MAT²
MATerials MATemàtics
Volum 2006, treball no. 14, 18 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Relojes de sol*

Joan Girbau

¿Os habéis detenido alguna vez a pensar en la aparente simplicidad de un reloj de sol? Unas líneas dibujadas sobre una pared o en el suelo, un objeto que hace sombra, y nada más. Sin embargo un instrumento tan simple puede llegar a marcar la hora con un error inferior a un minuto, y puede indicarnos también con asombrosa precisión los días de cambio de estación (equinoccios y solsticios). Todo el conocimiento de la órbita terrestre (leyes de Kepler), todo el conocimiento de la astronomía de posición se hallan encerrados en el dibujo de las líneas de un reloj de sol.

1. ¿Qué hora marcan los relojes de sol?

Un reloj de sol tradicional (de pared) tiene un aspecto como el que muestra la figura 1.

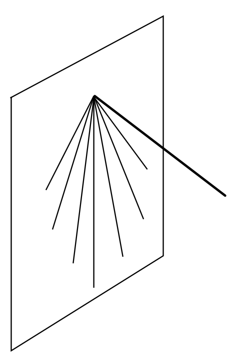


figura 1

*Aquest text correspon a una conferència que l'autor va pronunciar a la Universitat de Múrcia fa uns quants anys.

Los relojes de sol de este tipo marcan generalmente la **hora solar verdadera local** (aunque pueden marcar la hora solar verdadera de cualquier meridiano). Vamos a explicar qué significa todo esto.

1.1. Hora solar verdadera local

Situémonos, por ejemplo, en mi universidad (la Universidad Autónoma de Barcelona), ubicada en Bellaterra, a unos 20 Km. de Barcelona. Son las 12 del mediodía de tiempo solar verdadero de mi universidad cuando el sol pasa por encima del meridiano de la misma. El período de tiempo entre dos pasos consecutivos del sol por el meridiano de mi universidad se divide en 24 partes iguales, que son horas de tiempo solar verdadero.

El tiempo solar verdadero local que acabamos de definir (local, puesto que depende del meridiano del lugar) fue utilizado ampliamente hasta bien entrado el siglo XX, pero en la actualidad no hallaríamos a nadie que se rigiera por este tiempo. Hoy todo el mundo utiliza la hora oficial, la hora que dan por la tele. El tiempo oficial puede llegar a ser muy diferente del tiempo solar verdadero local. El tiempo oficial es el *tiempo solar medio* del meridiano de Greenwich más una hora o más dos horas, dependiendo de la época del año.

1.2. Tiempo solar medio

El tiempo solar verdadero (el que marcan los relojes de sol tradicionales como el de la figura 1) no es uniforme. Ello significa que el tiempo que tarda el sol entre dos pasos consecutivos por un mismo meridiano, aunque parezca increíble, no es siempre el mismo y depende de la época del año. Para remediar esto se inventó lo que se llama tiempo solar medio. Un día solar medio viene a ser una especie de promedio a lo largo de todo un año de la duración de los días solares verdaderos, que como hemos dicho no tienen todos la misma duración. El día solar medio —una entelequia inventada por el hombre para remediar la reprobable falta de puntualidad del sol— se divide en 24 partes iguales cada una de las cuales es una hora solar media. Los relojes mecánicos o digitales, los relojes que utilizamos todos, marchan de manera uniforme y son por tanto incapaces de señalar la hora solar verdadera. Lo que en realidad marcan es la hora de tiempo solar medio. La diferencia entre el tiempo solar medio y el verdadero puede llegar a ser de un cuarto de hora en más o en menos. Ello significa que el sol no pasa siempre a las doce del mediodía (de tiempo solar medio) por el meridiano de Greenwich como sería su obligación, sino que se retrasa o se adelanta, y estos retrasos o adelantos llegan a ser como máximo de un cuarto de hora aproximadamente. Los relojes de sol tradicionales marcan el tiempo solar verdadero (local o de Greenwich, como haya deseado su constructor). Ello significa que tendrán un error en más o en menos respecto de la hora de los relojes mecánicos que podrá llegar a ser de un cuarto de hora, dependiendo de la época del año.

1.3. Diferencias entre el tiempo solar medio y el tiempo solar verdadero

La siguiente tabla muestra la diferencia en minutos entre el tiempo solar medio y el tiempo solar verdadero a lo largo del año:

Dia	**Dif**	**Dia**	**Dif**	**Dia**	**Dif**	**Dia**	**Dif**
1-1	4	10-1	8	20-1	11	1-2	13
10-2	14	20-2	13	1-3	12	10-3	10
20-3	8	1-4	4	10-4	1	15-4	0
20-4	-1	1-5	-3	10-5	-4	20-5	-4
1-6	-2	10-6	-1	13-6	0	20-6	1
1-7	4	10-7	5	20-7	6	1-8	6
10-8	5	20-8	3	2-9	0	10-9	-3
20-9	-7	1-10	-10	10-10	-13	20-10	-15
1-11	-16	10-11	-16	20-11	-14	1-12	-11
10-12	-7	15-12	-5	20-12	-2	25-12	0

