

## La geometria del taxi

Marco Sabatini

Molti testi di storia della matematica affermano che la geometria ha iniziato a svilupparsi per risolvere problemi di equa spartizione di terreni fertili. Apparentemente, questo è accaduto inizialmente in Egitto ed in Mesopotamia. Il particolare tipo di geometria sviluppatasi è stato fortemente influenzato dal fatto che le regioni da coltivare erano pianeggianti. Ancora oggi, la gran parte della geometria che studiamo a scuola è geometria piana.

Potremmo chiederci che tipo di geometria avremmo avuto se l'ambiente originario fosse stato un ambiente urbano. Probabilmente, non sarebbe stato necessario cambiare gli oggetti elementari sui quali vengono costruiti definizioni e teoremi: punti, rette, piani. Invece è verosimile che il calcolo delle distanze non sarebbe stato effettuato come su un terreno pianeggiante, sul quale è possibile ogni spostamento, in qualsiasi direzione, perché in città non si può passare attraverso le costruzioni. Se ci muoviamo in automobile in una città disegnata come un accampamento romano, con strade orientate nelle due direzioni cardinali, nord-sud ed est-ovest, gli unici movimenti possibili sono nelle due direzioni NS e EO. Quindi è naturale calcolare le distanze, per tutto ciò che riguarda la gestione dei consumi automobilistici o per i tempi di percorrenza di un percorso urbano, usando un'approccio diverso da quello scelto alcuni millenni fa in Egitto. Per esempio, un conducente di taxi che deve organizzare il proprio lavoro e calcolare tempi e costi troverà più realistico questo calcolo delle distanze di quello euclideo. Giocando con le parole, chia-



miamo “distaxi” la distanza calcolata muovendosi solo parallelamente alle due direzioni fondamentali. D’ora in poi parleremo di geometria del taxi per descrivere le proprietà relative alla distaxi, e di geometria euclidea per quelle tradizionali. Gli oggetti fondamentali delle due geometrie sono gli stessi, punti e rette, quindi tutte le proprietà della geometria euclidea relative a questioni di appartenenza o intersezione vengono ereditate senza modifiche dalla geometria del taxi. Invece cambiano, a volte in modo sorprendente, le proprietà dipendenti dalla distanza. Vediamo come, analizzando alcuni esempi semplici.

Iniziamo lavorando su un piano cartesiano: ogni punto del piano corrisponde ad una coppia ordinata di numeri, ascissa ed ordinata. Scelti due punti  $A$  e  $B$ , la distaxi  $\partial(A, B)$  si calcola misurando il percorso più breve che porta da  $A$  a  $B$  muovendosi solo parallelamente ad uno degli assi. La situazione più semplice si ha quando  $A$  e  $B$  sono su una retta parallela ad un asse. In questo caso la distaxi è la lunghezza euclidea del segmento che ha per estremi  $A$  e  $B$ , come in figura 1, dove abbiamo  $\partial(A, B) = 4$ . Negli altri casi, la distaxi di due punti, per esempio  $E$  e  $F$  in figura 1, è la somma delle lunghezze euclidee di due segmenti paralleli agli assi: si costruisce un rettangolo avente il segmento  $EF$  come diagonale e si calcola il semiperimetro euclideo di questo rettangolo, come in figura 1, in cui  $\partial(C, D) = 7$ ,  $\partial(E, F) = 8$ .

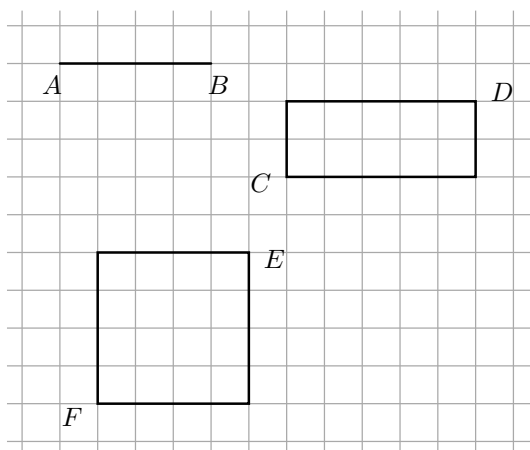


Figura 1

In generale, detta  $d(A, B)$  la distanza euclidea, abbiamo:

$$\partial(A, B) \geq d(A, B)$$

Chi desidera fare un po' d'esercizio con le formule può tentare di dimostrare che, presi due punti  $A$ , di coordinate  $(a_1, a_2)$  e  $B$ , di coordinate  $(b_1, b_2)$ , la distasi  $\partial(A, B)$  è data da:

$$\partial(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

dove  $|n|$  indica il valore assoluto del numero  $n$ .

