MATerials MATemàtics
Volum 2010, treball no. 1, 35 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Votar: no tan fàcil com sembla, però podríem fer-ho millor!

Xavier Mora

El problema de l'elecció social

En pràcticament qualsevol tipus d'activitat social sorgeix la conveniència de *combinar diverses preferències individuals en una decisió col·lectiva*. Per exemple, suposem que un cert grup social ha de designar una persona que representi aquest grup en certs afers; típicament hi haurà diversos candidats, els quals poden ser objecte de preferències molt variades per part dels electors, però cal adoptar una decisió comuna per a tots. En altres casos, les opcions que hi haurà sobre la taula no seran candidats a un càrrec, sinó propostes d'actuació o altres tipus d'objectes. En lloc de seleccionar una sola opció com la més preferida, de vegades pot interessar seleccionar-ne més d'una, o bé ordenar-les totes de millor a pitjor, o potser combinar-les en unes proporcions adients. En qualsevol cas, el problema sorgeix des del moment que hi pot haver una diversitat de preferències individuals a partir de les quals convingui definir una sola preferència col·lectiva.

Per a molta gent, aquest problema no té cap dificultat: només cal "fer una votació". Amb això s'entén típicament que cada individu doni a conéixer la seva opció preferida i que cada opció sigui valorada segons el nombre d'individus que la recolzin. En general s'admet com a obvi que tal procediment resol el problema de manera prou satisfactòria, o si més no, que no hi ha manera de fer-ho millor. Pel que fa al paper de les matemàtiques, no sembla que pugui ser més trivial, ja que només es tracta de comptar.

Aquesta sensació de simplicitat és correcta quan només hi ha dues opcions. Però quan n'hi ha més de dues, llavors el problema és bastant més complex del que s'acostuma a creure.[1] Si es rebutja el dogma i s'adopta un esperit crític, de seguida es descobreixen paradoxes, o en tot cas, situacions on mètodes aparentment raonables donen lloc a resultats que clarament no ho són. Això obliga a definir amb precisió què entenem per "raonable" i a analitzar amb rigor quins mètodes compleixen o no certes propietats de "raonabilitat". A aquest efecte resulta molt útil el raonament matemàtic. Tot plegat dóna lloc a una disciplina, cultivada especialment pels economistes, que es coneix com a teoria de l'elecció social. Aquesta disciplina té ja uns segles d'història, però avui dia encara és objecte d'avanços prou significatius. Val a dir que aquests avanços recents connecten amb certs moviments internacionals de reforma de la democràcia (vegi's per exemple [1, 10]).

Aquest article té un doble objectiu. D'una banda, volem fer veure com efectivament el problema no és pas una trivialitat, sinó que té molt de sentit adoptar un punt de vista matemàtic, amb definicions precises i demostracions rigoroses. D'altra banda, també volem incidir en les implicacions pràctiques d'aquesta anàlisi. En particular, veurem com els mètodes de votació més senzills tenen defectes importants que podrien ser corregits mitjançant la utilització d'altres mètodes més elaborats. Un tema relacionat que *no* tocarem aquí és la problemàtica especial que sorgeix en les eleccions parlamentàries a causa de l'agrupació dels candidats en partits i de l'estructuració de l'electorat en circumscripcions. Per a aquest tema referim el lector a [2, 3], així com [18, cap. 15] i [5, cap. 4–6].

Malgrat el punt de vista matemàtic, intentarem mantenir-nos el més a prop possible del llenguatge ordinari, amb la intenció de poder arribar a una audiència el més àmplia possible. D'altra banda, cal avisar que alguns dels termes que usarem no són estàndard. Això es deu senzillament a que en molts casos no hi ha pas una terminologia estàndard (la qual cosa s'ha de tenir en compte sempre que es llegeixin obres sobre el tema).

[1] Inclús en el cas en què formalment la votació només contempla dues opcions, de vegades pot haver-hi una abstenció que respongui a terceres opcions no plantejades, de manera que encara poden ser rellevants algunes de les idees que es discuteixen en el present article.

1 Vot uninominal : tradicional i senzill, però insatisfactori

La manera tradicional d'abordar el problema que ens ocupa consisteix en demanar a cada individu que es pronunciï per una sola opció. Per a distingirlo d'altres possibilitats que considerarem més avall, en el que segueix ens referirem a aquest tipus de vot com a **vot uninominal**. Un cop recollits els vots, es compta quants n'ha obtingut cada opció, i el nombre resultant, o el corresponent percentatge, s'adopta com a mesura del grau d'acceptació col·lectiva d'aquella opció. Per tant, si el col·lectiu en qüestió ha d'optar per una sola d'elles, llavors correspon prendre la que hagi obtingut més vots. Aquesta condició de tenir un suport superior a qualsevol altra opció s'acostuma a denominar **majoria simple**, o bé **majoria relativa**.[2]

El mètode que acabem de descriure és extremadament senzill i força natural... Però *quan hi ha més de dues opcions el seu resultat pot ser molt desencertat*. Per exemple, suposem que tenim set opcions, a,b,c,d,e,f,g, i que la primera d'elles ha obtingut el 40% dels vots, mentre que les altres n'han obtingut cadascuna un 10%. Segons el que hem dit, la victòria correspon clarament a l'opció a. Imaginem però que els votants expressessin no solament l'opció que els agrada més, sinó també la que els agrada menys. Doncs bé, podria donar-se el cas que els votants que han repartit els seus vots entre les opcions b–g, que formen un 60%, estiguessin tots ells d'acord en considerar que l'opció a és la pitjor. Així doncs, *la majoria relativa pot donar perfectament la victòria a una opció que tingui més detractors que partidaris*! Aquesta observació es coneix com a **paradoxa de Borda**, per Jean-Charles de Borda, un matemàtic i enginyer francès que va fer aquesta observació en 1770–1784 [13, cap. 5].

Evidentment, això no pot passar quan l'opció més votada té un suport superior al 50% de l'electorat (ja que $x > 1/2$ implica $x > 1 - x$). En aquest cas diem que l'opció en qüestió té el suport d'una **majoria absoluta** de l'electorat.[3] Degut a això, tot sovint els reglaments pertinents estableixen

[2]Cal tenir en compte que la terminologia anglesa presenta certes diferències que es presten a confusió: Així, *majority* ja significa tot sovint *majoria absoluta*, i *simple majority* també! (en contraposició a *qualified majorities*, o *supermajorities*, és a dir, llindars superiors al 50%). Per a expressar el que nosaltres en diem *majoria simple* s'usa el terme *plurality*. Així, el que nosaltres hem anomenat *vot uninominal* es tradueix per *plurality method*, o més clàssicament, *first-past-the-post*.

[3]El terme *majoria absoluta* vol dir un suport superior al 50%, però per a ser precisos

un requisit de majoria absoluta per a poder adoptar decisions. Ara bé, quan hi ha més de dues opcions, llavors pot passar fàcilment que cap d'elles assoleixi la majoria absoluta. Segons el tema de què es tracti, de vegades pot tenir sentit no prendre cap decisió, però altres vegades serà necessari adoptar alguna de les alternatives plantejades. En tal cas, *si no disposem de cap informació addicional*, llavors no hi ha més remei que conformar-se amb l'opció més votada.

Malgrat la paradoxa de Borda, el vot uninominal és força utilitzat, inclús en decisions tan importants com l'elecció del cap de govern de bastants països, incloent els Estats Units d'Amèrica. Tal com hem vist més amunt, per a fer-ho millor cal obtenir més informació sobre les preferències dels votants. En aquest sentit, una possibilitat prou coneguda és el procediment de **doble volta**, que França ve utilitzant des de 1789 per a elegir el president de la república: si en la primera volta no hi ha cap candidat que assoleixi una majoria absoluta, llavors es fa una segona volta entre els dos candidats més votats. Això certament pal·lia el problema, però no el soluciona completament: no costa gaire d'imaginar exemples que mostren com *a la segona volta podem estar triant "entre el foc i les brases"*.

Val a dir que aquestes paradoxes no són simples especulacions teòriques. De tant en tant es donen casos reals on, encara que no hi hagi informació sobre les preferències detallades dels electors, s'entreveuen situacions anòmales de l'estil que hem descrit. Així per exemple, en les eleccions presidencials franceses de 2002, els vots de la primera volta van quedar molt repartits entre els setze candidats presentats, i segons una opinió molt estesa que va quedar plenament confirmada a la segona volta, el segon candidat més votat tenia bastants més detractors que partidaris; malgrat això, en la primera volta els dos primers candidats només diferien en un 2% dels vots, de manera que un sistema d'una sola volta, que ja hem dit que s'utilitza en bastants països, hagués estat molt a prop de donar la victòria a un candidat amb més detractors que partidaris.

També és de notar que en el cas de col·lectius molt nombrosos les segones voltes suposen una despesa molt elevada, la qual es pot estalviar fàcilment mitjançant el vot preferencial que considerem en la secció que segueix.

Un altre defecte important del vot uninominal és el fenomen del "vot útil": Quan un votant es troba en la situació que (a) el seu candidat més preferit

cal especificar el conjunt a què es refereix aquest percentatge; típicament es tracta o bé de tot l'electorat o bé només del conjunt de vots vàlids.

té poques perspectives d'èxit, i al mateix temps (b) ell, el votant, té unes preferències marcades entre els candidats que sí tenen perspectives d'èxit, llavors aquest votant es veu conduït a no votar el seu candidat més preferit sinó un altre amb més perspectives d'èxit. I quan es dóna (a) però no (b), és fàcil que el votant en qüestió opti per l'abstenció. Com és sabut, aquest fenomen afavoreix el bipartidisme i fa difícil que prosperin noves iniciatives. En qualsevol cas, el fet és que el vot útil falseja el missatge dels votants.