Esta tabla está ordenada por filas. Las diferencias entre tiempo solar medio y tiempo solar verdadero de la misma varían ligeramente de un año para otro. No obstante, como esta variación es muy pequeña puede suponerse que la tabla anterior es válida para cualquier año. Puede observarse en dicha tabla que hay cuatro días del año (15 de abril, 13 de junio, 2 de septiembre y 25 de diciembre) en que la diferencia es nula (estos días no corresponden ni a solsticios ni a equinoccios). Como hemos dicho antes, los relojes de sol tradicionales acostumbran a marcar la hora de tiempo solar verdadero local (aunque pueden construirse de manera que marquen la hora de tiempo solar verdadero de Greenwich). Supongamos que tenemos un reloj de sol tradicional situado en el meridiano de Greenwich y que está muy bien construído (un reloj de sol de calidad). Supongamos que un día determinado, por ejemplo el 1 de noviembre (día de Todos los Santos), el reloj marca las 11 en punto. Ello querrá decir que en aquel momento son las 11 de tiempo solar verdadero de Greenwich ¿Cuál será en aquel momento la hora de tiempo solar medio? Vamos a la tabla y vemos que aquel día la diferencia *tiempo solar medio* menos *tiempo solar verdadero* es de -16 minutos. En aquel momento serán pues las 11 horas y 44 minutos de tiempo solar medio. Así pues la tabla anterior puede interpretarse como los minutos que hay que sumar o restar a la hora que da un reloj de sol tradicional, bien construído, y situado sobre el meridiano de Greenwich para obtener la hora oficial (prescindiendo de la hora o de las dos hora de adelanto que llevamos siempre respecto al sol).

Ahora bien, si el reloj de sol tradicional en vez de estar situado en el meridiano de Greenwich está en otro meridiano y marca (como la mayoría de ellos) el tiempo solar *local*, además de sumar o restar los minutos que indica la tabla anterior, tendrá que sumarse o restarse lo que tarda el sol en ir del meridiano donde está el reloj al meridiano de Greenwich. Por ejemplo, supongamos que tenemos un reloj de sol tradicional, bien construído, situado en la Universidad Autónoma de Barcelona y que marca el tiempo local (el de Bellaterra). Supongamos que el día 10 de marzo leemos la hora del reloj de sol, y en aquel momento son las 14 horas ¿Qué hora es de tiempo oficial (la hora de la tele)? La Universidad Autónoma de Barcelona se halla a una longitud geográfica de $2^0\ 6'\ 24,5''$ al este de Greenwich. Si en 24 horas el sol da una vuelta a la tierra (360^0), ¿cuánto tiempo tardará en recorrer $2^0\ 6'\ 24,5''$? Una simple regla de tres muestra que tardará 8 minutos y $25,6$ segundos. Así pues, cuando en la Universidad Autónoma de Barcelona son las 14 horas de tiempo solar verdadero local, en el meridiano de Greenwich son las 13 horas y 52 minutos (hemos prescindido de los 25,6 segundos). Pero para obtener el tiempo solar medio hemos de añadir (mirando el valor de la tabla para el 10-3) 10 minutos. Por tanto serán las 14 horas y 2 minutos de tiempo solar medio de Greenwich. Como la hora oficial lleva una hora de adelanto respecto de la solar, en realidad serán las 15 horas y 2 minutos de tiempo oficial.

1.4. ¿Puede un reloj de sol marcar directamente el tiempo solar medio?

Como hemos dicho varias veces un reloj de sol tradicional marca el tiempo solar verdadero. Para que un reloj de sol marque el tiempo solar medio deben substituirse las líneas rectas tradicionales que señalan las horas, por curvas en forma de ocho como la que se dibuja en la figura 2. Estas curvas en forma de ocho se denominan *analemas*. Cada analema corresponde a una hora (las 9, las 10, etc).

figura 2

Además el gnomon o varilla que produce la sombra debe substituirse por un punto. Cada curva en forma de ocho (o analema) tiene dos ramas (figura 3) cada una de las cuales se pinta de diferente color (negro y rojo, por ejemplo). Una rama (la roja) sirve para medio año (primavera y verano) y la otra rama (la negra) sirve para el otro medio año (otoño e invierno). En un reloj así son las nueve, por ejemplo, cuando la sombra del punto que sustituye al gnomon está sobre la rama correspondiente del analema de las nueve. Los relojes de este tipo marcan la hora de tiempo solar medio (es decir la de los relojes mecánicos y la de la tele) y se llaman relojes de sol analemáticos.

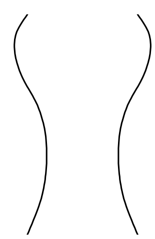


figura 3

La figura 4 muestra un reloj de este tipo ubicado en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Barcelona, construído y diseñado en 1988 por el autor de esta conferencia. Además de señalar la hora con muchísima precisión marca también los cambios de signos del zodíaco y, en particular, los cambios de estación. El reloj tiene unas dimensiones de 210 cm. de anchura y 165 cm. de altura, y sus líneas fueron dibujadas por un plotter de ordenador, a tamaño natural. Las líneas fueron copiadas desde el papel que salió del plotter a la cerámica por un ceramista experimentado.

