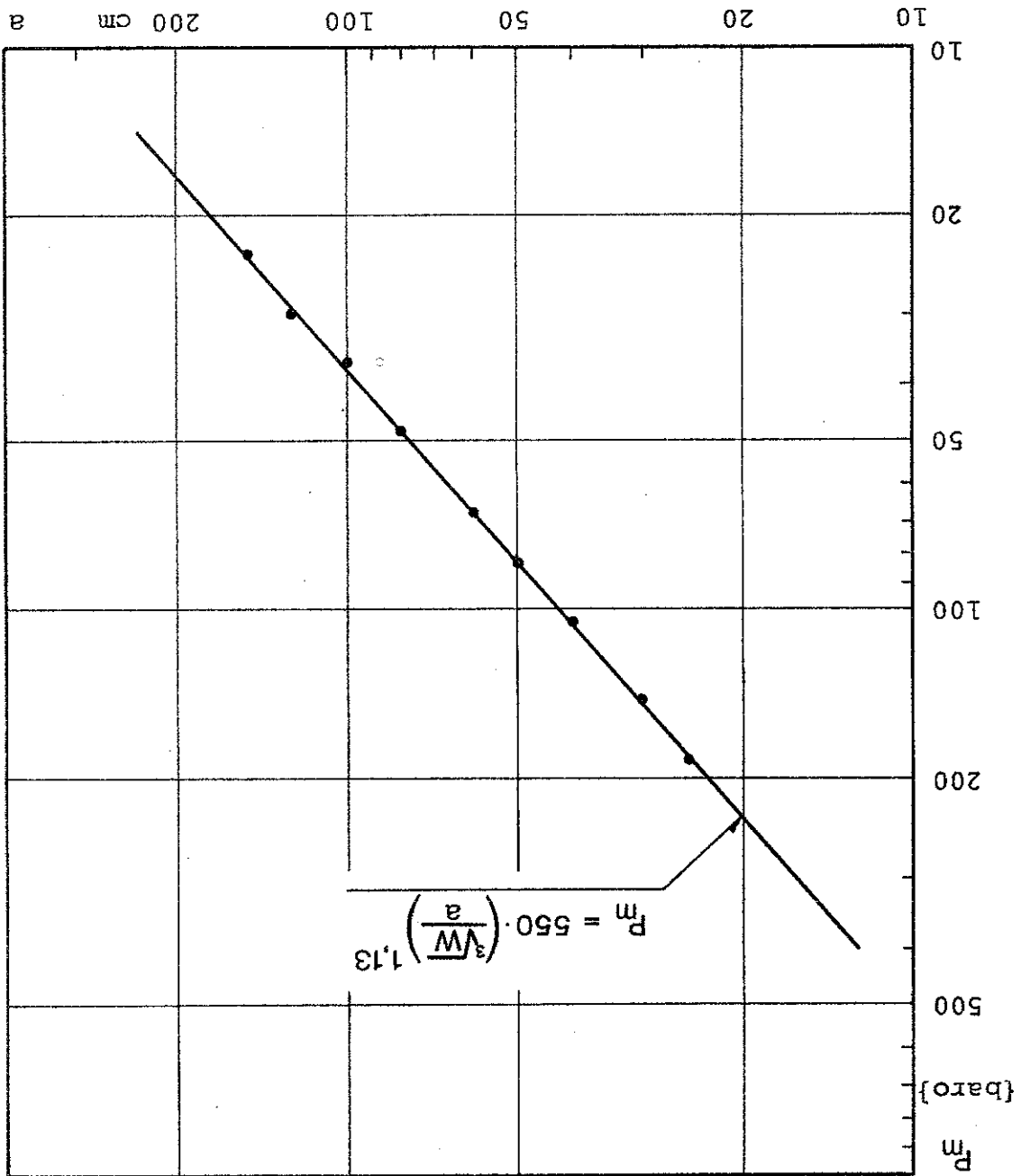
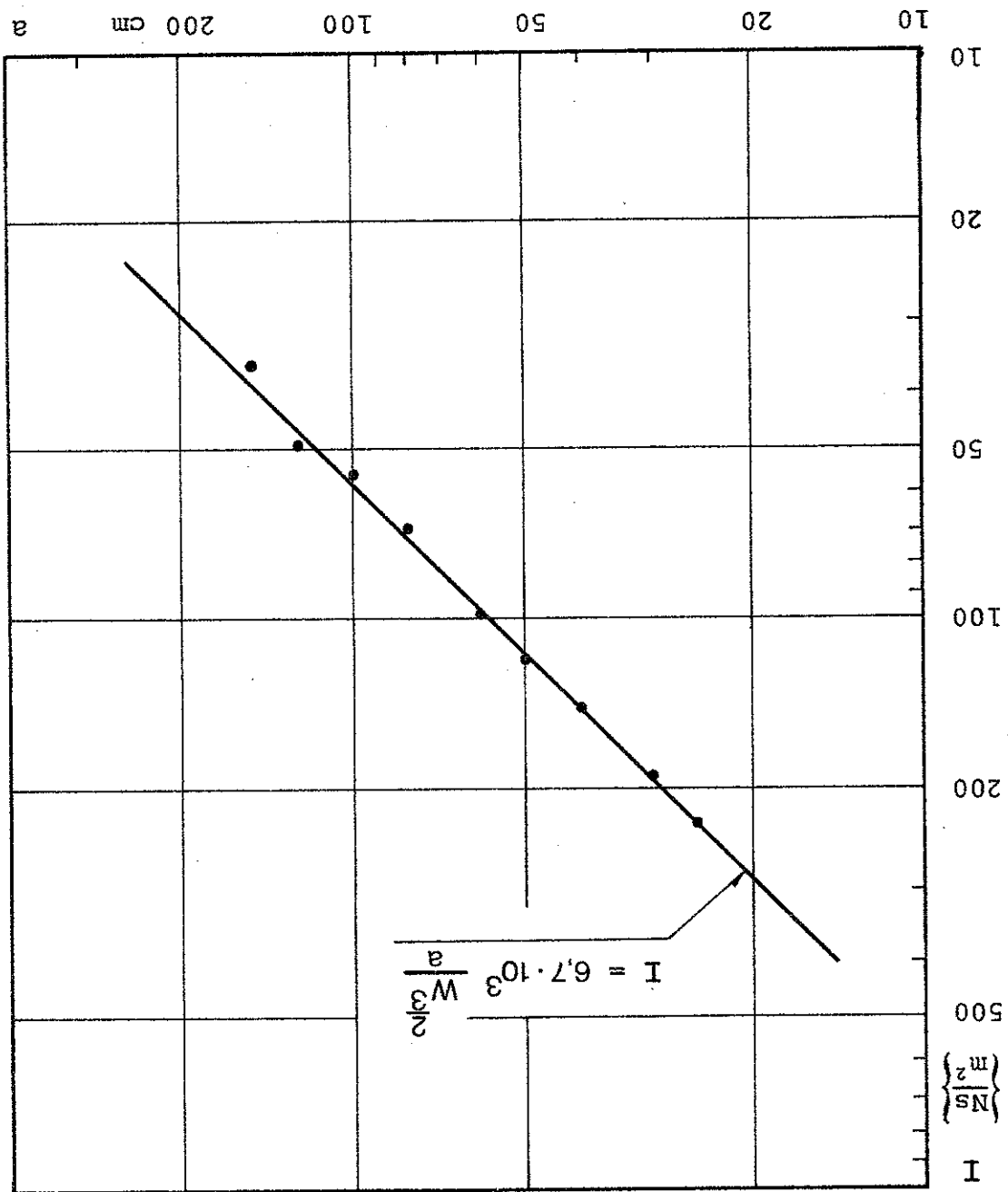


Fig 74.1 Impulstætheden i chokbølgen som funktion af afstanden fra eksplosionsstedet.



Som tidligere omtalt har denne undersøgelse vist, at  $\theta_1$  uafhængigt af  $a$  kan regnes konstant lig  $8,7 \mu s$ , hvilket medfører, at korrektionen til maksimaltrykket  $P^m$  ligeledes er konstant. Dette forklarer den ændrede eksponent i formelen for  $P^m$ , idet Bjørnø har valgt at approksimere trykforløbet ved en eksponentialfunktion med varierende  $\theta_1$  som funktion af  $a$ .

Da energien i chokbølgen hale som tidligere nævnt vokser procentuelt med voksende  $a$ , kan man udmærket lade  $\theta_1$  variere med  $a$ , nemlig hvis der ønskes overensstemmelse mellem kurveforløbene indtil  $15-20 \mu s$  efter fronten. Der fås dog i så tilfælde en dårligere overensstemmelse umiddelbart efter kurvens top. Hvilken approksimation, der er bedst, er et subjektivt skøn, men da  $\theta_1$  kun har betydning for beregning af korrektionsfaktoren, synes det rimeligst at benytte den værdi, som bestemmes af kurveforløbet de første  $5-10 \mu s$  efter fronten, dvs  $\theta_1 = 8,7 \mu s$ .

Bjørnø's resultater for  $\theta_1 = \theta_1(a)$  er i overensstemmelse med andres resultater for kraftigere trykbølger, hvorimod  $\theta_1 =$  konstant stemmer overens med de resultater, der er fundet for trykbølger hidrørende fra gnistudladninger i vand, hvor der også er tale om små energimængder i chokbølgen [10].

Afvigelsen på ca 8% mellem konstanterne i de to formler for  $P^m$  kan skyldes anvendelsen af forskellige transducerstørrelser ( $1/8"$  og  $1/4"$  turmalin-transducer) i de to forsøgsserier. Desuden er de benyttede korrektionsfaktorer udregnet på forskelligt grundlag.

Bestemmelse af impulsstætheden er sket ved planimetriering af tryk-tid kurven. Som det ses af (71.3) er  $I$  omvendt proportional med  $a$ , hvilket svarer til akustisk udbredelse. Dette resultat er i overensstemmelse med forholdene ved gnistudladning i vand [10]. Bjørnø har derimod fundet  $I \propto a^{-0,87}$ , hvilket er det samme, som andre har fundet for kraftigere chok.

Afvigelsen mellem de to formler for  $I$  har flere årsager. Således har Bjørnø ikke taget hensyn til ladningstab, som i

Det kan med rimelighed antages, at bidraget til I fra chokbølgens hale er en fast brøkdel af den totale I, således at funktionsafhængigheden  $I \propto a^{-1}$  er nogenlunde korrekt. Ved vidende at formel (71.3) kan være behæftet med en stor systematisk fejl, vil dette udtryk for impulsstæthed  $P_1$  vel blive benyttet ved optegning af maksimaltrykket  $P_1$  i boblerne som funktion af  $\lambda^0/d_0$ .

Det fundne udtryk (71.3) for impulsstæthed I som funktion af a er behæftet med betydelig ubestemthed. Der kan ganske vist foretages en relativt nøjagtig bestemmelse af I de første 100  $\mu$ s efter chokfronten, men derefter er trykforløbet ubestemt på grund af ladningsstab. Da man er interesseret i at finde den totale impuls, som påvirker boblen, inden den når sit minimumsvolumen, må trykforløbet kendes indtil ca 600  $\mu$ s efter fronten. Afviger trykket i chokbølgens hale blot en smule fra  $P_{hy}$ , kan der komme et betydeligt bidrag til I i løbet af de sidste 500  $\mu$ s. Trykket i halen lader sig imidlertid ikke bestemme eksperimentelt, og derfor må man acceptere den store ubestemthed på I.

disse målinger giver en korrektion på 15%, men som kun an- drager ca 5% i hans målinger, da han har benyttet en måle- kredsløb med større tidskonstant ( $\theta_K = 992 \mu$ s). Bjørnø har hel- ler ikke korrigeret for at være integrationsgrænse  $t^*$  er endelig. Disse systematiske fejl forklarer dog ikke den an- drede funktionsafhængighed mellem I og a, hvilket derfor må skyldes anvendelsen af forskellige transducerstørrelser, samt at undersøgelserne er gennemført for forskellige para- meterintervaller for a.



De termodynamiske forhold for boblepopulationen kan bestemmes ud fra sammenhørende værdier af bobletryk og -volumen. For at kunne foretage en rimelig nøjagtig bestemmelse af boblens volumen til et givet tidspunkt, kræves et skarpt fotografi med en tydelig boblekontur. Imidlertid resulterer de de indledende fotografieringsforsøg i meget uskarpe og underbelyste billeder, hvilket skyldtes dannelsen af kavitationsbobler i vandet.

Kavitationsboblernes tilstedeværelse kan konstateres med måleopstillingen, der er vist i fig 77.1. Med kameraet i position ① er der taget en række billeder af vandet i kanelen til forskellige tidspunkter efter chokfrontens passage af vinduernes centerlinje. Resultatet fremgår af fig 78.1.

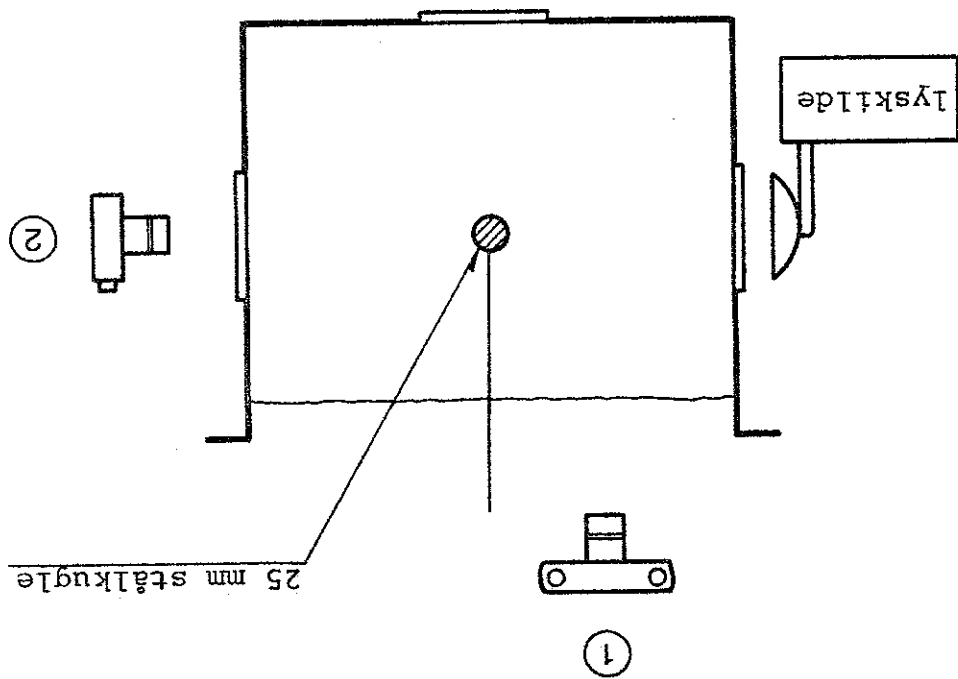


Fig 77.1 Forsøgsopstilling til fotografering af kavitationsbobler i vandkanalen. ① og ② er de anvendte kamerapositioner.

Fig 78.1 Fotografier af kavitationsbobler i vandkanalen. De angivne tider er regnet fra chokfrontens passage af vinduets centerlinje.

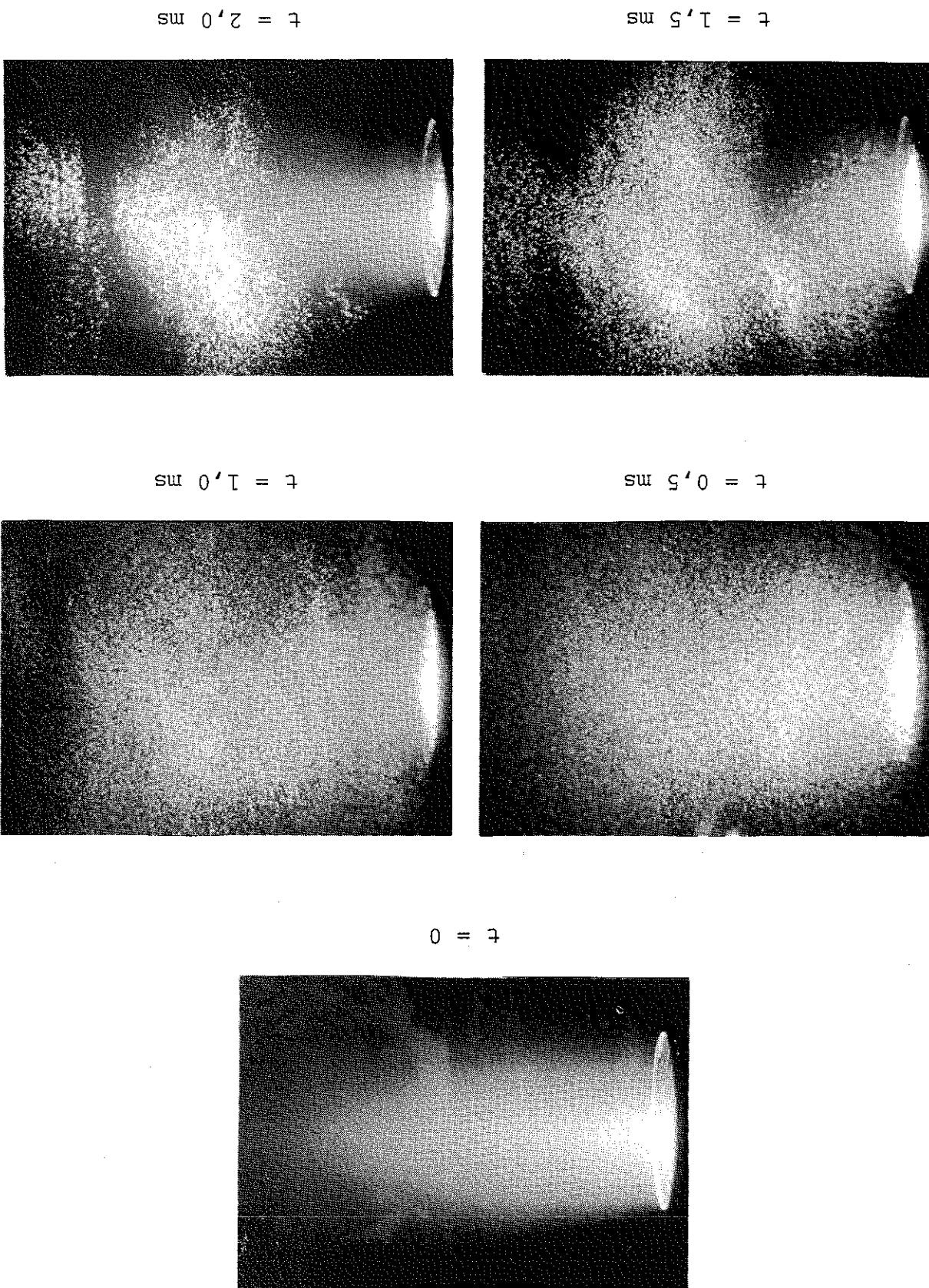
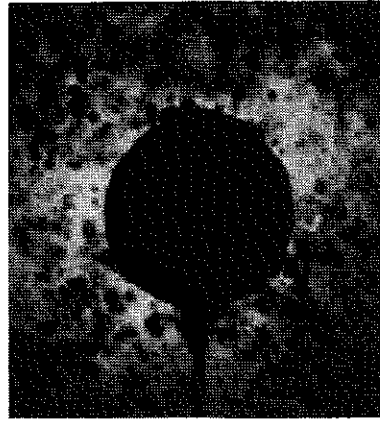
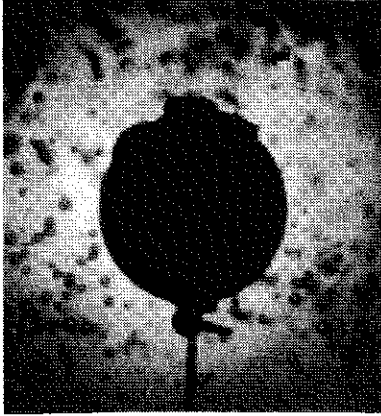


Fig 79.1 Fotografier af stålkuhle omgivet af kavitationsbobler. De angivne tider er regnet fra chokfrontens passage af kuglens midte.