2 Aprovacions i puntuacions

El problema del vot útil es pot eliminar fàcilment permetent que cada votant doni una llista de totes les opcions que ell considera acceptables. Cada opció es valora llavors pel nombre de votants que l'han considerat acceptable. Aquest procediment s'anomena **vot d'aprovació**.

Una altra possibilitat, que de fet es pot veure com una generalització del vot d'aprovació, és demanar a cada votant que puntuï totes les opcions en una escala prefixada, com ara els valors enters del 0 al 10. Cada opció es pot valorar llavors per la seva puntuació total, o el que és equivalent, per la seva **puntuació mitjana**. Òbviament, el vot d'aprovació correspon al cas especial en què l'escala de puntuació es redueix als valors 0 i 1.

De tota manera, aquests mètodes no eliminen pas la paradoxa de Borda, és a dir, la possibilitat que guanyi una opció que és considerada la pitjor per una majoria absoluta de votants. Això és obvi des del moment que els votants encara poden concentrar la seva aprovació o puntuació en una sola opció, la qual cosa és equivalent a un vot uninominal. D'altra banda, no costa gaire de trobar la paradoxa en altres exemples on els vots no es concentren cadascun d'ells en una sola opció.

3 Vot preferencial i posicions mitjanes

Per tal d'evitar la paradoxa dalt assenyalada i obtenir resultats més encertats, Borda va proposar que cada votant expressés les seves preferències mitjançant una ordenació completa de totes les opcions, des de la més preferida fins la més rebutjada. Aquesta forma de votar és un cas especial del que avui s'anomena **vot preferencial**. Un vot preferencial consisteix en una llista d'opcions ordenades per ordre de preferència, però en general no cal que la llista sigui completa i d'altra banda s'admet la possibilitat d'expressar la indiferència entre dues o més opcions. Així entès, el concepte de vot preferencial inclou la possibilitat que el votant opti per escollir una sola opció. Tanmateix, el que importa és que el votant no estigui obligat a procedir d'aquesta manera, sinó que, si vol, pugui destacar i comparar múltiples opcions.

Per no allargar-nos massa, per regla general en aquest article limitarem la nostra atenció a vots preferencials consistents en ordenacions completes i sense empats, altrament dites ordres totals. Mentre no especifiquem el contrari, en el que segueix una "ordenació", o un "ordre", voldrà dir automàticament un ordre total.

Per a especificar una ordenació podem fer-ho indicant la posició o número d'ordre de cada opció; la més preferida tindrà assignat el número 1, la següent el número 2, i així successivament. A partir d'aquesta informació, la idea de Borda consisteix essencialment en mesurar el grau d'acceptació col·lectiva de cada opció mitjançant la seva **posició mitjana**, és a dir, la mitjana aritmètica dels números d'ordre que li han estat assignats pels diferents electors; evidentment, com més petit sigui el resultat, més acceptada s'ha de considerar aquella opció.

Per exemple, suposem que hi ha set opcions, a, b, c, d, e, f, g, i cinc votants, A,B,C,D,E. Si es vol, en lloc de cinc votants se'n poden considerar cinc milions, en el qual cas cadascuna de les lletres A–E representa un milió de votants que expressen tots ells la mateixa ordenació. En qualsevol cas, suposem que les cinc ordenacions expressades pels votants són les que s'especifiquen en la taula següent, mitjançant els corresponents números d'ordre.

	Vots						
Id	A	B	C	D	E	$\bar{r}$	k
a	1	1	7	7	7	**4.600**	*5*
b	4	2	3	3	1	**2.600**	*1*
c	2	6	2	4	2	**3.200**	*3*
d	3	3	1	2	5	**2.800**	*2*
e	6	4	5	6	4	**5.000**	*6*
f	7	5	6	1	3	**4.400**	*4*
g	5	7	4	5	6	**5.400**	*7*

Taula 1. Exemple A, posicions mitjanes.

Les columnes $\bar{r}$ i k donen respectivament la posició mitjana de cada opció i el seu número d'ordre final en ordenar segons $\bar{r}$. Noti's que l'opció a hauria estat la guanyadora en una votació uninominal (que només contempla les primeres posicions), però les posicions mitjanes no li donen pas la victòria, sinó que la deixen en cinquè lloc. Segons les posicions mitjanes, la victòria correspon a l'opció b.

Tot això sembla prou raonable. Sobretot, ja està bé que no guanyi l'opció a, ja que hi ha una majoria absoluta de votants que la posen en últim lloc. Però l'exemple precedent només és un cas particular dins d'una varietat molt gran de possibilitats (per a 7 opcions i 5 votants el nombre de possibilitats diferents és de l'ordre de 10^{14}, és a dir, cent milions de milions!). ¿Podem estar realment segurs de que les posicions mitjanes no donaran *mai* la victòria a una opció que sigui considerada la pitjor per una majoria absoluta de votants? Bé, la resposta és que sí (sempre que els votants donin ordres complets), però per a arribar a aquesta conclusió de caràcter general cal una demostració, és a dir una argumentació rigorosa. En aquest cas no és gaire difícil de construir-ne una, i invitem el lector a que s'hi posi.[4]

Borda no va ser pas el primer en proposar el mètode que estem considerant. Bastant abans, concretament en 1433/34, Nicolau de Cusa ja havia proposat la mateixa idea dins d'un pla de reforma del Sacre Imperi Romanogermànic [13, cap. 4]. Val a dir que tant el de Cusa com Borda i la major part d'autors posteriors formulen el mètode no en termes de les posicions o números d'ordre r, sinó en termes dels seus "complementaris" $N - r + 1$.

Malauradament, l'ús de les posicions mitjanes per a definir la preferència col·lectiva encara dóna lloc a paradoxes. En els apartats que segueixen veurem tres aspectes concrets on aquest mètode resulta criticable i millorable.

4 Independència respecte a alternatives irrellevants

Per començar, considerem la taula 1 i suposem que el conjunt d'opcions es redueix a les tres millors en termes de les seves posicions mitjanes, és a dir les opcions b, c, d. Si es vol, podem imaginar que els altres candidats preveuen un mal resultat i decideixen retirar-se. Suposem que els votants mantenen

[4] Indicació: A més de sumar la taula de números d'ordre en sentit horitzontal de cara a obtenir les posicions mitjanes $\bar{r}$, també resulta interessant sumar-la en sentit vertical.

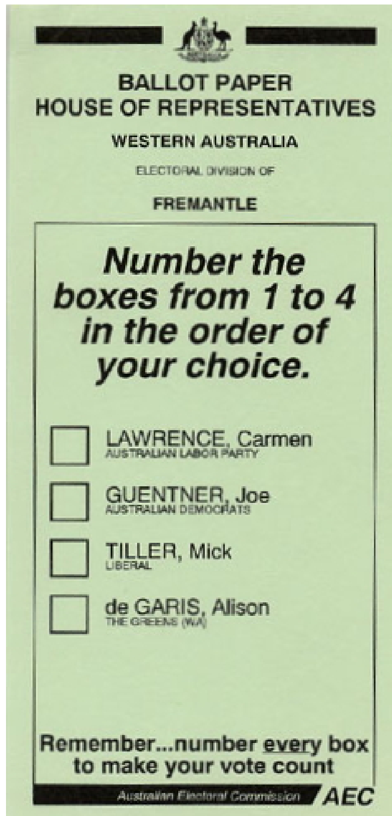


Figura 1. Una butlleta de vot preferencial

les seves preferències sobre les opcions que resten en peu. Tot i així, el fet que hagin desaparegut algunes opcions comporta certes variacions en els números d'ordre de les que subsisteixen. Doncs bé, tal com mostra la taula següent, en l'exemple concret que estem considerant això fa variar el resultat final: en lloc de b, ara guanya l'opció d!

Id	*Vots* A	B	C	D	E	$\bar{r}$	k
b	3	1	3	2	1	**2.000**	*2*
c	1	3	2	3	2	**2.200**	*3*
d	2	2	1	1	3	**1.800**	*1*

Taula 2. Exemple A$'$, posicions mitjanes.

O sigui, que sense que els votants modifiquin les seves preferències, *el guanyador pot dependre de la presència o absència d'altres candidats, encara que aquests obtinguin pitjors resultats*! Certament, tals inconsistències són força indesitjables.

Aquesta crítica al mètode de les posicions mitjanes va ser formulada en 1785–88 per Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquès de Condorcet [13, cap. 1, §5.5], un matemàtic francès que citarem repetidament en aquest article, ja que va fer diverses aportacions fonamentals a la teoria matemàtica de l'elecció social. Aquestes aportacions van ser realitzades en el context de la Revolució Francesa, i de fet es pot dir que la mort de Condorcet, que va tenir lloc en 1794, va ser motivada, almenys parcialment, per les seves divergències amb Robespierre en el tema dels mètodes electorals [12, 13].

Per a anar bé, s'hauria de definir l'ordre de preferència col·lectiva mitjançant un mètode que tingués la següent propietat de consistència: suposem que apliquem aquest mètode a un determinat conjunt d'opcions; fet això, considerem el subconjunt format per totes aquelles opcions que aquest mètode ha classificat per sobre d'un cert nivell d'acceptació col·lectiva; doncs bé, en aplicar el mateix mètode a aquest subconjunt el resultat hauria de concordar sempre amb l'ordre abans obtingut. Junt amb aquesta condició, també és raonable demanar una condició anàloga on el subconjunt d'opcions en consideració estigui format per totes aquelles que hagin quedat classificades per sota d'un cert nivell d'acceptació col·lectiva. En el que segueix, aquestes dues condicions seran considerades conjuntament, com a dos components d'una condició més general, la qual rep el nom d' **independència local respecte a alternatives irrellevants**.

Aquesta condició és una variant d'una altra encara més general (una mica massa segons veurem més endavant) on el subconjunt d'opcions que es considera és totalment arbitrari. En tal cas es parla simplement d' **independència respecte a alternatives irrellevants**.