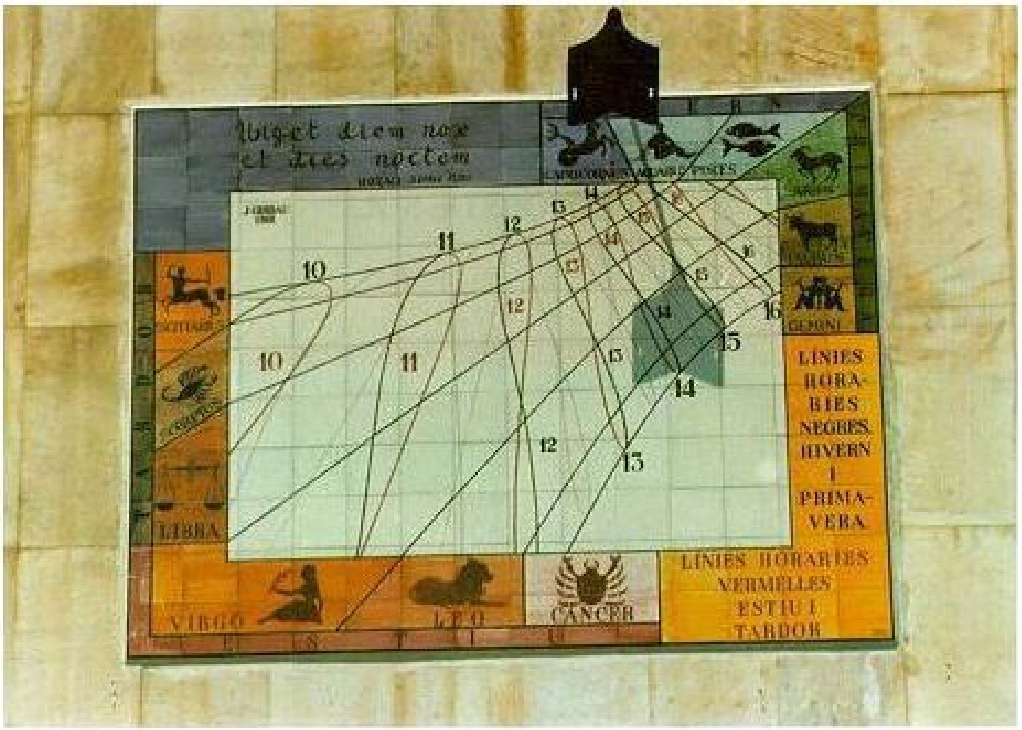


figura 4

2. Construcción de relojes de sol tradicionales

Para comprender cómo funciona un reloj de sol tradicional debemos entender primero cuál es el movimiento aparente del sol en la bóveda celeste.

2.1. La bóveda celeste y el movimiento aparente del sol

Si observáis el cielo durante una noche cualquiera advertiréis que las diferentes estrellas se mueven lentamente en el transcurso de la misma y que su movimiento se produce como si todas ellas estuvieran pegadas a una gran esfera de centro el observador y radio muy grande, la cual girara entorno a un eje que une el observador y un punto de dicha esfera muy próximo a la estrella polar. La estrella polar, por estar muy próxima al eje de rotación, casi no se mueve. En cambio las otras estrellas describen durante la noche arcos de circunferencia. Hasta el Renacimiento se creyó que la Tierra estaba inmóvil en el centro del universo y que todas las estrellas estaban pegadas a una gran esfera que tenía por centro el de la Tierra. Dicha esfera, llamada *bóveda celeste* o *esfera celeste*, tenía un radio muy grande en comparación con el de la Tierra y giraba uniformemente alrededor del eje determinado por los dos polos de la Tierra (ya hemos dicho que la Tierra se consideraba inmóvil). Esta concepción explicaba a la perfección el movimiento aparente de todas las estrellas durante la noche.

A pesar de saber en la actualidad que la bóveda celeste no existe, y que es la Tierra la que gira diariamente alrededor de su eje, para muchos problemas de astronomía de posición es muy útil el antiguo punto de vista. Si en realidad lo que nos interesa es el movimiento relativo de las estrellas respecto del observador, podemos perfectamente suponer que ellas son las que giran cada día 360° y que nosotros permanecemos quietos. Por otro lado, si hacemos abstracción de las distancias a las que se hallan las diferentes estrellas, lo que nosotros vemos de ellas queda determinado por el rayo de luz que une la estrella y el observador. Dicho rayo corta en un único punto a la imaginaria bóveda celeste. Por tanto nosotros vemos aquella estrella como si estuviera en realidad pegada a la esfera celeste.