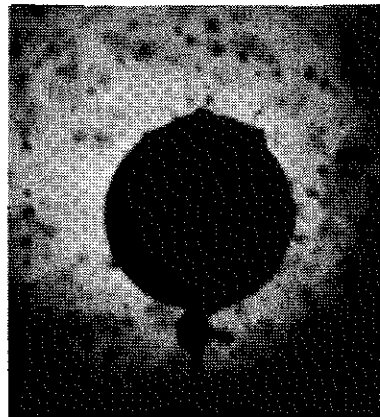
$t = 1,5 \text{ ms}$



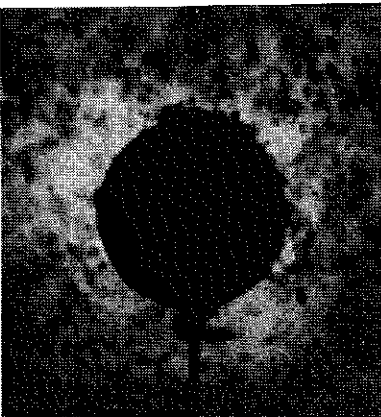
$t = 2,0 \text{ ms}$



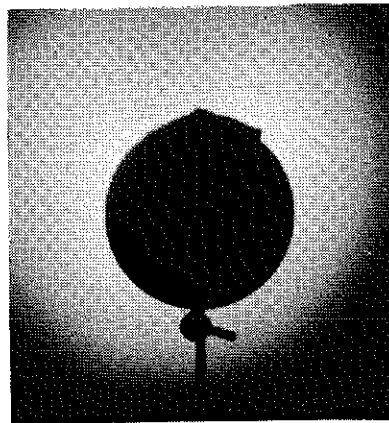
$t = 0,5 \text{ ms}$



$t = 1,0 \text{ ms}$



$t = 0$



Den mest benyttede metode til hindring af kavitation i væsker er en formløst af luftindholdet ved afgasning. I afdelingen af hydrodynamiske chokkrøer blev kavitationsintensiteten derfor målt i forskellige vandprøver med varierende luftindhold. Afgasningen foretoges ved kogning, og der blev anvendt såvel postevand som destilleret vand. Imidlertid kan det ikke registreres nogen væsentlig forskel i antal-

ler ikke et forsøg på at undgå ekspansionsbølgen ved at anvende let af kavitationsbølger mellem de forskellige prøver. Hel-

Den mest benyttede metode til hindring af kavitation i væsker er en formløst af luftindholdet ved afgasning. I afdelingen af hydrodynamiske chokkrøer blev kavitationsintensiteten derfor målt i forskellige vandprøver med varierende luftindhold. Afgasningen foretoges ved kogning, og der blev anvendt såvel postevand som destilleret vand. Imidlertid kan det ikke registreres nogen væsentlig forskel i antal-

Den mest benyttede metode til hindring af kavitation i væsker er en formløst af luftindholdet ved afgasning. I afdelingen af hydrodynamiske chokkrøer blev kavitationsintensiteten derfor målt i forskellige vandprøver med varierende luftindhold. Afgasningen foretoges ved kogning, og der blev anvendt såvel postevand som destilleret vand. Imidlertid kan det ikke registreres nogen væsentlig forskel i antal-

Den mest benyttede metode til hindring af kavitation i væsker er en formløst af luftindholdet ved afgasning. I afdelingen af hydrodynamiske chokkrøer blev kavitationsintensiteten derfor målt i forskellige vandprøver med varierende luftindhold. Afgasningen foretoges ved kogning, og der blev anvendt såvel postevand som destilleret vand. Imidlertid kan det ikke registreres nogen væsentlig forskel i antal-

bringe en metalplade i vandoverfladen resulterede i mindre kavitationsintensitet.

Løsningen på problemet viste sig i stedet at være anbringelse af en beskyttelsesplade på tværs i kanalen, som vist i fig 81.1. Pladen består af 10 mm polyurethanskum mellem to stk 3 mm jernplader. Den udfylder hele kanal tværsnittet, men er i midten forsynet med et hul på 20 cm i diameter, hvor igennem chokbølgen kan passere.

Der er foretaget fotografier af kavitationen bag pladen med kameraet i position ① (se fig 77.1), og med eksponering til de samme tidspunkter som i fig 78.1. Kun på et af billederne, som er vist i fig 82.1, ses nogle få kavitationsbobler ud for midten af hullet. Disse få bobler generede dog ikke fotografieringen, og derfor blev denne beskyttelsesplade anvendt ved de fotografiske undersøgelser af pulserende luftbobler i vand.

Et eksempel på boblefotografiering såvel med som uden beskyttelsesplade er vist i fig 82.2. Billedet ② viser boblen før den rammes af chokbølgen, medens de to sidste billeder begge er taget til tiden  $t = 0,6$  ms efter chokbølgens passage.

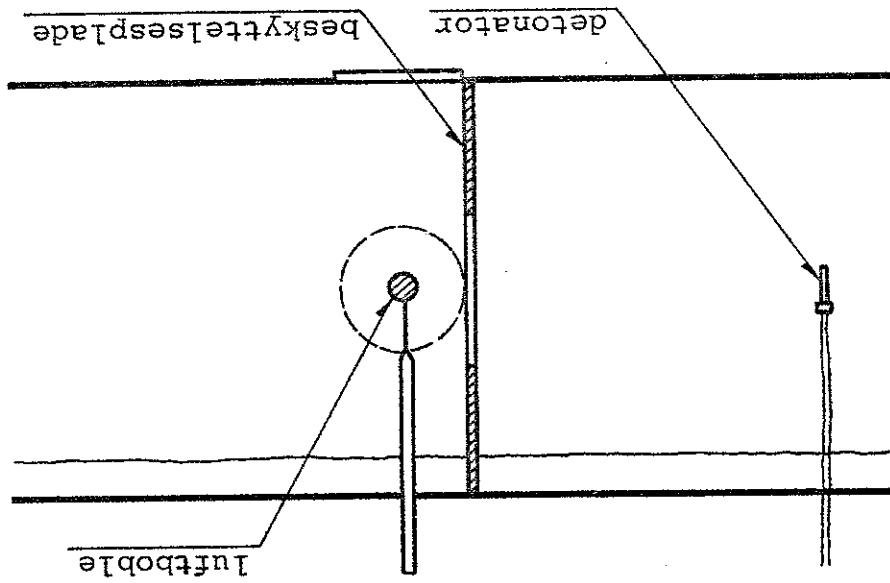
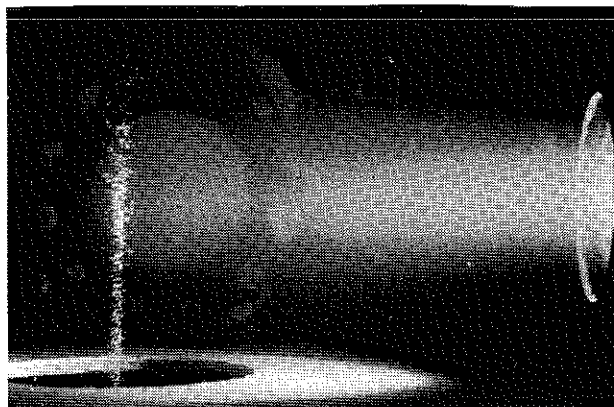


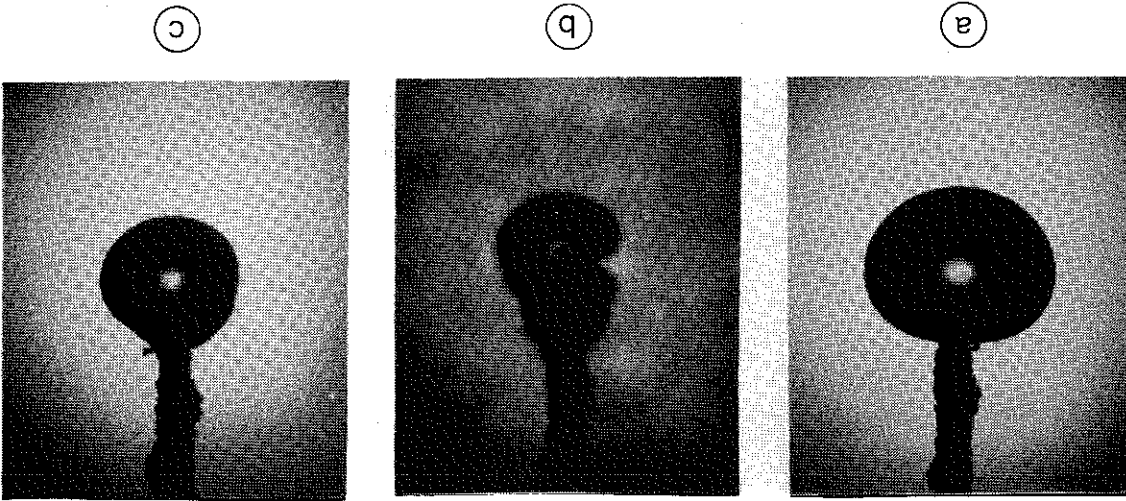
Fig 81.1 Forsøgsopstilling med beskyttelsesplade til hindring af kavitaton i vandet.

Fig 82.1 Fotografi af vandet bag beskyttelsespladen 0,5 ms efter chokbølgens passage.



a: stationær boble.  
 b: uden beskyttelsesplade for  $t = 0,6$  ms.  
 c: med beskyttelsesplade for  $t = 0,6$  ms.

Fig 82.2 Fotografier af 25 mm luftboble i vand.



Man bemærker den stærkt forbedrede billedkvalitet ved anvendelse af beskyttelsespladen. Desuden ses, at boblerne i bil-  
lede (b) og (c) ikke har samme størrelse og form, hvilket  
betyder, at trykbelastningen er forskellig i de to tilfælde.  
Dette er ikke overraskende, idet netop det ændrede trykfor-  
løb, forårsaget af pladens tilstedeværelse i kanalen, er års-  
sagen til det ændrede kavitationsbillede.

Et nøjagtigt kendskab til chokbølgens udseende bag pladen  
er ikke påkrævet for at kunne bestemme de termodynamiske  
forhold for boblepopulationen, idet man her blot skal kende  
sammenhørende værdier af bobletryk og -volumen. Derimod er  
det af hensyn til fremtidige boblestudier ønskeligt at ken-  
de trykforløbet bag beskyttelsespladen.

C. Difraktion af chokbølge bag plade med cirkulært hul.

Til bestemmelse af trykfordelingen bag beskyttelsespladen er der benyttet en 1/8" turmalin-transducer. Forsøgsopstillingen er vist i fig 84.1. I figuren er indtegnet den geometriske skyggegrænse, som deler området bag pladen i henholdsvis en lyszone og en skyggezone. Disse betegnelser stammer fra den geometriske optik, men det er kun i kortbølgegrænsen, der findes et skarpt skel mellem lys- og skyggeområdet. Når bølglængden bliver af samme størrelsesorden som huldiameteren, hvilket er tilfældet i de aktuelle forsøg, vil chokbølgen diffrakteres bag pladen, således at der ikke længere eksisterer en udpræget skyggezone. I nærheden af symmetriaksen vil der findes et område, hvor maksimaltrykket  $P_m$  i chokbølgen er upåvirket af pladens tilstedeværelse. Dette område kaldes lyszonen eller kærnestralen.

I denne forsøgsserie er man primært interesseret i at bestemme kærnestralens bredde, samt chokbølgens udseende og impulstæthedens størrelse i kærnestralen. Målingerne er gennemført med beskyttelsespladen i en fast afstand på 50 cm

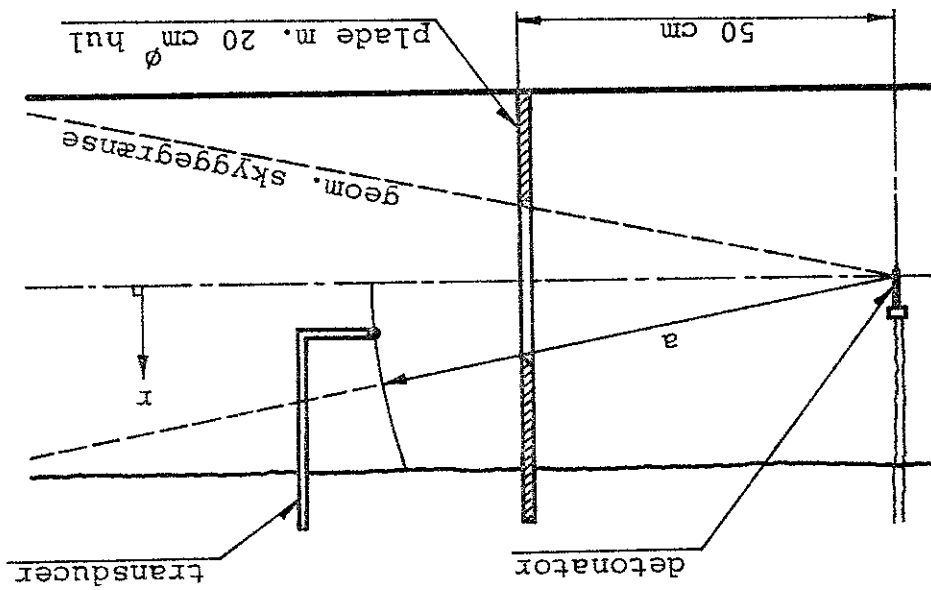


Fig 84.1 Forsøgsopstilling til måling af trykforløbet bag beskyttelsespladen.



fra detonatoren. Som transducerafstande er der valgt  $a = 60$ , 80 og 100 cm, medens  $r$  varierer mellem 0 og 20 cm. Et karakteristisk forsøgsresultat ved måling i kærnesrålen ses i fig 85.1. Det bemærkes, at kurveforløbet stemmer overens med det sædvanlige chokbølgeforsøg indtil 25  $\mu$ s efter fronten, hvorefter trykket pludseligt falder til nul. Årsagen hertil er, at en ekspansionsbølge fra skyggeområdet bevæger sig ind i kærnesrålen og derved ændrer trykforløbet i chokbølgen hale. Afstanden mellem chokfronten og ekspansionsbølgen front mindskes med voksende afstand fra symmetriaksen, og kærnesrålens grænse er karakteriseret ved, at netop her indhenter ekspansionsbølgen chokfronten.

Den  $P_m^m$ -værdi, der måles i fig 85.1, skal som omtalt i kapitel VIII A korrigeres på grund af transducerforøgningen. For at kunne beregne korraktionsfaktoren må man kende såvel bølgen "risetime"  $t_r$  som tidskonstanten  $\theta_r$  for det eksponentielle trykfald bag fronten (se fig 86.1). Hvis bølgen har chokkarakter er den virkelige risetime mindre end 1  $\mu$ s, men på grund af transducerforøgningen måles  $t_r$  til ca 3  $\mu$ s. I dette tilfælde kan korraktionsfaktoren for  $P_m^m$  beregnes som funktion af  $\theta_r$ , hvilket er vist i ref. [10]. Har bølgen derimod ikke chokkarakter, er det yderst vanskeligt at bestemme korraktionen.

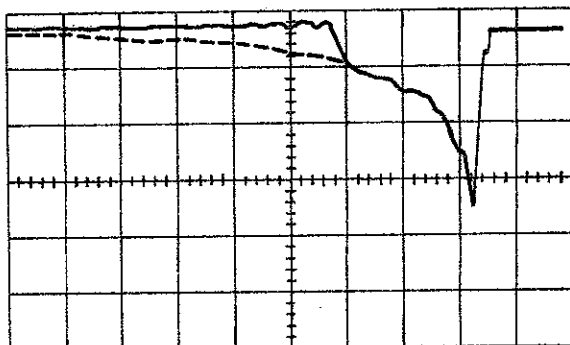


Fig 85.1 Chokbølgen udsende i kærnesrålen bag beskyttelsespladen. Til sammenligning er vist trykforløbet i den uforstyrrede chokbølge (stiplet).  $x = 10 \mu$ s/div,  $a = 60$  cm,  $r = 4$  cm.

Forsøgsresultaterne viser, at  $t_1$  er nogenlunde konstant lig 3  $\mu$ s i kærnestrålen, hvorimod  $t_1$  vokser med voksende  $r$  uden for kærnestrålen. Der er målt en maksimal risetime på 17  $\mu$ s for  $a = 60$  cm og  $r = 20$  cm. Også tidskonstanten  $\theta_1$  varierer en del som funktion af  $r$ . De mindste  $\theta_1$ -værdier måles ved grænsen for kærnestrålen, hvor ekspansionsbølgen indhenter chokfronten, medens de største måles inde i skyggezoneen. Der er målt  $\theta_1$ -værdier på 2 - 15  $\mu$ s.

Da  $t_1$  og  $\theta_1$  varierer fra målepunkt til målepunkt, må der udregnes en speciel korrektionsfaktor til hver  $P^m$ -værdi. Imidlertid har trykbølgen ikke chokkarakter overalt, så de i reference [10] angivne korrektionsformler kan ikke benyttes. Da det er en særdeles vanskelig opgave at bestemme korrektionen for en arbitrær funktion  $P=P(t)$ , har man i stedet valgt at benytte de ukorrigerede  $P^m$ -værdier overalt, vel vidende at de enkelte måleværdier da er behæftet med en betydelig ubestemthed.