5 Principi clàssic de la majoria

L'exemple de la taula següent il·lustra un altre aspecte indesitjable del mètode de les posicions mitjanes. En aquest exemple també hi ha set opcions, però per al nostre propòsit només cal mostrar-ne dues.

	Vots						
Id	A	B	C	D	E	$\bar{r}$	k
a	1	1	1	1	7	**2.200**	*2*
b	2	2	2	2	1	**1.800**	*1*

Taula 3. Exemple B, posicions mitjanes.

Com es pot veure, les posicions mitjanes donen la victòria a l'opció b tot i que una *majoria absoluta* de votants considera que l'opció a és la millor de totes.

Així doncs, el mètode de les posicions mitjanes viola el següent principi fonamental (que ja hem acceptat com a tal en la §1): *Si una majoria absoluta de votants coincideix en assignar la primera posició a una mateixa opció, llavors aquesta ha de ser la guanyadora.* En el que segueix ens referirem a aquesta condició com a **principi clàssic de la majoria**. La idea general del principi de la majoria és que l'opinió d'una majoria absoluta ha de prevaler sobre la d'una minoria. L'enunciat de més amunt és una interpretació concreta d'aquesta idea general; si n'hem dit principi "clàssic" és perquè més endavant veurem altres interpretacions que no són exactament equivalents a aquesta.

Quan només hi ha dues opcions, llavors no costa gaire de veure (és a dir, demostrar) que les posicions mitjanes sempre estaran d'acord amb el principi clàssic de la majoria.

Tal com acabem de veure, però, amb més de dues opcions pot passar que una d'elles tingui una majoria absoluta de primeres posicions i en canvi la seva posició mitjana no la faci guanyadora.

6 Estratègies de vot i robustesa

El mateix mecanisme que fa que les posicions mitjanes puguin infringir el principi clàssic de la majoria també dóna lloc a un tercer problema, a saber, la possibilitat d'*estratègies de vot que desvirtuen el resultat*. Així, en l'exemple B podria estar passant que en principi l'opinió sincera del votant E consistís en posar l'opció a en segona posició, just després de b; tanmateix, això donaria la victòria a a, i no a b, que és la seva opció més preferida; en canvi, posant l'opció a en setè lloc, contra la seva opinió sincera, aquest votant aconsegueix que guanyi b. Evidentment, davant d'això els altres quatre votants podrien optar per una estratègia anàloga i situar l'opció b en setena posició. Ara bé, llavors pot arribar a ocórrer que la victòria no vagi a parar ni a a ni a b, sinó a una tercera alternativa que inicialment passava més desapercebuda! Tot plegat, el resultat final pot ser bastant diferent del que s'obtindria a partir dels vots sincers.

Tals problemes es van fer evidents en la utilització pràctica del mètode que ens ocupa per l'Institut National des Sciences et Arts de France, que el va usar des de 1796 fins a 1804. A aquest respecte, Borda de seguida va reconèixer que "el seu mètode només servia per a persones honestes". Entre els autors que van estudiar aquesta qüestió, cap esmentar l'il·lustrat andalús José Isidoro Morales, que el 1797–1805 va publicar una interessant memòria matemàtica sobre el mètode utilitzat per l'esmentat institut [11].

Així doncs, una altra propietat que convé demanar a un bon mètode de votació és que no es presti fàcilment a estratègies de vot que puguin desvirtuar els resultats. Si més no, seria bo que el resultat fós el més estable possible davant de variacions, voluntàries o involuntàries, en els vots expressats pels votants. Aquesta última propietat rep el nom de **robustesa**.

7 Posicions medianes

Alguns dels problemes de la posició mitjana es poden evitar mitjançant una lleugera variació que consisteix en considerar la **posició mediana**. Per a calcular la mediana d'una sèrie de quantitats, cal ordenar aquestes quantitats de menor a major; si el nombre de quantitats que estem combinant és senar, llavors la mediana és el valor que ocupa la posició central en aquesta ordenació; si el nombre de quantitats és parell, llavors s'acostuma a prendre com a mediana la mitjana aritmètica dels dos valors centrals. Així, la mediana de $(2, 6, 2, 4, 2)$ és el valor més central en $(2, 2, 2, 4, 6)$, és a dir 2.

La taula següent aplica el mètode de les posicions medianes a l'exemple A. Les columnes $\bar{\bar{r}}$ i k donen respectivament la posició mediana i el número d'ordre final que s'obté en ordenar segons $\bar{\bar{r}}$; en cas d'empats k es converteix en un interval (més endavant ens referirem breument a certs criteris de desempat). Com es pot veure, segons aquest mètode l'opció guanyadora no és ni a (la que hauria guanyat en una votació uninominal), ni b (la guanyadora segons les posicions mitjanes), sinó c.

	Vots						
Id	A	B	C	D	E	$\bar{\bar{r}}$	k
a	1	1	7	7	7	**7**	*7*
b	4	2	3	3	1	**3**	*2–3*
c	2	6	2	4	2	**2**	*1*
d	3	3	1	2	5	**3**	*2–3*
e	6	4	5	6	4	**5**	*4–6*
f	7	5	6	1	3	**5**	*4–6*
g	5	7	4	5	6	**5**	*4–6*

Taula 4. Exemple A, posicions medianes.

A partir de les definicions es dedueix fàcilment que *les posicions medianes sempre estan d'acord amb el principi clàssic de la majoria*. En efecte, per la definició de mediana és clar que si una opció és posada en primera posició per més de la meitat dels votants, llavors la seva posició mediana serà igual a 1, mentre que per a qualsevol altra aquest paràmetre serà superior o igual a 2 (ja que els votants que puguin situar aquesta segona opció en primera posició seran sempre menys de la meitat). Així, en l'exemple B les posicions medianes donen la victòria a l'opció a, sense deixar-se influir, com els passa a les posicions mitjanes, per la posició extremadament dolenta que el votant E assigna a aquesta opció. En general, es pot dir que la posició mediana d'una opció no es veu afectada per una radicalització de les seves posicions més dolentes (ni tampoc de les més bones). En altres paraules, *la posició mediana és més robusta que la posició mitjana*.

Aquestes bones propietats han fet que les posicions medianes s'hagin obert camí en diversos cercles com a criteri bàsic de decisió col·lectiva. Un d'aquests cercles és el ball esportiu, on cada competició compta amb diversos jutges que ordenen els participants, cada jutge segons el seu criteri, i es tracta de combinar aquestes ordenacions en un resultat final. De fet, el criteri de les posicions medianes es pot reconèixer dins d'un mètode que Condorcet proposava el 1792/93 per a una nova constitució francesa [12, cap. 10–12, vegi's especialment pp. 249–250] i [13, cap. 8]. Tal com veurem en la secció que segueix, en anys anteriors Condorcet havia introduït un altre punt de vista més fonamental, però en el cas d'un gran nombre de candidats aquest punt de vista presentava certs inconvenients que el van portar a idear un mètode més pràctic. Val a dir que la proposta de Condorcet sobre la constitució francesa no va tenir èxit, sinó tot el contrari: de fet, va progressar una altra versió, la qual va ser criticada per Condorcet, i això va fer que aquest fos declarat traïdor i morís a la presó! [12, §1.6] i [13, p. 37] De totes maneres, el mètode pràctic de Condorcet s'utilitzava poc després a la ciutat de Ginebra, i més tard, a principis del segle XX, en alguns estats de Nord-Amèrica, on aquest mètode és atribuït a James W. Bucklin [18, p. 203–206].

Els empats en les posiciones medianes es poden resoldre —fins a cert punt— de diverses maneres. Condorcet i Bucklin ho fan atenent al nombre de votants que situen l'opció en qüestió en una posició igual o millor que la mediana (com més gran aquest nombre, millor). Una altra possibilitat consisteix en usar les posicions mitjanes retallades: Una mitjana retallada es una mitjana obtinguda després de descartar un nombre predeterminat de valors extrems a banda i banda. Amb un moment de reflexió es veu de seguida que la mediana no és altra cosa que la mitjana més retallada de totes. D'acord amb això, resulta natural resoldre els empats en les posicions medianes basant-se en posicions mitjanes cada vegada menys retallades. Aplicat a l'exemple A, aquest criteri dóna com a resultat el següent ordre: $c \succ b \succ d \succ f \succ e \succ g \succ a$.

8 Comparació per parelles

Però les posicions medianes tampoc són la panacea. En particular, l'ordenació segons les posicions medianes tampoc té la propietat d'independència local respecte a alternatives irrellevants. Si insistim en mirar de complir aquesta condició, fàcilment ens veiem conduïts a comparar dues opcions segons el nombre de votants que prefereixen l'una a l'altra, independentment de quines siguin les posicions concretes que cada votant hagi assignat a aquelles opcions dins de tot el conjunt. Aquest punt de vista condueix a resultats diferents dels mètodes anteriors. Així, en l'exemple A les posicions medianes donen la victòria a l'opció c, però quan aquesta és confrontada amb l'opció d veiem que aquesta última és preferida a l'anterior per una majoria absoluta de votants, a saber els votants B,C,D. De fet, podem veure que des d'aquest punt de vista l'opció d guanya a qualsevol altra, de manera que mereix ser considerada com la més preferida pel col·lectiu.

