MAT²

MATerials MATemàtics
Volum 2008, treball no. 7, 27 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Tres apunts sobre Henri Poincaré

Maite Grau

Aquest article es basa en la informació sobre el matemàtic francès Henri Poincaré recollida per a una sessió de l'assignatura de lliure elecció "La Matemàtica i els seus personatges", impartida durant el primer quadrimestre del curs 2008–09 a la Universitat de Lleida. L'objectiu principal d'aquesta assignatura és encuriosir als alumnes en els coneixements científics, i en particular, en les matemàtiques.

H. Poincaré, als 30 *anys.*

En la sessió sobre Henri Poincaré es van tractar alguns temes de matemàtiques als quals en Poincaré va contribuir de manera decisiva. Incloem només un parell de detalls de la seva biografia.

Jules Henri Poincaré neix a Nancy el 29 d'abril de 1854 i mor a Paris el 17 de juliol de 1912. Va viure tota la seva vida a França, es va casar i va tenir quatre fills.

Es va dedicar a la Matemàtica, la Física, la Filosofia,. . . fent aportacions importants en tots aquests camps. De fet, un dels llibres més famosos d'en Poincaré, titulat *La Ciència i la Hipòtesi*, [8], versa sobre Filosofia. Es diu d'ell que va ser el darrer gran científic universalista. Podeu trobar a §5 un llistat de webs amb informació sobre la biografia i les contribucions científiques, en general, d'Henri Poincaré.

Els tres temes que descriurem i en els què Henri Poincaré va fer aportacions remarcables són:

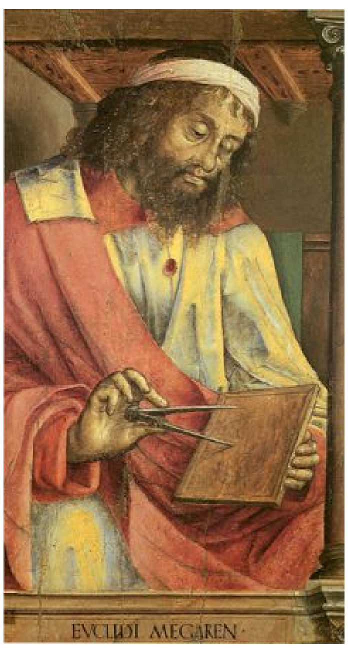
- un model de la geometria no Euclidiana,

- el descobriment del caos,
- la *conjectura* de Poincaré.

La tria d'aquests temes es basa exclusivament en les preferències personals de l'autora.

1 Un model de la geometria no Euclidiana

La geometria plana consisteix en l'estudi de les propietats i les mesures de les figures planes. Es pot dir que va néixer amb Euclides d'Alexandria (segle III a.C.), que fou un matemàtic grec, professor a Alexandria. Va escriure *Els Elements* on es recullen la majoria dels resultats matemàtics que es coneixien fins al moment. Podeu trobar una versió d'Els Elements, en diversos idiomes inclòs el català, a la pàgina web: http://www.euclides.org/



Euclides d'Alexandria.

En particular, en Els Elements es descriuen (i demostren) tot de resultats que es coneixien sobre geometria. Recordem que la paraula geometria prové de geo (terra) i metria (mesura), de manera que tracta sobre la mesura de la terra. Consisteix en estudiar les propietats i relacions dels objectes que es poden construir amb els intruments de mesura més bàsics: el regle i el compàs. Els objectes geomètrics plans són punts, rectes, segments, distàncies, angles, circumferències, polígons, ... En la seva obra, Euclides va establir uns estàndars per a la descripció d'una ciència. A partir d'uns pocs axiomes, també anomenats postulats, es pot deduir tota la geometria i s'arriba a un sistema sense contradiccions. Un axioma és una "veritat evident", una afirmació que no requereix demostració. Una de les grans aportacions d'Euclides va ser determinar cinc axiomes (nomès cinc!) a partir dels quals es poden deduir totes les proposicions que es coneixien sobre geometria. Tota la geometria que es dedueix a partir d'aquests cinc postulats s'anomena *Geometria Euclidiana.*

Els cinc axiomes de la Geometria Euclidiana són:

1. Per dos punts diferents hi passa una única recta.

2. Un segment rectilini sempre pot ser allargat.

3. Hi ha una única circumferència amb un centre i un radi donats.

4. Tots els angles rectes són iguals.

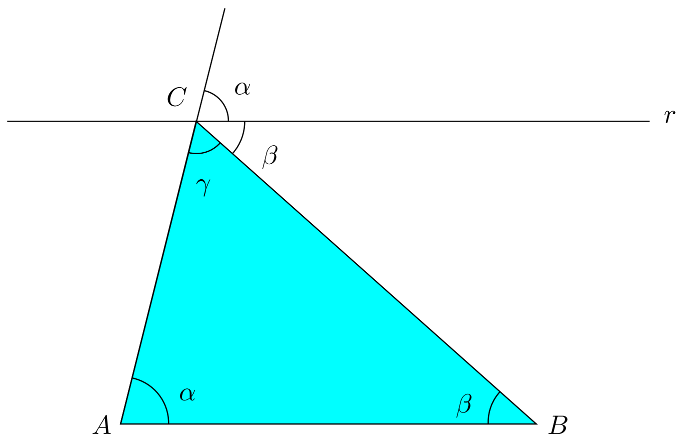
5. Per un punt exterior a una recta hi passa una única paral·lela.

Si ens fixem amb aquests postulats, els tres primers determinen propietats molt bàsiques dels objectes que es consideren, són com una definició de les relacions entre punts i rectes, segments i circumferències. El quart postulat estableix que tots els angles rectes, sigui on sigui que estan situats, són iguals. Sembla ser que Euclides va incloure aquest axioma per evitar parlar de *moviment* de figures planes. Si volguéssim demostrar que dos angles rectes són iguals, el que podríem fer és moure'n un per posar-lo a sobre de l'altre i veure que les rectes que els defineixen coincideixen. Euclides volia evitar el moviment de figures planes donat que en la seva època aquest concepte havia estat molt debatut i controvertit. Recordem les paradoxes de Zenó d'Elea, que eren anomenades fal·làcies per Aristòtil. El cinquè postulat, en canvi, és molt diferent dels anteriors. Ens descriu una propietat entre punts i rectes que *s'ha de satisfer*.

A partir d'aquests cinc postulats, n'Euclides va demostrar els resultats més coneguts (i útils!) de la geometria plana. Un dels resultats que es demostra a partir d'aquests postulats és

> La suma dels angles interiors de tot triangle és un angle pla.

Recordem que un angle pla és la suma de dos angles rectes, és a dir, és un angle de 180 graus. Anem a escriure per passos com n'Euclides va demostrar aquesta proposició, a partir dels cinc postulats i de proposicions que havia demostrat anteriorment.



$\alpha + \beta + \gamma =$ angle pla $= 2$ angles rectes

Prenem un triangle qualsevol i anomenem A, B i C els seus vèrtexs. Als angles corresponents els anomenem α, β i γ. Volem veure que la suma d'α, β i γ és un angle pla.