Forsøgsresultaterne er vist i fig 87.1, hvor  $P^m/P^{m,0}$  er opregnet som funktion af  $r$  i forskellige afstande fra eksplosionsstedet.  $P^{m,0}$  er her maksimaltrykket i den uforstyrrede chokbølge.

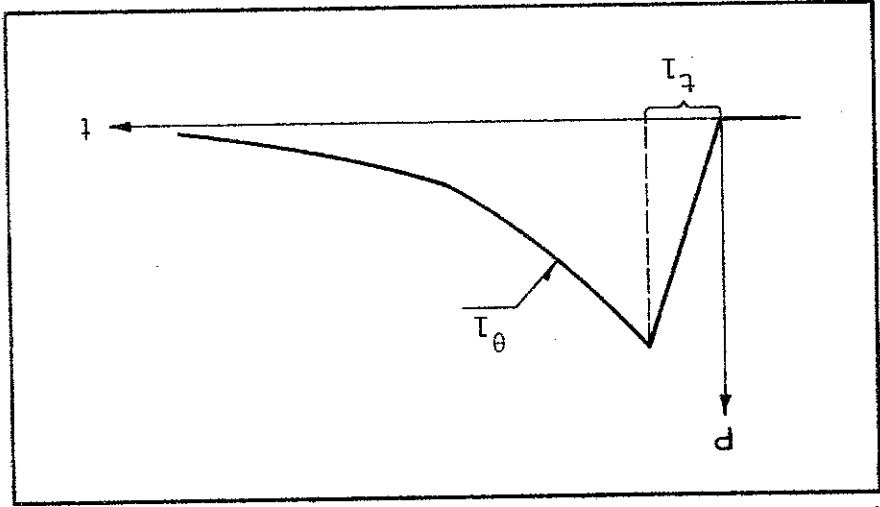
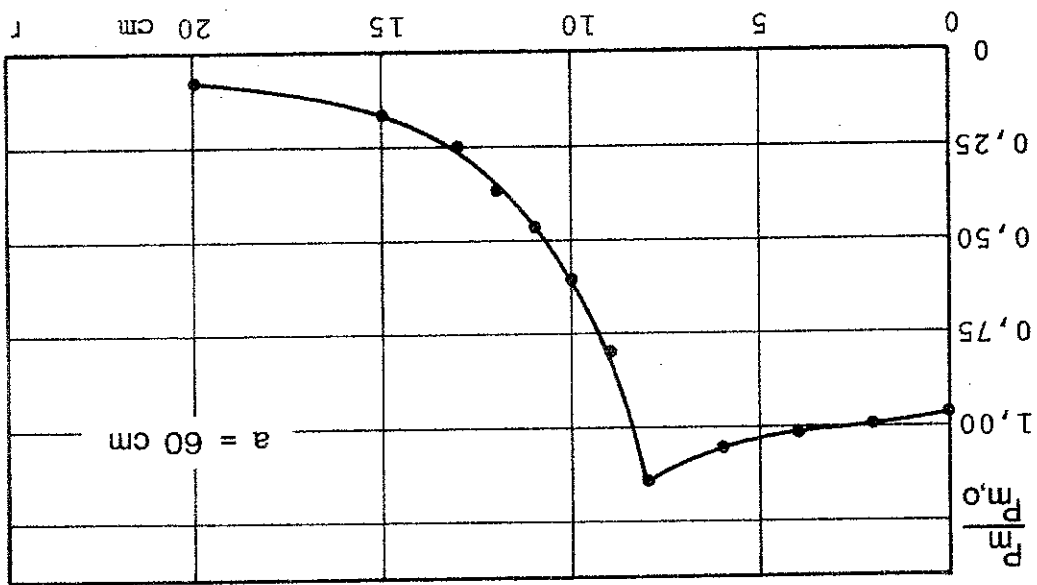
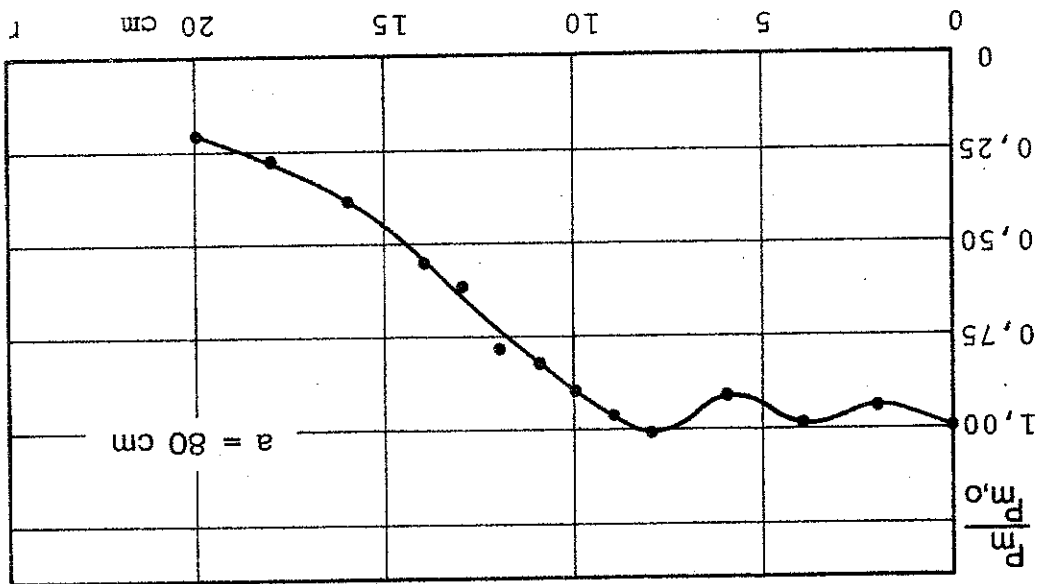
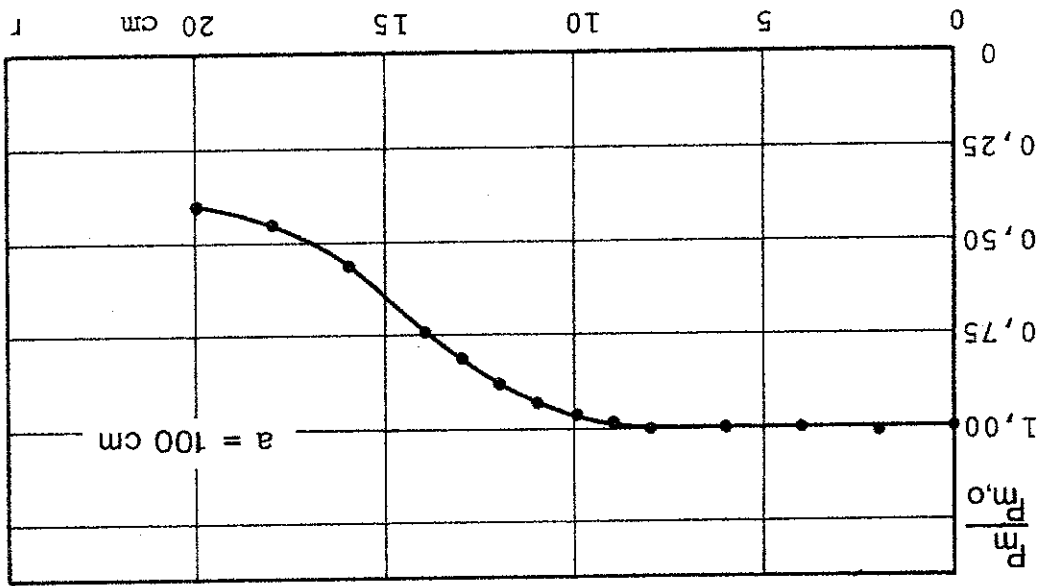


Fig 86.1 Chokbølgens principielle udseende med risetime  $t_1$  samt tidskonstant  $\theta_1$  for det eksponentielle trykfald bag fronten.

Fig 87.1 Målte maksimaltryk bag beskyttelsespladen som funktion af afstanden fra kærnestrålens symmetriakse.



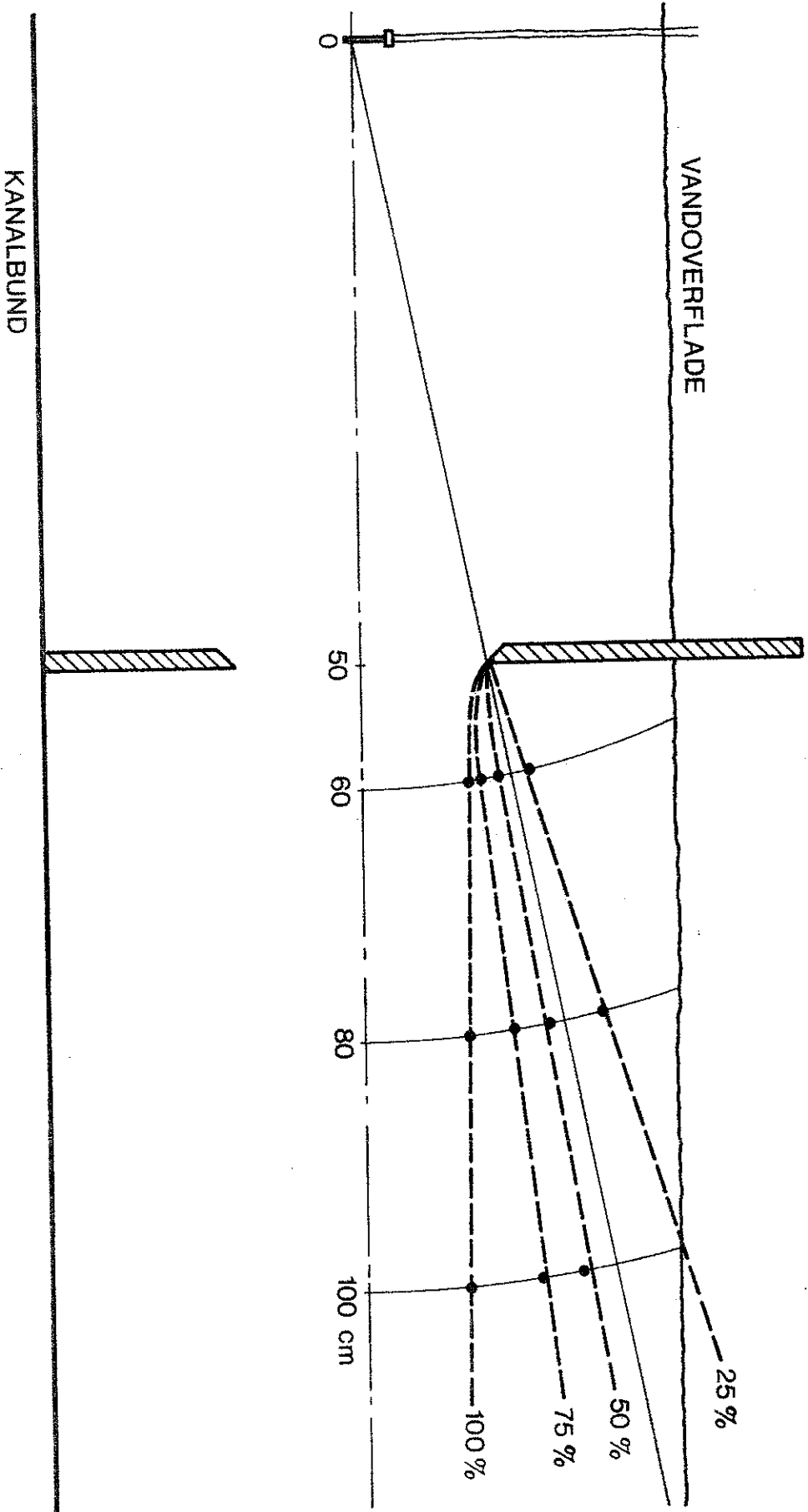


Fig 88.1 Niveaukurver for chokbølgens maksimaltryk bag beskyttelsespladen i procent af trykket nær symmetriaksen.

Af fig 87.1 ses, at der for  $a = 60$  cm registreres indtil 15% højere tryk i kærnestrålen med beskyttelsesplade end uden, samt at trykket i kærnestrålen først bliver konstant for  $a = 100$  cm. Trykvariationerne i kærnestrålen umiddelbart bag pladen er et fænomen, som altid forekommer i forbindelse med diffraktion. Disse fluktuationer i trykamplituden kaldes diffraktionsbånd, og den største amplitude optræder normalt umiddelbart før det kraftige trykfald ind over skyggegrænsen registreres.

Måleresultaterne i fig 87.1 kan kun betragtes som et kvalitativt udtryk for trykfordelingen bag pladen, idet der ved kurvernes optegning er benyttet ukorrigerede maksimaltryk, samt tidlig med at der kun er foretaget en enkelt trykmåling i hvert målepunkt.

Ud fra fig 87.1 kan de kurvepunkter, hvor  $P^m/P^{m,0}$  antager værdierne 1,0 - 0,75 - 0,5 - 0,25 bestemmes. Herefter kan der tegnes en række niveaukurver for  $P^m$  i procent af  $P^{m,0}$  som vist i fig 88.1. Det ses, at kærnestrålens brede fastlagt ved 100% kurven er nogenlunde konstant uafhængig af  $a$ . Desuden bemærkes, at trykgradienten  $dP^m/dr$  er størst umiddelbart bag pladen.

I en vis afstand bag pladen er størrelsen af maksimaltrykket  $P^m$  i kærnestrålen uafhængig af pladens tilstedeværelse. Derimod er impulstætheden i betydeligt mindre, når beskyttelsespladen anvendes. Dette fremgår klart af fig 85.1, som viser, at arealet under kurven mindskes på grund af ekspansionsbølgen fra skyggezone. Den reducerede impulstæthed i kærnestrålen medfører mindre belastning af luftboblerne, når der anvendes beskyttelsesplade. Dette forklarer forskellen mellem billederne (b) og (c) i fig 82.2.

I en pulserende luftboble vil såvel tryk som temperatur variere med boblens pulsationsfrekvens. I bobler af størrelsen 10 - 30 mm i diameter er der målt maksimaltryk på indtil 20 bar, hvilket svarer til en temperatur på 420 °C, hvis pulsationsprocessen er adiabatisk. Hvorvidt der optræder så høj en temperatur i boblen afhænger bl.a. af varmetabet til det omgivende fluid. I praksis kan varmelledning ikke fuldstændig undgås, og derfor er den adiabatiske pulsation et grænsetilfælde, som ikke lader sig realisere fysisk. Tilgodes er en isotermsk pulsation et grænsetilfælde, men afhængig af varmetabets størrelse, vil et af de to grænsetilfælde med god tilnærmelse beskrive den termodynamiske proces.

Den teoretiske bestemmelse af maksimaltrykket  $P_1$  i en boble, som rammes af chokbølgen fra en undervandsseksplosion, blev som omtalt i kap V gennemført under antagelse af adiabatisk pulsation. At dette er en rimelig antagelse for bobler af størrelsen 10 - 30 mm i diameter viser forsøgene, som omtales senere i dette kapitel. Det kan imidlertid også gennem simple beregninger vises, at varmetransporten fra boblen til væsken er forsvindende.

Forudsætningen for at kunne bestemme varmetabet fra en boble er et nøje kendskab til temperaturfordelingen inde i boblen som funktion af tiden. Som omtalt af PLESSER [55] er trykket det samme overalt i boblen, sålænge hastigheden af boblevæggen er lille i forhold til lydastigheden i gassen. Målingerne viser, at denne betingelse er opfyldt i de aktuelle forsøg. Da trykket er ens overalt i boblen, vil temperaturen også være det, da hvert delvolumen komprimeres lige meget. Dette forudsætter naturligvis, at der ses bort fra varmelledning til det omgivende fluid. Tages der hensyn til varmelledningen vil der være en temperaturgradient i boblen, og temperaturen vil være højest i boblens centrum. Imidlertid kan pulsationen foregå så hurtigt, at temperaturfaldet på grund af varmeafgivelse til væsken er begrænset til de aller yderste lag af boblen, således at temperaturen i ho-

vedparten af boblen ikke påvirkes af varmetransporten. At dette netop et tilfælde med de aktuelle boblestørrelser, skal vises i det følgende.

1. Beregningsresultater. En eksakt beregning af de termodynamiske forhold for et pulserende luftvolumen kan ske ved numerisk løsning af en række sammenhørende ulineære differentialligninger. Dette er dog en så kompliceret opgave, at den endnu ikke er løst af nogen af de forskere, som har beskæftiget sig med disse problemer. Derimod har såvel PLESSSET & HSIEH [56] som CHAPMAN & PLESSSET [13] løst ligningssystemet under antagelse af små tryk- og temperaturvariationer i boblerne. Resultatet af disse beregninger er omtalt i kapitel III C, og for lineært pulserende resonansbobler angiver Chapman & Plessset følgende:

$$\left. \begin{array}{l} R_0 > 1 \text{ mm: adiabatisk} \\ R_0 > 10^{-3} \text{ mm: isothermisk} \end{array} \right\} (91.1)$$

Dette resultat kan ikke umiddelbart forventes at gælde for ulineære pulsationer med store tryk- og temperaturvariationer. Der fås dog af (91.1), at pulsationen er adiabatisk for  $d_0 = 10 - 30$  mm, hvilket stemmer med forsøgsresultaterne.

En teoretisk bestemmelse af varmetabet fra en pulserende boble kan gennemføres under simplificerende forudsætninger, idet det er muligt at beregne varmetafgivelsen fra et stærisk legeme, som har højere temperatur end omgivelserne. For at kunne benytte denne model på boblen, må temperaturændringer hidrørende fra pulsationen negligeres. Man betragter det tilfælde, hvor en stationær luftboble med temperaturen  $T_g$  er i forhold  $t = 0$  anbringes i vand med temperaturen  $T_\infty > T_g$ . Man ønsker at beregne den afgivne varme til tiden  $t$  i forhold til den totale varmeeenergi i boblen til tiden  $t = 0$ . Som den karakteristiske tid vælges den tid, der går fra choket rammer boblen, til maksimaltrykket  $P_1$  nås, og som  $T_g$  indskrives en middeltemperatur for de adiabatiske temperaturvariationer i boblen. Den beregnede værdi for varmetabet vil da være et

udtryk for, hvor stor en procentdel af den akkumulerede varmeenergi, der kan bortledes under kontraktionsfasen. Hvis dette kun drejer sig om nogle få procent, kan pulsationsprocessen med god tilnærmelse regnes adiabatisk.