El punt de vista de la comparació per parelles consisteix doncs en confrontar cada opció amb totes les altres. La informació obtinguda en aquestes confrontacions dóna lloc a una matriu com la que es mostra a la dreta de la taula següent, que correspon a l'exemple A:

	Vots					*Alternatives*						
Id	A	B	C	D	E	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
a	1	1	7	7	7	-	2	2	2	2	2	2
b	4	2	3	3	1	**3**	-	**3**	2	**5**	**4**	**5**
c	2	6	2	4	2	**3**	2	-	2	**4**	**3**	**5**
d	3	3	1	2	5	**3**	**3**	**3**	-	**4**	**3**	**5**
e	6	4	5	6	4	**3**	0	1	1	-	**3**	2
f	7	5	6	1	3	**3**	1	2	2	2	-	**3**
g	5	7	4	5	6	**3**	0	0	0	**3**	2	-

Taula 5. Exemple A, comparacions per parelles

Cada casella de la matriu compara les dues opcions que encapçalen respectivament la fila i columna corresponents a aquella casella; concretament, cada casella dóna el nombre de votants que prefereixen la primera a la segona. Per exemple, quan comparem b amb f veiem que hi ha 4 votants que afavoreixen b sobre f i només un, a saber D, que opina a l'inrevés; així, la casella situada en la fila b i la columna f conté un 4, mentre que la casella situada en la fila f i la columna b conté un 1. Si el nombre de votants que prefereixen una opció a una altra constitueix una majoria absoluta (cosa que nosaltres indiquem mitjançant l'ús de lletra negreta) llavors és força raonable admetre que la primera opció és col·lectivament preferida a la segona. En consonància amb això, resulta natural adoptar el següent principi, que anomenarem **principi de la majoria segons Condorcet** : *Si una opció és col·lectivament preferida a qualsevol altra en el sentit precedent, llavors ha de ser la guanyadora.* Tal com ja hem indicat, en l'exemple A el principi de Condorcet dóna la victòria a l'opció d; en efecte, en la matriu de comparacions per parelles les caselles de la fila corresponent són totes elles majories absolutes.

A partir dels enunciats es veu de seguida que el principi de la majoria segons Condorcet constitueix una extensió del principi clàssic. Quan una opció és la guanyadora segons el principi de Condorcet, en general el conjunt majoritari de votants que la consideren millor que una altra pot dependre de quina és aquesta altra opció; quan no hi tal dependència, llavors tenim un guanyador segons el principi clàssic. Així, en l'exemple A l'opció d guanya a cadascuna de les altres en el sentit de Condorcet, però només hi ha un votant, a saber C, que la considera millor que totes les altres, de manera que aquesta opció no assoleix la victòria en el sentit del principi clàssic.

El punt de vista de la comparació per parelles és la idea fonamental propugnada per Condorcet des de 1785 [13, cap. 1, §5.4]. Uns cent anys més tard la mateixa idea va ser considerada, sembla ser que independentment, per Charles Lutwidge Dodgson, més conegut pel sobrenom de Lewis Carroll [13, cap. 12]. D'altra banda, de fet aquesta idea fonamental es remunta al segle XIII, en què el mateix Ramon Llull proposava ja mètodes d'elecció basats sistemàticament en aquest punt de vista [8] i [13, cap. 3]. En vista d'això, d'ara en endavant ens referirem a la matriu de comparació per parelles com a **matriu de Llull**.

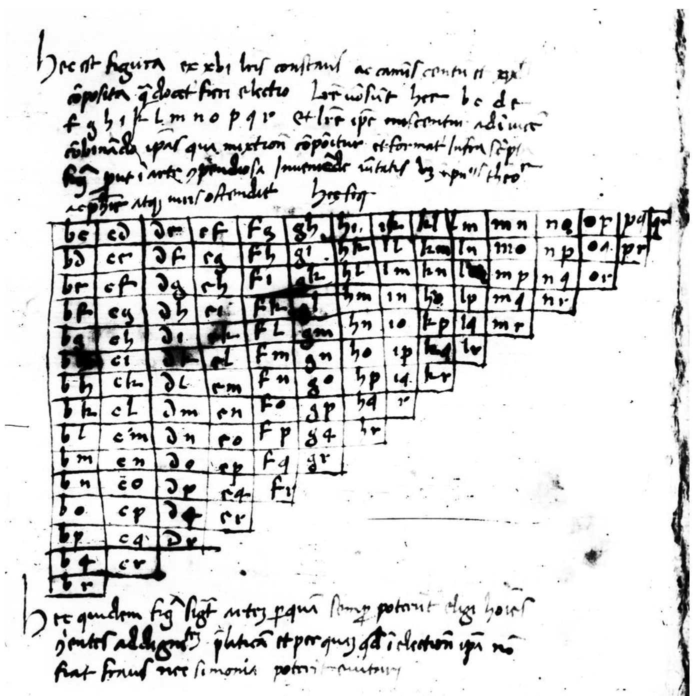


Figura 2. Inici de l'*Artificium electionis personarum*, escrit per Ramon Llull abans del 1283. Còpia del segle XV conservada a la Biblioteca Apostolica Vaticana (Codex latinus 9332, fol. 11r–12v).

En el marc de la comparació per parelles, la situació no és tan diferent d'un *torneig* on cada opció s'enfronta amb cadascuna de les altres i cada enfrontament dóna un resultat concret. Així, en l'exemple A podem dir que b guanya a f per 4 a 1, mentre que d guanya a b per 3 a 2. Malauradament, aquesta similitud amb un torneig esportiu arriba més lluny del que hom voldria: *de vegades els resultats dels diferents enfrontaments no són coherents amb una relació d'ordre.* En una terminologia més matemàtica, encara que les preferències dels votants siguin relacions transitives, la relació de preferència col·lectiva que en resulta no té perquè ser transitiva. Així, en l'exemple A veiem que e guanya a f i f guanya a g, però e perd davant de g. Aquest fenomen es coneix com a **paradoxa de Condorcet**, i els cicles com el que acabem d'assenyalar s'anomenen **cicles de Condorcet**.

En particular, aquests cicles poden fer que no hi hagi cap opció que guanyi a totes les altres, és a dir, que no hi hagi cap guanyador en el sentit de Condorcet. Per exemple, si prenem l'exemple A i ens restringim a les opcions e, f, g s'obté una situació d'aquest tipus. A continuació donem dos altres exemples del mateix estil. L'exemple C és d'alguna manera el cas més senzill possible. Al seu costat donem un altre exemple on el cicle no és tan "simètric". Aquest últim exemple considera 100 votants, 49 dels quals donen l'ordre A, 33 donen l'ordre B, i els altres 18 donen l'ordre C.

	Vots			*Alt*		
Id	A	B	C	*a*	*b*	*c*
a	1	2	3	-	**2**	1
b	2	3	1	1	-	**2**
c	3	1	2	**2**	1	-

Taula 6. Exemple C

	49	33	18	*Alt*		
Id	A	B	C	*a*	*b*	*c*
a	1	2	3	-	**82**	49
b	2	3	1	18	-	**67**
c	3	1	2	**51**	33	-

Taula 7. Exemple D

La paradoxa de Condorcet també fa veure que *la condició general d'independència respecte a alternatives irrellevants és massa exigent.* Més concretament, aquesta condició és incompatible amb altres condicions fonamentals, com ara el principi clàssic de la majoria. Per exemple, suposem que tenim un mètode que aplicat a l'exemple D dóna la victòria a l'opció a; segons la condició general d'independència respecte a alternatives irrellevants, si suprimim l'opció b hauria de seguir guanyant a, però això contradiu el principi clàssic de la majoria, ja que 51 votants sobre 100 prefereixen c a a. Un argument similar es pot adduir contra la tesi de donar la victòria a b, o de donar-la a c. O sigui, que si volem donar la victòria a algú hem de renunciar o bé a la condició general d'independència respecte a alternatives irrellevants o bé al principi clàssic de la majoria. Però un mètode que violés aquest últim principi no tindria res a veure amb el que tothom espera d'un mètode de votació. Així doncs, ens veiem conduïts a renunciar a la condició general d'independència respecte a alternatives irrellevants. Aquestes observacions estan associades al nom de Kenneth J. Arrow, un economista nord-americà que pels volts de 1950 va demostrar matemàticament certs resultats d'incompatibilitat d'aquest tipus, i que posteriorment, el 1972, va rebre el premi Nobel d'economia. Val a dir, però, que *la condició d'independència **local** respecte a alternatives irrellevants sí que resulta compatible amb el principi de la majoria*. De fet, més avall veurem mètodes concrets que combinen aquestes dues propietats.

Tornant al problema de fons, el cas és que el principi de la majoria segons Condorcet no és suficient per a resoldre casos com ara l'exemple D. Per a avançar més, convindria donar resposta a les preguntes següents:

- Qüestió 1. ¿Com podríem estendre el principi de Condorcet per tal de determinar el guanyador en una situació el més general possible?
- Qüestió 2. ¿Com podríem obtenir un ordre que representi la relació de preferència col·lectiva?
- Qüestió 3. ¿Com podríem quantificar amb més precisió el grau d'acceptació col·lectiva de cada opció?

Noti's que aquestes qüestions estan relacionades entre elles: una resposta a la qüestió 2 implica automàticament una resposta a la qüestió 1, i una resposta a la qüestió 3 implica automàticament una resposta a les qüestions 1 i 2.

