



Projecte Fi de Carrera

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació
(especialitat en sistemes electrònics)

**Caracterització estadística dels pics de correlació a
GPS**

Enric Guerrero Rubio

Director: Gonzalo Seco Granados

Departament de Telecomunicacions i Enginyeria de Sistemes

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria (ETSE)

Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

Setembre 2011



El sotasignat, Gonzalo Seco Granados, Professor de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria (ETSE) de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB),

CERTIFICA:

Que el projecte presentat en aquesta memòria de Projecte Fi de Carrera ha estat realitzat sota la seva direcció per l'alumne Enric Guerrero Rubio

I, perquè consti a tots els efectes, signa el present certificat.

Bellaterra, 20 de setembre de 2011.

Signatura: *Gonzalo Seco Granados*

Caracterització estadística dels pics de correlació a GPS

Enric Guerrero Rubio

Setembre de 2011, Bellaterra

Vull agrair sincerament a Gonzalo Seco Granados per tota la seva ajuda i suport que m'han permès dur a terme aquest projecte. També vull agrair a la meva família i amics, la seva comprensió i paciència, i per haver-me sabut compartir amb el temps dedicat a la realització d'aquesta feina.

Moltes gracies.

ÍNDEX:

1. INTRODUCCIÓ:	1
1.1 Motivació del projecte:	1
1.2 Organització de la memòria:	2
2. FONAMENTS DEL SISTEMA GPS:.....	3
2.1 Definició:.....	3
2.2 Història dels GNSS:.....	4
2.2.1 Antecedents:	4
2.2.2 Present i futur dels GNSS:	6
2.2.3 Comparativa dels principals GNSS:	6
2.3 Descripció del sistema GPS:	7
2.3.1 Segment espacial:	7
2.3.2 Segment de control:.....	8
2.3.3 Segment d'usuari:.....	10
2.4 Càlcul de la posició amb GPS:	10
2.5 Serveis GPS:.....	12
2.5.1 Serveis de posicionament precís:.....	12
2.5.2 Serveis de posicionament estàndard:	13
3. SENYALS GPS:	14
3.1 Modulació i multiplexació de les senyals:.....	16
3.2 El codi P(Y):.....	19
3.3 El codi C/A:	19
3.4 Missatge de navegació:	24
3.5 Noves senyals GPS:	25
3.5.1 Segona senyal civil (L2C):	25
3.5.2 Tercera senyal civil (L5):	26
3.5.3 Quarta senyal civil (L1C):	27
3.5.4 Nova senyal militar (M):.....	27
3.5.5 Síntesi de les noves senyals GPS:.....	28
4. EL RECEPTOR GPS:.....	29
4.1 Adquisició de senyals GPS:.....	30
4.2 Adquisició per cerca en sèrie:	32
4.3 Adquisició per cerca de freqüència en paral·lel:	33

TAULA DE CONTINGUTS

4.4 Adquisició per cerca de fase de codi en paral·lel:.....	34
4.5 Mida de les dades per adquisició:	36
5. DETECCIÓ DE LES SENYALS:	41
5.1 Introducció:.....	41
5.2 Test de les diferents hipòtesis:	42
5.2.1 Hipòtesis H_0 :	43
5.2.2 Hipòtesis H_1 :	43
5.3 Criteris TC, MAX i MAX/TC:	43
5.3.1 Criteri MAX:	44
5.3.2 Criteri TC:	44
5.3.3 Criteri MAX/TC:	45
5.4 Indicadors d'acompliment (P_{fa} i P_d):.....	45
5.4.1 Probabilitat de falsa alarma:	47
5.4.2 Probabilitat de detecció:	47
6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS:	48
6.1 Anàlisi estadístic sense presència de transicions de signe:	48
6.1.1 Integració d'un milisegon de senyal:	49
6.1.2 Integració de més d'1 ms de senyal:	52
6.2 Anàlisi estadístic amb presència de transicions de signe:	57
6.2.1 PDF condicionada (20 ms de senyal amb transició de signe):	58
6.2.1.1 Transició de signe a la meitat de la seqüència integrada:	58
6.2.1.2 Transició de signe a qualsevol altre punt de la seqüència integrada:.....	58
6.2.2 PDF global:	61
6.2.2.1 Cas #1 – seqüència integrada de només 20 ms de senyal:	62
6.2.2.2 Cas #2 – seqüència integrada de més de 20 ms de senyal:	70
6.2.2.3 Cas #3 – seqüència integrada de 40 ms de senyal:	76
7. CORBA ROC:.....	87
7.1 Corbes ROC dels diferents casos escollint un pic aleatori de soroll:	88
7.1.1 Cas 1:	88
7.1.2 Cas 2:	89
7.1.3 Cas 3:	90
7.2 Corbes ROC dels diferents casos escollint el pic màxim de soroll:.....	90
7.2.1 Cas 1:	90

7.2.2 Cas 2:.....	91
7.2.3 Cas 3:	92
7.3 Comparativa ROC's pic de soroll aleatori:.....	93
7.4 Comparativa ROC's pic de soroll màxim:	93
8. CONCLUSIONS:	95
9. REFERÈNCIES:	97
10. ANNEX:	99
10.1 Codis de Matlab base utilitzats:	99
10.1.1 Codi de Matlab per generar la senyal rebuda:.....	99
10.1.2 Codi de Matlab per generar la seqüència PRN:	100
10.1.3 Codi de Matlab per sobre-mostrejar el codi C/A generat:	101
10.1.4 Codi de Matlab per realitzar l'adquisició de les senyals GPS:.....	101
10.1.5 Codi de Matlab per generar les pdf's dels pics de correlació:	102
10.2 Resum de les distribucions estadístiques utilitzades:.....	104
10.2.1 Distribució Chi-Quadrat (Central):	104
10.2.2 Distribució Chi-Quadrat (No Central):	105
10.2.3 Distribució Uniforme (Discreta):	106
10.2.4 Funció Marcum Q generalitzada:.....	107

ÍNDEX DE FIGURES:

Figura 1: Segments del sistema GPS. [11]	7
Figura 2: Constel·lació de satèl·lits del sistema GPS.	8
Figura 3: Distribució geogràfica de les principals estacions de control i antenes terrestres[4]...	9
Figura 4: Càlcul posició d'usuari en 1D.	10
Figura 5: Càlcul posició d'usuari en 2D.	11
Figura 6: Generació dels senyals als satèl·lits [3]	15
Figura 7: Efecte de la modulació BPSK en les senyals GPS.[3].....	17
Figura 8: Espectre freqüencial de l'eixamplament de la senyal $s(t)$ [5]	17
Figura 9: Generació de codi C/A a partir dels registres G1 i G2.[3]	20
Figura 10: Correlació creuada dels satèl·lits 2 i 10 generada amb Matlab	23
Figura 11: Auto-correlació del satèl·lit 2 generada amb Matlab	23
Figura 12: Format de les dades de navegació. [1]	24
Figura 13: Espectres de les senyals GPS actuals(superior) i modernes(inferior).[4]	28
Figura 14: Diagrama de blocs d'un receptor GPS (basada en [4])	30
Figura 15: Diagrama de blocs d'adquisició per cerca en sèrie (basada en [3])	32
Figura 16: Diagrama de blocs d'adquisició per cerca de freqüència en paral·lel (esquema basat al que apareix a [3]).....	34

Figura 17: Diagrama de blocs d'adquisició per cerca de fase de codi en paral·lel (esquema basat al que apareix a [3]).....	35
Figura 18: Pics de correlació d'1 ms, PRN 19 amb C/No=45 dBHz.....	37
Figura 19: Pics de correlació d'1 ms, PRN 19 amb C/No=15 dBHz.....	37
Figura 20: Pics de correlació d'1 ms, PRN 19 sense presència de senyal.....	38
Figura 21: Valor del pic màxim al correlar 1 ms de senyal del satèl·lit 7.....	38
Figura 22: Correlació coherent de 20 ms del satèl·lit 7 per C/No=45 dBHz.....	39
Figura 23: Diagrama de blocs integració coherent/no-coherent.....	40
Figura 24: Graella d'adquisició amb les 2 dimensions de recerca del codi C/A.....	41
Figura 25: Pdf's per a la decisió binària [4].....	46
Figura 26: Sortida de correlació, 1ms alineat sense transició de signe.....	49
Figura 27: PDF cas Ho (superior i cas H1 (inferior) 1ms alineat sense transicions.....	50
Figura 28: Sortida de correlació, 1ms no alineat sense transició de signe.....	52
Figura 29: Sortida de correlació, 2 ms sense transició de signe.....	52
Figura 30: Sortida de correlació, 5 ms (inferior), sense transició de signe.....	53
Figura 31: PDF's cas Ho, integració de 2ms (superior) i 5 ms (inferior), sense transicions de signe.....	54
Figura 32: PDF's cas H1, integració de 2ms (superior) i 5 ms (inferior), sense transicions de signe.....	55
Figura 33: PDF's Ho (superior) i H1 (inferior) al integrar un bit de navegació sense transicions de bit.....	56
Figura 34: Seqüència integrada: 20ms amb transició de signe.....	57
Figura 35: Pics de correlació, 20ms, amb transició a la meitat de la seqüència rebuda.....	58
Figura 36: Seqüència de 20 ms integrada.....	59
Figura 37: Pics de correlació, 20ms amb transició de signe (6ms-14ms).....	59
Figura 38: PDF's condicionada, 20 ms amb transició de signe (6ms-14ms).....	60
Figura 39: Partició de la senyal rebuda en blocs de n mostres i correlació de cada bloc per separat.....	63
Figura 40: PDF global cas#1, pic de soroll qualsevol (Ho).....	64
Figura 41: PDF global cas#1, pic de soroll màxim (Ho).....	64
Figura 42: PDF global cas#1, pics màxims (H1).....	66
Figura 43: PDF empírica i teòrica del cas#1, pics màxims (H1).....	68
Figura 44: Partició de la senyal rebuda en blocs de 2n mostres i correlació de cadascun dels blocs per separat amb mètode "overlap-save".....	71
Figura 45: PDF's empírica i teòrica cas#2, pics de soroll qualsevol (Ho).....	73
Figura 46: PDF global cas#2, pic de soroll màxim (Ho).....	73
Figura 47: PDF empírica cas#2, pic màxim (H1).....	74
Figura 48: PDF empírica i teòrica cas#2, pic màxim (H1).....	75
Figura 49: Seqüència de senyal integrada sense transicions de signe.....	77
Figura 50: Seqüència de senyal integrada amb 1 o 2 transicions de signe.....	78
Figura 51: Esquema correlació circular cas #3.....	79
Figura 52: Pics de correlació cas#3, sense transició de signe.....	80
Figura 53: Pics de correlació cas#3, amb 1 transició de signe.....	81
Figura 54: Exemple correlació de 19 blocs C/A complets al cas #3.....	82
Figura 55: Pics de correlació cas#3, amb 2 transicions de signe.....	82

TAULA DE CONTINGUTS

Figura 56: PDF empírica i teòrica cas#3, pic màxim (H_1).....	83
Figura 57: PDF empírica i teòrica cas#3, pic soroll qualsevol (H_1) (amb ampliació)	84
Figura 58: PDF empírica i teòrica cas#3, pic soroll màxim (H_0)	85
Figura 59: Exemple representatiu dels indicadors d'acompliment per a un valor de llindar de detecció fixat, amb les pdf's obtingudes a la simulació	86
Figura 60: PDF's H_0 i H_1 cas 1 pic de soroll aleatori.....	88
Figura 61: ROC cas 1 pic de soroll aleatori.....	89
Figura 62: PDF's H_0 i H_1 cas 2 pic de soroll aleatori.....	89
Figura 63: ROC cas 2 pic de soroll aleatori.....	89
Figura 64: PDF's H_0 i H_1 cas 3 pic de soroll aleatori.....	90
Figura 65: ROC cas 3 pic de soroll aleatori.....	90
Figura 66: PDF's H_0 i H_1 cas 1 pic de soroll màxim	91
Figura 67: ROC cas 1 pic de soroll màxim	91
Figura 68: PDF's H_0 i H_1 cas 2 pic de soroll màxim	91
Figura 69: ROC cas 2 pic de soroll màxim	92
Figura 70: PDF's H_0 i H_1 cas 3 pic de soroll màxim	92
Figura 71: ROC cas 3 pic de soroll màxim	92
Figura 72: Comparativa ROC's pics de soroll aleatori	93
Figura 73: Comparativa ROC's pics de soroll màxim.....	94
Figura 74: Distribució chi-quadrat central amb diferents graus de llibertat (k)	104
Figura 75: Distribució chi-quadrat no-central amb diferents graus de llibertat (k) i paràmetres de no centralitat (λ)	106

ÍNDEX DE TAULES:

Taula 1: Comparativa de GPS, GLONASS i GALILEO.....	6
Taula 2: Taula amb els diferents PRN generats a partir de les diferents fases de codi escollides a G2. (33-37 reservats per altres usos)[3]	21
Taula 3: Característiques de la correlació creuada de codis Gold [1].....	22
Taula 4: Característiques generals de les senyals GPS	28
Taula 5: Comparativa entre els temps d'execució dels diferents algoritmes d'adquisició[3]....	35
Taula 6: Valor del pic H_1 en funció de transició de signe i desfasament (cas#1).....	67

1. INTRODUCCIÓ:

1.1 Motivació del projecte:

El sistema GPS, com a màxim exponent dels sistemes de navegació per satèl·lit, ha tingut i està tenint un fort creixement i expansió a les darreres dècades. Contínuament apareixen noves i millors aplicacions que utilitzen aquest sistema de navegació i que requereixen que certs aspectes d'aquest siguin contínuament estudiats i millorats per tal de proporcionar unes millors prestacions.

Entre altres aspectes, moltes d'aquestes millores van encarades a proporcionar cada cop unes mesures del posicionament més exactes, uns temps de computació menors i un abastament i una cobertura majors, inclús, el fet de poder funcionar en espais on fins ara era impensable com zones amb multitud d'obstacles o a interiors, com el que s'anomena zones "indoor".

Per tal de donar resposta a aquestes millores, sovint es busquen noves formes utilitzades pels receptors de GPS per tal d'adquirir les senyals, integrant seqüències de senyal cada cop majors o utilitzant nous algorismes d'adquisició.

En aquest sentit, alhora de dissenyar els receptors GPS per a que operin de la forma més òptima possible, s'han de tenir en compte aspectes molt importants com són les distribucions estadístiques que segueixen els pics obtinguts com a resultat de dur a terme la correlació de les senyals (procés essencial per tal d'adquirir les senyals rebudes als receptors). Aquestes distribucions són les que ens permetran conèixer les probabilitats de detecció i de falsa alarma que tindrà el nostre receptor sota unes circumstàncies determinades i fixant un llindar de detecció que ens doni les millors prestacions possibles.

En aquest treball hem volgut estudiar aquestes estadístiques quan l'adquisició de les senyals es realitza de forma coherent i amb diferents casos d'estudi fruit d'escollir diverses longituds per a les seqüències de senyal integrades. A més, s'ha realitzat tot l'estudi clarament encarat a comprovar quin és l'efecte, en aquests resultats, de que dins de les seqüències integrades ens trobem amb transicions de fase de bits de navegació diferents.

Molts dels aspectes estudiats al llarg d'aquest projecte ja han estat analitzats a publicacions anteriors, però sovint de forma independent o sense centrar-se en el cas concret del sistema GPS. El que hem volgut fer és omplir aquest forat, fent un anàlisi més profund i concret al sistema GPS, centrant-nos en comprovar com varien les estadístiques pels pics de correlació

quan modifiquem els algorismes d'adquisició o les longituds de senyal integrades, així com quan trobem transicions de signe o no.

1.2 Organització de la memòria:

La present memòria s'estructura en dues parts. A la primera part, es dona una visió general i s'expliquen els fonaments del funcionament d'un sistema GPS que ens permetran tenir una visió general de com funciona per entendre millor els resultats obtinguts als anàlisis posteriors. En primer lloc, es fa una breu introducció on es defineix el concepte de sistema GPS dins del marc dels GNSS (Global Navigation Satellite System).

Tot seguit, farem un breu resum dels diferents antecedents històrics dels actuals sistemes de navegació per satèl·lit. Alhora, comentarem l'estat actual d'aquest tipus de sistemes així com les seves perspectives futures.

A continuació, passarem a una descripció més tècnica del funcionament del sistema GPS, on comentarem els diferents elements que el conformen, les senyals que s'utilitzen i ens centrarem en el receptor GPS com a element fonamental del nostre estudi. En concret, profunditzarem en l'explicació de com funciona el bloc d'adquisició d'un receptor i quines son les diferents maneres d'implementar-lo.

A la segona part, passarem a analitzar l'efecte dels bits de navegació a l'adquisició de senyals GPS. Al mateix temps, exposarem les diferents simulacions per tal d'estudiar l'estadística de la sortida del bloc d'adquisició, i posarem èmfasis en estudiar com aquesta es veu alterada a causa de la presència de transicions de bits de navegació dins de les seqüències de dades utilitzades en les correlacions.

Comentarem també les implicacions d'aquestes distribucions estadístiques al càlcul d'un paràmetre essencial per tal de valorar el bon funcionament d'un receptor GPS: la corba ROC.

Finalment, mostrarem les conclusions obtingudes de les diferents experimentacions fetes durant aquest estudi.

2. FONAMENTS DEL SISTEMA GPS:

2.1 Definició:

El sistema GPS¹ és un sistema global de posicionament que forma part dels anomenats sistemes GNSS². Aquest tipus de sistemes de radionavegació³ estan constituïts per tota una constel·lació de satèl·lits artificials que transmeten senyals que proporcionen serveis de posicionament i localització fiables en qualsevol part del planeta. La finalitat d'aquest tipus de sistemes és permetre, a qualsevol usuari amb un receptor adequat, determinar les coordenades geogràfiques i l'altitud del punt on es troba amb la màxima precisió possible.

El sistema GPS va ser dissenyat i pertany al govern dels Estats Units, però és el sistema de posicionament més estès i utilitzat fins ara a nivell global. Com a qualsevol sistema GNSS, el GPS requereix d'un conjunt de 3 elements per tal de dur a terme la seva funció: els satèl·lits que orbiten entorn a la Terra, els receptors i les estacions terrestres. Explicarem amb més detall les funcions i característiques de cadascun d'aquests elements a l'apartat 2.3 *Descripció del sistema GPS*.

Les aplicacions dels sistemes GNSS són molt àmplies i s'utilitzen tant a nivell civil com militar:

- Àmbit militar: un dels principals usos militars dels GNSS és la localització i orientació de vehicles militars i tropes. També, s'utilitzen en el guiatge de precisió fins a l'objectiu de míssils i bombes intel·ligents.
- Àmbit civil: els sistemes GNSS s'utilitzen, dins del marc de l'Organització d'Aviació Civil Internacional (OACI), com a sistemes de posicionament, reconeixement i com a element clau dels sistemes de comunicació, navegació i vigilància pel control del tràfic aeri. Altres usos importants dels sistemes GNSS a nivell civil són: navegació/orientació de dispositius de mà per senderisme, dispositius integrats a automòbils, transport marítim, sistemes de localització per emergències, càlculs hidrogràfics, entre altres aplicacions.

¹ GPS: Global Positioning System (Sistema Global de Posicionament).

² GNSS: Global Navigation Satellite System (Sistema Global de Navegació per Satèl·lit).

³ Radionavegació: navegació basada en la transmissió de senyals radioelèctrics.

2.2 Història dels GNSS:

2.2.1 Antecedents:

El descobriment de la navegació sembla haver-se donat molt aviat a la història de la humanitat. Ja des dels inicis, l'ésser humà ha inventat nous mètodes per poder determinar la seva posició a la Terra i poder orientar-se millor.

La navegació, per tant, s'ha desenvolupat de forma paral·lela als avenços de la ciència i de la tecnologia partint dels primers instruments utilitzats com l'astrolabi, el sextant, la brúixola i el compàs, fins als actuals sistemes de navegació per satèl·lit.

Com ja hem dit, els diferents GNSS es troben dins d'aquest últim tipus de sistemes de navegació, tot i que els seus antecedents els trobem als sistemes de radionavegació terrestre. Aquests sistemes utilitzaven radiotransmissors terrestres de baixa freqüència, en comptes de satèl·lits i els més importants els comentarem a continuació [4] i [10]:

- DECCA: El sistema DECCA va ser dissenyat i utilitzat pels anglesos al final de la Segona Guerra Mundial i es va implementar a la part nord-occidental d'Europa. Era un sistema de radionavegació de tipus hiperbòlic, així que es basava en la mesura de la diferència de temps d'arribada de les ones electromagnètiques procedents de dos transmissors fins al receptor.
- LORAN⁴: El sistema LORAN⁴ també va desenvolupar-se durant la Segona Guerra mundial amb la finalitat d'obtenir un sistema de radionavegació de major abast que el DECCA. Es basava en la mesura de la diferència de temps de propagació entre impulsos que modulaven una portadora i va tenir successives versions (LORAN-A,B,C i D), les més utilitzades de les quals van ser les versions A i C.
- OMEGA: Com els dos sistemes anteriors, OMEGA també era un sistema hiperbòlic i va ser utilitzat per la marina dels EEUU a partir de 1967. Es considera el primer sistema de navegació a nivell global. Estava format per vuit estacions distribuïdes per tota la superfície terrestre i en aquest cas, la propagació dels senyals es feia entre la terra i la ionosfera.

⁴ LORAN: Long Range Navigation (Navegació de llarg abast).

El primer sistema en utilitzar els satèl·lits per a la navegació que es va desenvolupar va ser el sistema TRANSIT (també conegut com *U.S Navy Navigation Satellite System*). Va ser dissenyat per la marina dels EEUU entre 1958 i 1963, i al 1969 ja va convertir-se en un sistema disponible a nivell internacional.

El seu principi de funcionament estava basat en l'efecte Doppler. Els satèl·lits viatgen en trajectòries conegudes i transmeten les seves senyals a freqüències determinades. A causa del moviment del satèl·lit respecte el receptor, la freqüència rebuda en aquest és lleugerament diferent de la freqüència de transmissió. En cas de que l'òrbita del satèl·lit sigui totalment coneguda, es pot determinar la posició del receptor a partir d'estudiar els canvis de freqüència causats per l'efecte Doppler a intervals curts de temps.

Amb aquest primer sistema de navegació per satèl·lit, es van aconseguir de 100 fins a 10 metres de precisió, molt més del que es podia aconseguir amb instruments tradicionals o amb la radionavegació terrestre. El principal inconvenient del TRANSIT era que podien passar hores entre passades acceptables d'un satèl·lit i l'observador havia de trobar-se pràcticament estàtic, cosa que el feia un sistema de navegació lent i poc pràctic.

A partir dels anys 70, es va donar una autèntica revolució al món de la navegació per satèl·lit, que provocaria l'aparició de l'actual sistema GPS. El programa GPS, inicialment conegut com NAVSTAR-GPS⁵, va aprovar-se al desembre de 1973 i constava, en un principi, d'un conjunt de 24 satèl·lits que van acabar-se de posar en òrbita al 1993. En un principi, l'ús del GPS era exclusivament militar i es trobava sota el control del DoD⁶ dels EEUU.

Més tard, el govern dels EEUU va realitzar diversos estudis juntament amb diferents agències privades que van portar a que, a principis dels anys 90, es comencés a utilitzar aquesta tecnologia a l'àmbit civil. En aquest moment, molts països del món van pactar amb els EEUU i van començar a fer ús del sistema GPS, alhora que van contribuir creant tota la infraestructura d'estacions terrestres i sistemes d'augmentació com SBAS⁷ i GBAS⁸, sistemes que proporcionen una major precisió a les mesures preses amb el sistema GPS.

⁵ NAVSTAR-GPS: Navigation Signal Timing and Ranging – Global Positioning System

⁶ DoD: Department of Defense (Departament de Defensa)

⁷ SBAS: Satellite Based Augmentation System (Sistema d'Augmentació Basat en Satèl·lits)

⁸ GBAS: Ground Based Augmentation System (Sistema d'Augmentació a Terra)

2.2.2 Present i futur dels GNSS:

En l'actualitat, els dos únics sistemes GNSS 100% operatius que formen part d'aquest concepte són el GPS i el GLONASS, que és el sistema de navegació de la Federació Russa. El present i futur dels GNSS passa per la creació de nous sistemes de navegació per part d'altres països del món i la modernització dels sistemes actuals com el GPS, amb noves senyals i freqüències utilitzables i un major nombre de satèl·lits, entre altres millores.

Un exemple és el cas de GALILEO, que aspira a convertir-se en el sistema de navegació per satèl·lit de la Unió Europea. GALILEO, comptarà amb un total de 30 satèl·lits i serà compatible amb la propera generació de NAVSTAR-GPS. S'espera que els receptors puguin combinar les senyals dels 30 satèl·lits Galileu i dels 30 GPS aconseguint així una major precisió.

D'altra banda, tenim el cas d'altres països com la Xina, Japó o la Índia que estan desenvolupant els seus propis sistemes GNSS com són el Compass-BeiDou, el OZSS (Quasi-Zenith Satellite System) i el IRNSS (Indian Regional Navigation Satellite System) respectivament.

2.2.3 Comparativa dels principals GNSS:

A mode de resum d'aquest apartat, la següent taula mostra una comparativa entre les diferents característiques dels 3 principals sistemes GNSS dels que hem parlat: GPS, GLONASS i GALILEO (en tots 3 casos considerant les característiques que tindran quan els sistemes estiguin implementats i operatius al 100% [10]):

	GPS	GLONASS	GALILEO
Número de satèl·lits	30	24	30
Alçada	20200 km	19100 km	23222 km
Període orbital	11 h 56'	11h 15'	14h
Nº de plans orbitals	6	3	3
Satèl·lits/pla	Fins a 6	Fins a 8	Fins a 10
Disponibilitat	95%	99.7%	99.8%
Precisió Horitzontal	<20 metres	<50 metres	4-15 metres
Precisió Vertical	<20 metres	<70 metres	8-35 metres

Taula 1: Comparativa de GPS, GLONASS i GALILEO.

2.3 Descripció del sistema GPS:

Un cop hem introduït el concepte de sistema GNSS, i ara que ja hem vist els diferents tipus de GNSS que existeixen, passarem a descriure els aspectes més importants de funcionament del tipus més utilitzat fins ara: el GPS.

Deixem clar per tant, com ja hem comentat anteriorment, que l'estudi del present projecte es centrarà en el sistema GPS, del qual passarem a explicar, en primer lloc, els components que el formen.

Els elements que formen el sistema GPS, i que són essencials pel seu funcionament, es troben distribuïts en tres segments: la constel·lació de satèl·lits, la xarxa terrestre de control i monitorització i l'equipament de recepció d'usuari. Aquests 3 segments poden apreciar-se a la següent imatge:

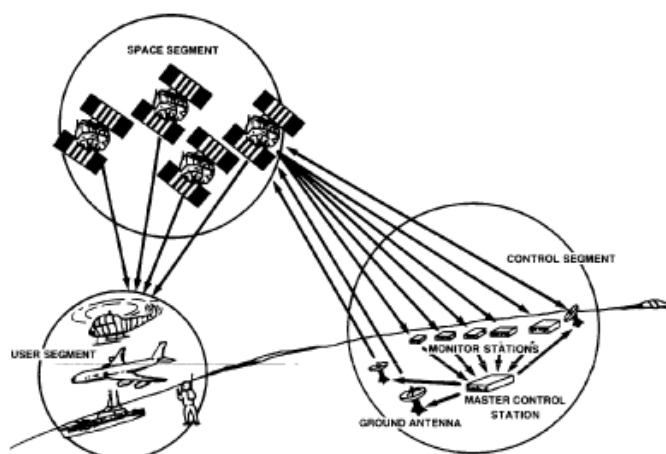


Figura 1: Segments del sistema GPS. [11]

2.3.1 Segment espacial:

El segment espacial fa referència a la constel·lació de satèl·lits, és a dir, tot el conjunt de satèl·lits en òrbita que proporcionen els diferents senyals i dades als equips de recepció d'usuari.

Aquesta constel·lació, actualment està formada per un total de 30 satèl·lits (abans n'eren 24), que es troben dividits en 6 plans orbitals, per tant, hi ha un nombre màxim de 6 satèl·lits per òrbita. Cada pla orbital té un angle d'inclinació de 55° respecte l'equador i estan separats 60° entre si per tal de cobrir els 360° completament. El radi de rotació dels satèl·lits és d'uns

26.560 km i tenen un període de rotació d' 11 hores, 57 min i 57,26 segons, per tant, donen 2 voltes completes a la Terra en un dia sideral⁹.

El segment espacial és desenvolupat, millorat i mantingut per les forces aèries dels Estats Units. El lector interessat podrà trobar molta més informació sobre les orbites així com sobre els propis satèl·lits que formen el segment espacial GPS a [4] i [9].

A la següent imatge es mostra la representació dels 6 plans orbitals amb els 24 satèl·lits que composaven, en un principi, la constel·lació GPS:

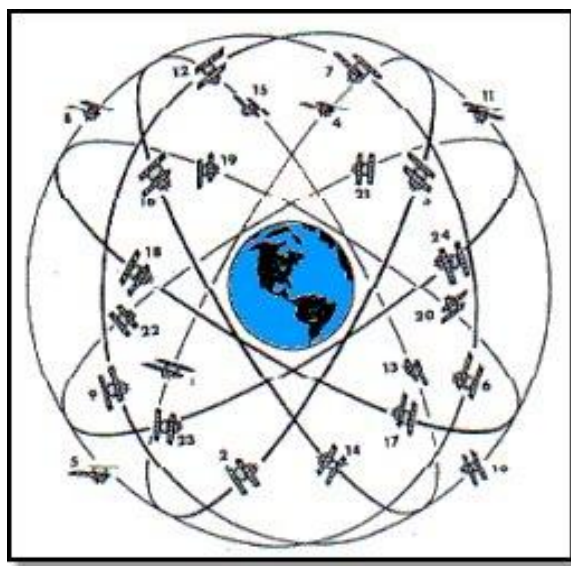


Figura 2: Constel·lació de satèl·lits del sistema GPS.

2.3.2 Segment de control:

El segment de control (CS: Control Segment) és el responsable del manteniment del correcte funcionament dels satèl·lits. Aquest segment de control està format per cinc estacions de control/monitorització (MS: Monitor Station) que inclou una estació de control mestre, així com per tot un conjunt d'antenes terrestres (GT: Ground Antena) repartides per diverses zones de la Terra. Cadascuna de les diferents estacions de control es troben molt separades entre si a diferents punts de la superfície terrestre i l'estació mestre es troba localitzada a la *Schriever Falcon Air Force Base* de Colorado Springs, als Estats Units.

⁹ Dia sideral: temps real que triga la Terra en donar una volta completa sobre si mateixa i que correspon a 23 hores, 56 minuts i 4,09 segons [20])

La principal funció de les estacions de control és monitoritzar les funcions realitzades pels satèl·lits, enviant les dades recollides del segment espacial cap a l'estació mestra. L'estació mestra rep aquestes dades i les processa convertint-se en la responsable de tots els aspectes del control i comandament de la constel·lació de satèl·lits. Aquestes actuacions s'agrupen en 3 tipus de funcions [4]:

1. Supervisar l'execució dels satèl·lits assegurant que es compleixin totes les normes de funcionament.
2. Generar i enviar les dades de navegació als satèl·lits per mantenir les normes de funcionament.
3. Detectar i donar resposta a possibles falles dels satèl·lits per minimitzar les conseqüències.

Al següent mapa mundial podem veure la distribució de les principals estacions i antenes que formen part del segment de control del sistema GPS:

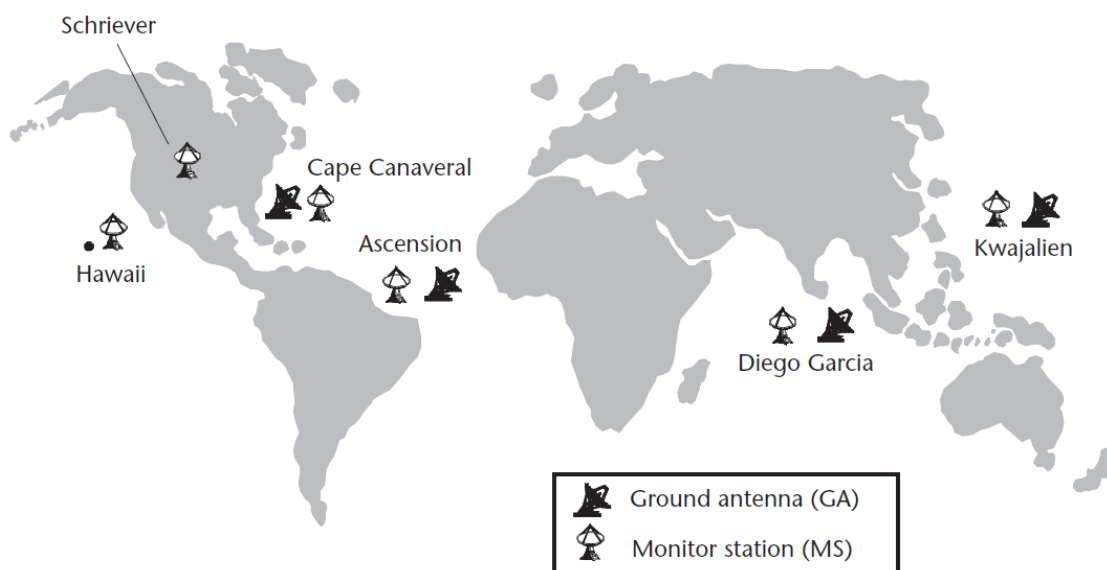


Figura 3: Distribució geogràfica de les principals estacions de control i antenes terrestres [4]

Un altre aspecte a remarcar són les freqüències (banda S¹⁰) utilitzades en la comunicació entre les estacions terrestres i els satèl·lits: 1783,74MHz pel canal ascendent i 2227,5MHz pel descendent.

¹⁰ Banda S: rang de freqüències comprés entre: 2 i 4 GHz.

Pot trobar-se més informació sobre el funcionament i serveis que proporciona el segment de control, així com una major descripció dels diferents elements que hem comentat a [4].

2.3.3 Segment d'usuari:

Com el seu propi nom indica, el segment d'usuari és el que està format per tot l'equipament de recepció que necessiten els usuaris del sistema GPS. Anomenarem a aquest equipament *receptor GPS* i l'analzarem amb més profunditat a l'apartat 4 *El receptor GPS*.

La principal funció del segment d'usuari és rebre les senyals enviades pel segment espacial a la banda L¹¹, descodificar-les i processar-les per obtenir la informació requerida, en funció de l'ús que s'estigui fent del sistema GPS, normalment, calcular la posició de l'usuari. Per tant, el disseny d'un receptor GPS variarà depenent de la funció per la qual es voldrà utilitzar.

A més de la funció per a la qual estan dissenyats, els receptors GPS es poden classificar en funció de quin tipus de codis GPS accepten o els usuaris als quals van destinats (civils o militars).

2.4 Càlcul de la posició amb GPS:

En aquest apartat introduïrem els conceptes bàsics de com un receptor GPS és capaç de determinar la seva posició. El concepte fonamental del càlcul de la posició és el següent: la posició d'un cert punt de l'espai pot ser trobada mesurant la distància des d'aquest punt fins a altres posicions de l'espai de les quals sí coneixem les coordenades [1]. Per entendre aquest concepte, primer podem analitzar la figura 4, on es calcula la posició de l'usuari en una sola dimensió:

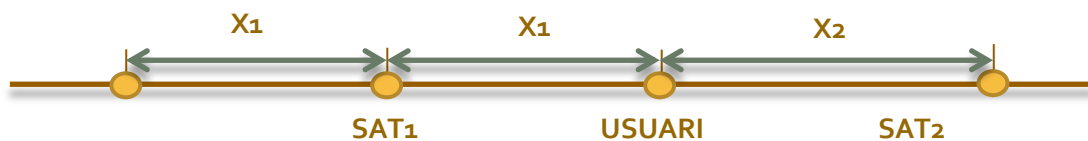


Figura 4: Càlcul posició d'usuari en 1D.

En aquest cas, si coneixem la posició del satèl·lit S₁ i la distància X₁, la posició d'usuari només pot estar en 2 punts. Però si alhora coneixem la posició del satèl·lit S₂ i la distància X₂, només hi ha un punt que compleixi les 2 condicions. D'aquesta manera, en 1 dimensió, calen 2

¹¹ Banda L: Rang de freqüències comprès entre 1,5 GHz a 2,7 GHz

satèl·lits per poder determinar la posició de l'usuari. El mateix passa en el cas de la figura 5, on ens trobem en un escenari amb 2 dimensions:

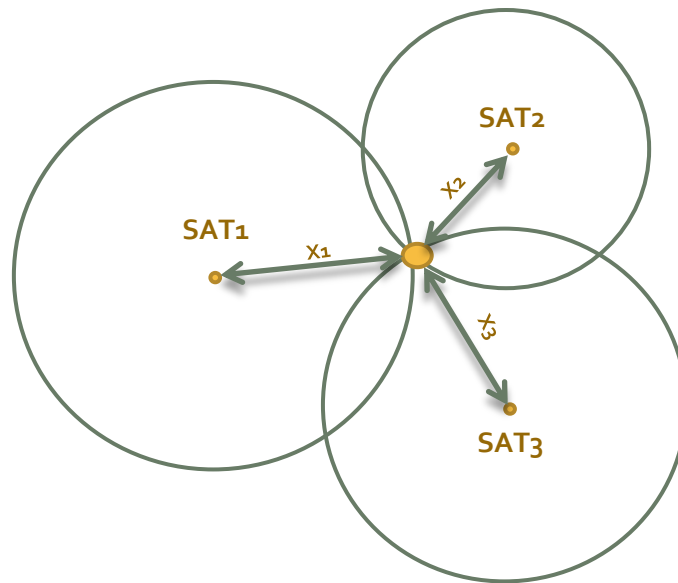


Figura 5: Càlcul posició d'usuari en 2D.

En aquest cas, com veiem, calen 3 satèl·lits per poder identificar el punt on es troba l'usuari.

És fàcil pensar que pel cas real, on volem calcular la posició en un escenari 3D, caldrà conèixer la posició de 4 satèl·lits i per tant de 4 distàncies respecte aquests i el punt d'usuari. Però en aquest cas, tots els punts que es troben a la mateixa distància del lloc de referència formen una esfera i no una circumferència com en el cas anterior.

Com veiem, per tal de poder conèixer la posició d'usuari és fonamental conèixer les distàncies que hi ha del receptor a cadascun dels satèl·lits, cosa que a priori no sabem. Per aquesta raó, els satèl·lits envien senyals de forma contínua cap a la superfície terrestre. Dins d'aquestes senyals es troba tot un conjunt de dades, que els receptors utilitzaran per conèixer les posicions dels satèl·lits; aquest conjunt de dades són les *efemèrides*. Coneixent la posició dels satèl·lits i els retards en el temps de propagació de les senyals, el receptor pot calcular les distàncies a cadascun dels satèl·lits.

A aquestes distàncies les anomenarem *pseudorangs*, i les podem expressar amb les següents funcions com a [1], on x_i, y_i, z_i són les coordenades del satèl·lit i (conegudes), i x_u, y_u, z_u són les coordenades de l'usuari (desconegudes):

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2} \\ \rho_3 &= \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2 + (z_3 - z_u)^2}\end{aligned}\tag{2-1}$$

Ara bé, aquestes distàncies tindran errors causats per retards de la senyal a causa de fenòmens atmosfèrics, o el fet que els rellotges de receptor i satèl·lit no estiguin completament sincronitzats. Aquests errors formaran part d'una quarta incògnita que es sumarà a les coordenades del punt d'usuari que volem trobar. És per aquesta raó, que necessitem del quart satèl·lit per tal de tenir 4 equacions amb 4 incògnites i poder resoldre el sistema trobant el punt d'usuari:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2} + b_u \\ \rho_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2} + b_u \\ \rho_3 &= \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2 + (z_3 - z_u)^2} + b_u \\ \rho_4 &= \sqrt{(x_4 - x_u)^2 + (y_4 - y_u)^2 + (z_4 - z_u)^2} + b_u\end{aligned}\tag{2-2}$$

La forma en com el receptor GPS resol aquest sistema per trobar les distàncies als diferents satèl·lits es pot trobar al capítol 2 de [1]. Cal destacar que resolent el sistema anterior, obtindríem 2 punts possibles, però uns d'aquests es trobaria a una certa altura de la superfície terrestre. Per tant, si el receptor es troba a la superfície terrestre, un dels punts es pot descartar.