For at kunne beregne varmetabet må man kende varmeovergangstallet  $q$  mellem gas og væske. Da varmeledningskoefficienten for vand er en faktor 20 større end for luft, kan man med god tilnærmelse indsatte  $q = \infty$ , hvilket medfører, at boblens overfladetemperatur bliver  $T^\infty$ . I fig 92.1 er vist det principielle forløb af temperaturprofilerne i boblen til forskellige tidspunkter efter boblens nedsænkning i væsken.

De formler, der benyttes ved beregning af varmetabet, er opstillet for et fast legeme, men der skulle også kunne opnås realistiske resultater for en luftboble, når de nødvendige forudsætninger gøres. Den totale varmeenergi i boblen, målt relativt i forhold til omgivelsernes temperatur, er til  $t=0$  givet ved følgende udtryk:

$$Q_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \cdot \rho C_V (T_g - T^\infty) \quad (92.1)$$

hvor  $C_V$  er den specifikke varme pr masseenhed af gassen ved konstant volumen.

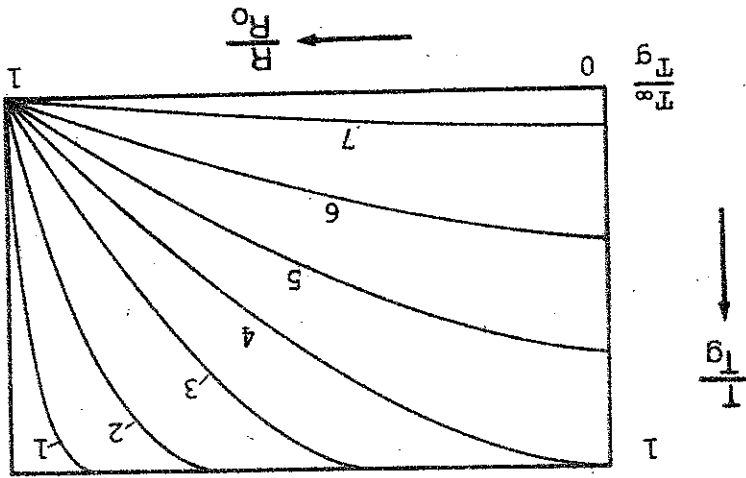


Fig 92.1 Temperaturfordelingen til forskellige tider i en boble med begyndelesstemperaturen  $T_g^\infty$ . Omgivelsernes temperatur er  $T^\infty > T_g^\infty$  [7].



Varmetabet  $Q$  i tiden  $t$  angives af BOELTER, CHERRY, JOHNSON & MARTINELLI [7] til

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cdot e^{-j^2 \pi^2 \cdot Fo} \quad (93.1)$$

hvor

$$Fo = \frac{\alpha_g \cdot t}{R_0^2}$$

Fo er her Fouriertallet og  $\alpha_g$  temperaturledningssevnen for luft. I ref. [7] er den uendelige sum i (93.1) optegnet grafisk som funktion af Fo.

Til et beregnings eksempel er der valgt følgende sæt repræsentative parameter værdier:

$$\begin{aligned} R_0 &= 0,01 \text{ m} \\ \tau &= 0,5 \text{ ms} \\ P_1 &= 5,0 \text{ baro} \\ T_g &= 200 \text{ }^\circ\text{C} \\ \alpha_g &= 0,90 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

Ud fra disse værdier kan Fo beregnes til  $0,5 \cdot 10^{-4}$ , hvilket giver et varmetab på

$$\frac{Q}{Q_0} = 2,4\%$$

Under de simplificerende forudsætninger bortledes der kun 2,4% af varmen i løbet af 0,5 ms, og processen kan derfor med god tilnærmelse betragtes som adiabatisk. Temperaturforløbet inde i boblen for  $t = 0,5$  ms er karakteriseret ved kurve 1 i fig 92.1, idet temperaturfaldet kun berører boblens yderste lag.

Det skal nu undersøges, hvorledes varmetabet afhænger af boblens ligevægtsradius  $R_0$  er eksperimentelt bestemt til

$$\tau = \frac{R_0}{20} \text{ [s]} \quad \text{for } R_0 \text{ [m]} \quad (93.2)$$

Heretter kan Fouriertallet skrives  $Fo = \alpha_g^2 / 20 R_o$ . Indsættes for  $\alpha_g$  den tidligere angivne værdi på  $0,9 \cdot 10^{-5}$  m/s, fås de værdier der er vist i tabel 94.1 for varmetabet som funktion on af  $R_o$ .

På grundlag af tabelværdierne kan følgende uligheder opstilles til beskrivelse af de termodynamiske forhold for boblepulsationen:

$$\left. \begin{array}{l}
 1 \text{ mm} < R_o \\
 10^{-3} < R_o < 1 \text{ mm} \\
 R_o \leq 10^{-3} \text{ mm}
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{adiabatisk} \\
 \text{overgangsområde} \\
 \text{isotermisk}
 \end{array} \quad (94.1)$$

Disse resultater er i overensstemmelse med Chapman & Plesset's beregninger efter den lineariserede teori [13], hvilket er overraskende, eftersom der ved udladelse af (94.1) er benyttet en ret grov teoretisk model.

For de aktuelle boblestørrelser på 10 - 30 mm i diameter kan pulsationen ifølge (94.1) regnes adiabatisk. En eksperimenter verificering af dette resultat omtales i det følgende.

$R_o$	mm	$\frac{Q}{Q_0}$
10	5 · 10 <sup>-5</sup>	2,4
1	5 · 10 <sup>-4</sup>	7,6
10 <sup>-1</sup>	5 · 10 <sup>-3</sup>	22
10 <sup>-2</sup>	5 · 10 <sup>-2</sup>	60
10 <sup>-3</sup>	5 · 10 <sup>-1</sup>	100

Tabel 94.1 Beregnet varmetab fra luftboble i vand som funktion af bobleradius.

2. Forsøgsresultater. Udgangspunktet for en eksperimentel bestemmelse af de termodynamiske forhold for boblepulsationen er Poisson's ligning

$$P_1^{\frac{1}{\gamma}} = \left[ \frac{d_1}{d_0} \right]^{3\gamma}$$

hvor  $\gamma$  er polytrop eksponenten.  $P_0$  og  $d_0$  refererer til boblens ligevægtstilstand, medens  $P_1$  og  $d_1$  er sammenhørende værdier for tryk og diameter til et vilkårligt tidspunkt.  $\gamma$  kan antage værdier mellem 1,0 (isotermisk pulsation) og 1,4 (adiabatisk pulsation). Når et sæt værdier for  $P_1$  og  $d_1$  er bestemt eksperimentelt, beregnes  $\gamma$  af formel (95.1).

Forsøgsopstillingen, der er benyttet til samtidig trykmåling og diameterbestemmelse, er vist i fig 96.1. Man ser, at der umiddelbart til venstre for vinduerne er anbragt en beskyttelsesplade til hindring af kavitation i vandet. Til trykmåling i boblen anvendes der en strain-gauge transducer, medens triggesignalet frembringes af en PZT-transducer. Såvel oscilloskop som lyskilde trigges af PZT-transduceren, idet lyskildens triggesignal dog først sendes gennem en forsinker. Herved opnår man at kunne tage et billede på et vilkårligt tidspunkt i pulsationsforløbet, idet man blot ændrer forsinkelsens størrelse, hvis boblen ønskes fotograferet til et andet tidspunkt.

Når lyskilden blinker udsender den et elektrisk signal på 500 V, som gennem en spændingsdeletransformeres ned til 10 mV, før det registreres på oscilloskopets ene stråle. På den anden stråle registreres trykforløbet inde i boblen, og ved at sammenligne kurveforløbene på oscilloskopskærmen kan man aflæse, hvilket tryk der findes i boblen på fotograferingstidspunktet. Dette er vist i fig 97.1, hvor man øverst ser signalet fra lyskilden og nederst transducer-signalet. Fotograferingstidspunktet falder her næsten sammen med registreringens af maksimaltrykket.

Ved fotografering af boblen er der benyttet to kameraer placeret som vist i fig 98.1.

Fig 96.1 Diagram over forsøgsopstilling til samtidig diameterbestemmelse for boblen og trykmåling inde i boblen.

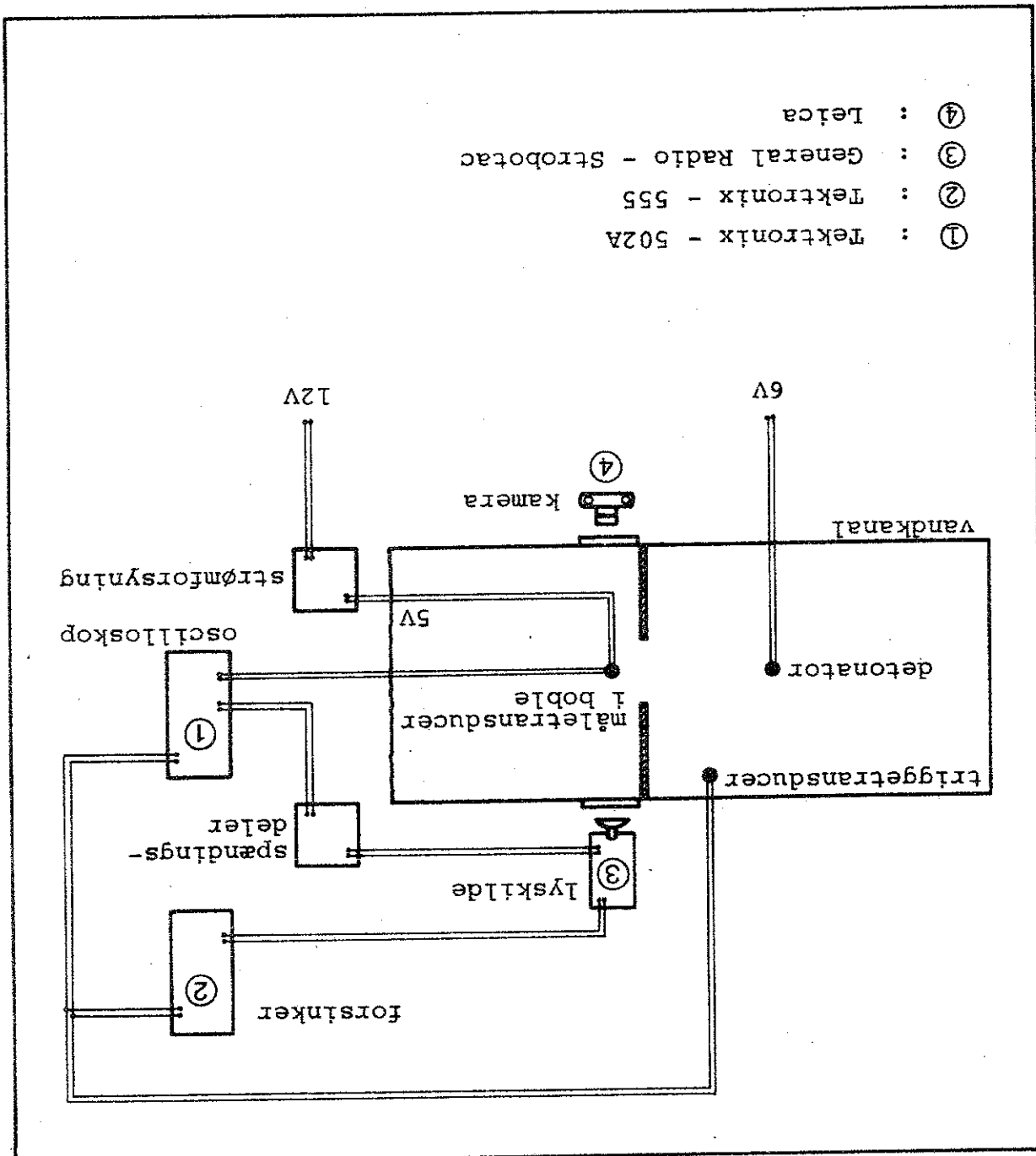


Fig 97.2 Pulserende boble fotografert samtidigt fra henholdsvis kamerasposition ① og ②.  $d_0 = 20 \text{ mm}$ ,  $a = 60 \text{ cm}$ .

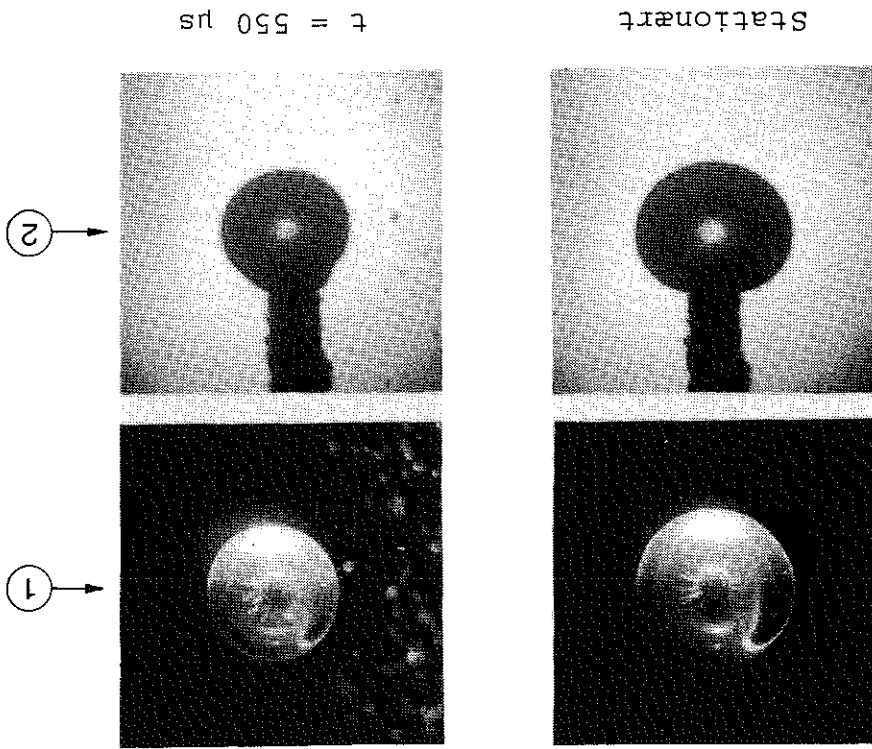
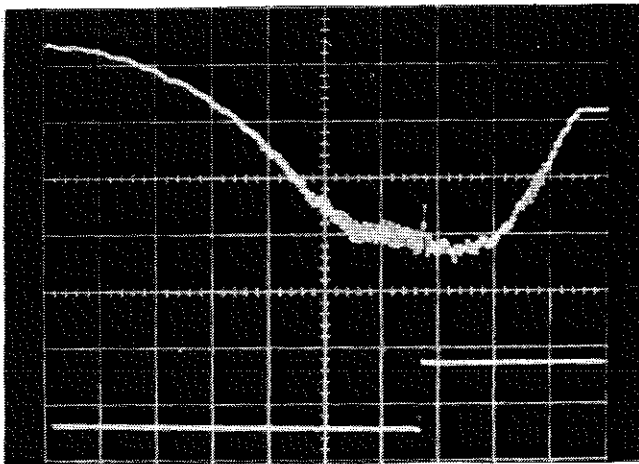


Fig 97.1 Øverste kurve: Signal fra lyskilde, som viser det eksakte fotografertidspunkt. Nederste kurve: Trykmåling i pulserende boble.  $x = 200 \text{ } \mu\text{s/div}$ ,  $d_0 = 20 \text{ mm}$ ,  $a = 60 \text{ cm}$ .



fordelen ved at fotografere boblen både gennem side- og bundinduet er, at man da kan afsløre eventuelle afvigelse fra den kuglesymmetriske form og dermed opnå en nøjagtigere volumenbestemmelse.

Resultatet af boblefotografieringen svarende til trykmålingen i fig 97.1 er vist i fig 97.2. De to billeder til venstre er taget før chokbølgen rammer boblen, medens billederne til højre viser boblen i dens minimumfase. Ved opmåling af fotografierne konstateres det, at boblen er svagt fladtrykt for  $t = 550 \mu s$ , hvilket skyldes den usymmetriske trykpåvirkning. I fig 97.2 bevæger chokbølgen sig fra venstre mod højre.

Ved bestemmelse af volumen antages det, at bobleformen kan approksimeres ved en ellipsoide med volumen  $\frac{6}{\pi} l_1 l_2 l_3$ , hvor  $l_1 l_2 l_3$  er produktet af de tre hovedakser. Den ækvivalente kugleformede boble har volumen  $\frac{6}{\pi} d_1^3$ , og følgende bestemmes  $d_1$  af formelen:

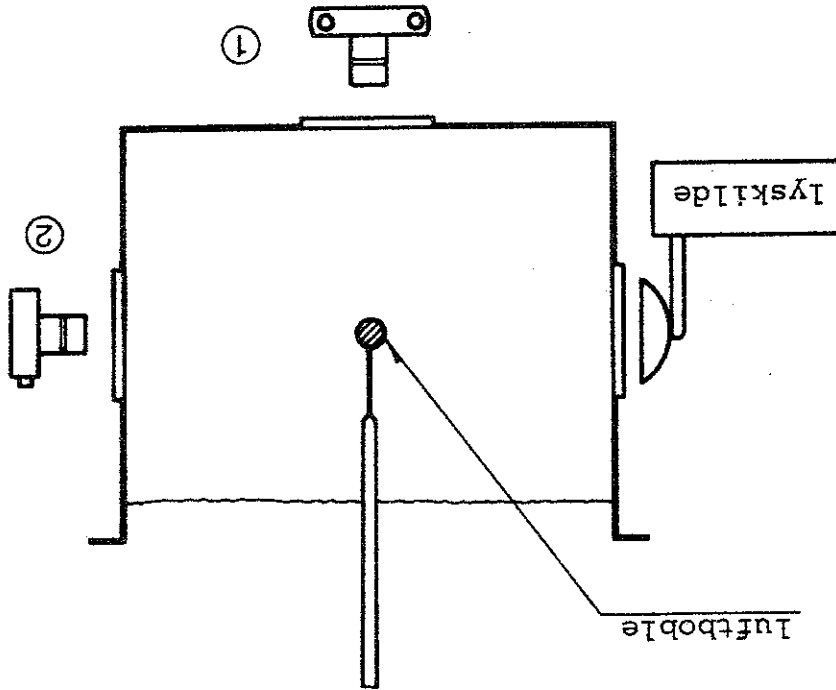


Fig 98.1 Forsøgsopstilling til fotografiering af pulserende boble. ① og ② er de anvendte kamera-positioner.