1. Allarguem el segment AC pel costat de C (estem usant el segon postulat d'Euclides).

2. Prenem la recta paral·lela al costat AB que passa per l'altre vèrtex C. En aquest pas és on s'usa el cinquè postulat d'Euclides ja que sabem que aquesta recta existeix i és única. L'anomenem recta r.

3. Per una proposició anterior, es té que l'angle entre el segment allargat i la recta r coincideix amb α (veure la figura).

4. Per una proposició anterior, es té que l'angle entre la recta r i el costat BC coincidex amb β (veure la figura).

5. En la recta que hem allargat en el primer pas i a sobre del punt C, veiem que $\alpha + \beta + \gamma$ és un angle pla.

Observem com, sense el cinquè postulat, aquesta demostració no es podria fer. De fet, si suposéssim que el cinquè postulat no es satisfà, es podria veure que la suma dels angles interiors de qualsevol triangle no seria necessàriament un angle pla. És a dir, si el cinquè postulat no es satisfés, podriem trobar triangles tals que la suma dels seus angles interiors no fos igual a dos angles rectes.

Donat que aquest darrer postulat s'assembla més a una proposició, diversos matemàtics es van plantejar partir dels primers quatre postulats i intentar demostrar-lo a partir d'aquests. La seva intenció era construir tota la Geometria Euclidiana a partir dels quatre primers postulats. Van haver-hi diversos intents fallits de demostració d'aquest postulat. Com que aquest problema va adquirir fama, el cinquè postulat va prendre nom propi i s'anomenà *l'axioma de les paral·leles*. Alguns matemàtics van plantejat-se si la negació d'aquest postulat portaria a contradicció. És a dir, si neguem aquest postulat, podríem arribar a demostrar un enunciat i el seu contrari? Si fos així, aquest postulat seria imprescindible per a tenir un sistema lògic consistent.

Tal com hem esmentat, si neguéssim el cinquè postulat podriem trobar triangles tals que la suma dels seus angles interiors és diferent de 180 graus. Aquests triangles no donen lloc a cap contradicció. Una contradicció seria, per exemple, que *alhora* poguéssim demostrar que *tots* els triangles són tals que la suma dels seus angles interiors és 180 graus i també poguéssim trobar *almenys un* triangle que no satisfà aquesta propietat.

De manera paral·lela (mai millor dit!), dos matemàtics van mostrar que la negació del postulat de les paral·leles no porta a contradicció. Aquests matemàtics van ser Nikolai Lobachevski (Russia, 1792–1856) i János Bolyai (Hongria/Romania, 1802–1860).

Nikolai Lobachevski.

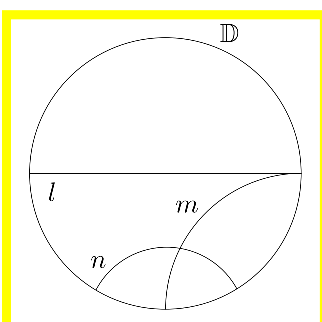
János Bolyai.

Aquests dos científics van iniciar la branca de les matemàtiques que s'anomena *Geometria no Euclidiana*. Van suposar els quatre primers postulats d'Euclides i un cinquè postulat que negava el de les paral·leles[1]:

- van suposar que per un punt exterior a una recta hi passa *més d'una* recta paral·lela (geometria hiperbòlica).

A partir d'aquests axiomes, van resseguir els raonaments d'Euclides i les seves proposicions i van crear una nova geometria. Les proposicions canvien el seu enunciat, però es poden demostrar resultats anàlegs i mai s'arriba a contradicció: es té un sistema lògic consistent. Situem-nos amb què el cinquè postulat sigui que per un punt exterior a una recta hi passa més d'una recta paral·lela. Fins al moment, aquesta nova geometria és un joc de lògica i sembla que no té res a veure amb el món que ens envolta. Com pot ser que per un punt exterior a una recta tinguem més d'una paral·lela? De fet, en aquesta geometria, es pot demostrar que el nombre de paral·leles a una recta donada i que passen per un punt fixat és infinit!

Henri Poincaré es va caracteritzar per fer evidents les relacions entre les matemàtiques i el món que ens envolta. En un dels seus articles ([6]) va descriure un model d'aquesta geometria no Euclidiana. El model de Poincaré, que s'anomena avui dia *disc de Poincaré*, és com un diccionari en el que els objectes de la geometria Euclidiana (punts, rectes, distàncies, angles, ...) prenen un nou significat i s'entén geomètricament el significat de les proposicions.



El disc de Poincaré.

Considerem un disc $\mathbb{D}$ pla de radi 1: aquest és el nostre pla. El disc $\mathbb{D}$ es considera *sense* la circumferència de la frontera, només l'interior. Els punts d'aquesta geometria són els punts d'aquest disc $\mathbb{D}$.

Una recta és un arc de cercle que intersecta la frontera de $\mathbb{D}$ de manera perpendicular. També es consideren rectes els diàmetres de $\mathbb{D}$.

L'angle en la intersecció entre dues *rectes* és l'angle que formen les seves tangents.

La resta de definicions coincideixen amb les de la geometria Euclidiana, excepte la de distància de la què parlarem en el proper paràgraf. Com en la geometria Euclidiana, dues rectes paral·leles són dues rectes que no tenen cap punt en comú.

En la figura de dalt, fixem-nos que:

- les rectes l i m són paral·leles,

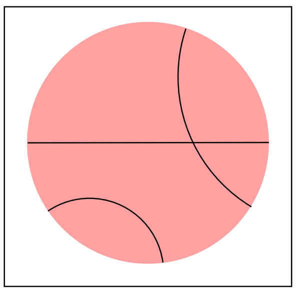
- les rectes l i n també són paral·leles, i

[1]Suposar que no hi ha cap recta paral·lela entraria en contradicció amb els altres postulats.

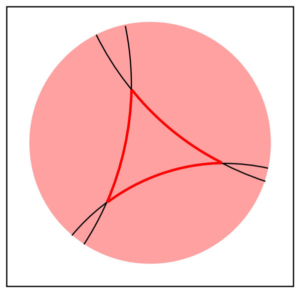
- les rectes m i n es tallen en un punt.

Per tant, les rectes m i n són dues paral·leles a l que passen pel mateix punt (el de tall entre m i n)! En aquest model es verifiquen els quatre primers postulats d'Euclides però no el cinquè.

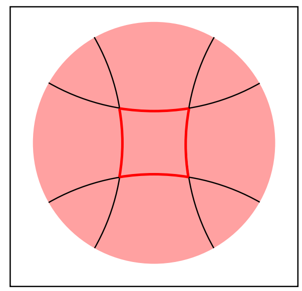
Les figures següents il·lustren la definició de recta en aquest disc.