2.5 Serveis GPS:

El sistema GPS proporciona dos tipus de servei clarament diferenciats: el Servei de Posicionament Precís (PPS) i el Servei de Posicionament Estàndard (SPS) [11]:

2.5.1 Serveis de posicionament precís:

El PPS és un servei de posicionament, com el propi nom indica, precís i ràpid, i només està habilitat pels usuaris autoritzats, com per exemple, per a militars. Tot i això, altres usuaris poden rebre autoritzacions per part del Departament de Defensa dels Estats Units (DoD) per fer ús dels serveis PPS. Aquest tipus de servei està dissenyat per donar errors molt menors en les mesures de les posicions que no pas els que obtindríem fent ús del servei SPS. Alguns valors que podem veure per conèixer la precisió d'aquest servei són: 37 metres d'error esfèric i

197 nanosegons en la transferència, ambdós paràmetres considerant condicions normals de funcionament i amb un 95% de probabilitats.

La forma en la qual s'aconsegueix que aquest servei sigui molt més precís i eficient és utilitzant les dos tècniques criptogràfiques següents:

- Anti-Spoofing (AS): mecanisme que evita que es pugui obtenir informació de les senyals transmeses mitjançant l'encriptació d'aquestes.
- Disponibilitat Selectiva (SA): mecanisme que consisteix en deteriorar la qualitat de les senyals que s'utilitzen a l'altre tipus de servei de posicionament GPS (SPS) introduint errors pseudoaleatoris.

Gràcies a aquestes dues tècniques, els usuaris dels serveis PPS, poden desencripar i evitar les degradacions intencionades de les senyals per obtenir una major precisió i més seguretat, així com privacitat en l'ús del sistema GPS.

Les senyals enviades pels satèl·lits que contenen aquestes característiques i que per tant, són utilitzades pels serveis PPS són les senyals militars com P(Y), tot i que els usuaris de serveis PPS poden utilitzar tots els codis disponibles, sense restriccions. Parlarem més sobre els diferents codis que s'utilitzen a GPS a la secció 3 *Senyals GPS*.

2.5.2 Serveis de posicionament estàndard:

A diferència dels serveis PPS, els serveis de posicionament estàndard (SPS), estan habilitats per tot tipus d'usuaris sense cap tipus de restricció. Per aquesta raó, els serveis SPS són els serveis de navegació més utilitzats al món en tot tipus d'aplicacions, principalment civils.

SPS proporciona una menor precisió que PPS, sobre tot a causa de la degradació intencionada de la senyal causada per la disponibilitat selectiva (SA). I, alhora, no garanteix tanta seguretat ni privacitat com en el cas anterior.

Alguns valors on podem veure aquesta davallada de la precisió respecte PPS són: errors esfèrics de 156 metres i 337 nanosegons de transferència, considerant, una degradació habitual de la senyal i amb un 95% de probabilitat. En quant a les senyals que s'utilitzen en els serveis de navegació SPS, són només les que corresponen als codis civils.

3. SENYALS GPS:

Fins ara, hem estat parlant dels elements que formen el sistema GPS i dels conceptes bàsics del seu funcionament. Hem comentat, per tant, que per calcular la seva posició, els receptors han de rebre i processar les senyals enviades pels satèl·lits, però, quines característiques tenen aquestes senyals? A continuació, presentarem els aspectes més importants de les senyals utilitzades al sistema GPS.

Les senyals que emeten cadascun dels satèl·lits GPS es transmeten en dos freqüències diferents¹², totes dues freqüències que es troben dins de la banda UHF¹³. Aquestes freqüències s'anomenen L1 i L2 respectivament i són múltiples de la freqüència central 10,23 MHz, com veiem a les equacions 3-1 i 3-2:

$$f_{L1} = 154 \cdot f_o = 1575,42 \text{ MHz} \quad 3-1$$

$$f_{L2} = 120 \cdot f_o = 1227,60 \text{ MHz} \quad 3-2$$

A més, les senyals GPS estan compostes per 3 elements:

- Ona portadora: és l'ona sobre la qual s'envia la informació transmesa pels diferents satèl·lits.
- Codi: Cada satèl·lit pot generar dos tipus de seqüències diferents. Una d'aquestes seqüències és la que fa referència al codi civil (C/A: Coarse/Acquisition) i l'altre fa referència al codi d'ús militar, també anomenat codi de precisió (P(Y)). Veurem les propietats de cadascun d'aquests codis a les seccions 3.2 i 3.3 respectivament.
- Dades de navegació: Les dades de navegació corresponen a la part del missatge que conté la informació sobre la posició dels satèl·lits. Aquesta informació s'envia als diferents satèl·lits des de les estacions del segment de control. Comentarem les propietats d'aquest missatge de navegació a la secció 3.4.

Tot i que amb la modernització del sistema GPS, la distribució de les freqüències i els tipus de codi utilitzats han canviat (com veurem a la secció 3.5), la freqüència L1 s'utilitza per

¹² Per ara, no considerarem les millores introduïdes en la modernització del sistema GPS i ens basarem en l'esquema tradicional de funcionament.

¹³ UHF: Ultra High Frequency, rang de freqüències compreses entre 300MHz i 3GHz.

transmetre els codis C/A i P(Y) mentre que la freqüència L2 només transmet els codis P(Y). La figura 6 descriu l'esquema de generació de cadascuna de les senyals que hem comentat anteriorment. Per tal de poder comprendre'l, s'ha de llegir l'esquema d'esquerra a dreta.

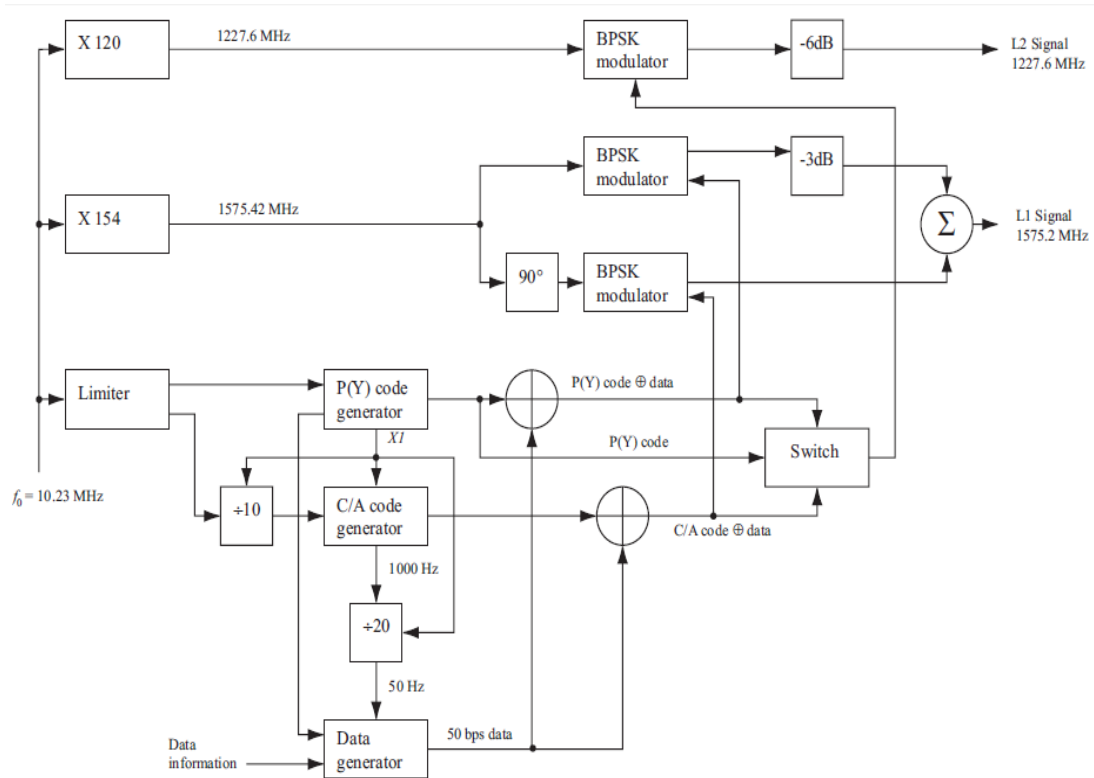


Figura 6: Generació dels senyals als satèl·lits [3]

En primer lloc veiem com la freqüència central f_0 passa per dos blocs on es multiplica per 154 i 120 respectivament, per tal d'obtenir les freqüències portadores L1 i L2. Cal dir, que tot i que f_0 correspon a 10,23 MHz, en realitat, els transmissors GPS utilitzen una freqüència central de 10.22999999543 MHz per tal de compensar els efectes relativístics i tenir una f_0 de 10,23 MHz als receptors terrestres [1]. A la part esquerra trobem un limitador que estabilitza la senyal del "clock" abans de passar als blocs generadors dels codis P(Y) i C/A. I a la part inferior, trobem el bloc que genera les dades de navegació. Després de la creació dels codis, es combinen amb les dades de navegació mitjançant mòduls que realitzen la funció lògica OR exclusiva. Finalment, es passa aquesta suma de senyals pel modulador de freqüència L1 on es modula amb l'ona portadora utilitzant el mètode BPSK¹⁴ obtenint els dos codis modulats en fase i en

¹⁴ BPSK: Binary Phase Shift Keying, tipus de modulació per desplaçament de fase on s'utilitzen dos valors de fase diferents.

quadratura¹⁵ l'un amb l'altre. Tot seguit, la part P(Y) s'atenua -3dB i es sumen les dos senyals per formar la senyal de la banda L1, que pot descriure's amb la següent funció:

$$s^k(t) = \sqrt{2P_C} \cdot (C^k(t) \oplus D^k(t)) \cdot \cos(2\pi f_{L1}t) + \sqrt{2P_{PL1}} \cdot$$

3-3

$$\cdot (P^k(t) \oplus D^k(t)) \cdot \sin(2\pi f_{L1}t) + \sqrt{2P_{PL2}} (P^k(t) \oplus D^k(t)) \cdot \sin(2\pi f_{L2}t)$$

On P_C , P_{L1} i P_{L2} són la potencia de les senyals amb C/A o codi P, C^k correspon a la seqüència C/A i P^k a la seqüència P(Y) assignada al satèl·lit número k. D^k correspon a la seqüència de dades de navegació i f_{L1} i f_{L2} a les freqüències portadores L1 i L2.

3.1 Modulació i multiplexació de les senyals:

Com hem dit, les senyals GPS són senyals amb modulació de fase. Això vol dir, que la fase de la senyal que es transmet pot prendre diversos valors, en aquest cas 2: 0 o π . Aquest tipus de modulació, s'anomena, com ja hem introduït, BPSK (Modulació per desplaçament de fase) i aquest canvi de fase se sol anomenar xip-rate. La forma de l'espectre freqüencial d'aquestes senyals ve descrita per una funció sinc ($\sin(x)/x$) amb una amplada proporcional a aquest xip-rate.

Però a les senyals GPS s'utilitza la tècnica de l'espectre eixamplat per seqüència directa (DSSS¹⁶), una extensió de la modulació BPSK, que consisteix en utilitzar uns codis anomenats PRN¹⁷ per augmentar l'ample de banda de transmissió distribuint de forma uniforme la densitat espectral de potencia transmesa. Amb aquesta tècnica s'aconsegueix una major robustesa de la senyal per fer front al soroll i, a més, permet que tots els satèl·lits puguin transmetre senyals a la mateixa freqüència sense que s'interfereixin entre si.

A la següent imatge pot comprovar-se l'efecte de la modulació BPSK. En primer lloc, tenim la senyal de codi (C) corresponent als 25 primers xips del codi del satèl·lit 1. Aquest codi es combina amb la senyal de dades (D). Finalment tenim com queda l'ona portadora un cop modulada:

¹⁵ Que els codis es trobin modulats en fase i quadratura significa que hi ha una diferència de 90° entre ells.

¹⁶ DSSS: Direct Sequence Spread Spectrum

¹⁷ PRN: Pseudo Random Noise

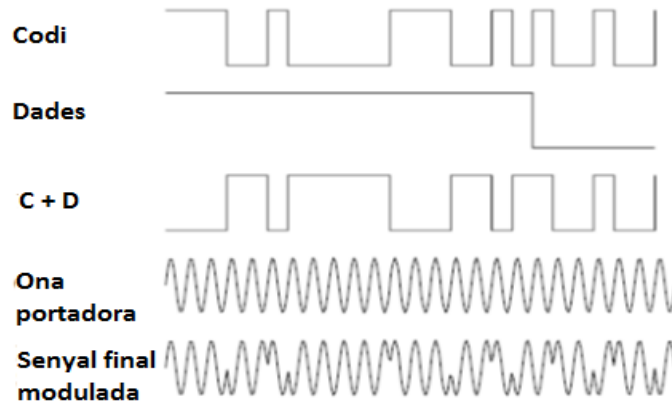


Figura 7: Efecte de la modulació BPSK en les senyals GPS.[3]

A més, s'utilitza la multiplexació per divisió de codi (CDMA¹⁸), assignant un PRN diferent a cada satèl·lit per tal de poder identificar la senyal rebuda de cada satèl·lit correlant-la amb totes les seqüències PRN existents. Veurem aquest procés amb més detall a la secció 4.

Com a síntesi del que significa eixamplar l'espectre mitjançant codis PRN i multiplexar per CDMA, veurem els beneficis que aporta a la transmissió de les senyals dels satèl·lits i com es du a terme. Com hem dit, tindrem una seqüència d'informació modulada amb BPSK que voldrem enviar i que anomenarem $d(t)$. Aquesta seqüència estarà formada per símbols amb valors de $+1$ i -1 que es repetiran 20 cops per tal de poder facilitar l'adquisició de les senyals al receptor, i tindrà un temps de bit T_b . Multiplicant aquesta seqüència $d(t)$ per un codi PRN que anomenarem $c(t)$ amb un temps de xip (T_c) molt més petit que T_b , aconseguirem aquest eixamplament i aplanament de l'espectre de la senyal transmesa tal i com es veu a la figura següent:

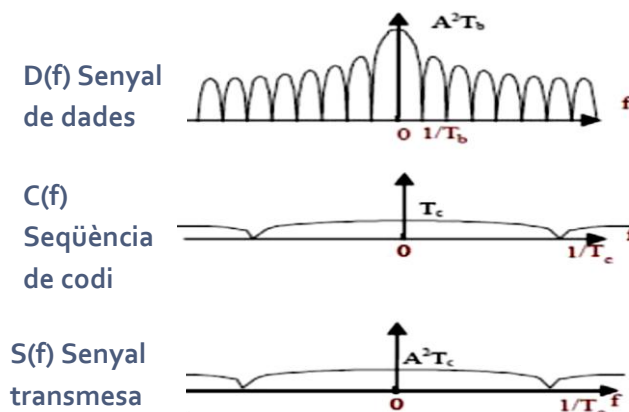


Figura 8: Espectre freqüencial de l'eixamplament de la senyal $s(t)$ [5]

¹⁸ CDMA: Code Division Multiple Access

I els principals beneficis que s'aconsegueixen amb aquest procés són: donar major robustesa per fer front a les interferències, donar major privacitat a les comunicacions, reduir la potencia de l'espectre transmès i facilitar les mesures obtingudes als receptors sobre els retards de propagació utilitzats per poder trobar els pseudorangs o pseudodistàncies.

- Els codis de soroll pseudo-aleatoris (PRN):

Els codis de soroll pseudo-aleatoris (PRN), són les seqüències binàries que utilitza cada satèl·lit per dur a terme l'eixamplament de l'espectre que hem comentat. Aquestes seqüències d'eixamplament que s'utilitzen a les senyals GPS pertanyen a la família de codis GOLD (codis descrits per Robert Gold al 1967 [6]). Aquestes seqüències són deterministes però tenen propietats semblants al soroll, és per això que s'anomenen codis PRN.

A més, el fet de que s'hagi escollit aquest tipus de codis per tal de realitzar l'eixamplament de l'espectre, és perquè aquestes seqüències, tot i no ser completament ortogonals entre si, tenen unes bones propietats de correlació. El terme correlació, fa referència a la capacitat que es té de poder mesurar la semblança entre 2 senyals determinades. En concret, els codis GOLD ofereixen 2 propietats de correlació necessàries per dur a terme el procés d'adquisició de les senyals GPS:

- a) Gairebé no existeix correlació creuada → Això significa que totes les seqüències PRN generades per cada satèl·lit seran aproximadament incorrelades les unes amb les altres. Això permetrà, que al comparar la senyal rebuda al receptor amb cadascun dels PRN existents, no trobem valor de correlació si les seqüències comparades no són les mateixes. Aquesta propietat queda descrita per la següent funció, que mostra que per dos codis de satèl·lits diferents (i,k), la correlació creuada ha de ser aproximadament zero:

$$r_{ik}(m) = \sum_{l \text{ posicions}} C^i(l)C^k(l+m) \approx 0 \text{ per qualsevol } m \quad 3-4$$

- b) Gairebé no existeix auto-correlació excepte per un retard nul → Aquesta propietat ens diu que totes les seqüències PRN seran incorrelades amb si mateixes a no ser que estiguin completament sincronitzades entre si. Aquesta característica permet poder comprovar la presència de la senyal d'un satèl·lit determinat només quan els codis que comparem són els mateixos i es troben perfectament alineats. La següent funció mostra aquest concepte per un satèl·lit k:

$$r_{kk}(m) = \sum_{\text{posicions}} C^k(l)C^k(l+m) \approx 0 \text{ per } |m| \geq 1 \quad 3-5$$

3.2 El codi P(Y):

Ja hem comentat que el codi P és l'utilitzat en serveis PPS (no civils) però ara profunditzarem una mica més en les característiques d'aquest codi. El codi P és un codi bi-fase, modulats a la freqüència de 10,23 MHz com ja hem vist, per tant, el lòbul principal del seu espectre té una amplada de 20,46 MHz (mesurat de zero a zero) [1]. La longitud d'un xip de codi és de 97,8 ns (valor obtingut de fer $1/10,23\text{MHz}$). A més, el codi està generat per dos seqüències PRN amb el mateix xip-rate, una formada per 15.345.000 xips i un període d'1,5 segons, i l'altre formada per 15.345.037 xips (37 xips de diferència). La longitud del codi generat amb aquestes 2 seqüències és de 23.017.555,5 segons, que correspon a 38 setmanes, però només s'assigna una setmana de codi per a cada satèl·lit. Obtenim per tant un total de 37 codis P diferents, dels quals, els 5 últims són d'ús reservat per a transmissions terrestres. Per últim, podem dir, que aquest codi P s'encodifica dins la seqüència Y que proporciona privacitat, i les dades de navegació que porten els codis P(Y) es troben modulades a 50 Hz.

3.3 El codi C/A:

Pel que respecta als codis C/A, com hem dit, són els utilitzats als serveis SPS, d'ús civil, per tant ens centrarem en aquest tipus de codi, dels quals veurem les principals característiques i la seva generació.

Els codis C/A també estan modulats amb 2 fases diferents però amb un xip-rate de 1,023 MHz. Per tant, en aquest cas, el lòbul principal del seu espectre té una amplada de 2,046 MHz (mesurat de zero a zero) [3]. Cada xip té una durada de 977,5 ns ($1/1,023\text{MHz}$) i un bloc de codi C/A conté un total de 1023 xips, tenint una durada total d'1ms. A més podem dir, que aquests codis tenen una seqüència molt més curta per tal d'afavorir una adquisició molt més ràpida.

Pel que fa a la seva generació, els codis C/A es formen a partir de les seqüències Gold (PRN), que ja hem introduït, per obtenir els beneficis que aquests codis ens ofereixen i que ja hem comentat. En concret, els codis C/A es generen mitjançant dos seqüències que solen anomenar-se G1 i G2 creades amb dos registres de desplaçament com es veu a la figura 9. Cadascun d'aquests codis té 10 posicions que permeten poder crear seqüències de 1023 elements.

Les dos seqüències de 1023 posicions creades per G_1 i G_2 passen per un mòdul-2 sumador que realitza l'operació OR exclusiva i genera els 1023 xips d'un codi C/A. Per aconseguir-ho, a cada període de 1023 desplaçaments, els registres es ressetegen posant-se totes les posicions a '1' per poder tornar a generar una nova seqüència.

Els polinomis que descriuen la configuració del registre G_1 i G_2 són els següents, on x^i indica la posició i-èsima dels registres de desplaçament:

$$G_1 \rightarrow f(x) = 1 + x^3 + x^{10} \quad 3-6$$

$$G_2 \rightarrow f(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} \quad 3-7$$

La forma en com es combinen les sortides de G_1 i G_2 per generar els codis Gold és la següent, com també pot veure's a la figura 9: el registre G_1 ens proporciona la seva sortida de la posició 10, i del registre G_2 s'agafen dos de les seves posicions per passar-les per un mòdul-2 sumador anomenat selecció de fase.

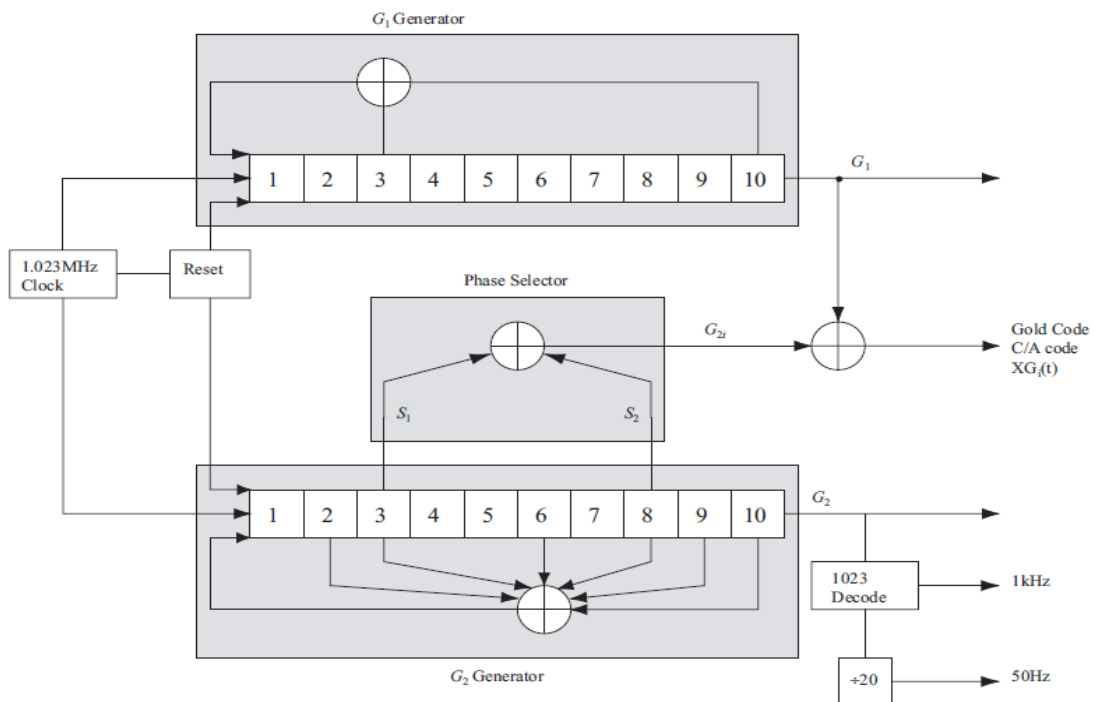


Figura 9: Generació de codi C/A a partir dels registres G_1 i G_2 . [3]

Depenent de quins dos estats s'escullin s'estarà generant un codi Gold o un altre. La combinació necessària per poder generar cada codi Gold, així com les seves 10 primeres posicions, apareixen a la següent taula estreta de [3]:

Identificador de satèl·lit	Número de seqüència PRN	Selecció de fase de codi	Xips retardats del codi	10 primers xips del codi C/A (octal)
1	1	2+6	5	1440
2	2	3+7	6	1620
3	3	4+8	7	1710
4	4	5+9	8	1744
5	5	1+9	17	1133
6	6	2+10	18	1455
7	7	1+8	139	1131
8	8	2+9	140	1454
9	9	3+10	141	1626
10	10	2+3	251	1504
11	11	3+4	252	1642
12	12	5+6	254	1750
13	13	6+7	255	1764
14	14	7+8	256	1772
15	15	8+9	257	1775
16	16	9+10	258	1776
17	17	1+4	469	1156
18	18	2+5	470	1467
19	19	3+6	471	1633
20	20	4+7	472	1715
21	21	5+8	473	1746
22	22	6+9	474	1763
23	23	1+3	509	1063
24	24	4+6	512	1706
25	25	5+7	513	1743
26	26	6+8	514	1761
27	27	7+9	515	1770
28	28	8+10	516	1774
29	29	1+6	859	1127
30	30	2+7	860	1453
31	31	3+8	861	1625
32	32	4+9	862	1712
-	33	5+10	863	1745
-	34	4+10	950	1713
-	35	1+7	947	1134
-	36	2+8	948	1456
-	37	4+10	950	1713

Taula 2: Taula amb els diferents PRN generats a partir de les diferents fases de codi escollides a G2. (33-37 reservats per altres usos)[3]

Podem trobar més informació sobre els codis Gold i el seu ús en els sistemes d'espectre eixamplat com el cas de GPS a [6] i [7].

Finalment, per acabar amb els codis C/A, veurem les propietats de correlació que hem dit que tenen gràcies a estar formats per seqüències PRN. En concret, veurem un exemple de l'autocorrelació del codi C/A d'un satèl·lit i un exemple de la correlació creuada dels codis C/A de 2 satèl·lits diferents.

Abans d'això, a la taula 3, es mostren les característiques de la correlació creuada dels codis Gold, que ens servirà per entendre les demostracions:

Nº Posicions de codi	Nº posicions dels registres de desplaçament	Nivell de correlació creuada normalitzat	Probabilitat de nivell
$P = 2^n - 1$	n= imparell	$\left[\begin{array}{l} -\frac{2^{\frac{n+1}{2}} + 1}{P} \\ -\frac{1}{P} \\ \frac{2^{\frac{n+2}{2}} - 1}{P} \end{array} \right.$	0.25
			0.5
			0.24
$P = 2^n - 1$	n =parell	$\left[\begin{array}{l} -\frac{2^{\frac{n+2}{2}} + 1}{P} \\ -\frac{1}{P} \\ \frac{2^{\frac{n+2}{2}} - 1}{P} \end{array} \right.$	0.125
			0.75
			0.125

Taula 3: Característiques de la correlació creuada de codis Gold [1]

El que ens interessa per tal de poder detectar senyals febles en presència de senyals més fortes no desitjades, és que el pic d'autocorrelació entre la senyal feble rebuda i el codi del receptor sigui major al pic de correlació creuada amb les senyals fortes no desitjades.

En el cas de que els codis usats en la modulació fossin ortogonals, la correlació creuada seria zero, però en el nostre cas, els codis Gold no són completament ortogonals per tant la correlació creuada serà aproximadament zero però no zero.

Mirant la taula, en el cas dels codis C/A, n és igual a 10 i per tant parell, i P equival a 1023. Amb aquests valors i seguint la taula, obtenim que el valor de la correlació creuada serà $-65/1023$ (un 12,5% de les vegades), $-1/1023$ (un 75% de les vegades) i $63/1023$ (un 12,5% de les vegades).

Sabent això ja podem veure els exemples que hem generat per tal de representar l'autocorrelació del codi del satèl·lit 2 i la correlació creuada d'aquest amb el satèl·lit 10:

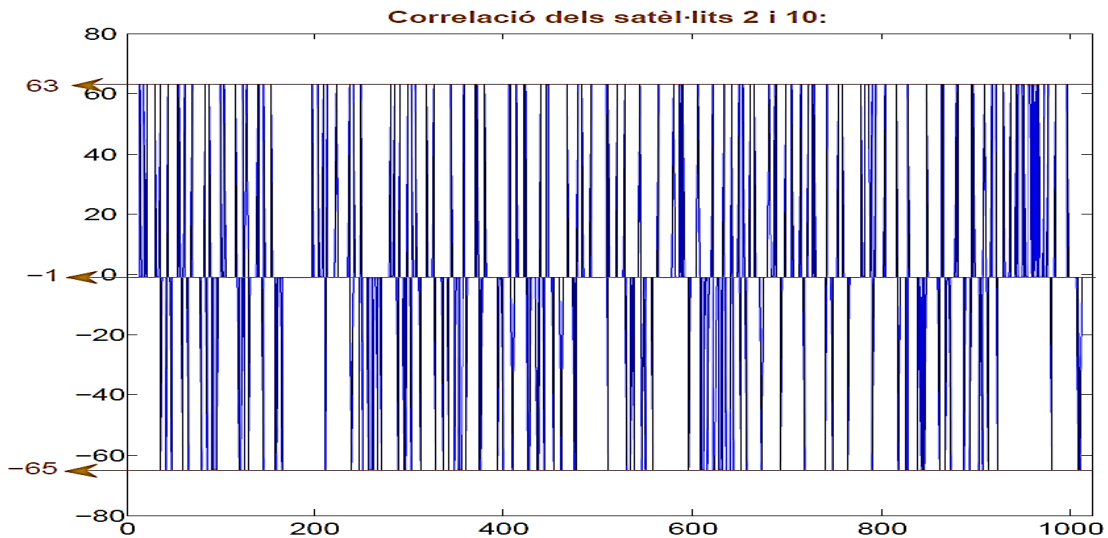


Figura 10: Correlació creuada dels satèl·lits 2 i 10 generada amb Matlab

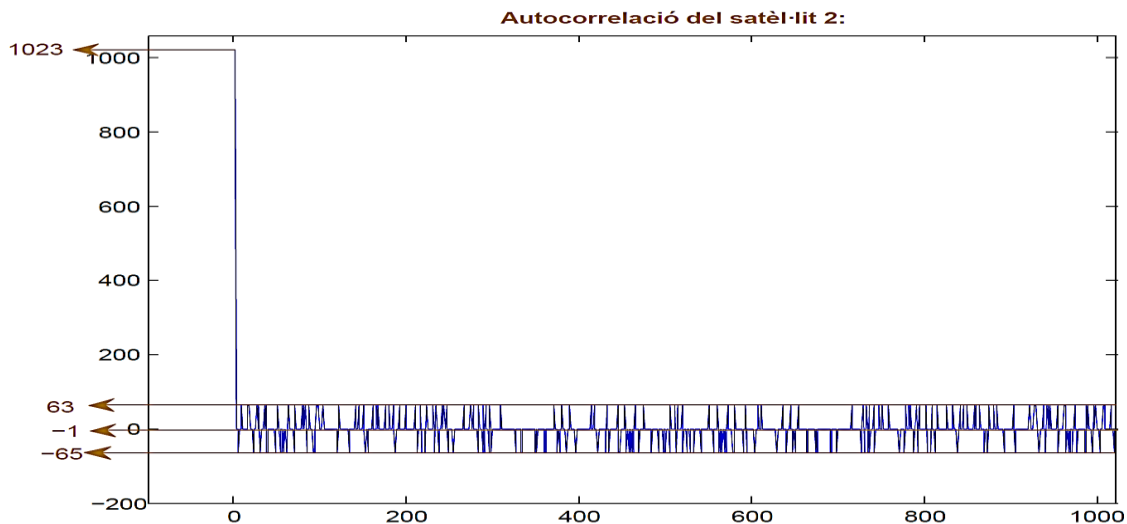


Figura 11: Auto-correlació del satèl·lit 2 generada amb Matlab

Les gràfiques anteriors han estat generades amb Matlab. Primer, s'han generat les seqüències C/A dels satèl·lits 2 i 10 a partir dels seus respectius codis Gold. Després s'ha dut a terme la correlació circular com es realitza als receptors, per tal de fer l'adquisició. Per fer-ho, s'ha calculat la FFT¹⁹ de les dues seqüències, s'ha conjugat el resultat d'una d'elles i s'han multiplicat. Seguidament, s'ha fet la IFFT²⁰ per tornar al domini temporal i s'ha graficat el resultat obtingut. Tot aquest procediment es basa en les fórmules explicades a [2], [13] i [14] que ens permeten dur a terme la correlació circular dels dos codis C/A.

¹⁹ FFT: Fast Fourier Transform, algoritme que permet calcular la transformada discreta de Fourier (DFT)

²⁰ IFFT: Inverse FFT, algoritme que calcula la transformada discreta inversa de Fourier (IDFT)

Com veiem, a les gràfiques es demostra els valors dels pics, tant del pic màxim de l'autocorrelació (1023, a la posició zero, quan no hi ha desfasament entre els codis), com als altres pics (-65, -1 i 63). Aquests valors també són presents pel cas de la correlació creuada.

3.4 Missatge de navegació:

Fins ara hem parlat de l'estructura i la formació de les senyals emeses pels satèl·lits GPS, en concret de la senyal C/A basada en codis Gold. Però ara parlarem amb més profunditat del missatge que transmeten aquestes senyals i que hem anomenat dades de navegació.

Com hem dit, el codi C/A està codificat amb una fase que canvia entre 0 i π a 1.023 MHz de freqüència. Doncs bé, els bits de navegació són també codis de tipus bi-fase però a una freqüència de 50 Hz; o dit amb unes altres paraules, les dades de navegació son transmeses a la banda L1 amb un bit rate de 50 bits per segon. Cadascun d'aquests bits té una durada de 20 ms, per tant, sabent que els codis C/A tenen una duració d'1ms, un bit de navegació conté 20 codis C/A tots amb la mateixa fase. En el cas de que es produeixi una transició de fase als bits de navegació, els dos codis C/A consecutius es diferenciarien $\pm\pi$. Com veurem, aquest concepte és important a l'adquisició de les senyals GPS.

Com es pot veure a la figura 12, 30 bits de navegació formen una paraula de navegació i 10 d'aquestes paraules formen el que s'anomena una subtrama.

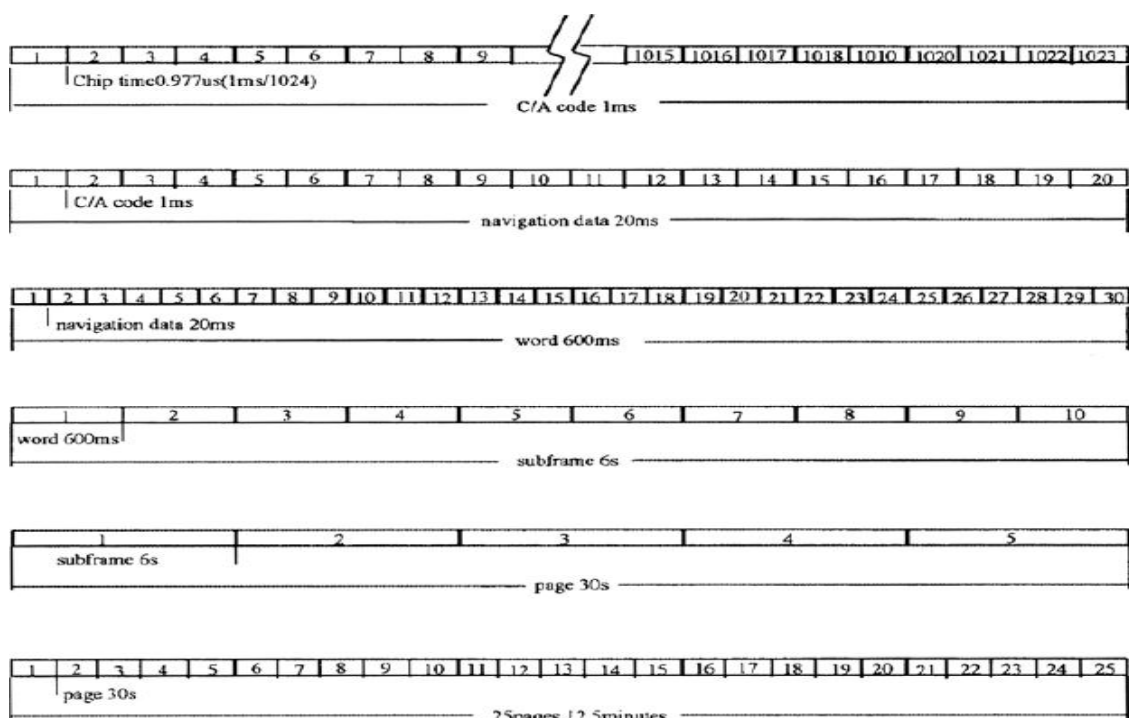


Figura 12: Format de les dades de navegació. [1]

Cinc d'aquestes subtrames de 300 bits cadascuna, s'uneixen per tal de crear el que s'anomena una pàgina (1500 bits). A més, les subtrames 1, 2 i 3 es repeteixen a cada trama, mentre que les subtrames 4 i 5 contenen una de les 25 versions diferents de mateixa estructura però diferents dades que permeten generar les 25 pàgines diferents. Amb el bit rate de 50 bps, la transmissió d'una subtrama triga 6 segons, la d'una trama 30 segons i la d'un missatge de navegació complet triga 12,5 minuts.

No entrarem molt en detall de la composició de les dades de navegació, tan sols direm que les primeres paraules d'una subtrama contenen la informació de telemetria i entrega (més conegut com telemetria (TLM) i handover (HOW)). La resta de paraules contenen la resta d'informació transmesa com la relacionada amb el rellotge dels satèl·lits, les efemèrides, que informen de totes les característiques relacionades amb l'òrbita del satèl·lit determinat, i altres dades de suport per tal de compensar errors atmosfèrics, proporcionar una adquisició més ràpida, enviar missatges de text als usuaris, etc. El lector més interessat en les característiques de tota la informació continguda a les dades de navegació trobarà molta informació al respecte a [15] i [16].

3.5 Noves senyals GPS:

Amb la modernització del sistema GPS s'han incorporat noves senyals de navegació per a la constel·lació de satèl·lits, constel·lació que també s'ha anat modernitzat amb nous satèl·lits que han substituït als satèl·lits més antics. Algunes d'aquestes senyals encara no estan del tot habilitades pel seu ús ja que s'està a l'espera de la incorporació dels nous satèl·lits.

A continuació, parlarem d'aquestes noves senyals que s'han anat incorporant a les que ja formen part del sistema GPS. Aquestes senyals es classifiquen en les 3 noves senyals d'ús civil (L2C, L5 i L1C) i una nova senyal d'ús militar (M) que es sumaran a les ja operatives C/A i P(Y) que ja hem descrit anteriorment [12].

3.5.1 Segona senyal civil (L2C):

La senyal L2C és la segona senyal per a ús civil i es va dissenyar específicament per a satisfer les necessitats comercials de GPS. En combinació amb la senyal C/A de L1, la nova senyal L2C permet corregir els errors causats per la ionosfera augmentant així la precisió en les mesures preses per un receptor GPS.

A més, L2C proporciona una adquisició més ràpida de la senyal rebuda al receptor amb una major fiabilitat i un major rang d'operació. Una altra millora que proporciona L2C és el fet de que té una potencia efectiva major, fet que comporta que es pugui rebre senyal en entorns indoors (d'interior) o amb obstacles que debilitarien molt la senyal rebuda, amb una major facilitat.

El nom, L2C fa referència a la radiofreqüència utilitzada per a transmetre la senyal: 1227 MHz (banda L2). El primer satèl·lit que va transmetre aquesta nova senyal civil, pertanyent al grup de satèl·lits GPS IIR (M), va posar-se en funcionament al 2005.

Per últim podem dir, que la senyal de difusió L2C consisteix en un missatge per defecte (o missatge del tipus zero), que no proporciona totes les dades de navegació. L2C es mantindrà en aquest estat fins que el Segment de Control Avançat de GPS (OCX), un segment de control per les noves senyals GPS, estigui 100% operatiu.

3.5.2 Tercera senyal civil (L5):

L5 és la tercera senyal GPS destinada a ús civil i es va dissenyar per complir amb els requisits exigits pel transport, serveis de seguretat i altres aplicacions d'alt rendiment. Aquesta nova senyal es caracteritza per emetre en una banda de radiofreqüències reservada exclusivament pels serveis de seguretat en aviació. A més, compta amb una major potencia, un major ample de banda i un disseny de les senyals molt més avançat.

En el futur, la intenció és que totes les aeronaus utilitzin la senyal L5 en combinació amb C/A per tal de millorar la precisió de les mesures preses (corregint, per exemple, errors ionosfèrics) i obtenint una major robustesa mitjançant la redundància d'ambdues senyals

A més d'augmentar la seguretat, l'ús de L5 té la intenció d' augmentar la capacitat i eficiència del combustible a l'espai aeri, transport ferroviari, transport marítim i per carretera. Però a banda del transport, L5 proporcionarà, com hem dit, una major robustesa a usuaris de tot el món. Per aconseguir-ho, L5, en combinació amb C/A i L2C, utilitza la tècnica anomenada trilingüisme. El trilingüisme consisteix en utilitzar 3 freqüències diferents i proporciona una precisió inferior a 1 metre sense l'ús de sistemes d'augmentació i operacions de llarg abast amb sistemes d'augmentació.

El nom de L₅ fa referència a que s'emet en la banda de freqüències L₅, als 1176 MHz. El primer satèl·lit amb un transmissor L₅ complet es va posar en òrbita al 2010, però l'emissió L₅ tampoc inclourà un missatge de navegació complet fins a que l'OCX sigui operatiu.