El círculo máximo de la esfera celeste obtenido por interesección de dicha esfera con el plano perpencicular al eje de rotación de la misma por su centro se llama *ecuador celeste*.

La utilización de la esfera celeste como un objeto matemático útil choca un poco con las ideas que nos han enseñado de pequeños. Nosotros hemos aprendido en la enseñanza primaria que la Tierra tiene dos movimientos: el de rotación y el de traslación. Por el movimiento de rotación da una vuelta cada día entorno a su eje y por el de traslación da una vuelta cada año entorno al Sol. Durante todo el año el eje de la Tierra se mantiene paralelo a sí mismo cuando ésta se desplaza alrededor del Sol en el movimiento de traslación. La estrella polar es una estrella que se halla a más de 300 años luz de nosotros (es decir, muy lejos). Da la causualidad de que dicha estrella se halla aproximadamente sobre la prolongación del eje de la Tierra por el norte. Es decir, si prologamos indefinidamente la semi-recta que une el centro de la Tierra y el Polo Norte, encontraremos la estrella polar. El hecho de que el eje de la Tierra se mantenga paralelo a sí mismo en el movimiento de traslación nos garantiza que durante todo el año hallaremos la estrella polar en la prolongación por el norte del eje de la Tierra (puesto que las rectas paralelas se cortan en un punto del infinito y la estrella polar, por estar muy lejos de nosotros, es como si se hallara en el infinito). Ello justifica que veamos durante todo el año que el el movimiento de rotación de la esfera celeste se produce entorno a un eje que apunta hacia un punto muy próximo de la estrella polar.

Cuando se adopta el punto de vista según el cual la Tierra está fija y lo que se mueve es la esfera celeste, cualquier observador situado en un punto de la Tierra puede suponerse situado en el centro de la Tierra (ya que el radio terrestre es infinitamente pequeño en comparación con el de la esfera celeste). El ángulo que forma el eje de rotación de la bóveda celeste (que une el observador y un punto muy próximo a la estrella polar) con el plano horizontal del observador no es otra cosa que la latitud geográfica del observador, como queda patente en el dibujo de la figura 5. La circunferencia de la figura 5 representa la Tierra. En un punto P de la Tierra se cosidera el ángulo que forma la recta paralela por P al eje de rotación de la Tierra con el plano horizontal del observador situado en P. Dicho ángulo, tal como queda patente en la figura, coincide con la latitud geográfica puesto que ángulos de lados perpendiculares son iguales.

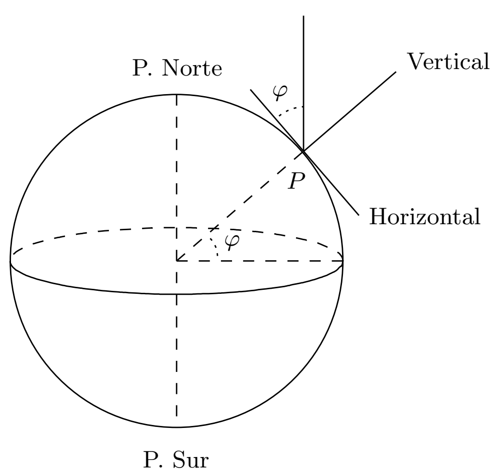


figura 5

Aunque todas las estrellas se mueven unas respecto a las otras, como están todas muy lejos de nosotros, a lo largo de nuestra corta vida nosotros casi no apreciamos su movimiento, a no ser que utilicemos instrumentos muy precisos. Por esto el punto de vista antiguo consistía en suponerlas pegadas a la bóveda celeste, solidarias unas con otras como si la bóveda celeste con las estrellas pegadas fuera un sólido rígido. Ahora bien, los planetas, el Sol y la Luna sí que varían su posición respecto de las etrellas fijas. Durante el día también hay estrellas en el cielo, pero la luz del Sol nos impide verlas. Si pudiéramos verlas, podríamos apreciar que la posición del Sol respecto de estas estrellas fijas va cambiando de un día a otro . El Sol a lo largo de un año se va moviendo por la esfera celeste y describe una círculo máximo de dicha esfera (la *eclíptica*) que forma con el ecuador celeste un ángulo aproximado de $23° \ 27'$. La figura 6 representa la esfera celeste con el ecuador celeste y la eclíptica.

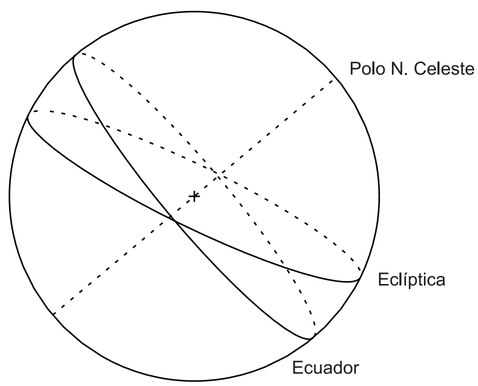


figura 6

Cuando el Sol se halla en los dos puntos de intersección de la eclíptica con el ecuador celeste se producen los equinoccios. En la figura 6 hemos representado la esfera celeste fija (sin moverse). Pero si imaginamos que dicha esfera da una vuelta cada día, alrededor de su eje, el Sol irá describiendo cada día paralelos diferentes de dicha esfera. Esto es lo que hemos representado en la figura 7. En los equinoccios, como el sol se halla sobre el ecuador celeste (figura 6), cuando gire durante el día describirá el ecuador celeste (figura 7). Cada uno de los dos paralelos de la esfera celeste correspondientes a los solsticios está separado del ecuador celeste por un ángulo de $23° \ 27'$ aproximadamente.