Vediamo ora le circonferenze della geometria del taxi. Una circonferenza di centro  $C$  e raggio  $r$  è definita come l'insieme dei punti aventi distasi  $r$  da  $C$ . In figura 2 abbiamo disegnato le circonferenze di centro  $A$  e raggio 2, di centro  $B$  e raggio 3, di centro  $C$  e raggio 4, di centro  $D$  e raggio 3. E' evidente che le taxi-circonferenze sono dei quadrati euclidei con le diagonali parallele agli assi. La figura mostra che due circonferenze possono avere 0, 1, 2 o infiniti punti in comune.

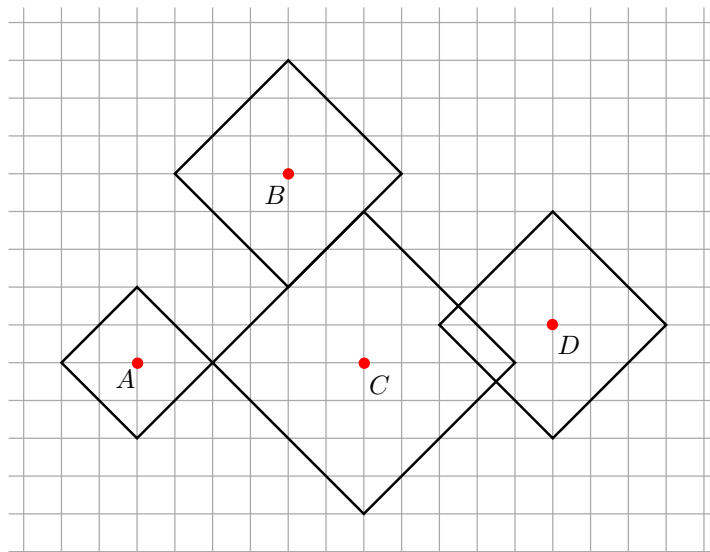


Figura 2

Un altro oggetto geometrico definito a partire dal concetto di distanza è l'asse di un segmento. Dati due punti distinti  $A$  e  $B$ , l'asse di un segmento

è l'insieme dei punti  $P$  che hanno la stessa distaxi da  $A$  e da  $B$ . In figura 3 abbiamo disegnato l'asse di  $AB$  scegliendo differenti posizioni per il segmento  $AB$ , in relazione alle direzioni degli assi. Come si vede, l'asse di un segmento non è sempre una retta, ed in alcuni casi non è neanche una poligonale. Le regioni celesti della figura 3 indicano che nell'asse del segmento  $AB$  sono contenuti due quarti di piano, che si estendono illimitatamente nelle direzioni indicate dalle frecce.

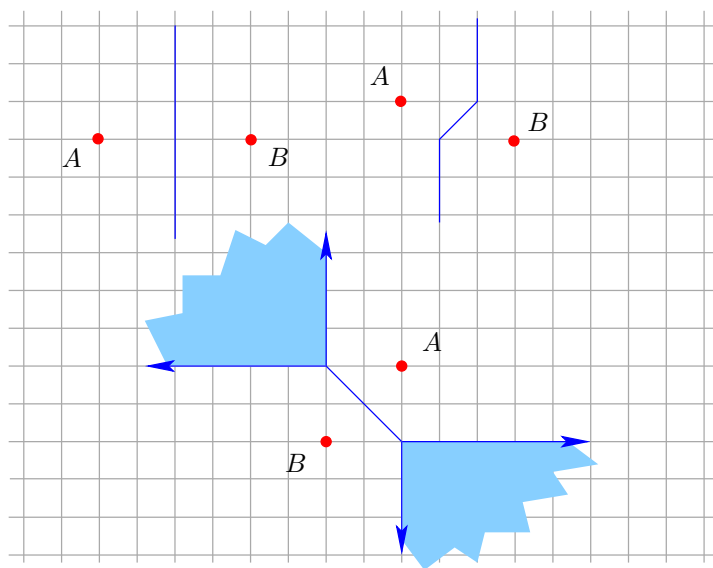


Figura 3

## Coniche

Scelti due punti distinti  $A$  e  $B$ , con  $\partial(A, B) = m$ , l'ellisse è l'insieme dei punti  $P$  tali che