3.5.3 Quarta senyal civil (L_{1C}):

La quarta senyal de GPS civil, va ser dissenyada per permetre la interoperabilitat entre el sistema GPS i altres sistemes internacionals per satèl·lit com GALILEU. També s'està produint que altres proveïdors de navegació per satèl·lit com Quasi-Zenith al Japó, l'IRNSS de la Índia o el sistema xinès, estan adoptant la senyal L_{1C} com a estàndard d'interoperabilitat internacional.

L_{1C} compta amb una modulació MBOC (Multiplexed binary offset carrier), una modulació també utilitzada al sistema Galileu, que consisteix en multiplicar la senyal per una ona rectangular portadora amb una freqüència igual o superior al xip rate de la senyal inicial. Aquesta modulació permet la cooperació internacional alhora que permet protegir els interessos de seguretat nacional dels EEUU.

També es va dissenyar amb la intenció de millorar la recepció GPS a telèfons mòbils en ciutats i altres entorns complicats. El nom de L_{1C} es refereix a la freqüència de radio utilitzada per la senyal (1575 MHz).

3.5.4 Nova senyal militar (M):

El codi M fa referència a la nova senyal GPS dissenyada exclusivament per a ús militar i té intenció de substituir, o recolzar l'actual senyal militar P(Y). En el temps de transició entre l'actual constel·lació de satèl·lits GPS fins a tenir tots els nous satèl·lits en òrbita, els receptors militars podran combinar la recepció de les senyals P(Y), M i C/A en els receptors coneguts com YMCA.

Els principals beneficis que aportarà la nova senyal M són: una major seguretat alhora que permetrà transmetre amb potències més altes sense que s'interfereixi a les senyals civils. A més, el millor disseny d'aquesta nova senyal també permetrà una major robustesa en les transmissions i una adquisició i desmodulació de les dades més ràpides.

Per tal d'aconseguir aquests beneficis, el nou codi M utilitza, igual que L_{1C}, una modulació BOC (Binary Offset Carrier). En concret, la senyal M està modulada a una freqüència de

portadora de 10·1,023MHz mentre que el xip-rate amb el que es genera el codi M equival a 5·1,023 MHz.

3.5.5 Síntesi de les noves senyals GPS:

Com a resum d'aquest apartat, a la taula següent podem veure algunes de les principals característiques que diferenciarien les noves senyals GPS de les que ja s'utilitzen en l'actualitat. A més, a la figura 13, podem veure una representació de l'espectre freqüencial d'aquestes senyals. A la part superior veiem l'espectre corresponent a les senyals P(Y) i C/A a les seves dues bandes freqüencials de transmissió (L1 i L2) i a la part inferior veiem els espectres de les noves senyals que hem comentat.

Senyal	Freqüència central (MHz)	Tipus de Modulació	Rate de les dades (bps)	Ample de banda del lòbul principal (MHz)
C/A a L1	1.575,42	BPSK	50	2,046
P(Y) a L1	1.575,42	BPSK	50	20,46
P(Y) a L2	1.227,6	BPSK	50	20,46
L2C	1.227,6	BPSK	25	2,046
L5	1.176,45	BPSK	50	20,46
L1C	1.575,42	BOC	N/A	4,092
M a L1	1.575,42	BOC	N/A	30,69
M a L2	1.227,6	BOC	N/A	30,69

Taula 4: Característiques generals de les senyals GPS

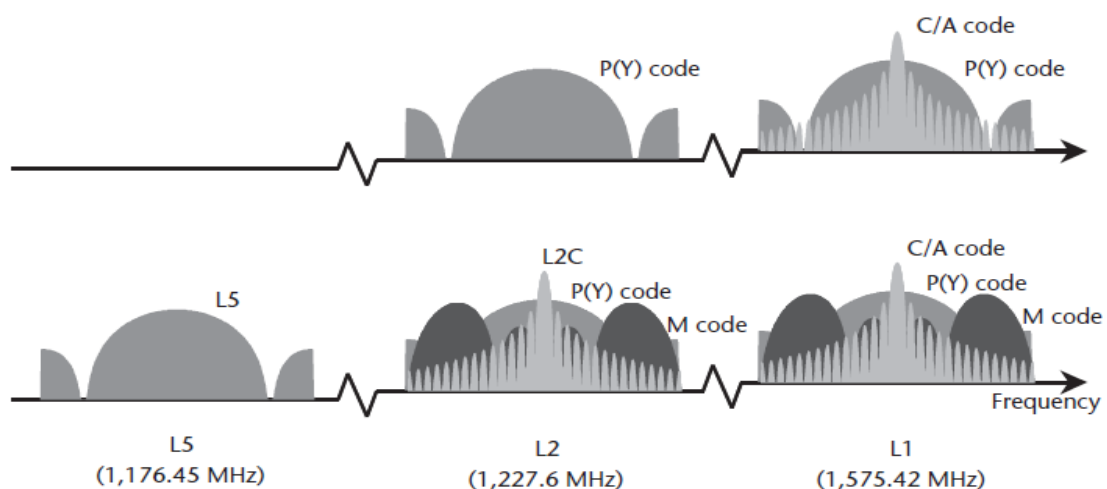


Figura 13: Espectres de les senyals GPS actuals(superior) i modernes(inferior).[4]

4. EL RECEPTOR GPS:

Un cop comentats tots els principals aspectes de la tecnologia GPS des d'un punt de vista general (història, segments del sistema, funcionament, senyals utilitzades...), ara ens centrarem en la part responsable de dur a terme l'adquisició de les senyals enviades pels satèl·lits per tal de processar els missatges de navegació i calcular la posició de l'usuari. Aquesta funció és realitzada pel receptor GPS. Recordem, que l'objecte d'estudi del present projecte consisteix en estudiar l'estadística que s'obté a la sortida dels blocs de correlació, com a un dels passos per l'adquisició de les senyals. I, per tant, ens centrarem en el funcionament del receptor, que és l'element on es realitza aquesta funció.

El primer a tenir en compte és que un receptor GPS està format per 4 parts amb una finalitat diferent. La primera part és la que s'encarrega de realitzar l'adquisició de les senyals rebudes pel receptor, provinents dels diferents satèl·lits que es troben emetent en aquell moment i sobre aquell punt de la superfície terrestre. En concret, al rebre la senyal d'un satèl·lit, el receptor ha de determinar dos paràmetres: la freqüència de la senyal rebuda (com veurem, diferirà de la freqüència amb la que es va transmetre la senyal) i el desfasament dels codis, que determinarà on comença un codi C/A.

En segon lloc, el receptor realitza la funció de tracking. L'objectiu del bloc de tracking és utilitzar els valors de freqüència i desfasament de codi obtinguts al bloc d'adquisició, i realitzar el seguiment de com aquests varien amb el temps. Aquesta etapa de tracking es compon de dos parts: tracking del codi i tracking de la freqüència i fase de l'ona portadora.

Un cop les senyals han estat correctament adquirides i s'ha fet el procés de tracking, es passa al bloc d'extracció de les dades de navegació. En aquesta etapa, pot remoure's el codi C/A i l'ona portadora de la senyal per quedar-nos només amb els bits de dades. Explicat d'una forma molt bàsica, el que es realitza és integrar els bits de navegació (20 ms) durant 30 segons per tal de trobar l'inici d'una subtrama i així determinar quan va ser transmesa la dada pel satèl·lit. Un cop trobat aquest temps de transmissió, es poden descodificar les dades contingudes a les efemèrides que seran utilitzades per calcular la posició del satèl·lit en el moment en que va transmetre la senyal. Amb aquests paràmetres coneixerem tant el temps de transmissió com el temps en que es va rebre el missatge al receptor i ja es podran computar els pseudorangs o pseudodistàncies.

Finalment, es passa a l'etapa del càlcul de la posició de l'usuari a partir de les pseudodistàncies i les posicions dels satèl·lits. La següent figura mostra el diagrama de blocs simplificat de les diferents parts que realitzen les principals tasques que es produeixen a un receptor GPS quan es rep la senyal d'un satèl·lit determinat:

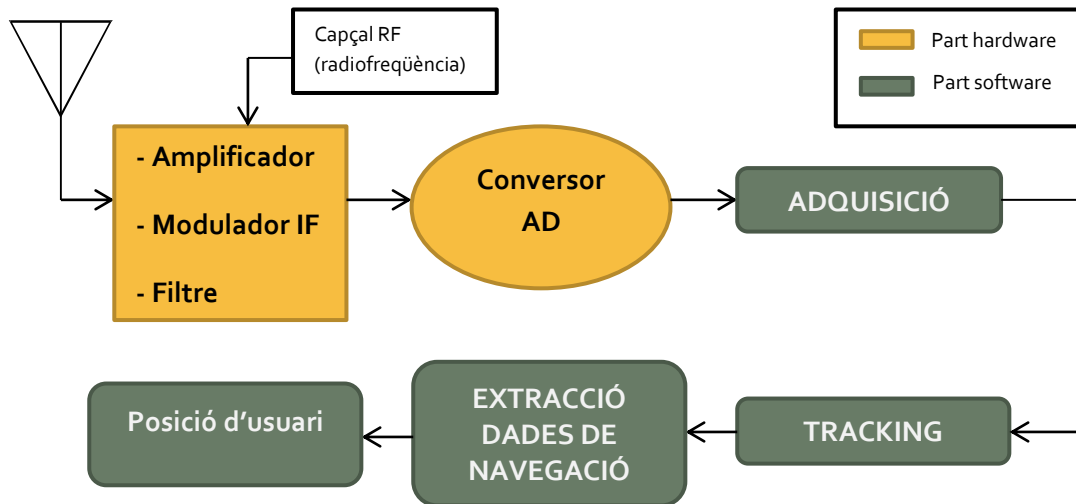


Figura 14: Diagrama de blocs d'un receptor GPS (basada en [4])

Fins aquí, hem vist l'objectiu principal de cadascuna de les parts en les que es divideix un receptor GPS. Com el projecte es centrarà en estudiar la sortida de les dades obtingudes al bloc d'adquisició, passarem a analitzar en més profunditat aquesta part. En cas de que es vulgui obtenir més informació sobre les altres operacions realitzades al receptor, es pot consultar [1] o [4].

4.1 Adquisició de senyals GPS:

Com ja hem esmentat, l'objectiu de l'etapa d'adquisició d'un receptor GPS és detectar la presència de les senyals dels satèl·lits que es troben visibles en aquell moment i obtenir els valors de freqüència portadora i desfasament de codi d'aquestes senyals, necessaris per a la posterior etapa de tracking. El primer que hem de tenir en compte, és que la senyal rebuda per un receptor GPS en un moment i punt geogràfic determinat, pot estar formada per la contribució de les senyals emeses per més d'un satèl·lit diferent.

Per aquesta raó, resulten molt importants les característiques de correlació dels codis C/A que ja hem explicat a l'apartat 3.3. Aquestes propietats ens permeten poder detectar la presència de la senyal del satèl·lit GPS 'x', correlant el codi C/A d'aquest, amb la senyal rebuda. Si la senyal del satèl·lit 'x' es troba present dins la senyal rebuda, i la correlació es realitza amb els

codis correctament alineats, obtindrem un pic de correlació molt més alt que si no estiguessin alineats o la senyal 'x' no estigués present.

Un cas especial és el que s'anomena A-GPS (Assisted-GPS). Aquesta és una tècnica utilitzada per a dotar d'una major eficiència i rapidesa a l'etapa d'adquisició i consisteix en enviar als receptors una informació addicional d'assistència. Amb aquesta informació, el receptor podrà saber quins satèl·lits estaran operatius en aquella zona i moment determinats. D'aquesta manera, a l'etapa d'adquisició, només s'haurà de correlar la senyal rebuda amb els codis d'aquests satèl·lits en comptes de amb cadascun de tots els satèl·lits que formen la constel·lació GPS. Podem trobar una ampla explicació del funcionament i de les millores que comporta l'A-GPS a [9].

Un cop trobada la presència de la senyal d'un satèl·lit determinat, tindrem que l'inici del codi C/A podrà trobar-se en qualsevol punt i la freqüència portadora rebuda no correspondrà amb la freqüència portadora amb la que va ser emesa la senyal a causa de la desviació causada per l'efecte Doppler. Abans d'entrar a descriure les diferents maneres de realitzar l'adquisició de senyals GPS per trobar aquests dos valors, descriurem què és i com afecta l'efecte Doppler en la freqüència de la senyal rebuda al receptor GPS.

- Desviació de freqüència per efecte Doppler:

Coneixem com efecte Doppler, l'aparent canvi de freqüència que pateix una ona a causa del moviment relatiu entre la font emissora d'aquesta i el receptor.

En el cas de les transmissions GPS, la freqüència amb la que els satèl·lits transmeten les senyals, es veu alterada a causa d'aquesta desviació Doppler, en aquest cas, causada pel moviment relatiu entre el satèl·lit i el receptor. Aquesta desviació de freqüència afecta tant l'etapa d'adquisició com la de tracking, i varia en funció de les velocitats de receptor i satèl·lit.

Per exemple, pel cas de receptors que es trobin immòbils, el valor màxim de desviació de freqüència causada per l'efecte Doppler equival a ± 5 kHz, mentre que per un receptor que es mogui a una velocitat molt elevada s'assumeix una desviació màxima de ± 10 kHz.

Existeixen diferents formes de realitzar l'adquisició de senyals GPS i de trobar els valors de la freqüència portadora i d'inici del codi, però a continuació es mostra el diagrama de blocs d'una adquisició GPS convencional també anomenada Adquisició per cerca en sèrie:

4.2 Adquisició per cerca en sèrie:

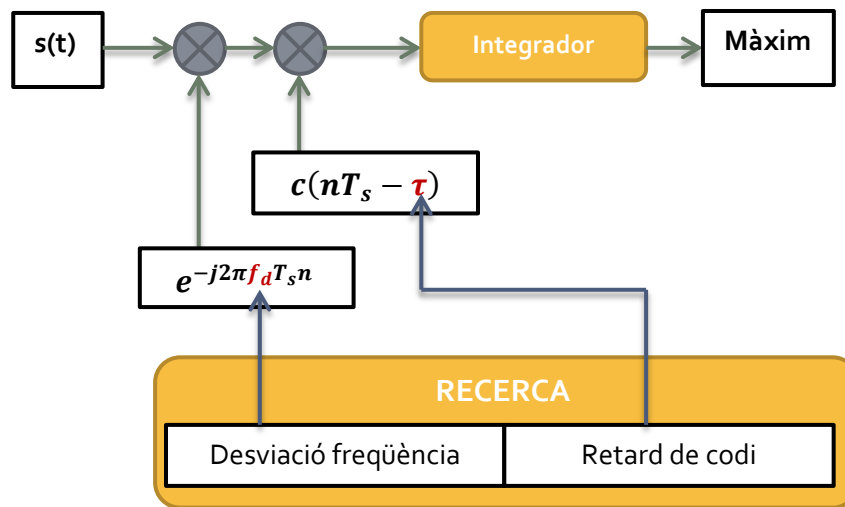


Figura 15: Diagrama de blocs d'adquisició per cerca en sèrie (basada en [3])

La senyal $s(t)$, la podem expressar com es veu a l'equació 4-1, en funció del que ja hem comentat sobre les característiques d'una senyal GPS amb codi C/A. Aquesta senyal, es troba mostrejada amb un període de mostreig T_s determinat i arriba amb una freqüència portadora igual a la freqüència de la banda $L1 \pm$ la desviació causada per l'efecte Doppler (tenint en compte que la freqüència a l'entrada del bloc d'adquisició a passat per una conversió a una freqüència intermitja IF).

Així que, per una banda, es genera una senyal portadora local que s'utilitzarà per remoure la portadora multiplicant-la per la senyal rebuda. I per aconseguir-ho, s'haurà de generar aquesta portadora local sobre un rang de freqüències de la freqüència $IF \pm 10$ kHz (desviació Doppler màxima en el pitjor dels casos), per tal de cobrir tot el rang freqüencial dins del qual podem trobar la freqüència portadora rebuda. El que realment s'acostuma a realitzar en la majoria dels casos, és buscar dins d'aquest rang de 20kHz, en salts d'uns 500 Hz, considerant que la freqüència portadora trobada no serà exactament la mateixa sino un valor aproximat.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \sum_{i=1}^{20} C(t - iT_c - nT_b - \tau) e^{j(2\pi(f_c + f_d) + \varphi)} + w(t) \quad 4-1$$

On D_n correspon al valor del bit de navegació (+1 o -1), $C(t)$ és el codi C/A del satèl·lit adquirit, T_c és el temps de codi C/A (1 ms) i T_b el temps de bit (20 ms). La freqüència portadora de la senyal correspon a $f_c + f_d$ on f_d és la desviació Doppler, $w(t)$ correspon al soroll blanc i gaussià (AWGN) afegit al receptor i τ és el retard que pateixen els codis C/A quan es reben al receptor.

Un cop trobada aquesta freqüència i remoguda la senyal portadora, s'ha de trobar l'inici del codi. Per fer-ho, es genera una rèplica local del codi del satèl·lit que s'està adquirint. Seguidament, es multiplica la senyal rebuda per aquest codi però desplaçant-lo un valor τ . Es realitzarà aquesta operació per a tots els possibles desplaçaments entre el codi local i la senyal rebuda. Aquests productes s'integraran durant N períodes corresponents a la longitud de la senyal processada. Després de tot aquest procés, es buscarà el valor màxim de totes les combinacions entre desviació Doppler i desfasament de codi, i serà aquest valor màxim el que es compararà amb un llindar (threshold) per tal de determinar si la senyal que es vol adquirir està realment present o si tan sols es tracta de soroll.

Com veiem, al mètode d'adquisició per cerca en sèrie, es realitza un gran número de combinacions entre tots els valors de freqüència portadora i els desfasaments de codi. Per tant, tot i ser un mètode amb una implementació relativament senzilla, és un algoritme amb uns temps de computació bastant elevats. Especialment en el cas d'adquirir senyals febles, el temps d'adquisició pot ser excessiu. Si ho valorem de forma quantitativa, en el cas de buscar entre els 20kHz de desviació Doppler en salts de 500Hz i sobre els 1023 desfasaments de codi diferents tenim:

$$1023 \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{10000}{500} \right) + 1 \right) = 1023 \cdot 41 = 41943 \text{ combinacions possibles} \quad 4-2$$

4.3 Adquisició per cerca de freqüència en paral·lel:

A causa d'aquest excessiu consum de temps del mètode anterior, sovint s'utilitza un algoritme diferent en el qual es fixa un dels dos paràmetres per tal de no haver de buscar entre totes les possibles combinacions. Aquest és el cas de l'adquisició per cerca de freqüència en paral·lel, on s'utilitza la transformada de Fourier per passar del domini temporal al domini freqüencial. A la figura 16 podem veure com queda el diagrama de blocs d'aquest nou algoritme.

En aquest cas, la senyal rebuda $s(t)$, de nou, torna a multiplicar-se pel codi de referència del satèl·lit determinat, desfasant-lo entre els 1023 possibles desfasaments. Seguidament, s'aplica la transformada de Fourier a aquesta senyal mitjançant la DFT (Transformada Discreta de Fourier) o FFT (Fast Fourier Transform, més ràpida però requereix que la senyal estigui en base-2). D'aquesta forma, només quan el codi PRN de referència es trobi alineat amb la senyal, el resultat obtingut serà una ona continua i s'obtindrà un sobrepic localitzat a la

frequència portadora més la desviació Doppler. A més, el pic es trobarà al mateix índex freqüencial de la senyal continua i també a la freqüència de la senyal portadora.

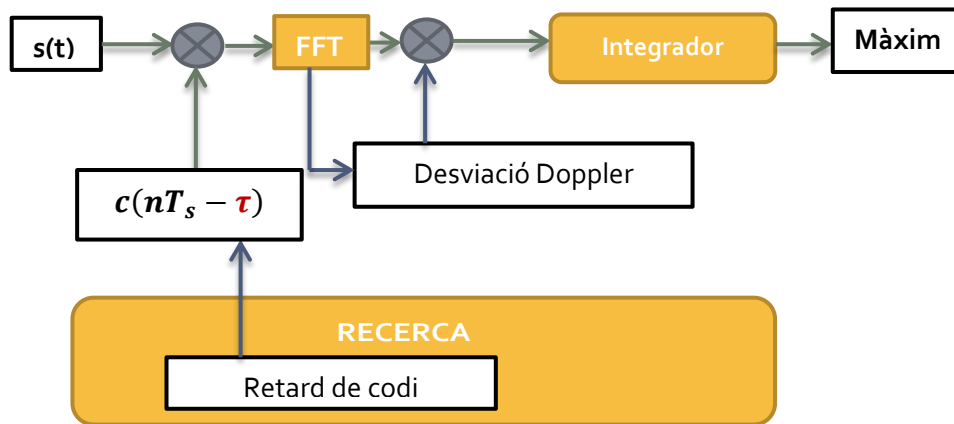


Figura 16: Diagrama de blocs d'adquisició per cerca de freqüència en paral·lel (esquema basat al que apareix a [3])

Depenent de la implementació de la transformació a domini freqüencial, amb aquest mètode poden aconseguir-se adquisicions molt més ràpides que amb el cas anterior.

4.4 Adquisició per cerca de fase de codi en paral·lel:

Per últim, existeix un tercer algoritme d'adquisició que es basa en el fet que, com hem vist, la quantitat de desfasaments de codi que existeixen és considerablement superior a la dels salts en freqüència (1023 vs 41 en el cas de fer salts de 500 Hz). Per aquesta raó, el que es pot fer és paral·lelitzar la cerca de la fase de codi en comptes de la de la freqüència.

La base per implementar aquest nou mètode la trobem a la correlació creuada circular, que es realitzarà entre la senyal d'entrada i el codi PRN de referència. S'ha de tenir en compte que en aquest cas, no s'haurà de desfasar el codi de referència com en els algoritmes anteriors. A la figura 17 tenim el diagrama de blocs que descriu aquest mètode.

Podem trobar l'explicació a com implementar la correlació circular a partir de la transformada de Fourier de les senyals a [1] i [13], tot i que l'algoritme es basa en les equacions 4-3, 4-4 i 4-5.

Primer, veiem la transformada discreta de Fourier de dos seqüències $x(n)$ i $y(n)$, totes dues amb una longitud de N mostres, que hem anomenat $X(k)$ i $Y(k)$ respectivament. A continuació tenim l'equació $z(n)$, que representa la correlació circular creuada entre les dues seqüències $x(n)$ i $y(n)$. Finalment, es demostra com la transformada discreta de Fourier d'aquesta correlació circular, correspon amb el producte de $X(k)$ conjugada amb $Y(k)$

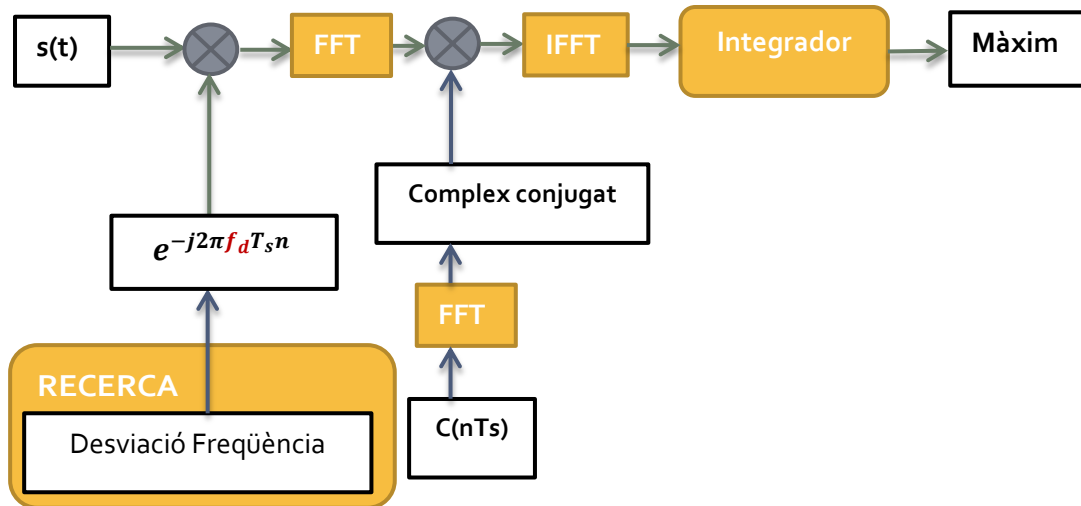


Figura 17: Diagrama de blocs d'adquisició per cerca de fase de codi en paral·lel (esquema basat al que apareix a [3])

$$FFT \rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad i \quad Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \quad 4-3$$

$$Correlació\ circular \rightarrow z(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(m+n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(-m)y(m-n) \quad 4-4$$

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(-m)y(m-n)e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-\frac{j2\pi km}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y(m+n)e^{-\frac{j2\pi k(m+n)}{N}} = X^*(k)Y(k) \quad 4-5$$

Com a conclusió, podem dir que aquest últim mètode és el que pot proporcionar una adquisició molt més ràpida en comparació amb els altres tres, tot i que també és el que comporta una complexitat d'implementació més gran. A la següent taula podem veure una comparativa del temps d'execució entre els 3 algorismes, on també podem veure el número de repeticions que implica cada algorisme i una qualificació de la complexitat d'implementació de cadascun. Els càlculs per a aquesta comparativa són extrets de [3] i es van realitzar amb MATLAB i amb un PC Pentium 4 amb 2,8 GHz de rellotge:

Algorisme	Temps d'execució	Repeticions	Complexitat
Cerca en sèrie	87 segons	41943	Baixa
Cerca paral·lela en freqüència	10 segons	1023	Mitja
Cerca paral·lela en fase de codi	1 segons	41	Alta

Taula 5: Comparativa entre els temps d'execució dels diferents algorismes d'adquisició[3]

4.5 Mida de les dades per adquisició:

Com acabem de veure, existeixen diferents mètodes per tal de dur a terme l'adquisició a GPS i cadascun amb unes característiques de temps d'execució i complexitat d'implementació diferents. A més del tipus d'algorisme utilitzat, un altre paràmetre que es pot escollir quan es realitza l'adquisició de senyals GPS és la mida de les dades utilitzades per realitzar-la.

Tot el que hem comentat fins ara, ho podem entendre com la forma d'adquirir un codi C/A rebut sencer, és a dir, 1 ms de senyal. Gràcies a les característiques dels codis C/A ja comentades, en realitzar qualsevol dels algorismes anteriors sobre un sol codi, hauríem d'obtenir un pic de correlació gran per a un valor de freqüència i de desfasament de codi determinat, en comparació a la resta de pics per a combinacions de desfasament de codi i freqüència diferents. Però hem de tenir en compte, que això no sempre serà així de senzill.

Quan la senyal arriba al receptor, se li afegeix soroll AWGN (Additive White Gaussian Noise). La senyal provinent del satèl·lit determinat, juntament amb el soroll ($w(t)$), passa pel correlador, i a la sortida, continuarem tenint contribució de soroll. Aquest soroll ja no serà blanc però sí que continuarà tenint una distribució gaussiana de mitjana zero. Aquest fet, pot comportar, que ara, el pic de correlació centrat a la freqüència i desfasament de codi de la senyal rebuda, ja no sigui apreciable perquè els pics corresponents al soroll l'emascaren. Aquest seria el cas que es produiria quan la senyal rebuda és feble, i en aquest cas, no seria viable realitzar l'adquisició només sobre 1ms de dades.

A les figures 18, 19 i 20 podem apreciar aquest problema. Hem simulat amb Matlab la senyal que veuríem a l'entrada del bloc d'adquisició amb la contribució del soroll AWGN. En els tres casos estem comprovant si la senyal provinent del satèl·lit 19 es troba present a la senyal rebuda.

En el primer cas (figura 18), la senyal rebuda té una C/N_0 ²¹ de 45 dBHz, i podem veure com obtenim un pic de correlació gran centrat a la freqüència portadora de la senyal i amb un desfasament de codi determinat.

²¹ C/N_0 : Carrier-to-noise ratio, Relació portadora-soroll. Equival a la relació senyal-soroll (SNR) referenciada a 1Hz d'ample de banda. Usualment s'expressa en dBHz.

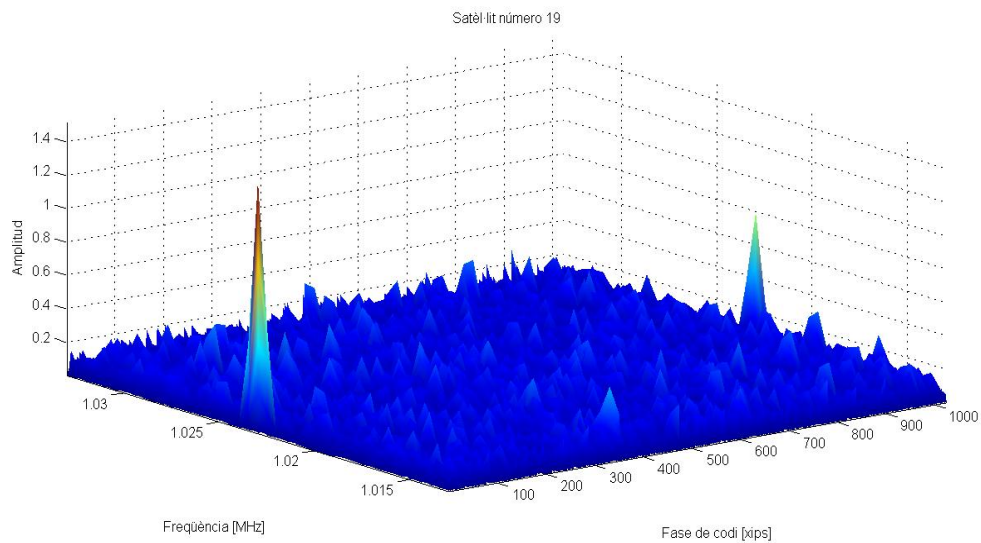


Figura 18: Pics de correlació d'1 ms, PRN 19 amb C/No=45 dBHz

En canvi, en el segon cas (figura 19), tot i que el codi del satèl·lit 19 sí es troba present, la senyal rebuda és tan feble (C/No de 15 dBHz), que no apreciem el pic de correlació màxim com el primer cas. Si comparem amb el tercer cas (figura 20), on simulem el fet de que el codi del satèl·lit 19 no es troba present a la senyal rebuda, veiem com succeeix el mateix fet: no podem diferenciar entre pics de soroll i pic de senyal.

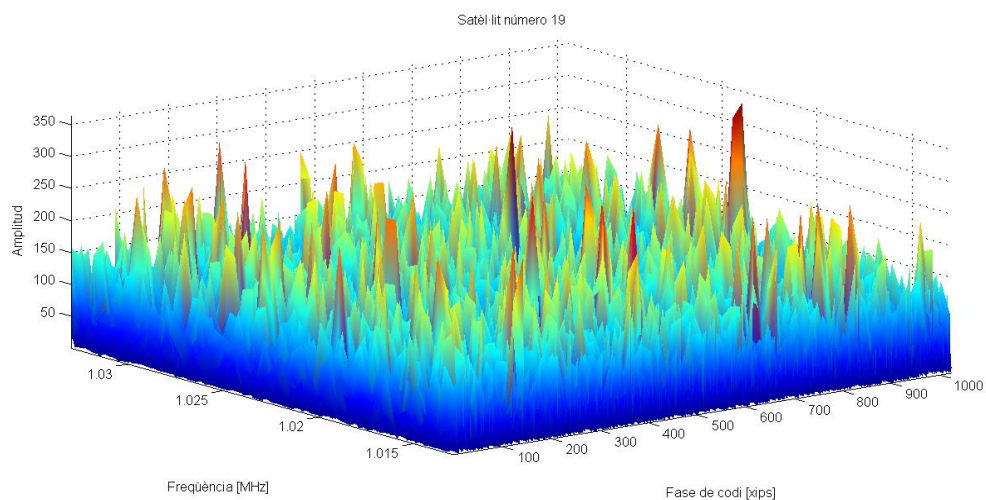


Figura 19: Pics de correlació d'1 ms, PRN 19 amb C/No=15 dBHz

Com veiem, 1 únic ms de senyal pot no ser suficient per tal de realitzar l'adquisició d'una senyal GPS. Per solucionar aquest problema es sol realitzar el que es coneix com adquisició per integració coherent + integració no coherent.

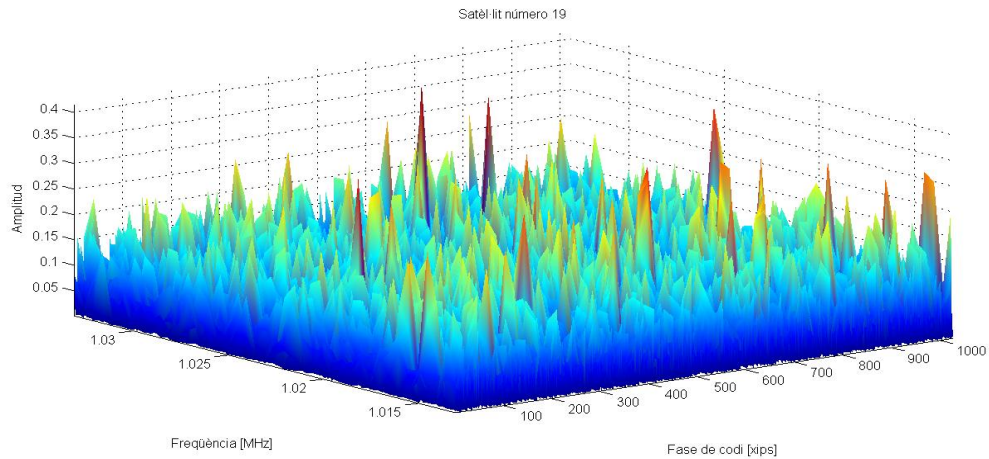


Figura 20: Pics de correlació d'1 ms, PRN 19 sense presència de senyal

- Integració coherent / Integració no coherent:

La integració coherent consisteix, bàsicament, en sumar la sortida de diferents correlacions per tal d'eliminar part del soroll de cadascuna (gràcies al fet que el soroll té distribució amb mitjana zero), i aconseguir que el nivell de senyal respecte el soroll augmenti. D'aquesta manera, podrà detectar-se més fàcilment el pic de correlació centrat al valor de freqüència i de desfasament de codi correctes.

A mode d'exemple tenim les gràfiques següents. El que s'ha fet és correlar cadascun dels 20 ms que formen un mateix bit de navegació per separat. A la figura 21 podem veure la gràfica dels pics de correlació al correlar un d'aquests blocs d'1 ms. A continuació hem sumat els 20 pics de correlació, hem realitzat el mòdul al quadrat i hem graficat el resultat, com es veu a la figura 22.

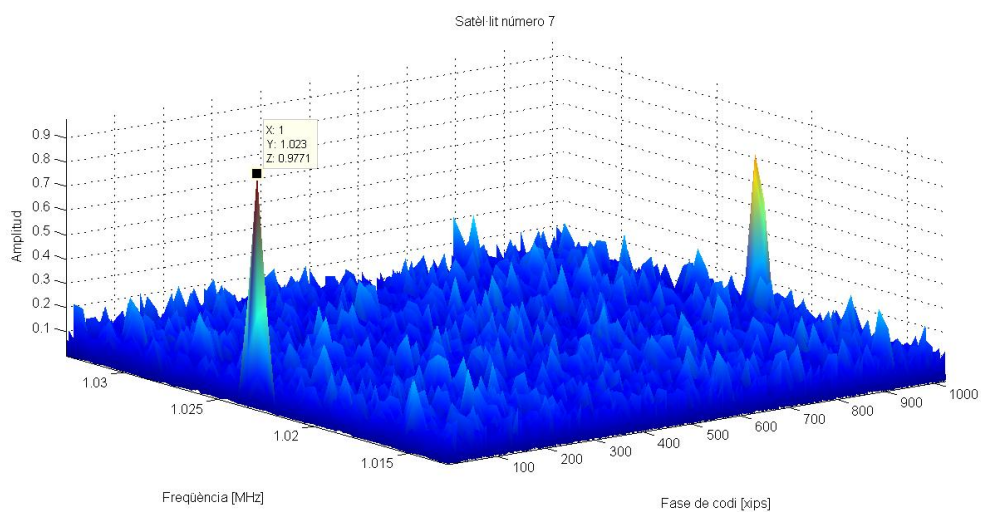


Figura 21: Valor del pic màxim al correlar 1 ms de senyal del satèl·lit 7

En concret, en el cas de correlar 1 únic ms de senyal, el pic màxim té un valor proper al número de mostres d'un codi C/A (valdria exactament el número de mostres si no hi hagués soroll). No obstant, en el nostre exemple, normalitzem aquest valor (dividint pel número de mostres d'1 ms de senyal) abans de fer el mòdul i elevar al quadrat, així que el pic màxim valdrà aproximadament $1 (1^2)$.

Ara, al sumar 20 d'aquests pics de correlació, el pic màxim passa a valer aproximadament 400 (20^2). Com podem veure, la distància entre el pic màxim i la resta de pics (de soroll) ha crescut.

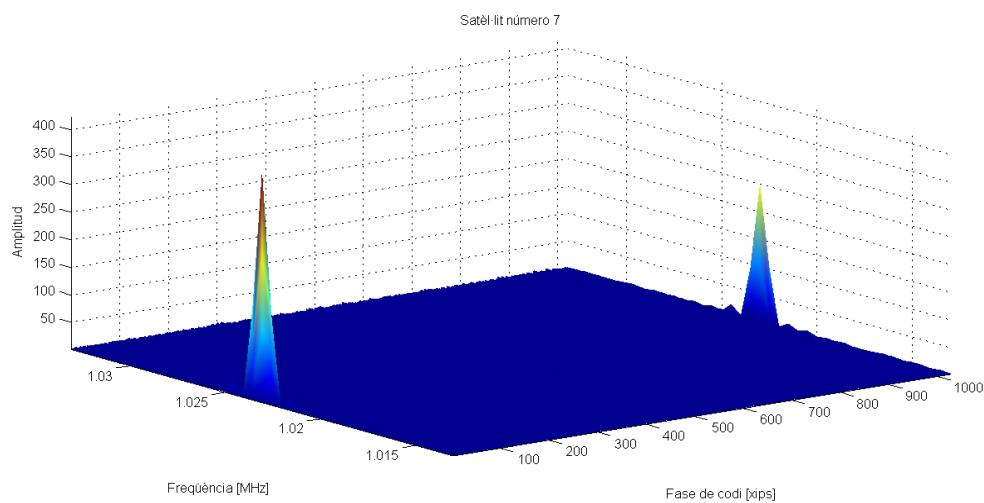


Figura 22: Correlació coherent de 20 ms del satèl·lit 7 per C/No=45 dBHz

A partir d'aquí, podríem pensar en realitzar integracions coherents amb blocs molt més grans ja que a mida que el número de mostres correlades augmenta, més gran es farà la relació entre el pic màxim i el soroll. Ara bé, el fet de que els bits de navegació estiguin formats per 20 codis C/A d'1ms limita a que sigui beneficiós fer integracions coherents de seqüències més grans.

Per aquesta raó, entra en joc la integració no-coherent de diverses integracions coherents. Simplement, consisteix en integrar coherentment seqüències de 20 o menys ms i acumular aquestes integracions durant un número determinat de blocs. La mida d'aquestes integracions no coherents també estarà limitada a aspectes de temps de computació entre altres motius.

A la figura 23 es pot observar com queda el diagrama de blocs d'aquest mètode d'adquisició que combina la integració coherent amb integració no-coherent:

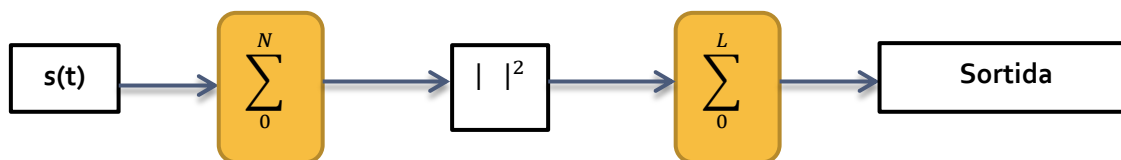


Figura 23: Diagrama de blocs integració coherent/no-coherent

Però, no només intervé l'existència de soroll alhora d'escollir la mida de les dades adquirides sinó que contribueixen altres factors:

- En primer lloc, s'ha de considerar l'efecte dels bits de navegació. Com ja hem explicat, les senyals GPS estan formades per dades de navegació formades per bits. Cadascun d'aquests bits està format per 20 codis C/A i poden tenir signe positiu (+1) o negatiu (-1). Si es dona una transició de signe durant el període d'adquisició, ens afectarà al valor dels pics de correlació.