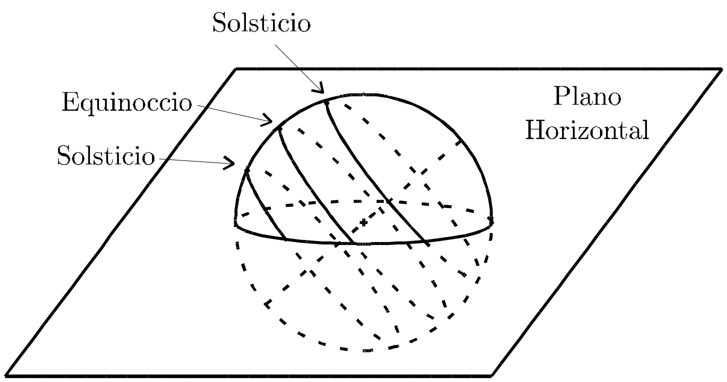


figura 7

Cuando el sol se halla por encima del plano horizontal del observador (figura 7) es de día y cuando se halla por debajo es de noche. En la figura 7 se observa que en los equinoccios (en los que la trayectoria del sol coincide con el ecuador celeste) la duración del día es igual a la de la noche porque el plano horizontal divide al ecuador celeste en dos semi-circunferencias de la misma longitud. Recuérdese que en el dibujo de la figura 7 el ángulo que forma el eje de rotación de la esfera celeste con el plano horizontal coincide con la latitud del observador. Si uno se imagina el mismo dibujo para un obsevador situado en el Polo Norte (donde la latitud es de 90°) verá que allí en los equinoccios el sol se halla en el plano horizontal y que durante medio año el sol está por encima del plano horizontal (día) y durante medio año está por debajo (noche). También uno puede imaginarse el dibujo de la figura 7 para un observador situado en el ecuador de la Tierra (donde la latitud es de 0°) y verá que allí el día dura igual que la noche en cualquier época del año.

2.2. Construcción sin fórmulas de relojes de sol tradicionales

El reloj de sol más sencillo que podemos imaginar es el llamado *cuadrante ecuatorial*. Consiste en una varilla (o gnomon) paralela al eje de rotación de la Tierra (o de la bóveda celeste, según el punto de vista que se adopte) que proyecta su sombra sobre un plano perpendicular a dicha varilla (paralelo, por tanto, al plano del ecuador) en el cual están marcadas las líneas de las horas, tal como indica la figura 8.

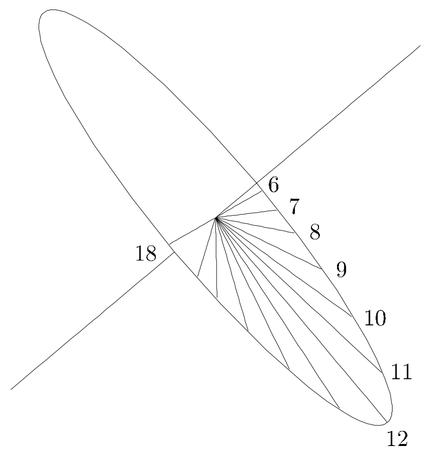


figura 8

Puesto que la trayectoria aparente del sol durante un día cualquiera está en un plano perpendicular al gnomon y paralelo, por tanto, al plano del reloj donde se hallan marcadas las líneas de las horas, dichas líneas deberán estar separadas por intervalos angulares iguales de 15° cada uno, puesto que si el sol describe en un día un paralelo completo de la esfera celeste (360°), cada hora recorrerá 15° de dicho paralelo ($360/24 = 15$).

Un reloj de sol como el que hemos descrito puede construirse para que marque la hora solar verdadera local o la hora solar verdadera de Greenwich, como se desee. En el primer caso la línea de las doce debe coincidir con la intersección del plano del reloj y el plano vertical que contiene al gnomon (plano del meridiano). En el segundo caso primero se construirá el reloj como hemos descrito, es decir para que marque la hora solar verdadera local, y luego se hará girar el dibujo de las línes horarias una distancia angular igual a la longitud geográfica del lugar. Dicho giro se hará en un sentido o en otro según que el lugar se halle al este o al oeste de Greenwich, de tal manera que se adelante el reloj (respecto de la hora que marcaría sin el giro) si el lugar se halla al este, y se retrase si el lugar se halla al oeste.