$$\partial(P, A) + \partial(P, B) = s > m.$$

In figura 4 abbiamo disegnato alcune ellissi con  $m = 4$  e  $s = 8$ . Anche in questo caso la forma dell'insieme che si ottiene dipende dall'orientamento del segmento  $AB$ .

Prima di studiare parabole ed iperboli, vediamo come calcolare la distaxi di un punto  $A$  da una retta. Come nella geometria euclidea, essa viene

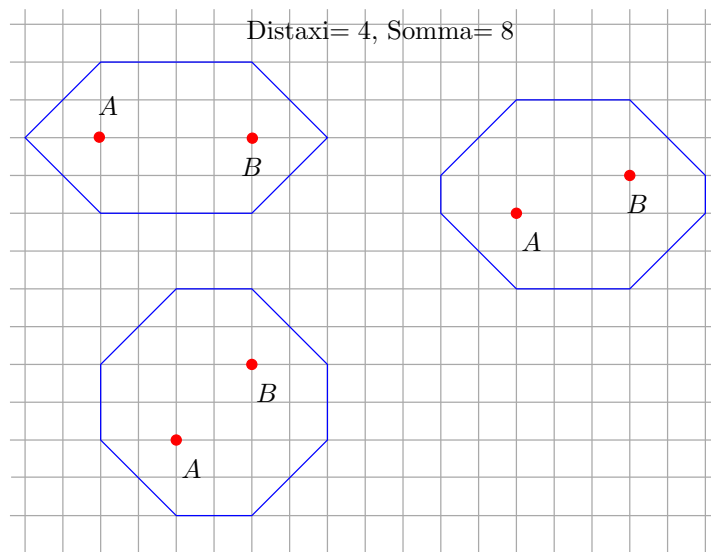


Figura 4

definita come la minima distaxi  $\partial(A, P)$ , con  $P$  punto della retta. Un modo semplice di rappresentare il punto o i punti di minima distaxi consiste nel disegnare la più grande taxi-circonferenza centrata nel punto considerato, che tocca la retta senza attraversarla. Nella figura 5 abbiamo considerato tre punti con distaxi 3 da un retta. Nel caso del punto  $B$  e della retta  $s$ , i punti di distaxi minima sono infiniti.

Ora possiamo fare qualche esempio di taxi-parabola. Una parabola si definisce a partire da un retta  $d$ , detta direttrice, e da un punto  $F$ , detto fuoco. La parabola è l'insieme dei punti che hanno la stessa distaxi da  $d$  e da  $F$ . Nella figura 6 abbiamo disegnato due parabole, variando l'inclinazione delle direttrici. Anche in questo caso la forma dell'insieme risultante non è sempre la stessa.

Concludiamo la nostra rassegna di esempi con l'ultima conica, l'iperbole. La sua definizione è simile a quella dell'ellisse, ma in questo caso si considera la differenza delle distanze, invece della somma. Dati due punti distinti  $A$  e  $B$ , con  $\partial(A, B) = m$ , l'ellisse è l'insieme dei punti  $P$  tali che