Rectes



Un triangle



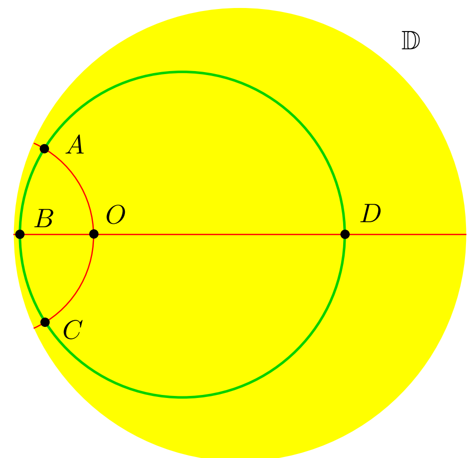
Un "quadrat"

Pel que fa a la definició de distància farem servir la següent idea. El centre del disc $\mathbb{D}$ és molt calent i a mesura que es consideren punts més allunyats del centre la temperatura disminueix. Fem servir la idea de la temperatura per entendre que les distàncies es dilaten i contrauen de manera contínua i paulatina segons si ens apropem o ens allunyen del centre del nostre espai $\mathbb{D}$. Usant fórmules, considerem X i Y dos punts en el disc de Poincaré i volem determinar la seva distància. Prenem P i Q els punts a la frontera de $\mathbb{D}$ de l'única recta (en aquesta geometria) que conté X i Y. La *raó doble* ρ d'aquests quatre punts es defineix per:

$$\rho = \frac{\overline{XP} \cdot \overline{YQ}}{\overline{YP} \cdot \overline{XQ}},$$

on $\overline{XP}$ denota la distància Euclidiana entre X i P. Denotem per $\rho(X, Y)$ aquesta raó doble ja que està definida pels dos punts de partida X i Y. La distància entre X i Y en el disc de Poincaré és el valor absolut de $\ln(\rho(X, Y))$.

Donat un punt i una distància, sempre existeix una circumferència de centre el punt i radi la distància donada (és un dels postulats). Per aquest motiu necessitem la noció de distància definida adés. Recordem que un radi és un segment de recta (en aquesta geometria) que uneix el centre de la circumferència i un dels punts d'aquesta.



En la figura de dalt tenim una circumferència (en verd) de centre en el punt O. Notem que les distàncies entre AO, BO, CO i DO són totes iguals i són radis de la circumferència. Hem marcat en vermell les rectes que mostren que els punts AOC estan alineats. També estan alineats els punts BOD.

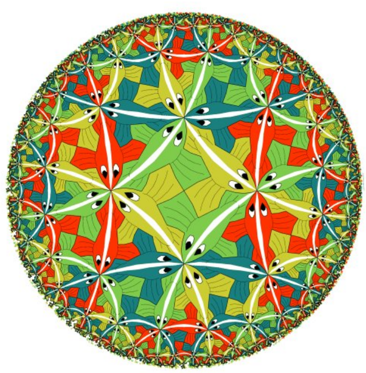
Fixem-nos que els passaria a uns éssers plans que habitessin aquest disc de Poincaré. Tots els objectes d'aquest disc (inclosos els mateixos habitants) es dilaten quan s'apropen al centre i es fan petits conforme s'apropen a la vora. Mai poden arribar a la vora, perquè hi tindrien mesura zero. Però, aquests éssers s'adonarien de que viuen en aquest espai? Imaginem un d'aquests éssers que es mesura el seu braç i comprova que té 65 cm de llarg. Aquest habitant es posa a caminar, en direcció a la vora del disc, i al cap d'una estona es torna a mesurar el braç. Nosaltres veuríem com aquest ésser s'ha fet més petit i el regle amb el que mesura també. Per a ell, en canvi, quan es tornés a mesurar el braç, veuria que la llargada és 65 cm ja que el regle s'ha encongit amb ell. Per a ell, la geometria a petita escala, seria la Euclidiana. Les mesures són *relatives*. Nosaltres, des de fóra, diem que el seu braç s'ha encongit. Ell, vivint en el seu pla, no se n'adona directament. De la mateixa manera, per a nosaltres el seu pla és afitat (viu en un disc); però per a ell el seu món és il·limitat ja que mai pot arribar a la vora. Com podria descobrir que viu en un pla no Euclidià? En aquesta geometria, es pot demostrar que

> la suma dels angles interiors a un triangle és menor que un angle pla i el seu *defecte* (el que li falta a la suma per arribar a un angle pla) és proporcional a l'àrea del triangle.

Per a triangles petits, aquest defecte és petit i el nostre habitant no podria detectar-lo. Imaginem que pogués mesurar la suma dels angles interiors d'un triangle “molt gros”. S’adonaria que aquesta suma és inferior a un angle pla i veuria que viu en un món on la geometria no és Euclidiana. Ha pogut deduir quina geometria governa el seu món a partir d’investigar propietats dels objectes que l’envolten i no basant-se únicament en la intuïció.

De la mateixa manera que per a la geometria plana, també existeix la geometria no Euclidiana en l’espai. El mateix Henri Poincaré, en l’article adés esmentat, també en dóna un model que permet entendre el significat de les propietats geomètriques dels objectes i deduir-ne de noves. El nostre món, segueix la geometria Euclidiana? Com ho podriem saber? Si mesurem els angles interiors d’un triangle format per la Terra, el Sol i alguns estels resulta que la seva suma **no** val 180 graus: la llum dels estels s’ha *corbat* en passar a prop del Sol. De fet, segons la Teoria de la Relativitat General, la geometria del nostre univers és un cas més general i complicat que el que hem descrit. En cada punt és dóna una geometria que depén de les masses que hi ha en un entorn. El nostre univers està corbat i a cada punt se li pot associar una geometria que pot ser Euclidiana o no.

L’artista M.C. Escher (Països Baixos, 1898–1972) es va inspirar en aquest model per a realitzar algunes de les seves il·lustracions

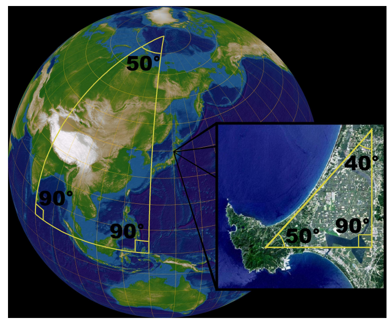


Circle Limit I. *Fish.*

Circle Limit IV. *Heaven and Hell.*

Fixem-nos que *tots* els peixos de la primera figura ténen la mateixa àrea (mesurant amb aquesta geometria). Si comptéssim tots els peixos que hi ha a sobre d’una mateixa recta, n’hi han infinits. Els mateix passa amb la segona figura i els àngels i els dimonis.

El disc de Poincaré és un model de la geometria plana no Euclidiana hiperbòlica (per un punt exterior a una recta hi passen infinites rectes paral-leles). També existeixen models per la geometria plana no Euclidiana el·líptica o geometria de Riemann (per un punt exterior a una recta *no* hi passa *cap* recta paral·lela). Malgrat que, com ja s'ha comentat, aquesta hipòtesi no és compatible amb la resta d'axiomes de la geometria euclidiana, la geometria esfèrica permet l'estudi i la comprensió de molts models interessants.