Como el sol en la esfera celeste está medio año por encima del ecuador (en el hemisferio norte, primavera y verano) y medio año por debajo, y como el plano del reloj es el plano del ecuador celeste (si se considera dicha esfera centrada en el punto de intersección del gnomon con el plano del reloj), durante medio año la sombra del gnomon se producirá en una cara del plano del reloj (por encima) y durante medio año la sombra se producirá en la otra cara (por debajo). En los dos equinoccios, como el sol se halla en el mismo plano del reloj (plano ecuatorial), el gnomon no hará sombra sobre dicho plano y el reloj no funcionará.

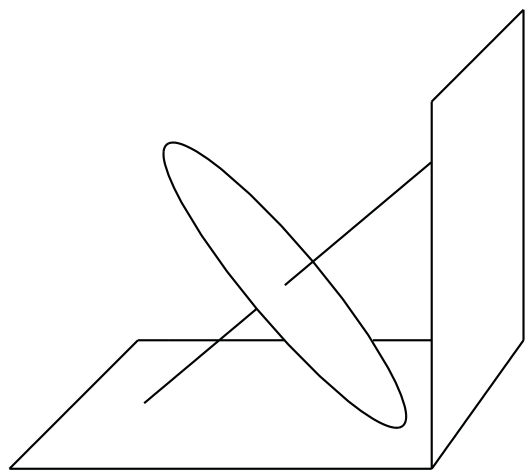


figura 9

Vamos a explicar ahora los relojes de sol de pared y los horizontales. Imaginad que el gnomon del reloj de sol ecuatorial anterior está ahora clavado en una pared vertical o en el suelo (en la figura 9 el gnomon del reloj de sol ecuatorial se supone clavado en una pared vertical y también en el suelo). Si queremos marcar la sombra del gnomon sobre la pared en las distintas horas del día (las 6, las 7, etc) no tenemos más que considerar las intersecciones con la pared de los distintos planos determinados por el gnomon y las líneas horarias correspondientes del reloj de sol ecuatorial. Por ejemplo, si consideramos la intersección de la pared con el plano determinado por el gnomon y la línea horaria de las 10 del reloj de sol ecuatorial, obtendremos la línea horaria de las 10 para el reloj de sol de pared. Si consideramos la intersección con el suelo de dicho plano tendremos entonces la línea horaria de las 10 en el reloj de sol horizontal correspondiente.

Un reloj de sol de pared puede construirse sin ningún cálculo por el procedimiento siguiente:

1. Se clava una varilla en la pared (gnomon) de manera que su proyección sobre un plano horizontal coincida con la línea Norte-Sur y de manera que el ángulo que forme con un plano horizontal sea exactamente

la latitud del lugar. Una manera alternativa sería clavar el gnomon de manera que la estrella polar se encuentre en su prolongación. Sin embargo ello tiene un pequeño inconveniente: la pared (generalmente orientada al sur) impide ver la estrella polar. Este inconveniente puede superarse fácilmente substituyendo la pared por una pared de cristal, derribando luego la pared y la casa, clavando el gnomon en la pared de cristal y reconstruyendo finalmente la pared y la casa una vez se tiene el gnomon clavado en la pared de cristal.

2. Se elige uno de los cuatro días del año en que el tiempo solar medio y el verdadero coinciden (tabla del apartado 1.3). Aquel día, con un reloj mecánico preciso se van marcando las sombras del gnomon en las diferentes horas del día (restando la hora o las dos horas de adelanto de la hora oficial respecto de la solar).

Se obtendrá así un reloj de sol de pared que marcará la hora de tiempo solar verdadero de Greenwich. Si se desea un reloj de sol horizontal se hace lo mismo, pero clavando el gnomon en el suelo. Aquí sí que puede clavarse el gnomon apuntando a la estrella polar (que en este caso puede verse).

2.3. Cálculo de un reloj de sol

Antes de dar fórmulas de cálculo para construir relojes de sol deberemos introducir algunos sistemas de coordenadas celestes que necesitaremos para nuestro objetivo.

El *horizonte astronómico* correspondiente a un determinado observador es el círculo máximo de la esfera celeste centrada en dicho observador obtenido por intersección del plano horizontal del observador con la esfera. La intersección de la esfera celeste con la vertical del observador se denomina *zénit* (ver figura 10). A cualquier astro situado en un punto P de la esfera celeste, por ejemplo el sol, le asociamos dos coordenadas llamadas *azimut* y *altura* de la manera siguiente. La altura a del punto P es la distancia angular, medida sobre el círculo máximo que une P y el zénit, entre el horizonte y P. La altura se toma positiva para los astros situados por encima del horizonte. El azimut A del punto P es la distancia angular, medida sobre el horizonte, desde el Sur hasta la intersección con el horizonte del círculo máximo que une P y el zénit. Dicha distancia angular se toma en sentido positivo desde el Sur hacia el Oeste, tal como indica la figura 10.