(99.1)

$$d_1 = \sqrt[3]{l_1 l_2 l_3}$$

De tre hovedaksers størrelse kan måles direkte af billederne, som vist i fig 99.1. En lidt nøjagtigere volumenbestemmelse fås ved at planimetrere arealet i nederste billede og skrive dette som en ellipses areal på  $\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot l_2$ . Derefter måles  $l_3$  på øverste billede og volumenet  $\frac{1}{6} \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$  udregnes. Forskellen mellem de to metoder til volumenbestemmelse er ikke stor, men hvis boblen i en af projektionerne er meget usymmetrisk, giver planimetreringen det nøjagtigste resultat.

Ved beregning af volumenet for små bobler må man fraregne den del af boblens indre, som opfyldes af transduceren og enden af bobleholderen. Denne korrektion er ansået til at være  $18 \text{ mm}^3$ , hvilket er ca 2% af det totale volumen for en 15 mm boble i minimumfasen.

Forsøgene er gennemført med boblerne i en fast afstand på 60 cm fra eksplosionsstedet. Foruden boblefotografierne findes der på hver film et billede af en 1" stålkugle, der benyttes som længdereferenc ved bestemmelse af de absolutte mål.

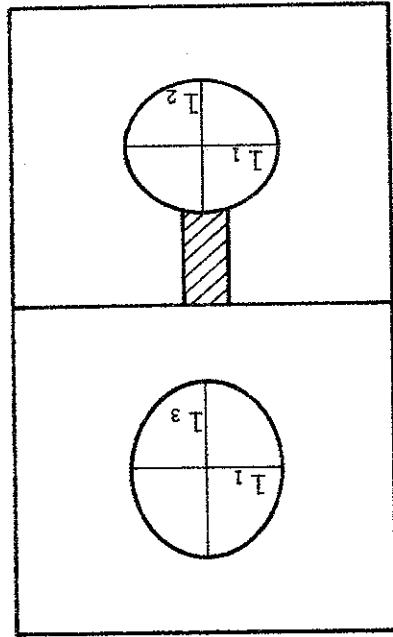


Fig 99.1 Hovedaksenes beliggende i den elliptiske boble, hvorved boblens størrelse bestemmes.

Tabel 100.1 Eksperimentelt bestemte værdier af polytrop-eksponenten  $k$ .

Nr	$d_0$	$d_1$	$P_1$	$k$
1	15,0	10,6	3,25	1,39
2	15,0	10,5	3,50	1,41
3	15,0	10,5	3,45	1,40
4	15,0	10,4	3,55	1,38
5	15,0	10,3	3,75	1,38
6	20,1	17,0	1,05	1,43
7	20,1	17,3	0,87	1,38
8	20,1	17,0	1,05	1,43
9	20,1	17,1	0,99	1,42

Forsøgsresultaterne er gengivet i tabel 100.1. Der er gennemført ialt 9 målinger på to forskellige boblestørrelser. Som det ses, er de beregnede værdier for  $k$  meget nær 1,40, hvilket svarer til adiabatisk pulsation. Aflæsningsubestemtheden på  $d_1$  kan sættes til  $\pm 1\%$  og på  $P_1$  til  $\pm 3\%$ , hvilket forklarer den spredning, der findes på de beregnede  $k$  værdier.

Konklusionen af ovenstående er, at bobler af størrelsen 10-30 mm i diameter pulserer adiabatisk, hvilket er i overensstemmelse med det teoretiske resultat. Det skal i denne forbindelse påpeges, at ballonens indflydelse på de termodynamiske forhold er forsvindende, da gummihindens tykkelse kun er 0,05 mm, samtidig med at varmelædningskoefficienten for gummi er ca 5 gange så stor som for luft.

Det ville være ønskeligt også at måle på bobler med betydende højere maksimaltryk end 3,75 bar, men med voksende belastning af boblerne deformeres de så kraftigt, at en tilstrækkelig nøjagtig volumenbestemmelse ikke længere er mulig.



E. Maksimaltrykket i en pulserende boble.

Som tidligere omtalt kan man bestemme den totale akkumulerede energi i en luftboble, som rammes af chokbølgen fra en undervandseksplosion, hvis man kender maksimaltrykket i boblen og værdien af polytrop eksponenten  $k$ . I forrige kapitel blev  $k$  målt til 1,4, og her gengives resultatet af en forsøgsserie, hvor maksimaltrykket  $P_L$  er målt i forskellige afstande i varierende afstande fra eksplosionsstedet. Forsøgene er gennemført for  $d_0 = 10 - 30$  mm og  $a = 30 - 150$  cm.

Forsøgsopstillingen er vist i fig 101.1. Som det ses, er der benyttet en vandret bobleholder, hvilket giver den bedste tilnærmelse til en frit pulserende boble, idet ballonen er indspændt på bagsiden, som får den mindste trykpåvirkning og dermed den mindste flytning. Til hindring af bølgerrefleksioner fra kanalvæggene er der anvendt en skumplade.

Trykregistreringen inde i boblen er foretaget med en strain-gauge transducer koblet direkte på et oscilloskop (502A). En karakteristisk trykmåling ses i fig 102.1. Øverste billede viser trykforløbet i boblen under de tre første pulsationer, medens nederste billede, som er optaget med større sweep hastighed og forstærkning, kun viser første trykamplitude.

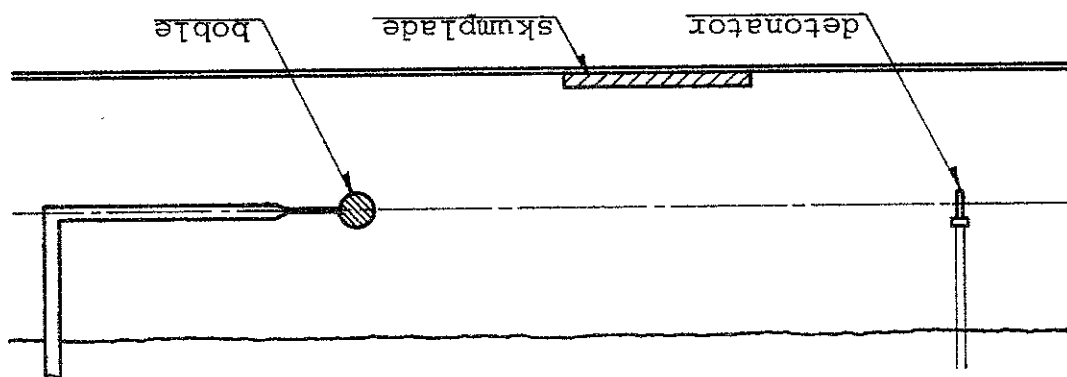
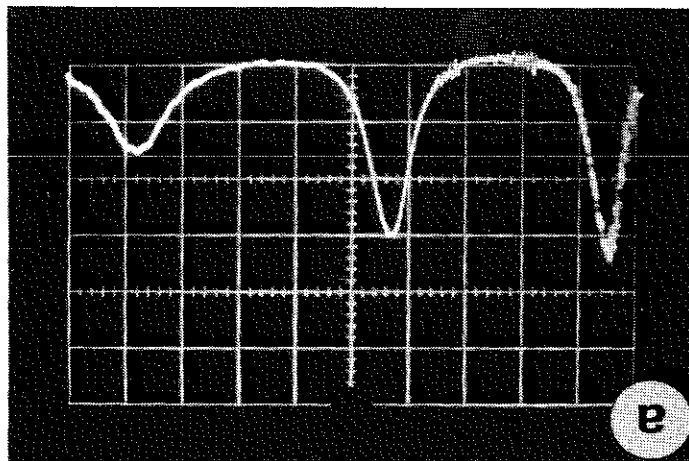
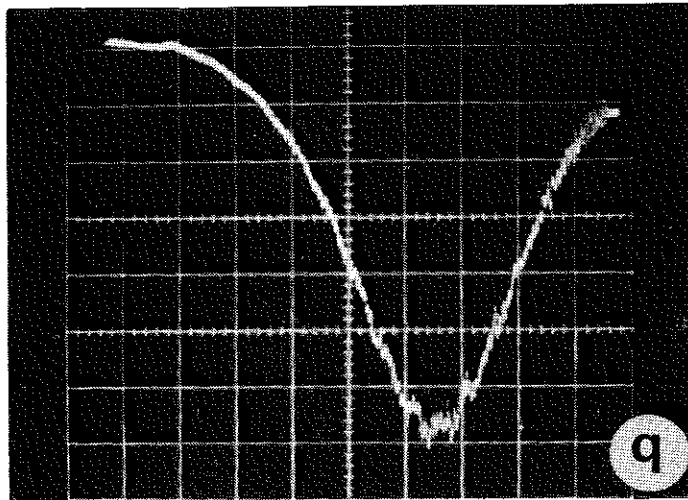


Fig 101.1 Forsøgsopstilling til trykmåling i pulserende boble.

Fig 102.1 Trykforløbet i pulserende boble målt med strain-gauge transducer.

a:  $x = 1,0 \text{ ms/div}$ ,  $d_0 = 30 \text{ mm}$ ,  $a = 50 \text{ cm}$ .  
 b:  $x = 0,2 \text{ ms/div}$ ,  $d_0 = 30 \text{ mm}$ ,  $a = 50 \text{ cm}$ .



ud fra nederste billede i fig 102.1 kan maksimaltrykket  $P_1$  bestemmes med en nøjagtighed på  $\pm 3\%$ .

Boblestørrelsen er bestemt ved fotografering, på samme måde som omtalt i forrige kapitel. Der er gennemført to trykma-linger for hvert sæt parameterverdier ( $a, d_0$ ), og middelværdien er benyttet ved den grafiske fremstilling af forsøgsresultaterne i fig 104.1 og 105.1. Det ses, at de fundne værdier af maksimaltrykket  $P_1$  som funktion af  $d_0$  og  $a$  uden vanskelighed lader sig repræsentere ved en simpel kurveska-re.

Måleresultaterne er yderst reproducerbare, idet to trykma-linger taget umiddelbart efter hinanden højst afviger 5%. Denne ubestemthed inkluderer ubestemtheden fra chokbølgen, som tidligere er fundet til  $\pm 3\%$ . Ud fra to fotografier af samme boble taget til forskellige tidspunkter måltas  $d_0$  værdier, som maksimalt afviger 2%. Denne ubestemthed inklu-derer ikke den fejl, der ligger i at tilnærme boblen ved en ellipsode ved volumenbestemmelsen, men hvis den totale ube- stemthed for  $d_0$  sættes til  $\pm 2\%$ , er alt inkluderet. Bestem- melsen af afstanden  $a$  er kun behæftet med en usikkerhed på  $\pm 0,5\%$ .

Af fig 104.1 ses, at målepunkterne for  $P_1$  kan repræsenteres ved den indtegnede kurveskare med en ubestemthed på  $\pm 5\%$ , hvilket er i overensstemmelse med de fundne ubestemtheder på  $P_1$ ,  $d_0$  og  $a$ . Et par værdier falder dog tydeligt uden for kurverne, hvilket kan skyldes fejl ved eksperimenternes ud- førelse.

## 1. Sammenligning mellem målte og beregnede maksimaltryk.

I kapitel V blev  $P_1$  beregnet som funktion af  $u$  og  $a$ , hvor  $u = \lambda^c/d_0$  er forholdet mellem bølgelængden for choket og boblens ligevægtsdiameter. For at kunne sammenligne de mål- te  $P_1$ -værdier med de beregnede, må man derfor først bestem- me  $u$ -værdierne svarende til de enkelte målepunkter. Dette indebærer, at  $\lambda^c$  skal beregnes for chokbølgen i forskellige afstande fra eksplosionsstedet.

Fig 104.1 Maksimalltrykket i boblen som funksjon af boblediameteren og afstanden fra eksplønsstedet.

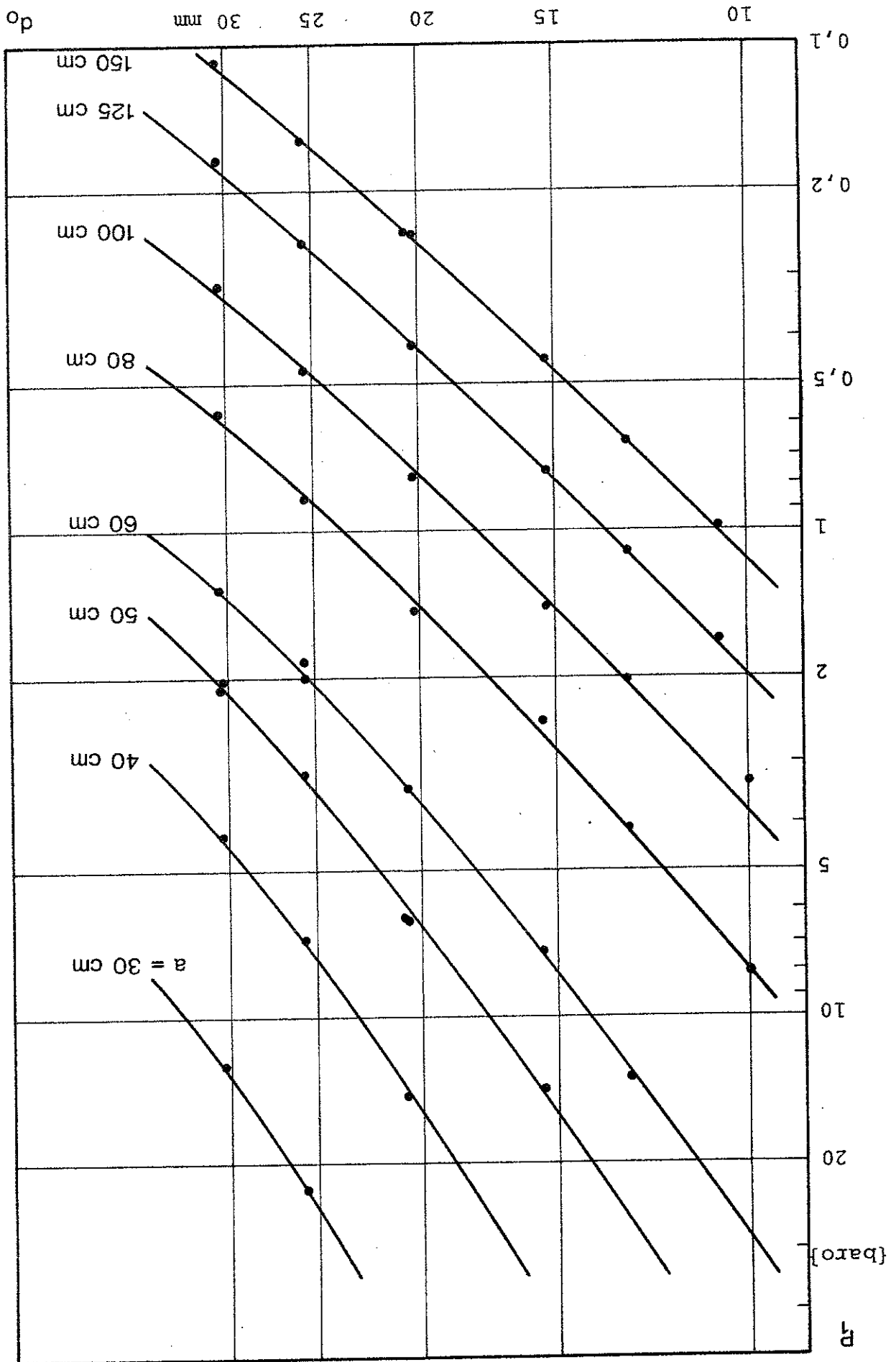
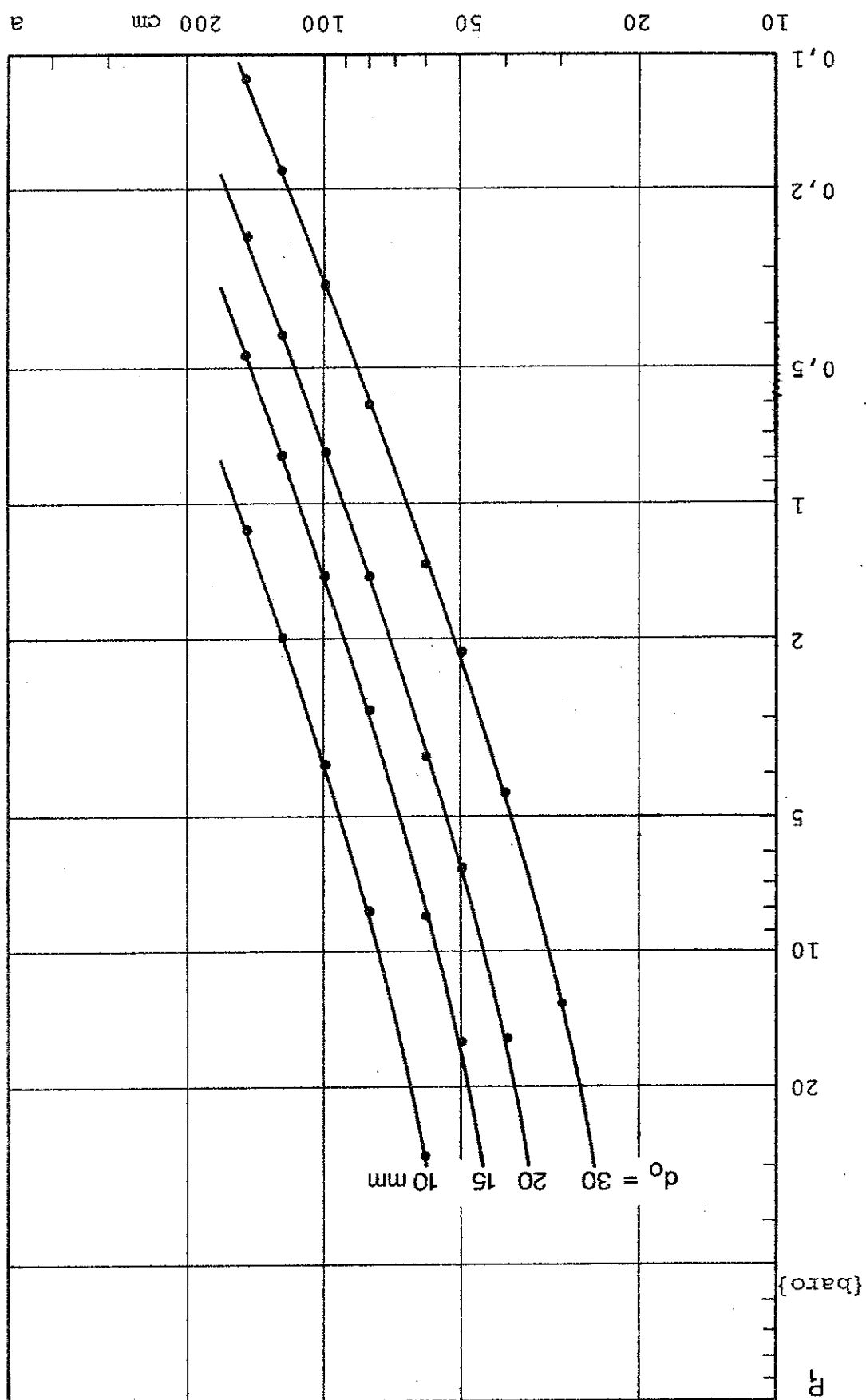


Fig 105.1 Maksimaltrykket i boblen som funktion af afstanden fra eksplosionsstedet og boblediameteren.



efter plottes som funktion af  $\mu$  og  $a$ , og sammenlignes med de stande fra eksplosionsstedet. De målte maksimaltryk kan der- Af (106.2) kan  $\lambda^c$  beregnes for chokbølgen i forskellige af-

og  $P_m$ .