Per exemple, podem considerar que el nostre pla és una *esfera*. Per anar d'un punt a un altre d'aquesta esfera, el camí més curt és seguir el cercle màxim que passa per aquests dos punts. Les rectes d'aquesta esfera són, per tant, els cercles màxims. Donats dos punts en l'esfera, la recta que defineixen (cercle màxim) és la intersecció entre l'esfera i el pla que passa per aquests dos punts i el centre de l'esfera.

Observem que donat un cercle màxim i un punt fóra d'aquest, qualsevol recta que passi per aquest punt tallarà forçosament la recta donada. Aquest és un model de la geometria el·líptica. En aquesta geometria, la suma dels angles interiors a un triangle és major que un angle pla. De fet, l'*excés*, és a dir, la diferència entre aquesta suma i 180 graus, és proporcional a l'àrea del triangle.

En paraules d'Henri Poincaré:

> *Una geometria no pot ser més certa que una altra, nomès pot ser més convenient.*

Si voleu més informació sobre geometria no Euclidiana i sobre el disc de Poincaré, podeu consultar, per exemple, els enllaços que hi ha a §5 i també el quadern [10].

2 El descobriment del caos

Henri Poincaré va ser un dels primers científics en adonar-se de que alguns models d'equacions diferencials són caòtics. De fet, la paraula *caos* no va aparèixer fins uns seixanta anys després que ell posés de manifest aquest fenòmen.

Un dels problemes matemàtics, sobre Mecànica Celest, que actualment encara resta obert és l'anomenat *problema dels n cossos*. Va ser un dels problemes en què Poincaré es va interessar ja que proporciona un model matemàtic del nostre Sistema Solar.

Considerem n cossos que s'atreuen mútuament seguint la llei gravitacional de Newton. Recordem que si $\vec{r}$ és el vector definit per dues masses i r és el mòdul de $\vec{r}$, la força gravitacional de Newton que un cos exerceix sobre l'altre ve donada per:

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r},$$

on k és una constant que depén de la massa dels dos cossos i $\dfrac{\vec{r}}{r}$ és el vector unitari determinat per $\vec{r}$. Suposem que coneixem la massa de cadascun dels n cossos i la seva posició i velocitat en un moment fixat, que anomenem moment inicial. El problema dels n cossos consisteix en trobar la posició i la velocitat dels cossos respecte del temps.

En el cas que només considerem dos cossos ($n = 2$), el problema està resolt: els cossos segueixen les Lleis de Kepler del moviment planetari. Johaness Kepler (Alemania, 1571–1630) va descriure tres lleis que ha de seguir el moviment d'un planeta sotmès només a l'acció del Sol.

1. L'òrbita d'un planeta és una el·lipse amb el Sol en un dels seus focus.

2. La recta que uneix el planeta amb el Sol escombra àrees iguals en intervals de temps iguals.

3. Si T és el període de l'òrbita del planeta i a és la llargada de l'eix major de l'el·lipse, aleshores T^2 i a^3 són directament proporcionals.

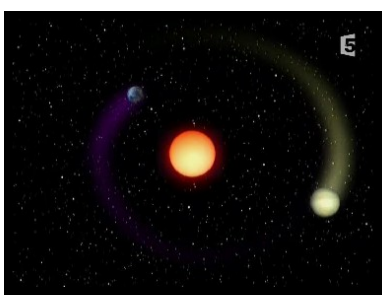
Johaness Kepler, any 1610.

Per veure una animació de les tres lleis de Kepler del moviment planetari podeu visitar la web:

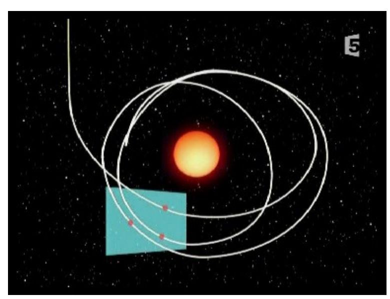
http://surendranath.tripod.com/Applets/Dynamics/Kepler/Kepler1Applet.html

El problema dels dos cossos està resolt però a partir de tres cossos, el problema encara resta obert. L'any 1884, el rei Oskar II, soberà de Suècia i de Noruega, va establir un premi que seria atorgat a una descoberta important en el domini de l'anàlisi matemàtica superior. Era una monarca il·lustrat que desitjava demostrar el seu interès per al progrés de les ciències matemàtiques. El rei comptava amb el matemàtic Gösta Mittag-Leffler (Suècia, 1846-1927) per organitzar el concurs. Aquest matemàtic, professor a l'Universitat d'Estocolm, va fundar, gràcies a la financiació reial, la prestigiosa revista *Acta Mathematica*. Mittag-Leffler va contactar amb els matemàtics Charles Hermite i Karl Weierstrass a fi que proposessin qüestions interessants de manera que, si es resolien, la resposta fos mereixedora del prestigiós premi reial. El premi consistia en la publicació de la memòria en la revista *Acta Mathematica*, una medalla d'or i un premi en metàl·lic. Un dels enunciats del concurs tractava sobre el problema dels tres cossos i es titulava *Sobre el problema dels tres cossos i les equacions de la dinàmica*

Gösta Mittag-Leffler mantenia comunicació epistolar freqüent amb molts matemàtics de l'època. Entre ells, amb H. Poincaré qui, en vàries de les seves cartes, va demostrar el seu interès pel concurs i, en particular, per l'enunciat sobre el problema dels tres cossos.



El problema dels tres cossos.



L'aplicació de Poincaré.

Poincaré va escriure una memòria on s'aporten tècniques i resultats sobre aquest problema i la va presentar al concurs del rei Oskar II.

En la seva memòria, entre d'altres,

- va definir l'aplicació de Poincaré[2],
- va classificar diversos comportaments qualitatius,

[2]Imatges extretes del vídeo que es troba a http://www.canal-u.education.fr

- va abordar el problema de l'estabilitat, ...

L'*aplicació de Poincaré* permet deduir moltes de les propietats de les òrbites solució d'un sistema dinàmic. Tal com s'observa en la figura, considerem un dels cossos i fixem una secció transversal. En la figura, aquesta secció és un pla que es travessat per l'òrbita del planeta considerat de manera transversal. A cada punt de la secció en què el planeta l'ha travessada, li associem el següent punt de tall. Si determinem aquesta aplicació, podem saber què fa l'òrbita del planeta sense necessitat de conèixer tota l'òrbita.

D'altra banda, en Poincaré va introduir un nou punt de vista per abordar problemes sobre sistemes dinàmics. Fins al moment, quan un científic es trobava davant d'un sistema d'equacions diferencials intentava resoldre'l de manera exacta. Tantmateix, hi han poques equacions diferencials que admetin una solució donada per funcions elementals. H. Poincaré va mostrar que estudiar el comportament qualitatiu de la solució és tan interessant com determinar-la de manera explícita i va aportar noves tècniques per abordar aquest problema. D'aquesta manera va iniciar la *Teoria qualitativa d'equacions diferencials*.