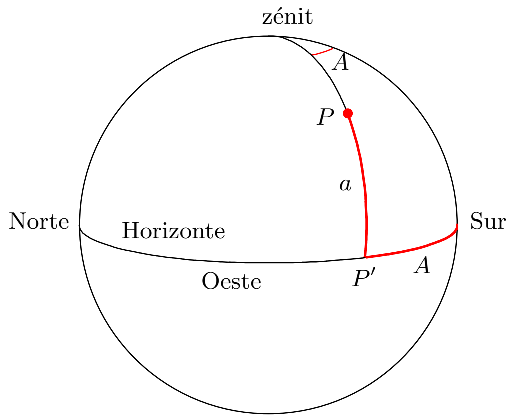


figura 10

Vamos a introducir ahora otras coordenadas llamadas *ángulo horario* y *declinación*. Si P es un punto cualquiera de la bóveda celeste, la declinación δ de P es la distancia angular desde el ecuador celeste hasta P, medida a lo largo del círculo máximo que pasa por P y por los polos celestes (figura 11).

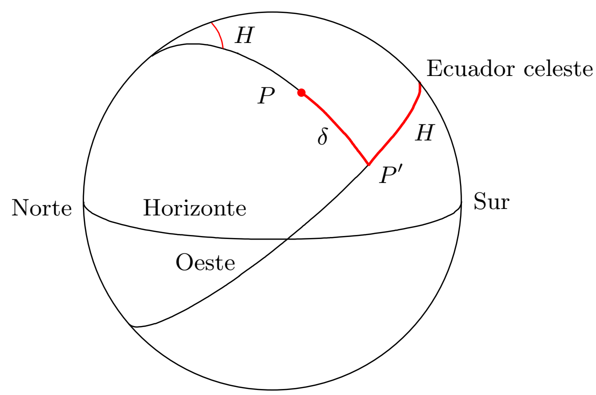


figura 11

Se toma positiva para los puntos P situados al norte del ecuador celeste. El ángulo horario H de P respecto al meridiano del observador es la distancia angular, medida sobre el ecuador celeste, desde la intersección del ecuador con el meridiano del observador hasta la intersección del ecuador con el círculo máximo que pasa por el ecuador y por los polos celestes.

Vamos a obtener ahora las fórmulas que dan el azimut A y la altura a de un punto P en función del ángulo horario H y la declinación δ de dicho punto. Tomemos unos ejes rectangulares de coordenadas (x, y, z) que tengan por origen el observador, de manera que el eje de las x esté contenido en el plano horizontal del observador y se dirija hacia el Sur, el eje de las y esté contenido en el plano horizontal y se dirija hacia el Oeste, y el eje de las z vaya del observador hacia el zénit. Designaremos por $\vec{r}(A,a)$ el vector que une el observador con el punto P. Si consideramos que la esfera celeste tiene radio 1, las componentes de este vector respecto de los ejes que hemos introducido son

$$\vec{r}(A,a) = \begin{pmatrix} \cos a \cos A \\ \cos a \,\mathrm{sen}\; A \\ \mathrm{sen}\; a \end{pmatrix}$$

Tomemos ahora otros ejes rectangulares de coordenadas (X,Y,Z) con el mismo origen anterior (es decir, el observador), de la siguiente manera. El eje de las X está en el plano del ecuador y se dirige hacia el Sur; el eje de las Y está contenido en el plano horizontal y se dirige hacia el Oeste (igual que el eje de las y del anterior sistema); el eje de las Z une el observador con el polo norte celeste.

Las componentes del vector $\vec{r}$ que une el observador con el punto P en estos ejes son

$$\vec{r}(H,\delta) = \begin{pmatrix} \cos\delta \cos H \\ \cos\delta \,\mathrm{sen}\; H \\ \mathrm{sen}\; \delta \end{pmatrix}$$

Se pasa de los ejes de coordenadas (x,y,z) a los ejes de coordenadas (X,Y,Z) por una rotación de ángulo $\beta = 90^0 - \varphi$ (donde φ indica la latitud del observador) alrededor del eje de las y (que coincide con el eje de las Y). Se tendrá pues:

$$\begin{pmatrix} \cos a \cos A \\ \cos a \,\mathrm{sen}\; A \\ \mathrm{sen}\; a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\mathrm{sen}\;\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}\;\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta \cos H \\ \cos\delta \,\mathrm{sen}\; H \\ \mathrm{sen}\; \delta \end{pmatrix}$$

Estas fórmulas relacionan (A,a) con (H,δ). Escritas por extenso son:

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \cos a\, \cos A & = & \cos\beta\, \cos\delta\, \cos H - \mathrm{sen}\;\beta\, \mathrm{sen}\;\delta \\ \cos a \,\mathrm{sen}\; A & = & \cos\delta \,\mathrm{sen}\; H \\ \mathrm{sen}\; a & = & \mathrm{sen}\;\beta\, \cos\delta\, \cos H + \cos\beta \,\mathrm{sen}\;\delta \end{array} \right. \qquad (1)$$

Dividiendo la primera por la segunda tenemos

$$\mathrm{cotan}\; A = \cos\beta\, \mathrm{cotan}\; H - \frac{\tan\delta \,\mathrm{sen}\;\beta}{\mathrm{sen}\; H} \qquad (2)$$

Esta ecuación determina A en función de H, δ y la latitud. La tercera de (1) determina a en función de estas tres variables.