$$|\partial(P, A) - \partial(P, B)| = s < m.$$

$A$  e  $B$  vengono detti fuochi dell'iperbole. In figura 7 abbiamo disegnato

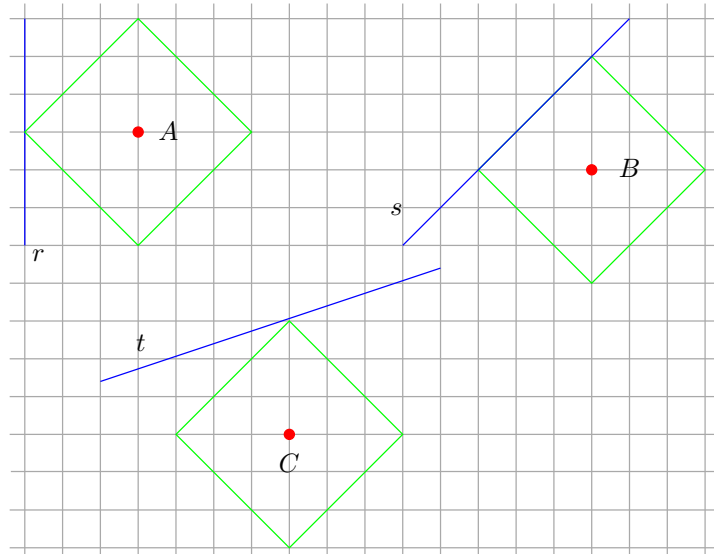


Figura 5

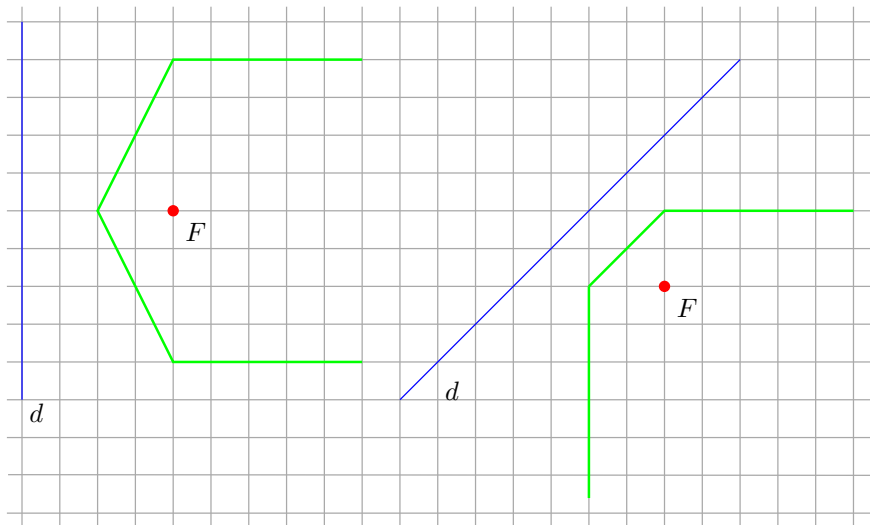


Figura 6

alcune iperboli, con  $m = 4$  e  $s = 2$ . Anche qui la forma del risultato dipende dalla posizione di  $A$  e  $B$ . Come per l'asse di un segmento, il risultato non è necessariamente una linea spezzata, ed in alcuni casi contiene due quarti di piano.

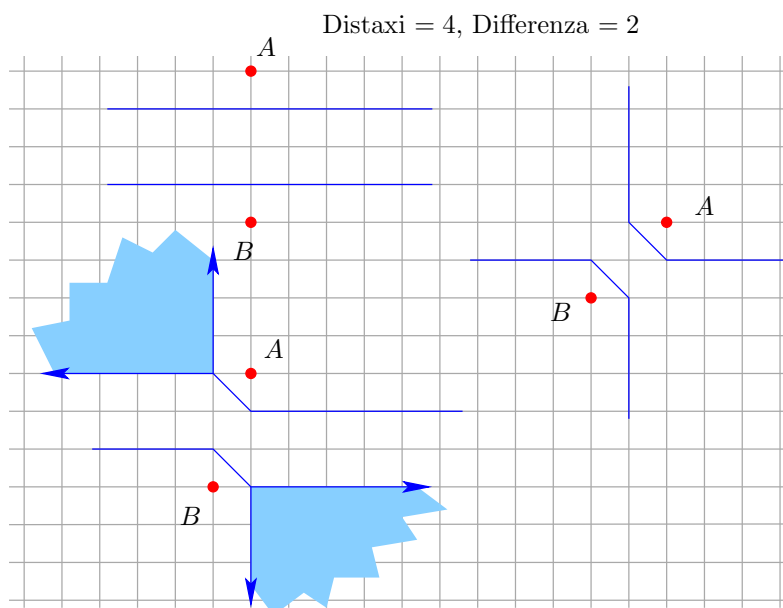


Figura 7

Ormai è chiaro che la geometria del taxi è un universo molto differente da quello euclideo. Vediamo alcuni teoremi euclidei che non sono veri nella geometria del taxi.