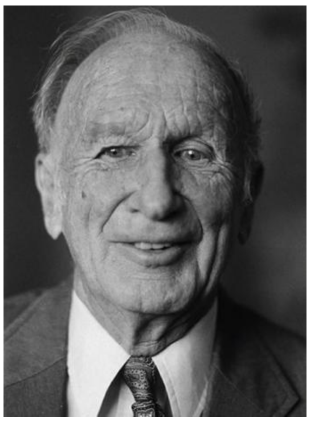
Henri Poincaré va guanyar el premi del rei Oskar II. Un dels mèrits del premi era la publicació del treball guanyador a la revista *Acta Mathematica*. Quan Poincaré repassava la versió final de la memòria guanyadora per a ser publicada, es va adonar que havia comès un error ... Es va adonar que la solució del problema dels tres cossos és sensible a condicions inicials. Aquest fenòmen és el que avui definim com a *caos* (determinista). Un sistema es diu que és caòtic si en canviar una mica les condicions inicials, és a dir en canviar una mica el punt de partida, les solucions corresponents varien molt.

Un exemple de sistema caòtic consisteix en considerar un con a sobre d'una superfície plana i recolzat en el seu vèrtex. Si la superfície és perfectament plana i el con és perfectament regular, aquesta situació és d'equilibri: el con es manté invertit i recolzat en el seu vèrtex. Qualsevol petita irregularitat de la superfície de suport o del con, el faria caure. I cap a on cauria? La irregularitat de la superfície o del con pot ser prou petita com per a ser indetectable i, en canvi, forçar al con a caure en una direcció determinada. Determinar la direcció de caiguda del con ens pot resultar impossible, ja que una petita variació de la configuració pot canviar el resultat. La direcció de caiguda del con no és un fenòmen fortuït, però sí indetectable.

Un altre exemple de sistema caòtic el podeu trobar en el vídeo

http://es.youtube.com/watch?v=TDDGxMOm77I on es mostra un pèndol magnètic amb quatre punts d'atracció. Us recomano encaridament aquest vídeo ja que explica i mostra el fenòmen del caos de manera molt clara.

El model meteorològic proposat per Lorenz és un altre exemple de sistema caòtic. Edward Lorenz (Estats Units, 1917-2008) fou un dels pioners en el desenvolupament de la *Teoria del Caos*.



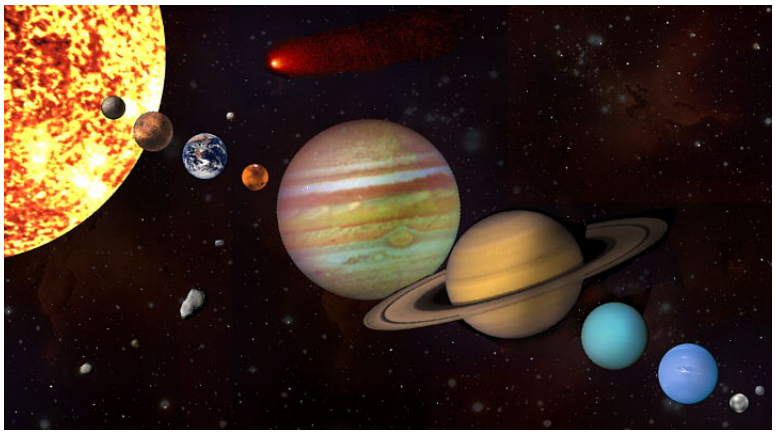
Edward Lorenz.

Aquest model de Lorenz és un sistema d'equacions diferencials que serveix per predir el temps que ens espera a partir de certes dades actuals, com són la pressió i la temperatura. El model és correcte però és caòtic. Si poguéssim saber les dades inicials amb infinita precisió (és a dir, amb "infinits decimals"), podriem deduir la pressió i la temperatura en qualsevol moment i predir el temps climàtic. Tantmateix, petites variacions en aquestes dades condueixen a resultats molt diferents.

Per molt precisa que sigui la manera com mesurem la temperatura, per exemple, mai obtenim una dada exacta. I l'error que cometem resulta en la impredictibilitat de la temperatura per a temps futurs ja que el sistema és caòtic.

Quan es va iniciar la descripció de la Teoria del Caos, es va parlar de l'efecte papallona (*el batiment de les ales d'una papallona a Hong Kong, pot provocar una tormenta a Nova York*). El rerafons d'aquesta expressió és que petits canvis en les condicions inicials d'un sistema meteorològic (com l'aleteig de les ales d'una papallona), poden provocar grans canvis en la solució (i donar-se una tormenta imprevista). Cal anar amb compte perquè aquesta expressió no es refereix a una acció de causa–efecte. Es tracta de que les previsions que podem fer del clima basant-nos en dades actuals, es poden veure molt alterades per petits canvis, que ens resulten impossibles de mesurar, i per tant, la determinació exacta del temps climatològic futur ens resulta impossible.

Tornem a la nostra història del descobriment del caos. En Poincaré va revisar la seva memòria sobre el problema dels tres cossos. En la versió final corregida, enlloc de demostrar l'estabilitat del model del Sistema Solar, Poincaré va descobrir que aquest és caòtic. Actualment els planetes del nostre Sistema Solar segueixen un moviment entorn del Sol que tenim estudiat i coneixem, però no podem determinar quina serà la configuració i el moviment dels planetes al llarg del temps.



Imatge artística del Sistema Solar.

Quan Poincaré va escriure a Mittag-Leffler per explicar-li l'error, aquest li va fer pagar les despeses de la publicació de la primera versió, que eren molts més diners que els del premi. I Poincaré va pagar ...

El descobriment del caos ha canviat la manera d'entendre el nostre entorn. Fins Poincaré, regnava el determinisme triomfant de J.-L. de Lagrange. Les equacions diferencials havien esdevingut la manera de descriure els fenòmens dinàmics de manera correcta. Si un ésser podia deduir les lleis que governen un sistema (escrites mitjançant equacions diferencials), les podia resoldre i mesurava les condicions inicials, aleshores podria determinar el futur del sistema al llarg del temps. Poincaré es va adonar que malgrat conèixer les equacions diferencials que modelen un sistema i en el supòsit de saber-les resoldre, el fet de no poder mesurar les condicions inicials de manera exacta impossibilita donar previsions fiables al llarg del temps. I encara hi va sortir perdent diners!!!

Val la pena fer notar que en Poincaré va fer aquesta descoberta abans del 1890 i que la Teoria del Caos no es va començar a desenvolupar fins uns 60 anys després. Els escrits d'en Poincaré van quedar oblidats durant tot aquest període. Quants altres fenòmens i idees poden estar encara amagats en els escrits de Poincaré i que seran essencials per entendre el nostre entorn?

Com acabem d'explicar, el model del problema dels n cossos del Sistema Solar és caòtic. Això vol dir que no podem determinar el moviment dels planetes del Sistema Solar al llarg del temps, malgrat que coneguem la seva configuració actual.