9 El paper de les matemàtiques

Després del que hem vist en els apartats anteriors, és relativament lògic tenir una sensació més aviat pessimista sobre la possibilitat de donar una resposta satisfactòria a les qüestions que acabem de plantejar. Certament, tot apunta en la direcció de que "cap mètode no és perfecte". Ara bé, encara que no hi hagi cap mètode "perfecte", això no treu que alguns mètodes siguin millors que altres en certs aspectes concrets. El problema és que hom no es pot fiar de les aparences: tal com hem pogut comprovar, el tema és un laberint de paradoxes, o si més no, de situacions on mètodes aparentment raonables donen lloc a resultats que clarament no ho són. Així doncs, per tal de poder donar alguna resposta fiable a aquelles qüestions *cal ser especialment precisos* *en el llenguatge i curosos de la validesa lògica dels raonaments; això fa que resultin molt adients les matemàtiques.*

Si pretenem garantir que un mètode concret compleix determinades propietats, d'entrada cal que tant el mètode com les propietats en qüestió estiguin especificats de manera inequívoca, i a partir d'aquí cal sustentar l'afirmació en qüestió mitjançant una demostració matemàtica, és a dir una argumentació de lògica "escrupulosa". Algunes vegades aquesta demostració pot ser relativament senzilla, però tot sovint pot ser bastant més complicada del que podia semblar a primera vista. Malauradament, aquesta complicació comporta un aparell tècnic (terminologia especialitzada, notació simbòlica —les fórmules—, i invocació de resultats més abstractes) que té com a conseqüència inevitable un cert distanciament entre les matemàtiques i les seves aplicacions pràctiques. Tot i així, en el cas dels mètodes de votació el problema no és tan greu, ja que d'una banda tothom coneix l'aspecte pràctic i d'altra banda els objectes matemàtics adients són força elementals.

Des d'un punt de vista pràctic, l'únic que interessa són les conclusions d'aquesta anàlisi matemàtica, especialment en el sentit de saber si un mètode concret té garantida o no una determinada propietat. D'acord amb això, en aquest article no entrarem en els detalls de les demostracions més intricades, la qual cosa ens permetrà d'evitar tecnicismes i apropar-nos al llenguatge ordinari tot mantenint la precisió necessària.

Per a representar matemàticament les preferències dels votants, i també les preferències col·lectives, resulta molt adient el concepte matemàtic de relació (binària), i especialment el cas particular de les relacions d'ordre. Equivalentment, també podem representar aquests objectes mitjançant matrius o grafs. A continuació introduim breument aquests conceptes i la seva relació amb el problema que ens ocupa.

Per començar tenim un **conjunt d'opcions** A, el qual suposem finit. Un sistema de preferències qualitatives sobre A es pot identificar amb una **relació** sobre A, és a dir, un conjunt ρ format per parelles ordenades d'elements de A. A partir de dos elements diferents x, y de A es poden formar dues parelles ordenades diferents, xy i yx. Si el conjunt ρ inclou xy però no yx, llavors entendrem que l'opció x és preferida a y. Si ρ inclou a la vegada xy i yx, llavors entendrem que les opcions x i y tenen el mateix grau d'acceptació. Finalment, si ρ no inclou ni xy ni yx, llavors entendrem que no hi ha informació al respecte de la comparació entre x i y. Les parelles de la forma xx no són rellevants per als nostres propòsits, de manera que només les tindrem en compte quan això agilitzi el llenguatge. Equivalentment, un sistema de preferències qualitatives es pot representar mitjançant una **matriu de Llull elemental**, és a dir una taula del mateix estil que les de la §8 on cada parella ordenada xy té assignada una puntuació ρ_{xy} igual a 0, 1 o $1/2$ d'acord amb la regla següent:

$$\rho_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad xy \in \rho \quad \text{i} \quad yx \notin \rho; \\ 1/2, & \text{si} \quad xy \in \rho \quad \text{i} \quad yx \in \rho; \\ 0, & \text{si} \quad xy \notin \rho. \end{cases} \tag{1}$$

Finalment, un sistema de preferències qualitatives es pot representar també mitjançant un **graf dirigit**. Aquest terme fa referència a una representació gràfica on els elements de A estan representats per punts i les parelles xy que formen el conjunt ρ estan representades per segments o arcs orientats que van de x a y. Per exemple, a continuació es donen aquestes tres representacions diferents per a un mateix sistema de preferències qualitatives sobre el conjunt $A = \{a, b, c, d\}$:

$\{$ *ab, bc, bd, ca, cd, da,* $\}$

	a	b	c	d
a	-	1	0	0
b	0	-	1	1
c	1	0	-	1
d	1	0	0	-

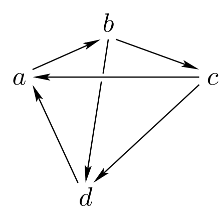


Figura 3. Tres maneres de representar un sistema de preferències qualitatives

Una **ordenació** (completa), o **ordre** (total), és una classe especial de relació que compleix les tres propietats següents: **transitiva**: si ρ inclou a la vegada xy i yz, llavors també inclou xz; **antisimètrica**: ρ no pot incloure a la vegada xy i yx amb $x \neq y$; **total**, o **completa**: si ρ no inclou xy, llavors ha d'incloure forçosament yx. Per exemple, les tres representacions que donem a continuació corresponen totes elles a l'ordre $a \succ b \succ c \succ d$:

$$\{\ ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,\ \}$$

	a	b	c	d
a	-	1	1	1
b	0	-	1	1
c	0	0	-	1
d	0	0	0	-

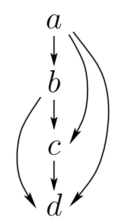


Figura 4. Tres maneres de representar un ordre

La matriu associada a un ordre ρ pren una forma especialment senzilla quan ordenem les seves files i columnes segons ρ: tal com il·lustra la figura precedent, llavors tenim el valor 1 en les caselles situades per sobre de la diagonal i 0 en les de sota.

La matriu de Llull d'una votació preferencial no és més que la suma de les matrius elementals corresponents a les relacions de preferència expressades pels votants. En símbols:

$$v_{xy} = \sum_k \rho^k_{xy}, \tag{2}$$

on v_{xy} denota el nombre de votants que posen x per davant de y —notació que mantindrem a partir d'ara—, k recorre el conjunt de votants, i (ρ^k_{xy}) és la matriu de Llull elemental corresponent a ρ^k, la relació de preferència expressada pel votant k.

Així doncs, en el marc de la comparació per parelles les preferències individuals són agregades en el sentit més propi de la paraula, és a dir, mitjançant una suma. Tal com hem vist, el problema és que de vegades —com ara en els exemples C i D— la matriu resultant no es presta fàcilment a ser interpretada com un sistema de preferències.

10 El criteri de coincidència màxima

Suposem que cada votant expressa les seves preferències mitjançant un ordre i que el resultat el busquem també en forma d'un ordre (en la terminologia de la §8 ens estem plantejant doncs la qüestió 2). A no ser que tots els votants donin exactament el mateix ordre, és obvi que qualsevol ordre concret que poguem proposar com a resultat tindrà algunes discrepàncies amb els votants. D'altra banda, és obvi que hi haurà algun ordre que reduirà el nombre de discrepàncies a un mínim, o el que és equivalent, maximitzarà el nombre de coincidències amb els votants. Certament, sembla força raonable adoptar tal ordre com a representatiu de la relació de preferència col·lectiva. En el que segueix, aquesta proposta rebrà el nom de **criteri de coincidència màxima**. Noti's que en principi no estem parlant pas del grau de coincidència *entre* els votants, sinó del grau de coincidència *amb ells* per part de l'ordre que volem adoptar com a resultat (encara que també té sentit mesurar la primera cosa en funció de la segona).

Per suposat, cal que estigui ben clar com es compta el grau de coincidència. Donats dos ordres, entendrem que el nombre de coincidències entre ells és el nombre de parelles no ordenades d'opcions on ambdós ordres estan d'acord en quina de les dues opcions és més preferida que l'altra. Per exemple, el nombre de coincidències entre els ordres $a \succ b \succ c$ i $c \succ a \succ b$ és 1, ja que de les tres parelles possibles $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ els dos ordres només estan d'acord en la parella $\{a, b\}$.

En termes de les respectives matrius de Llull elementals, el nombre de coincidències entre dos ordres ρ i ξ ve donat per $C(\rho, \xi) = \sum_{x \neq y} \rho_{xy}\, \xi_{xy}$. Quan reemplacem ρ per múltiples ordres ρ^k, un per cada votant, llavors el nombre total de coincidències amb ξ és la suma $\sum_k C(\rho^k, \xi)$, que en termes de la matriu de Llull es pot reescriure com

$$C(v, \xi) \;=\; \sum_{x \neq y} v_{xy}\, \xi_{xy}. \tag{3}$$

Tenint present que ξ_{xy} val 1 o 0 segons que la parella xy estigui ordenada o no segons ξ, no costa gaire de veure que $C(v, \xi)$ és la suma de les caselles que queden per sobre de la diagonal quan les files i columnes de la matriu de Llull (v_{xy}) s'ordenen segons ξ. El criteri de coincidència màxima consisteix doncs en trobar un ordre ξ que maximitzi aquesta suma. En el cas de l'exemple D es veu fàcilment que el màxim s'aconsegueix amb l'ordenació $a \succ b \succ c$.

Tal com mostra l'exemple C, de vegades la coincidència màxima es pot aconseguir mitjançant diversos ordres diferents; en aquest cas, tenim tres solucions, a saber $a \succ b \succ c$, $b \succ c \succ a$ i $c \succ a \succ b$. En conseqüència, sembla bastant inevitable concloure que les tres opcions estan empatades. En l'exemple A ens trobem també amb tres solucions, a saber, l'ordre $d \succ b \succ c \succ e \succ f \succ g \succ a$ i dos més que s'obtenen a partir de l'anterior canviant la part $e \succ f \succ g$ per $f \succ g \succ e$ i per $g \succ e \succ f$. Així doncs, en general el criteri de coincidència màxima pot donar lloc a *múltiples resultats*. Evidentment, quan l'electorat és molt nombrós aquestes situacions són altament improbables.

No costa gaire de veure que *el criteri de coincidència màxima constitueix una extensió del principi de Condorcet*. Dit d'una altra manera, si hi ha una opció u que guanya a qualsevol altra en les comparacions per parelles, llavors aquesta opció encapçalarà qualsevol ordre que maximitzi la coincidència amb els votants. Per a demostrar aquesta afirmació només cal considerar un ordre que no estigui encapçalat per u i constatar que si traslladem u cap amunt augmenta el nombre de coincidències amb els votants. En efecte, la hipòtesi que u guanya a qualsevol x en les comparacions per parelles vol dir que, sigui quina sigui x, sempre hi ha més votants que posen u per davant de x que no a l'inrevés.