Der indsettes heri de eksperimentelt fundne værdier for  $I$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{P_m - P_{hy}}{I} \left[ 1 + \ln \frac{P_m}{P_{hy}} \right] && \text{(Kedrinskij)} \\ \theta &= \frac{P_m - P_{hy}}{I} && \text{(FBJ)} \end{aligned} \right\} \text{(106.2)}$$

Indet kun positive bidrag til  $I$  medregnes, fås følgende lig- ninger til bestemmelse af  $\theta$ :

$$I = \int_0^\infty (P - P_{hy}) dt \quad \text{(106.1)}$$

Som omtalt i kapitel V er der benyttet to teoretiske chok- modeller, dels  $P \rightarrow P_{hy}$  for  $t \rightarrow \infty$  (FBJ), og dels  $P \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow \infty$  (Kedrinskij). De to trykforløb er vist i fig 107.1 og 107.2. Impulstætheden, der på figurerne er repræsenteret ved de skraverede arealer, er defineret ved ligningen

Man tilnærmer den virkelige chokbølge ved en simpel ekspo- nentialfunktion, således at impulstætheden og maksimaltryk- ket er korrekt. Derefter kan  $\theta$  og dermed  $\lambda^c$  beregnes.

For et eksponentielt aftagende chok er bølgelængden define- ret ved  $\lambda^c = c \cdot \theta$ , hvor  $c$  er lyd hastigheden i vandet og  $\theta$  bøl- gens tidskonstant.  $\theta$  er imidlertid en fiktiv størrelse for den virkelige chokbølge, idet denne kun approksimativt kan fremstilles ved en eksponentialfunktion. Forskellige krite- rier kan benyttes ved valg af en passende  $\theta$ -værdi for chok- bølgen, men det rimeligste er nok følgende: Der ønskes over- ensstemmelse mellem impulstætheden for den virkelige og den approksimative chokbølge. Dette er et fornuftigt krav, da beregningerne har vist, at netop impulstætheden  $I$  er en ka- rakteristisk parameter ved bestemmelsen af  $P_1$ .

Fig 107.2 Chokbølignens udseende i Kærlinskilj approksimationen.

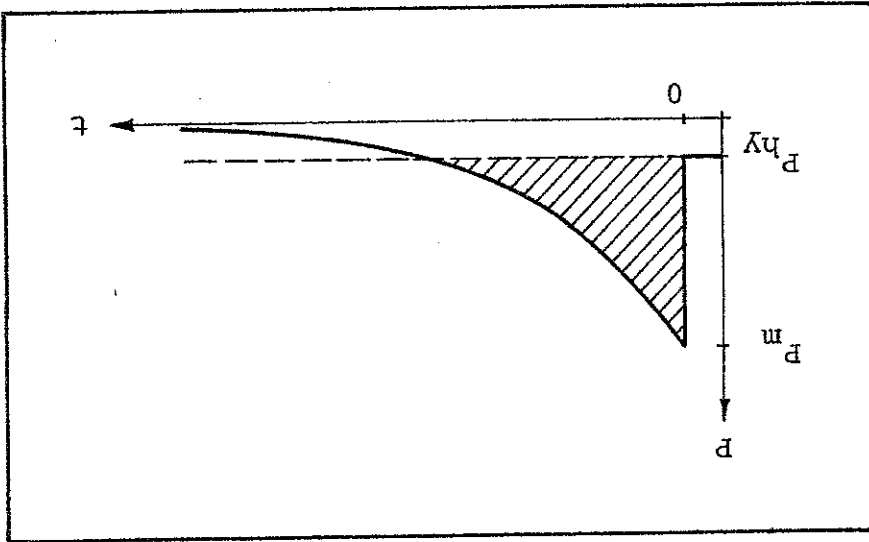
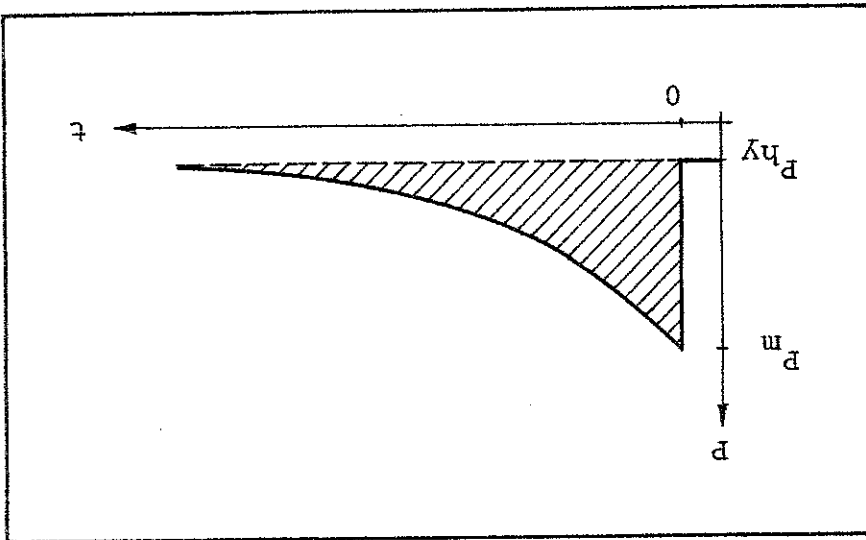


Fig 107.1 Chokbølignens udseende i FBJ approksimationen.

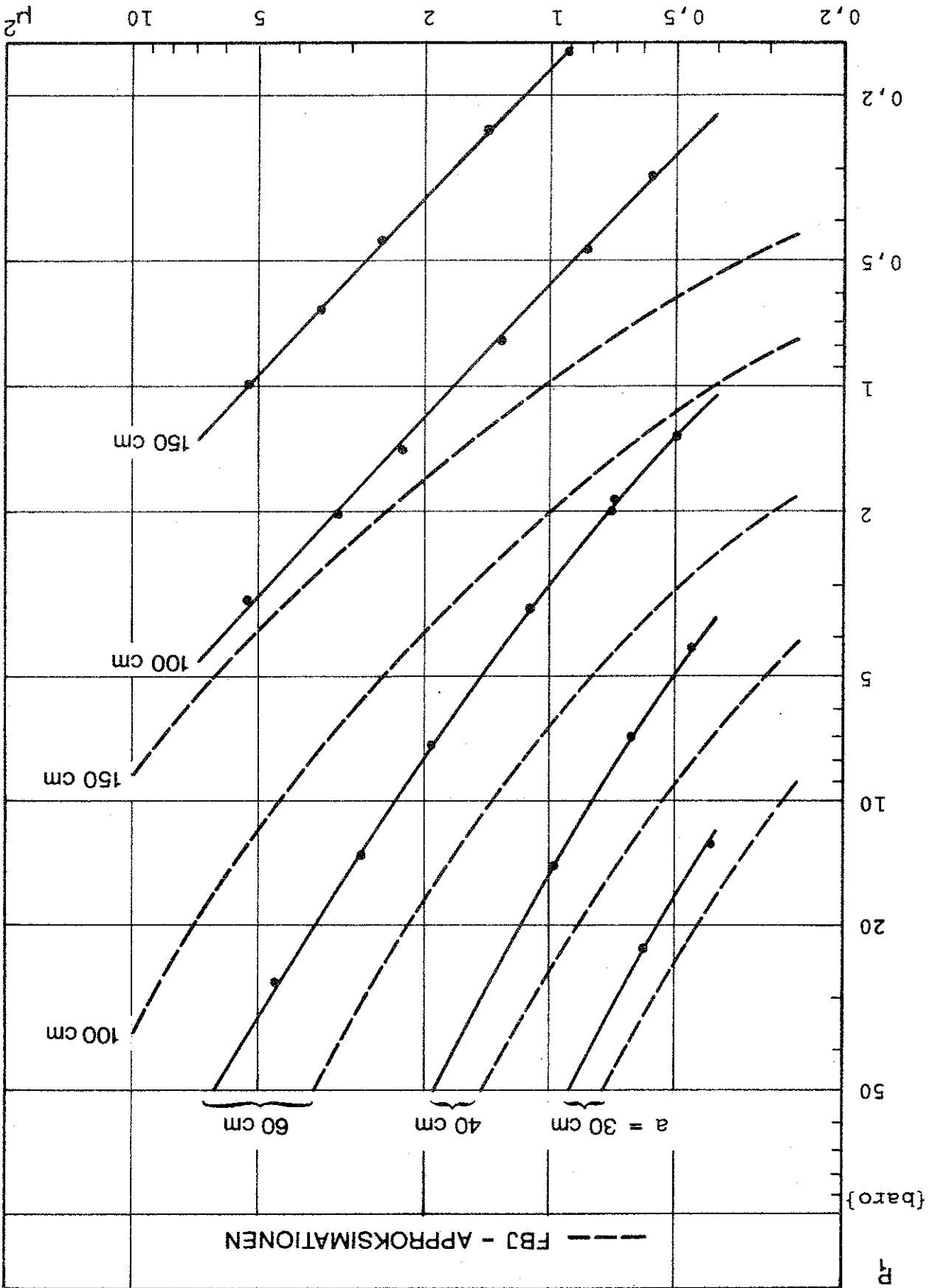


beregne  $P_1$ -værdier efter henholdsvis FBJ og Kædrikskj  
 approssimationen. Resultatet er vist i fig 109.1 og 110.1.  
 Som det ses af kurverne, ligger de eksperimentelle  $P_1$  værdier betydeligt lavere end de teoretiske. Den bedste overensstemmelse inden for det betragtede interval af  $\mu$  fås ved sammenligning med Kædrikskj beregningen. Dette betyder dog ikke, at denne approssimation er den mest korrekte, idet man må forvente at måle betydeligt lavere  $P_1$ -værdier, end man beregner. Årsagen hertil er at  $\lambda^0 \approx d^0$ , hvilket betyder, at der findes en udpræget skyggezone på boblens bagside.  
 For  $\lambda^0 \gg d^0$  dvs for  $\mu \rightarrow \infty$  skulle teoretiske og eksperimentelle kurver gerne konvergere, idet chokbølgen da diffrakteres så kraftigt bag boblen, at belastningen kan regnes kuglesymmetrisk, ligesom i den teoretiske model. Det ses, at FBJ beregningerne konvergerer mod de eksperimentelle værdier for voksende  $\mu$ , medens Kædrikskj beregningerne divergerer. Det bemærkes desuden, at funktionsafhængigheden  $P_1 = P_1(\mu)$  er den samme for teori og eksperiment for voksende  $\mu$  ved anvendelse af FBJ approssimationen. Alt dette viser, at FBJ metoden er den mest korrekte, hvilket stemmer med resultatet af de teoretiske overvejelser i kapitel V.  
 Alt i alt må man sige, at overensstemmelsen mellem de eksperimentelle  $P_1$ -værdier og de beregnede efter FBJ approssimationen er tilfredsstillende, når det tages i betragtning, hvilken forskel der er mellem den teoretiske kuglesymmetriske belastning og den skæve virkelige trykbelastning af boblen.

Forskellige forsøg på at modificere teorien til at inkludere den skæve belastning gav ikke noget positivt resultat. Man må derfor konkludere, at den matematiske model repræsenteret ved ligning (4.1) ikke kan beskrive de fysiske forhold for chokexciterede boblepulsationer med den ønskede nøjagtighed, når bølgelængden for choket er af samme størrelsesorden som boblediameteren.



Fig 109.1 Sammenligning mellem målte og beregnede  
 maksimaltryk i en pulserende boble.  
 $\mu$  er forholdet mellem chokets bølglængde  
 og boblens diameter.



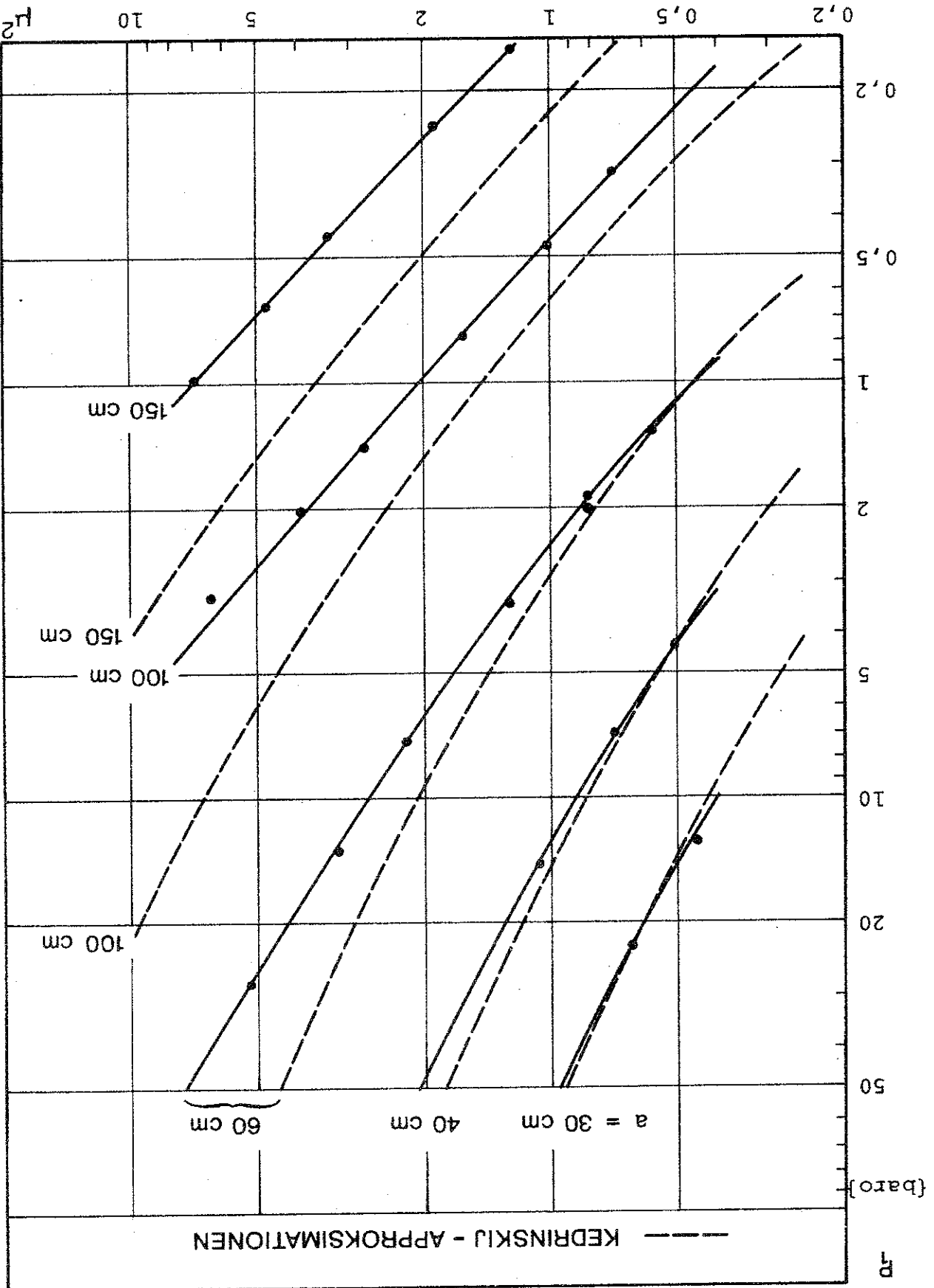


Fig 110.1 Sammenligning mellem målte og beregnede maksimaltryk i en pulserende boble.  $\mu$  er forholdet mellem chokets bølglængde og boblens diameter.

Den totale energi, som chokbølgen afleverer til en pulserende luftboble, er til stede som trykenergi inde i boblen i minimumvolumenet, idet partikelhastigheden i det omgivende vand da er nul. Energien kan beregnes som det arbejde, der udføres ved en adiabatisk tilstandsændring af luften fra ligevægsttrykket  $P_0$  til maksimaltrykket  $P_1$ . Der fås følgende formel til bestemmelse af E:

$$E = \frac{6}{\pi} d_0^3 \cdot \frac{\lambda}{P_0} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot \left[ \frac{P_1}{P_0} \right]^{\frac{1}{\lambda-1}} - 1 \quad \{J\} \quad (111.1)$$

Indsættes heri  $P_0 = 1$  bar og  $\lambda = 1,4$  kan energien beregnes som funktion af  $d_0$  og  $P_1$ .

I stedet for den totale energi E kan man være interesseret i den akkumulerede energi pr fladeenhed af boblens tværsnitsareal

$$e = \frac{\pi \cdot d_0^4}{E} \quad \left\{ \frac{J}{m^2} \right\} \quad (111.2)$$

Idet denne størrelse kan sammenlignes med chokbølgens energitæthed  $e_c$ , som er defineret ved ligningen

$$e_c = \frac{1}{P} \int_0^{\infty} (P - P_{hy})^2 dt \quad \left\{ \frac{J}{m^2} \right\} \quad (111.3)$$

I fig 112.1, 113.1 og 114.1 er vist henholdsvis E, e og  $e/e_c$  som funktion af  $d_0$  og a. De benyttede værdier af  $e_c$  er beregnet af BJØRNØ [6]. Det ses af fig 112.1, at en 30 mm boble absorberer 3,5 - 4,5 gange så meget energi som en 10 mm boble, hvilket betyder, at en stor boble har større dæmpnings-effekt end en lille boble.

Man kan også benytte energiabsoptionen pr fladeenhed som udtryk for de dæmpende egenskaber hos boblerne.

Fig 112.1 Boblens energisabsorption som funktion af diameteren og afstanden fra eksplosionsstedet.