En els sistemes caòtics podem calcular el que s'anomena *l'horitzó de Liapunov* que és un valor de temps per al qual les previsions que podem fer, amb la precisió amb que coneixem les condicions inicials i a partir del model considerat, són vàlides, és a dir, que la variació de les possibles solucions és relativament petita. Considerem un sistema dinàmic qualsevol i triem dues trajectòries que en un cert instant, suposem que per temps $t = 0$, estan a distància δ_0, amb δ_0 prou petit. Sigui $\delta(t)$ la distància entre aquestes dues trajectòries. Si dibuixem una gràfica de la funció $\ln(\delta(t))$ respecte de t, observem que, per un temps breu de t, la funció es mou al voltant d'una pendent. El valor d'aquesta pendent, que denotarem per λ, s'anomena exponent de Liapunov. Notem que, amb les magnituds que hem definit, es verifica la següent proporció

$$\delta(t) \approx \delta_0 \, e^{\lambda t}.$$

Quan el sistema té un exponent de Liapunov positiu ($\lambda > 0$), trobem que per un valor de t prou gran, les dues trajectòries que havien començat a prop una de l'altra, divergeixen i cadascuna tindrà un futur totalment diferent de l'altra. Si prenem a com el valor màxim de la distància que acceptem entre dues trajectòries, és a dir, suposem que la predicció serà intolerable quan $\delta > a$, aleshores definim *l'horitzó de Liapunov* com el temps

$$t_h = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{a}{\delta_0}\right),$$

que és el temps a partir del qual la predicció que tenim amb les dades i la precisió inicials deixarà de ser vàlida. Per temps positius i menors que t_h, tenim que amb les condicions inicials i a partir del model considerat, les previsions que podem fer són vàlides. Notem que, quan λ és molt gran, el temps d'horitzó no augmenta massa, per molt que es minimitzi la separació inicial, és a dir, tot i tenir molta precisió amb les dades inicials, l'increment del temps d'horitzó és insignificant respecte a la disminució de δ_0.

L'any 1989, l'astrònom francès Jacques Laskar (França, 1955–) va calcular que l'horitzó de Liapunov del model del moviments dels planetes Mercuri, Venus, la Terra i Mart és de 200 milions d'anys. Podem quedar-nos tranquils una bona temporada, doncs!.

Per acabar aquesta secció, incloc el paràgraf amb què en Poincaré va descriure el fenòmen del caos. Qui millor que ell (i en la seva llengua) per explicar-lo!

> *Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons*

que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que des petites différences dans les conditions initiales en engendrent de trés grandes dans les phénomènes finaux; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.

La lectura del llibre [3] és molt recomanable ja que ofereix la possibilitat d'endinsar-se en els temes de l'estabilitat i del caos sense requerir gaires coneixements científics, però alhora amb molt rigor i claretat.

3 La *conjectura* de Poincaré

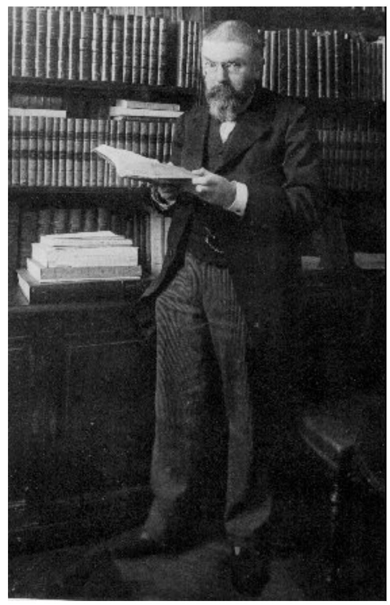
En aquesta secció es descriu una de les conjectures més famoses que en Poincaré va deixar oberta. Una conjectura és una afirmació que, per diverses evidències, es creu que ha de ser certa però que no se'n té una demostració.

En el títol d'aquesta secció la paraula conjectura apareix en lletra cursiva perquè l'afirmació que descriurem ha estat recentment demostrada i ja no és una conjetura sinó un teorema. Descriurem l'enunciat de la conjectura, de fet posada per en Poincaré com a pregunta, i una mica de la història de la seva demostració.

L'any 1904, Henri Poincaré va plantejar la pregunta següent:
Imaginem una formiga que es passeja sobre una superfície. Com podria aquest insecte saber, sense abandonar la superfície, si aquesta és plana o bé és una esfera o bé poseeix una altra forma diferent?

Aquest és un enunciat de la mena de qüestions que pretén resoldre la branca de les matemàtiques anomenada *Topologia*. En Poincaré va iniciar l'estudi del que ell anomenava *Analysis Situs* [7] i que, posteriorment, ha esdevingut la branca de les matemàtiques anomenada *Topologia Algebraica*. A rel del seu interès per les equacions diferencials, l'estudi de les seves solucions i el seu comportament qualitatiu, l'estudi dels períodes de les funcions que defineixen, ... en Poincaré va adonar-se que necessitava propietats d'aquesta ciència que aboga per la manera de classificar, determinar propietats i estudiar les corbes, les superfícies i, en general, les varietats topològiques. La Topologia Algebraica es sitúa entre la Geometria, l'Àlgebra i l'Anàlisi.

Una *varietat topològica* (real) de dimensió k és un subconjunt de $\mathbb{R}^n$, $n \geq k$, que vist de prop és com $\mathbb{R}^k$. Per exemple, una corba és una varietat topològica de dimensió 1, perquè a prop de cadascun dels seus punts és com la recta real $\mathbb{R}$. Exemples de corbes són la circumferència, una espiral, una hèlix, un polígon (en aquest cas, els vèrtexs són punts no diferenciables),... Notem que una corba pot viure en un pla, o en l'espai o fins i tot, som capaços d'imaginar-nos corbes que viuen en espais de dimensió més gran. De la mateixa manera, una superfície és una varietat topològica de dimensió 2, perquè en un entorn de cadascun dels seus punts és com el pla real $\mathbb{R}^2$. Exemples de superfícies són l'esfera, un disc, un cilindre, un con, un poliedre (en aquest cas, les arestes són no diferenciables), ...



H. Poincaré, a la seva biblioteca.

Enunciat rigorós de la conjectura de Poincaré
Tota varietat topològica de dimensió tres que sigui simplement connexa, compacta, orientable[3] i sense vora, és homeomorfa a l'esfera $\mathbb{S}^3$.

Aquest enunciat és molt tècnic, però anem a definir cadascun dels termes que hi apareixen i veurem que són força intuïtius. A més, la definició d'aquests termes exemplifica la mena de problemes pels què s'interessa un topòleg. Veiem que la *conjectura* tracta sobre varietats topològiques de dimensió tres, és a dir, que a prop de cadascun dels seus punts són com l'espai real $\mathbb{R}^3$.

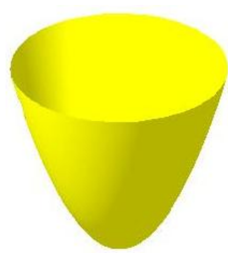
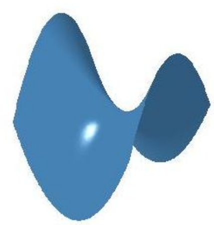
[3] De vegades no s'imposa de forma explícita la condició d'orientabilitat ja que és una conseqüència del fet de ser simplement connexa.