De manera similar, podem veure també que *el criteri de coincidència màxima compleix la condició d'independència local respecte a alternatives irrellevants*. Dit d'una altra manera, si ξ és un ordre de A que maximitza la coincidència amb els votants i $\widetilde{A}$ és un interval de ξ, llavors la restricció de ξ a $\widetilde{A}$, diguem-ne $\widetilde{\xi}$, també maximitza la coincidència amb els votants (pel que fa a les opcions de $\widetilde{A}$). Per a demostrar aquesta afirmació només cal suposar l'existència d'un altre ordre de $\widetilde{A}$, diguem-ne $\widetilde{\sigma}$, que tingués major coincidència amb els votants que $\widetilde{\xi}$, i constatar que una subtitució de $\widetilde{\xi}$ per $\widetilde{\sigma}$ dins de ξ donaria un nou ordre de A que tindria major coincidència amb els votants que ξ.

Finalment, també es pot veure fàcilment que *el criteri de coincidència màxima compleix la següent propietat de consistència respecte als votants*: Si es considera una divisió del conjunt de votants en dues parts i hi ha un ordre que maximitza la coincidència amb cadascuna d'aquestes dues parts per separat, llavors aquest ordre maximitza també la coincidència amb tot el conjunt sencer de votants.

La formulació precisa del criteri de coincidència màxima data dels anys 1950–60, en què aquest criteri va ser considerat independentment per diversos autors. Avui dia se l'acostuma a associar a un d'ells en concret: John George Kemény, un matemàtic d'origen hongarès que va ser ajudant d'Albert Einstein i que posteriorment va col·laborar en l'invenció del llenguatge BASIC de computació. Kemény es va ocupar del problema de l'elecció social en un interessant article titulat *Mathematics without numbers*.

El 1978, H. Peyton Young i Arthur Levenglick van demostrar que el criteri de coincidència màxima es l'*únic* criteri de combinació d'ordenacions que, a més de tractar per igual a tots els votants i a totes les opcions (la qual cosa estem donant per suposat en tot moment), compleix les següents propietats: (a) si hi ha unanimitat en posar x per davant de y, llavors l'ordre col·lectiu també ho fa així; (b) independència local respecte a alternatives irrellevants; i (c) consistència respecte als votants en el sentit descrit més amunt. Així doncs, si estem segurs que ens interessen aquestes propietats y no altres, llavors hem d'adoptar el criteri de coincidència màxima. El problema és que més avall veurem altres mètodes que compleixen altres propietats diferents també molt interessants.

A tot això, encara no hem dit com determinar l'ordre que aconsegueix la coincidència màxima. En principi aquest problema té una solució òbvia: només cal provar tots els ordres possibles i veure quin d'ells dóna el millor resultat. Tanmateix, a no ser que el nombre d'opcions sigui molt petit, això de seguida comporta molt de temps de càlcul, inclús per a un ordinador. Aquest problema es pot pal·liar lleugerament mitjançant l'aplicació de certes estratègies més elaborades, però tot i així el temps de càlcul encara creix molt de pressa amb el nombre d'opcions; de fet, els medis actuals no permeten anar gaire més enllà d'unes 25 opcions.

Figura 5. Ramon Llull (*ca*1233–1315). Les seves idees sobre votacions van ser redescobertes cinc segles mes tard.

11 L'algorisme d'ordenació de comparacions [5]

Recordem que v_{xy} dóna el nombre de votants que estan d'acord en considerar que x és millor que y. Així doncs, com més gran sigui v_{xy} més raó hi ha per a que la relació de preferència col·lectiva inclogui aquesta opinió, és a dir, que inclogui la proposició $x \succ y$. Aquesta idea porta a definir la relació de preferència col·lectiva mitjançant el següent algorisme: Considerem les diverses proposicions $x \succ y$ per ordre decreixent de v_{xy}; en cada pas, la proposició corresponent és adoptada sempre que no contradigui les que ja han estat adoptades fins llavors, és a dir, sempre que no tanqui un cicle; el procés continua fins que les proposicions adoptades determinen un ordre total.

En general, pot ocórrer que dues o més proposicions tinguin el mateix suport v_{xy}. En aquests casos el resultat pot dependre de l'ordre en què es considerin les proposicions empatades. Per simplificar les coses, d'ara en endavant evitarem sistemàticament aquest cas, que es pot considerar una complicació tècnica però no essencial. Quan convingui, suposarem que els valors de v_{xy} són tots ells diferents i per tant no hi ha empats. Òbviament, aquesta hipòtesi es compleix amb una alta probabilitat quan l'electorat és molt nombrós. En altres moments admetrem empats però amb la condició que el resultat no depengui de l'ordre en què es considerin les proposicions empatades.

L'algorisme d'ordenació de comparacions és bastant més ràpid que els algorismes a què ens referiem en l'apartat anterior per a obtenir un ordre de coincidència màxima. Cap preguntar-se si potser hem descobert una manera ràpida d'obtenir tals ordres. Però la resposta és negativa: no costa gaire de trobar exemples on aquests dos mètodes donen resultats diferents. A continuació donem un exemple d'aquest tipus que de pas servirà per a il·lustrar l'aplicació de l'algorisme que estem considerant. En aquest exemple tenim quatre opcions a, b, c, d i 100 votants, els quals especifiquen certs ordres que resulten en la següent matriu de Llull:

[5] El terme *ordenació de comparacions* l'utilitzem com a traducció de l'anglès *ranked pairs*. Òbviament no ho podiem traduir per *parelles ordenades*, ja que aquest últim terme s'utilitza regularment amb un altre significat ben diferent.

Id	*Alt* *a*	*b*	*c*	*d*
a	-	**53**	**52**	46
b	47	-	**52**	**57**
c	48	48	-	**53**
d	**54**	43	47	-

Taula 8. Exemple E

L'aplicació de l'algorisme d'ordenació de comparacions porta a adoptar successivament les següents proposicions, on els superíndexs indiquen el suport associat a cada proposició: (1) $b \succsim^{57} d$; (2) $d \succsim^{54} a$, que combinada amb l'anterior ens dóna $b \succ d \succ a$; (3) $c \succsim^{53} d$ (però no $a \succsim^{53} b$, que formaria un cicle); i (4) $b \succsim^{52} c$ (però no $a \succsim^{52} c$, que també formaria un cicle); això completa l'ordre $b \succ c \succ d \succ a$. Les coincidències d'aquest ordre amb els votants són $52 + 57 + 47 + 53 + 48 + 54 = 311$. Però aquest no és pas el màxim valor possible. De fet, la coincidència màxima la dóna l'ordre $a \succ b \succ c \succ d$, que totalitza $53 + 52 + 46 + 52 + 57 + 53 = 313$ coincidències. Certament es tracta d'una diferència mínima, però amb les definicions que hem donat no hi ha més remei que admetre que els resultats són diferents. I segons com es miri són ben diferents, ja que en un cas guanya a mentre que en l'altre cas aquesta opció queda en última posició!

Malgrat aquestes possibles divergències amb el criteri de coincidència màxima, l'algorisme d'ordenació de comparacions també respecta sempre el principi de Condorcet. A més d'això, a continuació veurem que té altres propietats força interessants. Per a les corresponents demostracions remetem el lector a [18, p. 219–223].

12 Consistència respecte a clons

Una propietat molt interessant de l'algorisme d'ordenació de comparacions és l'anomenada consistència respecte a clons. Per a explicar en què consisteix i fer veure el seu interès, serà millor començar per un exemple. Suposem que un grup d'estudiants està planejant un viatge de fi d'estudis i té sobre la taula tres opcions pel que fa al mitjà de transport: a autocar, b ferrocarril, c avió. Imaginem que aquestes tres opcions tenen respectivament els següents percentatges de partidaris: $40\%, 35\%, 25\%$, i que aquestes quantitats ja floten en l'ambient abans de votar. Davant d'això, a un dels partidaris de b se li ocorre una idea per a fer que guanyi la seva opció preferida: aprofitant que hi ha dues companyies diferents d'autocars que fan el recorregut planejat en unes condicions molt similars, només cal aconseguir que la votació consideri quatre opcions: a_1 autocar de la companyia 1, a_2 autocar de la companyia 2, b ferrocarril, c avió. Els percentatges de partidaris d'aquestes quatre opcions seran ara semblants a $20\%, 20\%, 35\%, 25\%$. En una votació uninominal aquesta estratagema aconseguiria el seu objectiu de fer que guanyés b (i les opcions a tampoc tindrien cap oportunitat encara que es fes una segona volta entre les dues més votades). Si considerem vots preferencials, llavors el que passi dependrà d'altra informació que no hem especificat, però la idea és que un bon mètode hauria de ser resistent a aquest tipus d'estratagemes.

Més exactament, un **conjunt de clons** vol dir un subconjunt d'opcions que tots els votants posen en posicions consecutives. I un mètode que determina un ordre col·lectiu diem que és **consistent respecte a clons** quan compleix les dues condicions següents: (a) sempre que hi ha un conjunt de clons, els seus membres ocupen posicions consecutives també en l'ordre col·lectiu; i (b) quan s'afegeixen o se suprimeixen clons el resultat només pot canviar en l'ordre intern del corresponent conjunt de clons. Així, en l'exemple del viatge de fi d'estudis, les opcions a_1 i a_2 constituiran o no un conjunt de clons segons sigui cert o no que tots els votants les posen en posicions consecutives. Si estem realment en aquest cas i el mètode que utilitzem és consistent respecte a clons, llavors l'estratagema que hem descrit més amunt no té cap possibilitat d'èxit: si en el primer plantejament guanyava a, en el segon plantejament guanyarà a_1 o a_2, però no pas b.