**Non-Teorema.** *Una retta ed una circonferenza possono avere 0, 1 o 2 punti in comune.*

Infatti una retta può avere infiniti punti in comune con una circonferenza, come in figura 5.

**Non-Teorema.** *Esiste una sola circonferenza che passa per 3 punti non allineati.*

Infatti, se prendiamo i tre punti  $(-3, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(3, 0)$ , ogni taxi-circonferenza con centro  $(0, c)$ ,  $c < 0$ , e raggio  $r = 3 - c$ , passa per questi tre punti.

**Non-Teorema.** *Due circonferenze che hanno 3 punti distinti in comune coincidono.*

L'esempio dei tre punti  $(-3, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(3, 0)$  mostra come si possono costruire infinite circonferenze distinte che hanno più di tre punti in comune.

Dopo questi non-teoremi, dimostriamo un teorema: calcoliamo  $\pi$ . Come vedremo, la situazione è assai più semplice che nella geometria euclidea.

**Teorema.**  $\pi = 4$ .

**Dimostrazione.**  $\pi$  è definito come il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e la lunghezza del diametro. Una circonferenza di raggio  $r$  ha quattro lati, ognuno di lunghezza  $2r$ , quindi la lunghezza della circonferenza è  $8r$ . Il diametro ha lunghezza  $2r$ , quindi  $\pi = 8r/2r = 4$ .  $\square$

Pensate a quanto tempo è stato perso nella storia della geometria euclidea per calcolare approssimazioni del valore di  $\pi$ , o per dimostrare che  $\pi$  non è un numero razionale! Bastava cambiare distanza, e tutto era più semplice.

## Triangoli rettangoli

**Definizione.** Diciamo che un triangolo  $T$  è rettangolo se una delle due condizioni seguenti è verificata:

1.  $T$  ha due lati paralleli rispettivamente all'asse  $x$  e all'asse  $y$ .
2.  $T$  si ottiene per rotazione da un triangolo con due lati paralleli rispettivamente all'asse  $x$  e all'asse  $y$ .

**Teorema.** *Se  $T$  è come al punto 1, i suoi cateti hanno lunghezze  $l_1$  e  $l_2$ , l'ipotenusa ha lunghezza  $l_3$ , allora  $l_3 = l_1 + l_2$ .*

Questo teorema dimostra che la ben nota relazione di Pitagora tra lunghezze dell'ipotenusa e dei cateti,  $l_3^2 = l_1^2 + l_2^2$  non vale nella geometria del taxi.

Non tutti i triangoli rettangoli verificano questo teorema. Per esempio il triangolo  $ABC$  della figura 8 è rettangolo, ma tutti i suoi lati hanno lunghezza 10, e  $10 + 10 \neq 10$ . E' interessante notare che questo triangolo è contemporaneamente rettangolo e equilatero. Triangoli isosceli ed equilateri possono avere un aspetto poco familiare. Per esempio, il triangolo  $DEF$  della figura 8 è isoscele. Il triangolo  $GHI$  è isoscele nella geometria del taxi, così come in quella euclidea.