Ens referim moltes vegades a l'esfera i li associem un símbol. Així, l'esfera de dimensió 2 la denotem per $\mathbb{S}^2$. L'esfera de dimensió 1 (és una corba) és la circumferència i la denotem per $\mathbb{S}^1$. Si pensem en tots els punts dins de $\mathbb{R}^4$ que estan a distància 1 de l'origen, obtenim un esfera de dimensió 3, que denotem per $\mathbb{S}^3$.

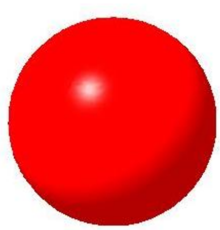
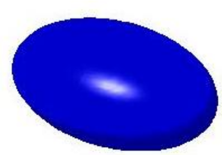
Donat que ens resulta molt difícil imaginar varietats topològiques de dimensió 3, a fi de motivar les definicions pensarem en superfícies.

La primera noció que apareix és la d'homeomorfisme. Diem que dues superfícies són homeomorfes si podem passar de l'una a l'altra mitjançant deformacions que no les trenquin. Així, la superfície d'una tassa i un torus (o donuts) són dues superfícies homeomorfes.

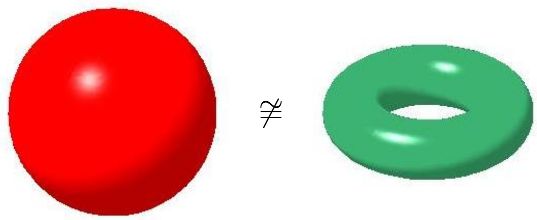
El pla, el paraboloide el·liptic i el paraboloide hiperbòlic també són superfícies homeomorfes.

 $\cong$  $\cong$ 

I és clar que l'esfera i l'el·lipsoide també són superfícies homeomorfes.

 $\cong$ 

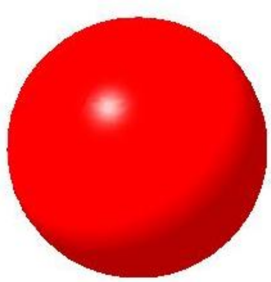
En canvi, l'esfera i el torus **no** són homeomorfes.



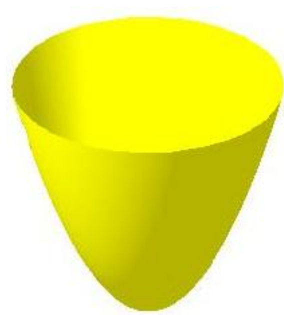
Les propietats que descriurem d'una superfície són independents de totes les superfícies homeomorfes a aquesta. A partir d'ara, no distingirem entre una tassa i un donuts, per exemple.

Diem que una superfície és compacta, quan no "se'n va a l'infinit". Rigorosament, i tenint en compte que estem considerant varietats topològiques reals, és a dir subconjunts de $\mathbb{R}^n$, es diu que una superfície és compacta quan és tancada (conté tots els límits de successions de punts de la superfície) i fitada (es pot incloure en una bola de radi prou gran). Per exemple, un pla infinit no és compacte, en canvi una esfera sí que és compacta.

La vora d'una varietat topològica és el conjunt de punts diferència entre el conjunt tancat més petit que conté la varietat i el conjunt obert més gran contingut en la varietat. Diem que una superfície és sense vora si la seva vora és el conjunt buit (no té cap punt). De manera intuïtiva, la vora d'una varietat topològica de dimensió k consisteix en el conjunt de punts on no es verifica que existeixi un entorn que sigui com $\mathbb{R}^k$. Il·lustrem aquesta definició amb un parell d'exemples.



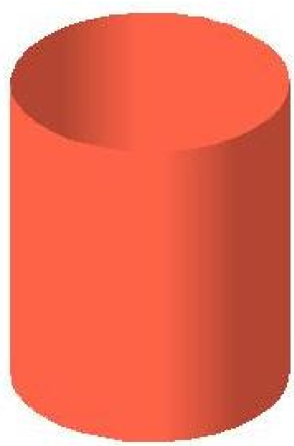
L'esfera **no** *té vora*



Aquest paraboloide **sí** *té vora*

Diem que una superfície és orientable, quan té part "de dins" i part "de fóra". En cada punt d'una superfície podem definir un vector normal (perpendicular) a aquesta. Doncs, una superfície és orientable quan podem definir aquest vector normal de manera que el seu sentit es conserva seguint qualsevol camí en la superfície.

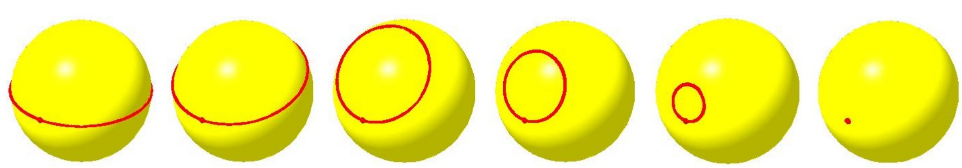
Per exemple, un cilindre és una superfície orientable, mentres que una banda de Möbius és una superfície **no** orientable. En la figura següent, la banda de Möbius apareix recorreguda per unes formigues que no pararien mai de recorrer-la completament (per les dues bandes). Aquesta figura és també una il·lustració de M.C. Escher.



Cilindre.

Banda de Möbius. (Moebius Strip II*).*

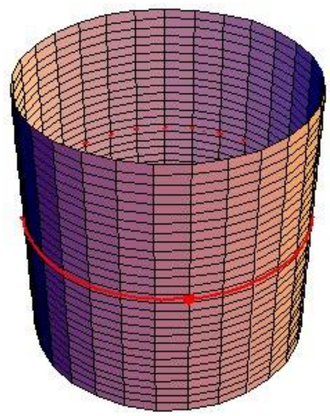
Diem que una superfície és simplement connexa si podem desfer tot llaç que hi hagi. D'aquesta manera si considerem un llaç qualsevol en una esfera $\mathbb{S}^2$, trobem que sempre és pot desfer i, per tant, una esfera és simplement conexa



Llaç sobre una esfera.

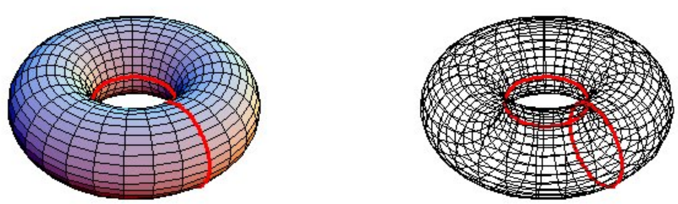
Pensem, per exemple, en un llaç situat en l'equador de l'esfera. Podem anar modificant aquest llaç, sense sortir-nos de l'esfera i de manera contínua, i fer-lo cada cop més petit fins arribar a que el llaç s'ha convertit en un sol punt (per exemple, el pol nord). Com que podem fer aquest procès, diem que el llaç s'ha desfet. La propietat de ser simplement connex és que es pugui desfer *qualsevol* llaç.

En canvi, hi han llaços en un cilindre que no es poden desfer, per exemple, una de les circumferències que envolti el forat interior del cilindre.



Llaç sobre una cilindre.

Un cilindre és, doncs, una superfície **no simplement connexa**. Fixem-nos que per un torus hi han dos llaços diferents que no es poden desfer. Un torus tampoc és una superfície simplement connexa.