Vamos a estudiar ahora la sombra de un punto sobre una pared. Consideremos el sistema rectangular de coordenadas (x, y, z) que hemos descrito antes (el eje de las x es horizontal y va del observador hacia el Sur en sentido positivo; el eje de las y va del observador hacia el Oeste en sentido positivo; el eje de las z es vertical y va del observador al zénit en sentido positivo). Supongamos ahora que tenemos una pared vertical que pasa por el observador y forma un ángulo i con la línea Este-Oeste. Medimos el ángulo i en el mismo sentido que los azimuts. Tomamos otros ejes rectangulares de coordenadas (x', y', z') de manera que el eje de las y' sea horizontal y esté contenido en la pared tal como indica la figura 12, y el eje de las z' sea vertical y coincida con el anterior eje de las z.

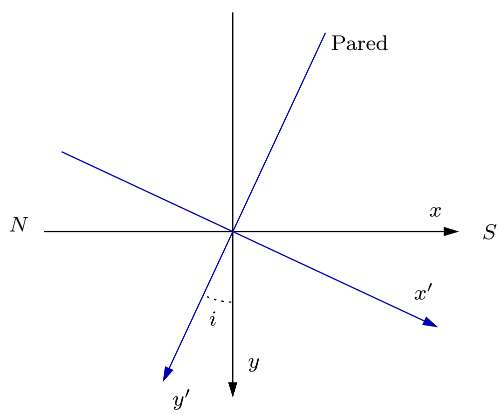


figura 12

Las fórmulas de transformación serán

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos i & \operatorname{sen} i & 0 \\ -\operatorname{sen} i & \cos i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sea (x'_0, y'_0, z'_0) un punto del cual queremos conocer su sombra sobre la pared. Sean A y a el azimut y la altura del sol en el instante en el cual deseamos conocer dicha sombra. La dirección de cualquier rayo de sol en aquel instante es el vector que en los ejes de coordenadas (x, y, z) tiene por componentes $(\cos a \cos A\,, \cos a \operatorname{sen} A\,, \operatorname{sen} a)$. En los ejes de coordenadas (x', y', z') adaptadas a la pared dicho vector, que denominaremos $\vec{v}(A, a)$, tendrá componentes $(\cos a \cos A \cos i + \cos a \operatorname{sen} A \operatorname{sen} i\,, -\cos a \cos A \operatorname{sen} i + \cos a \operatorname{sen} A \cos i\,, \operatorname{sen} a)$. La ecuación en paramétricas de la recta que pasa por (x'_0, y'_0, z'_0) y tiene $\vec{v}(A, a)$ por vector director es

$$(x'(\mu)\,,\, y'(\mu)\,,\, z'(\mu)) = (x'_0\,,\, y'_0\,,\, z'_0) + \mu\vec{v}(A, a)\;. \tag{3}$$

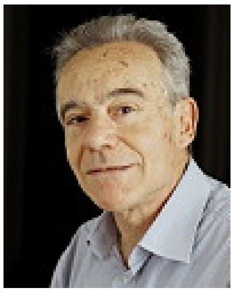
La intersección de esta recta con la pared corresponderá al valor de μ para el cual $x'(\mu) = 0$. Este valor es

$$\mu = -\frac{x'_0}{\cos a \cos(A - i)}\;.$$

Las coordenadas (y', z') del punto sobre la pared se obtendrán substituyendo en (3) el anterior valor de μ. De esta manera obtenemos la sobra del punto sobre la pared $(y'(A, a)\,,\, z'(A, a))$ en función de A y a. Utilizando la fórmula (2) y la tercera de (1) podemos conocer el azimut y la altura en función del ángulo horario y de la declinación del sol. El ángulo horario H del sol expresado en grados está relacionado con la hora h de tiempo solar verdadero local por $H = 360(h - 12)/24 = 15(h - 12)$.

Resumiendo, si conocemos la declinación del sol un día determinado (dato que encontraremos en los almanaques astronómicos), las fórmulas anteriores nos permiten hallar las coordenadas de la sombra de un punto en una pared en cualquier hora del día. Si se desea construir un reloj de sol tradicional, basta mirar la sombra de un punto cualquiera del gnomon sobre la pared cada hora de un día cualquiera del año (no importa cuál), por ejemplo un día de declinación nula (los equinoccios), y unir los puntos que así se obtienen con el punto de intersección del gnomon y la pared. De esta manera construiremos las líneas de las horas del reloj de sol.

Las fórmulas anteriores permiten, con un poco más de trabajo, construir relojes de sol analemáticos (los que marcan el tiempo solar medio).



J. Girbau
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
girbau@mat.uab.cat

Publicat el 18 de setembre de 2006