Doncs bé, es pot demostrar que *l'algorisme d'ordenació de comparacions és consistent respecte a clons*. En canvi, el criteri de la coincidència màxima no té pas aquesta propietat.

De fet, l'objectiu d'assolir la consistència respecte a clons va ser el que vers 1986/87 va portar Thomas M. Zavist i T. Nicolaus Tideman a idear l'algorisme d'ordenació de comparacions. D'altra banda, la idea essencial d'aquest algorisme es pot trobar ja en certs passatges de l'obra fonamental publicada per Condorcet l'any 1785 [12, p. 129].

En l'exemple que hem posat més amunt els clons apareixien com a resultat d'una estratagema ordida per una de les parts a fi de dividir un altre sector de l'electorat. A la pràctica també és freqüent el cas d'una divisió més espontània, deguda senzillament a una profusió de candidats relativament similars. En el marc del vot uninominal tals situacions formen part de la raó de ser dels partits i de les coalicions. Hom pot arribar a preguntar-se, doncs, fins a quin punt podria canviar el paper d'aquestes entitats si s'usés el vot preferencial junt amb un mètode consistent respecte a clons.

13 Suport indirecte · Primera part

Malgrat la interessant propietat que acabem de veure, el criteri de coincidència màxima encara té un atractiu especial, ja que deixa ben clar què es pretén aconseguir de la solució. En canvi, l'algorisme d'ordenació de comparacions apareix com una idea pràctica més o menys afortunada que no sabem exactament a què respon. Doncs bé, una altra propietat notable de l'algorisme d'ordenació de comparacions és que també és possible caracteritzar-lo en termes d'un criteri clar i raonable.

Una vegada més, serà millor començar per un exemple. Suposem que tenim el cas de l'exemple E i que decidim donar com a resultat l'ordre de coincidència màxima, a saber $a \succ b \succ c \succ d$. Els partidaris de d podrien protestar dient que d ha de quedar per davant de a, ja que la proposició $d \succ a$ té el suport d'una majoria absoluta de votants, i en particular té més suport que la proposició contrària $a \succ d$. De seguida es veu que el problema és degut a l'existència de cicles de Condorcet, de manera que no costa gaire d'argumentar en sentit contrari: també tenen el suport d'una majoria absoluta les proposicions $a \succ b$ i $b \succ d$, de les quals se'n deriva que $a \succ d$. Ara bé, els partidaris de d encara podrien replicar que les magnituds concretes d'aquestes últimes majories són respectivament $a \succ^{53} b$ i $b \succ^{57} d$, i que la manera més raonable de mesurar la força de la proposició derivada $a \succ d$ és prendre el mínim d'aquells dos nombres, és a dir 53; en canvi, la proposició $d \succ a$ està recolzada de manera directa per 54 votants. Davant d'això, podriem posar-nos a buscar altres cadenes de comparacions d'on se'n derivi que $a \succ d$, a veure si en podem trobar alguna que tingui una força superior a 54, però la veritat és que no n'hi ha cap, de manera que ens veiem incapaços de rebatre la protesta.

Certament, no estaria malament poder evitar sistemàticament tals situacions. A continuació formulem aquesta idea d'una manera més precisa i general. Suposem que tenim una matriu de Llull i estem considerant la possibilitat de donar com a resultat un determinat ordre ξ. Aquest ordre no és més que una manera especial d'especificar una preferència dins de cada parella d'opcions. En principi, ens agradaria que aquestes preferències estiguessin d'acord amb les majories absolutes de la matriu de Llull. A continuació ho formulem d'una manera lleugerament diferent, la qual és equivalent a l'anterior en el cas complet, és a dir, quan cada vot es pronuncia sobre totes les parelles possibles d'opcions (però no en el cas incomplet, que per regla general deixem fora d'aquest article). En principi ens agradaria que es complís la següent condició:

(CD) $xy \in \xi$ si i només si la proposició $x \succ y$ té més suport que la proposició contrària $y \succ x$.

El problema és que aquesta condició pot ser impossible de satisfer.D'una banda, pot passar que una proposició i la seva contrària estiguin empatades. Però ja hem dit que els empats són una complicació tècnica no essencial; per tal d'evitar-los, d'ara en endavant suposarem que els valors de v_{xy} són tots ells diferents.El problema realment greu és la possibilitat de cicles de Condorcet, els quals són incompatibles amb la condició precedent des del moment que ξ és un ordre.Davant d'això, resulta interessant demanar només el següent:

(CS) $xy \in \xi$ si i només si la proposició $x \succ y$ té un "suport indirecte dins de ξ" superior al suport directe en favor de la proposició contrària $y \succ x$.

Aquí, el **suport indirecte dins de** ξ vol dir el màxim suport que es pot obtenir "a través d'un camí" que segueixi l'ordre ξ. Així, en l'exemple E el suport directe a la proposició $a \succ b$ és 53 i el suport directe a la proposició contrària $b \succ a$ és 47, però dins de l'ordre $\xi = b \succ c \succ d \succ a$ la proposició $b \succ a$ té un suport indirecte igual a 54, degut al camí $b \overset{57}{\succ} d \overset{54}{\succ} a$. Tal com il·lustra aquest exemple, el **suport a través d'un camí** és el valor mínim dels suports directes a les proposicions intermèdies (per tant, el suport indirecte dins d'un ordre és el màxim d'un mínim).

En el que segueix ens referirem a les condicions (CD) i (CS) respectivament com a condicions de **comparació directa** i de **comparació semidirecta.** En lloc de "comparació" potser n'hauríem de dir "bicomparació", ja que de fet estem comparant (la força de) dues comparacions (a saber, $x \succ y$ i $y \succ x$).

Doncs bé, es pot demostrar que (en absència d'empats) *l'ordre que s'obté mitjançant l'algorisme d'ordenació de comparacions és exactament l'únic ordre que compleix la condició de comparació semidirecta.*

A partir d'aquest resultat es dedueix fàcilment que *l'algorisme d'ordenació de comparacions també compleix la condició d'independència local respecte a alternatives irrellevants.* El lector pot comprovar fàcilment la presència d'aquesta propietat en el cas particular de l'exemple E.

14 Suport indirecte · Segona part

A hores d'ara el lector no se sorprendrà si diem que el mètode d'ordenació de comparacions també és criticable: Seguint amb l'exemple E, on hem vist que aquest mètode resulta en l'ordre $b \succ c \succ d \succ a$, els partidaris de c poden argumentar que, posats a considerar suports indirectes, el camí $c \succ^{53} d \succ^{54} a \succ^{53} b$ dóna a la proposició $c \succ b$ un suport indirecte igual a 53, mentre que la proposició $b \succ c$ arriba com a màxim a 52, tant directament com a través del camí $b \succ^{57} d \succ^{54} a \succ^{52} c$. El problema de fons és que la condició de comparació semidirecta (CS) no usa les mateixes regles de joc a l'hora d'assignar un suport a una proposició $x \succ y$ i la seva contrària $y \succ x$: D'aquestes dues proposicions, la que està d'acord amb l'ordre ξ es mesura mitjançant el suport indirecte dins de ξ, mentre que l'altra es mesura mitjançant el suport directe. D'alguna manera, això constitueix un tracte de favor per a la proposició que està d'acord amb l'ordre ξ. En lloc d'això, potser seria més adient que ambdues proposicions es mesuressin amb un mateix criteri.

Aquestes consideracions porten a considerar la següent alternativa a les condicions (CD) i (CS), que en direm condició de **comparació indirecta**:

(CI) $xy \in \xi$ si i només si la proposició $x \succ y$ té un suport indirecte superior al suport indirecte de la proposició contrària $y \succ x$.

Aquí, el **suport indirecte** d'una proposició vol dir simplement el màxim suport que aquesta pot obtenir a través d'un camí arbitrari (en lloc de camins restringits a seguir l'ordre ξ).

Aquesta condició va ser introduïda l'any 1997 per Markus Schulze, que inicialment la veia com una reformulació del mètode d'ordenació de comparacions, però després se'n va adonar que no era pas equivalent [15, a]. En el cas de l'exemple E, on ja hem vist que hi havia diferències, la condició de comparació indirecta la compleix només l'ordre $c \succ b \succ d \succ a$. La pregunta que de seguida es planteja és si sempre hi ha un ordre total ξ que compleixi la condició de comparació indirecta (CI) (recordi's que això no és cert per a la condició de comparació directa). Dit d'una altra manera, si prenem (CI) com a definició de la relació ξ, ¿podem estar segurs que ξ és sempre un ordre total? En aquest sentit és obvi que la relació ξ és antisimètrica, i també és fàcil de veure que en absència d'empats llavors és total. El quid de la qüestió és la transitivitat, és a dir, l'absència de cicles. Schulze no va tardar gaire en demostrar que ξ té sempre aquesta propietat [15, b]. Aquestes descobertes es van realitzar i publicar en el marc de la *Election Methods Mailing List*, una llista de correu molt activa i interessant.

El resultat és un nou mètode, el **mètode dels camins**, que també respecta el principi de Condorcet i que manté la propietat de consistència respecte a clons.

Una altra propietat força interessant del mètode dels camins és que pot ser complementat amb una mesura quantitativa de l'acceptació col·lectiva de cada opció. Aquesta mesura la proporciona un algorisme que ha estat proposat a [6] amb el nom de mètode CLC (per "Continuous Llull-Condorcet"). El caràcter quantitatiu ve donat per la combinació de certes propietats que especifiquen els valors que s'han d'obtenir en certs casos extrems i una propietat de variació contínua del resultat en funció de la freqüència relativa de cada vot (la qual cosa esdevé especialment significativa quan hi ha un gran nombre de votants). Des d'aquest punt de vista quantitatiu no és gens estrany que petites variacions en el contingut dels vots, o en el mètode aplicat, puguin donar lloc a grans variacions en l'ordre de preferència col·lectiva (com ara que una opció salti de la primera posició a l'última). En tals casos, el que està passant és simplement que hi ha graus molt similars d'acceptació col·lectiva, de manera que petites pertorbacions poden resultar en ordres molt diferents.