Llaços que no es poden desfer sobre una torus.

A la revista electrònica [4] podeu trobar diverses animacions de llaços sobre superfícies. D'aquesta pàgina web és d'on s'han extret les figures de llaços sobre un cilindre i sobre un torus.

Hem descrit totes les propietats que apareixen en la conjectura de Poincaré. Fixem-nos que l'esfera les satisfà totes ja que és simplement connexa, compacta, orientable i sense vora. Ara bé, la pregunta és si tenim una varietat topològica amb aquestes característiques, ha de ser una esfera? És a dir, aquestes propietats caracteritzen una esfera?

En la conjectura, aquesta pregunta es fa per varietats topològiques de dimensió 3. Com es caracteritza una esfera en d'altres dimensions?

En dimensió 2, **pel teorema de classificació de superfícies,** tenim que tota *superfície* ($k = 2$) que sigui simplement connexa, compacta, orientable i sense vora, és homeomorfa a l'esfera $\mathbb{S}^2$. Per tant, en aquesta dimensió sí que es satisfà l'anàleg a la conjectura i està demostrat.

Si considerem varietats topològiques de dimensió k amb $k > 3$: no n'hi ha prou amb aquestes propietats per caracteritzar una esfera. Però l'esfera $\mathbb{S}^k$ és pot caracteritzar! Es considera que per aquest cas, la pregunta està resolta.

Quedava per saber què passa per $k = 3$: com podem caracteritzar l'esfera $\mathbb{S}^3$ de dimensió 3 ?

$$\mathbb{S}^3 \overset{?}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{simplement connexa} \\ \text{compacta} \\ \text{orientable} \\ \text{sense vora} \end{cases}$$

A fi de difondre les matemàtiques en el nou mil·leni, l'institut Clay[4] de matemàtiques va proposar 7 problemes, la resolució de cadascun dels quals suposa un premi d'un milió de dólars. Un dels problemes del mil·leni consistia en resoldre la conjectura de Poincaré.

L'any 2002, Grigori Perelman (Rússia, 1966–) va penjar en un arxiu electrònic de treballs científics anomenat ArXiv, tres treballs on resol la conjectura de Poincaré. En aquest moment, en tenir una demostració, va passar a ser un *teorema*.

Per aquesta contribució, l'any 2006 li va ser concedida la medalla Fields, que, juntament amb el premi Abel, poden ser considerats com els equivalents al premi Nobel però per a matemàtiques.

Per a lectors amb uns quants coneixements matemàtics, el treball [5] conté tota la demostració de la *conjectura* de Poincaré. També podeu consultar el treball de divulgació [9].

[4] http://www.claymath.org/millennium/

4 Epíleg

Per acabar aquest article, voldria destacar que n'Henri Poincaré va dedicar-se a pensar, entendre i descriure el nostre món, a travès de les matemàtiques. Crec que val la pena acabar aquest treball amb una frase seva que resumeix aquest delit d'en Poincaré.

El pensament no és més que un llampec enmig d'una llarga nit. Però aquest llampec ho és tot.

5 Referències i enllaços

Referències

[1] U. Bottazzini, *Poincaré. Philosophe et mathématicien*, Belin, 2003. És el cinquè número de la col·lecció *Les génies de la science*. http://www.pourlascience.com/

[2] E. Charpentier et al. (collectif), *L'héritage scientifique de Poincaré*, Belin, 2006.

[3] F. Diacu and P. Holmes, *Celestial Encounters. The origins of Chaos and Stability*, Princeton University Press, 1999.

[4] A. J. López Moreno, *Demostración de la Conjetura de Poincaré*, Matematicalia, Vol 2. no. 3 (junio 2006). http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=290&Itemid=188

[5] J. Morgan and Gang Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*. Clay Mathematics Monographs, **3**, AMS., Providence, 2007.

[6] H. Poincaré, *Non-Euclidian Geometry*, Nature, **45** (1892), 404–407.

[7] H. Poincaré, *Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique, **1**(1895), 1–121.

[8] H. Poincaré, Ciencia e Hipótesis. Colección Austral. Espasa 2002.

[9] J. Porti, *Flux de Hamilton-Ricci en varietats tridimensionals*. Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques, **22** (2007), 165–195.

[10] A. Reventós, *Un nou món creat del no-res*. Lliçó inaugural del curs acadèmic 2004–2005, Universitat Autònoma de Barcelona. (El podeu trobar a http://www.mat.uab.cat/~agusti/SantAlbert.pdf)

Dels llibres [1] i [2] n'he extret molta informació i són indicats per lectors que volen conèixer la biografia d'en Poincaré, les seves contribucions científiques i el llegat que aquestes ens han deixat.

Enllaços

Informació sobre la biografia i contribucions científiques

http://poincare.univ-nancy2.fr/

http://www.univ-nancy2.fr/poincare/documents/bd1.html

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poincare.html

http://www.utm.edu/research/iep/p/poincare.htm

http://www.mlahanas.de/Physics/Bios/HenriPoincare.html

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/ExpoHistoria/Caricaturas

http://bibliotecnica.upc.es/bib200/poincare/

Del primer enllaç s'han extret totes les fotografies d'en Poincaré que es mostren en aquest article.

Informació sobre geometria no Euclidiana i el disc de Poincaré

http://math.youngzones.org/Non-Egeometry/poincare.html

http://mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html

http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html

http://www.math.umn.edu/~garrett/a02/H2.html

Els dos darrers enllaços contenen applets de java que permeten dibuixar i *moure* algunes figures en el disc de Poincaré.

Informació sobre el problema dels n cossos i sobre el Sistema Solar

http://www.geom.uiuc.edu/~megraw/CR3BP_html/cr3bp.html

http://solar.cranf.net/

Informació sobre la conjectura de Poincaré

http://www.nacho.unicauca.edu.co/Maticias/0309ConPoi/0309ConPoi.htm

Reportatge sobre Poincaré

Si voleu saber una mica més d'en Poincaré us recomano el petit reportatge titulat **Tout est relatif, monsieur Poincaré !** que està penjat a la xarxa de manera lliure i en diversos idiomes (francès, anglès, alemany i xinès):

http://www.canal-u.education.fr/producteurs/les_amphis_de_france_5/dossier_programmes/physique/tout_est_relatif_monsieur_poincare/tout_est_relatif_monsieur_poincare

Aquest film proposa un viatge en imatges cap a un passat alhora proper i llunyà: l'època d'Henri Poincaré. Època que ha vist néixer, dins d'un mateix moviment, la nostra ciència i el nostre món moderns. Ens explica el camí d'un geni excepcional, matemàtic, físic i filòsof. Henri Poincaré fou el darrer, sense dubte, que va ser capaç d'abraçar tot el saber de la seva època i el primer que va jugar un rol cabdal en l'arribada de la ciència moderna.

Departament de Matemàtica
Universitat de Lleida
Avda. Jaume II, 69
25001 Lleida, Catalonia, Spain
mtgrau@matematica.udl.cat

Publicat el 4 de març de 2009