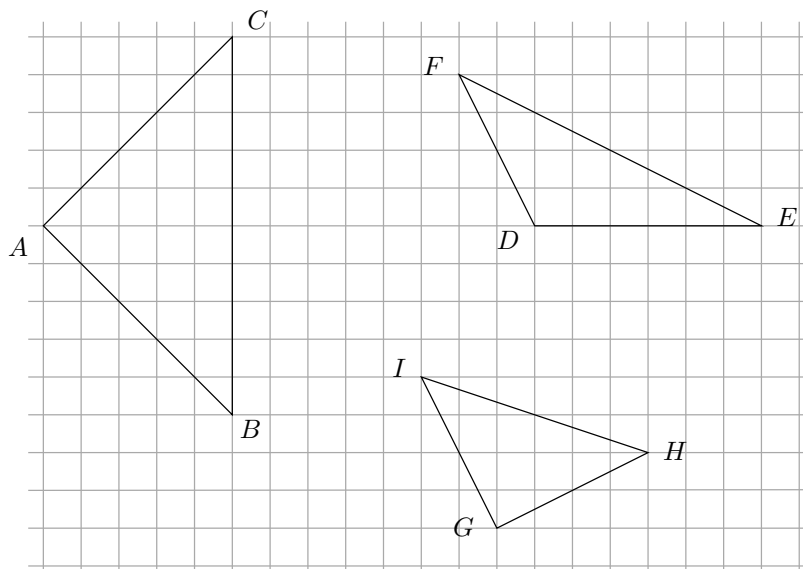


Figura 8

## Problemi di minimo

Siamo arrivati alla distaxi pensando ad una situazione pratica: come calcolare consumi di carburante e tempi di percorrenza in città. Problemi simili nascono dovendo organizzare reti di distribuzione di gas, acqua, elettricità. Anche se teoricamente i tubi possono percorrere diagonalmente la struttura urbana, è più utile installarli sotto le strade, per poter effettuare lavori di manutenzione. In questo modo il calcolo della lunghezza effettiva di una rete di distribuzione segue le regole della geometria del taxi. Per una buona amministrazione, il problema principale è quello di avere la più breve rete che permetta di raggiungere tutti i punti che richiedono la fornitura. Una rete molto particolare è quella dei trasporti pubblici: autobus e metropolitana.

Esaminiamo alcuni casi semplici.

Per primo, una rete che consiste inizialmente di due soli punti  $A$  e  $B$ , e del segmento che li connette. Cerchiamo la posizione ideale per un terzo nodo  $C$  e di eventuali segmenti aggiuntivi, in modo da minimizzare la lunghezza complessiva della rete  $ABC$ .  $A$  e  $B$  potrebbero essere un albergo e la stazione ferroviaria, e  $C$  il parcheggio dei taxi. Per semplicità, assumiamo che il segmento  $AB$  sia parallelo all'asse  $x$ . Si vede facilmente che ogni punto del

segmento  $AB$  può essere scelto come punto  $C$ , in modo da avere una rete di lunghezza complessiva

$$\partial(A, C) + \partial(B, C) = \partial(A, B) = d(A, B).$$

Infatti, se consideriamo un punto  $D$  esterno alla retta  $AB$  e la sua proiezione  $D'$  sulla retta  $AB$ , si ha:

$$\partial(A, D) \geq \partial(A, D') \quad \partial(B, D) \geq \partial(B, D'),$$

quindi conviene restare sulla retta  $AB$ .

Anche se il segmento  $AB$  non è parallelo ad un asse, esistono infiniti punti che minimizzano la somma delle distanze da  $A$  e da  $B$ . Infatti ogni punto del rettangolo che ha il segmento  $AB$  per diagonale ha questa proprietà. Lasciamo al lettore la dimostrazione di questo fatto.

Più interessante vedere quello che accade se, dati tre punti non allineati  $A, B, C$ , cerchiamo la posizione ottimale per un quarto punto  $D$ . Disegniamo le due rette parallele agli assi e passanti per  $A$ , e facciamo lo stesso per  $B$  e  $C$ . Ora abbiamo sei rette, tre parallele all'asse  $x$ , tre parallele all'asse  $y$ . Alcune di esse potrebbero coincidere. Queste rette delimitano alcuni rettangoli. Consideriamo  $\mathbf{R}$ , il più piccolo rettangolo tra quelli che contengono tutti i punti  $A, B, C$ . Se  $A, B$  e  $C$  sono vertici di  $\mathbf{R}$ , allora formano una figura “ad L”, ed è facile verificare che il punto ottimale è il vertice della “L”. Ora abbiamo due casi:

- 1) Se un solo punto tra  $A, B$  e  $C$  – per esempio  $C$  – non è un vertice di  $\mathbf{R}$ , allora una delle sei rette attraversa il rettangolo. Questa retta incontra la retta  $AB$  in un punto  $X$ . Questo punto è la scelta ottimale, perché ogni spostamento di ampiezza  $s$  da  $X$  aumenta di  $s$  la distassi da almeno due punti tra  $A, B$  e  $C$ , eventualmente diminuendo di  $s$  la distassi da non più di un punto tra  $A, B$  e  $C$  (figura 9). Quindi  $D = X$ .
- 2) Se due tra  $A, B$  e  $C$  non sono vertici, allora due rette attraversano il rettangolo. Queste rette non sono parallele, e si incontrano in un punto  $X$ . Ogni spostamento di ampiezza  $s$  da  $X$  aumenta di  $s$  la distassi da almeno due punti tra  $A, B$  e  $C$ , eventualmente diminuendo di  $s$  la distassi da non più di un punto tra  $A, B$  e  $C$  (figura 10). Concludendo, anche in questo caso  $D = X$ .