Aquest efecte l'analitzarem en més profunditat més endavant, però ara podem quedar-nos amb la idea de que per garantir l'òptim funcionament dels algorismes d'adquisició, hem d'assegurar que no es produeix una transició en la seqüència de dades analitzada. Si per exemple, s'utilitzen 10 ms de dades per adquirir, podem tenir una transició de signe amb una certa probabilitat, però si dos seqüències de 10 ms consecutives són utilitzades per adquisició, llavors sabem amb exactitud que com a mínim una d'elles no tindrà cap transició de signe.

- Un segon factor a tenir en compte, és la probabilitat de tenir una adquisició eficient. Això va relacionat amb el que hem comentat sobre el soroll i les senyals febles, i per tant, hem de saber que la probabilitat de poder detectar els paràmetres d'un satèl·lit creix a mida que creix la quantitat de dades analitzades.
- I un tercer factor, en contraposició al cas anterior, seria els temps d'execució dels algorismes utilitzats. Les adquisicions són més lentes a mida que les seqüències adquirides són majors.

5. DETECCIÓ DE LES SENYALS:

5.1 Introducció:

Fins a aquest punt, hem explicat en que es basa l'adquisició de les senyals GPS quan aquestes arriben a un receptor, i hem analitzat els principals mètodes que s'utilitzen per a dur-la a terme. En aquest proper apartat farem una breu introducció a com, a partir de la informació obtinguda en aquests blocs d'adquisició, els receptor GPS poden detectar la presència o no d'una senyal determinada. A més, introduïrem les bases pel càlcul de dos termes importants en aquest procés de detecció com són la probabilitat de detecció (P_d) i la probabilitat de falsa alarma (P_{fa}).

Com hem pogut veure, en qualsevol dels casos analitzats al capítol anterior, a la sortida dels correladors que formen part del bloc d'adquisició, obtenim tot el conjunt de valors (pics de correlació) provinents de les diferents combinacions entre els dos paràmetres en els que es fa la recerca per tal de tenir la seqüència de senyal rebuda completament sincronitzada amb el codi de referència. Aquests dos paràmetres són, com hem dit, la freqüència portadora amb la variació provocada per l'efecte Doppler i la fase de codi.

Tot aquest conjunt de pics de correlació els podem representar en forma de graella com hem fet a la figura següent, basada en la que podem trobar a [4]:

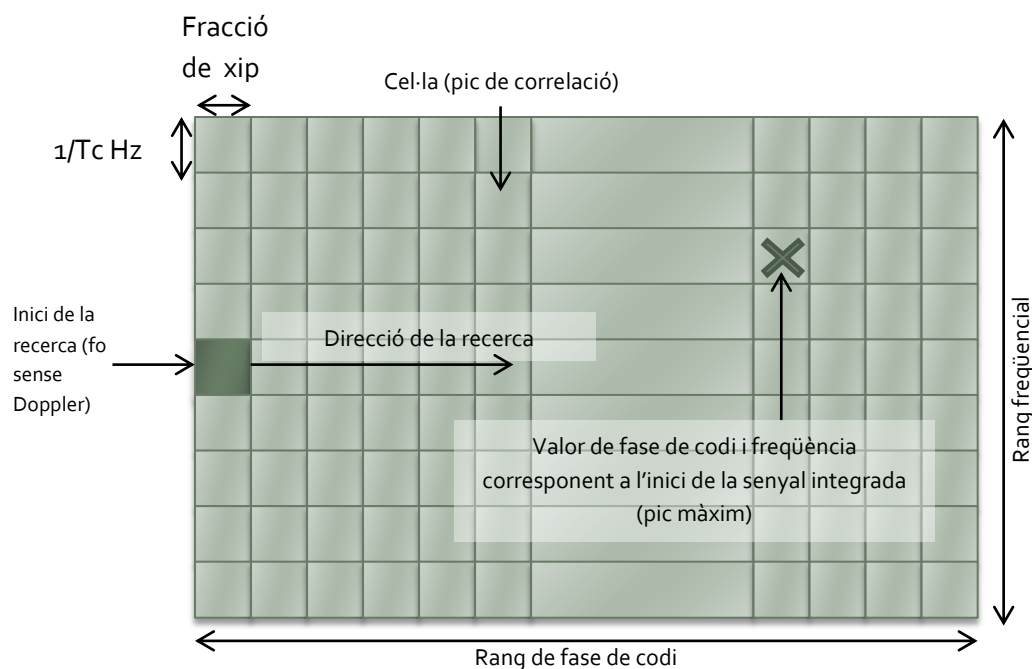


Figura 24: Graella d'adquisició amb les 2 dimensions de recerca del codi C/A

L'eix vertical d'aquesta graella representa la recerca en els diferents valors de freqüència portadora. Noteu com, per tal de cobrir tot el rang de freqüències, aquesta recerca es fa en salts de "x" Hz. Normalment, aquest valor correspon a l'invers del temps de correlació. En la direcció d'aquest eix freqüencial, el patró de recerca sol començar pel valor de la freqüència portadora sense efecte Doppler al centre, i creix/decreix de forma simètrica a raó de "x" Hz a banda i banda d'aquest valor central. Pel que fa a l'eix horitzontal, és el que representa els diferents valors de fase de codi. De manera que, començant per zero (quan senyal i codi es trobarien alineats), cada cel·la s'incrementa en una fracció determinada d'un xip per tal de cobrir el total de "n" valors de desfasament que pot existir a la seqüència de "n" xips integrada. Per exemple, a les simulacions que farem a capítols posteriors, realitzat aquesta recerca a raó de $\frac{1}{4}$ de xip de senyal.

Durant el temps d'integració, a cadascuna de les cel·les trobem el pic de correlació corresponent a la correlació entre senyal i codi de referència per a un determinat valor de freqüència i un determinat valor de fase de codi. Recordant les característiques del soroll AWGN i de l'autocorrelació de codis PRN, podem dir que només quan senyal i codi es trobin completament alineats, i la freqüència portadora sigui la correcta, obtindrem un pic de correlació clarament superior a la resta. Aquesta situació és la que hem representat amb una creu a l'exemple de la figura 24.

De manera que cada cel·la podrà tenir contribució de senyal + soroll o contribució de només soroll, i per tant, cada cas tindrà una funció de densitat de probabilitat (pdf) particular. La detecció de la senyal, és el procés estadístic que consistirà en comparar el valor dels pics de les diferents cel·les, amb un llindar de detecció fixat, per poder decidir si el determinat pic correspon a la presència de la senyal del satèl·lit o no. És aquí on jugaran un paper fonamental les funcions densitat de probabilitat dels diferents pics ja que, a partir d'aquestes i del llindar de detecció, es podran conèixer les probabilitats de detecció (P_d) i de falsa alarma (P_{fa}).

5.2 Test de les diferents hipòtesis:

Assumim que la matriu de detecció comentada a l'apartat anterior està composta per un total de "m" cel·les. Cadascuna d'aquestes cel·les, contenen pics de correlació de valors que podem representar com variables aleatòries X_i , on $i=1,2,\dots,m$. Alhora, anomenarem S_m al vector que agrupa totes aquestes variables:

$$S_m = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_m\} \quad 5-1$$

Per tal de poder analitzar el problema de la detecció de senyal, considerem dos hipòtesis diferents. Per una banda, anomenarem hipòtesis H_1 a cada cel·la que correspongui a un correcte alineament entre senyal i codi, és a dir, H_1 correspon a la presència de la senyal de satèl·lit. I per una altre banda, anomenarem hipòtesis H_0 a totes les cel·les que corresponguin a desalineament entre senyal i codi, és a dir, H_0 correspon a l'absència de senyal del satèl·lit.

Així que, la detecció de la senyal pot entendre's com un problema de decisió binaria, on s'ha de trobar la cel·la corresponent a la hipòtesis H_1 (detecció correcta), mentre que s'han de descartar totes les cel·les H_0 (rebuig correcte), tractant d'evitar pèrdues de detecció i casos de falsa alarma.

5.2.1 Hipòtesis H_0 :

Sota la hipòtesis H_0 , podem considerar que totes les cel·les pertanyents a la matriu/graella de detecció, corresponen només a termes de soroll, així que podem expressar tot aquest conjunt de hipòtesis com:

$$S_{|H_0} = S_m = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_m\} \quad 6-2$$

5.2.2 Hipòtesis H_1 :

Sota la hipòtesis H_1 , assumirem que una i només una de les cel·les de la graella d'adquisició conté contribució de senyal més soroll. D'aquesta forma, les $m-1$ cel·les restants només contindran soroll i formaran part de la hipòtesis anterior (H_0). Anomenarem a la variable aleatòria que compleix la hipòtesis 1, X_{sat} . Aquesta variable, es trobarà a una posició m determinada de la graella:

$$X_{sat} = X_n \quad \text{sota } H_1 \quad 6-3$$

5.3 Criteris TC, MAX i MAX/TC:

Independentment de l'esquema de detecció que s'adopti i del mètode utilitzat per tal d'adquirir la senyal rebuda, la selecció de les hipòtesis correctes pot implementar-se seguint diferents criteris de decisió. Aquests criteris de decisió són coneguts com MAX, TC (Threshold Crossing) i MAX/TC respectivament [18].

5.3.1 Criteri MAX:

El criteri MAX per a la decisió de la hipòtesis correcta, consisteix en decidir en favor de la cel·la amb la variable de detecció més gran. És a dir, un cop calculats i acumulats tots els valors de correlació que conformen la graella, s'escull aquella cel·la amb el valor de pic de correlació més gran.

Formalment, aquest criteri el podem expressar com:

$$s'escull la cel \cdot la S_m(j) \text{ si } X_j \geq X_i \text{ on } i = 1, \dots, m \quad 6-4$$

El criteri MAX només es pot aplicar amb esquemes d'adquisició basats en la transformada FFT/IFFT en els quals la seqüència de senyal s'escaneja en la seva totalitat en paral·lel.

Cal tenir en compte, que si s'utilitza aquest mètode, la decisió es pren un cop s'ha escanejat tota la regió d'incertesa. Això fa que sigui un mètode poc optimitzat en quant a temps en casos on la hipòtesis correcta és fàcilment distingible de la resta de cel·les desalineades. És en aquests casos on pot ser més convenient utilitzar el criteri de decisió TC.

5.3.2 Criteri TC:

El criteri TC consisteix en comparar la variable de decisió de cada cel·la amb un llinar de detecció (ξ) determinat i, en cas de que la variable "creui" aquest llinar, s'escull com a hipòtesis de correcta adquisició.

De la mateixa manera que hem fet al cas anterior podem expressar aquest criteri com aquell on:

$$s'escull la cel \cdot la S_m(j) \quad 6-5$$
$$\text{si } X_j \geq \xi \text{ en cas contrari es compara la següent cel \cdot la}$$

Aquest és un mètode que permet anticipar la decisió abans d'haver escanejat tota la regió d'incertesa i, a més, és un mètode bastant utilitzat a la pràctica ja que proporciona un bon rendiment amb una complexitat no excessiva.

Tot i això, sovint, la decisió entre utilitzar el criteri MAX o TC no és trivial i depèn en gran mesura de la mida de la seqüència adquirida i de la SNR de la senyal rebuda. Freqüentment, sol utilitzar-se el criteri MAX amb seqüències relativament curtes i TC en la resta de casos. No

obstant, també pot utilitzar-se un criteri híbrid que incorpora els dos criteris anteriors i que es coneix com MAX/TC.

5.3.3 Criteri MAX/TC:

El criteri MAX/TC consisteix en dividir la regió d'incertesa en diferents sectors, i utilitzar el criteri MAX per cercar dins de cada sector. Seguidament, s'utilitza el criteri TC per tal de cercar entre els valors màxims obtinguts de cada sector comparant-los amb el llindar de detecció.

En aquest cas:

en un sector, s'escull la cel·la $S_m(j)$

$$\text{si } X_j \geq X_i \text{ on } i = 1, \dots, m$$

6-6

després, s'escull la cel·la $S_m(j)$

si $X_j \geq \xi$, en cas contrari, es passa al següent sector

5.4 Indicadors d'acompliment (Pfa i Pd):

Com acabem de veure, alhora de cercar quina cel·la de la graella correspon a una adquisició correcta, podem trobar dos tipus de pics. Per una banda, tenim els pics de correlació que només contenen soroll i com hem dit es corresponen amb la hipòtesis H_0 ; i per l'altra banda, tenim, si existeix, el pic de correlació on existeix contribució de senyal+soroll, que es correspon amb la hipòtesis H_1 . Cadascun d'aquests dos casos els podrem caracteritzar mitjançant la seva pròpia funció densitat de probabilitat (PDF ²²). Aquestes pdf's per cadascun dels casos seran les que ens permetran conèixer quina és la probabilitat de falsa alarma i la probabilitat de detecció, com ara veurem, i poder establir el llindar de detecció per així saber si l'adquisició de la senyal és correcta o no.

Són aquestes pdf's les que estudiarem al següent capítol. Analitzarem quin tipus de distribució segueixen en diferents escenaris d'adquisició, amb la intenció final de conèixer com varien aquestes distribucions quan s'integren seqüències de senyal on existeixen transicions de bit amb diferent signe.

²² PDF: Probability Density Function: normalment denominada $f(x)$, descriu la densitat de probabilitat en cada punt de l'espai de tal manera que la probabilitat de que la variable aleatòria prengui un valor dins d'un determinat conjunt, serà la integral de $f(x)$ sobre aquest conjunt. És a dir, ens indica amb quina probabilitat relativa, una variable aleatòria contínua prendrà un valor determinat.

Per ara, no entrarem encara en descriure quin tipus de distribució tenen les pdf's corresponents als pics H_1 i H_0 respectivament. Ara bé, per tal d'analitzar com s'extreuen les probabilitats de detecció i de falsa alarma, considerarem que, generalment, la pdf corresponent als pics de soroll sense presència de senyal (que anomenarem $P_n(z)$) té una mitja de zero. En canvi, la pdf corresponent als pics de senyal+soroll (que anomenarem $P_s(z)$) té una mitja diferent de zero.

Per a un llindar de detecció determinat (ξ), qualsevol cel·la amb un valor que superi aquest llindar, serà considerada cel·la de senyal, mentre que qualsevol cel·la amb un valor que es trobi per sota d'aquest llindar serà considerada com a soroll. Imaginant el cas on les pdf's $P_n(z)$ i $P_s(z)$ segueixen distribucions Gaussians amb mitja zero i mitja no-zero, respectivament, a la figura següent podem veure els 4 diferents casos d'interès relacionats amb la detecció de la senyal:

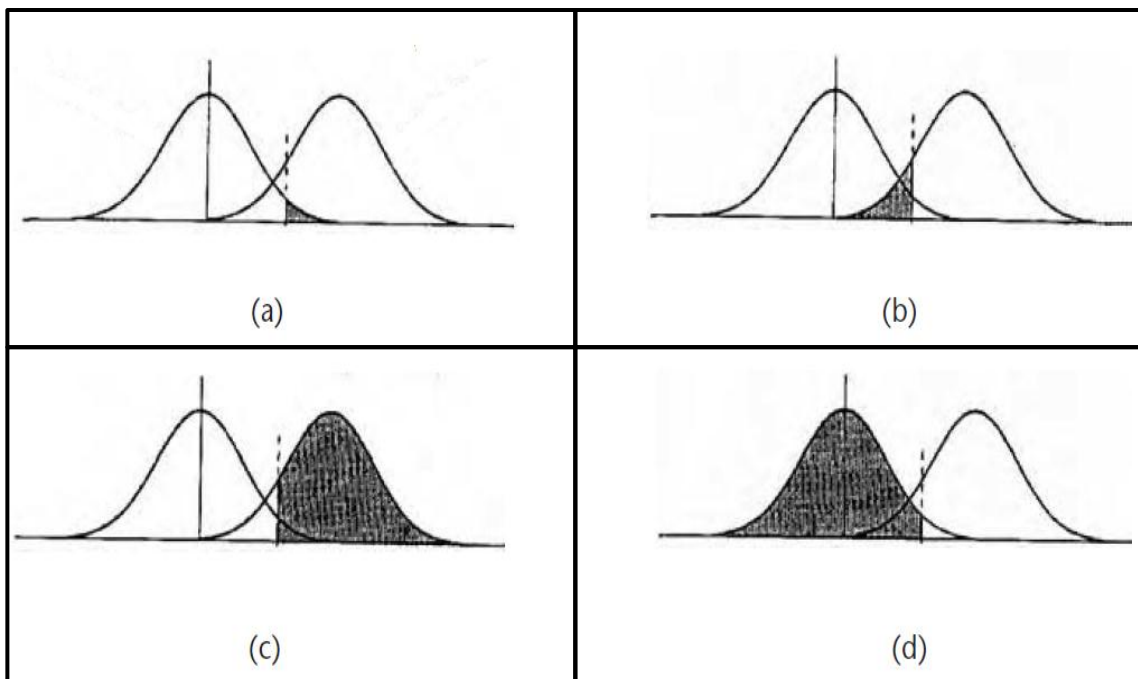


Figura 25: Pdf's per a la decisió binària [4]

En tots quatre casos podem veure, sobre una mateixa gràfica, la pdf corresponent a $P_n(z)$ (centrada a l'origen de coordenades) i la pdf corresponent a $P_s(z)$ (centrada a un valor superior a zero). En el cas A, l'àrea ressaltada representa la probabilitat de falsa alarma, i com veiem, correspon a part de la distribució de soroll que sobrepassa el llindar i pot ser considerada com a una detecció correcta quan realment no és el cas. En el cas B, l'àrea ressaltada indica la probabilitat de fals rebuig, ja que com veiem, correspon a part de la distribució de senyal que

queda per sota del llindar, considerant-se com a una mala detecció quan realment correspon a una detecció correcta. A la gràfica C veiem representada la probabilitat de detecció, que correspon a tota la part de la distribució de senyal que queda per sobre del llindar. I finalment, al cas D, la zona ressaltada indica la probabilitat de rebuig correcte, que correspon a tota la part de la distribució de soroll que queda per sota del llindar.

Però de totes aquestes 4 estadístiques que acabem de veure, a la detecció de senyals GPS, com a qualsevol problema de detecció, només es solen utilitzar i són útils les probabilitats de falsa alarma i de detecció (gràfiques A i C respectivament, a la figura 25). Per aquesta raó, a continuació farem una breu introducció als càlculs que ens permeten obtenir aquestes probabilitats.

5.4.1 Probabilitat de falsa alarma:

Estudiant les gràfiques de la figura 25 veiem com, la probabilitat de falsa alarma es pot representar en forma d'integral com a la següent equació:

$$P_{fa}(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} P_n(z) dz \quad 6-7$$

On ξ com hem dit correspon al llindar de detecció i $P_n(z)$, que ja hem introduït com a funció densitat de probabilitat dels pics de senyal, i la podem expressar com:

$$P_n(z) = f(z|H_0) \quad 6-8$$

on $z|H_0$ correspon al valor de la graella sota la hipòtesis H_0

5.4.2 Probabilitat de detecció:

En canvi, la probabilitat de detecció la podem expressar com a la següent integral:

$$P_d(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} P_s(z) dz \quad 6-9$$

On ξ com hem dit correspon al llindar de detecció i $P_s(z)$, que ja hem introduït com a funció densitat de probabilitat dels pics de senyal, i la podem expressar com:

$$P_s(z) = f(z|H_1) \quad 6-10$$

on $z|H_1$ correspon al valor de la graella sota la hipòtesis H_1

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS:

Un cop resumit el funcionament bàsic del bloc d'adquisició, en aquest apartat estudiarem l'estadística de les sortides d'un d'aquests blocs. En concret, donarem una caracterització estadística dels dos diferents pics de correlació que podem obtenir a la sortida de les integracions coherents (després de fer el mòdul i elevar al quadrat el resultat): els pics de soroll i el pic màxim o pic de senyal. A partir d'ara anomenarem H_0 , al cas dels pics de soroll i H_1 al cas del pic màxim, com ja hem introduït a l'apartat anterior. Aquest anàlisi estadístic el realitzarem sobre escenaris diferents, per tal de, finalment, estudiar l'efecte que tenen les transicions de signe dels bits de navegació en l'estadística dels pics de correlació.

Les simulacions fetes per tal de donar explicació als diferents casos d'estudi, han sigut realitzades amb MATLAB i els codis utilitzats per realitzar l'adquisició de les senyals rebudes simulades, es basen en l'algoritme de cerca de fase de codi en paral·lel, per ser aquest, l'algoritme que ens permet realitzar adquisicions més ràpides. En tots els casos, la senyal rebuda simulada (generada amb els codis que apareixen a l'annex), es basarà en la senyal civil GPS (codificada amb codi C/A). A més, sobre-mostrejarem cada bloc de codi C/A de 1023 mostres tenint un total de 4092 mostres en 1 ms de senyal. Generarem, tants ms de senyal com necessitem, i multiplicarem, seqüències de 20 d'aquests codis C/A per +1 o -1, respectivament, per tal de simular els signes dels diferents bits de navegació. A continuació, multiplicarem aquesta senyal per l'exponencial portadora per simular la modulació de la senyal a la freqüència d'1,023 MHz. Finalment, simularem l'efecte del soroll AWGN afegit al receptor, com una senyal de mitjana nul·la i contribució de potencia en funció de la C/No escollida. Per facilitar els càlculs fixarem la potencia de senyal a 1 W i calcularem la potencia del soroll AWGN afegit al receptor en funció d'aquesta i del valor de C/No escollit (45 dBHz).

6.1 Anàlisi estadístic sense presència de transicions de signe:

En primer lloc, estudiarem l'estadística de les sortides de correlació, en els diferents escenaris, quan no existeixen transicions de signe. Com en aquest apartat només volem modelar l'efecte dels bits, no considerarem la desviació de freqüència per efecte Doppler. Més endavant, analitzarem l'efecte de la presència de transicions de bit tot comparant els resultats obtinguts.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

6.1.1 Integració d'un milisegon de senyal:

Com a primer cas, estudiarem la sortida del nostre bloc d'adquisició quan realitzem la integració coherent d'un únic milisegon de senyal. Com hem dit, en aquest primer cas, no considerarem el fet de que pugui haver una transició de signe en aquest milisegon de senyal. Partint d'aquí tenim dos casos que podem analitzar. En primer lloc, i com a cas més simple, el fet de que la senyal rebuda es trobi alineada amb el codi de referència del receptor, és a dir, la primera mostra rebuda correspon amb la primera mostra d'un bloc C/A. En segon lloc, tindrem el cas contrari, en el qual el ms rebut podrà tenir un desfasament qualsevol amb el codi de referència.

a) Senyal completament alineada:

Al realitzar la integració coherent d'1 codi C/A complet, obtindrem la següent sortida de correlació:

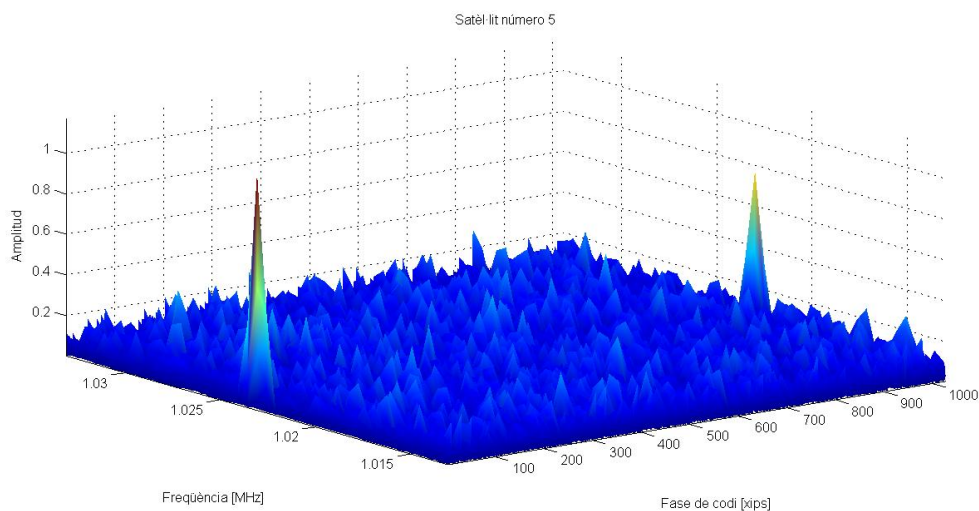


Figura 26: Sortida de correlació, 1ms alineat sense transició de signe

Com es pot observar, obtindrem un pic de correlació clarament superior a la resta de pics. Aquest pic de correlació màxim (H_1), es trobarà centrat a un valor de freqüència igual a la freqüència rebuda (com hem dit no simulem la desviació Doppler), i a un valor de desfasament de codi igual a zero. El valor d'aquest pic H_1 serà proper al número de mostres del nostre ms de senyal, així que un cop normalitzat valdrà un número proper a 1. Cal tenir en compte que a cada simulació que realitzem, el valor del pic serà diferent a causa de la contribució del soroll AWGN, però sempre es trobarà molt proper a 1. Pel que respecta a la resta de pics obtinguts, són aquells on només existeix contribució del soroll.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

Ara el que farem, per tal de caracteritzar estadísticament els dos tipus de pics H_1 i H_0 , obtinguts, és realitzar 10.000 simulacions, cadascuna amb una contribució de soroll diferent. Acumularem els diferents valors de pics H_1 i d'un pic H_0 qualsevol, generarem els histogrames i a partir d'aquests generarem les respectives PDF's.

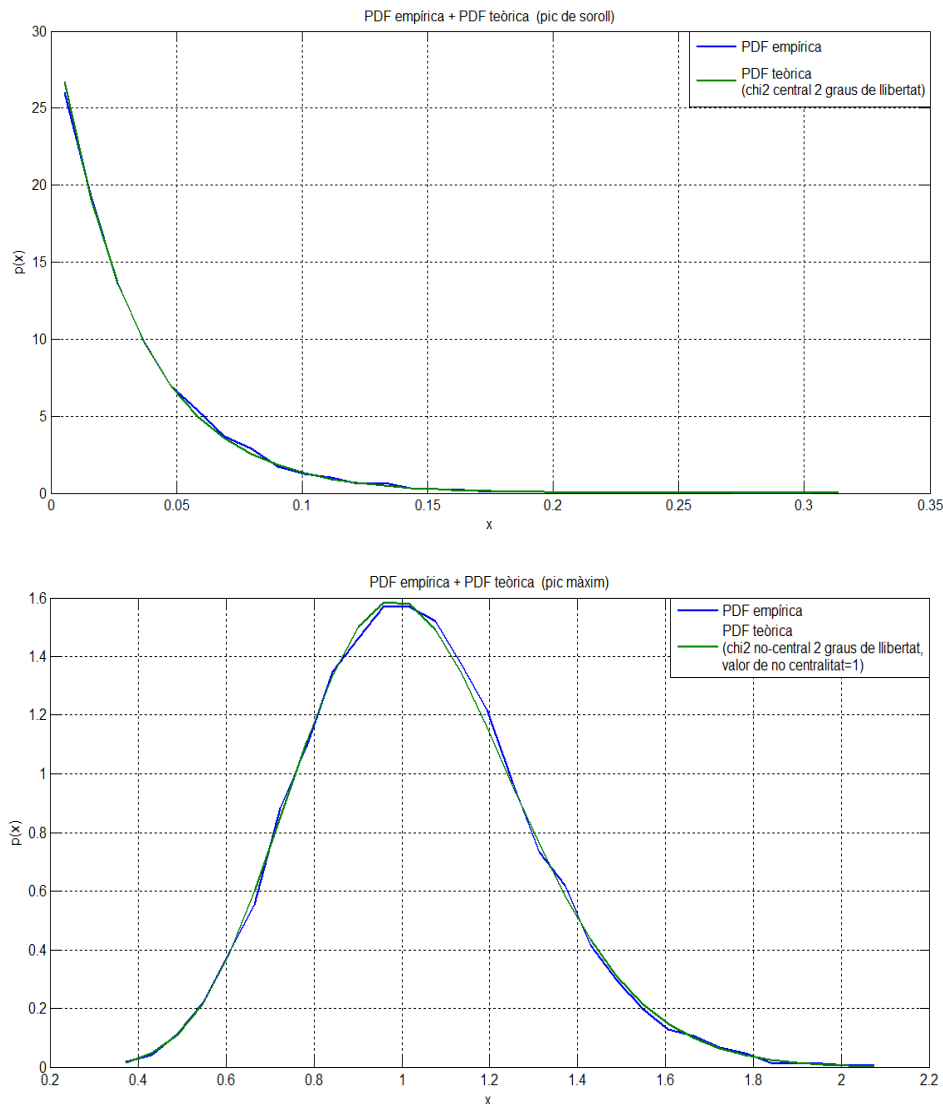


Figura 27: PDF cas H_0 (superior) i cas H_1 (inferior) 1ms alineat sense transicions

Com podem veure, hem generat les pdf's que ens proporcionen les simulacions i alhora, hem generat la pdf teòrica per tal de definir el tipus de distribució estadística que segueix cada cas.

Pel que fa al cas H_0 , la pdf segueix una distribució chi-quadrat central amb dos graus de llibertat. (A l'annex, trobem una definició d'aquest tipus de distribució estadística extreta de [8]). El fet de que H_0 segueixi aquest tipus de distribució es basa en que a un pic de soroll qualsevol, tenim la suma de dos (equival als graus de llibertat de la chi-2) variables aleatòries

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

elevades al quadrat, corresponents a les components en fase i en quadratura del soroll afegit pel receptor. Totes dues variables tenen una distribució normal ja que tenen mitjana nul·la (equival a que la chi-2 sigui central) i una variància determinada. El valor d'aquesta variància és el que ens permet escalar la gràfica corresponent a una chi2-central (on la variància seria 1), per a veure com s'adapta a la pdf obtinguda.

I pel cas H_1 , veiem com la pdf obtinguda correspon amb una pdf chi-quadrat no-central amb 2 graus de llibertat i paràmetre de no-centralitat=1. En aquest cas, al pic màxim, les variables aleatòries que s'estan sumant al quadrat segueixen una distribució normal, però ara, la mitjana no és nul·la sinó que es troba en funció de la potencia de senyal (que recordem que és 1).

Per tant al pic màxim, s'han acumulat 4092 (mostres en 1 ms) d'aquestes variables amb mitjana 1. Per aquesta raó, i tenint en compte que després de correlar, normalitzem pel número de mostres d'un ms, obtenim un valor de no-centralitat igual a 1 (4092/4092). Aquest valor ens indica, que existeix una major probabilitat, de que el pic de correlació màxim tingui un valor d'1, com lògicament, esperàvem.

b) Senyal no alineada:

En el cas de que la seqüència d'1ms integrada no es trobi alineada amb el codi de referència del receptor, i no existeixi transició de bit, podem veure com el valor dels pics de correlació no es veu afectat. La única diferència que s'obté és que el pic màxim (H_1) es trobarà centrat a un valor de desfasament de codi diferent de zero. En l'exemple que hem simulat, el codi C/A que integrem es troba desfasat 171 xips respecte el codi de referència del receptor. Per tant, lògicament, el pic màxim de la gràfica el trobarem situat a un valor de desfasament de codi igual a 171, com s'observa a la figura 28.

Queda clar, doncs, que les estadístiques obtingudes en aquest cas, no es diferenciaren de les obtingudes en el cas anterior. I, per tant, tornarem a tenir una pdf chi-quadrat central amb 2 graus de llibertat, en el cas H_0 i una pdf chi-quadrat no-central amb 2 graus de llibertat i paràmetre de no-centralitat=1, en el cas H_1 .

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

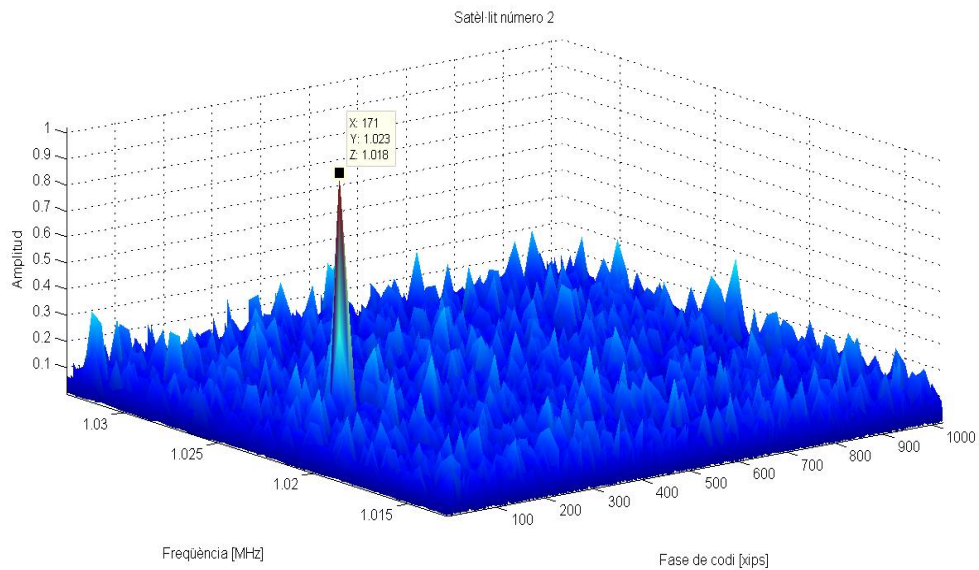


Figura 28: Sortida de correlació, 1ms no alineat sense transició de signe

6.1.2 Integració de més d'1 ms de senyal:

Ara, estudiarem el cas d'integrar més d'1 ms de senyal, de nou, sense presència de transició de signe. Analitzem el cas, per exemple, d'integrar 2 o 5 ms de senyal. A les gràfiques següents podem veure les sortides de correlació corresponents a cada cas.

Com ja hem demostrat, sense presència de transició, el fet de tenir senyal alineada o no amb el codi de referència no ens influeix, per tant no ho tindrem en compte per estudiar l'estadística dels pics.

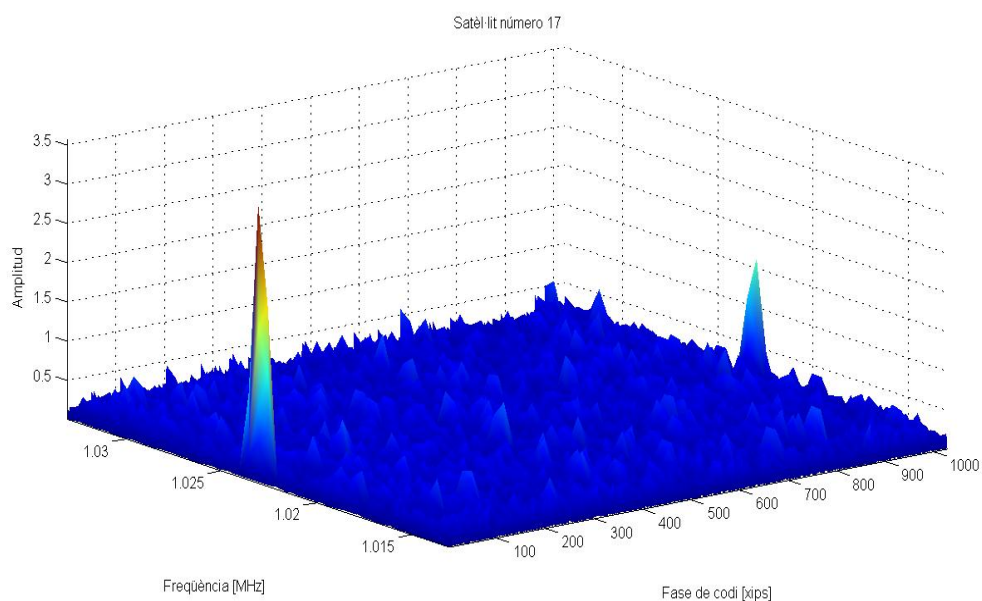


Figura 29: Sortida de correlació, 2 ms sense transició de signe

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

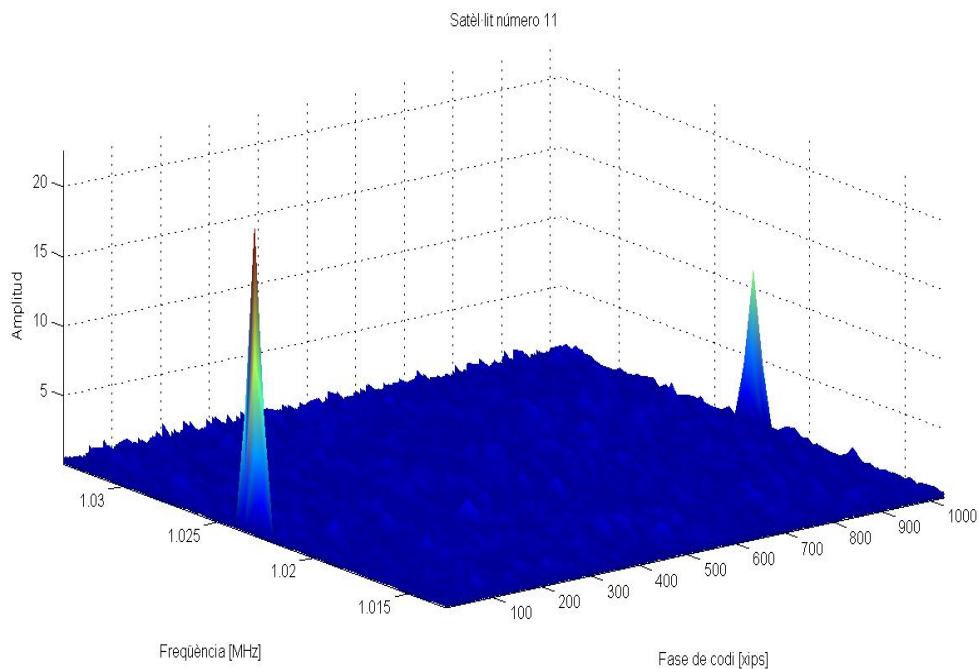


Figura 30: Sortida de correlació, 5 ms (inferior), sense transició de signe

De les gràfiques anteriors podem extreure dos conclusions significatives per l'estudi estadístic dels pics de correlació:

- 1) Comparant les gràfiques de la integració d'1, 2 i 5 ms, es demostra el que hem explicat de que, a major període d'integració, major és la diferència entre el valor del pic màxim i el valor dels pics de soroll.
- 2) En relació al fet anterior, veiem com, sense presència de transicions de signe, la única diferència en la sortida de correlació existent entre integrar 1ms o integrar-ne més, és que el valor del pic màxim canvia.

Si en el cas d'1ms, després de normalitzar pel número de mostres d'un bloc C/A , teníem un pic màxim amb un valor aproximat a 1, ara tindrem valors aproximats a 4 (2^2) i 25 (5^2), pels casos d'integrar 2 i 5 ms respectivament.

Aquest fet és extrapolable a qualsevol número de blocs C/A integrats i és el que fa que les estadístiques dels pics variïn de la següent forma, en funció de que canviem el període d'integració:

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

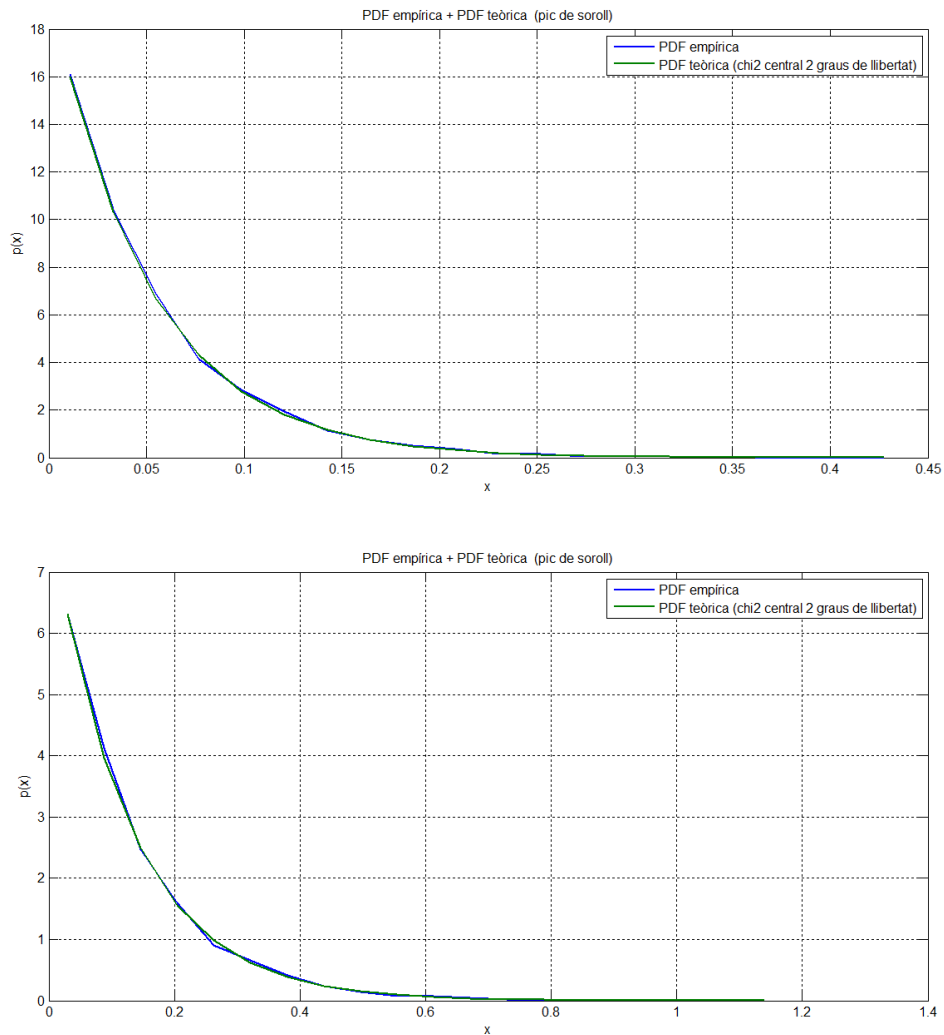


Figura 31: PDF's cas H_0 , integració de 2ms (superior) i 5 ms (inferior), sense transicions de signe

De nou, tornem a tenir que les pdf's dels pics de soroll es corresponen amb les d'una distribució chi-quadrat central amb dos graus de llibertat. La raó és clara, en els pics de soroll tornem a tenir la suma de 2 variables aleatòries corresponents al soroll elevades al quadrat i amb mitjana nul·la.