15 La dimensió pràctica

L'aplicació del mètode dels camins requereix calcular els suports indirectes de totes les proposicions. Això significa considerar totes les parelles possibles així com tots els camins possibles entre les dues opcions que formen cada parella. Tot i que el problema s'acaba reduint a un nombre finit de possibilitats, quan el nombre d'opcions comença a ser una mica gran el temps de càlcul s'allarga apreciablement, inclús per a un ordinador. Com en el cas del criteri de coincidència màxima, això limita l'aplicabilitat del mètode dels camins, i de la valoració CLC, a conjunts no massa grans d'opcions, diguem que fins a un nombre de l'ordre de dues dotzenes.

D'altra banda, aquest nombre és més que suficient en molts àmbits, i actualment hi ha diverses entitats que usen el mètode dels camins per a de-

Figura 6. Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquès de Condorcet (1743–1794), figura cabdal de la teoria de l'elecció social.

terminar el resultat de les seves votacions [16, §1]. Moltes d'elles pertanyen al món de la programació informàtica, on l'algorisme d'aplicació del mètode dels camins és un simple exercici. Una d'aquestes entitats és el col·lectiu de desenvolupadors de Debian, una coneguda variant del sistema operatiu Linux (vegi's [7]). Val a dir que, a més de determinar el resultat mitjançant el mètode dels camins, les votacions d'aquesta entitat també tenen cura d'altres aspectes importants, com ara la inclusió sistemàtica d'una opció de rebuig a totes les altres (de manera que perdi sentit l'abstenció a causa d'opcions no plantejades), i la publicació dels vots amb els votants identificats mitjançant codis secrets, de manera que cada votant pugui comprovar el seu vot, i qualsevol persona pugui aplicar el mètode establert i comprovar el resultat de la votació. Una altra entitat que també ha adoptat el mètode dels camins es la fundació Wikimedia, de la qual en depèn la coneguda Wikipèdia (vegi's [19]).

De tota manera, i tornant al mètode de votació pròpiament dit, la veritat és que el mètode dels camins és més aviat complex. Això no deixa de ser un inconvenient. En efecte, un mètode de votació que els votants no entenen prou bé tendeix a ser acusat de defectes que realment no té, i inclús pot donar peu a que els votants no acceptin els seus resultats. En aquest sentit, el mètode dels camins pot ser adient en certs àmbits, però no en altres.

Així doncs, una altra propietat desitjable que rivalitza amb les que hem vist és la simplicitat del mètode. Tot prioritzant aquesta propietat, darrerament s'han revaloritzat, i en certa mesura redescobert, mètodes com ara el vot d'aprovació [5] o les puntuacions mitjanes [17]. Tal com hem comentat a la §3, en principi aquests mètodes poden caure en la paradoxa de Borda, és a dir, donar la victòria a una opció que sigui considerada la pitjor per una majoria absoluta de l'electorat. Tanmateix, es pot argumentar que tals problemes desapareixen en un escenari que és habitual en les eleccions polítiques, a saber, quan els electors es mantenen informats sobre la intenció general de vot. La idea és que en tal situació els votants aniran ajustant el seu vot de manera que s'evitin resultats contraris al desig d'una majoria. Aquesta afirmació es pot fonamentar —en la mesura que es compleixin certes hipòtesis idealitzadores— mitjançant una anàlisi basada en la celebrada **teoria de jocs** (vegi's [14]).

D'altra banda, quan un vot consisteix en puntuar totes les opcions, llavors és interessant valorar cadascuna d'elles no tant per la seva puntuació mitjana, sinó per la seva **puntuació mediana**. La mediana d'una sèrie de quantitats ha estat definida a la §7, on aplicàvem aquesta noció a les posicions o números d'ordre d'una mateixa opció en les diverses ordenacions que allà donaven els electors. Els avantatges de la mediana respecte la mitjana indicats a la §7 valen també quan parlem de puntuacions en lloc de posicions, la qual cosa ha donat lloc a que recentment alguns autors defensin especialment el mètode de les puntuacions medianes [4].

Tanmateix, els mètodes de puntuació (inclòs el vot d'aprovació) només tenen sentit en la mesura que tots els votants vulguin dir el mateix per cada possible valor de l'escala de puntuació. Aquesta hipòtesi pot ser raonable en alguns casos, però normalment les votacions tenen a veure amb qualitats morals, psicològiques o estètiques dels candidats, l'apreciació de les quals és tan poc quantificable com poden ser-ho els sentiments de plaer o de dolor. En tals contextos, una afirmació com ara "a m'agrada en un grau 7 sobre 10" té un significat molt subjectiu. En canvi, una comparació qualitativa, és a dir una afirmació com ara "prefereixo a a b", vol dir el mateix per a tothom.

Així doncs, per regla general convé basar-se en preferències individuals de tipus qualitatiu. Si es vol primar la simplicitat, potser el més apropiat sigui utilitzar les *posicions* medianes —tal com ja apuntava Condorcet en 1792/93— junt amb algun dels procediments de desempat que hem descrit a la §7. En qualsevol cas, el que no hem de fer és contentar-nos amb el vot uninominal. Tal com diu una famosa frase atribuïda a Einstein, "Cal fer-ho tot tan simple com sigui possible, però no més simple".

16 Conclusions

1. Votar és una qüestió més complexa del que sembla a primera vista.
2. La votació uninominal té greus defectes.
3. Hi ha altres mètodes més encertats.
4. Les matemàtiques són essencials per a analitzar aquestes qüestions.

Referències

[1] *Accurate Democracy · Electoral and Legislative Voting Rules*, des de 1996. http://accuratedemocracy.com/

[2] Aureli Alabert, 2001. Sistemes electorals. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 16, n. 2 : 7–30.

[3] Bartolomé Barceló, 2007. Sistemes electorals. *MATerials MATemàtics*, 2007, n. 7, 23 pp. http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2007/v2007n07.pdf.

[4] Michel Balinski, Rida Laraki, 2007–2010?.
[*a*] A theory of measuring, electing, and ranking. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 104 : 8720–8725.
[*b*] *One-Value, One-Vote: Measuring, Electing and Ranking.* (En preparació).

[5] Steven J. Brams, 2008. *Mathematics and Democracy · Designing Better Voting and Fair-Division Procedures.* Princeton Univ. Press.

[6] Rosa Camps, Xavier Mora, Laia Saumell, 2009. (Enviat per a publicació).
[*a*] A continuous rating method for preferential voting. The complete case. http://arxiv.org/abs/0912.2190.
[*b*] A continuous rating method for preferential voting. The incomplete case. http://arxiv.org/abs/0912.2195.
[*c*] Fraction-like rates for preferential voting. http://arxiv.org/abs/1001.3931.

[7] *Debian Project*, 2006. *Debian Project Leader Elections 2006.* http://www.debian.org/vote/2006/vote_002.

[8] M. Drton, G. Hägele, D. Haneberg, F. Pukelsheim, W. Reif, 2001–2009. The Augsburg Web Edition of Llull's Electoral Writings. http://www.math.uni-augsburg.de/stochastik/llull/.

[9] *Electorama!* i *Election Methods Mailing List*, des de 1996. http://electorama.com/.

[10] *FairVote · The Center for Voting and Democracy*, des de 2002.
http://www.fairvote.org/

[11] Miguel Martínez Panero, José Luis García Lapresta, 2002. *José Isidoro Morales, precursor ilustrado de la teoría de la elección social · Edición facsímil de la Memoria Matemática sobre el Cálculo de la Opinión en las Elecciones (1797) y Apéndice (1805)*. Univ. de Valladolid.

[12] Iain McLean, Fiona Hewitt (eds.), 1994. *Condorcet. Foundations of Social Choice and Political Theory*. Edward Elgar.

[13] Iain McLean, Arnold B. Urken (eds.), 1995. *Classics of Social Choice*. The University of Michigan Press, Ann Arbor.

[14] William Poundstone, 2008. *Gaming the Vote. Why Elections Aren't Fair (and What We Can Do About It)*. Hill and Wang.

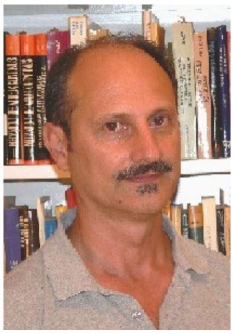
[15] Markus Schulze, 1997–2003.
[*a*] Publicat en la *Election Methods Mailing List*.
http://lists.electorama.com/pipermail/election-methods-electorama.com/1997-October/001545.html
(4 oct 1997)
(Vegi's també *ibidem* /1998-January/001577.html, 1 ene 1998).
[*b*] *Ibidem* /1998-August/002045.html (31 ago 1998).
[*c*] A new monotonic and clone-independent single-winner election method. *Voting Matters*, 17 (2003) : 9–19.

[16] Markus Schulze, 2003–2009. A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and Condorcet-consistent single-winner election method. En elaboració, disponible a http://m-schulze.webhop.net/schulze1.pdf.

[17] Warren D. Smith, Jan Kok, des de 2005. *RangeVoting.org · The Center for Range Voting*. http://rangevoting.org/.

[18] T. Nicolaus Tideman, 2006. *Collective Decisions and Voting: The Potential for Public Choice*. Ashgate Publishing.

[19] *Wikimedia Foundation*, 2009. *Board Elections · 2009 · Results*.
http://meta.wikimedia.org/wiki/Board_elections/2009/Results/en.



Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
xmora@mat.uab.cat

Publicat el 11 de febrer de 2010