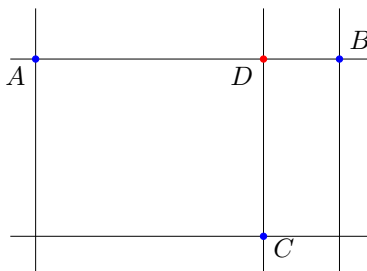


Figura 9

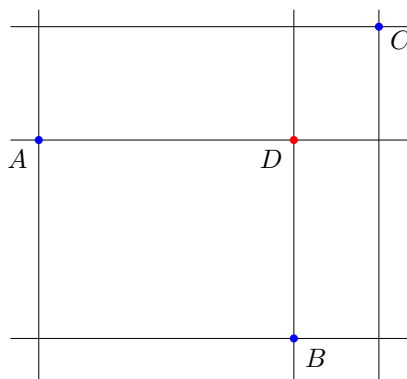


Figura 10

Aumentando il numero dei punti assegnati, la complessità del problema della scelta ottimale aumenta, e spesso non ha soluzione unica. Questo è evidente nella situazione di figura 11.

I punti assegnati sono  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , il problema consiste nel trovare una posizione ottimale per un punto  $E$  che minimizzi la somma delle distaxi da  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . La soluzione non è unica, perché ogni punto del quadrilatero  $WXYZ$  è ottimale. Infatti, partendo da un punto qualsiasi di questo quadrilatero, ogni spostamento di ampiezza  $s$  interno al quadrilatero aumenta di  $2s$  le distaxi da due punti assegnati, e diminuisce di  $2s$  le distaxi da altri due punti assegnati, lasciando invariata la somma delle distaxi.

La mancanza di un'unica soluzione è un fatto positivo o negativo? Probabilmente dipende dal ruolo di chi considera la situazione. Normalmente i matematici preferiscono i problemi con soluzione unica, ma gli amministratori

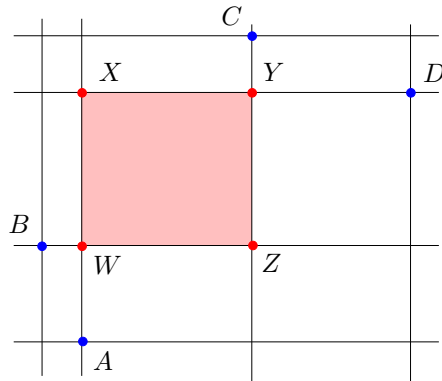


Figura 11

probabilmente apprezzano un po' di libertà decisionale.

## Bibliografia

- Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, di Eugene F. Krause, ed. Dover, 1987.
- Geometry: A Metric Approach with Models*, Undergraduate Texts in Mathematics, di Richard S. Millman e George D. Parker, ed. Springer, 1990.
- Flavors of Geometry* (Mathematical Sciences Research Institute Publications), di Silvio Levy, ed. Cambridge University Press, 1997.
- Minkowski Geometry* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications), di A.C. Thompson, Cambridge University Press, 2004.
- The Complete Idiot's Guide to Geometry*, di Denise Szecsei, ed. Alpha, 2004.
- Dr. Math Presents More Geometry: Learning Geometry is Easy! Just Ask Dr. Math.* di The Math Forum Drexel University e Jessica Wolke-Stanley, Drexel Univ., 2004.
- Geometry: Euclid and Beyond*, di Robert Hartshorne, Springer, 2006.

---

*The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, di George E. Martin, ed. Springer, 2006.

*Geometry Out Loud: Learning Mathematics Through Reading and Writing Activities*, di Pat Mower, ed. Jossey-Bass, 2006.



Facoltà di Ingegneria  
Dipartimento di Matematica  
Università degli Studi di Trento  
[marco.sabatini@unitn.it](mailto:marco.sabatini@unitn.it)  
<http://www.ing.unitn.it/~sabatini/>

*Publicat el 28 de març de 2007*