La única diferència és que, depenent de quants ms de senyal integrem, al pic de soroll s'acumularen més o menys mostres, i és el que fa que els valors de les probabilitats de les pdf's variïn, però sense variar la forma de la distribució.

Com podem veure, en el cas H_0 , l'estadística resultant sempre tindrà la mateixa distribució independentment de la longitud de les seqüències integrades o de, com veurem, l'existència de transicions de signe dels bits.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

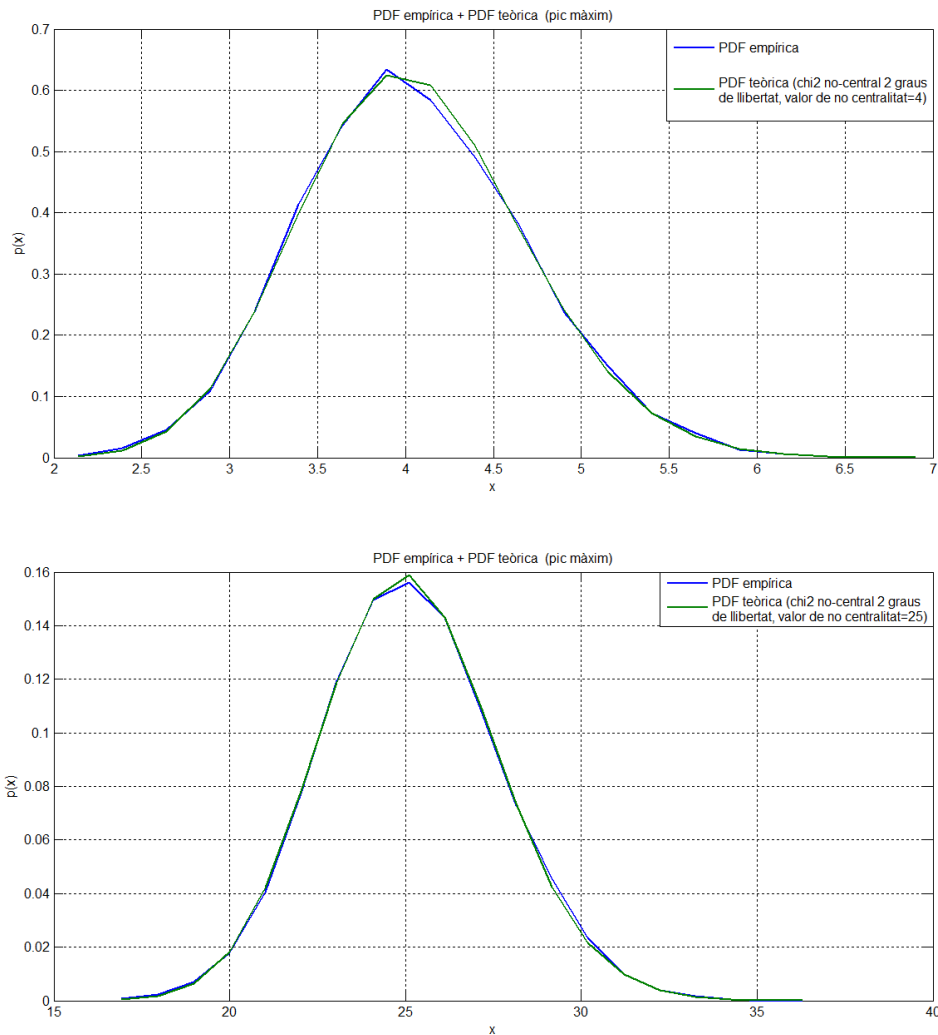


Figura 32: PDF's cas H₁, integració de 2ms (superior) i 5 ms (inferior), sense transicions de signe

I com s'observa a la figura 32, pel cas H₁, tornem a tenir unes pdf amb distribució chi-quadrat no central. Però el que canvia, en funció de la longitud de dades integrades, és el valor de no-centralitat d'aquesta distribució. Com veiem, el valor de no-centralitat en cada cas, es correspon amb el quadrat del número de blocs C/A integrats.

Si pel cas d'1 ms teníem que aquest valor era 1, ara per 2 ms integrats tenim que val $4 \left(\left(\frac{2ms \cdot 4092 \text{ mostres/ms}}{4092 \text{ mostres/ms}} \right)^2 \right)$, i pel cas d'integrar 5 ms, val $25 \left(\left(\frac{5ms \cdot 4092 \text{ mostres/ms}}{4092 \text{ mostres/ms}} \right)^2 \right)$.

Amb el que acabem de veure, ja podem saber quina distribució seguirà la pdf dels pics de correlació obtinguts al integrar un bit de navegació complet quan no tenim en compte canvis de signe, i tant si el bit es troba alineat o no amb el codi de referència:

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

- Els pics de soroll (H_0) seguiran com sempre una distribució chi-quadrat central amb 2 graus de llibertat.
- I els pics de senyal (H_1) seguiran una distribució chi-quadrat no-central amb 2 graus de llibertat i, en aquest cas, un valor de no-centralitat igual a $400 \left(\left(\frac{(20ms \cdot 4092mostres/ms)}{4092mostres/ms} \right)^2 \right)$.

És important tenir clar com queda aquesta distribució estadística ja que ens centrarem en la integració d'un bit de navegació complet, quan estudiem l'efecte que tenen les transicions de signe al següent apartat. Llavors, podrem comparar amb les gràfiques següents per tal de poder veure quins són els canvis produïts a l'estadística dels pics de correlació.

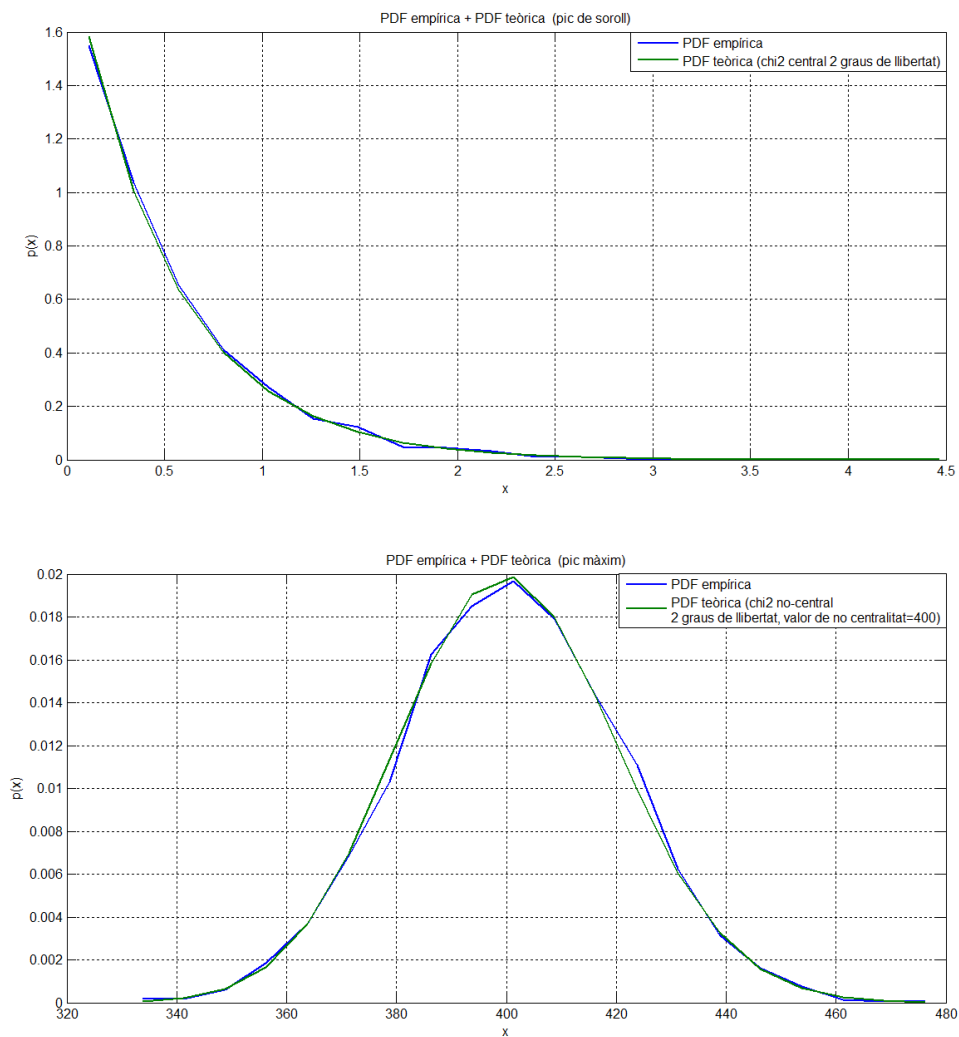


Figura 33: PDF's H_0 (superior) i H_1 (inferior) al integrar un bit de navegació sense transicions de bit

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

6.2 Anàlisi estadístic amb presència de transicions de signe:

Fins aquí, hem analitzat la distribució estadística que segueixen les pdf's dels dos tipus de pics de correlació (H_0 i H_1) quan no existeix transició de signe. A més, hem vist com aquestes canvien en funció de la mida de la seqüència integrada. I finalment, hem calculat les pdf's del cas on la seqüència integrada es correspon a un bit de navegació complet (20ms de senyal). Ara, estudiarem les estadístiques dels pics de correlació, però simulant l'existència d'una transició de signe dins de la seqüència de senyal integrada. I analitzarem com afecta aquest fenomen en la integració de 20 ms de senyal.

Com ja hem descrit, un bit de navegació complet d'una senyal GPS equival a 20 ms de senyal i està format per 20 codis C/A d'1 ms cadascun. El fet de que en els 20 ms integrats existeixi una transició de signe, vol dir que aquesta seqüència de senyal es troba just a la divisió entre dos bits de navegació diferents (cadascun amb signe oposat), com hem esquematitzat a la figura següent:

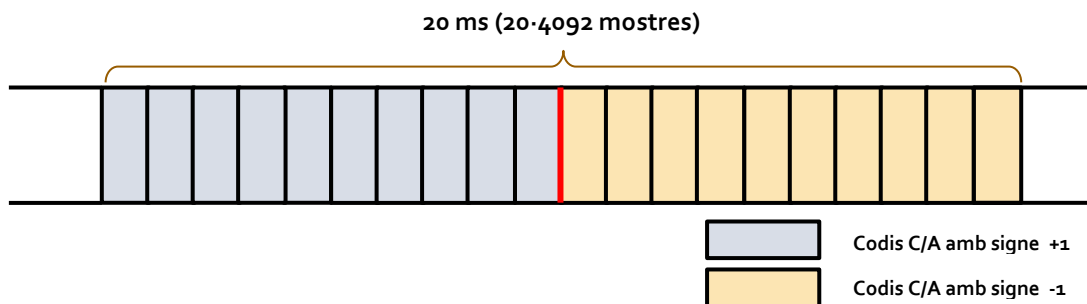


Figura 34: Seqüència integrada: 20ms amb transició de signe

En primer lloc, hem de tenir en compte, que la posició on es trobi aquesta transició de signe influirà en el valor dels pics de correlació. Per tant, ara sí que tindrà importància el valor de desfasament entre la senyal i el codi. En el cas de que el desfasament de codi fos zero, tornaríem a estar en el cas anterior on no trobaríem transició de signe dins de la seqüència integrada.

Estudiem per tant, com varia la sortida de correlació per diferents valors de desfasament de senyal. Dit amb unes altres paraules, representarem i compararem les pdf's condicionades a que la transició de signe es trobi a un punt o a un altre de la senyal integrada.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

6.2.1 PDF condicionada (20 ms de senyal amb transició de signe):

6.2.1.1 Transició de signe a la meitat de la seqüència integrada:

El primer cas que podem pensar, seria el cas on la transició de signe es troba just a la meitat de la seqüència integrada, com veiem a l'esquema de la figura 34. En aquest cas, estaríem integrant 10 ms ($10 \cdot 4092$ mostres) de senyal amb signe +1 i 10 ms ($10 \cdot 4092$ mostres) de senyal amb signe -1.

Aquest seria un cas especial en el qual, com veurem a la gràfica de la figura 35, no obtenim cap pic de correlació per sobre dels pics de soroll. Aquesta circumstància pot demostrar-se matemàticament, com es va fer a un estudi publicat a la IEEE titulat "GNSS Signal Acquisition in the Presence of Sign Transition" [19], i podem comprovar-ho a la nostra simulació.

Com veiem, en aquest cas, la sortida del bloc d'adquisició no es diferencia del cas on el codi del satèl·lit que s'està buscant, no estigués present a la senyal rebuda:

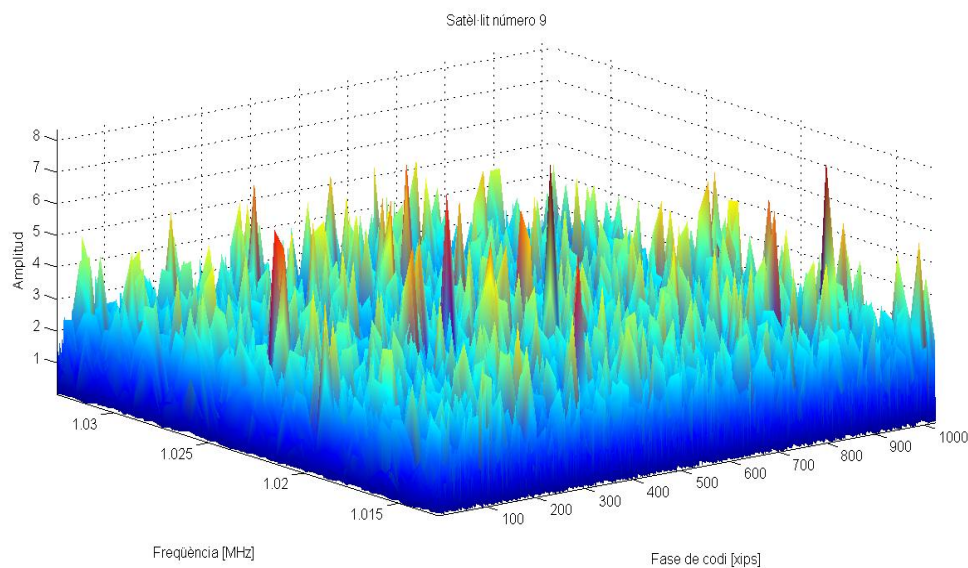


Figura 35: Pics de correlació, 20ms, amb transició a la meitat de la seqüència rebuda

6.2.1.2 Transició de signe a qualsevol altre punt de la seqüència integrada:

En canvi, si la transició de signe es troba en qualsevol altre punt de la seqüència rebuda, sí que obtenim un pic H_1 , però, el valor d'aquest dependrà de en quin punt es produeix la transició.

L'explicació a aquest fenomen també es troba analitzada matemàticament a [19], però explicat d'una forma senzilla el que passa és el següent: Imaginem el cas de que la transició de

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

signe es trobi en el punt marcat a la figura 36. En aquest cas, s'estaran integrant 6ms (2452 mostres) amb signe negatiu i 14ms (57288 mostres) amb signe positiu.

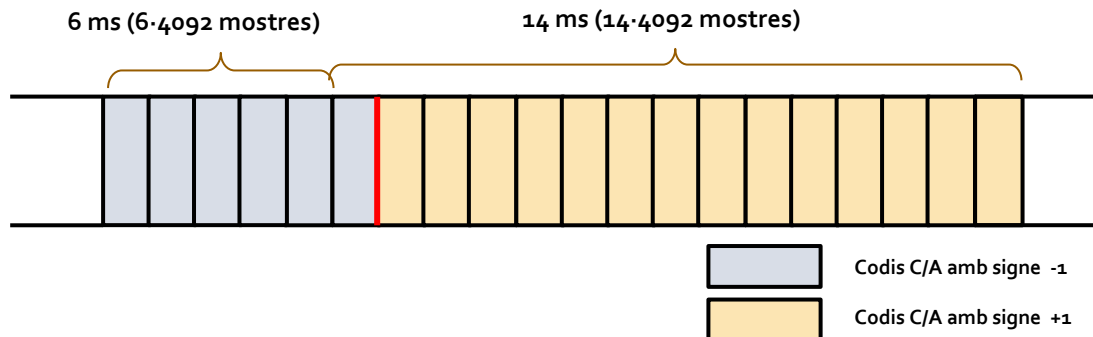


Figura 36: Seqüència de 20 ms integrada

El que es produeix en aquest cas, és que la correlació de les 2452 mostres amb signe negatiu s'anul·len amb la correlació de 2452 mostres amb signe positiu. D'aquesta forma, en realitat, obtindrem la mateixa sortida que si s'estiguessin integrant només 8ms de senyal (8 codis C/A complets).

A la gràfica següent tenim els pics de correlació corresponents a l'exemple que acabem de comentar. Com podem veure el pic H1 té un valor molt proper a 64 (en el nostre exemple 67,23 a causa del soroll), el valor que seguint els raonaments del capítol anterior, obtindríem si la seqüència integrada estigués formada per 8 codis C/A complets.

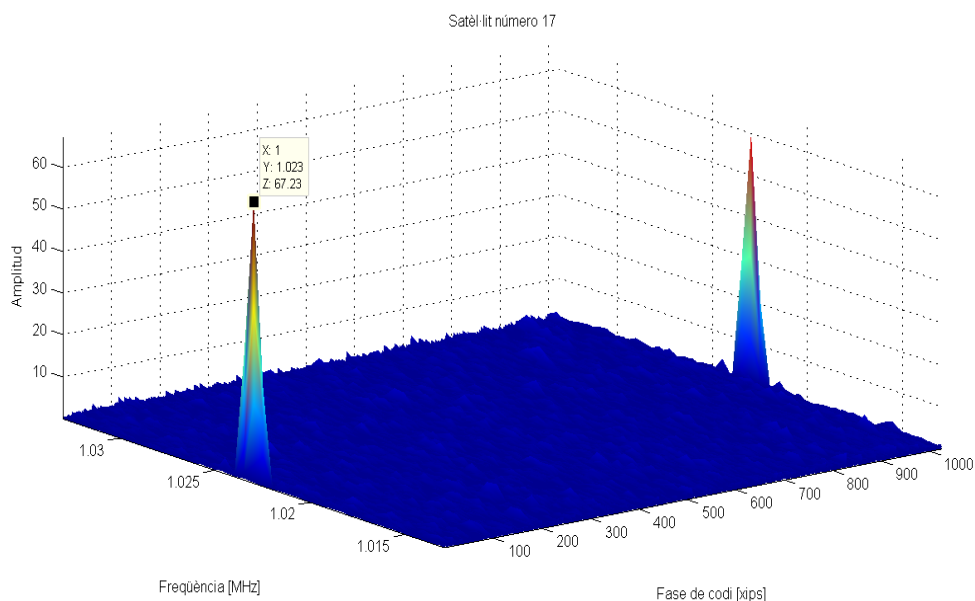


Figura 37: Pics de correlació, 20ms amb transició de signe (6ms-14ms)

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

En aquest cas, la pdf dels pics de correlació es correspondran amb les pdf's dels pics quan la senyal integrada és de 8 codis C/A tot i que en realitat estem integrant 20. I com ja hem dit, pel cas H_0 seguirà tenint la forma d'una distribució chi-quadrat central amb 2 graus de llibertat, i pel cas H_1 continuarem tenint una distribució chi-quadrat no-central amb dos graus de llibertat i, en aquest cas, un valor de centralitat en funció d'on estigui la transició de signe. En el nostre exemple valdria 64 (8^2):

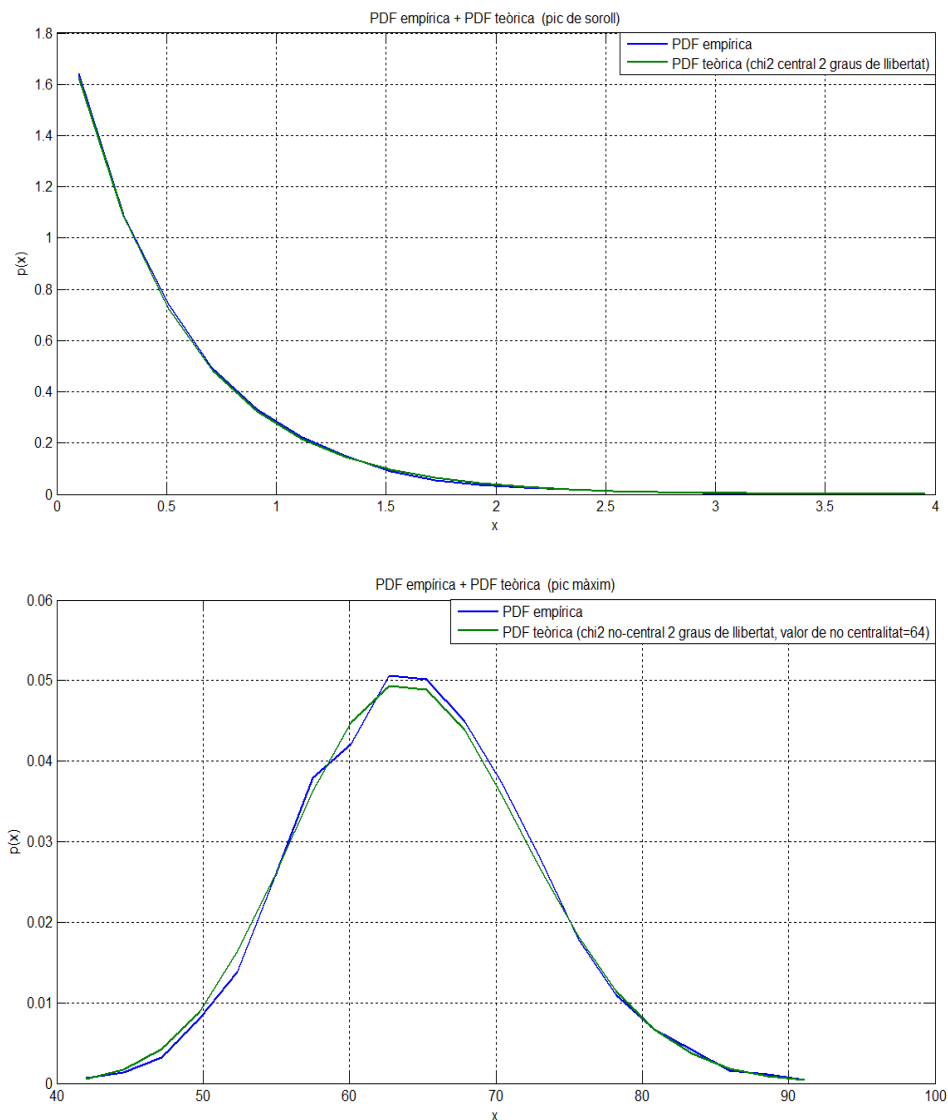


Figura 38: PDF's condicionada, 20 ms amb transició de signe (6ms-14ms)

Però com hem esmentat, aquest seria el cas on condicionem a que la transició de signe es produeixi en un punt determinat de la nostra seqüència integrada. El que farem a continuació és analitzar el cas més semblant al que es produeix en realitat en un receptor GPS.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

Quan el receptor rep la senyal i s'inicia l'adquisició d'un fragment d'aquesta, es podrà trobar amb una seqüència amb un desplaçament qualsevol respecte el codi de referència i , a més, aquesta podrà seguir una seqüència de bits qualsevol. És a dir, dins la seqüència integrada podrà haver-hi o no transició de signe, i en cas de que hi hagi, aquesta podrà trobar-se en qualsevol punt.

Per tal de poder analitzar aquest cas més proper a la realitat, calcularem el que anomenarem les pdf globals (sense condicionar) dels pics de correlació. Com hem fet amb el cas condicionat, continuarem considerant una seqüència integrada de 20 ms de senyal però ara realitzarem l'adquisició d'aquests 20 ms de senyal de 3 formes diferents.

6.2.2 PDF global:

Ara, hem de simular una senyal rebuda de forma que, com hem dit, dins d'un fragment de 20 ms pugui existir o no transició de signe de bit i el desfasament amb el codi de referència pugui ser de qualsevol valor.

El que farem serà, generar la seqüència de bits de forma aleatòria, seguint una distribució uniforme (apartat 10.7 de l'annex), de manera que un bit de navegació tingui la mateixa probabilitat de tenir signe positiu que de tenir-ne negatiu.

Alhora, el desfasament de la senyal respecte el codi també podrà ser un valor qualsevol, de forma que el generarem seguint una distribució uniforme entre zero i 81.840 mostres (el nostre número de mostres en 20 ms de senyal).

Un cop definida la senyal d'aquesta forma, a cada adquisició que realitzarem, la nostra seqüència de 20 ms tindrà (o no) una transició de signe situada en un punt diferent. De nou, realitzarem un número elevat d'adquisicions d'aquesta senyal per tal de calcular-ne l'histograma dels pics H_1 i H_0 de correlació.

I, a continuació, calcularem les pdf's de les distribucions d'aquests pics. Finalment, intentarem entendre i definir la forma que segueixen aquestes pdf's.

Però com hem dit, realitzarem aquest procés en tres escenaris diferents, corresponents a 3 formes diferents d'adquirir aquests 20 ms de senyal. En tots 3 casos, representarem la distribució dels pics que compleixen la hipòtesis H_1 , seleccionats com el pic màxim de la graella d'adquisició, i dels pics que compleixen la hipòtesis H_0 , que els seleccionarem de dues

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

formes diferents: o bé escollint a cada simulació un pic de soroll qualsevol, o bé escollint el valor màxim de tots els pics de soroll de la matriu d'adquisició.

El sentit d'estudiar les distribucions d'aquestes dues formes el trobem en el fet de que, com hem vist al capítol 5, els receptors poden utilitzar diferents criteris alhora de seleccionar els pics pertanyents a una hipòtesis o a una altre.

6.2.2.1 Cas #1 – seqüència integrada de només 20 ms de senyal:

El primer escenari que analitzarem és el cas on, en primer lloc, s'agafa únicament un fragment de 20 ms de la senyal rebuda al receptor per tal de processar-la. Com ja hem comentat, la nostra intenció serà integrar aquests 20 ms per tal de trobar l'inici del bit de navegació a partir del pic màxim de correlació.

En aquest primer cas s'ha seguit el següent algoritme per realitzar l'adquisició d'aquesta seqüència de senyal:

- Algoritme d'adquisició utilitzat:

Podríem pensar, que una forma simple d'integrar els 20 ms de senyal, seria utilitzar un codi de referència compost de 20 blocs de codi C/A i realitzar l'adquisició dels 20 ms de senyal rebuts utilitzant aquest codi de referència, com ja hem comentat.

Aquesta forma d'integrar la senyal rebuda, seria una forma correcta i, en conseqüència, obtindríem un pic de correlació màxim centrat al valor de desfasament de codi determinat i amb una amplitud determinada pel fet de que existeixi o no transició de bit.

Ara bé, aquest algoritme comportaria uns llargs temps de computació, i és per això, que per tal d'integrar els 20 ms de senyal, s'ha seguit un algoritme diferent que disminueix aquesta càrrega computacional.

Aquest algoritme es basa en dividir la seqüència de 20 ms de senyal en 20 blocs de n mostres cadascun com es veu a la figura 39, on n correspon al nostre número de mostres d'un bloc C/A (1 ms de senyal).

Un cop dividida la senyal en els 20 blocs i multiplicats cadascun per l'exponencial portadora per eliminar la dependència freqüencial, es realitza la transformada FFT de cadascun, es multiplica pel conjugat de la FFT del codi de referència corresponent a un bloc C/A i es realitza

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

la anti-transformada IFFT del resultat. Finalment, es suma el resultat de fer aquest procés en cadascun dels 20 blocs i es realitza el mòdul al quadrat.

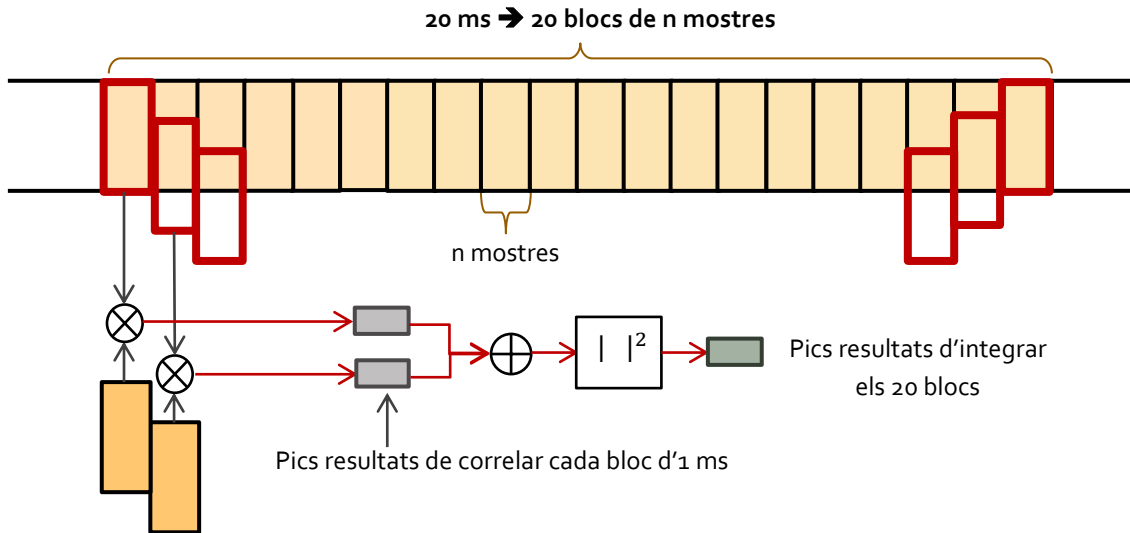


Figura 39: Partició de la senyal rebuda en blocs de n mostres i correlació de cada bloc per separat

Agafant aquests 20 ms de senyal i aplicant l'algoritme que acabem d'explicar, obtindrem, com esperàvem un pic de correlació superior a la resta de pics de soroll si hi ha presència de la senyal del satèl·lit que s'està adquirint.

Aquest pic podrà trobar-se centrat a qualsevol valor de fase de codi ja que el desfasament entre la senyal rebuda i el codi podrà ser qualsevol. I, a més, ara ja no podem conèixer el valor d'aquest pic. Aquesta amplitud dependrà de l'existència o no de transició de signe dins de la seqüència integrada i de en quin punt es produeixi aquesta.

Sabent això, de nou, realitzem múltiples simulacions seguint aquest mètode d'adquisició de forma que podem representar les següents PDF's per les hipòtesis H_0 i H_1 , que analitzarem a continuació.

Com veiem a la figura 40, en el cas dels pics de soroll agafats de forma aleatòria, res canvia. El que hem fet és, a cada simulació, agafar el valor d'un pic qualsevol de soroll, és a dir, un pic diferent del pic màxim de la graella d'adquisició. En aquest cas, tornem a tenir una distribució chi-quadrat central amb dos graus de llibertat, com demostra la PDF teòrica que hem representat.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

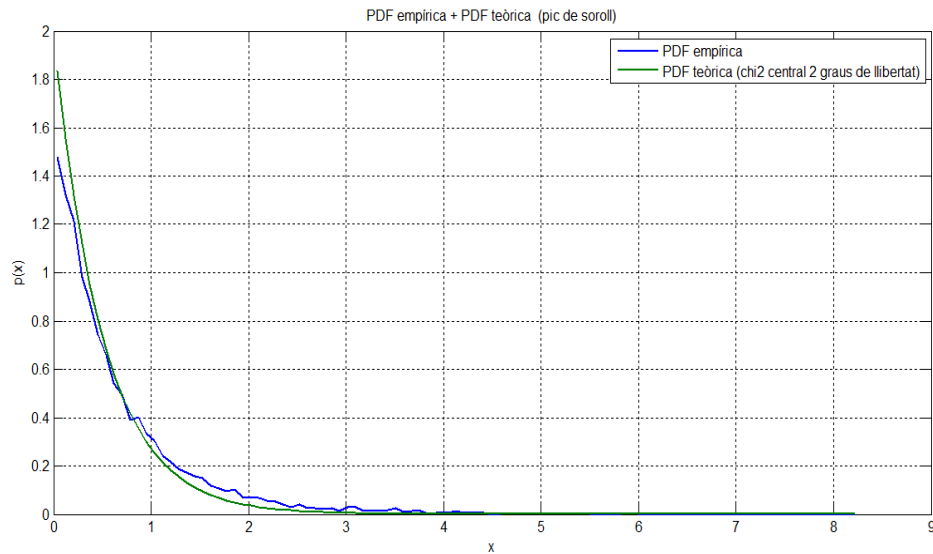


Figura 40: PDF global cas#1, pic de soroll qualsevol (H_0)

Veiem ara quina distribució segueixen els pics que compleixen la hipòtesis H_0 , si ara els seleccionem escollint el màxim de tot el conjunt de pics on només hi ha contribució de soroll. És a dir, a cada simulació, agafem, de tots els pics que no corresponen al pic màxim, aquell que té un valor més gran.

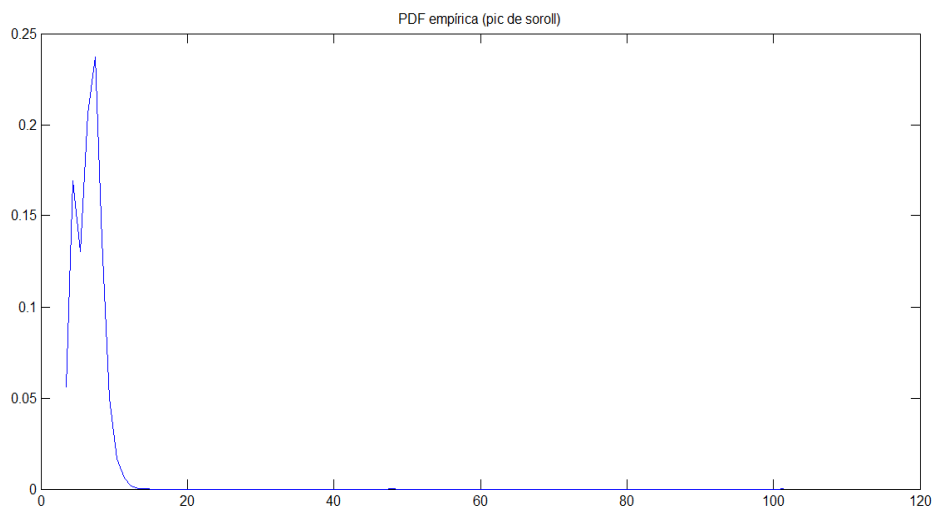


Figura 41: PDF global cas#1, pic de soroll màxim (H_0)

La diferència més significativa que podem trobar respecte al cas anterior, és el fet de que ara, la distribució d'aquesta pdf deixa de ser una chi-quadrat central. L'explicació de quin tipus de distribució segueix la pdf sota la hipòtesis H_0 en aquest cas, la podem trobar a [22].

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

Bàsicament, podem pensar que, en aquest cas, la pdf la calculem escollint tot un conjunt de "n" pics de soroll de cada simulació i escollint-ne el màxim. Sabem que, cadascun d'aquests n pics de soroll segueix una distribució chi-quadrat amb 2 graus de llibertat. En aquest cas, i per "m" integracions coherents, tenim que la funció de distribució acumulativa (CDF) és correspon amb la següent:

$$F(x) = \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^m \left(\frac{1}{\Gamma(m)}\right) \int_0^{mx} t^{m-1} \exp\left(-\frac{t}{2\sigma^2}\right) dt \quad 6-1$$

Ara bé, en el nostre cas, "la teoria del valor extrem", demostra que ara la CDF (F_n) de la distribució del valor màxim de n variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes, amb una CDF F, quan n tendeix a infinit, segueix una de tres possibles funcions diferents, dependent de la forma que té la "cua" de la distribució F. En el nostre cas, i com a qualsevol cas on tinguem distribucions chi-quadrat o altres amb una cua exponencial decreixent, la CDF F_n segueix la forma dobles exponencial:

$$F_n(x) = \exp(-\exp(-\alpha_n(x - u_n))) \quad 6-2$$

On els coeficients u_n i α_n venen descrits per les dos següents equacions:

$$F_n(u_n) = 1 - \frac{1}{n} \quad 6-3$$

$$\alpha_n = nF'(u_n) \quad 6-4$$

Aquesta seria la forma i les equacions que descriuen la gràfica de la figura 41. La mitjana d'aquesta distribució correspondrà a:

$$\bar{x}_n = u_n + \frac{\gamma}{\alpha_n} \quad 6-5$$

On γ correspon a la constant d'Euler de valor aproximat 0.5772. I la desviació estàndard val:

$$\sigma(x_n) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\alpha_n} \quad 6-6$$

És important recalcar, que escollint aquesta pdf per caracteritzar l'estadística dels pics H_0 , en comptes de la pdf anterior, les probabilitats de falsa alarma i de detecció poden canviar pel fet de que en aquest últim cas, la cua de la pdf es veu desplaçada cap a la dreta.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

És per això que és important conèixer la caracterització estadística de les hipòtesis H_0 i H_1 , que dependran de com funcioni el receptor en qüestió, per tal de escollir un llindar de detecció òptim.

Ara, si ens fixem a la gràfica següent corresponent a la PDF pel cas H_1 , veiem com els pics màxims ja no segueixen una distribució com les dels casos anteriors.

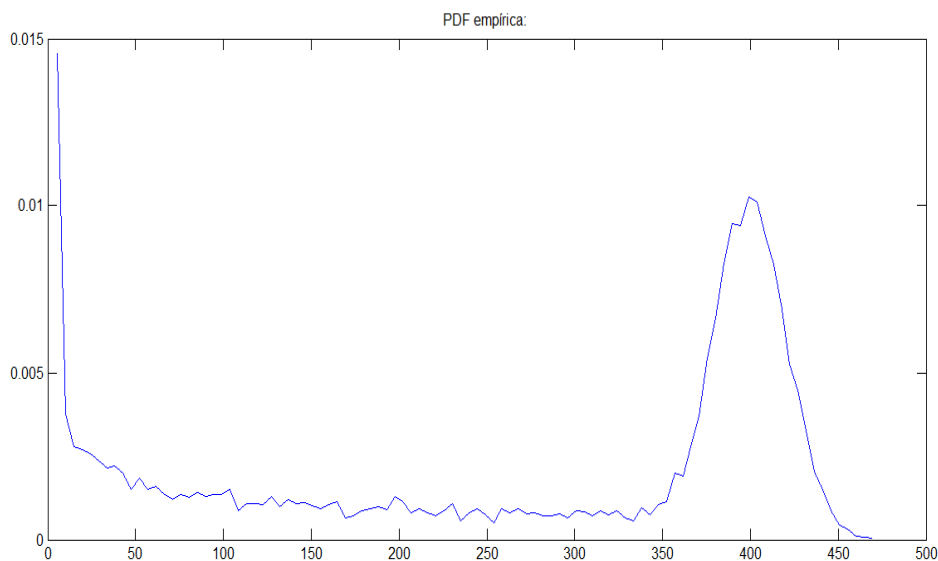


Figura 42: PDF global cas#1, pics màxims (H_1)

Si analitzem una mica la gràfica, podem observar com la pdf ens indica que existeix una major probabilitat de que el pic màxim tingui un valor aproximat de 400. D'altra banda, podem veure com també existeix la possibilitat de tenir valors de pic màxim menors a 400, però en aquest cas, veiem com la probabilitat és molt menor i pràcticament la mateixa per tots els valors possibles, excepte quan ens apropem a zero.