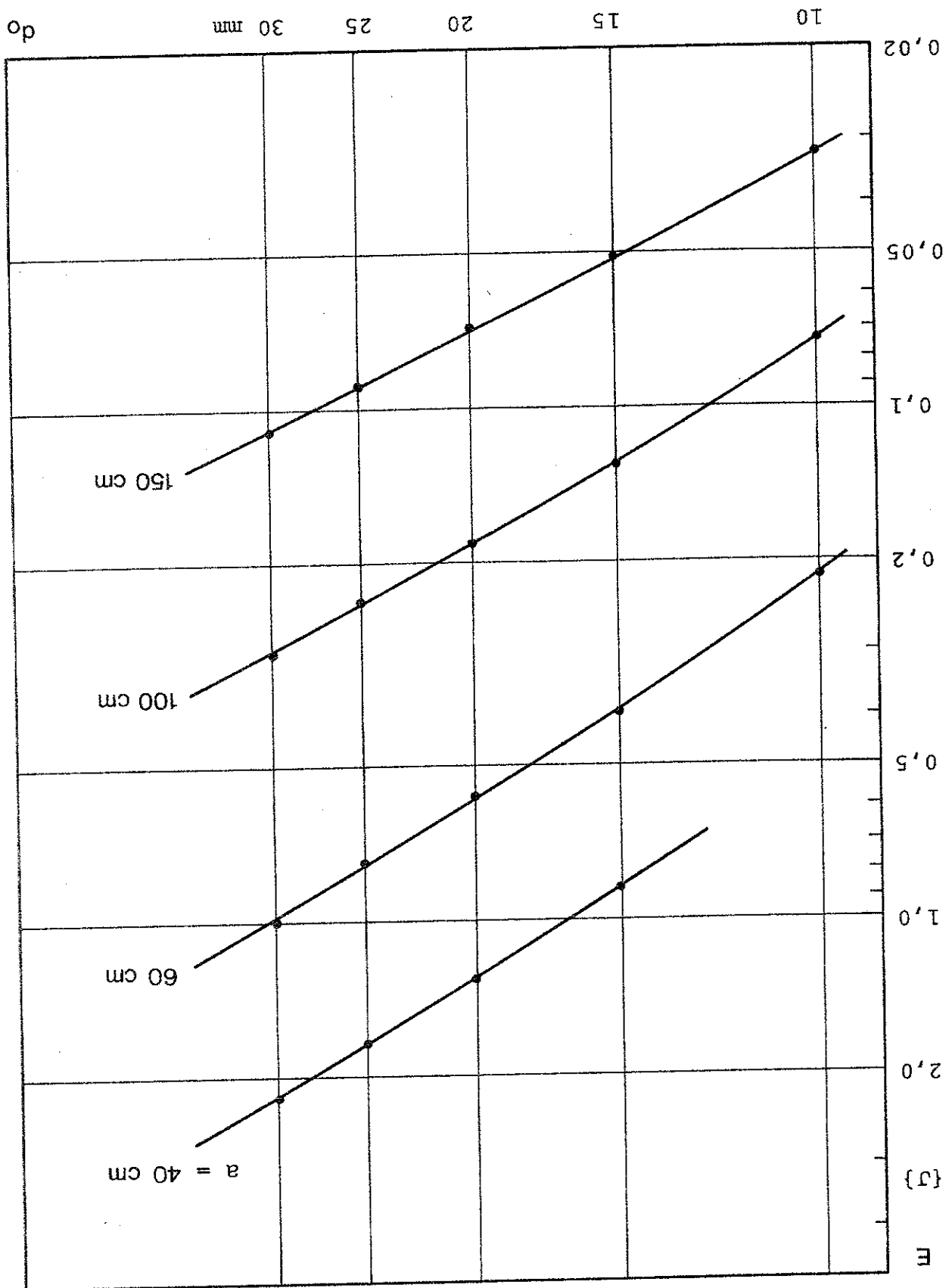


Fig 113.1 Boblens energisabsorption pr fladeenhed af tværnsnitarealet som funktion af diameteren og afstanden fra eksplosionsstedet.

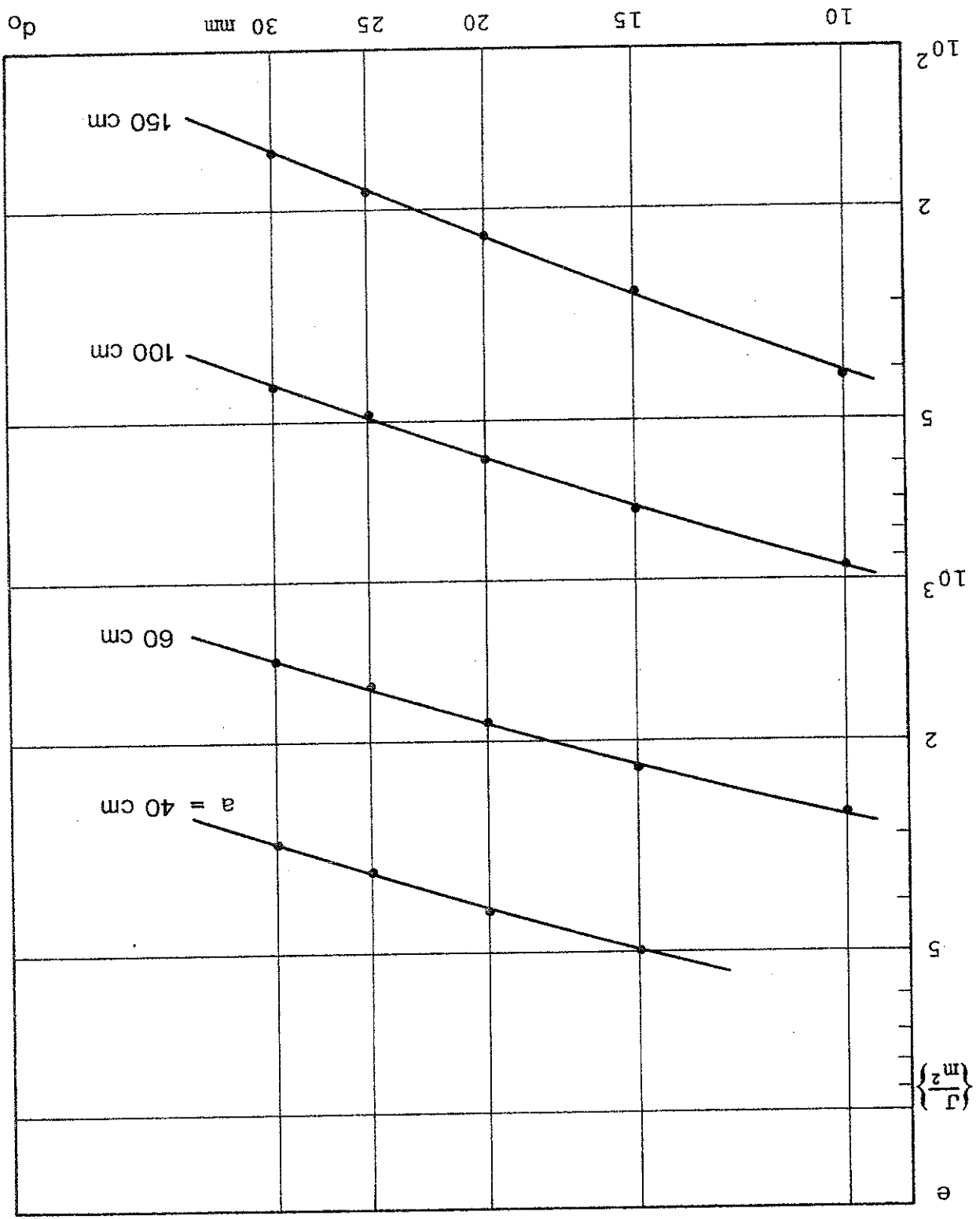
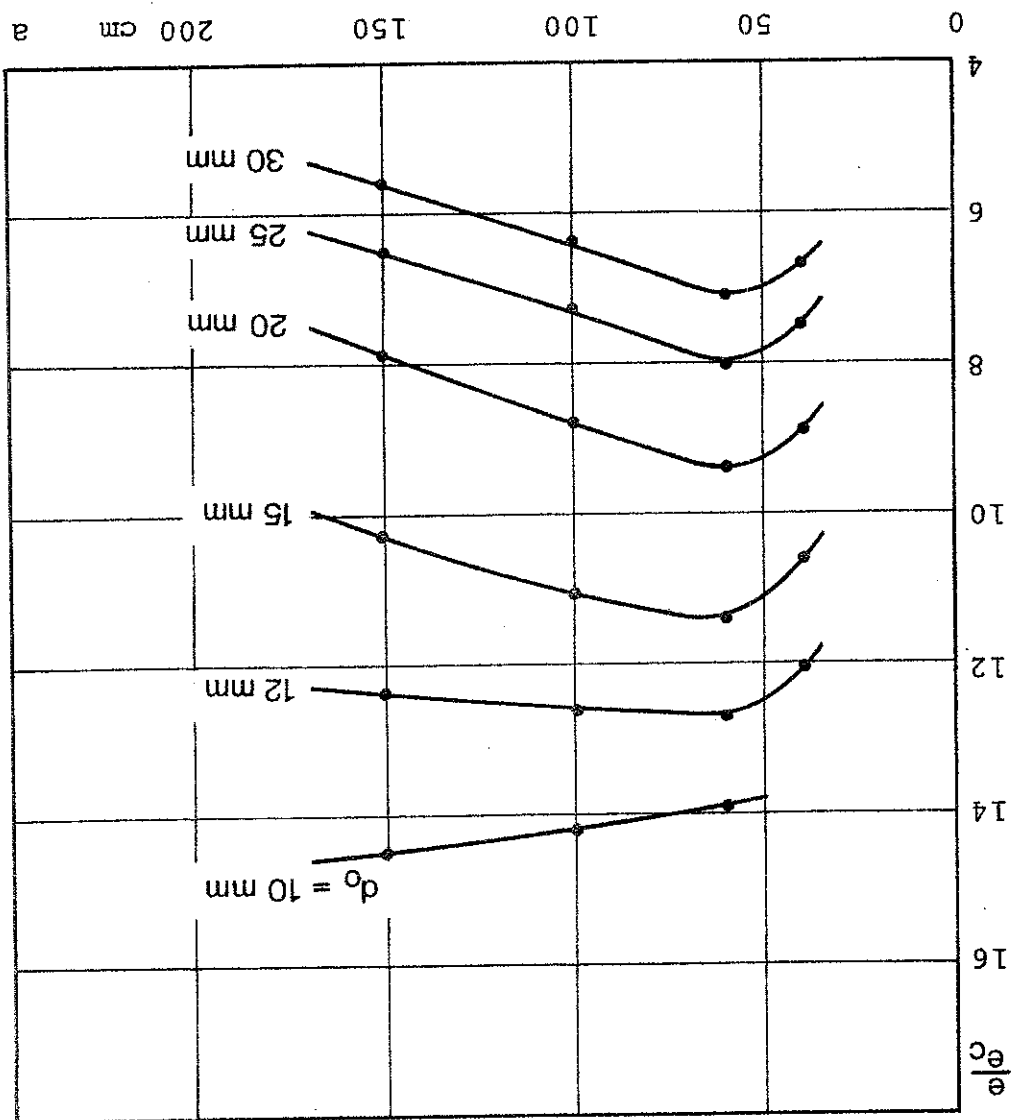


Fig 114.1 Forholdet mellem bollens energisorp-  
tion pr fladeenhed og energitætheden i  
chokbølgen som funktion af afstanden  
fra eksplosionsstedet.



Foruden dæmpning forårsaget af boblernes energiabSORPTION, sker der dæmpning ved refleksion og refraction af chokbølgen i bobletæppet.

udtale sig om boblestørrelsens betydning for dæmpningen. det ikke muligt på grundlag af disse forsøgsresultater at det tilfælde, hvor bobletæppet er tæt pakket med bobler, er selvirkningen mellem de enkelte bobler kan negligeres. I plotionsstedet som muligt. Dette gælder dog kun, hvis vek- som muligt, og bobletæppet skal placeres så langt fra eks- dæmpning, skal der ifølge kurverne benyttes så små bobler Hvis der skal fremstilles et bobletæppe, som yder maksimal

et areal på 14 gange boblens tværnsnitsareal. hvilket betyder, at boblen absorberer al energi inden for samt at virkningsstørrelsen for en 10 mm boble er ca 14, den procentvise energiabSORPTION er størst for små bobler, stand fra eksplosionsstedet. Af fig 114.1 ses desuden, at For  $d_0 \leq 10$  mm vokser dæmpningen derimod med voksende af- resultat, som ikke umiddelbart lader sig forklare fysisk. afstand fra eksplosionsstedet, hvilket er et overraskende bestående af store bobler yder maksimal dæmpning i en given a = 60 cm for  $d_0 \geq 12$  mm. Dette betyder, at et bobletæppe Fig 114.1 viser, at kurverne for  $e/e_0$  har et maksimum ved

negligeres.

ter dog, at vekselvirkningen mellem de enkelte bobler kan er den samme i de to tilfælde. Disse betragtninger forudsæt- bobler, når den procentdel af arealet, som optages af luften, små bobler absorberer mere energi end et tæppe med få store tyder, at et 2-dimensionalt bobletæppe bestående af mange Af fig 113.1 ses, at er størst for små bobler, hvilket be-

Alle bobleundersøgelser omtalt i denne rapport er gennemført med luftvolumenet indesluttet i en ballon. For at få et indtryk af ballonens indflydelse på boblepulsationen blev der optaget en række high-speed film af frit pulserende luftbobler i vand. Disse film viser, at store bobler ( $d_0 > 5 \text{ mm}$ ), som rammes af chokbølgen fra en undervandsseksplosion, opsplittes i mange små bobler allerede i løbet af de første par pulsationer. Samme fænomen er iagttaget af FLYNN [20], hvilket er nævnt i kapitel IV D under omtale af stabiliteten af frit pulserende bobler.

Af filmene ses desuden, at boblerne endnu er sammenhængende under første kontraktion, således at de målte maksimaltryk i pulserende bobler indesluttet i en ballon også må gælde for frie bobler.

Så længe en boble er sammenhængende, vil den pulserer med stationært aftagende amplitude på grund af energitab til det omgivende vand. Derimod ophører pulsationen næsten helt ved opsplitning af boblen, hvilket betyder, at den akkumulerede energi ikke i dette tilfælde afgives til vandet i form af trykbølger, men i stedet hovedsagelig forbruges ved boblens deling.

Man kan sammenfatte ballonens indflydelse på luftboblen i følgende punkter:

1) Den hindrer opsplitning af boblen.

2) Den resulterer i større dæmpning af boblepulsationen.

3) Den stabiliserer den sfæriske form for store bobler, som ellers er padderhattedeformede.

Da en frit pulserende boble er sammenhængende under første kontraktion, må de fundne resultater for maksimaltryk og absorberet energi også gælde for frie bobler. Desuden er ballonens indflydelse på de termodynamiske forhold forsvindende,



som omtalt i kapitel VIII D. Det kan derfor konkluderes, at alle væsentlige forsøgsresultater omtalt i denne rapport og- så gælder for frit pulserende luftbobler i vand.

studiet af chokexciterede boblepulsationer forudsætter nøje kendskab til chokbølgen i forskellige afstande fra eksplosionsstedet. Derfor er der opstillet empiriske formler for maksimaltrykket  $P^m$  og impulsstæthed  $I$  begge som funktion af afstanden  $a$ . Ved sammenligning med de af BJØRNØ [6] angivne formler for  $P^m$  og  $I$  bemærkes visse divergenser, hvilket væsentligst må skyldes anvendelsen af forskellige transducere (1/8" og 1/4" turmalin), samt at undersøgelseerne er gennemført for forskellige parameterintervaller for  $a$ .

De termodynamiske forhold for boblepulsationen er bestemt såvel teoretisk som eksperimentelt. En simpel beregning af varmeafgivelsen fra en pulserende boble viser, at pulsationsprocessen med god tilnærmelse kan regnes adiabatisk for  $d^0 = 10 - 30$  mm, idet varmetabet fra boblen til væsken under kontraktionsfasen kun andrager nogle få procent af den totale akkumulerede varmeenergi i boblen. Dette resultat er verificeret eksperimentelt ved hjælp af ligningen  $P_1/P_0 = (d^0/d^1)^{3k}$ , som forbinder trykket inde i boblen med boblediameteren under en polytropisk tilstandsændring af luften. Værdien af polytropiekoefficienten  $k$  er bestemt til 1,40, hvilket viser, at pulsationen kan regnes adiabatisk.

De målte maksimaltryk  $P_1$  i boblerne som funktion af boblestørrelsen og afstanden fra eksplosionsstedet lader sig repræsentere ved en simpel kurveskare med en nøjagtighed på  $\pm 5\%$ . Maksimaltrykkene er også bestemt teoretisk ved numerisk løsning af den ulineære differentiaalligning for boblepulsationen. En sammenligning mellem målte og beregnede maksimaltryk viser, at de eksperimentelle  $P_1$ -værdier er betydeligt lavere end de teoretiske. Dette skyldes, at den teoretiske model forudsætter kuglesymmetrisk belastning af boblen - en betingelse som ikke er opfyldt i de aktuelle forsøg.

Bølgelængden for choket er af samme størrelsesorden som boblediameteren, og dette medfører, at der findes en udpræget skyggezone på boblens bagside, hvor trykbelastningen er mindre end på forside. Kun når bølgelængden for choket er stor i forhold til boblediameteren, kan belastningen med god tilnærmelse regnes kuglesymmetrisk, og først da kan der ventes overensstemmelse mellem målte og beregnede maksimumtryk i boblerne. Forskellige forsøg på at modificere teorien til at inkludere den skæve belastning gav ikke noget positivt resultat, og det synes ikke for øjeblikket at være muligt at opstille en matematisk model, som beskriver boblepulsationen for en usymmetrisk trykpåvirkning. En ny numerisk metode, som er under udvikling ved Los Alamos Scientific Laboratory, skulle imidlertid kunne anvendes til løsning af problemet, men metoden er endnu ikke gennemprøvet og publiceret i endelig form.

De optegnede kurver for boblernes energisabsorption viser, at den maksimale dæmpning af chokbølgen fås ved anvendelse af et bobletæppe bestående af så små bobler som muligt og placeret så langt fra eksplosionsstedet som muligt. Dette resultat gælder dog kun, hvis vekselvirkningen mellem de enkelte bobler kan negligeres. Når bobletæppet er tæt pakket med bobler, er det ikke muligt på grundlag af disse forsøgsresultater at udtale sig om boblestørrelsens indflydelse på dæmpningen.