L'explicació a aquest fenomen la podem trobar recordant les característiques de la seqüència de senyal que s'està utilitzant. Per una banda, tenim que existeix la mateixa probabilitat de que dins dels 20 ms de senyal hi hagi transició de signe que de que no n'hi hagi.

En el cas de que no hi hagi transició, els 20 ms de senyal correlats sempre correspondran a bits de navegació d'igual signe, i, per tant, independentment de que la senyal es trobi desfasada amb el codi o no, sempre obtindrem un pic màxim de valor=400. És a dir, tenim que, amb un 50% de probabilitat, s'estaran integrant 20 codis C/A d'igual signe.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

En canvi, l'altre 50% de casos equivaldrà al fet de tenir una transició de signe. En aquest cas, el pic ja no serà de 400, sinó que dependrà del desfasament entre la senyal i el codi. Recordem, que en apartats anteriors, hem comprovat com, el valor del pic màxim varia si dins dels 20 ms tenim, per exemple, 15 ms de senyal amb signe positiu i 5 ms amb signe negatiu, o si tenim qualsevol altre combinació.

I com a cas especial, dins d'aquest mateix 50% de casos, es troba el fet de que el desfasament de senyal faci que s'integrin 10 ms de signe positiu i 10 ms de signe negatiu. Aquest seria el cas on no trobaríem pic màxim, i la pdf seria la mateixa del cas de soroll (H_0).

A la següent taula, es veu d'una forma més gràfica aquests diferents casos que es poden donar:

Existència de transició de signe = 50% de probabilitat	No existència de transició de signe = 50% de probabilitat
Valor del pic en funció del desfasament entre senyal i codi	Valor del pic independent del desfasament entre senyal i codi
Valor del pic → de 0 a 400 (mateixa probabilitat per a tots els casos)	Valor del pic → aproximadament 400 (20^2)

Taula 6: Valor del pic H_1 en funció de transició de signe i desfasament (cas#1)

A partir del que es veu a la taula 6, podem generar la pdf teòrica com hem fet en els casos anteriors. Ara, aquesta pdf teòrica ja no correspon a una distribució coneguda i tabulada com passava en els casos de les chi-quadrat anteriors.

Tot i això, sí que la podem generar com una combinació de les pdf's de diferents distribucions chi-quadrat no centrals i amb dos graus de llibertat.

En concret, per una banda tindrem la pdf d'una distribució chi-quadrat no central amb valor de no-centralitat=400. Aquesta pdf l'haurem de multiplicar per 0,5 per a que representi un 50% del total, com hem vist.

L'altre 50%, correspondrà a la suma de totes les distribucions chi-quadrat no centrals amb els paràmetres de no-centralitat de 0 a 400. Sumant totes aquestes pdf's obtenim la pdf teòrica, que, com veiem a la figura 41, s'ajusta a la nostra pdf empírica.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

Per acabar amb l'anàlisi de la distribució estadística que segueixen els pics màxims en aquest tipus d'adquisició, podem intentar trobar l'expressió matemàtica que caracteritza la pdf que hem representat.

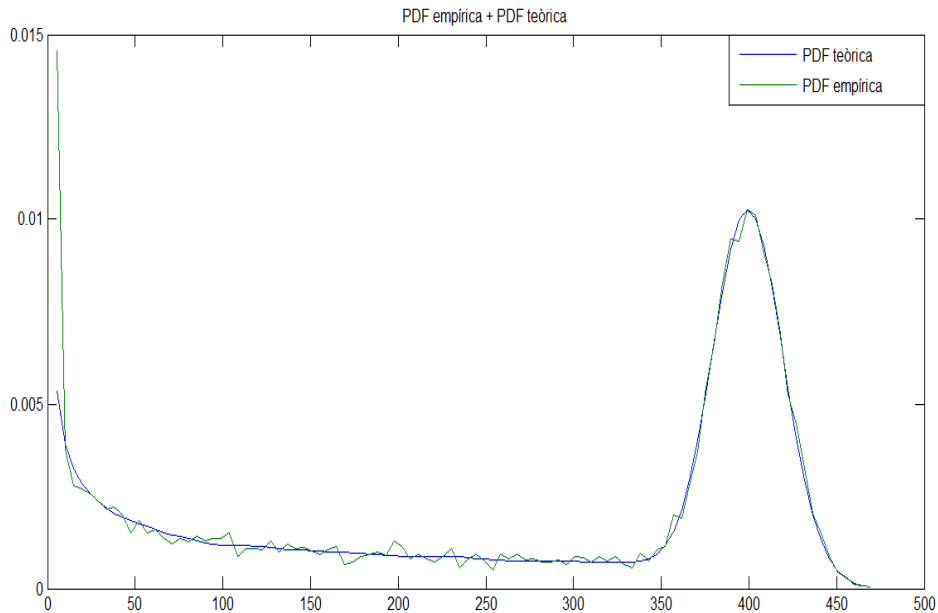


Figura 43: PDF empírica i teòrica del cas#1, pics màxims (H1)

Partim de la funció que defineix una distribució chi-quadrat no central (annex 10.6) que anomenarem $ncx2$ i que es troba en funció de x , λ (valor de no-centralitat) i ν (graus de llibertat):

$$ncx2(x, \lambda, \nu) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{\frac{\nu-2}{4}} \cdot e^{\left[-\frac{1}{2}(x+\lambda) \right]} \cdot I_{\frac{\nu}{2}-1} \left(\sqrt{\lambda x} \right) \quad 6-7$$

Ara, per una banda considerem el 50% corresponent a la chi-quadrat no central amb dos graus de llibertat i valor de no-centralitat= 400 com:

$$p(x)_1 = 0.5 \cdot ncx2(x, 400, 2) = 0.5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+400)} \cdot I_0 \left(\sqrt{(400x)} \right) \right) \quad 6-8$$

Simplement hem substituït λ per 400 i ν per 2 a la fórmula 6-7.

Per una altra banda, hem d'integrar la funció 6-7 respecte el paràmetre de no-centralitat amb els límits d'integració 0 i 400, respectivament, per representar l'altre 50% del que hem parlat:

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

$$p(x)_2 = 0.5 \left(\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} n c x 2(x, \lambda, 2) d\lambda \right) = 0.5 \left(\int_{\lambda_{\min}=0}^{\lambda_{\max}=400} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+\lambda)} \cdot I_0(\sqrt{\lambda x}) d\lambda \right) \quad 6-9$$

Per tal de poder arreglar més la fórmula anterior, podem resoldre la integral que obtenim. Ara bé, aquesta integral no correspon a cap integral definida coneguda.

Tot i això, com podem extreure de [21], podem expressar la integral d'una distribució chi-quadrat no central en termes de la funció Marcum Q generalitzada (annex 10.8), igual que es fa al calcular la funció de distribució acumulada (CDF)²³ d'una distribució chi-quadrat no central:

$$\int_0^b \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+\lambda)} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{v-2}{4}} \cdot I_{\frac{v}{2}-1}(\sqrt{\lambda x}) dx = 1 - Q_M(\sqrt{\lambda}, \sqrt{b}) \quad 6-10$$

on $M = \frac{1}{2}v$ ha de ser enter, en el nostre cas $M = 1$

Però tot i que a l'equació anterior s'integra la funció respecte x i nosaltres l'hem d'integrar respecte λ , en el cas on els graus de llibertat són 2, podem veure que x i λ juguen un mateix paper a la funció de la chi-quadrat. De forma que el resultat de la integral anterior també és correcte en el cas que ens ocupa, i tenim:

$$\int_0^b \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+\lambda)} \cdot I_0(\sqrt{\lambda x}) d\lambda = 1 - Q_M(\sqrt{x}, \sqrt{b}) \quad 6-11$$

Així que:

$$p(x)_2 = 0.5 \left(1 - Q_M(\sqrt{x}, \sqrt{400}) \right) \quad 6-12$$

I amb els resultats de 6-8 i 6-12 ja podem caracteritzar la distribució obtinguda pel valor del pic màxim en aquest cas, com:

²³ CDF (Cumulative Distribution Function): funció que descriu la probabilitat de que una variable aleatòria X amb una distribució determinada, tingui un valor menor o igual a x .

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

$$f(x) = p(x)_1 + p(x)_2 = 0.5(ncx2(x, 400, 2)) + 0.5(1 - Q_M(\sqrt{x}, \sqrt{400})) \quad 6-13$$

6.2.2.2 Cas #2 – seqüència integrada de més de 20 ms de senyal:

El següent escenari d'adquisició serà una mica diferent al del cas 1. L'objectiu serà el mateix que a l'apartat anterior: integrar un bit de navegació complet. Però en aquest cas, la seqüència que utilitzarem per a dur a terme l'adquisició de la senyal serà major a 20 ms.

Veurem que passa i quina diferència existeix en quant al valor dels pics de correlació i la seva distribució estadística respecte al cas anterior on únicament estàvem agafant 20 ms de senyal.

El mètode utilitzat per realitzar la correlació de la senyal segueix un algoritme diferent al explicat anteriorment. Aquest mètode es basa en els algorismes exposats a diverses publicacions com per exemple [20] i consta dels següents passos:

- Algoritme d'adquisició utilitzat:
 - 1) Com hem dit, la seqüència de senyal amb la que treballarem serà de 20 ms. En primer lloc, multiplicarem aquesta senyal per l'exponencial complexa a la freqüència rebuda, com ja fèiem a l'algoritme de cerca de fase de codi en paral·lel.
 - 2) A continuació, partirem la nostra seqüència de 20 ms, però ara en blocs de 2 ms cadascun. Els blocs s'agafaran com es representa a la figura 44, de forma que si el primer bloc va de la mostra 1 a la mostra 2n (on n és el número de mostres en 1 ms de senyal), el següent bloc s'agafarà de la mostra n+1 a la mostra 3n, tenint un total de 20 blocs.
 - 3) Seguidament, realitzarem la FFT a cadascun dels blocs de 2n mostres. Alhora, agafarem el nostre bloc de codi C/A de referència de n mostres i li afegirem un bloc de n zeros per tal de tenir un codi de referència, també de 2n mostres. També realitzarem la FFT a aquest codi de referència.
 - 4) Per tal de correlar cada bloc FFT de 2n mostres de senyal (FFT_senyal) amb la FFT del codi de referència (FFT_codi), utilitzarem el mètode conegut com "overlap-save", que consisteix en multiplicar el bloc FFT_senyal pel conjugat de FFT_codi, realitzar-ne la

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

anti-transformada (IFFT), i finalment, quedar-nos només amb les primeres n mostres del resultat.

- 5) Per acabar, sumarem les correlacions dels diferents blocs de $2n$ mostres i farem el mòdul al quadrat del resultat, obtenint així els pics de correlació resultants d'integrar la seqüència de 20 ms.

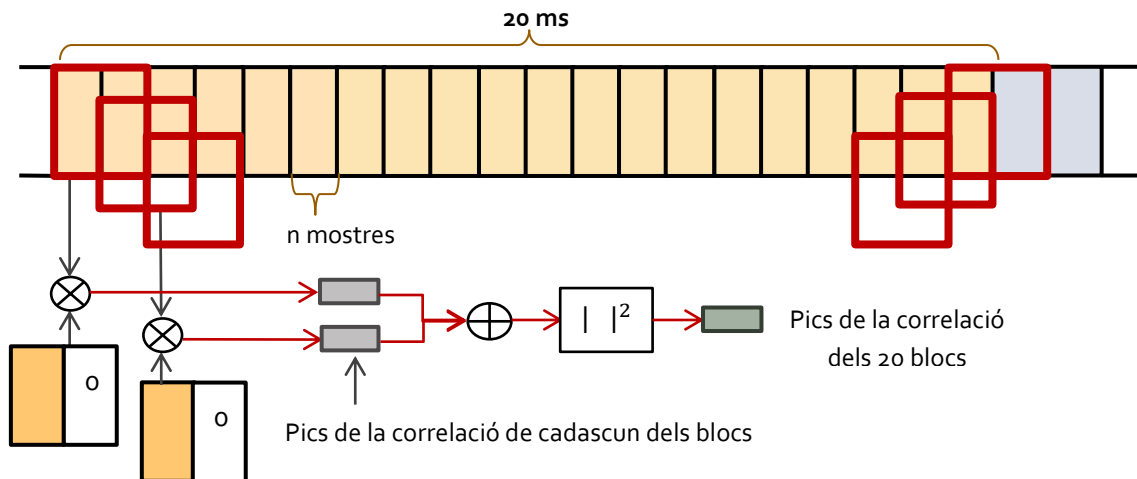


Figura 44: Partició de la senyal rebuda en blocs de $2n$ mostres i correlació de cadascun dels blocs per separat amb mètode "overlap-save"

El que s'aconsegueix implementant l'adquisició de la senyal d'aquesta forma és el següent. Si dins dels 20 ms de senyal no existeix transició de signe, tindrem, com en el cas anterior, un pic màxim de correlació amb un valor al voltant de 400, fruit de la integració de 20 codis C/A complets. En canvi, quan dins dels 20 ms sí existeix una transició de signe, el fet d'agafar mostres dels següents 20 ms alhora de dividir la senyal en blocs i de correlacionar circularment cada bloc de $2n$ mostres amb un codi local també de $2n$ mostres (n de codi i n de zeros), fa que el pic màxim de correlació només pugui obtenir certs valors i no qualsevol valor menor a 400 com al cas 1.

L'explicació a aquest fenomen la trobem al fet de que, en aquest cas, la posició on trobem el pic màxim de correlació, és la que correspon a tenir el codi local alineat amb cadascun dels blocs C/A d'1 ms de la senyal. De manera que, al sumar tots els blocs, sumem 20 períodes sencers cadascun amb el seu signe i no fraccions d'aquests blocs, tot i que el desplaçament entre senyal i codi no sigui un número sencer de períodes.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

Per entendre aquest fet a mode d'exemple, podríem pensar el cas de que la senyal estigués desfasada de forma que tinguéssim els 20 ms formats per 2 blocs C/A complets amb signe negatiu seguits de 18 blocs complets amb signe positiu. Llavors, tant als casos #1 i #2 obtindríem un pic de correlació de valor de 256 (16^2). En canvi, si tinguéssim 2,5 blocs C/A de signe negatiu i 17,5 de signe positiu, en el cas#1, ja hem vist que el pic seria del valor de 225 (15^2), mentre que el fet d'agafar més de 20 ms fa que al cas#2 continuem tenint un pic de valor 256 (16^2).

Dit d'una altre forma, el fet de comptar amb n mostres més dels 20 ms que integrem alhora de correlar els blocs de senyal, fa que el pic màxim només pugui valer 400 (en el cas de no existir desfasament) o 0, 4, 16, 36, 64, 100, 144, 196, 256 i 324 (en el cas d'existir desfasament). Podem notar com aquests valors són només els corresponents als pics resultants d'integrar valors parells de blocs C/A.

Això és a causa de que amb el mètode d'integració utilitzat, en el cas de tenir una transició de signe que impliqui tenir un número imparell de blocs d'un signe (exemple 19) i un altre número imparell de blocs d'un altre signe (exemple 1), sempre es compensaran les correlacions obtenint la integració real d'un número parell de blocs (exemple 18). Mai es podrà integrar un número imparell de blocs d'igual signe amb aquest mètode.

A continuació, tenim les gràfiques amb les funcions de densitat de probabilitat dels pics en les hipòtesis H_1 i H_0 . Tot aquest plantejament que acabem d'explicar, queda representat a la forma que segueix la distribució estadística dels pics màxims mostrada a la figura 47.

En primer lloc, tornem a veure la mateixa diferència que al cas 1, entre la distribució dels pics de soroll depenent de que els agafem de forma aleatòria a cada simulació (figura 45) o de que escollim el màxim de tots els pics de soroll a cada simulació (figura 46):

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

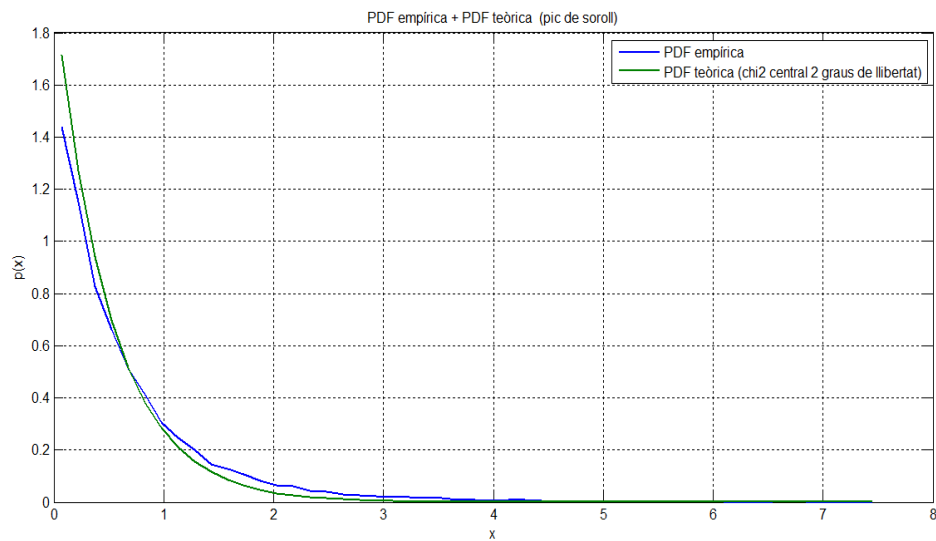


Figura 45: PDF's empírica i teòrica cas#2, pics de soroll qualsevol (H_0)

La diferència torna a ser la mateixa: si agafem un pic de soroll aleatòria a cada simulació la distribució segueix la forma d'una chi-quadrat amb dos graus de llibertat (figura 45) mentre que si només agafem el pic màxim de soroll, la pdf per a la hipòtesis H_0 passa a tenir una distribució doble exponencial (figura 46) com hem analitzat a l'apartat anterior.

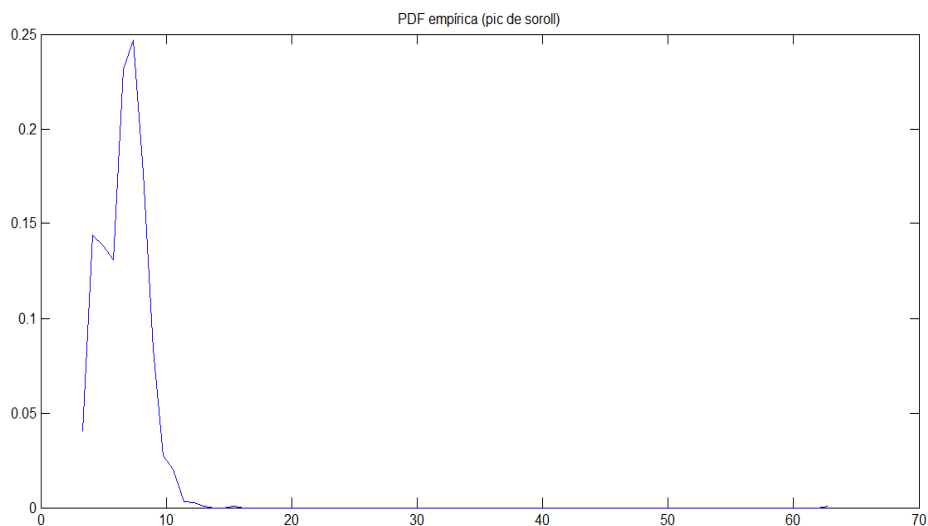


Figura 46: PDF global cas#2, pic de soroll màxim (H_0)

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

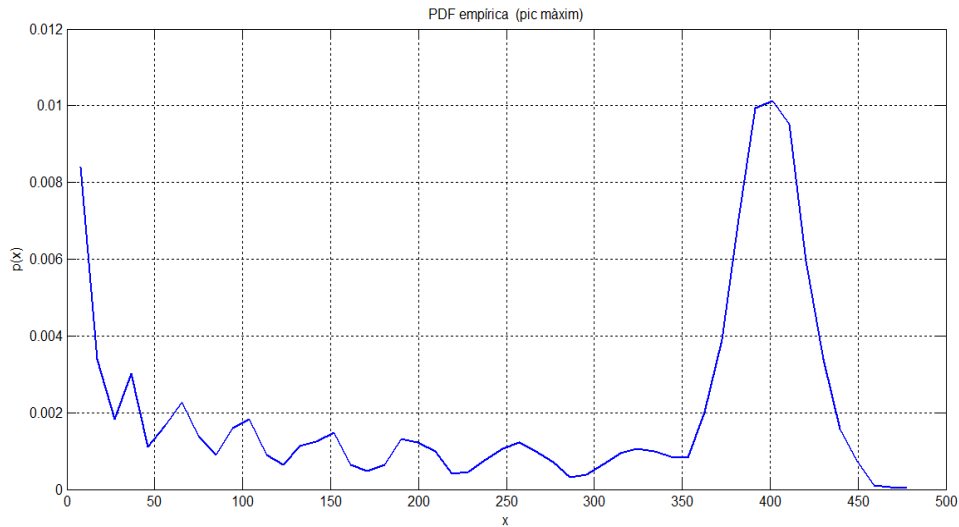


Figura 47: PDF empírica cas#2, pic màxim (H1)

I en el cas H1, com hem dit, tornem a tenir una major densitat de probabilitat al voltant de 400, el valor que rebrà el pic màxim sempre que no existeixi transició de signe als 20 ms integrats. I com a la pdf de la hipòtesis H1 al cas 1, torna a aparèixer la probabilitat de que aquest pic pugui tenir altres valors menors a 400. Però ara, veiem com aquesta altra probabilitat, tot i que menor a la de 400, només es troba centrada a determinats valors.

Com es pot veure, aquests valors corresponen als que ja hem esmentat: 0, 4, 16, 36, 64, 100, 144, 196, 256 i 324.

De la mateixa forma que en el cas anterior, la pdf mostrada a la figura 47 no correspon a la pdf de cap distribució coneguda. Per tant, hem d'intentar donar una expressió que caracteritzi la distribució que obtenim en aquestes circumstàncies.

En primer lloc, igual que en el cas 1, podem representar aquesta pdf com una combinació de les pdf's de diferents distribucions chi quadrat no centrals. La idea és la mateixa que en l'altre cas. Podem pensar que el pic de valor aproximat de 400, es donarà un 50% de les vegades (probabilitat de que existeixi transició de signe dins els 20 ms quan es faci la integració d'aquests). Aquest 50% vindrà caracteritzat de nou, per una distribució chi quadrat no central amb dos graus de llibertat i valor de no-centralitat 400.

L'altre 50% dels casos correspondran, novament, a la suma de diferents chi-quadrats. Ara bé, aquestes chi-quadrats no centrals amb dos graus de llibertat, que se sumaran, només seran 10, les corresponents a tenir el valor de no-centralitat igual a 0, 4, 16, 36, 64, 100, 144, 196, 256

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

o 324, i cadascuna amb la mateixa probabilitat de donar-se (un 5% del total de casos, sumant el 50% restant).

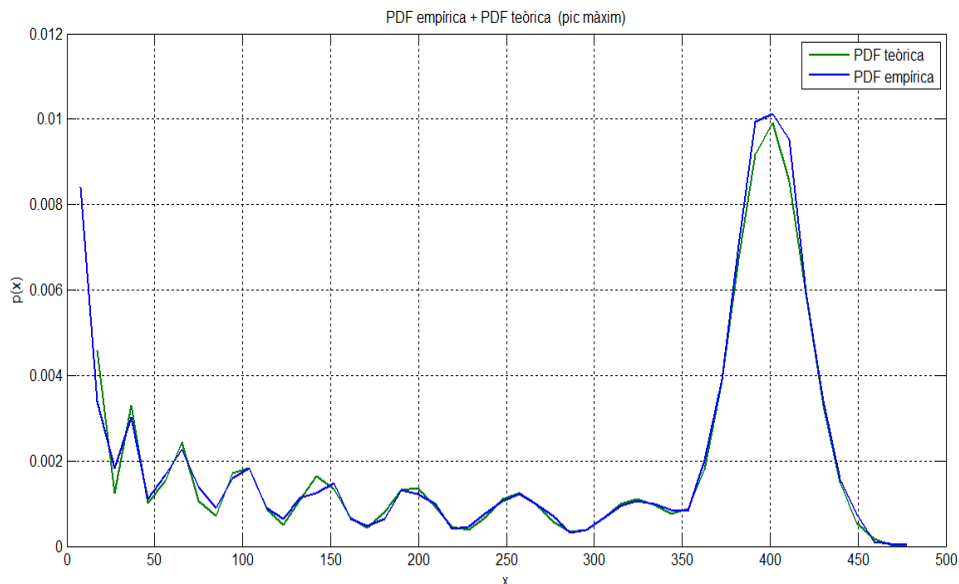


Figura 48: PDF empírica i teòrica cas#2, pic màxim (H1)

Veiem com la pdf generada s'ajusta a la pdf obtinguda a les simulacions, així que podem basar-nos en la forma en la que l'hem creat per tal de caracteritzar aquesta distribució de forma matemàtica, com hem fet també al cas 1.

La idea és bàsicament la mateixa. Tindrem dos expressions que anomenarem $p(x)_1$ i $p(x)_2$ i que se sumaran cadascuna representant el 50% de la pdf total. Pel que respecta a $p(x)_1$, tornem a tenir l'expressió d'una distribució chi quadrat no-central amb 2 graus de llibertat i valor de no-centralitat igual a 400:

$$p(x)_1 = 0.5 \cdot ncx2(x, 400, 2) = 0.5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+400)} \cdot I_0(\sqrt{(400x)}) \right) \quad 6-14$$

Mentre que $p(x)_2$ estarà formada per la suma de les diferents distribucions chi quadrat no centrals amb diferents valor de no-centralitat. Com en aquest cas, aquests valors només podran ser un dels 10 que hem dit, no integrarem l'expressió 6-7 a tot al rang de valors de 0 a 400 sinó que tindrem una expressió com a l'equació 6-15.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

$$p(x)_2 = 0.5 \cdot \sum_{\lambda=0}^{324} ncx2(x, \lambda, 2) \quad (\text{on } \lambda = 0, 4, 16, 32, 64, 100, 144, 196, 256 \text{ i } 324) \quad 6-15$$

Així que, unint els resultats de 6-14 i 6-15, la nostra pdf pot caracteritzar-se com es veu a l'equació següent:

$$p(x) = p(x)_1 + p(x)_2 = 0.5(ncx2(x, 400, 2)) + 0.5 \cdot \sum_{\lambda=0}^{324} ncx2(x, \lambda, 2) \quad 6-16$$

(on $\lambda = 0, 4, 16, 32, 64, 100, 144, 196, 256 \text{ i } 324$)

6.2.2.3 Cas #3 – seqüència integrada de 40 ms de senyal:

El tercer i últim cas d'interès que estudiarem és aquell on, per tal d'adquirir 20 ms com venint fent als casos anteriors, s'utilitzen 40 ms de senyal. L'objectiu d'aquest últim mètode d'adquirir la senyal és el següent. Dins de qualsevol seqüència de 40 ms de senyal que s'obtingui, sempre tindrem un bit de navegació (20 ms) complet. D'aquesta forma, un cop integrats aquests 40 ms, obtindrem sempre un pic màxim de correlació de valor 400 (20^2). És a dir, agafant 40 ms de senyal, el receptor sempre serà capaç d'alinejar els 20 ms de referència amb el bit de navegació inclòs als 40 ms; sigui quin sigui el desfasament de codi. Com veiem, aquest escenari es diferencia dels dos anteriors en el fet de que el valor del pic màxim sempre serà de 400 i no variarà en funció del desfasament de senyal o l'existència de transició de signe de bit.

De nou, hem de pensar en quin algoritme utilitzar per tal d'integrar aquests 40 ms. En aquest cas ens trobem amb el mateix problema del cas 2. La manera "lògica" d'integrar els 40 ms de senyal per tal de trobar l'inici del bit de navegació (situat a on trobarem el pic màxim de valor 400), podria ser utilitzar un codi de referència compost per 20 codis C/A + 20 ms de zeros. Llavors, simplement correlant de forma circular aquests 40 ms de codi de referència amb els 40 ms de senyal, obtindríem els pics de correlació i podríem detectar a on es troba l'inici del bit de navegació.

Ara bé, d'igual forma al que passava al cas 2, aquest mètode implicaria uns llargs temps de computació. És per això, que podem fer ús de la mateixa idea del mètode anterior, per utilitzar un algoritme basat en correlar aquests 40 ms en blocs de 2 ms. De forma que, novament

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

utilitzarem aquest algoritme per agilitzar el procés d'adquisició però tenint en compte que el resultat serà el mateix que el que obtindríem fent-ho de la primera forma que hem esmentat.

Per tant, hem utilitzat aquest mètode per tal d'adquirir 40 ms de la mateixa senyal rebuda simulada en els casos anteriors. La particularitat d'aquest últim escenari és que, per una banda, com hem dit el pic màxim de correlació sempre serà d'un valor proper a 400, ja que, independentment de que existeixi transició, sempre tindrem com a mínim 20 blocs C/A complets del mateix signe. La resta de pics, en canvi, es comporten de diferent forma en funció de que existeixi transició de signe o no dins de la seqüència correlada.

A les figures 49 i 50 hem esquematitzat, dos seqüències de 40 ms de senyal diferents amb les quals obtindríem els dos tipus de gràfiques pels pics de correlació que analitzarem més endavant. Aquests dos tipus de seqüències corresponen als diferents patrons que es pot trobar un receptor quan selecciona 40 ms qualsevols d'una senyal rebuda.

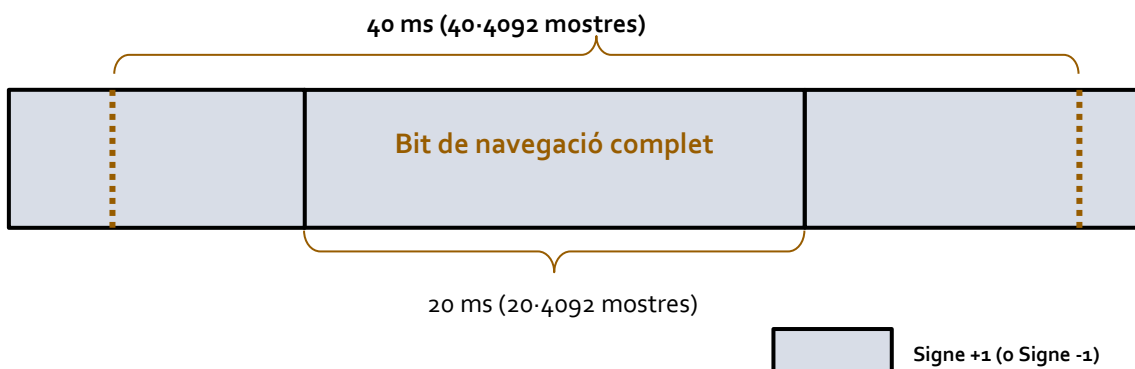


Figura 49: Seqüència de senyal integrada sense transicions de signe

En aquest primer cas, dins dels 40 ms integrats, podem veure com tenim un bit de navegació complet. A més, podem observar com no existeix cap transició de signe dins d'aquesta seqüència ja que els bits de navegació que trobem als dos extrems del nostre bit integrat, tenen mateix signe que aquest.

Remarquem el fet que el resultat serà el mateix independentment de que el signe de tots aquests chips sigui +1 o -1, el que influeix és únicament el fet de que siguin d'igual signe o diferent per tal de que existeixi transició o no.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

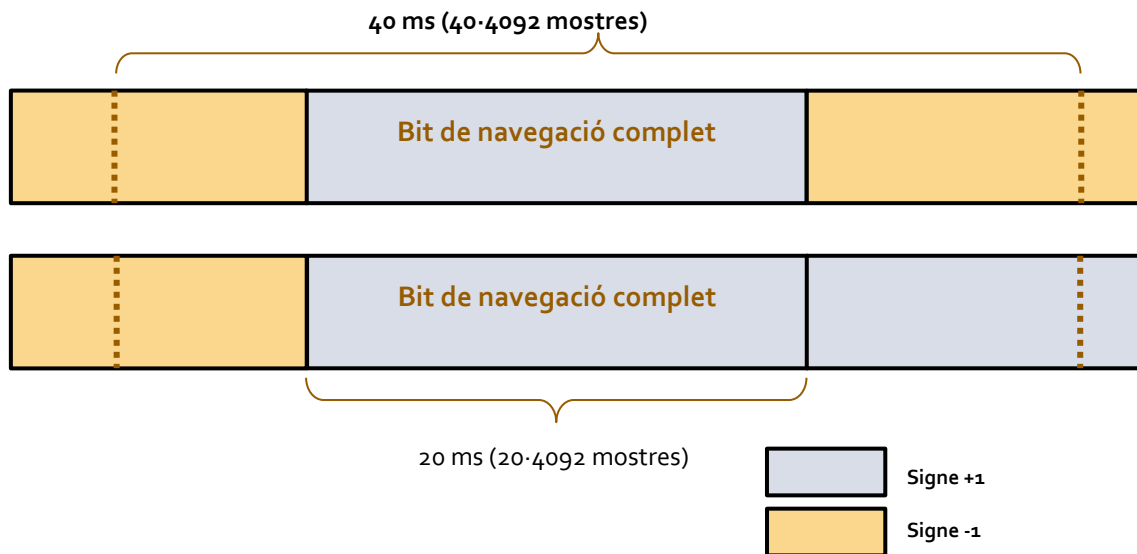


Figura 50: Seqüència de senyal integrada amb 1 o 2 transicions de signe

I a la figura 50 tenim l'altre cas on, dins de la nostra seqüència de 40 ms integrada, trobem un bit de navegació complet d'un signe determinat (en aquest cas +1) i als extrems trobem parts d'altres bits de navegació de signes diferents. Cal tenir en compte que podríem trobar el cas de tenir dos transicions de signe dins dels 40 ms, com seria el cas representat a la part superior, o podríem tenir tan sols una única transició de signe com es veu al cas representat a la part inferior.

Ara ja podem veure quina és la diferència existent entre les sortides de correlació que obtindríem si el fragment de senyal integrat segueix el patró de la figura 49 o bé segueix un patró com els de la figura 50.

Per una banda, la figura 52 correspon a la sortida del correlador quan, dins de la seqüència integrada de 40 ms no apareix cap transició de signe, el que hem esquematitzat a la figura 49. Dit d'una altra manera, tots els xips que formen aquests 40 ms de senyal, corresponen a bits d'igual signe, ja sigui +1 o -1.

El que podem veure és que, en aquest cas, obtenim 20 pics de correlació clarament superiors a la resta i tots amb un valor aproximat de 400 (el valor d'integrar un bit de navegació complet). Això és així a causa de l'ús de la correlació circular.

Recordem que podem interpretar de forma simplificada aquesta correlació circular com el fet d'agafar el codi de referència (20 ms de senyal + 20 ms de zeros) i multiplicar-lo amb la

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

seqüència de 40 ms mostra per mostra. Després de cada correlació, el codi de referència es desplaça una posició cap a la dreta, afegint l'última mostra al inici.

D'aquesta forma obtindrem un pic màxim de correlació sempre que es pugui multiplicar la seqüència de senyal i el codi de referència completament alineats. I això, en el cas de que no existeixi transició de signe, es produeix en 20 ocasions com es veu a l'esquema de la figura 51, que hem creat per entendre aquest fenomen.

L'exemple representat correspon al fet de tenir la senyal alineada amb el codi, però el resultat i el funcionament del mètode és igual en el cas de que no sigui així. Com veiem, a la primera multiplicació entre la senyal i el codi de referència, obtenim un pic màxim de valor 400 ja que tenim 20 blocs C/A de senyal completament alineats amb el codi de referència. Després d'aquesta primera multiplicació, el codi de referència es desplaçaria una mostra cap a la dreta, afegint aquesta a l'inici.

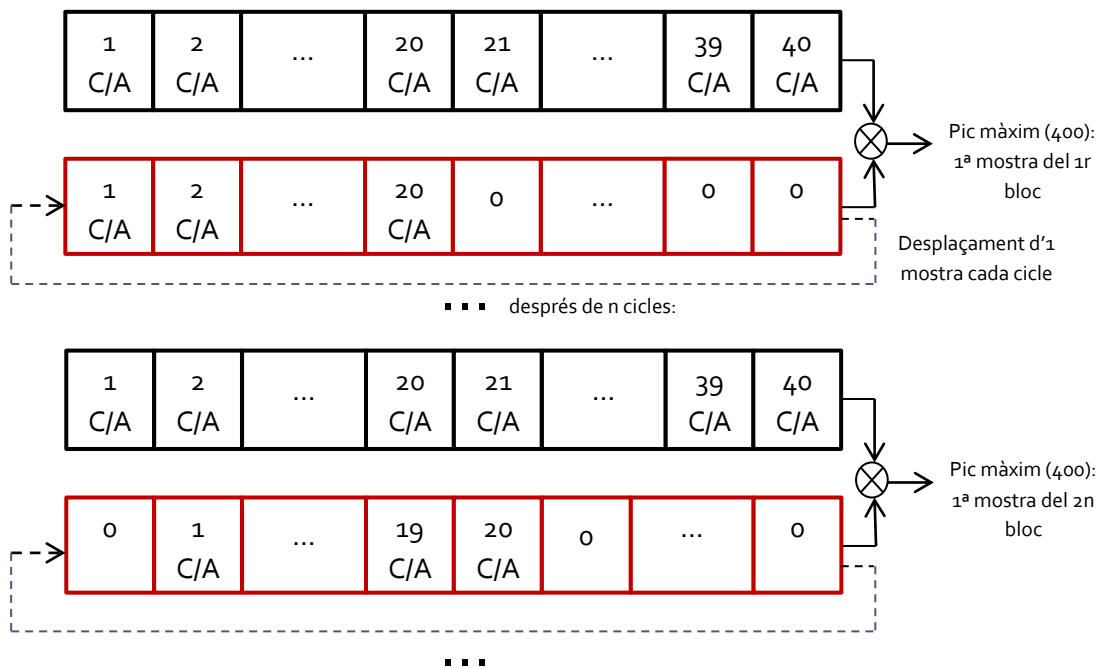


Figura 51: Esquema correlació circular cas #3

Ara, els 20 blocs C/A ja no estaran alineats amb el codi de referència, així que no obtindrem cap pic de valor 400, sinó que el pic podrà ser considerat com a pic de soroll. No serà fins a que s'hagi desplaçat un bloc C/A complet (n mostres), quan tornem a tenir, 20 blocs C/A de senyal

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

alineats amb el codi de referència, com es veu al segon cas representat a la figura. Tornaríem a obtenir un pic màxim de valor 400 però separat n posicions de desfasament de codi a la graella respecte l'anterior.

Com veiem, cada cop que tenim els 20 blocs C/A de referència alineats amb 20 dels blocs C/A de la seqüència integrada, obtindrem un pic màxim de 400. Això només succeeix 20 cops del total de $40 \cdot n$ multiplicacions

Aquesta és la raó dels pics observats a la gràfica de la figura 52, on només 20 pics tenen el valor de 400 i la resta tenen valors propers a zero, a causa de l'autocorrelació de codis C/A no alineats i el soroll.

En aquest cas, veiem com no podríem conèixer l'inici del nostre bit de navegació ja que, al no haver transició de signe, no podem saber quins xips corresponen a un bit de navegació i quin corresponen a un altre.

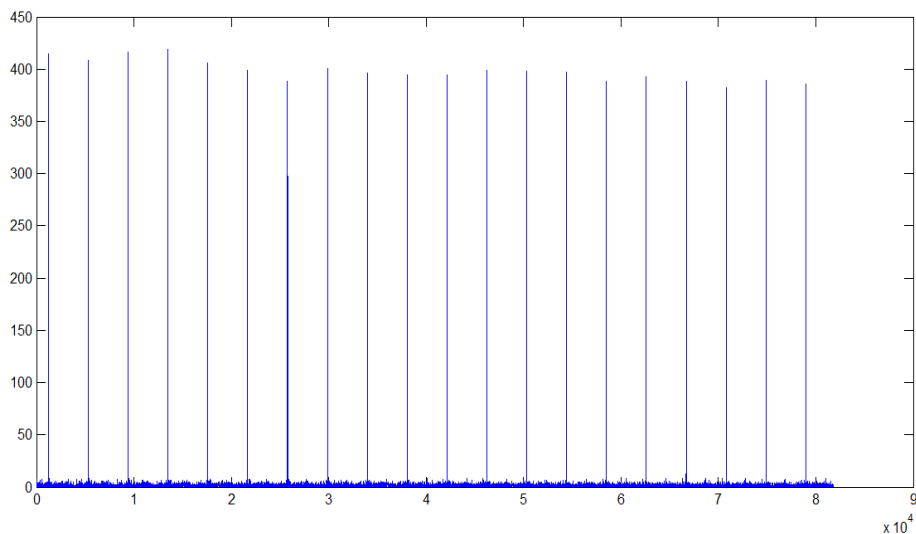


Figura 52: Pics de correlació cas#3, sense transició de signe

En canvi, a les figures 53 i 54, veiem com seria la sortida del correlador quan la senyal integrada es correspon als patrons de la figura 50, és a dir, a tenir 1 o 2 transicions de signe, respectivament.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

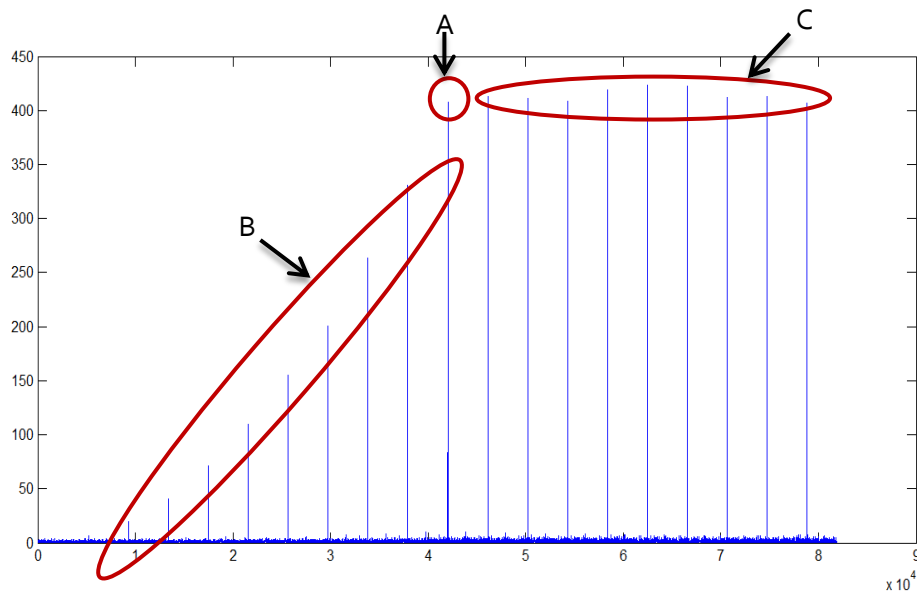


Figura 53: Pics de correlació cas#3, amb 1 transició de signe

Quan dins de la seqüència integrada només apareix una transició de signe, a la sortida del correlador podem veure com tindrem un pic de 400 centrat a la fase de codi corresponent a l'inici del bit de navegació (circumferència A a la figura). Però a banda d'aquest pic, obtindrem tota una sèrie de pics menors (circumferència B) i tota una sèrie de pics que també tenen un valor de 400 (circumferència C).

En canvi, si dins la seqüència integrada apareixen 2 transicions de signe, tindrem, novament el pic màxim de 400 corresponent a l'inici del bit de navegació i tota una sèrie de pics menors, dibuixant la forma triangular que s'observa a la figura 54. Podem notar que, a l'exemple que hem representat el pic màxim indica que l'inici del bit de navegació es troba al número de mostra 13232 respecte les $40 \cdot n$ (163680) mostres totals que contenen els 40 ms de la nostra senyal simulada. Recordant que cada xip de la nostra senyal GPS ha estat sobre-mostrat a raó de 4 mostres per xip, podem calcular que l'inici del bit de navegació a l'exemple el trobaríem al xip número 3308.

La raó d'aquests pics inferiors que apareixen a ambdós casos és, igual que passava amb els 20 pics del cas anterior, a causa de la correlació circular. En concret, si tenim dues transicions de signe, només en una ocasió els 20 ms de bit de navegació de la nostra senyal es trobaran alineats amb 20 ms de codis C/A de referència. En la resta de casos, només es trobaran

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

alineats 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2 o bé cap bloc de codi C/A complet, donant lloc als pics de 324, 256, 196, 144, 100, 64, 36, 16, 4 o 0 respectivament.

Recalquem el fet de que el valor d'aquests pics corresponen només a la correlació de valors parells de codis C/A complets ja que, quan es té un valor imparell de blocs alineats amb el codi de referència, (per exemple 19 a la figura 54), els blocs de signe contrari dels extrems de la senyal, fan que la correlació d'un d'aquests s'anul·li amb un dels 19 blocs alineats. Així que, només és possible tenir valors de pic corresponent a la correlació de números parells de blocs C/A complets.

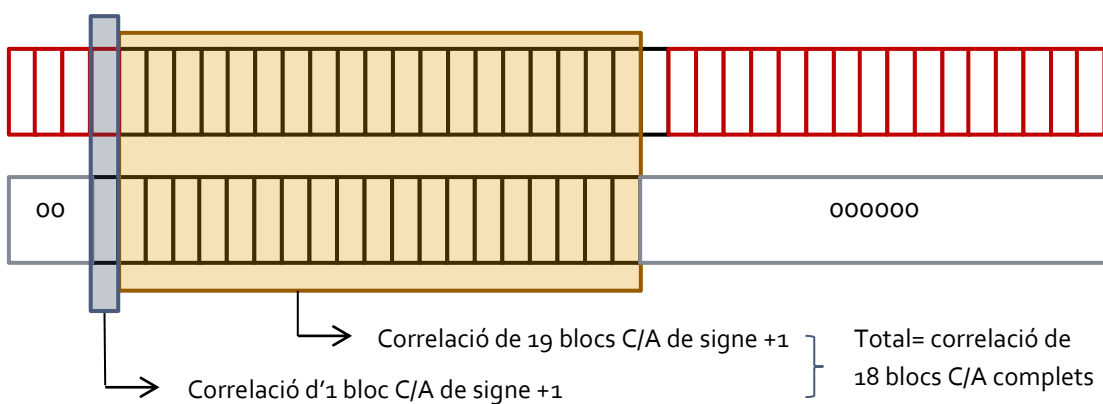


Figura 54: Exemple correlació de 19 blocs C/A complets al cas #3

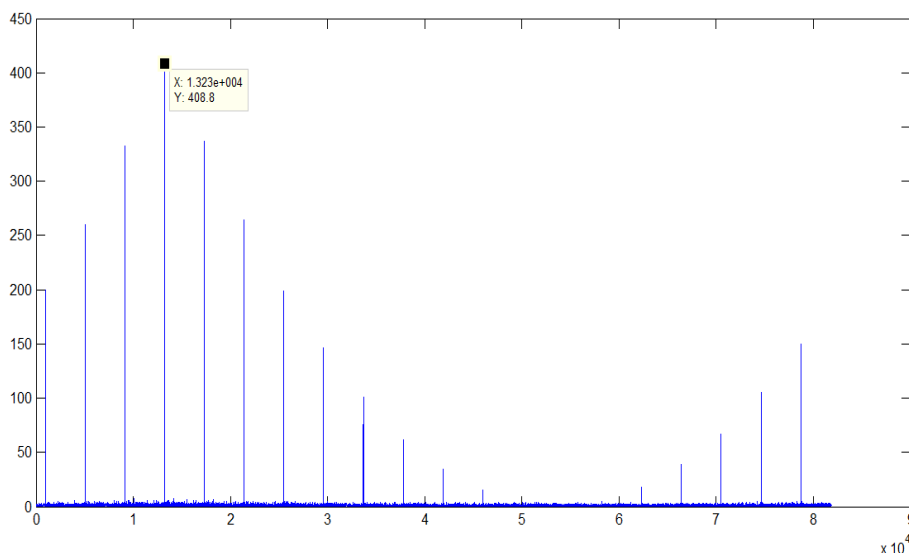


Figura 55: Pics de correlació cas#3, amb 2 transicions de signe

Com ja hem introduït, independentment del desfasament entre codi i senyal, sempre tindrem, com a mínim, un pic de valor proper a 400. En conseqüència, podem dir que, per a la hipòtesis

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

H_1 o pics de senyal, és obvi que la pdf correspondrà a una distribució chi-quadrada amb 2 graus de llibertat, no-central i amb valor de no-centralitat igual a 400. Això serà així per a qualsevol dels patrons anteriors, és a dir, amb 1, 2 o cap transició de signe dins dels 40 ms de senyal, i ho podem comprovar gràfica de la figura 56.

A continuació, per tal de realitzar el mateix estudi estadístic que als altres casos sota la hipòtesis H_0 , ens centrarem en l'últim tipus de patró que hem representat. Així que, farem totes les simulacions forçant el cas extrem on, dins de la seqüència integrada sempre existeixin dues transicions de signe per veure quina distribució segueixen els pics de correlació de gràfica triangular que hem vist a la figura 55.

En primer lloc, analitzem el cas on agafem qualsevol pic de soroll a cadascuna de les múltiples simulacions realitzades. Si fem això, dins de tot el nostre conjunt de pics de soroll, tindrem, els pics on només hi ha contribució de soroll, com sempre.

Però també tindrem aquells altres pics on existeix contribució de senyal+soroll, però corresponents a la integració de menys de 20 ms. Per aquesta raó, tot i que la pdf continuarà tenint una distribució chi-quadrat no central, en aquest cas, la cua d'aquesta es veurà allargada, a causa de la contribució d'aquests altres pics.

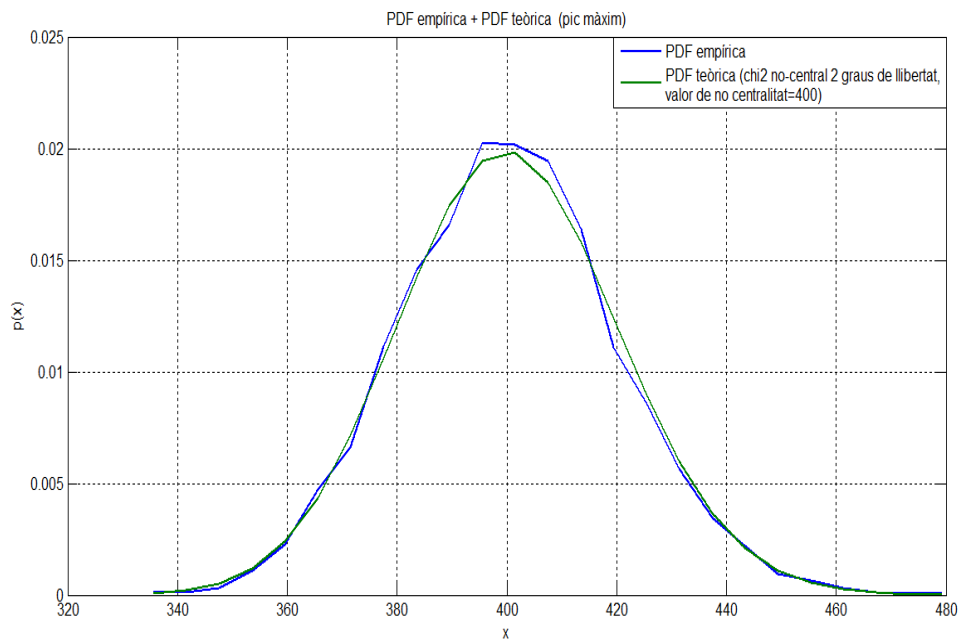


Figura 56: PDF empírica i teòrica cas#3, pic màxim (H_1)

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

Queda clar, i es veu reflexat a la gràfica de la figura 57, que la contribució d'aquests pics de soroll "majors" és molt més inferior, que no pas la resta de pics d'únicament soroll. Així que la major part de la probabilitat pel valor dels pics de soroll en aquest cas, la tornem a trobar als valors propers a zero.

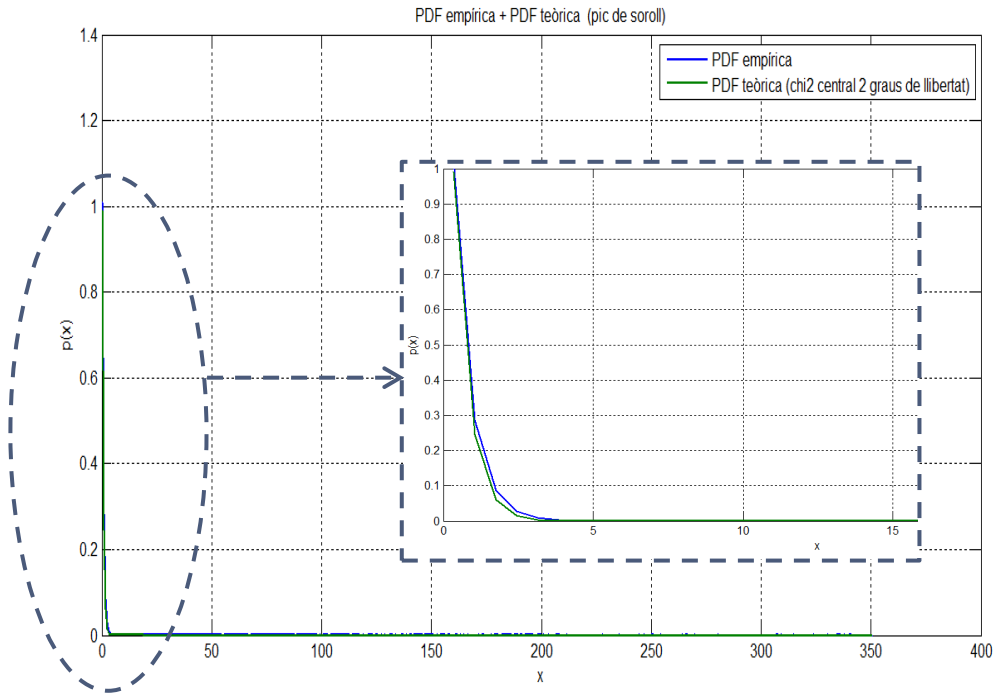


Figura 57: PDF empírica i teòrica cas#3, pic soroll qualsevol (H_1) (amb ampliació)

Però, veiem com varia aquesta gràfica si ara escollim només el pic de soroll més gran, a cada simulació realitzada. En primer lloc, tornem-nos a fixar en la forma que tenen els pics de correlació d'una simulació qualsevol en aquest escenari i que ja hem representat a la figura 55.

Si d'aquesta forma triangular que descriuen, eliminem el pic màxim de senyal+soroll de valor aproximadament 400, ens quedem amb un conjunt de pics, el major dels quals es correspon a un valor d'aproximadament 324.

Aquest és el pic corresponent a la integració de 18 codis C/A complets, i del qual ja hem explicat la seva raó d'aparèixer quan hem analitzat les diferents gràfiques de pics de correlació d'aquest últim cas 3. De manera que, en el cas de que per a la hipòtesis H_0 , només tinguem en compte el pic màxim de soroll, la pdf dels pics de soroll serà la mateixa que la que tindriem per als pics de senyal+soroll en la integració de només 18 ms de senyal sense transició de signe.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

I recordant el que s'ha vist a apartats anteriors, aquesta pdf seguiria una distribució chi-quadrat no-central amb dos graus de llibertat i amb valor de no centralitat de 324 (18^2). Justament, la mateixa distribució que obtenim en la nostra simulació a la figura 58.

En aquests casos, és molt important tenir present aquesta distribució ja que com veiem les pdf's de senyal+soroll i de soroll són molt semblants (segueixen el mateix tipus de distribució), i totes dues es troben centrades a valors molt propers.

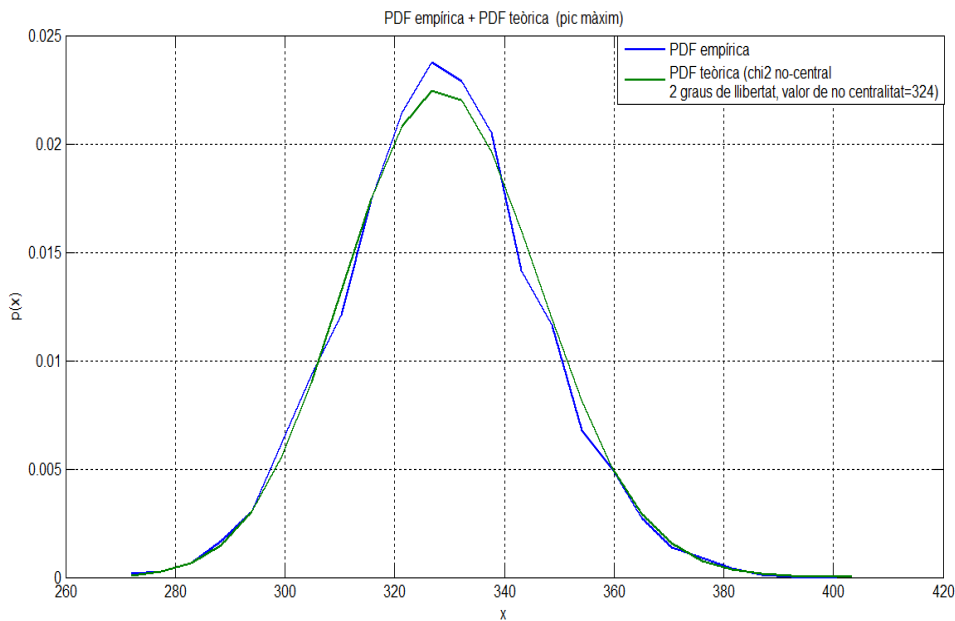


Figura 58: PDF empírica i teòrica cas#3, pic soroll màxim (H_0)

A la figura 59, hem representat com quedarien les probabilitats de detecció i falsa alarma en aquest cas, i fixant un llindar de detecció que hem escollit de forma arbitrària. El que hem fet és representar, sobre una mateixa gràfica, les funcions densitat de probabilitat dels pics màxims (H_1) i del pic de soroll més gran (H_0) que acabem de calcular.

D'aquesta forma, i marcant el llindar de detecció amb la línia vermella, hem ressaltat amb diferents tonalitats la probabilitat de detecció, de falsa alarma, de fals rebuig i de rebuig correcte, segons el que hem explicat al capítol 5.

6. CARACTERITZACIÓ ESTADÍSTICA DELS PICS DE CORRELACIÓ EN PRESENCIA DE TRANSICIONS DE BITS

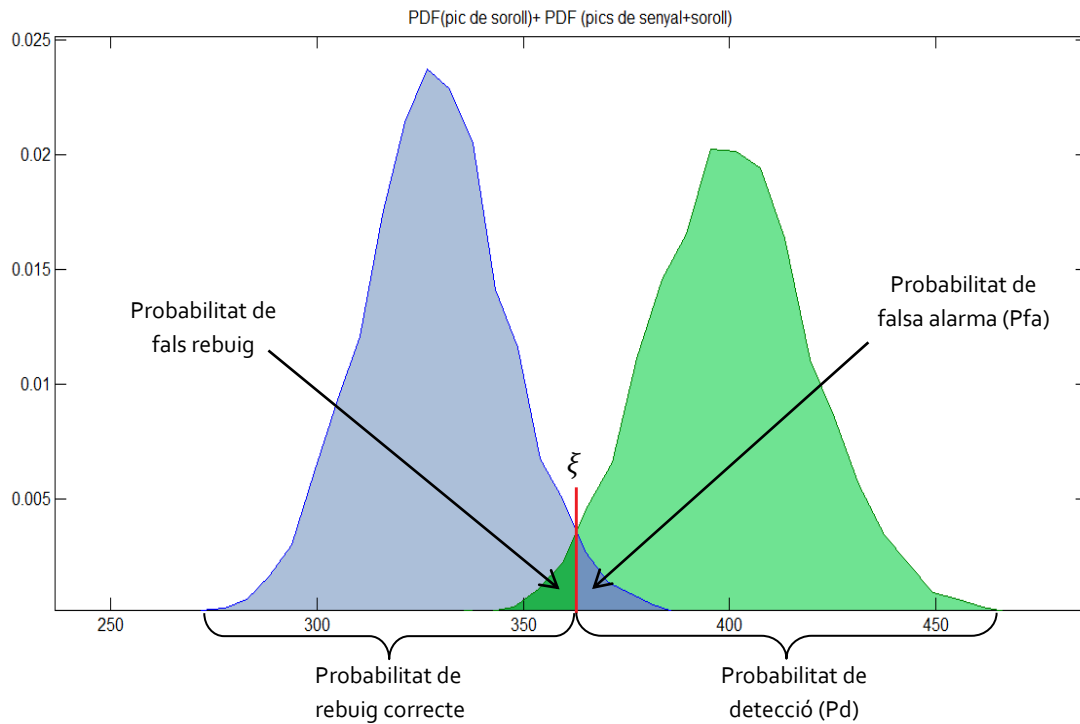


Figura 59: Exemple representatiu dels indicadors d'acompliment per a un valor de llindar de detecció fixat, amb les pdf's obtingudes a la simulació

7. CORBA ROC:

Per finalitzar amb l'anàlisi estadístic dels pics de correlació en presència de transicions de signe i de les formes que tenen les seves distribucions, farem un breu anàlisi d'un concepte molt a tenir en compte alhora de dissenyar els receptors GPS. És el que es coneix com corba ROC²⁴.

A la teoria de detecció de senyals, les corbes ROC són les gràfiques que permeten representar la sensibilitat del receptor o probabilitat d'encert en la detecció, en funció de la probabilitat de falsa alarma, per a qualsevol sistema de decisió binària i a mida que es fa variar el llindar de discriminació.

En el cas del sistema GPS, que com hem vist, forma part dels sistemes de decisió binària, podem generar la corba ROC a partir de les probabilitats de detecció i de falsa alarma, que com ja hem explicat, podem obtenir a partir de les diferents àrees que es creen al representar les funcions de densitat de probabilitat des pics de correlació sota la hipòtesis H_0 i sota la hipòtesis H_1 sobre una mateixa gràfica.

Cal tenir en compte, que la corba ROC d'un sistema determinat, variarà segons la relació C/No de les senyals rebudes amb les que es calculen les distribucions estadístiques de les que hem parlat, així com del tipus d'adquisició que es realitza i de la longitud de la seqüència integrada. És per això que les corbes ROC, ens poden servir com a paràmetre de comparació entre diferents sistemes d'adquisició per tal de determinar quin ens pot proporcionar un funcionament més òptim. Aquest funcionament òptim és el que ens proporciona una probabilitat de detecció major per a valors també grans de probabilitat de falsa alarma.

Per tant, si el nostre sistema té unes pdf's per a les hipòtesis H_1 i H_0 que apareixen molt solapades, llavors les probabilitats de detecció i falsa alarma obtingudes per a diferents valors de llindar ens podran proporcionar unes corbes ROC menys òptimes. El que farem serà calcular aquestes corbes ROC obtingudes a cadascun dels 3 diferents casos estudiats a l'apartat anterior. Ho farem, tenint en compte les dues formes d'escollir els pics de soroll i representarem en cada cas les pdf's obtingudes per cada hipòtesis sobre una mateixa gràfica.

²⁴ ROC: Receiver Operating Characteristic

Finalment, compararem totes aquestes cobres ROC per tal de valorar quin mètode d'adquirir 20 ms de senyal de forma coherent és més òptim en presència transicions de signe. Abans de tot, cal tenir en compte, que realitzarem aquest anàlisi simulant les senyals rebudes amb una relació C/No de 20 dBHz, valor amb el que obtindrem unes pdf's H_1 i H_0 més properes entre si per tal d'analitzar les P_d i P_{fa} i poder representar la corba ROC d'una forma més senzilla.

7.1 Corbes ROC dels diferents casos escollint un pic aleatori de soroll:

En primer lloc, hem representat les pdf's obtingudes pels 3 diferents casos quan, per calcular la pdf dels pics de soroll, escollim un pic aleatori. Com veiem, tot i que la C/No de la senyal rebuda simulada és baixa (20 dBHz), al integrar els 20 ms amb transicions de signe, de qualsevol de les formes que hem utilitzat, obtenim una pdf de soroll amb una cua que gairebé no es solapa amb la pdf de senyal. Això fa que, sigui quin sigui el llindar de detecció fixat, la probabilitat de detecció sempre serà molt gran i es pot escollir un valor de llindar que permeti tenir una probabilitat de detecció molt superior a la probabilitat de falsa alarma. Això es veu reflexat a les 3 ROC's representades. Com s'observa, la forma d'aquestes gràfiques indica com amb valors de la probabilitat de falsa alarma molt petits, la probabilitat de detecció ja és pràcticament del 100%. És per això que s'ha representat un zoom de la part on trobaríem la corba de la gràfica, és a dir el punt on s'assoleix el 100% de probabilitat de detecció. Aquest punt, el trobem en tots tres casos molt proper al zero de la probabilitat de falsa alarma.

7.1.1 Cas 1:

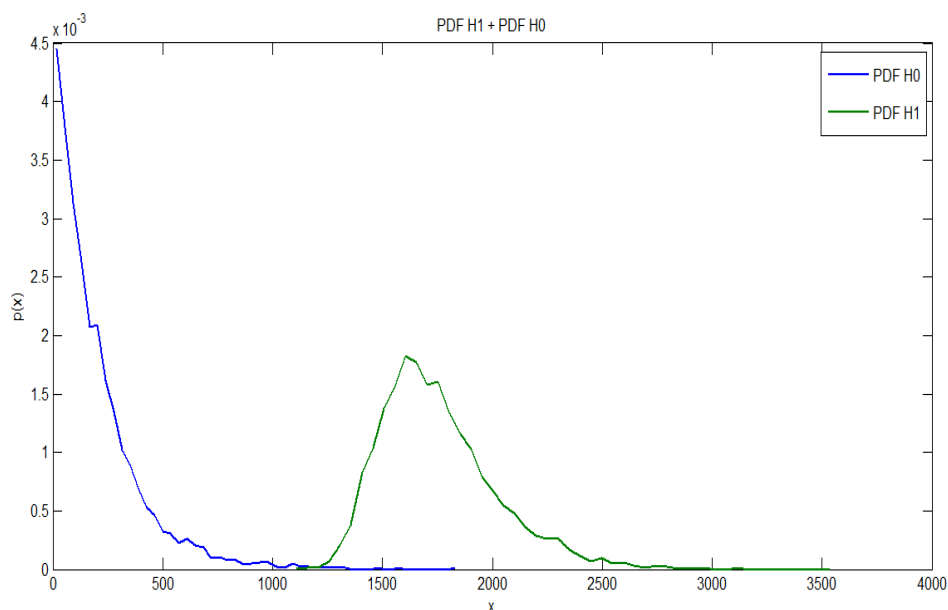


Figura 6o: PDF's H_0 i H_1 cas 1 pic de soroll aleatori

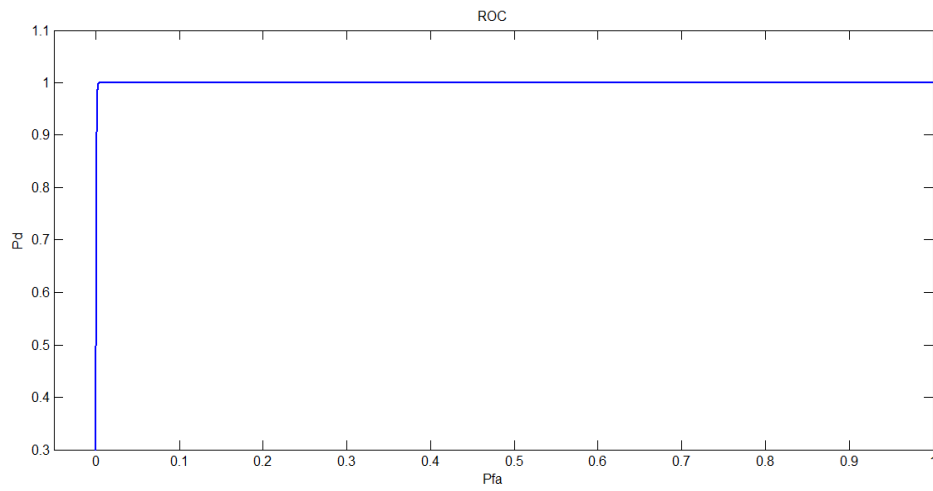


Figura 61: ROC cas 1 pic de soroll aleatori

7.1.2 Cas 2:

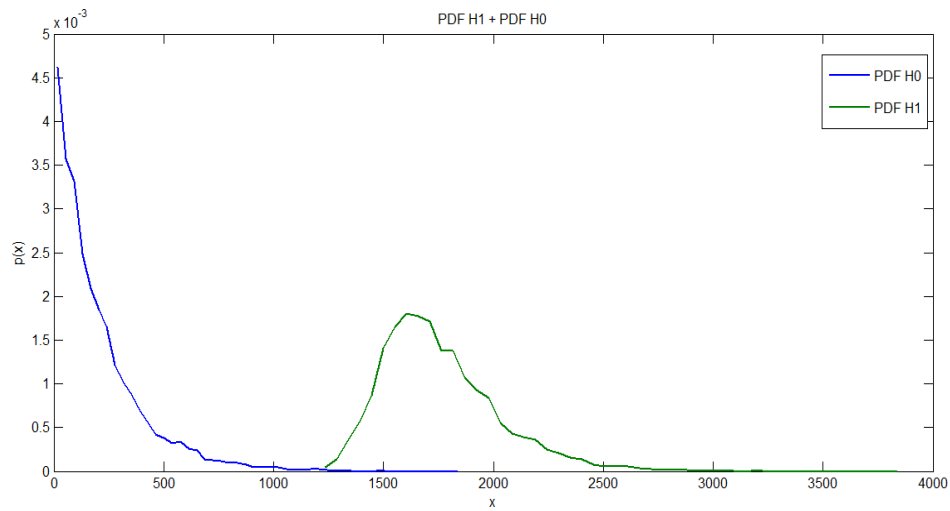


Figura 62: PDF's H_0 i H_1 cas 2 pic de soroll aleatori

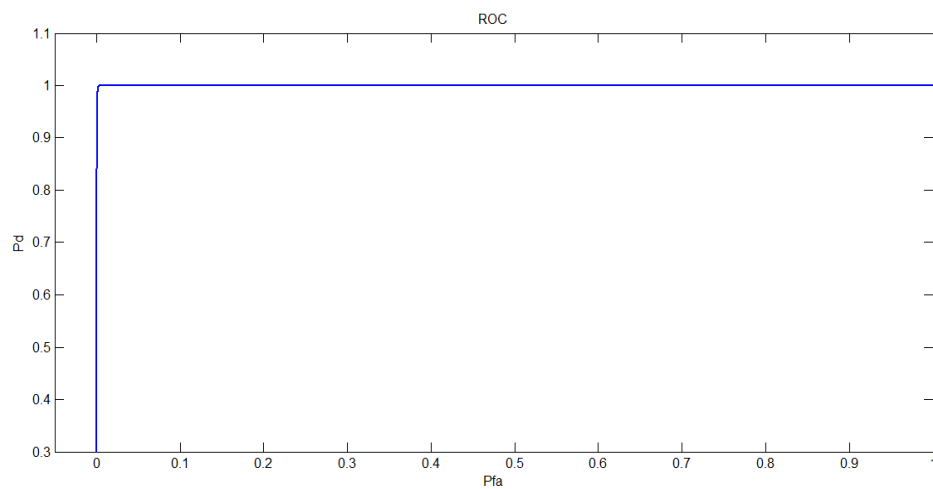


Figura 63: ROC cas 2 pic de soroll aleatori

7.1.3 Cas 3:

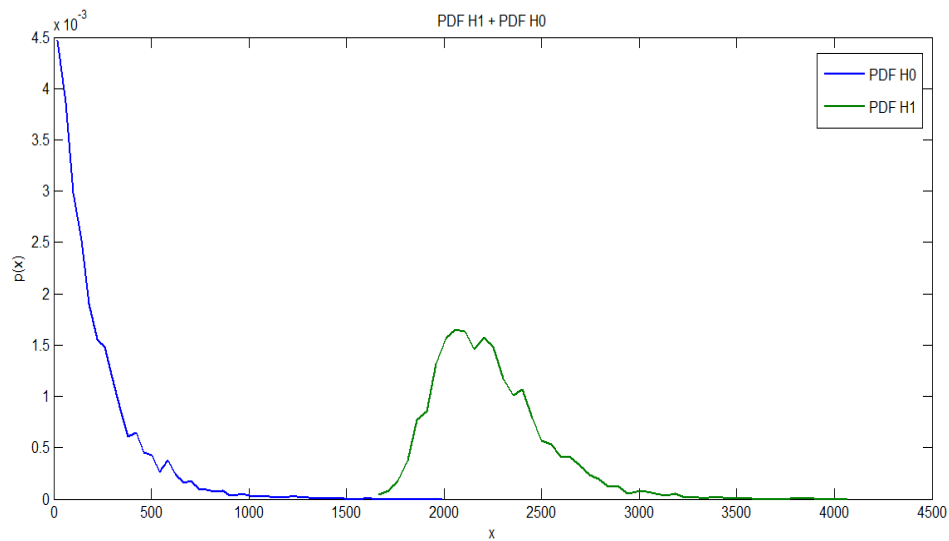
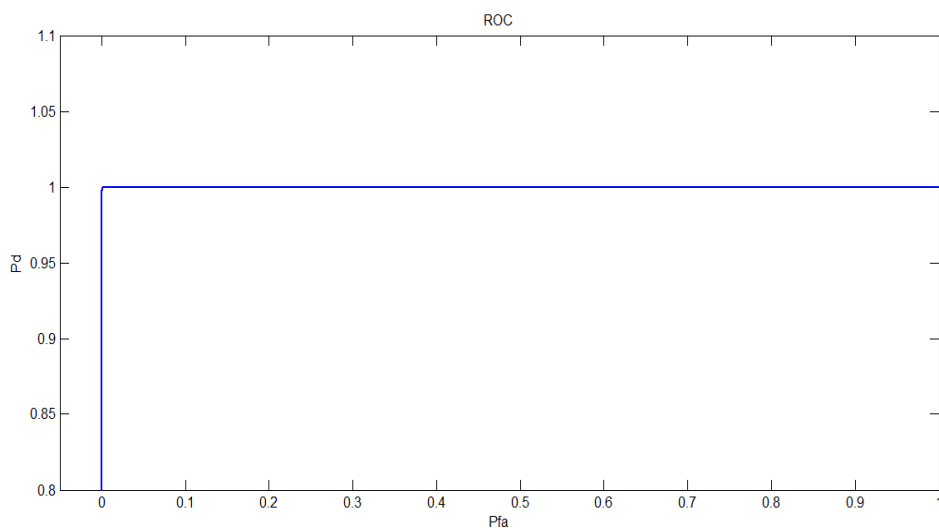
Figura 64: PDF's H_0 i H_1 cas 3 pic de soroll aleatori

Figura 65: ROC cas 3 pic de soroll aleatori

7.2 Corbes ROC dels diferents casos escollint el pic màxim de soroll:

7.2.1 Cas 1:

En canvi, quan el pic de soroll que agafem és el màxim, la funció densitat de probabilitat dels pics de soroll es veu desplaçada cap a la dreta, solapant part de la funció densitat de probabilitat dels pics de senyal. Això provoca que la relació entre la probabilitat de detecció i de falsa alarma es degradi. El resultat d'aquest fenomen és que les ROC's obtingudes no creixen tant com als casos anteriors. De manera que, per a certs valors de llindar, la probabilitat de falsa alarma és relativament alta respecte la probabilitat de detecció.

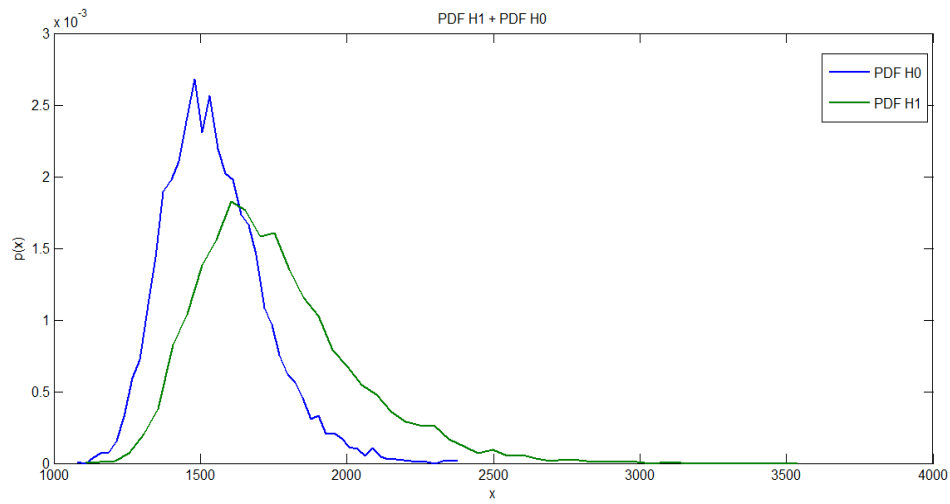


Figura 66: PDF's H_0 i H_1 cas 1 pic de soroll màxim

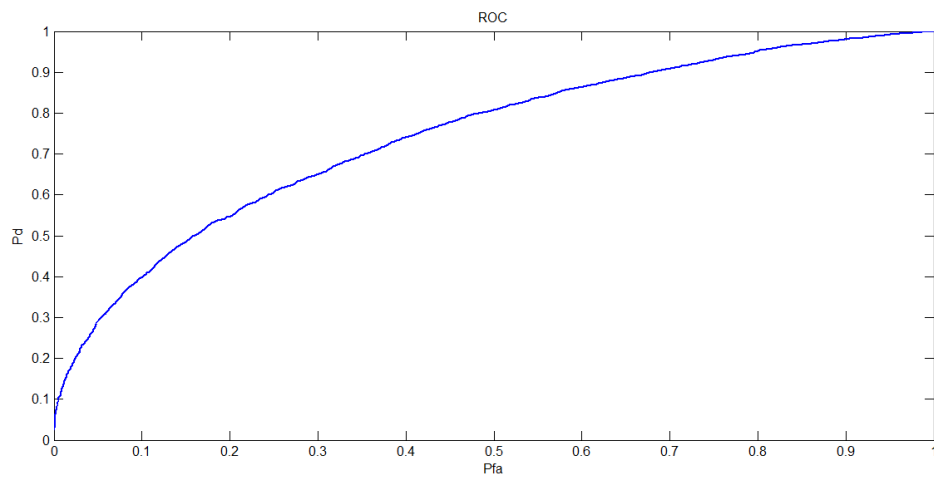


Figura 67: ROC cas 1 pic de soroll màxim

7.2.2 Cas 2:

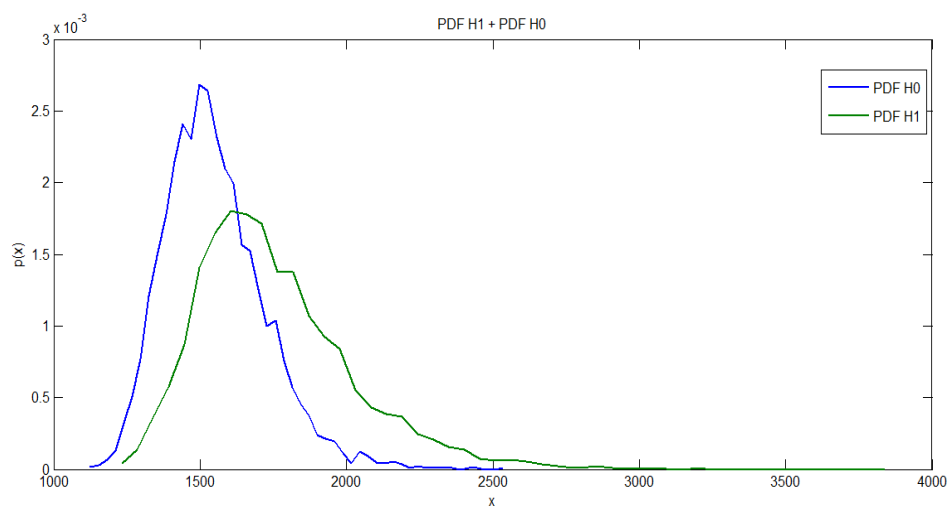


Figura 68: PDF's H_0 i H_1 cas 2 pic de soroll màxim

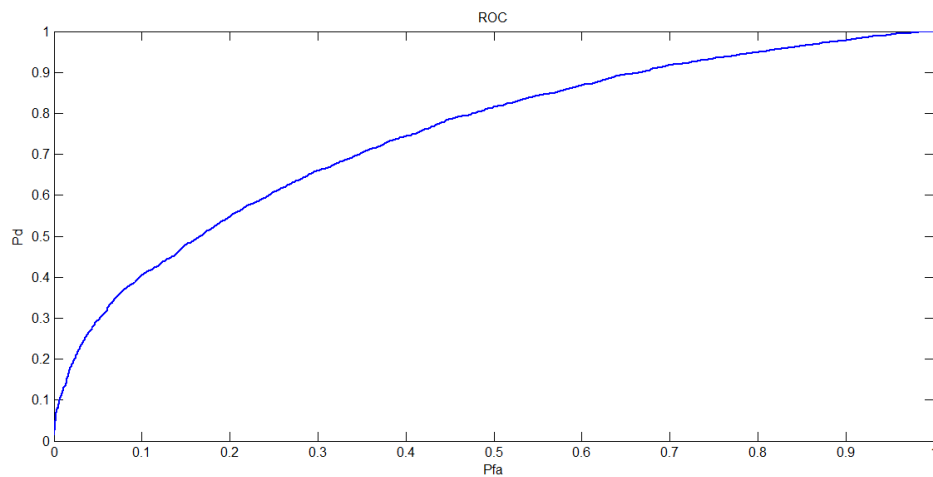


Figura 69: ROC cas 2 pic de soroll màxim

7.2.3 Cas 3:

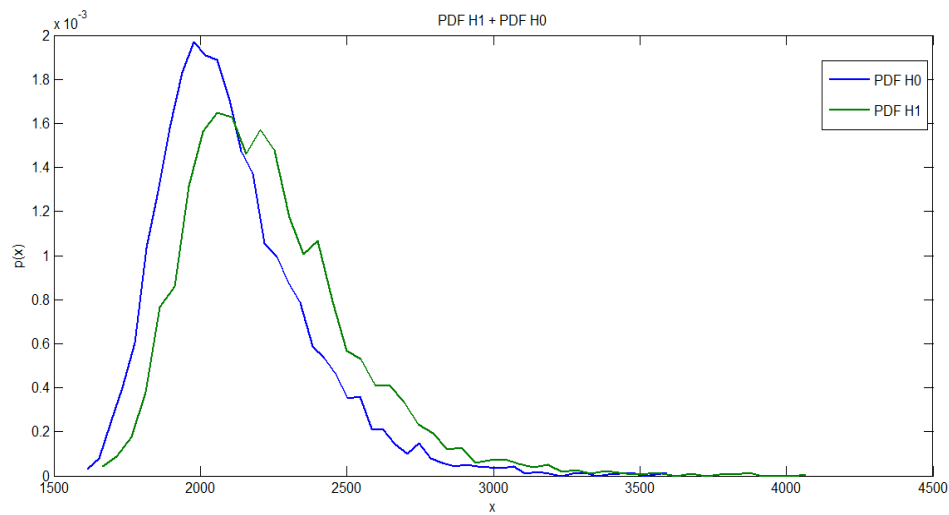


Figura 70: PDF's H0 i H1 cas 3 pic de soroll màxim

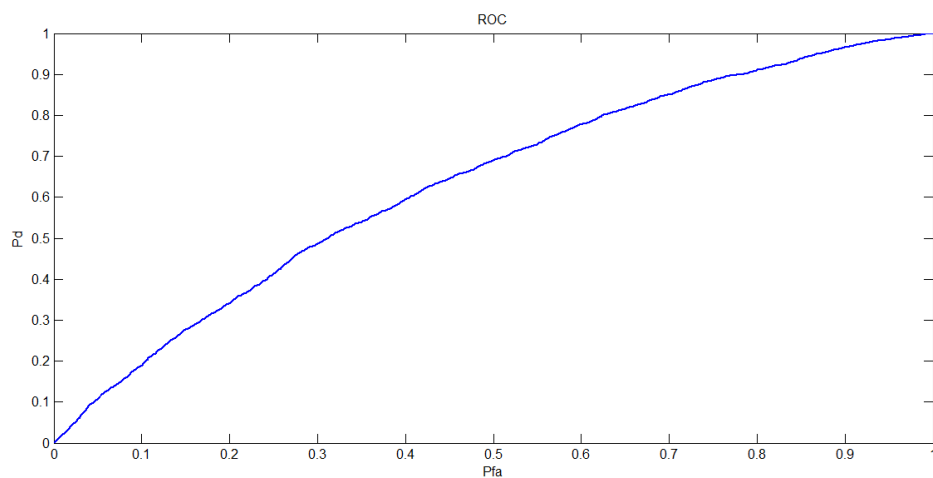


Figura 71: ROC cas 3 pic de soroll màxim

7.3 Comparativa ROC's pic de soroll aleatori:

Per acabar, representarem les ROC's obtingudes a l'anàlisi anterior sobre una mateixa gràfica. En primer lloc, tenim les ROC's dels 3 casos en que escollim un pic aleatori de soroll per a la hipòtesis H_0 . Com podem veure, tot i que com hem dit, els tres casos ens proporcionen unes ROC molt òptimes, és en el cas 3 on trobem el millor resultat. Recordem que aquest és el cas on, per integrar els 20 ms de senyal, utilitzem una seqüència de 40 ms de forma que sempre obtenim un pic màxim de 400. Això fa que la pdf de senyal en aquest cas estigui sempre lleugerament més desplaçada a la dreta que als altres casos, minimitzant la possibilitat de solapar-se amb la cua de la pdf de soroll.