Alle bobleundersøgelser omtalt i denne rapport er gennemført med luftvolumenet indesluttet i en ballon. Imidlertid viser en række high-speed film af frit pulserende luftbobler i vand, at de væsentligste forsøgsresultater også gælder for frie bobler.

## CONCLUSIONS

The study of shock excited bubble pulsations implies a detailed knowledge of the shock wave at varying distances from the explosion. Therefore empirical formulas for the peak pressure  $P_m$  and the impulse  $I$  of the shock wave are set up as a function of the distance  $a$  from the explosion. By comparing these results with the expressions for  $P_m$  and  $I$ , found by BJØRNØ [6], some discrepancies are noticed, which to a large extent must be due to the application of different transducers (1/8" and 1/4" Bourmanline) and the fact that the investigations are carried out for different parameter-intervals for  $a$ .

The thermodynamic behaviour of a pulsating bubble is determined both theoretically and experimentally. A simple calculation of the heat transport from a pulsating bubble shows that the pulsation with good approximation can be considered adiabatic, for  $d_0 = 10-30$  mm, as the heat loss from the bubble during the contracted phase amounts only to a few percent of the total heat energy accumulated in the bubble. This result is verified experimentally by means of the equation  $P_1/P_0 = (d_0/d_1)^{3k}$ , which relates the pressure inside the bubble to the bubble diameter during a polytropic change in state. The value of the polytropic exponent  $k$  is found to be 1.40, which shows that the pulsation can be considered adiabatic.

The measured maximum pressures  $P_1$  inside the bubbles, as a function of the bubble diameter and the distance from the explosion, can be represented by a simple family of curves with an accuracy of  $\pm 5\%$ . The maximum pressures are also determined theoretically by solving numerically the non-linear differential equation for the bubble pulsation. A comparison between measured and calculated maximum pressures shows that the experimental values of  $P_1$  are considerably smaller than

All bubble investigations mentioned in this report have been carried out with the air enclosed in a balloon. However, some high-speed films of freely pulsating air bubbles in water show that the most essential results of the experiments are also valid for free bubbles.

The curves for the energy absorption of air bubbles show that the maximum attenuation of a shock wave is obtained by using a bubble screen consisting of as small bubbles as possible and placed as far from the explosion as possible. This result is only valid if the interaction between the individual bubbles can be neglected. When the bubble screen is packed with bubbles it is not possible, on the basis of this investigation, to state anything about the influence of the bubble size on the attenuation.

The theoretical model assumes spherically symmetric load on the bubble - a condition which is not fulfilled in this investigation. The wavelength of the shock is of the same order of magnitude as the bubble diameter, and this results in a distinct shadow region behind the bubble where the pressure load is much less than on the front side of the bubble. Only when the wavelength of the shock is much larger than the bubble diameter, the load on the bubble can with good approximation be considered spherically symmetric, and only then accordance can be expected between measured and calculated pressures inside the bubble. Various attempts to modify the theory to include the asymmetric load have not been successful, and at the moment it seems impossible to set up a mathematical model for the bubble pulsation when the pressure load is asymmetric. A new numerical method, which is now being developed at Los Alamos Scientific Laboratory, should however be applicable for solving the problem, but the method has not yet been published in a final form.

APPENDIX

Dataprogram 1 Algol 4 till beregning af populationen.

algol, 1 >

```

begin integer i;
  real a, m, p1, x, xe, ymin, yminus, ym, yplus;
  array y, z[1:2];

```

procedure Mersn(F, x, y, xe, n, delta, first);  
 value xe, n, delta, first; integer n; real x, xe, delta; boolean first;  
 array y; procedure F;  
 comment Mersn will integrate n simultaneous first order differential equ-  
 ations from a given point x, y[k] (k = 1 to n) to another point defined  
 by x = xe. The integration uses Merson's modified fourth order Runge kut-  
 ta method which by using five points in each interval allows an estimate  
 of the accuracy to be made (see Lance: Numerical Methods for High Speed  
 Computers, p. 56). The interval will if necessary be subdivided so as to  
 secure a given accuracy, delta, in y[k]. At the same time the step length  
 is continuously adjusted to the optimum value. The parameters are:  
 F a procedure defining the equations to be integrated. When called:  
 F(x, y, z) it must assign the derivatives dy[k]/dx to z[k] for  
 k = 1 to n using the values of x and y supplied in the first two  
 parameters. Thus x must be a real variable while y and z are arrays  
 of n components. x and y must be left unaltered by F.  
 a real variable,  
 an array[1 : n], which upon entry must be supplied with the initial  
 values and which upon exit will contain the final values x, y[k]  
 for x = xe.  
 the final value of x.  
 n the number of equations.  
 delta a positive number defining the required accuracy.  
 first This should be true for a first or isolated entry, false at subse-  
 quent entries. It is used as an indication of whether an estimate  
 of the step length is available or not;  
 begin real h, x0, h0, eps, q; own real step; integer i; boolean last;  
 array y0, k1, k2, k3, k4, k5 [1 : n];  
 procedure next(k, expr); real expr; array k;  
 begin F(x, y, k);  
 for i := 1 step 1 until n do y[i] := expr \* h0 + y0[i]  
 end next;  
 if first then begin try last: last := true; h := xe - x end  
 else begin h := step;  
 R: if abs(xe - x) < abs(h) then go to try last;  
 last := false  
 end;  
 x0 := x; for i := 1 step 1 until n do y0[i] := y[i];  
 h0 := h/2;

begin integer i;  
 real a, m, p1, x, xe, ymin, yminus, ym, yplus;  
 array y, z[1:2];

```

next(k1, k1[1]); x := x0 + h0;
next(k3, (k1[1] + k3[1])/2);
next(k2, k1[1]*.375 + k3[1]*.125); x := h/2 + x0;
next(k4, k1[1]*1.5 - k3[1]*.5 + k4[1]*6); x := h + x0;
next(k5, (k1[1] + k5[1])/2 + k4[1]*2);
for i:= 1 step 1 until n do
  k1[i] := abs(k1[i]*.2 - k2[i]*.9 + k4[i]*.8 - k5[i]*.1);
  if q > eps then eps := q end;
  eps := eps*abs(h0);
  if delta > eps then
    begin for i:= 1 step 1 until n do y[i] := y0[i]; x := x0; go to Q end;
    comment Rølgende to linjer er en tilføjelse til Merns;
    yminus := ym; ym := yplus; yplus := y[1];
    if sign(y[2]) = 1 then go to beregn;
    if last then begin if first then step := h; go to fints end;
    if eps = 0 then go to try last;
    q: step := h := (delta/eps)^(1/0.2)*0.8*h; first := false; go to R;
  fints:
end Merns;

```

```

procedure F(x,y,z) : value x; real x; array y,z;
begin
  z[1] := y[2];
  z[2] := -1.5*y[2]^2 / y[1] + 1.78*x^10 - 4*x*y^2 / y[1]*
  (y[1]^(4.2) - A*exp(-x) - 1);
end;

```

select(8); writechar(42); writetext(⟨⟨  
 Afd. for Fluid Mekanik, civ. Ing. Bruun Jensen.  
 Beregning af maksimaltrykket P1 [baro] som funktion af my = lambda/do  
 og a [cm].

a = 30 40 50 60 80 100 125 150  
 my  
 ⟩);

```

for my:= 0.5,0.6,0.8,1.0,1.3,1.6,2.0,2.5,3.0 do
  begin writcr; write (⟨d,d⟩, my);
  for a:= 0.30,0.40,0.50,0.60,0.80,1.00,1.25,1.50 do
    begin
      A:= 37.5/a^1.13; xe:= my^(-2);
      ym:=yplus:=x:=y[2]:=0; y[1]:=1;
      Merns(F,x,y,xe,2,0.001,true);
      for i:=2 step 1 until 500 do
        begin
          Merns(F,x,y,1*x*xe,2,0.001,false);
        end;
    end;
  beregn:
  ymin:= ym+1/8*(yplus-yminus)^2/(2*xm-yplus-yminus);
  P1:= ymin^(-4.2) - 1;
  write (⟨ d,d,u+d⟩, P1);
end;
end;

```

end;

end;

end;

1. Akulichev: Pulsations of Cavitation Bubbles in the Field of an Ultrasonic Wave. Sov. Phys.-Acoust., v 13, p 149-54, 1967.
2. Akulichev: Structure of the Solutions of Equations Describing the Pulsations of Cavitation Voids. Sov. Phys.-Acoust., v 13, p 455-58, 1968.
3. Amsten: The Particle-in-Cell Method for the Calculation of the Dynamics of Compressible Fluids. Los Alamos Scientific Laboratory, Rep. LA-3466, 1966.
4. Amsten & Harlow: The SMAC Method. A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows. Los Alamos Scientific Laboratory, Rep. LA-4370, 1970.
5. Blirchoff: Stability of Spherical Bubbles. Quart. Appl. Math., v 13, p 451-53, 1956.
6. Bjørnø: Om undervands eksplosioner og transmission af shockbølger gennem skumpulser nedsekket i vand. Afdelingen for Fluid Mekanik, rap. LFM R 68-1, 1968.
7. Boelter, Cherry, Johnson & Martinelli: Heat Transfer Notes. McGraw-Hill Book Co., New York 1965, 775 pp.
8. Borotnikova & Soloukhin: A Calculation of the Pulsations of Gas Bubbles in an Incompressible Liquid Subject to a Periodically Varying Pressure. Sov. Phys.-Acoust., v 10, p 28-32, 1964.
9. Bruun Jensen: Tryktransducere. Afdelingen for Fluid Mekanik, rap. BG-201, 1970.
10. Bruun Jensen & Møllenberg Jensen: Trykbølger fra gæstudsledninger i vand. Afdelingen for Fluid Mekanik, rap. SR-67-07, 1967.

REFERENCELISTE



11. Carstensen & Foldy: Propagation of Sound Through a Liquid Containing Bubbles. J. Acoust. Soc. Amer., v 19, p 481-501, 1947.
12. Chan & Yang: Bubble Dynamics in a Non-Newtonian Fluid Subject to Periodically Varying Pressure. J. Acoust. Soc. Amer., v 46, p 205-10, 1969.
13. Chapman & Plesset: Thermal Effects in the Free Oscillations of Gas Bubbles. Calif. Inst. of Tech., Rep. 85-50, 1970.
14. Cole: Underwater Explosions. Dover Publications Inc., New York 1965, 426 pp.
15. Devin: Survey of Thermal, Radiation and Viscous Damping of Pulsating Air Bubbles in Water. J. Acoust. Soc. Amer., v 31, p 1654-67, 1959.
16. Eiler & Flynn: Rectified Diffusion during Nonlinear Pulsations of Cavitation Bubbles. J. Acoust. Soc. Amer., v 37, p 493-503, 1965.
17. Eiler & Flynn: Generation of Subharmonics of Order One-Half by Bubbles in a Sound Field. J. Acoust. Soc. Amer., v 46, p 722-27, 1969.
18. Exner: Measurement of the Damping of Pulsating Air Bubbles in Water. Akust. Beih., v 1, p 25-33, 1951.
19. Exner & Hampe: Experimental Determination of the Damping of Pulsating Air Bubbles in Water. Acustica, v 3, p 67-72, 1953.
20. Flynn: Physics of Acoustic Cavitation in Liquids. Mason(ed): Physical Acoustics, v 1B, Academic Press, New York 1964, 376 pp.
21. Gilmore: The Growth or Collapse of a Spherical Bubble in a Viscous Compressible Liquid. Calif. Inst. of Tech., Rep. 26-4, 1952.

22. GÜth: Nichtlineare Schwingungen von Luftblasen in Wasser.  
Acustica, v 6, p 532-38, 1956.
23. Haeske: Experimental Determination of the Damping of Pulsating Air Bubbles in Water in the Frequency Range 100-300 kc/s.  
Acustica, v 6, p 266-75, 1956.
24. Harlow: Numerical Methods for Fluid Dynamics, an Annotated Bibliography.  
Los Alamos Scientific Laboratory, Rep. LA-4281, 1969.
25. Harlow & Amsden: A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All Flow Speeds.  
Los Alamos Scientific Lab., Rep. LA-DC-12190, 1971.
26. Hickling & Plesset: Collapse and Rebound of a Spherical Bubble in Water.  
Phys. Fluids, v 7, p 7-14, 1964.
27. Houghton: Theory of Bubble Pulsation and Cavitation.  
J. Acoust. Soc. Amer., v 35, p 1387-93, 1963.
28. Howkins: Measurement of the Resonant Frequency of a Bubble near a Rigid Boundary.  
J. Acoust. Soc. Amer., v 37, p 504-08, 1965.
29. Hsieh: Some Analytical Aspects of Bubble Dynamics.  
J. Basic Engng., v 87, p 991-1005, 1965.
30. Hsieh & Plesset: Theory of Rectified Diffusion of Mass into Gas Bubbles.  
J. Acoust. Soc. Amer., v 33, p 206-15, 1961.
31. Hund: Untersuchungen zur Einzelblasenkavitation bei 10 Hz in einer wassergefüllten Druckkammer.  
Acustica, v 21, p 269-82, 1969.
32. Hund: Zur Näherungsweise Berechnung der Eigenfrequenzen von Gasblasen in Flüssigkeiten.  
Acustica, v 21, p 54-56, 1969.

33. Ivany: Collapse of a Cavitation Bubble in Viscous, Compressible Liquid. Ph.D. Thesis, Nuclear Engrn. Dep., University of Michigan, 1965.
34. Ivany & Hammit: Cavitation Bubble Collapse in Viscous, Compressible Liquids - Numerical Analysis. J. Basic Engrn., v 87, p 977-85, 1965.
35. Jacobsen: Air-Bubble Curtain to Cushion Blasting. Ontario Hydro Research News, no 2, 1954.
36. Kapustina: Investigation of the Influence of Ultra-sound on the Growth of an Air Bubble in Water. Sov. Phys.-Acoust., v 11, p 94-97, 1965.
37. Kapustina: Gas Bubble in a Small-Amplitude Sound Field. Sov. Phys.-Acoust., v 15, p 427-38, 1970.
38. Kedrinski: Dynamic Features of a Spherical Gas Bubble in Fluid. NASA Rep. TT-F-11653, 1968.
39. Kedrinski & Soloukhin: Compression of a Cavity by a Shock Wave in Water (in Russian). Hydrodynamic Inst., Novosibirsk, Rep. PMTF-1, 1961.
40. Knapp, Daily & Hammit: Cavitation. McGraw-Hill Book Co., New York 1970, 578 pp.
41. Koger & Houghton: Damping and Pulsation of Large Nitrogen Bubbles in Water. J. Acoust. Soc. Amer., v 43, p 571-75, 1968.
42. Lamb: Hydrodynamics. Dover Publications Inc., New York 1945, 738 pp.
43. Lauer: Über die Thermische Dämpfung von Blasen Verschiedener Gase in Wasser. Akust. Beih., v 1, p 12-24, 1951.

44. Lauterborn: Eigenfrequenzen von Gasblasen in Flüssigkeiten. *Acustica*, v 20, p 14-20, 1968.
45. Lauterborn: Resonanzkurven von Gasblasen in Flüssigkeiten. *Acustica*, v 23, p 73-81, 1970.
46. Lindh & Landelius: Underavattenssprängning med tryckreducerande luftbubbelrida. *Tekn. Medd., Kungl. Fortifikationsförvaltningen, Befästningsbyrå, nr. B 32*, 1963.
47. Mader: The Two-Dimensional Hydrodynamic Hot Spot. Los Alamos Scientific Laboratory, Rep. LA-3235, 1965.
48. Melten: An Experimental Study of the Collapse of a Spherical Cavity in Water. *J. Acoust. Soc. Amer.*, v 28, p 447-54, 1956.
49. Minnaert: On Musical Air-Bubbles and the Sounds of Running Water. *Phil. Mag.*, v 16, p 235-48, 1933.
50. Neppiras: Subharmonic and Other Low-Frequency Emission from Bubbles in Sound-Irradiated Liquids. *J. Acoust. Soc. Amer.*, v 46, p 587-601, 1969.
51. Noltingk & Neppiras: Cavitation produced by Ultrasonics. *Proc. Phys. Soc. (B)*, v 63, p 674-85, 1950.
52. Peters: The Behaviour of Bubbles in a Sound Field. M.Sc. Dissertation, Phys. Dep., Chelsea Coll., 1966.
53. Pflaum: Zur Thermischen Dämpfung in Kugelsymmetrisch Schwingenden Gasblasen. *Akust. Z.*, v 5, p 202-12, 1940.
54. Plesset: Bubble Dynamics. Davies (ed): *Cavitation in Real Liquids*. Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1964.

55. Plesset: Cavitating Flows. Calif. Inst. of Tech., Rep. 85-46, 1969.
56. Plesset & Hsieh: Theory of Gas Bubble Dynamics in Oscillating Pressure Fields. Phys. Fluids, v 3, p 882-92, 1960.
57. Plesset & Mitchell: On the Stability of the Spherical Shape of a Vapor Cavity in a Liquid. Quart. Appl. Math., v 13, p 419-30, 1956.
58. Pracht: Computer Simulation of Fluids in Motion. Los Alamos Scientific Laboratory, Rep. LA-DC-9780, 1969.
59. Rayleigh: On the Pressure developed in a Liquid during the Collapse of a Spherical Cavity. Phil. Mag., v 34, p 94-98, 1917.
60. Robinson & Buchanan: Undamped Free Pulsations of an Ideal Bubble. Proc. Phys. Soc. (B), v 69, p 893-900, 1956.
61. Shima: The Natural Frequency of a Bubble Oscillating in a Viscous Compressible Liquid. J. Basic Engr., v 92, p 555-62, 1970.
62. Smith: On the Destructive Mechanical Effects of the Gasbubbles Liberated by the Passage of Intense Sound through a Liquid. Phil. Mag., v 19, p 1147-51, 1935.
63. Solomon & Plesset: Nonlinear Bubble Oscillations. Calif. Inst. of Tech., Rep. 85-38, 1967.
64. Soloukhin: The Effect of Bubbles in Shock Detonation in a Liquid. Sov. Phys. Doklady, v 6, p 16-17, 1961.
65. Strasberg: The Pulsation Frequency of Nonspherical Gas Bubbles in Liquids. J. Acoust. Soc. Amer., v 25, p 536-37, 1953.

66. Strasberg: Gas Bubbles as Sources of Sound in Liquids. J. Acoust. Soc. Amer., v 28, p 20-26, 1956.
67. Welch, Harlow, Shannon & Daly: The MAC Method. A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid-Flow Problems Involving Free Surfaces. Los Alamos Scientific Laboratory, Rep. LA-3425, 1969.