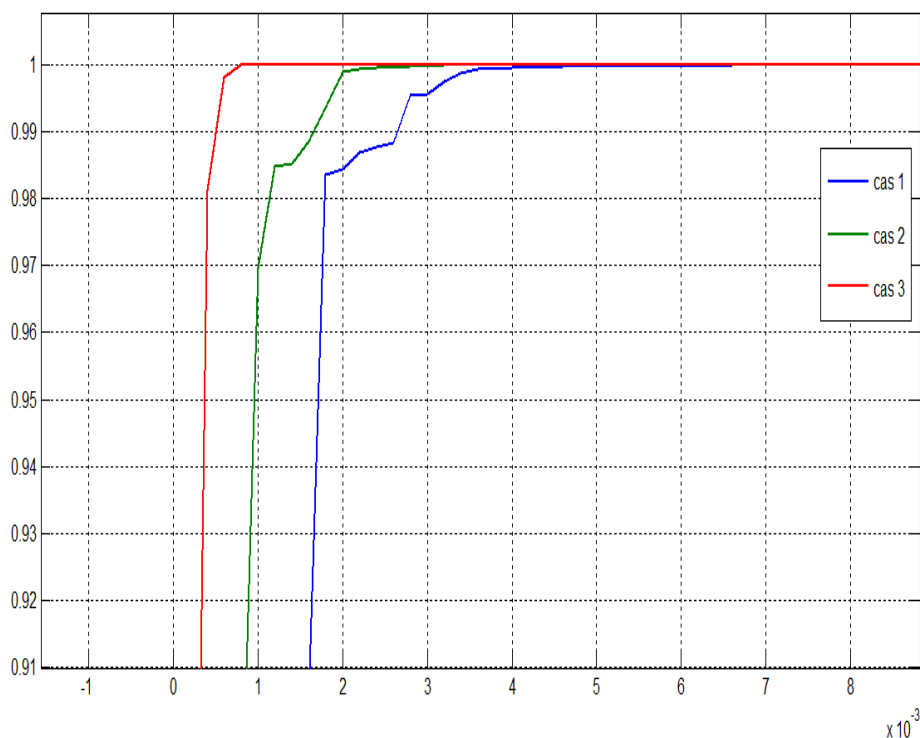


Figura 72: Comparativa ROC's pics de soroll aleatori

7.4 Comparativa ROC's pic de soroll màxim:

En canvi, ara compararem les ROC's que obtenim quan el pic de soroll escollit per a la hipòtesis H_0 és el màxim. Com es pot veure a la figura 73, en tots 3 casos d'adquisició, obtenim una ROC molt menys favorable que en la dels casos anteriors. També podem veure com, ara el tipus d'adquisició escollit sí implica un canvi significatiu a la forma que descriu aquesta corba.

En concret, veiem com és en el cas 3 on la ROC és més baixa, mentre que pel que respecta als altres 2 casos, obtenim pràcticament la mateixa resposta. Aquest resultat és lògic i és el que cabia esperar dels resultats que hem obtingut al llarg del capítol 6. Ja que hem vist que és en el cas 3 on apareixen pics de soroll amb una amplitud major a causa del pic resultat de correlar 18 blocs C/A. El valor d'aquest pic fa que la distribució de la pdf del soroll passi a ser una chi-2 no central i es trobi tant desplaçada cap a la dreta que solapa gran part de la pdf de senyal. Així que serà en aquest cas on s'haurà d'escollir molt bé el llindar de detecció per tal d'obtenir una probabilitat de detecció gran en relació amb la probabilitat de falsa alarma.

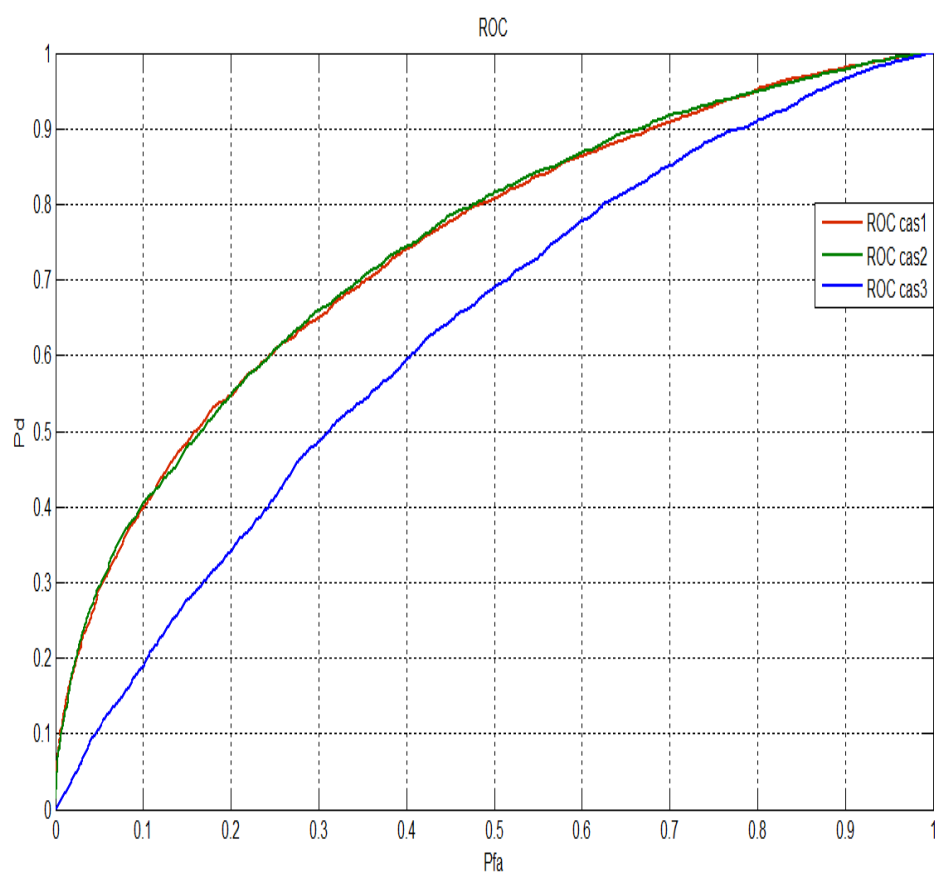


Figura 73: Comparativa ROC's pics de soroll màxim

8. CONCLUSIONS:

Al llarg de tot el projecte, s'ha intentat donar, en primer lloc, una visió general dels fonaments del sistema GPS des de diversos punts de vista. Ens hem volgut centrar en el receptor i en el bloc d'adquisició com a element clau per tal de poder rebre i processar les senyals enviades pels diferents satèl·lits. Alhora hem analitzat i hem posat èmfasis en explicar alguns dels principals mètodes que existeixen per tal de dur a terme aquesta adquisició de les senyals així com es fa la seva implementació.

A partir d'aquí, hem comentat els aspectes més rellevants a tenir en compte alhora de decidir si les senyals adquirides poden ser considerades com a una bona senyal GPS o si per contra es tracta només de soroll. En aquest sentit, hem parlat de com sol fer-se la decisió entre les diferents hipòtesis a un receptor GPS, i com a partir d'aquestes i de la seva estadística poden obtenir-se les probabilitats de detecció i de falsa alarma.

Un cop fixades aquestes bases teòriques per a entendre i poder realitzar el nostre estudi, hem passat a analitzar la estadística dels pics de correlació obtinguts quan adquirim les senyals a un receptor GPS. Al llarg d'aquest anàlisi hem utilitzat un algoritme d'adquisició de cerca de fase de codi en paral·lel i hem calculat, representat i hem intentat donar una caracterització matemàtica de les distribucions estadístiques que segueixen les pdf's tant dels pics de soroll com els pics de senyal. Hem realitzat aquestes proves sota diferents escenaris, tot i que sempre realitzant integracions coherents de senyal. En concret, hem partit utilitzant seqüències curtes de senyal sense transicions de bits de navegació i hem comprovat com aquestes estadístiques canviaven a mida que la longitud de la seqüència escollida augmentava.

Després d'haver comprovat com són i quines distribucions segueixen les estadístiques dels pics en aquestes circumstàncies, ens hem centrat en la integració coherent d'un bit de navegació complet. És a partir d'aquest punt, on hem incorporat al nostre estudi la presència de transicions de signe dins de les seqüències integrades per tal d'analitzar com les estadístiques dels pics de correlació es veuen modificades. En primer lloc, hem analitzat l'efecte d'aquestes transicions de signe, quan adquirim seqüències curtes de senyal i un cop enteses les repercussions d'aquest fet a nivell estadístic, hem modelat l'efecte d'aquestes transicions al adquirir un bit de navegació complet. Primer, condicionant el fet de tenir la transició a un punt conegut de la seqüència integrada. Més tard, permetent que aquesta transició es pugui trobar a qualsevol punt com ens trobaríem al cas real a un receptor GPS.

Hem treballat sota tres escenaris/casos diferents alhora d'integrar aquests 20 ms de senyal corresponents a un bit de navegació. D'aquesta forma hem pogut veure com, no només la longitud de la seqüència integrada, la relació senyal a soroll de la senyal rebuda o la presència o no de bits de navegació fan variar les estadístiques dels pics de correlació. També la forma en la qual s'adquireixen aquestes senyals quan arriben al receptor així com el criteri de decisió utilitzat per triar la hipòtesis correcta per a cada pic de correlació obtingut, fan que aquestes distribucions estadístiques canviïn.

Finalment, per tal d'entendre quin efecte tenen tots aquests canvis produïts a les pdf's dels pics de senyal i de soroll, al funcionament del nostre receptor GPS, hem parlat de la corba ROC. Amb aquesta intenció, hem calculat les diferents corbes ROC obtingudes als mateixos escenaris amb els que hem anat treballant al llarg de tot el projecte i d'aquesta forma hem pogut comparar quin d'aquests casos ens proporciona unes prestacions més òptimes.

Com a conclusió general d'aquest estudi, podem dir que ha quedat demostrat com, tot i que la capacitat de detectar les senyals rebudes als receptors, augmenta a mida que les integracions coherents es fan sobre seqüències majors, la probabilitat de tenir presència de transicions de signe dins d'aquestes seqüències també augmenta. I, com hem comprovat, aquesta existència de transicions de signe, empitjora les estadístiques dels pics, dificultant el fet de poder detectar les senyals, augmentant la probabilitat de falsa alarma i, en conseqüència obtenint unes ROC's molt menys òptimes.

Les vies d'estudi que deixa obert aquest projecte són diverses. Per una banda, en el nostre cas hem volgut caracteritzar i estudiar a nivell estadístic només el fet de tenir transicions de bits i per tant, hem treballat amb la idea de poder tenir qualsevol desfasament entre la senyal i el codi local utilitzat al receptor. És per això, que hem deixat de banda el fet de que la senyal rebuda ens pugui arribar amb una desviació de freqüència provocada per l'efecte Doppler. Tot i que hem comentat l'existència d'aquest efecte, hem simulat senyals rebudes de les quals coneixíem la freqüència portadora amb la que arribaven al receptor. Una possible ampliació del nostre estudi podria ser el fet d'estudiar com totes aquestes estadístiques que hem extret es veuen modificades si també s'incorporen tots els errors de detecció provocats per les desviacions freqüencials. Un altre aspecte que podria estudiar-se, és quin efecte tenen les transicions de signe quan a les adquisicions es combinen integracions coherents amb integracions no-coherents com sovint es realitza als receptors GPS i estudiant aquest fet amb diferents longitud de seqüència i número de integracions utilitzades.

9. REFERÈNCIES:

- [1] James Bao, Yen Tsui, "Fundamentals of Global Positioning System Receivers, A Software Approach", John Wiley & Sons, Inc., Publication, Hoboken (New Jersey), Segona Edició, 2005.
- [2] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, John R. Buck, "Discrete-Time Signal Processing", Prentice Hall, Segona Edició, 1999.
- [3] Kai Borre, Dennis M. Akos, Nicolaj Bertelsen, "A Software-Defined GPS and Galileo Receiver", Birkhäuser Boston, Primera Edició, 2007.
- [4] Elliot D. Kaplan, Christopher J. Hegarty, "Understanding GPS, Principles and Applications", Boston : Artech House, Segona Edició, 2006.
- [5] Oriol Sallent Roig, José Luis Valenzuela González, Ramón Agustí Comes "Principios de comunicaciones móviles", Barcelona : Edicions UPC, 2003.
- [6] Robert Gold, "Optimal binary sequences for spread spectrum multiplexing", IEEE Transactions on Information Theory, 1967
- [7] R.C. Dixon, "Spread Spectrum Systems", John Wiley & Sons, New York, Segona Edició, 1984.
- [8] Steven M. Kay, "Fundamentals of statistical signal processing", Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1998.
- [9] Frank Van Diggelen, "A_GPS: Assisted GPS, GNSS, and SBAS", Boston : Artech House, 2009
- [10] Ángel Corbasí Ortín, "Sistemas de navegación: desde el compàs magnético a la navegación por Satélite", McGraw-Hill, 1998.
- [11] "Navstar GPS User Equipment Introduction", Versió pública a la pàgina web de la Guàrdia Costera dels EEUU: <http://www.navcen.uscg.gov/pubs/gps/gpsuser/gpsuser.pdf>, Setembre 1996.

- [12] Pàgina web de l'Oficina de Coordinació Nacional de Posicionament, Navegació i Cronometria per Satèl·lit del govern dels Estats Units: Official U.S. Government information about the Global Positioning System (GPS) and related tòpics, <http://www.gps.gov>
- [13] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, "Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [14] D.J.R. Van Nee, A.J.R.M. Coenen, "New fast GPS code acquisition technique using FFT," Electronics Letters, 1991.
- [15] J.J. Spilker, "GPS signal structure and theoretical performance", 1978
- [16] B.W. Parkinson, J.J. Spilker, "Global Positioning System: Theory and Applications", American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, 1996.
- [17] "Global Positioning System Standard Positioning Service Signal Specification", GPS Joint Program Office, Segona Edició, 1995.
- [18] Giovanni E. Corazza "On the MAX/TC Criterion for Code Acquisition and its application to DS-SSMA systems", IEEE-Transactions on communications, 1996.
- [19] Letizia Lo Presti, Xuefen Zhu, Maurizio Fantino and Paolo Mulassano, "GNSS Signal Acquisition in the Presence of Sign Transition", 2009.
- [20] Lin, D.M., and Tsui, J.B.Y., "Acquisition Schemes for Software GPS Receiver", in Proceedings of the ION GPS 1998.
- [21] Nuttall, Albert H., "Some Integrals Involving the Qm Function", IEEE, Transactions on Information Theory, 1975
- [22] Turunen, Seppo, "Network Assistance: What will new GNSS signals bring to it?", Inside GNSS, primavera de 2007.

10. ANNEX:

10.1 Codis de Matlab base utilitzats:

A continuació tenim alguns dels codis de Matlab que hem generat i que s'han utilitzat com a base per a realitzar les diferents simulacions. Cal tenir en compte que en algunes simulacions en concret s'ha afegit/modificat part d'aquests codis per a realitzar adquisicions de seqüències de diferent mida, afegir signe als bits de navegació de forma aleatòria, etc.

10.1.1 Codi de Matlab per generar la senyal rebuda:

```
%Funció que genera senyal d'un satèl·lit, multiplica per l'exponencial
portadora, el mostreja i li afegeix soroll retorna el valor del desfasament
de codi, la freqüència, pic de soroll i el pic màxim de la correlació.
function
[codephase,frequency,peak,altrepic,sigmaquad]=Senyal_amb_soroll(condicio)
% condicio=1 permet escollir PRN, C/No i mostres/xip
% condicio=2 fixa PRN=2, CNo=45dBHz i mostres/xip=4

%% ===== Condicions inicials =====
if(condicio==1)
    PRN=input('Introdueix el número del satèl·lit que es vol rebre
(PRN):\n');
    CN= input('Introdueix la relació C/N de la senyal rebuda (dB-Hz):\n');
    mostres=input('Quantes mostres vols per xip?\n');
end
if(condicio==2)
    PRN=2;
    CN=45;
    mostres=4;
end

gold_rate=1.023e6; %freqüència de mostreig dels codi gold
fs=gold_rate*mostres; %sobremostreig per tenir el número de mostres/xip
desitjat
ts=1/fs; %temps de mostreig
n=fs/1000; %número total de mostres en lms de codi
nn=(0:n-1); %vector de n posicions
fc=1.023e6; %freqüència central sense efecte dopler

CNlin= 10^(CN/10); %passem a lineal el valor de la relació C/No
C=1; %fixem el valor de la potencia de senyal (C) a 1
No=C/(CNlin); %Calculem el valor de la potencia de soroll (No)
sigmaquad=No*fs; %Calculem la variància del soroll multiplicant potencia de
sorol*freqüència de mostreig
sigma= sqrt(sigmaquad); %Calculem la desviació estandard del soroll com
arrel quadrada de la variància

%% ===== Senyal mostrejada sense soroll =====
codi=digitizg(fs,0,PRN); %generem el codi del satèl·lit determinat per PRN
i mostrejat a fs
carrier=exp(-1i*2*pi*fc*ts*nn); %generem l'exponencial portadora amb
freqüència central fc i n mostres
codi2=codi.*carrier; %multipliquem cada valor del codi PRN per cada posició
de l'exponencial portadora
```

```

%% ===== Soroll =====
soroll_i=randn(1,n);
soroll_q=randn(1,n);
soroll=(sigma/sqrt(2))*(soroll_i+(1i*soroll_q)); %vector de n posicions de
soroll complex amb mitja=0 i variància=No*f

%% ===== Senyal + soroll =====
senyal=codi2+soroll;%Afegim el soroll al codi generat

%% ===== Adquisició =====
[codephase,frequency,peak,altrepic]=acquisitionConv(fs,PRN,senyal,fc,codi);
%Adquisició de la senyal simulada

```

10.1.2 Codi de Matlab per generar la seqüència PRN:

```

% Funció que genera cadascun dels 32 codis C/A pels diferents satèl·lits
function [ca_used]=codegen(svnum)
% ca_used : Retorna el vector amb el codi C/A desitjat
% svnum: Número del satèl·lit (PRN) que es desitja generar
g2s = [5;6;7;8;17;18;139;140;141;251;252;254;255;256;257; ...
258;469;470;471;...
472;473;474;509;512;513;514;515;516;859;860;861;862];
g2shift=g2s(svnum,1);

%% ===== Generació del registre G1 =====
% Càrrega del registre de desplaçament:
g1=zeros(1,10);
reg = -1*ones(1,10);
for i = 1:1023,
g1(i) = reg(10);
save1 = reg(3)*reg(10);
reg(1,2:10) = reg(1:1:9);
reg(1) = save1;
end,

%% ===== Generació del registre G2 =====
% Càrrega del registre de desplaçament:
g2=zeros(1,10);
reg = -1*ones(1,10);
for i = 1:1023,
g2(i) = reg(10);
save2 = reg(2)*reg(3)*reg(6)*reg(8)*reg(9)*reg(10);
reg(1,2:10) = reg(1:1:9);
reg(1) = save2;
end,

%% ===== Codi de desplaçament G2 =====
g2tmp(1,1:g2shift)=g2(1,1023-g2shift+1:1023);
g2tmp(1,g2shift+1:1023)=g2(1,1:1023-g2shift);
g2 = g2tmp;

%% ===== Generació d'un cicle de codi C/A (1ms)=1023 xips =====
ss_ca = g1.*g2;
ca_used=-ss_ca;

```

10.1.3 Codi de Matlab per sobre-mostrejar el codi C/A generat:

```
% Funció que sobre mostreja el codi C/A del satèl·lit determinat al número
de mostres/xip desitjat
function code2 = digitizg(fs,offset,svnum)
% Retorna code2, el codi C/A mostrejat
% fs - freqüència de mostreig
% offset - retard de temps en segons que ha de ser menor a 1/fs
% svnum - número del sat+el·lit

%% ===== Condicions inicials =====
gold_rate = 1.023e6; %freqüència del codi gold
ts=1/fs; %temps de mostreig
n=fs/1000; %número de msotres/xip
tc=1/gold_rate; %temps de xip
code_in = codegen(svnum); % Generem lms de codi C/A (1023 xips)
%% ===== Concatenació de 16 codis C/A =====
code_a = [code_in code_in code_in code_in];
code_a=[code_a code_a];
code_a=[code_a code_a];

%% ===== Digitalització =====
b = (1:n);
c = ceil((ts*b+offset)/tc);
code = code_a(c);

%% ===== Ajust del primer punt de les dades =====
if offset==0
code2=code(1:n);
else
code2=code(offset:offset+n-1);
end
```

10.1.4 Codi de Matlab per realitzar l'adquisició de les senyals GPS:

```
%Funció que realitza l'adquisició del senyal mitjançant el mètode de cerca
%de fase de codi en paral·lel mitjançant FFT
function [codephase,frequency,peak,altrepic] =
acquisitionConv(fs,svnum,senyal,fc0,code)
%Funció que retorna la fase de la senyal rebuda,la freqüència i el valor
del pic de correlació

%% ===== Condicions inicials =====
x=double(senyal); %Senyal rebuda
ts=1/fs; % temps de mostreig
n=fs/1000; % número de mostres/xip
nn=(0:n-1); % vector amb n posicions

%% ===== DFT del codi C/A =====
codefreq = conj(fft(code)); % Es realitza la FFT del codi generat al
receptor i es conjuga el resultat
fc=zeros(41,1); % Es declara el vector fc amb el que es faran els 41 salts
de freqüència en salts de 500Hz
result=zeros(1,n); %Es declara el vector resultat on es guardaran els
resultats de la correlació
for i=1:41
fc(i) = fc0 + 0.0005e6*(i-21); %Freqüència central +/- salts de 500 Hz
per trobar la freqüència rebuda a
%causa de l'efecte dopler
```

```

expfreq=exp(1i*2*pi*fc(i)*ts*nn); %Exponencial complexa mostrejada
generada al receptor a les freqüències fc(i)
R=expfreq.*x; %Multipliquem la senyal rebuda per l'exponencial complexa
generada
Rfreq = fft(R); %FFT de la sortida del mutliplicador etre la senyal rebuda
i l'exponencial
convcodeR = Rfreq .* codefreq; %Multiplicacio del vector anterior per la
FFT conjugada del codi
convcodeR=(1/4092)*convcodeR; %Es normalitza la sortida dels correladors
dividint pel número de mostres (n)
result(i,:) = (abs(iff(convcodeR))).^2; %Es crea el vector resultat, a
cada posició es posa el
%valor del mòdul al quadrat de la FFT inversa del vector anterior
end
[peak codephase]=max(max(result)); %Troba el valor del pic i de la fase on
es troba
[peak frequency]=max(max(result'));%Troba el valor del pic i de la
freqüència on es troba
frequency = fc(frequency); %Retorna el valor de la ferqüència central a la
que arriba la senyal
altrepic=result(20,3000); %Ens dona el valor d'un altre pic (pic de soroll)
diferent al pic màxim

%% ===== Gràfica dels resultats: =====
gold_rate = 1.023e6;
tc=1/gold_rate;
b=(1:n);
c=ceil((ts*b)/tc);

figure(1)
x_axis=c;
y_axis=fc/1e6;
s=surf(x_axis,y_axis,result);
set(s,'EdgeColor','none','Facecolor','interp');
axis([min(x_axis) max(x_axis) min(y_axis) max(y_axis) min(min(result))
max(max(result))]);
caxis([0 max(max(result))]);
xlabel('Fase de codi [xips]');
ylabel('Freqüència [MHz]');
zlabel('Amplitud');
text=sprintf('Satèl·lit número %i',svnum);
title(text);

```

10.1.5 Codi de Matlab per generar les pdf's dels pics de correlació:

```

%Funció que realitza k adquisicions coherents de 20 ms de codi,
%sense efecte Doppler, i mostra les estadístiques del pic màxim de
%correlació i d'un pic de soroll qualsevol:

%% ===== Acumulació dels k pics de soroll i pic màxim: =====
function Exp_mult(k,calaixos)
pics=zeros(1,k);
altrespics=zeros(1,k);
for i=1:k
    [~,~,peak,altrepic,sigmaquad]=Bit_de_navegacio(2);
    pics(:,i)=peak;
    altrespics(:,i)=altrepic;
end

```



```

%% ===== ESTADÍSTIQUES PIC SOROLL: =====

[valors_sor,bins_sor]=hist(altrespics,calaixos);
increment_sor=bins_sor(2)-bins_sor(1);
pdf_sor=valors_sor/(sum(valors_sor*increment_sor));

factor_escalat_sor=(sigmaquad*20*0.5)/(4092);
x_sor=bins_sor./factor_escalat_sor;
free_sor=2;
D_sor=(1/factor_escalat_sor)*chi2pdf(x_sor,free_sor);

figure (1)
hist(altrespics,calaixos)
title('Histograma (pic de soroll)')

figure (2)
subplot(1,2,1); plot(bins_sor,pdf_sor)
title('PDF empírica (pic de soroll)')
subplot(1,2,2); plot(x_sor,D_sor)
title('PDF teòrica (pic de soroll)');

figure (3)
plot(bins_sor,pdf_sor,bins_sor,D_sor,'Linewidth',1.5)
xlabel('x')
ylabel('p(x)')
title('PDF empírica + PDF teòrica (pic de soroll)')
legend('PDF empírica','PDF teòrica (chi2 central 2 graus de llibertat)')
grid on

%% ===== ESTADÍSTIQUES PIC MÀXIM: =====

[valors_max,bins_max]=hist(pics,calaixos);
increment_max=bins_max(2)-bins_max(1);
pdf_max=valors_max/(sum(valors_max*increment_max));

factor_escalat_max=(sigmaquad*20*0.5)/4092;
x_max=bins_max./factor_escalat_max;
free_max=2;
ncent_par=400/factor_escalat_max;
D_max=(1/factor_escalat_max)*ncx2pdf(x_max,free_max,ncent_par);

figure (4)
hist(pics,calaixos)
title('Histograma (pic màxim)')

figure (5)
subplot(1,2,1); plot(bins_max,pdf_max)
title('PDF empírica (pic màxim)')
subplot(1,2,2); plot(x_max,D_max)
title('PDF teòrica (pic màxim)');

figure (6)
plot(bins_max,pdf_max,bins_max,D_max,'Linewidth',1.5)
xlabel('x')
ylabel('p(x)')
title('PDF empírica + PDF teòrica (pic màxim)')
legend('PDF empírica','PDF teòrica (chi2 no-central 2 graus de llibertat,
valor de no centralitat=400)')
grid on

```

10.2 Resum de les distribucions estadístiques utilitzades:

10.2.1 Distribució Chi-Quadrat (Central):

Una PDF chi-quadrat amb ν graus de llibertat ve definida per:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad 9-1$$

Els ν graus de llibertat corresponen a un número enter més gran o igual a 1 i la funció $\Gamma(u)$ correspon a la funció Gamma, que ve definida per:

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt \quad 9-2$$

La pdf chi-quadrat és la pdf de variable x quan $x = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$, i quan x_i segueix una distribució normal amb mitjana=0 i desviació estàndard =1, i on totes les x_i 's són independents i estan igualment distribuïdes. La mitjana i la variància venen donades per:

$$E(x) = \nu \quad 9-3$$

$$\text{var}(x) = 2\nu \quad 9-4$$

Un cas especial, es dona quan els graus de llibertat són 2. En aquest cas, la pdf s'anomena pdf exponencial. A la següent figura podem veure diferents casos de distribucions chi-2 centrals amb diferents graus de llibertat:

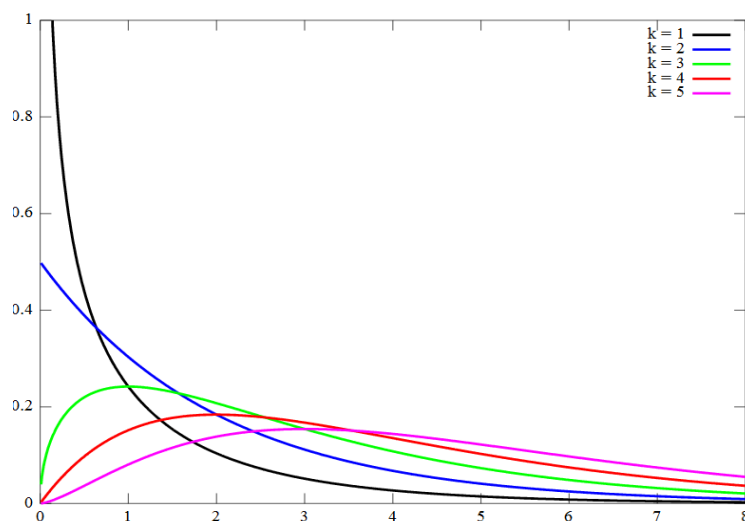


Figura 74: Distribució chi-quadrat central amb diferents graus de llibertat (k)

10.2.2 Distribució Chi-Quadrat (No Central):

La distribució Chi-Quadrat no central, apareix quan les diferents variables aleatòries x_i^2 que sumàvem en el cas de la distribució chi quadrat central, tenen mitjana diferent de zero. Per tant podem dir que les variables x vindran definides com: $x = \sum_{i=1}^v x_i^2$, però ara les diferents x_i seguiran una distribució Normal amb mitjana no nul·la i variància 1 ($N(\mu_i, 1)$). En aquest cas direm que x , té una pdf chi-quadrat no central amb v graus de llibertat i un paràmetre de no-centralitat que anomenarem λ . Aquest paràmetre de no-centralitat vindrà definit per: $\lambda = \sum_{i=1}^v \mu_i^2$. En aquest cas, la pdf és una mica més complexa:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{v-2}{4}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}(x + \lambda)\right] I_{\frac{v}{2}-1}(\sqrt{\lambda x}) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad 9-5$$

On $I_r(u)$, correspon a la funció Bessel modificada de tipus 1 i ordre r i ve definida per:

$$I_r(u) = \frac{\left(\frac{1}{2}u\right)^r}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \exp(ucos(\theta)) \sin^{2r} \theta d\theta \quad 9-6$$

I pot representar-se en forma de sèrie com:

$$I_r(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}u\right)^{2k+r}}{k! \Gamma(r + k + 1)} \quad 9-7$$

En aquest cas la mitjana i la variància ve donada per:

$$E(x) = v + \lambda \quad 9-8$$

$$var(x) = 2v + 4\lambda \quad 9-9$$

De nou, podem veure diversos exemples de pdf's d'aquest tipus a la següent figura. Es pot apreciar, que un cas especial es produeix quan la pdf chi-quadrat no-central té paràmetre de no-centralitat=0. En aquest cas, la pdf es converteix a una chi-quadrat central com hem vist en el cas anterior.

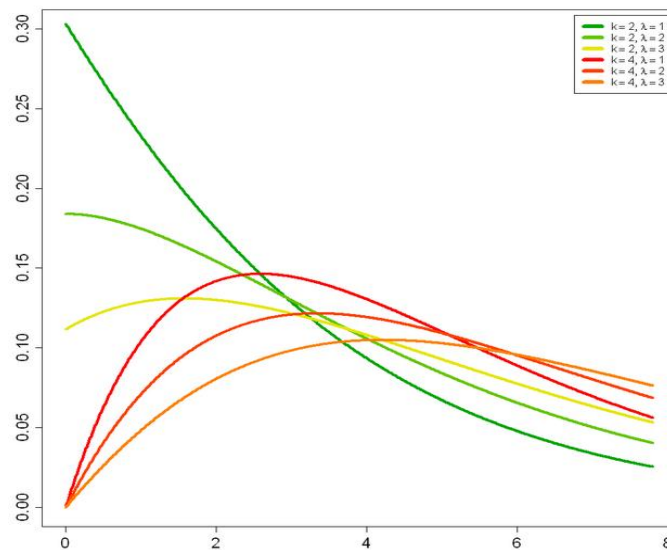


Figura 75: Distribució chi-quadrat no-central amb diferents graus de llibertat (k) i paràmetres de no centralitat (λ)

10.2.3 Distribució Uniforme (Discreta):

A teoria de la probabilitat, s'anomena distribució uniforme discreta, aquella distribució de probabilitats que assumeix un número finit de valors, tots amb la mateixa probabilitat de donar-se. Si la distribució assumeix els valors reals x_1, x_2, \dots, x_n , la seva funció de probabilitat correspon a:

$$p(x_i) = \frac{1}{n} \quad 9-10$$

I la seva funció de distribució es defineix com:

$$F(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_i 1_{(-\infty, x]}(x_i) \quad 9-11$$

A més, podem calcular la seva mitjana estadística i la seva variància com:

$$\mu = \sum_i \frac{x_i}{n} \quad 9-12$$

$$\sigma^2 = \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{n} \quad 9-13$$

10.2.4 Funció Marcum Q generalitzada:

A estadística, la funció Marcum Q generalitzada és la funció definida com:

$$Q_M(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{a^{M-1}} \int_b^\infty t^M e^{-\frac{t^2+a^2}{2}} \cdot I_{M-1}(at) dt & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{2^{M-1}\Gamma(M)} \int_b^\infty t^{2M-1} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt & \text{si } a = 0 \end{cases} \quad 9-14$$

On b ha de ser major o igual a zero i M ha de ser enter i positiu i on $I_{M-1}(x)$ correspon a la funció de Bessel modificada de tipus 1 i ordre M-1 i $\Gamma(x)$ correspon a la funció gamma.

També es pot representar la funció de la següent forma:

$$Q_M(a, b) = e^{-\frac{a^2+b^2}{2}} \cdot \sum_{k=1-M}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k I_k(ab) \quad 9-15$$

La funció Marcum Q s'utilitza, per exemple, al calcular la funció de distribució acumulada (cdf) de les distribucions chi-quadrat no-centrals o distribucions Rice.

Resum:

Aquest projecte es centra a donar una caracterització estadística del valor que tenen els pics de correlació sota diferents escenaris d'adquisició a un receptor GPS.

En primer lloc, s'ha volgut donar una visió general de tots els fonaments del sistema GPS per tal de poder entendre el seu funcionament. A continuació, s'ha passat a analitzar el bloc d'adquisició d'un receptor GPS. Primer, hem estudiat quines operacions es realitzen en aquest bloc i quines són les diferents formes d'implementar-lo.

Seguidament, sota un escenari d'adquisició per cerca de fase de codi en paral·lel i utilitzant integracions coherents, s'han estudiat les distribucions estadístiques de les pdf's obtingudes pels pics de correlació de senyal+soroll i pels pics de correlació de només soroll, i s'ha vist com aquestes fan modificar la corba ROC del receptor .

Les simulacions s'han realitzat amb MATLAB i en diferents escenaris d'adquisició per tal de poder comparar com varien les estadístiques obtingudes en casos diferents.

Resumen:

Este proyecto se centra en dar una caracterización estadística del valor que tienen los picos de correlación bajo diferentes escenarios de adquisición en un receptor GPS.

En primer lugar, se ha querido dar una visión general de todos los fundamentos del sistema GPS para poder entender su funcionamiento. A continuación, se ha pasado a analizar el bloque de adquisición de un receptor GPS. Primero, hemos estudiado qué operaciones se realizan en este bloque y cuáles son las diferentes formas de implementarlo.

Seguidamente, bajo un escenario de adquisición por búsqueda de fase de código en paralelo y utilizando integraciones coherentes, se ha estudiado las distribuciones estadísticas de las pdf's obtenidas para los picos de correlación de señal+ruido y para los picos de solo ruido, y se ha visto como éstas modifican la curva ROC del receptor.

Las simulaciones se han realizado con MATLAB y en diferentes escenarios de adquisición con tal de poder comparar cómo cambian las estadísticas obtenidas en casos diferentes.

Summary:

This project focuses on giving a statistical characterization of the value of the correlation peaks under different acquisition scenarios in a GPS receiver.

First, we've wanted to give a general overview of all the basics of the GPS system to understand its operation. Then, we have analysed the acquisition block of a GPS receiver. First, we have studied which operations are performed on this block and which are the different ways to implement it.

Then, under an acquisition stage that employs the parallel code search method, and using coherent integrations, we have studied the statistical distributions of the pdf's obtained for the correlation peak of signal+noise and for the peak of only noise, and we have seen how it modifies the ROC curve of receiver.

The simulations that we have done were carried out with MATLAB and in different acquisition scenarios, so we can compare how they change the statistics obtained in different cases.

